

# Sprężystość i wytrzymałość.

Napisał

dr. inż. Maksymiljan T. Huber,

profesor politechniki, Lwów.

## I. Część ogólna.

**Wstęp.** Praktyczny cel tego działu mechaniki technicznej streszcza się w odpowiedzi na następujące pytania: Jakie zastosować rozmiary, postać i materiał dla pewnego elementu konstrukcyjnego, aby z pośród różnorodnych warunków technicznych, jakie winne być spełnione, uczynić zadość trzem następującym, zwykle najważniejszym:

1. Odształcenia elementu nie powinny przekraczać pewnych wielkości, podyktowanych jego przeznaczeniem. (Warunek sztywności.)
2. Zniweczenie spójności (pęknięcie, złamanie itp.) musi być wykluczone z dostatecznym stopniem bezpieczeństwa czyli dostateczną pewnością. (Warunek wytrzymałości.)
3. Koszta (budowy, utrzymania itd.) elementu powinny być jak najmniejsze. (Warunek ekonomji.)

**Uwaga.** Prócz powyższych warunków mają na rozmiar, postać i materiał elementu konstrukcyjnego mniejszy lub większy wpływ inne własności natury fizyczno-chemicznej, zależne od jego przeznaczenia, jak np. przewodnictwo cieplne, odporność na wpływy atmosferyczne, ogniotrwałość, przepuszczalność dla ciepła lub głosu u ścian budynków i stropów, a dla płynów lub gazów u ścian zbiorników itd.

Zwykle np. mury ceglane niewysokich budynków mogłyby być ze względu na warunki wytrzymałości znacznie cieńsze od powszechnie używanych, gdyby nie wzgląd na straty ciepła rosnące ze zmniejszeniem grubości na niekorzyść warunku ekonomji.

**1. Stan odkształcenia.** Pod wpływem sił wewnętrznych czyli napięć lub też innych przyczyn jak np. ogrzanie, wysychanie (u drewna), teżenie (u betonu) itp. doznaje każdy element konstrukcyjny zmiany postaci i wymiarów, czyli odkształca się. W wielu przypadkach zadowaliamy się podaniem najbardziej w oko wpadających objawów odkształcenia. Np. w prostym przecie rozciągany śledzimy jego wydłużenie, w belce zginanej jej ugięcie itd. Do zupełnego opisu odkształcenia ciała dzielimy je w myśli na elementy (nieskończenie małe), np. prostopadłościenne o krawędziach  $dx, dy, dz$  przed odkształceniem i wyznaczamy ich położenie i postać po odkształceniu. W nowe położenie przechodzi element ruchem złożonym wogóle z przesunięcia i obrotu (jak ciało sztywne); nową postać określają długości krawędzi  $dx(1 + \varepsilon_x), dy(1 + \varepsilon_y), dz(1 + \varepsilon_z)$  i kąty ścienne (przed odkształceniem proste)  $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{zx}\right)$ . Bardzo małe liczby (algebraiczne)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  określają stan odkształcenia, czyli odkształcenie właściwe w punkcie  $(x, y, z)$  ciała i stanowią sześć składowych tego odkształcenia. Składowe  $\varepsilon$  nazywamy wydłużeniami jednostkowymi (właściwymi), zaś składowe  $\gamma$  kątami odkształcenia postaciowego lub posunięciami (względniemi). Ujemnym wydłużeniem odpowiadają skrócenia krawędzi. Na fig. 115 przedstawiono (przesadnie) odkształcony element dla wygodnego porównania z pierwotną postacią tak, jak gdyby nie wykonał obrotu, a naroże  $O$  pozostało nieruchome.

Wyrazu „odkształcenie“ używamy w dwojakim znaczeniu: 1. ogólniej-  
szem, jako łączną zmianę położenia i postaci elementów ciała, 2. ciśnie-  
j-  
szem, jako samą tylko zmianę postaci każdego z elementów z osobna (od-  
kształcenie właściwe).

Jeżeli składowe odkształcenia właściwego są dla każdego punktu ciała jednakowe, to odkształcenie nazywamy jednorodnem. W nieskończenie małych obszarach ciała można zawsze uważać odkształcenie za jednorodne. Wówczas obszar pierwotnego kształtu kuli o promieniu  $\rho$  zamienia się na elipsoidę, o półosiach  $\rho(1 + \varepsilon_1)$ ,  $\rho(1 + \varepsilon_2)$ ,  $\rho(1 + \varepsilon_3)$ . Kierunki tych osi nazywamy głównymi kierunkami odkształcenia, a liczby  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  głównymi wydłużeniami jednostkowymi. Dla elementu prostokątnego zorientowanego w kierunkach głównych mają kąty odkształcenia postaciowego wartość 0. W każdym odkształconem ciele można wyznaczyć trzy układy prostokątne krzywych, mających tę własność, że styczne do nich wskazują

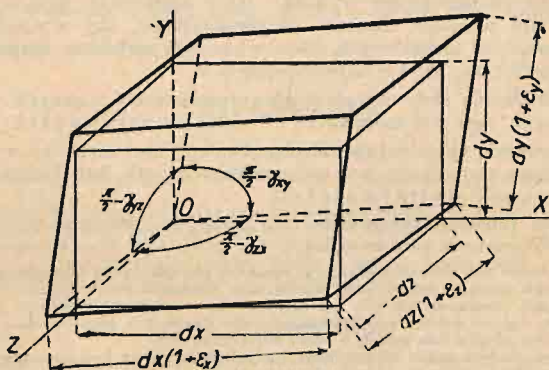


Fig. 116.

główne kierunki odkształcenia w punkcie styczności. Nazywamy je trajektorjami odkształceń (głównych) lub linjami izostatyicznymi.

Każde odkształcenie jednorodne da się rozłożyć na a) odkształcenie objętościowe, przy którym kula zamienia się na kulę nieco większą lub mniejszą, i b) odkształcenie postaciowe, przy którym kula zamienia się na elipsoidę o tej samej objętości. Stosunek zmiany objętości do objętości pierwotnej, czyli rozszerzenie (wzgl. skurczenie) objętościowe właściwe  $\Theta$  określa równanie:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Przy każdym odkształceniu postaciowym jest  $\Theta = 0$ .

Szczególne proste rodzaje odkształcenia jednorodnego są:

a) Proste wydłużenie lub skrócenie (odkształcenie jednowymiarowe, czyli linjowe) w pewnym kierunku. Skoro np. ten kierunek jest równoległy do osi  $x$ , to wartość  $\varepsilon_x$  wyznacza dokładnie rozpatrywane odkształcenie, gdyż wszystkie pozostałe składowe są równe 0.

b) Proste odkształcenie postaciowe czyli proste posunięcie (fig. 116), jeżeli tylko jedna para ścian równoległych sześciangu elementarnego zamienia się na romby o kątach  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ , przyczem  $\gamma$  jest (bardzo małym) kątem odkształcenia postaciowego. (Pozostałe kąty i wydłużenia krawędzi są równe 0). Proste odkształcenie postaciowe jest równoważne z prostym wydłużeniem  $+\varepsilon$  i skróceniem  $-\varepsilon$  w kierunkach wzajemnie prostopadłych i nachylonych



do ścian nieodkształconych pod kątem  $45^\circ$ , przeczem  $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ . Każde odkształcenie jednorodne da się rozłożyć na trzy proste wydłużenia w określonych kierunkach wzajemnie prostopadłych.

## 2. Stan napięcia.

Wzajemne działanie sił molekularnych po obu stronach elementu płaskiego przekroju o polu  $dF$ , pomyslanego wewnątrz ciała, da się określić przez napięcie, tj. przez siłę powierzchniową  $\overline{dS}$ , wogóle nachyloną do elementu i przechodzącą przez jego

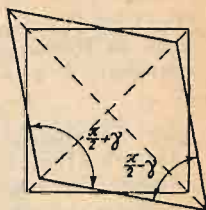
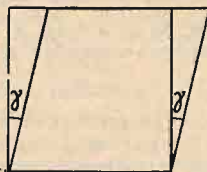
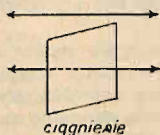
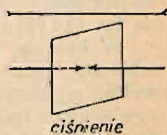


Fig. 116.

środek. Iloraz różniczkowy  $\overline{dS}/dF$  nazywamy naprężeniem (albo natężeniem) w elemencie  $dF$ . Rozkładamy je na naprężenie normalne  $\sigma$  i styczne (ścinające)  $\tau$  do elementu. Wymiarem naprężeń są:  $kg/cm^2$ , czyli „nowa atmosfera”, albo  $kg/mm^2$  itp. Naprężenia normalne są ciagnieniami lub ciśnieniami, zależnie od tego, czy siły molekularne cząsteczek po obu stronach przekroju działają przyciągająco, czy też odpychająco (fig. 117). Wykreślenie należałoby przedstawiać naprężenia (normalne lub całkowite) odcinkami ze strzałkami na obu końcach („tensorami”); w rozważaniach statycznych traktujemy je najczęściej jako siły zastępujące działanie odciętej w myśli części ciała na część rozpatrywaną. Rachując naprężeniami normalnymi przyjmujemy dla ciagnień znak  $+$ , a dla ciśnień  $-$ . (Fizycy posługują się umową odwrotną. To samo robimy zazwyczaj dla wygody rachunku przy obliczeniu sklepień).



ciągnienie



ciśnienie

Fig. 117.

W płaskim przekroju o skończonym polu  $F$  określa wielkość składowej normalnej napięcia (siły wewnętrznej) wyrażenie:

$$S = \int_{(F)} \sigma dF.$$

Do określenia składowej stycznej napięcia potrzeba dwu wielkości odpowiadających dwu składowym naprężeniom stycznym wziętym w dwu dowolnych wzajemnie prostopadłych kierunkach, obranych w płaszczyźnie przekroju. Oznaczwszy te ostatnie przez  $\tau_1$  i  $\tau_2$  mamy dla wyznaczenia pierwszych wyrażenie:

$$T_1 = \int_{(F)} \tau_1 dF, \quad T_2 = \int_{(F)} \tau_2 dF.$$

Gdy rozkład naprężeń w płaskim przekroju jest równomierny, czyli gdy  $\sigma, \tau_1, \tau_2$  są stałe, to napięcie (siłę wewnętrzną) określa algebraiczna wielkość składowej normalnej  $S$  i wielkość, oraz kierunek składowej stycznej  $T$ . Przytem jest:

$$\sigma = \frac{S}{F}, \quad \tau = \frac{T}{F} \quad (\text{jeżeli } \tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}).$$

Ogół naprężeń we wszystkich elementach płaskich przechodzących przez obrany punkt ciała określa stan napięcia w tym punkcie. Z powodu wpływającej z prawideł statyki wzajemnej zależności naprężeń w różnych przekrojach elementarnych, wyznaczają stan napięcia w punkcie  $(x, y, z)$

ciała trzy naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , i sześć składowych naprężeń stycznych  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}; \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$  w trzech przekrojach elementarnych równoległych do płaszczyzn współrzędnych. Przytem oznacza wskaźnik np  $x$  przy  $\sigma_x$ , że to jest naprężenie normalne w przekroju prostopadłym do osi  $x$ ; zaś przy  $\tau_{xy}$ , np. oznacza pierwszy wskaźnik  $x$ , że to jest naprężenie na ścianie prostopadłej do  $x$ , a drugi  $y$ , że kierunek naprężenia jest równoległy do  $y$ . Z momentowych warunków równowagi wypływa, że

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz};$$

czyli: Składowe prostopadłe naprężeń stycznych w dwu przekrojach elementarnych wzajemnie prostopadłych są zawsze równe. (Prawo równości odpowiadających naprężeń stycznych).

Ważne wnioski: a) Jeżeli na powierzchnię ciała działają tylko siły normalne (jak to najczęściej bywa), to w skrajnych zewnętrznych elementach pola jakiegokolwiek przekroju (normalnego do powierzchni) ma całkowite naprężenie styczne kierunek równoległy do konturu przekroju. A więc:

b) Gdzie kontur przekroju się załamuje, tworząc kąt  $< 180^\circ$ , tam jest przy powyższem założeniu zawsze  $\tau = 0$ . (Np. w  $A$  i  $A'$  na fig. 118 a). Natomiast w załomach konturu przekroju o kącie wewnętrznym  $> 180^\circ$  może być  $\tau \leq 0$ . (Np. w  $B$  i  $B'$  na fig. 118 b).

W każdym punkcie ciała można poprowadzić takie trzy przekroje elementarne wzajemnie prostopadłe, w których niema naprężeń stycznych. Odpowiadające im naprężenia normalne nazywamy naprężeniami głównymi. Stan napęcia w dowolnym punkcie ciała określają tedy kierunki wiel-



Fig. 118 a.

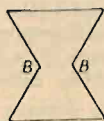


Fig. 118 b.

