

Uważając linię ugięcia za parabolę o równaniu  $y = \frac{4y_0}{l^2} x(l-x)$ , gdzie  $y_0$  = ugięcie w środku rozpiętości, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4y_0}{l^2} (l-2x) \quad \dots \quad (19)$$

W przybliżeniu można przyjąć:

$$\psi = \frac{\Delta g + \Delta d}{h} = \nu \text{ śr. } \frac{l-2x}{Eh},$$

gdzie  $\nu$  śr. jest to średnie naprężenie w pasach (bez względu na znak). Lepiej jednak znaleźć  $\psi$  z planu Williot'a. Wzór 18. w połączeniu z 19. można zastosować do narożnika, dla innych słupów należałoby zastosować linie wpływowe naprężeń II-rzędnych.

Z porównania równań (1) i (12) wynika:  $\nu_{II} = 2 \frac{e}{s} E' \eta$ . Dla prętów o przekroju symetrycznym jest  $2e$  równe szerokości pręta. Należy się więc starać o możliwie lekki wygląd belki w widoku. Wartość  $\eta = 2\tau_{mn} + \tau_{nm}$  zależy w wysokim stopniu od rodzaju kraty. W pasach (pomijając pola skrajne przy narożnikach) naprężenia drugorzędne w przypadku kraty prostokątnej N i półprzekątniowej K są bardzo małe (około 5%). Jeżeli linia ugięcia pasa pomostowego wykazuje załomy odwrotne, naprężenia II-rzędne są procentowo do naprężeń I-rzędnych znaczne: przy kracie (fig. 357) dochodzą do 28%, kracie N i V z drugorzędnym podparciem odpowiednio do 33 i 44%, przy kracie dwukrotnej do 86% (por. Bażant). Należałoby w tym przypadku zastosować przekrój pasa pomostowego symetryczny, aby zmniejszyć  $e$ . Bardzo znaczne są naprężenia drugorzędne w łukach kratowych ze ścięgnem, belkach kratowych wzmocnionych łukiem, belkach trójpasowych, oraz w wieszarach z belkami usztywniającymi.

## VI. Ustroje hiperstatyczne.

### A. Równania sprężystości.

Jeżeli belka, np. fig. 358 a, jest  $n_w$ -krotnie wewnętrznie, względnie  $n_z$ -krotnie zewnętrznie hiperstatyczna (statycznie niewyznaczalna; por. str. 1189), to przez opuszczenie  $n_w$  prętów istotnych, względnie  $n_z$  prętów łożyskowych (pręty nadliczbowe) można kratownicę uczynić izostatyczną (statycznie wyznaczalną), tj. sprowadzić ją do układu zasadniczego (fig. b). Aby stan napięć w układzie zasadniczym był identyczny ze stanem w belce rzeczywistej, należy każdy opuszczony pręt łożyskowy zastąpić siłą, działającą w kierunku tego pręta, jako nacisk na belkę, zaś pręt istotny dwiema siłami zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony i działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli pręt był rozciągany, zaś oddalania, jeżeli był ściskany, a równemi co do wielkości napięciu tegoż pręta (tensory). Niech będą  $X_a, X_b, X_c$ , niewiadome oddziaływania opuszczonych podpór, względnie napięcia opuszczonych prętów istotnych (fig. b). Jeżeli nazwiemy  $R_0, S_0$  reakcje podpór i siły wewnętrzne w układzie zasadniczym (fig. c) wskutek sił zewnętrznych  $\Sigma P$ , zaś  $R_w, S_w$  wskutek siły, względnie napięcia  $X_a = -1$  (fig. d) i wreszcie odpowiednio  $R_b, S_b; R_c, S_c \dots$  (fig. e i f), to w ustroju rzeczywistym (fig. a) na podstawie prawa superpozycji reakcja pewnej podpory:

$$R = R_0 - R_a X_a - R_b X_b - R_c X_c \dots$$

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c \dots$$

. . . . . (1)