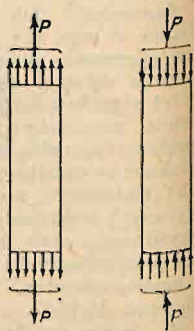


Fig. 119.

kości trzech naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Jedno z nich jest (algebraicznie) największe, a drugie najmniejsze. Największe naprężenie ścinające równe połowie (algebraicznej) różnicy naprężeń głównych panuje w płaszczyźnie tworzącej z płaszczyznami tych naprężeń kąty  $45^\circ$ .

Szczególnie proste stany napęcia są:

a) Linjowy lub jednoosiowy, czyli proste rozciąganie lub ściskanie, jeżeli tylko jedno z naprężeń głównych jest różne od 0. Taki stan zachodzi zwykle u prętów lub słupów pryzmatycznych obciążonych siłami normalnymi i rozłożonemi równomiernie na podstawach (fig. 119).

b) Dwuwymiarowy czyli płaski stan napęcia, jeżeli dwa z naprężeń głównych np.  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są różne od 0 (fig. 120 a). Wówczas niema naprężeń w płaszczyznach równoległych do  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a naprężenie normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$  w płaszczyźnie prostopadłej do tamtych i nachylonej pod kątem  $\varphi$  do  $\sigma_1$  wyznacza „koło naprężeń” (O. Mohr).

3. Konstrukcja koła naprężeń. Na dowolnej osi  $x$  (fig. 120 b) odcinamy  $OA = \sigma_1$ ,  $OB = \sigma_2$ , i na  $AB$  jako średnicy zakreślamy koło. Aby znaleźć naprężenia w przekroju  $SS'$ , którego normalna tworzy z kierunkiem  $\sigma_1$  (wzgl.  $\sigma_2$ ) kąt (ostry)  $\varphi$ , odmierzamy od punktu  $A$  (wzgl.  $B$ ) łuk koła  $AP$  odpowiadający kątowi  $2\varphi$ . Odcięta  $OP'$  punktu  $P$  będzie naprężeniem normalnym  $\sigma$



przekroju  $SS'$ , zaś rzędna  $PI''$  naprężeniem stycznym  $\tau$  w tymże przekroju. Odpowiadające wzory analityczne:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi$$

wypływają z warunku równowagi elementu o dwu ścianach równoległych do przekrojów głównych, a trzeciej równoległej do  $SS'$ .

Kolo naprężeń może służyć do bardzo wygodnego rozwiązania nast. zadania: Dane są naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y$  i styczne  $\tau$  w dwu dowolnych przekrojach wzajemnie prostopadłych; znaleźć położenie przekrojów głównych i wielkości naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Rozwiązanie (fig. 121): Obracamy prostokątny układ współrzędnych wyznaczmy punkt  $P_1$  o współrzędnych  $(\sigma_x, \tau)$  i  $P_2$  o współrzędnych  $(\sigma_y, -\tau)$ ; łączymy  $P_1$  z  $P_2$  i ze środka  $C$  odcinka  $P_1 P_2$ , leżącego widocznie na osi  $x$ , zakreślamy koło promieniem  $\frac{1}{2} P_1 P_2$ . To koło wyznacza na osi  $x$  naprężenia główne  $OA = \sigma_1$ ,  $OB = \sigma_2$ , które zachodzą w przekrojach nachylonych do danych pod kątem  $-\varphi_0$ , przyczem  $2\varphi_0 = \angle P_1 C X$ . Ich wartości określa wzór:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}.$$

**4. Jednorodny i niejednorodny stan napięcia.** Ogólne związki między składowymi stanu napięcia. Jeżeli stan napięcia jest we wszystkich punktach ciała jednakowy (tj. wszystkie trzy naprężenia główne stałe co do kierunku i wielkości), to nazywamy go jednorodnym albo równomiernie rozłożonym. Szczególnie prosty stan tego rodzaju panuje zwykle w pryzmatycznych pretach rozciąganych lub ściskanych osiowo siłami  $P, P$ . Wtedy naprężenie główne  $\sigma_1$  ma kierunek osi

pręta i wartość  $\sigma = \pm \frac{P}{F}$ , zaś  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Innego przykładu dostarcza ciało jednolite i równokierunkowe dowolnego kształtu zanurzone w płynie, na którego powierzchnię wywieramy stałe ciśnienie  $p$ . Wówczas  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$  i mówimy o wszechstronnym równomiernym ściskaniu ciała.

Prosty przykład niejednorodnego stanu napięcia widzimy w prostym przecie pionowym obciążonym ciężarem własnym. W ogólnym niejednorodnym stanie napięcia są składowe  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  funkcjami współrzędnych

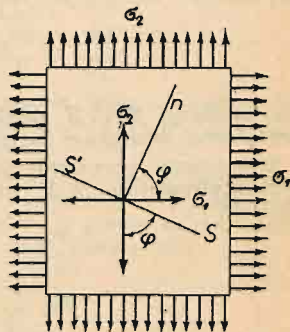


Fig. 120 a.

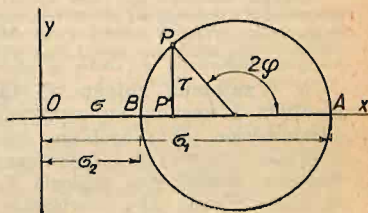


Fig. 120 b.

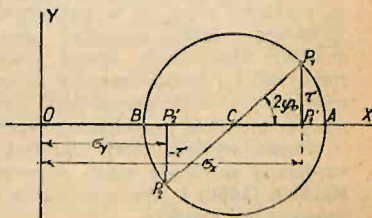


Fig. 121.

$x, y, z$ , które muszą czynić zadość trzem następującym równaniom różniczkowym wypływającym z warunków równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\gamma}{g} X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} Z = 0.$$

Tutaj oznaczają  $X, Y, Z$  składowe siły masowej (np. siły ciężkości, siły bezwładności) odniesionej do jednostki masy, zaś  $\gamma/g$  gęstość.

Te równania sprowadzają się w przypadku dwuwymiarowego stanu napięcia w płaszczyźnie  $XY$  (warunek konieczny  $Z = 0$ ), do dwu następujących:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} Y = 0.$$

Uwaga. Wszystkie powyższe wyniki w ust. 1—4 są niezależne od natury rozpatrywanych ciał i opierają się jedynie na uproszczonem założeniu ciągłości materji, tudzież na prawach mechaniki ogólnej. Ponieważ materja ma w rzeczywistości budowę nieciągłą (molekularną), przeto nie należy się dziwić pojawianiu się, aczkolwiek nader rzadkiemu, pewnych sprzeczności wniosków teoretycznych z wynikami doświadczeń.

**5. Wzajemna zależność stanu odkształcenia i napięcia. Prawo Hooke'a i zasada superpozycji skutków.** Tak w przypadku dwuwymiarowego jak i ogólnego stanu napięcia nie wystarczają widocznie równania równowagi do rozwiązania ogólnego zadania: Dane są siły zewnętrzne, znaleźć stan napięcia. Liczba niewiadomych jest bowiem większa od liczby równań. Aby rozwiązanie znaleźć posługujemy się głównie dwiema drogami. — Pierwsza, dawniejsza, elementarna polega na dodatkowych możliwie prostych i popartych doświadczeniem hipotezach (przyjęciach) co do rozkładu naprężeń w rozpatrywanych przekrojach ciała. (Np. przyjęcie linowego rozkładu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym belki dowolnie obciążonej). Druga nowsza opiera się na matematycznej teorii sprężystości i rozpowszechnia się coraz bardziej, dzięki znalezieniu ścisłych rozwiązań w wielu przypadkach praktycznego znaczenia, a zwłaszcza dzięki nowym metodom przybliżonego rozwiązywania zadań szczegółowych.

Punkt wyjścia teorii sprężystości ujmującej w formę matematyczną wzajemną zależność stanu odkształcenia i stanu napięcia stanowi prawo Hooke'a (1660) i jego uogólnienie, które jest zastosowaniem t. zw. zasady superpozycji skutków.

Prawo Hooke'a opiewa: Odkształcenie uwarunkowane napięciem  $S$  jest doń proporcjonalne.

Uogólnienie zaś brzmi: Składowe stanu odkształcenia są linowymi, jednorodnymi funkcjami składowych stanu napięcia (i nawzajem).

Zasada superpozycji skutków da się wysłowić w następujący sposób: Jeżeli z przyczyn tego samego rodzaju, określonych wielkościami  $\bar{P}, \bar{P}', \dots$  każda z osobna wywołuje na danym układzie materjalnym skutek, określony odpowiadającymi wielkościami  $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \dots$  to wszystkie przyczyny razem wywołują skutek określony sumą:  $\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}' + \dots$  (geometryczną lub algebraiczną zależnie od charakteru wielkości  $\bar{\varepsilon}$ ).



Ważność uogólnionego prawa Hooke'a jest warunkiem koniecznym stosowania zasady superpozycji do obciążeń i wywołanych nimi odkształceń układu, atoli wogóle nie jest warunkiem wystarczającym. (Np. wzajemne zbliżenie końców pręta lekko zakrzywionego pod wpływem podłużnych sił ściskających nie jest proporcjonalne względem ich wielkości, chociaż materiał pręta podlega prawu Hooke'a).

Najprostszą postać przybiera prawo Hooke'a w przypadku linowego stanu napięcia, np. przy rozciąganiu lub ściskaniu prostego pręta. Wówczas przy naprężeniu  $\sigma$  powstaje wydłużenie jednostkowe:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

przyczem stała  $E$  charakterystyczna dla materiału pręta, o wymiarze naprężenia ( $\text{kg/cm}^2$ ), nosi nazwę: moduł wydłużenia (moduł Younga) albo (pierwszy) współczynnik sprężystości.

Doświadczenie poucza, że przy prostym rozciąganiu (lub ściskaniu) pręta naprężeniem  $\sigma$  powstaje także odkształcenie poprzeczne  $\varepsilon'$  o znaku przeciwnym odkształceniu podłużnemu  $\varepsilon$  i stosownie do prawa Hooke'a również proporcjonalne względem  $\sigma$ , a więc i względem  $\varepsilon$ . Piszemy tedy:

$$\varepsilon' = -\frac{1}{m} \varepsilon = -\frac{1}{m} \frac{\sigma}{E}.$$

Liczbę stałą  $\frac{1}{m}$  właściwą materiałowi nazywamy liczbą Poisson'a. Jeżeli z dużej bryły danego materiału wytniemy pręty próbne rozmaicie zorientowane i dla każdego znajdziemy te same wartości stałych  $E$  i  $m$  to materiał jest równokierunkowy (izotropowy). Z wyjątkiem drewna można wszystkie prawie materiały konstrukcyjne uważać z większym lub mniejszym przybliżeniem za równokierunkowe. Wszystkie zaś bez wyjątku podlegają prawu Hooke'a, jednakże w nader różnych granicach. Granice ważności prawa Hooke'a nazywamy granicami proporcjonalności. Należałoby je mierzyć tą największą wartością wydłużenia właściwego (skrócenia), przy której zachodzi jeszcze proporcjonalność względem siły rozciągającej (ściskającej), albowiem ściśle biorąc tylko te wielkości dają się obserwować, a naprężenia można tylko obliczać, dzieląc siłę przez pole pierwotnego przekroju, który podczas wydłużenia pręta nieco się zmniejsza. Zważywszy jednak, że ta zmiana przekroju jest (wyjawszy kauczuk) bardzo niewielka, określamy zazwyczaj granicę proporcjonalności wartością naprężenia, powyżej którego dostrzegamy zboczenia od prawa Hooke'a.

Przy ogólnym (trójwymiarowym) stanie napięcia materiału równokierunkowego zlewają się kierunki naprężeń głównych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  z kierunkami wydłużeń głównych  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$ , przyczem na podstawie prawa Hooke'a i zasady superpozycji zachodzą związki:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_3 + \sigma_1) \right],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2) \right].$$

Z dodania tych równań wynika wzór dla rozszerzenia (skurczenia) objętościowego:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2}{m} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Przy wszechstronnem równomiernem ściskaniu jest  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ , a więc  $\Theta = -3 \frac{m-2}{mE} \cdot p$ , czyli materiał się kurczy gdy liczba  $m > 2$ . Tak się zachowują prawie wszystkie ciała stałe.

Gdy  $m = 2$ , to przy każdej wartości naprężeń  $\sigma$  jest  $\Theta = 0$ . Taki materiał nazywamy nieściśliwym. W przybliżeniu jest nim kauczuk, ołów i parafina. Nie znamy w przyrodzie materiałów dla których  $m < 2$ , czyli takich, któreby przy wszechstronnem ściskaniu pęczniały.

Uwaga. Przy obliczaniu naprężeń z danych obciążeń nie uwzględniamy z reguły zmiany pola przekroju wywołanej odkształceniem (poprzecznym) jako wielkości zazwyczaj bardzo małej.

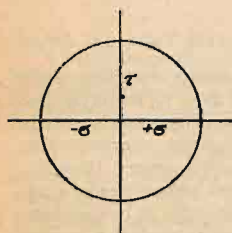
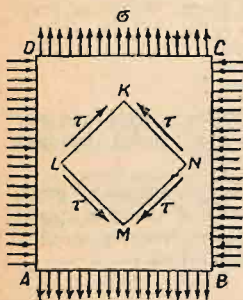


Fig. 122.

6. Proste odkształcenie postaciowe i proste ścinanie. Równania teorii sprężystości. Jeżeli w dwuwymiarowym stanie napięcia jedno naprężenie główne jest ciągnieniem  $\sigma$  a drugie ciśnieniem o tej samej wielkości ( $-\sigma$ ), to w przekrojach nachylonych do głównych pod kątem  $45^\circ$ , panują tylko naprężenia styczne  $\tau$  o tej samej wielkości co  $\sigma$ . Taki stan napięcia nazywamy prostym ścinaniem. Przy ważności prawa Hooke'a jest odpowiadające odkształcenie czysto postaciowe i określa je zmiana kąta prostego w kwadracie  $KLMN$  (fig. 123), tj.

$$\gamma = 2\varepsilon = 2 \left( \frac{\tau}{E} + \frac{1}{m} \frac{\tau}{E} \right) = \frac{2(m+1)}{mE} \tau.$$

A zatem: Kąt odkształcenia postaciowego jest proporcjonalny względem odpowiadającego naprężenia stycznego, czyli

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ przy czem } G = \frac{m}{2(m+1)} E \quad \dots (a)$$

Spółczynnik proporcjonalności  $G$  jest znowu stałą charakterystyczną dla materiału (o wymiarze  $\text{kg/cm}^2$ ) i nazywa się modulem ścinania (także modulem skręcenia z powodów wyjaśnionych w teorii skręcenia) albo spółczynnikiem sprężystości postaciowej. Wyznacza się go zwykle bezpośrednio z doświadczeń nad skręceniem okrągłych prętów, a następnie oblicza liczbę Poisson'a ze związku (a).

W ogólnym stanie napięcia, określonym składowymi  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , wypadają tedy dla składowych stanu odkształcenia (przy ważności prawa Hooke'a) wyrażenia następujące:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{2(m+1)}{mE} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}$$

Te równania pozwalają nawzajem 6 składowych stanu napięcia wyrazić przez tyleż składowych stanu odkształcenia, które znowu dają się przedstawić jako następujące proste wyrażenia różniczkowe trzech składowych  $u, v, w$  przemieszczenia punktu ciała  $x, y, z$ :



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

(Trzy ostatnie równania są ściśle tylko przy założeniu, że  $u, v, w$  są nieskończenie małe wobec  $x, y, z$ .)

Wyraziwszy zapomocą powyższych związków naprężenia przez  $u, v, w$  i stałe sprężystości i wstawivszy znalezione wyrażenia w równania równowagi (art. 4), otrzymujemy podstawowe trzy równania różniczkowe, klasycznej teorii sprężystości ciał jednolitych, równokierunkowych i podległych prawu Hooke'a w postaci:

$$\nabla^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{X}{G} = 0,$$

$$\nabla^2 v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\gamma}{g} \frac{Y}{G} = 0,$$

$$\nabla^2 w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\gamma}{g} \frac{Z}{G} = 0,$$

przyczem  $\nabla^2$  jest skróconym symbolem t. zw. operacji Laplace'a, określonej symbolicznem równaniem:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

zaś

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Te równania w połączeniu z poprzedniami i warunkami krańcowymi pozwalają już, przynajmniej teoretycznie, rozwiązać zadanie: Dane są postać, materiał i siły zewnętrzne elementu konstrukcyjnego w równowadze; znaleźć odkształcenia i naprężenia. Skoro uda się znaleźć bodaj przybliżone rozwiązanie, to po doświadczalnym sprawdzeniu wyników możemy dla praktyki technicznej dostarczyć pewnej wskazówki tylko co do warunku sztywności, oczywiście o ile wolno pominąć zboczenia od prawa Hooke'a, a zarazem o ile znaleziona odkształcona postać równowagi jest stateczną (stałą). Nader ważny warunek stateczności może nie być spełniony zwykle tylko wtedy, gdy jeden lub dwa wymiary elementu konstrukcyjnego są małe wobec innych (smukłe słupy, cienkie płyty i ściany naczyń). Z niespełnieniem tego warunku mamy do czynienia w dobrze znanem zjawisku wyboczenia prętów osiowo ściskanych, zakłębienia rur płomiennych w kotłach pod ciśnieniem itp. (Ob. rozdz. VIII. i IX.).

**7. Wyteżenie materiału przy prostem rozciąganiu i ściskaniu. Granica sprężystości. Granica plastyczności.** Rozwiązania znalezione przy pomocy teorii sprężystości nie wystarczają jeszcze do zawyrokowania, czy konstrukcja czyni zadość warunkowi wytrzymałości; do tego bowiem trzeba znać zależność niebezpieczeństwa pęknięcia od stanu odkształcenia i napięcia. Wielkość, mierzącą niebezpieczeństwo pęknięcia, nazywamy wyteżeniem materiału. Podobnie jak zależność stanu odkształcenia od stanu napięcia znaleziono doświadczalnie i na prawie Hooke'a oparto teorię sprężystości, tak też doświadczalnie należało zbadać zależność wyteżenia materiału od jego stanu odkształcenia i napięcia, aby zbudować teorię wytrzymałości. Ten podstawowy problem technicznej nauki o wytrzymałości okazał się w całej ogólności niezmiernie trudny i zawili. Jest nawet wielce wątpliwe, czy objawy wytrzymałości dadzą się dla każdego z materiałów przed-

stawić stałymi charakterystycznymi dlań i czy nie zależą także od rozmieszczenia odkształceń i naprężeń w skończonym obszarze ciała. Trudności eksperymentalnego badania są olbrzymie. (Niemożliwość bezpośredniego pomiaru naprężeń, nieskończona różnorodność stosunków naprężeń i odkształceń głównych, ogromna trudność zrealizowania określonego jednorodnego stanu napięcia itd.) To też dostateczny zasób doświadczeń mamy jedynie dla nader prostego, a zarazem ważnego przypadku linowego stanu napięcia, łatwego do zrealizowania na prostych prętach. Doświadczenia nad rozciąganiem lub ściskaniem prętów ujawniają nadto inne ważne własności materiałów, dające się odczytać z wykresu (fig. 123), który się sporządza, odcierając jako odcięte wydłużenia właściwe pręta  $\epsilon$ , a jako rzędne odpowiadające im naprężenia  $\sigma$ , obliczane jako iloraz z siły rozciągającej  $P$  przez pole pierwotnego przekroju  $F$ . Część prosta linii wykresu od początku współrzędnych odpowiada ważności prawa Hooke'a. Punkt, w którym zaczyna się linia zakrzywiać, odpowiada granicy proporcjonalności. Skoro od pewnego punktu obciążenie powoli zmniejszamy i notujemy odpowiadające wartości  $\epsilon$  i  $\sigma$ , to otrzymujemy wykres odwrotny. Jeżeli ten wykres zlewa się dokładnie z poprzednim, to materiał okazuje (w rozpatrywanym przedziale

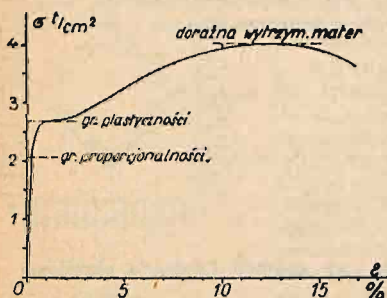


Fig. 123.

odkształceń i naprężeń) sprężystość zupełną czyli doskonałą. Jeżeli nie, to tylko część odkształcenia, zwana odkształceniem sprężystym, znika po usunięciu obciążenia, a reszta pozostaje nadal jako odkształcenie trwałe (nie-sprężyste, plastyczne). Ten punkt wykresu, od którego począwszy pojawiają się dostrzegalne odkształcenia trwałe, określa granicę sprężystości. Ponieważ jego obserwacja jest bardzo trudna, przeto w doświadczeniach technicznych wyznacza się zwykle t. zw. „praktyczną granicę sprężystości“, przy której odkształcenie trwałe jest określone przez umowę małym ułamkiem odkształcenia całkowitego. Praktyczna granica sprężystości leży oczywiście zawsze powyżej granicy teoretycznej i nie ma istotnego związku z granicą proporcjonalności, jakkolwiek obie granice leżą bardzo blisko siebie u żelaza kowalnego i stali.

Przy dalszym powolnym wzroście naprężenia  $\sigma$  (po przekroczeniu granicy sprężystości) zachowują się materiały rozmaicie. Można je podzielić na dwie główne grupy: materiały plastyczne i kruche. Do pierwszej należą przede wszystkim wszelkie rodzaje żelaza kowalnego, miękkiej stali i innych metali plastycznych, do drugiej żelazo lane, twarda stal, szkło, kamienie naturalne i sztuczne.

U najważniejszych technicznie materiałów pierwszej grupy pojawia się w wykresie powyżej granicy proporcjonalności i sprężystości gwałtowne przejście w linię mniej więcej równoległą do osi odkształceń. To odpowiada znacznemu wzrostowi odkształceń trwałych bez zmiany wielkości naprężenia  $\sigma_f$ . Materiał „płyynie“, jak lód w lodowcu górskim pod wpływem stałej siły ciężkości. Wartość  $\sigma_f$  określa granicę plastyczności (gr. płynięcia, gr. ciastowatości). Płynięcie kończy się dość rychło i dalszy wzrost odkształcenia przy rozciąganiu wymaga znowu zwiększenia obciążenia. To zjawisko charakterystyczne dla żelaza i innych metali nazywają wzmocnieniem lub stwardnieniem materiału wskutek odkształceń plastycznych o zwykłej temperaturze („obróbką na zimno“). Zwiększanie obciążenia osiąga kres w najwyższym punkcie wykresu. Wówczas odkształcenie pręta przestaje być jednorodnym i w pewnym



jego miejscu pojawia się t. zw. szyjka (fig. 124), zapowiadająca pęknięcie w najwęższym przekroju. To pęknięcie zachodzi przy obciążeniu mniejszem od poprzedzającego wytworzenie się szyjki, już choćby z tego powodu, ponieważ przekrój szyjki jest znacznie mniejszy od przekroju reszty pręta.

Przy ścisaniu występuje również granica plastyczności, ale nie pojawia się szyjka, ponieważ podłużnemu skurczeniu pręta towarzyszy poprzeczne rozszerzenie przekroju. Wskutek tego rzeczywista wartość naprężeń maleje, chociaż zwiększamy obciążenie po osiągnięciu granicy plastyczności, albowiem przekrój rośnie prawie bez ograniczenia.



**8. Doraźna wytrzymałość na rozciąganie i na ściskanie. Miara plastyczności metali. Pewność.** Odniesione do pierwotnego przekroju największe naprężenie, jakiego doznawał pręt przy rozciąganiu, określa jego doraźną wytrzymałość na rozciąganie  $K_r$ . Ponieważ doświadczenia wykazały w dość obszernych granicach przybliżoną niezależność wielkości  $K_r$  od postaci i wielkości przekroju prętów pryzmatycznych z tego samego materiału, przeto uważamy  $K_r$  za stałą charakterystyczną dla materiału pręta i w tym znaczeniu mówimy o doraźnej wytrzymałości danego materiału Fig. 124. przy rozciąganiu. Z powodów wyżej wyliczonych nie wyznaczamy do świadczalnie doraźnej wytrzymałości materiałów plastycznych przy ścisaniu  $K_c$ , lecz przyjmujemy ją praktycznie równą  $K_r$ .

Materiały drugiej grupy (materiały kruche) nie mają granicy plastyczności i przy bardzo nieznacznych odkształceniach trwałych pękają przy wartości ciążnienia  $K_c$  lub ciśnienia  $K_c$  przekraczających niezbyt wiele odpowiadające granice sprężystości. Nadto jest u nich  $K_c$  najczęściej o wiele większe od  $K_r$ .

Odrębne stanowisko zajmuje drewno, które dzięki swej strukturze jest materiałem w wysokim stopniu nierównokierunkowym a nawet niejednolitym i posiada różną sprężystość i wytrzymałość w różnych kierunkach. W kierunku równoległym do włókien jest  $K_c$  znacznie mniejsze od  $K_r$ . Drewno nie ma granicy plastyczności, ale jest zdolne do dość znacznych odkształceń trwałych.