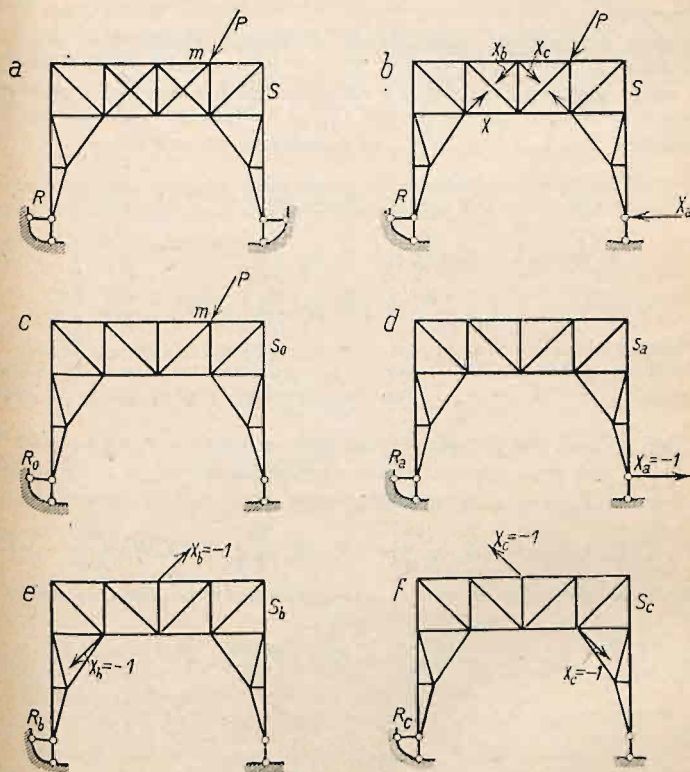


Fig. 358.

Jeżeliby w kratownicy prócz prętów były jeszcze elementy o ściance pełnej, pracujące nie tylko siłą osiową (zmienną)  $N$ , ale i momentem  $M$ , to w dowolnym przekroju odpowiednio do równania (1) byłoby:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c \dots \\ N &= N_0 - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \dots (1a)$$

Zastosujmy równanie pracy przygotowanej do rzeczywistego układu przesunięć (fig. b) i przygotowanego stanu napięć  $X_a = -1$  (fig. d), nazywając  $\delta_a$  przesunięcie w układzie rzeczywistym punktu zaczepienia siły  $X_a$  w kierunku siły  $X_a = -1$ ,  $\delta_b$  przyrost rzeczywisty oddalenia węzłów, w których zaczepiają siły  $X_b$ , zaś  $L_a = \sum R_a r$  pracę oddziaływań  $R_a$  na rzeczywistych przesunięciach podpór  $r$ , to wedle równania (7), str. 1239:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \sum S_a S \frac{s}{EF} + \sum S_a \omega t s + \int M_a M \frac{ds}{EJ} + \\ + \int N_a N \frac{ds}{EF} + \int N_a \omega t ds + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds \quad . \quad (2)$$

Dla tego samego stanu sił  $X_a = -1$  przyjmijmy kolejno, jako stan przesunięć, przesunięcia, spowodowane w układzie zasadniczym uogólnionymi siłami  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1 \dots$ , tudzież zmiany temperatury całego układu o wielkości  $t$  i różnicami temperatury  $\Delta t$ , i nazwijmy przesunięcie punktu zaczepienia siły  $X_a$  w każdym powyższym wypadku odpowiednio  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac} \dots$ ,  $\delta_{at}$  to z równania (2) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 1. \delta_{aa} &= \sum S_a S_a \frac{s}{EF} + \int M_a M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_a \frac{ds}{EF} \\ 1. \delta_{ab} &= \sum S_a S_b \frac{s}{EF} + \int M_a M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_b \frac{ds}{EF} \\ 1. \delta_{ac} &= \sum S_a S_c \frac{s}{EF} + \int M_a M_c \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_c \frac{ds}{EF} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad . \quad (3)$$

$$1. \delta_{at} = \sum S_a \omega t s + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_a \omega t ds \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Jeżeli stan sił jest  $\sum P$  (fig. c), zaś stan przesunięć  $X_a = -1$  (fig. d), to, gdy  $\delta_{ma}$  jest przesunięciem punktu zaczepienia siły  $P_m$  w kierunku tejże siły wskutek  $X_a = -1$ , będzie analogicznie do równań (3):

$$\sum P_m \delta_{ma} = \sum S_0 S_a \frac{s}{EF} + \int M_0 M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_0 N_a \frac{ds}{EF} \quad . \quad (5)$$