Plastyczność metali (zdolność do odkształceń trwałych) ocenia się przy próbach rozrywania w ten sposób, że po przerwaniu stula się obie części pręta możliwie dokładnie i mierzy odległość  $l'$  dwu kresek wyznaczających długość pierwotną  $l$  badanej części pręta. Wartość:

$$\varphi = 100 \cdot \frac{l' - l}{l},$$

wyrażająca w odsetkach rozciągnięcie trwałe pręta, jest wcale dobrą miarą plastyczności materiału. Inną równie dobrą, lecz mniej wygodną miarą plastyczności jest

$$\psi = 100 \cdot \frac{F' - F''}{F'}$$

jeżeli  $F''$  oznacza pole przekroju przerwanego w szyjce. Liczba  $\psi$  wyraża w odsetkach poprzeczne plastyczne skurczenie pręta. Sprawa wyteżenia materiału jest w przypadku prostego rozciągania lub ściskania nadzwyczaj prosta. Ponieważ odkształcenie  $\epsilon$  rośnie i maleje z wielkością naprężenia  $\sigma$  przeto tak  $\epsilon$ , jak i  $\sigma$  może służyć za miarę wyteżenia. Ze względów praktycznych mierzymy od dawna wyteżenie wartością naprężenia  $\sigma$ , jakie rzeczywiście zachodzi w elemencie konstrukcyjnym przy najniekorzystniejszym obciążeniu.

Stosunek doraźnej wytrzymałości materiału  $K$  do rzeczywiście zachodzącego naprężenia  $\sigma$  określa stopień bezpieczeństwa czyli pewność  $n$  przeciwko pęknięciu. Tę samą wartość  $n$  daje oczywiście stosunek siły łamiącej

(rozrywającej lub zginiatającej)  $P_w$  do rzeczywistej siły osiowej pręta  $P$  (obciążenia użytkowego).

$$n = \frac{K}{\sigma} = \frac{P_w}{P}.$$

Obierając dla pewnego elementu konstrukcyjnego z danego materiału liczbę  $n > 1$  ustalamy tem samem wartość  $\sigma$  uznaną za bezpieczną:

$$k = \frac{K}{n}.$$

Takie ustalenie naprężenia bezpiecznego (dopuszczalnego) może być wystarczające dla materiałów kruchych; u materiałów plastycznych musimy wykłuczyć pojawienie się wyraźnych odkształceń trwałych, czyli musimy mieć  $n$ -krotną pewność przeciwko przekroczeniu granicy plastyczności  $\sigma_f$ . Wtedy:

$$k = \frac{\sigma_f}{n'}.$$

przyczem  $n'$  może być znacznie mniejsze od  $n$ , albowiem  $K > \sigma_f$  (u żelaza zlewne np. odpowiada 2,5-krotnej pewności przeciw przekroczeniu granicy plastyczności, 4-krotna pewność przeciw rozerwaniu).

9. Wpływ powtarzania i wahania obciążeń na wyteżenie. Obciążenie dzielimy na stałe i zmienne. W przypadku obciążeń zmiennych wartość doraźnej wytrzymałości nie decyduje o wyteżeniu materiału, albowiem doświadczenia wielu badaczy, poczynawszy od Wöhler'a (1870) wykazały, że zmienność obciążenia obniża z reguły granicę wytrzymałości materiału w porównaniu do wytrzymałości doraźnej. Z tego powodu wielkość  $\sigma_{\text{bezp}}$  przy obciążeniu zmiennem należy obierać mniejszą, niż przy obciążeniu stałym, przestrzegając następujących reguł, wynikających z doświadczeń nad żelazem kowalnym i stalą.

1. Różnica  $k^{(0)} - k$  czyli obniżenie wartości  $k$  w porównaniu w wartości  $k^{(0)}$ , odpowiadającą stałemu obciążeniu, a więc doraźnej wytrzymałości, ma być tem większe, im większą jest różnica  $\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}$ , pojmowana algebraicznie.

2. To obniżenie nie zależy od częstości zmian obciążenia, którym podlega pręt w konstrukcji, w granicach 60–800 zmian na minutę; atoli przy częstościach powyżej 800–2400 wzrasta z częstością dość znacznie (według doświadczeń O. Reynolds'a i J. H. Smith'a), aby przy jeszcze większych częstościach (do 7000 według B. Hopkinson'a) znowu wyraźnie zmaleć.

Wielkie częstości zmian obciążenia występują nierzadko w elementach maszynowych, podczas gdy w budowlanych mamy do czynienia zwykle z częstościami jeszcze znacznie mniejszemi od stosowanych w badaniach Wöhler'a. Na podstawie tych badań ustawiono (Launhardt i Weyrauch) przybliżony wzór postaci:

$$k^{(0)} - k = \alpha \cdot k^{(0)} \left( 1 - \frac{S_{\text{min}}}{S_{\text{max}}} \right),$$

w którym  $S$  oznacza siłę rozciągającą lub ściskającą pręt, a współczynnik  $\alpha = \frac{1}{3}$  dla żelaza kowalnego i miękkiej stali. Stąd wyznacza się bezpieczną wartość  $\sigma_{\text{max}}$  przy projektowaniu prętów w belkach kratowych mostów itp.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{2}{3} k^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{S_{\text{min}}}{S_{\text{max}}} \right).$$

Przykład. W krzyżulcu belki kratowej z żelaza zlewne jest  $S_{\text{max}} = 12 t$ ,  $S_{\text{min}} = -3$  (ściskanie). Przyjąwszy  $k^{(0)} = 1600 \text{ kg/cm}^2$  mamy:



$$\sigma_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 1600 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} \right) = \frac{2}{3} \cdot 1600 \cdot \frac{7}{8} = \approx 933 \text{ kg/cm}^2.$$

Potrzebny przekrój pręta:  $F = \frac{S_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{12\,000}{933} = 12,9 \text{ cm}^2.$

Zjawisko obniżenia wytrzymałości metali przy wahaniach wartości obciążenia, zwane także zmęczeniem (znużeniem) materiału, da się częściowo wyjaśnić t. zw. histerezą sprężystą, która polega na tem, że nawet przy małych naprężeniach, rosnących od zera do pewnej wartości i następnie malejących znowu do zera, linja powrotna wykresu odkształceń nie zlewa się z linią odkształceń rosnących. Obie linje zamykają wazutkie pole, którego wielkość mierzy nieodzyskaną część pracy odkształcenia. To pole histerezy jest, jak się zdaje, tem większe, im krócej trwa odkształcenie. Odpowiadająca mu drobna część pracy zużywa się na rozluźnienie spójności, które przy wielokrotnem powtarzaniu procesu doprowadza (nieraz po wielu milionach wahnien) do pęknięcia. Tem się tłumaczy, że przy wielkiej częstości wahnien (szybkie odkształcenia) wystarczają mniejsze naprężenia końcowe do pokonania spójności. Zarazem wydaje się wielce wątpliwem, czy zastosowanie wzoru Launhardta i Weyraucha ma rację bytu przy zwykłym obliczeniu statycznym, zważywszy, że pomiędzy dwoma wahnieniami siły wewnętrznej  $S$  przy przejeździe np. pociągu upływają minuty, lub godziny, w ciągu których materiał „ma czas wypocząć”. Badania doświadczalne na prętach próbnym, wyciętych z różnych części mostu żelaznego rozebranego po półwiekowym użyciu (Zentralbl. d. Bauw. z 7./I. 1905) wykazały jednakową doraźną wytrzymałość u wszystkich próbek, chociaż materiał jednych nie „pracował” wcale, drugich był narażony na zmienne ciśnienia, a trzecich na zmienne ciągnięcia w ciągu 50-ciu lat ruchu po moście.

**10. Wytrzymałość a warunek ekonomji.** Jeżeli element konstrukcyjny narażony na proste rozciąganie lub ściskanie siłą  $S$  możemy sporządzić z dwu różnych materiałów, z których pierwszy (np. żeliwo) ma ciężar właściwy  $\gamma_1$ , cenę jednostki ciężaru  $C_1$ , a naprężenie bezpieczne  $\sigma_1$ , drugi zaś (np. stal)  $\gamma_2$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_2$ , to koszt jednostki długości pręta z pierwszego materiału  $K_1 = \frac{S}{\sigma_1} \gamma_1 C_1$ , zaś z drugiego  $K_2 = \frac{S}{\sigma_2} \gamma_2 C_2$ .

Zastąpienie zatem materiału pierwszego drugim będzie połączone z korzyścią gospodarczą, jeżeli

$$\frac{\gamma_2 C_2}{\sigma_2} < \frac{\gamma_1 C_1}{\sigma_1},$$

czyli gdy stosunek ceny jednostki objętości drugiego materiału do jego naprężenia bezpiecznego (spółczynnik ekonomji materiału) jest mniejszy od takiegoż stosunku materiału pierwszego. Oszczędność wyrażoną w odsetkach kosztów  $K_1$  przedstawia wyrażenie:

$$100 \left( 1 - \frac{K_2}{K_1} \right) = 100 \left( 1 - \frac{\gamma_2 C_2 \sigma_1}{\gamma_1 C_1 \sigma_2} \right).$$

Uwaga. Powyższe rozważanie nie uwzględnia wpływu ciężaru własnego konstrukcji, który to wpływ może być tak znaczny przy wielkich rozmiarach tejże, iż zupełnie wykluczy zastosowanie powyższego prostego rachunku.

**11. Nowsze pojmowanie stopnia bezpieczeństwa czyli pewności.** Siła wewnętrzna  $S$  pręta jako elementu konstrukcyjnego jest najczęściej sumą dwu części: stałej  $G$ , pochodzącej od ciężaru własnego konstrukcji i zmiennej  $P$ . Pierwsza jest ściśle określona, przynajmniej teoretycznie, wielkość zaś drugiej normuje się nieco dowolnie, biorąc pod uwagę rozmaite możliwe w przyszłości obciążenia zmienne ruchome i ich położenie. Zważywszy, że ciężar własny zmieni się nie może, wystarczy zupełnie dla zapewnienia bezpie-

czeństwa konstrukcji postawić żądanie, aby dopiero przy  $n$ -krotnym obciążeniu zmiennem, przyjętem za podstawę obliczenia, osiągnęło naprężenie  $\sigma$  wartość niebezpieczną  $\sigma_{\text{nieb}}$ . Wyrażamy to równaniem:

$$G + n \cdot P = F \cdot \sigma_{\text{nieb}}.$$

Tak pojmowana pewność  $n$  prowadzi do naprężeń bezpiecznych rosnących wraz z stosunkiem  $G:P$ , podobnie jak się to praktykuje oddawna przy obliczaniu mostów na podstawie rozważań dynamicznego działania obciążeń ruchomych przy zwykłym dawnym pojmowaniu pewności. W samej rzeczy, naprężenie użytkowe pręta obliczonego przy pomocy powyższego wzoru będzie miało wartość:

$$\sigma = \frac{G + P}{F} = \frac{G + P}{G + n P} \cdot \sigma_{\text{nieb}},$$

która dla  $G = 0$  staje się  $= \frac{\sigma_{\text{nieb}}}{n}$ , a ze wzrostem  $G$  rośnie zdążając do granicy  $= \sigma_{\text{nieb}}$ . Przytem wypada przyjąć jako  $\sigma_{\text{nieb}}$  granicę plastyczności  $\sigma_p$  a dla  $n$  około 3. Jeżeli materiał nie ma granicy plastyczności, to zależnie od jego jakości za  $\sigma_{\text{nieb}}$  uznać wypadnie  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$  lub mniejszy ułamek doraźnej wytrzymałości. Bliższe ustalenie tego współczynnika, jako też wartości  $n$  należy do działów specjalnych.

12. Zboczenia od prawa Hooke'a. Materiały takie jak żeliwo (żelazo lane), kamienie naturalne i sztuczne mają granicę proporcjonalności tak niską (do kilku  $\text{kg/cm}^2$ ), że przy obciążeniach praktykowanych w konstrukcjach technicznych objawiają dość znaczne zboczenia od prawa Hooke'a. Dlatego przyzwyczajono się nazywać te materiały „niepodlegającymi prawu Hooke'a“.

Linia wykresu odkształceń sprężystych przedstawia się dla wymienionych materiałów jako krzywa zwrócona wypukłością ku osi naprężeń. Dla całego obszaru zmienności ciągnięć i ciśnień ma ona kształt litery  $S$  (fig. 125) z punktem przecięcia wyższego rzędu w początku układu współrzędnych. Powtarzane wielokrotnie próby ustawienia prawa sprężystości

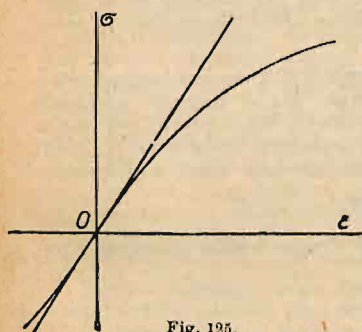


Fig. 125.

ogólniejszego do prawa Hooke'a, któreby odpowiadało zachowaniu się powyższych materiałów, nie doprowadziły do pomyślnego wyniku. Jest to zrozumiałe wobec wielkiej zawłości ich struktury. Te próby dały tylko szereg wzorów interpolacyjnych, z których najbardziej rozpowszechnionym jest t. zw. wzór potęgowy:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m.$$

$\alpha$  i  $m$  są tutaj stałymi charakterystycznymi dla materiału. Ten wzór odzwierciedla wcale dobrze zachowanie się materiału przy dość wielkich wartościach naprężeń, ale zupełnie zawodzi przy małych, wobec czego nie może mieć pretensji do miana „prawa“, którem go obdarzają liczne podręczniki.

W wielu przypadkach jest dogodniej opisać zboczenia materiału od prawa Hooke'a przez uogólnienie pojęcia modułu wydłużenia (współczynnika sprężystości) i tak:

1. Wartość ilorazu różniczkowego  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  w punkcie  $(\varepsilon, \sigma)$  wykresu



nazywamy modulem wydłużenia  $E_\sigma$  odpowiadającym naprężeniu  $\sigma$  (albo wydłużeniu  $\varepsilon$ ). Ponieważ ta wartość maleje ze wzrostem naprężenia u wymienionych materiałów (u skóry rośnie), a ta zależność da się dość dokładnie przedstawić funkcją liniową, przeto możemy napisać:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_\sigma = E_0 - \alpha \cdot \sigma,$$

przyczem  $E_0$  jest modulem wydłużenia przy naprężeniach nieskończenie małych, zaś  $\alpha$  liczbą stałą wyznaczoną również z danych doświadczalnych. Całkowanie powyższego równania daje:

$$\sigma = \frac{E_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \varepsilon})$$

przyczem  $e = 2,7182818$

2. Wartość ilorazu  $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$  nazywamy średnim modulem wydłużenia między punktami  $(\varepsilon_1, \sigma_1)$  i  $(\varepsilon_2, \sigma_2)$ .

Zboczenia od prawa Hooke'a objawiają się nie tylko zmiennością modułu wydłużenia  $E$ , lecz także zmiennością liczby Poisson'a  $\frac{1}{m}$ , przyczem oczywiście traci swą ważność zasada superpozycji.

13. Praca odkształcenia i energia potencjalna wewnętrznych sił sprężystości. Skoro proste rozciąganie lub ściskanie pręta siłą osiową  $P$  (rosnącą bardzo powoli od zera) przedstawimy wykresem odmierzając jako odcięte całkowite wydłużenia pręta  $\lambda$ , a jako rzędne odpowiadające siły, to pole zawarte między linią wykresu a spórzędnymi punktu końcowego mierzy pracę siły  $P$  potrzebną do odkształcenia pręta, czyli jego pracę odkształcenia. Jeżeli odkształcenie jest doskonale sprężyste, to całkowita praca odkształcenia  $L$  nagromadza się w postaci energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości czyli  $L = U$ . Z tego to powodu w literaturze technicznej, zwłaszcza niemieckiej, nie rozróżnia się zwykle obu pojęć i używa dla obu tej samej nazwy: praca odkształcenia. Jeżeli jednak odkształcenie jest niezupełnie sprężyste, to  $L > U$ , a część pracy odkształcenia zużywa się na pokonanie tarcia wewnętrznego w materiale i zamienia się na ciepło oraz inne nieodwracalne formy energii.

Dzieląc pracę odkształcenia jednorodnego przez objętość pręta otrzymujemy pracę odniesioną do jednostki objętości, czyli właściwą pracę odkształcenia. Właściwa praca odkształcenia potrzebna do przerwania pręta z danego materiału charakteryzuje wcale dobrze jego odporność na uderzenia i dlatego prof. L. Tetmajer zalecał wyznaczenie tej wielkości przy próbach rozrywania.

Materiał	Właściwa praca odkształcenia przy rozerwaniu
Żelazo spawalne . . . . .	2—7 $\text{kgm/cm}^3$
„ zlewne . . . . .	6—8 „
Miękka stal . . . . .	8 i więcej „

W granicach doskonałej sprężystości i ważności prawa Hooke'a określa energię potencjalną pręta o przekroju  $F$  i długości  $l$ , rozciąganego lub ściskanego siłą  $P$  do końcowej długości  $l \pm \lambda$ , oczywiście wyrażenie:

$$L = U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EF} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 EF}{l}.$$

Dzieląc je przez objętość pręta  $F \cdot l$  otrzymujemy właściwą pracę odkształcenia lub energję potencjalną jednostki objętości:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Przy tychże samych założeniach przedstawia energję potencjalną jednostki objętości materiału w ogólnym stanie napięcia wyrażenie:

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}),$$

które po wyrażeniu  $\varepsilon$  i  $\gamma$  przez  $\sigma$  i  $\tau$  albo odwrotnie przybiera postać:

$$\Lambda = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \right. \\ \left. + \frac{m+1}{m} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \right\}$$

albo:

$$\Lambda = G \left\{ \frac{m-1}{m-2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 - 4 (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x)] \right\}.$$

Można je także napisać w postaci:

$$\Lambda = \Lambda_v + \Lambda_f$$

przyczem: 
$$\Lambda_v = \frac{m-2}{6mE} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

oznacza samą energję odkształcenia objętościowego, zaś:

$$\Lambda_f = \frac{m+1}{6mE} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

samą energję odkształcenia postaciowego.

Dla całego ciała przedstawi energję odkształcenia wyrażenie:

$$L = U = \int_{(V)} \Lambda dV,$$

w którym  $dV$  jest elementem objętości, a całkowanie rozciąga się na całą objętość ciała.

W dwuwymiarowym stanie napięcia, który stanowi najczęściej podstawę obliczeń wytrzymałości, upraszczają się wyrażenia dla właściwej pracy odkształcenia do postaci:

$$\Lambda_v = \frac{m-2}{6mE} (\sigma_x + \sigma_y)^2; \Lambda_f = \frac{m+1}{6mE} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau^2].$$

$$\Lambda = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{m+1}{m} (\tau^2 - \sigma_x \sigma_y) \right].$$

**14. Wytrzymałość na rozciąganie cienkich drutów i blach.** U drutów ciągniętych z tego samego materiału okazuje się doraźna wytrzymałość  $K_r$ , mierzona ilorazem siły rozrywającej przez pole przekroju, zależną od grubości drutu  $d$  według empirycznego wzoru:

$$K_r = K + \frac{c}{d}.$$



Wartości stałych  $K$  i  $c$  przy pomiarze  $d$  w  $mm$ , a  $K_p$  w  $kg/cm^2$  podaje następująca tabliczka podług Karmarsch'a:

Rodzaj drutu	niewyżarzony		wyżarzony	
	$K$	$c$	$K$	$c$
Zwykły drut żelazny . . . . .	4580	2290	2870	640
Drut stalowy . . . . .	6370	2670	5730	380
Drut miedziany . . . . .	3500	960	2360	—

Wyjawszy jednak bardzo cienkie druty i blachy można w przypadkach prostego rozciągania lub ściskania mierzyć wyteżenie każdego materiału wartością naprężenia.

15. Wyteżenie materiału przy ogólnym stanie napięcia. Teorie wytrzymałości. Inaczej ma się rzecz w przypadkach ogólnego dwu- lub trójwymiarowego stanu napięcia określonego naprężeniami głównymi  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , i  $\sigma_3$  (lub odpowiadającymi wydłużeniami głównymi  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ). Badania doświadczalne A. Föppl'a i innych pouczają bowiem, że przy wszechstronnem równomiernem ściskaniu ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ ) materiału dostatecznie jednolitego nie zachodzi niebezpieczeństwo pęknięcia lub przekroczenia granicy sprężystości, nawet przy wartościach naprężenia przekraczających wielokrotnie  $K_c$  tegoż materiału. Wytrzymałość takiego materiału przy wszechstronnem równomiernem ciśnieniu jest przeto, praktycznie biorąc, nieograniczona. Już to samo dowodzi niezbicie, że sama wartość jednego z naprężeń głównych nie może być wogóle miarą wyteżenia materiału, jak dawniej mylnie mniemano (hipoteza największego naprężenia). — Nie może nią być także wartość jednego (bezwzględnie największego) z wydłużeń głównych, jak się przyjmuje w bardzo rozpowszechnionej po dziś dzień hipotezie największego wydłużenia, bo według tej hipotezy doprowadziłoby wszechstronne ściskanie naprężeniem  $\sigma$  do tej samej wartości wyteżenia, co przy prostem ściskaniu, gdyby bezwzględna wartość tego ostatniego  $\sigma_1$  czyniła zadość warunkowi równych sprężystych wydłużeń w obu przypadkach.

Musiłoby wtedy być:  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \epsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$ , z czego wynika warunek  $\sigma_1 = \frac{m-2}{m} \sigma$ . Ponieważ dla najważniejszych materiałów konstrukcyj-

nych jest  $m \geq 3$ , przeto wypadaloby z powyższego warunku  $\sigma \geq \frac{1}{3} \sigma$ , co by znaczyło, że przy wszechstronnem ściskaniu jest wyteżenie (mierzone wartością naprężenia) co najwyżej 3 razy mniejsze od wyteżenia przy prostem ściskaniu z tą samą wartością naprężenia. Według doświadczeń jest to wyteżenie przynajmniej kilkadziesiąt razy mniejsze, wobec czego nie może się ostać hipoteza największego wydłużenia, zakorzeniona niestety głęboko w podręcznikach i w umysłach inżynierów. Przy dzisiejszym stanie naukowego doświadczalnego badania wytrzymałości materiałów jest rzeczą pewną, że nie posiadamy jeszcze ogólnej teorii wytrzymałości dla wszelkich materiałów, któreby pozwalała na podstawie doświadczeń nad prostem rozciąganiem i ściskaniem obliczyć z góry wyteżenie materiału przy każdym układzie wartości trzech naprężeń głównych w ogólnym stanie napięcia. Atoli jedna z najstarszych hipotez wytrzymałościowych (Coulomb) a mianowicie hipoteza największego odkształcenia postaciowego, albo równoważna jej hipoteza największej różnicy naprężeń głównych, czyli inaczej hipoteza największego naprężenia stycznego odpowiada dość dobrze zachowaniu się tak

ważnych technicznie plastycznych metali. Liczne doświadczenia zwłaszcza angielskich badaczy przy różnorodnych stanach napięcia wykazały, że osiągnięcie granicy plastyczności tego samego materiału zachodzi mniej więcej przy tej samej wartości największego naprężenia stycznego, albo co na jedno wychodzi przy tej samej największej różnicy naprężeń głównych. Ta hipoteza jest nadto w zgodzie z wspomnianymi doświadczeniami nad wszechstronnem ściskaniem materiałów kruchych i prowadzi jak zobaczymy do reguł i wzorów praktycznych prostszych od wynikających z hipotezy największego wydłużenia. Jest ona przytem szczególnym przypadkiem uniwersalnej teorii O. Mohra. Obecnie wszakże rywalizuje z nią skutecznie hipoteza największej pracy odkształcenia postaciowego (Huber), która również jest w zgodzie z doświadczeniami A. Föppl'a, a nadto z najnowszymi doświadczeniami amerykańskimi, niemieckimi i szwajcarskimi.

Ocena wyteżenia przy złożonym stanie napięcia u materiałów kruchych, jak żelazo lane i kamienie jest ściśle biorąc możebna tylko na podstawie bezpośrednich doświadczeń.

Zastosowanie teorii wytrzymałości do obliczenia wyteżenia materiału przy złożonym stanie napięcia (określonym stosunkiem wartości trzech naprężeń głównych lub sześciu składowych stanu napięcia) polega na zastąpieniu tego stanu pomyślanem prostym rozciąganiem lub ściskaniem, któreby prowadziło do tego samego wyteżenia. Obliczone w ten sposób naprężenie pomyślanego stanu nazywamy naprężeniem zredukowanym (sprowadzonym, idealnem, zastępczem)  $\sigma_{red}$ .

a) Stosując hipotezę największej różnicy naprężeń głównych mamy tedy:

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_{bezp},$$

jeżeli  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  oznaczają dwa z naprężeń głównych dobrane tak, by ich algebraiczna różnica miała największą wartość bezwzględną. Obliczenie wyteżenia zapomocą naprężenia zredukowanego przedstawia się zatem bardzo prosto. Pewne praktyczne trudności wychodzą jednakże na jaw, gdy stan napięcia jest określony sześciu naprężeniami składowymi. Wówczas wypadałoby najpierw obliczyć naprężenia główne, co prowadzi w ogólnym przypadku do równania trzeciego stopnia. Te trudności odpadają przy zastosowaniu

b) hipotezy największej pracy odkształcenia postaciowego. Wtedy bowiem

$$\sigma_{red}^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \sigma_{bezp}^2$$

dla najogólniejszego przypadku.