Jeżeli w równaniu (2) wstawimy wartości na  $S$ ,  $M$  i  $N$  z równania (1) i (1a), to z uwagi na (3), (4) i (5) będzie:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at}$$

albo:

$$\delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \delta_{ac} X_c + \dots = \sum P_m \delta_{ma} - L_a + \delta_{at} - \delta_a$$

Podobnie:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ba} X_a + \delta_{bb} X_b + \delta_{bc} X_c + \dots &= \sum P_m \delta_{mb} - L_b + \delta_{bt} - \delta_b \\ \delta_{ca} X_a + \delta_{cb} X_b + \delta_{cc} X_c + \dots &= \sum P_m \delta_{mc} - L_c + \delta_{ct} - \delta_c \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Tych, t. zw. równań sprężystości (por. str. 1149), jest tyle, co niewiadomych hiperstatycznych  $X$ , można je więc wyznaczyć. Przy pomocy wyznaczników otrzymamy:

$$X_a = \frac{D_a}{D}, \quad X_b = \frac{D_b}{D}, \quad X_c = \frac{D_c}{D} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

We wzorach tych:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \delta_{ac} & \dots \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \delta_{bc} & \dots \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & \delta_{cc} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

$D_a$  ( $D_b$ ,  $D_c \dots$ ) otrzymamy, jeżeli wyrazy pierwszej (drugiej, trzeciej...) kolumny zastąpimy prawami stronami, więc wyrazami wolnymi równań (6). Spółczynniki przy niewiadomych  $X$  w równ. (6) otrzymamy z równ. (3).

Na podstawie prawa Maxwella można spółczynniki:  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac}$  i  $\delta_{am}$  otrzymać z planu przesunięć układu zasadniczego, obciążonego siłą  $X_a = -1$ .

Linia ugięcia pasa pomostowego, wykreślona na podstawie tego planu, jest linią wpływową dla  $\delta_{ma}$ , jeżeli siły  $P_m$  są pionowe. Mając linie wpływowe dla  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ ,  $\delta_{mc} \dots$ , otrzymamy linię wpływową dla  $D_a$  i tem samem dla  $X_a$  na zasadzie równania:

$$D_a = d_{aa} \delta_{ma} - d_{ba} \delta_{mb} + d_{ca} \delta_{mc} - \dots \quad (9)$$

przyczem np.  $d_{ba}$  jest to podwyznacznik otrzymany z wyznacznika  $D$  przez opuszczenie wiersza i kolumny w których znajduje się  $\delta_{ba}$ , więc np. w przypadku trzech niewiadomych:

$$d_{ba} = \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = \delta_{ab} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}.$$

Zasada najmniejszości pracy odkształcenia. Jeżeli opuścimy wpływ temperatury i poddania się podpór, to możemy równania sprężystości (6) przedstawić w formie przejrzystej:

$$\frac{\partial L}{\partial X_a} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial X_b} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial X_c} = 0 \dots \quad (10)$$

przyczem praca odkształcenia układu wynosi:

$$L = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 s}{EF} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} \dots \quad (11)$$

Jest ona funkcją zmiennych  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c \dots$  za pośrednictwem równań (1) i (1a).

Zatem niewiadome hiperstatyczne  $X$  przyjmują takie wartości, aby praca odkształcenia układu  $L$ , jako ich funkcja była najmniejszą (por. str. 1145).

Pierwsze z równań (10) możemy tedy napisać:

$$\sum \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S}{\partial X_a} + \int \frac{Mds}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_a} + \int \frac{Nds}{EF} \frac{\partial N}{\partial X_a} = 0 \quad (10a)$$

### Przykłady.

1. Belka jednym końcem poziomo utwierdzona, a drugim wolno podparta (fig. 359) tworzy utwór hiperstatyczny pierwszego stopnia, gdyż dla przejścia do utworu zasadniczego wystarczy usunięcie jednego pręta podporowego (fig. b). Mamy:  $M = M_0 - M_a X_a$  [por. równanie (1a)].