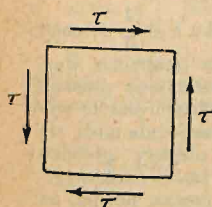


Fig. 126.

c) Zastosowanie hipotezy największego wydłużenia jest nie tylko mniej wygodne od obu poprzednich, ale co ważniejsze prowadzi w wielu przypadkach do rażącej niezgodności z doświadczeniami. Tę hipotezę należy przeto stanowczo porzucić. Mimo to podajemy tutaj jej wzory już to dla wykazania ich błędności, już też z powodu ich wielkiego rozpowszechnienia w podręcznikach zwłaszcza francuskich i niemieckich. Według tej hipotezy wypada:

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}(\sigma_{II} + \sigma_{III}) = \sigma_{bezp} = k,$$

przyczem należy dobrać tak porządek naprężeń głównych  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  i  $\sigma_{III}$  aby wyrażenie między znakami równości było bezwzględnie biorąc największe.

16. Wyteżenie plastycznych metali przy prostym ścinaniu (fig. 126). Jeżeli naprężeniem ścinającym jest  $\tau$ , to  $\sigma_I = +\tau$ ,  $\sigma_{II} = -\tau$ ,  $\sigma_{III} = 0$ . A zatem według (I) będzie  $\sigma_{red} = 2\tau = k$ ,

czyli

$$k_t = \frac{1}{2} k \dots \dots \dots (31. I)$$



Według (II) wypada:

$$\sigma_{\text{red}}^2 = 3 \tau^2 = k^2, \quad \text{czyli } k_l = 0,58 k \dots (31. \text{ II})$$

Wreszcie według (III):

$$\sigma_{\text{red}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \tau = k.$$

Przy  $m = \frac{10}{3}$  (żelazo kowalne i stal) wypada stąd  $k_l = 0,77 k$ .

Uwaga. Dawniejsze badania doświadczalne (1900—1910) popierały hipotezę I, nowsze amerykańskie (1920) i szwajcarskie (1925) przemawiają raczej na korzyść II; wszystkie są zgodne w tem, że hipoteza III daje wyniki średnio o 40% za wielkie.

17. Wytyężenie plastycznych metali przy prostym rozciąganiu lub ścisnaniu w połączeniu ze ścinaniem. (Fig. 127). Odpowiadające naprężenia główne określają według wzoru (ze str. 7) wyrażenia:

$$\sigma_I = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2},$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}.$$

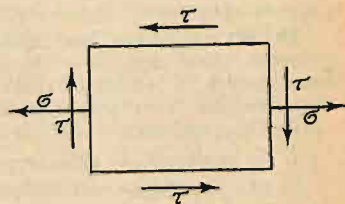


Fig. 127.

A zatem według (I):  $\sigma_{\text{red}} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2},$

według (II):  $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2},$

zaś według (III):  $\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2},$

przyczem znak — drugiego wyrazu obowiązuje wtedy gdy  $\sigma$  jest ujemne.

Uwaga. Bach, który dawno dostrzegł niezgodność z doświadczeniami wzorów opartych na hipotezie największego wydłużenia (III), położył to błędnie na karb zboczeń materiału od równokierunkowości i „poprawił” wzór ostatni mnożąc  $\tau$  współczynnikiem  $\alpha_0$  zależnym od stosunku wydłużenia bezpiecznego przy prostym rozciąganiu lub ścisnaniu do takiegoż wydłużenia przy prostym ścinaniu. Tak „poprawiony” i „uzupełniony” wzór stosują bezkrytycznie nawet do materiałów kruchych niemal wszystkie podręczniki niemieckie z ostatnich lat trzydziestu.

18. Wnioski o stanie napięcia z pęknięć w miejscach niebezpiecznych. Takie wnioski są szczególnie ważne przy interpretacji doświadczeń i ekspertyzach z powodu sporów o bezpieczeństwo nowej budowli albo z powodu katastrof budowlanych grozących lub zaszłych. O stanie napięcia w elemencie konstrukcyjnym nienadwreżonym można coś pewnego wnioskować tylko z pierwszych zaledwie dostrzegalnych rys i pęknięć, a nie z powierzchni odlamu po katastrofie, albowiem z chwilą powstania pierwszych rys zmienia się stan napięcia w otoczeniu zagrożonego miejsca tak znacznie, że dalsze pęknięcia nie odpowiadają już pierwotnemu rozmieszczeniu naprężeń. Dostateczna jednolitość i równokierunkowość materiału (oczywiście kruchego) jest drugim koniecznym warunkiem pewności wniosku. Przy zachowaniu tych warunków jest pęknięcie prawie zawsze prostopadłe do kierunku głównego ciągnięcia, a równoległe do głównego ciśnienia (w dwuwymiarowym stanie napięcia).

Odstępstwa od tego prawidła zachodzą tylko wskutek choćby miejscowych nierównokierunkowości (drewno, walcowane żelazo spawalne) lub niejednolitości (seki w drewnie, wyjątkowo twarde kamyki w betonie itp.). Na dowód można przytoczyć mnóstwo doświadczeń laboratoryjnych należących do interpretowanych. Ta interpretacja była niestety mylna nawet u wybitnych inżynierów-badaczy przy doświadczeniach nad ściskaniem i t. zw. ścinaniem, wskutek czego rozpowszechniło się mniemanie, że w tych przypadkach zachodzi zawsze pęknięcie w płaszczyźnie największych naprężeń stycznych. Do tego błędu przyczyniła się niewątpliwie okoliczność, że po zupełnym pęknięciu w pewnym przekroju zostaje badane ciało podzielone na dwie części, przyczem z reguły zachodzi zaburzenie

równowagi, które prowadzi często do dostrzegalnego względnego przesunięcia obu tych części wzdłuż powierzchni pęknięcia.<sup>1)</sup>

Pamiętając o tem, że na swobodnej powierzchni ciała jest stan napięcia (z pominięciem nieznacznego wpływu ciśnienia atmosferycznego) zawsze drobne rysy w materiale kruchym, dostatecznie jednolitym i równokierunkowym, wskazują tylko kierunki naprężeń głównych, wszelako nie pozwalają jeszcze zawyrokować, które z nich jest ciągnięciem, a które ciśnieniem. Mogą bowiem zajść następujące przypadki: 1. Naprężenie prostopadłe do rysy jest ciągnięciem, a drugie również ciągnięciem, ale znacznie mniejszem, albo ciśnieniem. 2. Naprężenie główne w kierunku rysy jest ciśnieniem a drugie również ciśnieniem, ale znacznie mniejszem. 3. Obydwa naprężenia są równymi ciągnięciami.

**19. Wytrzymałość materiału a wytrzymałość elementu konstrukcyjnego.** Stan napięcia w elemencie konstrukcyjnym zależy od jego sił zewnętrznych (tj. obciążeń i reakcyj). Gdy dane siły zewnętrzne bez zmiany linii działania rosną proporcjonalnie, to wywołane niemi naprężenia rosną również proporcjonalnie, ale tylko wtedy, gdy:

1. nie przekroczono granicy proporcjonalności w materiale,
2. gdy powstające odkształcenia nie wpływają w godny uwagi sposób na ramiona momentów danych obciążeń względem dowolnego punktu rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego,
3. gdy te odkształcenia nie powodują nowych punktów podparcia albo też zmian w wielkości powierzchni podparcia (wzgl. liczbie punktów podparcia).

Skoro te wszystkie trzy warunki się spełniają, to odkształcenia (ugięcia itd.) elementu konstrukcyjnego, jako skutki obciążeń, podlegają zasadzie superpozycji. Przy niespełnieniu bodaj jednego z nich zasada ta traci ważność i jej stosowanie może prowadzić do grubych błędów. Atoli bez uwagi godnego błędu można z reguły stosować zasadę superpozycji aż do granicy plastyczności, gdy spełniają się warunki (2) i (3). Skoro obciążenia wzrosną do wartości  $P_f$ , przy której w pewnym miejscu osiąga materiał granicę plastyczności, to to obciążenie nazywamy obciążeniem niebezpiecznem. Obciążenie bezpieczne  $P_{bezp}$  będzie w powyższych warunkach mniejsze od  $P_f$  w tym samym stosunku, w jakim stoi  $\sigma_{bezp}$  do  $\sigma_f$ , da się przeto obliczyć teoretycznie, o ile znany rozwiązanie odnośnego zadania teorii sprężystości. Zwiększając obciążenie stopniowo dalej dochodzimy zwykle do pewnego maximum  $P_w$ , przy którym pojawiają się uszkodzenia prowadzące po krótkim czasie nawet przy mniejszem obciążeniu do pęknięcia lub trwałego odkształcenia o niedozwolonej wielkości. To maximum obciążenia, jakie zniósł badany element konstrukcyjny, zwane obciążeniem łamiącym, określa wytrzymałość tego elementu. Niekiedy jednak można iść z obciążeniem znacznie powyżej wartości  $P_w^{(1)}$  odpowiadającej pierwszym uszkodzeniom i dopiero pod wpływem  $P_w^{(2)}$  następuje zupełne wyczerpanie zdolności elementu do znoszenia obciążeń. Czy wówczas wytrzymałość elementu konstrukcyjnego określa się wartością  $P_w^{(1)}$ , czy też  $P_w^{(2)}$ , to zależy od jego materiału i przeznaczenia. Wyjąwszy najprostszy przypadek rozciąganych prętów nie wystarcza wogóle do obliczenia z góry  $P_w$  samo rozwiązanie odnośnego zadania teorii sprężystości już z powodu niespełnienia warunku (1). Mimo to obliczają często  $P_w$  tak, jak gdyby prawo Hooke'a było ważne aż do granicy wytrzymałości i poprawiają otrzymany wzór wynikami bezpośrednich doświadczeń aż do złamania.

<sup>1)</sup> Niektórzy badacze rozróżniają pęknięcie wskutek „rozdarcia“ (prostopadłe do kierunku wydłużeń głównych) i pęknięcie wskutek „poślizgu“ (w płaszczyźnie największych naprężeń stycznych), charakterystyczne dla kryształów.



Sposób ten daje wcale dobre przybliżenie tylko w przypadku małej plastyczności i małych zboczeń materiału od prawa Hooke'a. W każdym razie obliczone „teoretycznie“  $P_w$  jest zawsze mniejsze od rzeczywistego, a różnica rośnie bardzo ze zdolnością materiału do odkształceń trwałych. Wszystko to odnosi się przedewszystkiem do wytrzymałości doraźnej, a więc do przypadków stałego obciążenia. Ponieważ obciążenia częstotliwościowo obniżają granicę wytrzymałości plastycznych metali nawet poniżej granicy plastyczności, przeto w przypadkach takich obciążeń (zwłaszcza w elementach maszynowych) mogą rozwiązania teorii sprężystości w połączeniu z teorią wytrzymałości dostarczyć bardzo dokładnych wartości obciążeń łamiących co wysoko podnosi ich praktyczną wartość.

**20. Wpływ czasu na objawy sprężystości i wytrzymałości materiału.** Ten wpływ zaznacza się bądź to bezpośrednio, bądź też pośrednio. Bezpośredni wpływ czasu polega na tem, że odkształcenia nawet sprężyste, przy niezmiennem obciążeniu rosną z biegiem czasu, aczkolwiek nadzwyczaj powolnie i nieznacznie. Podobnie po zniesieniu obciążenia znika zaraz nie całe sprężyste odkształcenie, lecz pozostaje pewna drobna część, malejąca coraz wolniej z upływem czasu. Te objawy, znane od dawna pod nazwą opóźnienia sprężystego, występują wyjątkowo wyraźnie u materiałów organicznego pochodzenia jak drewno, skóra itp., a nałto u szkła, kamieni i niektórych metali mniejszego technicznego znaczenia.

Nader ważnym rodzajem pośredniego wpływu czasu jest stwardnienie (Verfestigung, ecrouissage) plastycznych metali, a w szczególności żelaza kowalnego i stali. Ten objaw polega na tem, że kiedy naprężenie przekraczające coraz więcej granicę plastyczności działa przez dłuższy czas bez zmiany, to ponowne doraźne badanie materiału wykazuje większe  $\sigma_p$ ,  $\sigma_f$  i  $K_p$ , a mniejsze  $\varphi$  i  $\psi$  niż w stanie pierwotnym. Krótko mówiąc, zwiększa się wytrzymałość materiału, a zmniejsza jego plastyczność. To samo zachodzi, gdy po jednorazowym przekroczeniu granicy plastyczności pozwolimy materiałowi „wypocząć“ przez dłuższy czas. Stopień stwardnienia rośnie w tych samych warunkach z nadwyżką wywołującego je naprężenia ponad (niższą) granicę plastyczności. Stwardnienie działa korzystnie w przypadkach, w których naprężenie użytkowe materiału pozostaje tego samego znaku, co naprężenie stwardniające; natomiast niekorzystnie w razie przeciwnym, najniekorzystniej zaś, gdy zmienne naprężenie użytkowe waha ustawicznie między ciągnięciem a równym mu ciśnieniem.

Na zjawisko stwardnienia rzucają pewne światło nowoczesne badania metalograficzne. Stwardnienie materiału, wywołane przekroczeniem granicy plastyczności przy t. zw. mechanicznej obróbce na zimno, da się usunąć przez wyżarzenie.

**21. Wpływ ciepła.** Ten wpływ może być również bezpośredni i pośredni. Bezpośredni objawia się przedewszystkiem zależnością stałych sprężystości i wytrzymałości materiału od temperatury, w jakiej dokonywamy badania. Z względów praktycznych wystarczy tutaj omówić wpływ temperatury na  $\sigma_f$  i  $K$ . Jest rzeczą jasną, że tak  $\sigma_f$  jak i  $K$  zdąża do zera, gdy temperatura (oczywiście jednakowo w całej próbie) zbliża się do temperatury topliwości materiału. Z tego jednakże nie wynika, aby wytrzymałość zmniejszała się stale z podwyżką temperatury ponad zwykłą ( $20^\circ \text{C}$ ). Wytrzymałość żelaza kowalnego rośnie zrazu z temperaturą choć nieznacznie i osiąga maximum przy  $\sim 250^\circ \text{C}$ , poczem dopiero trwale maleje. Odwrotnie zachowuje się plastyczność. Obniżając zaś temperaturę (od  $20^\circ \text{C}$ ), znaleziono mały wzrost doraźnej wytrzymałości i mniejszy ubytek plastyczności.

Kamienie naturalne i sztuczne nie były badane w analogiczny sposób, albowiem w praktyce objawia się wpływ ciepła na ich własności mechaniczne najczęściej pośrednio. Komin fabryczny pęka zewnątrz bynajmniej

nie z tego powodu, że jego materiał traci na wytrzymałości przy ogrzaniu od wewnątrz przez gazy spalinowe, lecz wskutek naprężeń termicznych, wywołanych różnicą temperatur wewnętrznej i zewnętrznej warstwy. Dzięki bardzo słabemu (w porównaniu do metali) przewodnictwu cieplnemu a wielkiej pojemności cieplnej tych materiałów przyjmują one nadzwyczajnie powoli temperaturę otoczenia i dlatego pożar uszkadza tylko powierzchnie ściany, stropy itp. z cegły, kamienia lub betonu nie niwecząc ich wytrzymałości i nie zagrażając umieszczonemu wewnątrz (ewentualnie) wzmacnieniom z żelaza. Natomiast nie osłonioma ogniotrwałym materiałem konstrukcja żelazna nie wytrzymuje z reguły większego pożaru, gdyż wskutek silnego przewodnictwa i małej pojemności cieplnej przyjmuje w krótkim czasie nawskroś temperaturę niebezpieczną dla wytrzymałości materiału. (Pojemność cieplna konstrukcji murywanej lub betonowej przewyższa znacznie takąż pojemność odpowiadającej konstrukcji żelaznej nie tylko z powodu mniejszego ciepła właściwego, ale także z powodu większej objętości, a mniejszej powierzchni.)

Wyjątkowe stanowisko zajmuje drewno jako materiał wyróżniający się z pośród wszystkich innych stosowanych w konstrukcjach budowlanych palnością.

Co do wspomnianego już wyżej pośredniego wpływu ciepła na wytrzymałość elementów konstrukcyjnych por. ustęp p. t. „Napięcia termiczne”.

**22. Inne wpływy.** Nazwy, pod jakimi znane są różnorodne materiały techniczne, nie określają ani ciał chemicznie czystych, ani też połączeń lub stopów o pewnym oznaczonym składzie. Np. przez żelazo zlewne rozumiemy materiał, otrzymany znanymi procesami hutniczymi, którego głównym składnikiem jest żelazo  $Fe$ , a który nadto zawiera jako istotny składnik 0,05 do 0,25% węgla  $C$  oprócz innych składników nieistotnych w postaci drobnych przymieszek, mających jednakże wpływ bądź to korzystny, bądź też niekorzystny na własności mechaniczne materiału. Stal zaś zlewna różni się od żelaza zlewego, i to tak pod względem technologicznym jak i chemicznym, jedynie większą zawartością węgla, która wynosi 0,25—1,6%. Zatem objawy sprężystości i wytrzymałości materiału są zależne w wysokim stopniu od jego składu chemicznego.

Wskutek procesu walcowania (wyciągania w druty) stają się metale materiałami nierównokierunkowymi i okazują nieco różne stałe sprężystości i wytrzymałości przy linjowych stanach napięcia o osi równoległej lub prostopadłej do kierunku walcowania. Podobną nierównokierunkowość objawiają skały warstwowe w jeszcze silniejszym stopniu. Nawet beton ubijany okazuje nieco różną sprężystość i wytrzymałość przy obciążeniu prostopadłym do warstw, a równoległym do nich.

U odlewów metalowych i szkła rośnie wytrzymałość z szybkością ostygnięcia, ale zarazem maleje plastyczność (rośnie kruchość).

U drewna określonego typu botanicznego (np. sośnina) rośnie wytrzymałość z ciężarem właściwym, a maleje ze wzrostem wilgoci.

Szczególnie licznym wpływom podlega beton. Tu zaznaczymy tylko, że:

1. Tak moduł wydłużenia sprężystego  $E$  jak i wytrzymałość przy prostym rozciąganiu lub ścisaniu rosną z wiekiem betonu (z początku szybko, później coraz wolniej) zdążając asymptotycznie do pewnej granicy, którą osiągają zapewne dopiero po więcej jak 6-u latach, tj. dopóki trwa złożony proces tężenia betonu.

2. W tych samych zresztą warunkach jest wytrzymałość betonu na proste rozciąganie lub ścisanie tem mniejsza, im większe są rozmiary badanego ciała (przy zachowaniu reguły podobieństwa Barba'y i Kick'a). Główna przyczyna tego zjawiska (przypominającego zachowanie się cienkich drutów) tkwi prawdopodobnie w tem, że proces tężenia większych brył betonu odbywa się powolniej, aniżeli mniejszych.



**Uwaga.** Wszystkie powyżej omawiane wpływy na wytrzymałość przy prostym rozciąganiu lub ścisaniu odnoszą się do wytrzymałości materiału. Do wytrzymałości ciała (elementu konstrukcyjnego) można je odnieść tylko wtedy, gdy siły zewnętrzne wywołują w niem z dostateczną dokładnością linjowy stan napięcia i odkształcenia. O ile jednak łatwo taki stan zrealizować w doświadczeniach nad prostym rozciąganiem, stosując pręty próbne dostatecznie długie w stosunku do grubości, ażeby wielce złożony stan napięcia w miejscach przeniesienia sił zewnętrznych (tj. w głowach) nie wpływał w dostrzegalny sposób na jednorodność stanu napięcia i odkształcenia w badanej środkowej walcowej części pręta; o tyle trudno to osiągnąć w przypadku ściskania, albowiem ze wzrostem długości rośnie szybko niebezpieczeństwo wyboczenia i wskutek tego przestaje się spełniać drugi z warunków rozpatrywanych w ust. 19.

Według badania Prandtl'a i Rinne'go można wywołać w środkowej walcowej części (fig. 128) ściszanego próbnego słupka bardzo dokładnie linjowy stan napięcia i otrzymać wartości (naprężeń zginiatających) niezależne od jego wysokości, jeżeli 1. część walcowa choćby bardzo krótka przechodzi łagodnie w znacznie rozszerzone i dość długie głowy, a zarazem 2. długość tej części nie przekracza 2- do 3-krotnej grubości.

**23. Wytrzymałość ciał pryzmatycznych o małej smukłości przy osiowym ścisaniu.** W doświadczeniach technicznych używa się tradycyjnie ciał próbnych kształtu graniastosłupów lub walców o wysokości niewiele większej od grubości i wywiera nacisk na dwie równoległe podstawy za pośrednictwem stalowych płyt prasy hydraulicznej itp. Wskutek ograniczenia swobody rozszerzenia poprzecznego podstaw przez tarcie między niemi a płytami ściskającymi jest stan napięcia w takim ciele bardzo skomplikowany. Poznajemy to odrazu po beczułkowatej postaci ściśniętego niskiego walca. Wobec tego iloraz siły zginiatającej  $P_w$  przez pierwotne pole przekroju  $F$  nie określa wytrzymałości materiału, Fig. 128. lecz wytrzymałość ciała odniesioną do jednostki pola przekroju i nie dziwnego, że ta wytrzymałość okazała się zależną od stosunku wymiarów. Wyniki doświadczeń oddaje dość dokładnie empiryczny wzór Bauschinger'a o postaci:

$$\frac{P_w}{F} = \left( \alpha + \beta \frac{\sqrt{F'}}{h} \right) \sqrt{\frac{VF'}{\frac{1}{4}u}}$$



Fig. 128.

przyczem  $\alpha$  i  $\beta$  są stałemi materiału, podanemi w poniżej umieszczonej tablicy,  $F'$  polem,  $u$  obwodem przekroju poprzecznego podstawy, zaś  $h$  wysokością.

Materiał	Kierunek nacisku względem płaszczyzny uwarstwienia	$\alpha$	$\beta$	Badacz
Piaskowiec szwajcarski . . . . .	prostopadle	310	346	} Bauschinger
Piaskowiec pstry . . . . .	równoległe	262	320	
Piaskowiec z Heilbronn . . . . .	"	358	118	} Bach
Żeliwo . . . . .	"	5480	895	

Praktyczne znaczenie tych wyników jest niewielkie. Nieco ważniejsze są wyniki doświadczeń, w których nacisk przenosił się z jednej strony tylko na pewną część podstawy słupa o wielkości  $F_1 < F$ , z drugiej zaś na całą podstawę. Wtedy stan napięcia jest również bardzo zawiły i nie dopuszcza ścisłego rozwiązania teoretycznego. Doświadczenia Bauschinger'a i Bach'a

z sześciąciami kamiennymi w granicach  $\frac{F}{F_1} = 1$  do 20 dadzą się ująć we wzór empiryczny:

$$\frac{P_w}{F_1} = K_k \sqrt[3]{\frac{F}{F_1}},$$

przyczem  $K_k$  oznacza t. zw. wytrzymałość kostkową, otrzymaną przy zwykłym zgniataniu kostek między stalowymi płytami ściskającymi.  $K_k$  jest oczywiście spółczynnikiem wytrzymałości ciała (kostki) a nie wytrzymałości materiału,  $K_c$ , która będzie zawsze mniejsza od  $K_k$ . Ponieważ stosunek  $K_c : K_k$  można w przybliżeniu uważać dla danego materiału za stały, przeto przyjęto od dawna wytrzymałość kostkową za praktyczną miarę porównawczą wytrzymałości materiałów kruchych.

Obliczone z powyższego wzoru średnie ciśnienie „zgniatające“ na polu  $F_1 < F$  jest widocznie większe od  $K_k$ . Ze stanowiska teorii sprężystości i wytrzymałości tłumaczy się to ciśnieniami poprzecznymi w elementach leżących na liniach działania nacisku na pole  $F_1$ . Te ciśnienia poprzeczne powstać muszą wskutek zapory, jaką stawia rozszerzeniu poprzecznemu materiał leżący zewnątrz  $F_1$ . One będą tem większe w stosunku do ciśnień podłużnych, im większe jest  $F$  wobec  $F_1$ .

Natomiast wartość stosunku  $P_w : F$  wypada z powyższego wzoru mniejsza od  $K_k$ , co było również do przewidzenia.

Wniosek praktyczny: Ciśnienie dopuszczalne między płytą łożyskową o polu  $F_1$  a ciosem o polu przekroju  $F$  może być większe w stosunku  $\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$  od dopuszczalnego ciśnienia materiału ciosu przy równej pewności.