Celem obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnej  $X_a$  zastosujemy równania (6), (3) i (5). W przypadku sztywnych podpór i stałego  $J$  będzie:

$$X_a \cdot \delta_{aa} = \sum P_m \delta_{ma}, \quad X_a = \frac{\int_0^l M_0 M_a dx}{\int_0^l M_a^2 dx} \dots \quad (12)$$

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  (fig. a, b, c):

$$\int_0^l M_0 M_a dx = \int_0^l \frac{gx^3}{2} dx = \frac{g l^4}{8}, \quad \int_0^l M_a^2 dx = \int_0^l x^2 dx = \frac{l^3}{3}.$$

$$X_a = 3/8 gl.$$



Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - \frac{g x^2}{2}.$$

Największą wartość dodatnią osiąga moment dla  $x = \frac{3}{8}l$ :

$$M_{+ \max} = \frac{9}{128} g l^2;$$

zaś największą ujemną na podporze  $b$ :

$$M_{- \max} = -\frac{g l^2}{8}.$$

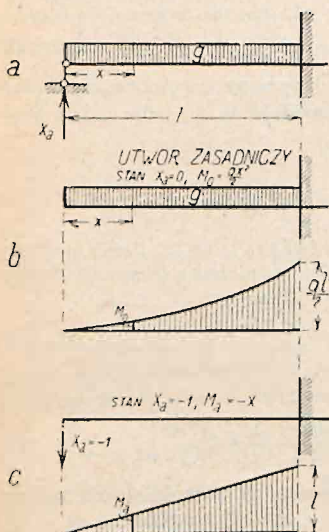


Fig. 359.

b) Dla obciążenia ciężarem skupionym  $P$  (fig. 360) otrzymamy, stosując równania (6) i (12):

$$X_a = \frac{P(l-u)^2(2l+u)}{2l^3}.$$

Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - P(x-u).$$

2. Belka obu końcami poziomą utwardzona (fig. 361) jest dwukrotnie hiperstatyczna; wielkości hiperstatyczne tworzą momenty podporowe  $X_a$  i  $X_b$ . Wedle równania (1a):

$$M = M_0 - M_a X_a - M_b X_b.$$

Wedle równań (6) i (3) przyjmując zupełne utwardzenie belki i stały moment bezwładności  $J$  otrzymamy:

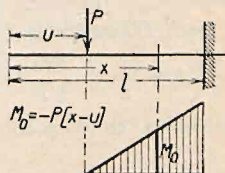


Fig. 360.

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{a m} - X_a \delta_{a a} - X_b \delta_{a b} &= 0 \\ \sum P_m \delta_{b m} - X_a \delta_{b a} - X_b \delta_{b b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

przez co:

$$\left. \begin{aligned} E J \cdot \delta_{a a} &= \int_0^l M_a^2 dx = \frac{l}{3} \\ E J \cdot \delta_{b b} &= \int_0^l M_b^2 dx = \frac{l}{3} \\ E J \cdot \delta_{a b} &= \int_0^l M_a M_b dx = \frac{l}{6} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

(por. fig. c i d).

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  na całej długości belki:

$$M_a = \frac{1}{2} g x (l-x).$$

Z powodu symetrii:

$$\sum P_m \delta_{a m} = \sum P_m \delta_{b m} = \int_0^l M_a M_a dx = \frac{g l^3}{24}.$$

zatem z równań (13) i (14):

$$X_a = X_b = \frac{g l^2}{12}.$$

Moment w dowolnym przekroju  $X$  (fig. 361):

$$M = \frac{1}{2} g x (l-x) - X_a \frac{l-x}{l} - X_b \frac{x}{l}$$

$$M_{+ \max} = \frac{g l^2}{24} \text{ (w środku belki)}$$

$$M_{- \max} = -\frac{g l^2}{12} \text{ (na podporze).}$$

Oddziaływania:  $C_a = C_b = \frac{1}{2} g l$ .

b) Dla obciążenia ciężarem skupionym  $P$  (fig. 362):

$$\sum P_m \delta_{am} = \int_0^l M_a M_0 dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{l-x}{l} dx + \int_u^l \frac{P u}{l} (l-x) \frac{l-x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [2 l^2 - 3 u l + u^2]$$

$$\sum P_m \delta_{bm} = \int_0^l M_b M_0 dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{x}{l} dx + \int_u^l \frac{P u}{l} (l-x) \frac{x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [l^2 - u^2].$$

Z równań (13) i (14) i ostatnich dwu:

$$X_a = \frac{P u}{l^2} (l-u)^2,$$

$$X_b = \frac{P u^2}{l^2} (l-u).$$

Oddziaływania [por. równ. (1)]:

$$C_a = \frac{P}{l^2} (l^3 + 2 u^3 - 3 u^2 l),$$

$$C_b = \frac{P u^2}{l^3} (3 l - 2 u).$$

Metoda całkowania linii ugięcia: Baszyński wychodzi z równania linii ugięcia (por. str. 1123):

$$y = \frac{1}{E J} f(x) \dots (a)$$

Wtedy nachylenie do poziomu w dowolnym punkcie:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{1}{E J} f'(x) \quad (b)$$

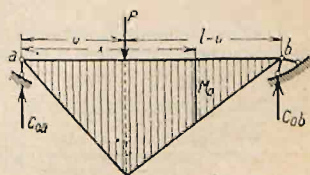


Fig. 362.

Fig. 361.

Moment:

$$M_x = -E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -f''(x) \dots (c)$$

Siła poprzeczna:

$$T_x = -\frac{d M_x}{d x} = -f'''(x) \dots (d)$$

Obciążenie jednostkowe:

$$p_x = -\frac{d T_x}{d x} = f^{IV}(x) \dots (e)$$

Dla różnych rodzajów belek możemy z góry określić pewne warunki, jakie powyższe równania spełnić muszą. Np. dla belki wolno podpartej mamy na podporze:  $y = 0$ ,  $M = 0$ , dla belki utwierdzonej na podporze:  $y = 0$ ,  $\text{tg } \alpha = 0$ , dla wspornika na końcu tegoż:  $M = 0$ ,  $V = 0$ .

Wstawiając odpowiednie wartości w równania (a) — (e) otrzymujemy warunki, jakie muszą spełnić się dla pewnej belki, a stąd możemy też określić w każdym punkcie momenty, siły poprzeczne i kształt linii ugięcia dla pewnego danego obciążenia  $p_x$ . Dla poszczególnych rodzajów obciążenia mamy:

a) dla obciążenia jednostajnego:  $p_x = p \dots \dots \dots (f)$

b) dla obciążenia wzrastającego wedle linii prostej:  $p_x = p(\alpha + \beta \xi) \dots (g)$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{l},$$

np. dla obciążenia wzrastającego od  $p_1$  do  $p_2$ :  $p_x = p_1 \left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1} \xi\right)$ ,

zaś dla obciążenia wzrastającego od 0 do  $p$ :  $p_x = p \xi$ .

c) dla obciążenia zmieniającego się wedle paraboli:

$$p_x = p(\alpha + \beta \xi + \gamma \xi^2) \dots \dots \dots (h)$$

Biorąc za podstawę najogólniejsze z tych równań (h), otrzymamy równania (a) — (e) w postaci:

$$y = \frac{p l^4}{n EI} (\alpha + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6) \dots (i)$$

$$a = \frac{p l^3}{n EI} (a_1 + 2 a_2 \xi + 3 a_3 \xi^2 + 4 a_4 \xi^3 + 5 a_5 \xi^4 + 6 a_6 \xi^5) \dots (j)$$

$$M_x = -\frac{p l^2}{n} (2 a_2 + 6 a_3 \xi + 12 a_4 \xi^2 + 20 a_5 \xi^3 + 30 a_6 \xi^4) \dots (k)$$

$$V_x = -\frac{p l}{n} (6 a_3 + 24 a_4 \xi + 60 a_5 \xi^2 + 120 a_6 \xi^3) \dots \dots \dots (l)$$

$$p_x = -\frac{p}{n} (24 a_4 + 120 a_5 \xi + 360 a_6 \xi^2) \dots \dots \dots (l)$$

W równaniach tych oczywście:

$$a_4 = \frac{n \alpha}{24}, \quad a_5 = \frac{n \beta}{120}, \quad a_6 = \frac{n \gamma}{360} \dots \dots \dots (m)$$

Znając obciążenie, możemy oznaczyć równania (f) — (h), za ich pomocą równanie (m), a wreszcie równania (i) — (l). Otrzymamy wtedy szereg równań pierwszego stopnia o odpowiedniej ilości niewiadomych, które w prostszych wypadkach łatwo rozwiązać. Chodzi tylko o to, aby wyznaczyć warunki, jakie muszą spełnić się dla poszczególnych punktów belki.