**24. Naprężenia termiczne.** Równomierne ogrzanie lub oziębienie ciała swobodnego wywołuje jego odkształcenie objętościowe, podobnie jak wszędzie równomierne rozciąganie lub ściskanie. Gdy ciało jest nieswobodne, a ograniczenie swobody tego rodzaju, że rozszerzenie lub skurczenie wywołane zmianą temperatury jest utrudnione lub uniemożliwione, to muszą powstać siły zewnętrzne (reakcje) i napięcia zwane termicznymi. Naprężenia termiczne mogą powstać w ciele swobodnem wskutek częściowego, miejscowego ogrzania. One to wywołują np. pękanie szklanki ogrzanej od wnętrza przez wlanie gorącego płynu. W konstrukcjach budowlanych liczymy się częściej z naprężeniami termicznymi przy równomiernej zmianie temperatury uwarunkowanemi sposobem ustalenia konstrukcji. Najprostszym przykładem jest pręt o stałym przekroju i zupełnie ustalonych punktach końcowych osi długości  $l$ . Skoro ten pręt osadzono przy pewnej temperaturze, to wydłużenie termiczne wywołane podwyższeniem temperatury o  $t^\circ$  byłoby  $= \alpha \cdot l \cdot t$ , jeżeli  $\alpha$  jest spółczynnikiem tego wydłużenia. Ponieważ to wydłużenie jest zniesione naprężeniem termicznym  $\sigma$ , a odpowiadające temu naprężeniu wydłużenie sprężyste  $= \frac{\sigma \cdot l}{E}$ , przeto  $\frac{\sigma \cdot l}{E} + \alpha \cdot l \cdot t = 0$  a stąd:

$$\sigma = -\alpha E t.$$

(Wzór ważny do granicy proporcjonalności materiału i przy stałej wartości termicznego spółczynnika wydłużenia  $\alpha$ .)

Obliczona w powyższym przykładzie wartość naprężenia termicznego jest oczywiście wyższą granicą wartości rzeczywistej, albowiem zupełne ustalenie zachodzi w praktyce tylko z większem lub mniejszem przybliżeniem.

Inne technicznie ważne przypadki będą rozpatrywane w zagadnieniach dotyczących belek, łuków, kratownic itp.

**25. Naprężenia pierwotne, odlewnicze, skurczowe i zestawcze (montażowe).** Elementy konstrukcyjne są nie zawsze ciałami pozbawionemi naprężeń w stanie naturalnym (tj. bez sił zewnętrznych), jak się to zwykle



przyjmuje w teorii sprężystości. Niekiedy procesy technologiczne, jakim podlegał materiał przy wytwarzaniu elementu, pozostawiają wyraźny ślad w postaci naprężeń pierwotnych (samonaprężeń). Powstają one zwłaszcza przy obróbce na zimno metali (doświadczenia Heyna, 1911—1914), albo przy ostygnięciu odlewów. W tym drugim przypadku noszą nazwę naprężeń odlewniczych. W pierwszym przypadku są samonaprężenia wywołane zjawiskiem twardnienia i można je usunąć przez wyżarzanie, w drugim zaś powstają przez krzepnięcie i kurczenie kolejno ostygających najpierw warstw zewnętrznych, a potem wewnętrznych. W obu wypadkach powstają ciągnięcia w warstwach zewnętrznych, a ciśnienia wewnątrz ciała, które przy obciążaniu go składają się z naprężeniami obliczonymi przez teorię sprężystości w obrębie ważności prawa Hooke'a, a zatem wpływają niekorzystnie na wytrzymałość ciała.

Naprężenia skurczowe występują w drewnie i w betonie. W drewnie powstają one wskutek procesu wysychania, przy którym ten materiał się kurczy najsłabiej w kierunku równoległym do włókien, najsilniej zaś w kierunku prostopadłym do włókien, a zarazem stycznym do słoików.

W betonie powstają naprężenia skurczowe wskutek procesu tężenia (krzepnięcia). Tężąc na powietrzu beton się kurczy i skoro temu stoi na przeszkodzie, czy to sposób podparcia, czy też wzmacniające pręty żelazne, to w nim powstaną w najprostszych przypadkach ciągnięcia doprowadzające nawet do pęknięć. Tężąc zaś pod wodą beton pęcznieje, co wywołuje w tych samych przypadkach daleko mniej szkodliwe ciśnienia.

Wpływ skurczenia betonu na odpowiadające mu naprężenia jest oczywiście równoważny wpływowi stosownie dobranego obniżenia temperatury i dlatego np. niemieckie przepisy żelbetowe z r. 1916 zalecają uwzględnianie poprzedniego wpływu przez przyjęcie w obliczeniu równoważnej obniżki temperatury o  $15^{\circ}\text{C}$ , przy średniej wartości współczynnika termicznego wydłużenia  $\alpha = 0,00001$  (na  $1^{\circ}\text{C}$ ).

Nakoniec naprężenia zestawcze mogą być zamierzone lub przypadkowe. Pierwsze, zwane także „sztucznymi“, są z góry dane i mają ostatecznie na celu korzyści gospodarcze; natomiast drugie, wywołane błędami wykonania, są z reguły szkodliwe.

Przykładem pierwszego rodzaju naprężeń zestawczych są naprężenia w śrubach żelaznych, ściągających poprzecznie drewnianą belkę kratową Howe'a, albo naprężenia w ścięgnaach belek wzmocnionych, na jakich zwykle opierają konstrukcję długich wagonów kolejowych. Przykładem drugiego rodzaju tych naprężeń jest pręt „zbyteczny“ belki kratowej, mający łączyć dwa dane węzły już ustalone w układzie głównym (statycznie wyznaczalnym), który to pręt jest wskutek niedokładności wykonania (wiercenia dziur na nity itp.) nieco za krótki albo za długi. Aby połączenie wykonać, trzeba go nieco rozciągnąć lub ścisnąć, wskutek czego w obu przypadkach powstaną naprężenia zestawcze w całej kratownicy, które się dodają algebraicznie do naprężeń wywołanych obciążeniem.

**26. Zasada de Saint-Venant'a.** Warunki krańcowe technicznych zagadnień teorii sprężystości są zwykle tak złożone i nieuchwytnie, że nawet przy uproszczonym do możliwych granic modelu elementu konstrukcyjnego nader trudno znaleźć całkiem dokładnie stan napiecia i odkształcenia przez rozwiązanie równań różniczkowych teorii. To jednakże nie przeszkodziło rozwiązaniu ogromnej liczby zadań technicznego znaczenia z wystarczającym przybliżeniem nawet bez uciekania się do owych równań różniczkowych dzięki pewnej własności rozwiązań ścisłych, którą sformułował ogólnie de Saint-Venant. Tę własność objaśni najlepiej przykład następujący. Na górną podstawę słupa wywieramy w środku osiowy nacisk  $P$ , raz za pośrednictwem bardzo sztywnej płyty nakrywającej cały przekrój  $P$ , drugi raz za pośrednictwem podobnej płyty o polu  $F_1 < F$ , trzeci raz za pośrednictwem

niewielkiej stalowej kuli. (Fig. 129.) W każdym z tych trzech przypadków otrzymujemy oczywiście w górnym końcu słupa bardzo różne stany napiecia, ale obserwując odkształcenia w przekroju odległym od górnego np. o  $1,5d$  do  $2d$  (jeżeli  $d$  oznacza największy wymiar przekroju), zauważymy już różnice bardzo małe. W tych przekrojach jest rozkład ciśnień praktycznie jednakowy i równomierny we wszystkich trzech przypadkach.

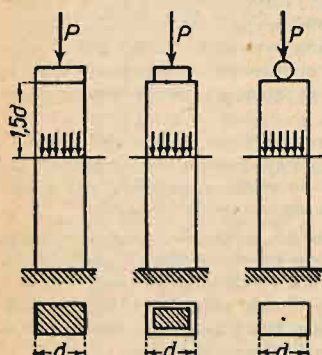


Fig. 129.

Uogólniając to można wyrazić zasadę de Saint-Venant'a w następującej postaci:

Jeżeli na pewien obszar ciała sprężystego w równowadze działamy kolejno rozmaicie rozmieszczonymi, ale statycznie równoważnymi układami sił zewnętrznych (obciążeń), to w odległości od obszaru, przekraczającej dość znacznie jego rozmiary, powstają praktycznie jednakowe stany napiecia.



Fig. 130.

O stanie napiecia i odkształcenia w przekroju dość odległym od miejsc bezpośrednio obciążonych decyduje przeto w pierwszym rzędzie tylko wypadkowa  $\bar{R}$  i ogólny moment  $\bar{M}$  wszystkich sił zewnętrznych, działających na część ciała tym przekrojem odciętą. (Biorąc zamiast tej części drugą, pozostałą, otrzymujemy oczywiście, z powodu równowagi, wypadkową  $-\bar{R}$  i moment  $-\bar{M}$ ). Dzięki temu można posługując się zasadą superpozycji składać doświadczalnie sprawdzone przybliżone rozwiązania najprostszych zadań częściowych, aby otrzymać wystarczające dla praktyki rozwiązania bardzo wielu zadań złożonych.

**27. Główne rodzaje wytrzymałości prętów czyli belek.** Najbardziej rozpowszechnionym typem elementu konstrukcyjnego jest pręt czyli belka. Wyznaczywszy naprężenia normalne i styczne w każdym przekroju poprzecznym pręta, znajdujemy tem samym stan napiecia i odkształcenia całego pręta, co pozwala zwykle ocenić jego warunki sztywności, wytrzymałości i ekonomji. W tym celu sprowadzamy według prawideł statyki ciała sztywnego wszystkie siły zewnętrzne, działające na część pręta odciętą danym przekrojem, do jego środka geometrycznego (środku ciężkości). Otrzymaoną w ten sposób siłę  $\bar{R}$  rozkładamy na siłę normalną  $N$  i styczną  $T$  do przekroju (fig. 130). Parę sił zaś rozkładamy również na parę leżącą w płaszczyźnie przekroju o momencie  $M_N$  (którego wektor jest normalny do przekroju) i parę w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju o momencie  $M_T$  (którego wektor leży w płaszczyźnie przekroju).

Siłę  $N$  jako działającą wzdłuż osi pręta nazywamy siłą podłużną [rozciągającą (+) lub ściskającą (-)],  $T$  siłą poprzeczną,  $M_N$  momentem skręcającym,  $M_T$  momentem zginającym. Mówimy, że pręt jest w rozpatrywanym przekroju  $F$  narażony tylko

I. i II. na (a) rozciąganie lub (b) ściskanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części I sprowadzają się do siły podłużnej  $N$ , skierowanej (a) od przekroju ku części odciętej I lub (b) od części I ku przekrojowi;



III. na ścinanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do siły poprzecznej  $T$ ;

IV. na skręcanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary skręcającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie równoległej do przekroju  $F$  [moment tej pary  $M_N$  nazywa się momentem skręcającym (momentem skręcenia)];

V. na zginanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary zginającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju  $F$  (czyli równoległej do osi pręta w danym miejscu). [Moment tej pary  $M_T$  nazywa się momentem zginającym (momentem zgięcia).]

W przypadku prętów prostych o stałym przekroju (pryzmatycznych) rozróżniamy stosownie do powyższych pięciu przypadków, tyleż głównych rodzajów wytrzymałości prętów. Jeżeli zaś pręt jest narażony jednocześnie na dwa lub więcej z powyższych sposobów obciążenia przekroju, to mówimy o złożonej wytrzymałości pręta. I tutaj odróżniamy doraźną wytrzymałość od wytrzymałości przy powtarzającym się lub przemiennym obciążeniu. Zależnie tedy od sposobu obciążenia pręta mówimy jak w ustępie 19. o obciążeniu rozrywającym, zgniatającym, a nadto o obciążeniu ścinającym, ukrecającym i łamiącym.

Przekrój, w którym zachodzi największe wyężenie materiału, nazywamy przekrojem niebezpiecznym.

## II. Rozciąganie i ściskanie.

28. Pręty proste narażone na rozciąganie lub ściskanie bez niebezpieczeństwa wyboczenia (fig. 130 a). Ogólny typ wzorów do obliczenia (wzory podstawowe):

I. napężenie  $\sigma$  przy danym obciążeniu  $P$  przekroju o polu  $F$ :

$$\sigma = \frac{P}{F} \dots \dots \dots I$$

II. potrzebne pole przekroju przy danym obciążeniu i danej wartości napężenia bezpiecznego:

$$F = \frac{P}{k} \dots \dots \dots II$$

III. obciążenie bezpieczne przekroju przy danym polu  $F$  i danej wartości napężenia bezpiecznego materiału:

$$P_{\text{bezp}} = F \cdot k \dots \dots \dots III$$

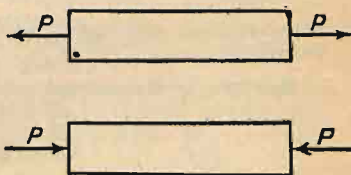


Fig. 130 a.

a) Pręty proste o stałym przekroju. 1. Jeżeli siły zewnętrzne działają tylko na przekroje końcowe, to przy najprostszym założeniu ich równomiernego rozkładu na tych przekrojach mamy do czynienia z jednakowym we wszystkich przekrojach linowym stanem napięcia, a zatem obowiązują wzory podstawowe (I, II, III). Chcąc nadto obliczyć całkowite wydłużenie sprężyste pręta o długości pierwotnej  $l$ , zastosujemy do granicy proporcjonalności wzór:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}.$$

2. Uwzględniając ciężar własny pręta wiszącego lub stojącego pionowo (fig. 131) widzimy, że przekrojem niebezpiecznym jest ten przekrój końcowy,