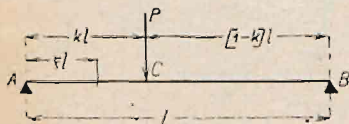


Fig. 363.

Równań powyższych można też użyć dla ciężaru skupionego (fig. 363): Niech ciężar  $P$  znajduje się w odległości  $kl$  od podpory  $A$  belki o długości  $l$ ; w tym punkcie  $\xi = k$ . Wtedy jest  $p_x = 0$ , zatem współczynniki dla części  $AC$ :  $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ , podobnie dla  $CB$ :  $b_4 = b_5 = b_6 = 0$ . Pozostałe 8 współczynników  $a, a_1 \dots a_3$  i  $b, b_1 \dots b_3$  znajdziemy na podstawie danych, odnoszących się do końców belki i do punktu  $C$ . Dla punktu  $C$  mamy:  $y' = y''$ ,  $\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha''$ ,  $M' = M''$ ,  $T' - T'' = P$ .

Czyli:  $a - b = k^3, \quad a_2 - b_2 = 3k,$   
 $a_1 - b_1 = -3k^2, \quad a_3 - b_3 = -1.$

**Przykład.** Dla belki obustronnie wmurowanej, obciążonej ciężarem jednostajnie rozłożonym, otrzymamy:  $p_x = p$ , więc  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ . Przyjmując  $n = 24$ , otrzymamy z równań (m):  $a_1 = 1, a_5 = 0, a_6 = 0$ . Dla lewego utwierdzonego końca belki:  $y = 0, \alpha = 0$ , a więc z równań (i) i (j):  $a = 0, a_1 = 0$ . Na prawym końcu ( $\xi = 1$ ), też  $y = 0, \alpha = 0$ , a stąd:

$$0 = a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + 1 = 0,$$

$$0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 2a_2 + 3a_3 + 4 = 0.$$

Z tych dwu równań znajdujemy  $a_2 = -1, a_3 = -2$ , a stąd:  $y = \frac{p l^3}{24 E J} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$ ,

$$a_x = \frac{p l^3}{12 E J} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3), \quad M_x = -\frac{p l^2}{12} (1 - 6\xi + 6\xi^2), \quad V_x = \frac{p l}{2} (1 - 2\xi),$$

na podporze:  $y = 0, \alpha = 0, M = -\frac{p l^2}{12}, V = \frac{p l}{2},$

w środku:  $y = f = \frac{1}{384} \frac{p l^3}{E J}, \alpha = 0, M = +\frac{p l^2}{24}, V = 0.$

Metoda ta może być z korzyścią użyta np. przy belkach krzyżujących się wzajemnie (stropy żelbetowe). Niedogodnością jej jest konieczność rozwiązywania bardzo znacznej ilości równań.

Prócz metod opisanych powyżej używa się do obliczenia niektórych ustrojów hiperstatycznych także innych sposobów jak np. metody punktów stałych i metody trzech wzgl. czterech momentów (por. F. Belki ciągłe i G. Ramy).

## B. Kratownice płaskie hiperstatyczne.

W kratownicach wszystkie pręty narażone są wyłącznie na siły osiowe, więc równania (3), (4) i (5) upraszczają się o tyle, że znikają całki prawej strony.

Belka kratowa dwuprzęsłowa. (Fig. 364). Opuściwszy podporę C, otrzymujemy układ zasadniczy (fig. b). Nieznaną hiperstatyczną jest tedy reakcja podpory  $CX_c$ .

Przyjmując podpory sztywne, tj.  $L_c = 0$  i  $\delta_c = 0$ , i uwzględniając tylko wpływ ciężaru ruchomego  $P_m = 1$ , otrzymamy z równ. (6):

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Linia ugięcia pasa pomostowego AB wskutek siły  $X_c = -1$ , czytana w skali  $1 : \delta_{cc}$ , jest linią wpływową oddziaływania  $X_c$ . Można ją wykreślić przy pomocy ciężarów sprężystych „w” (por. str. 1241), naniesionych w dowolnej skali przy pomocy dowolnego bieguna (fig. c), gdyż  $X_c$  zależy od stosunku  $\delta_{mc} : \delta_{cc}$ . Obierając ugięcie punktu C  $\delta_{cc}$  za jednostkę, możemy wprost odczytywać  $X_c = \delta_{mc}$ . Gdy nie chodzi nam o linie wpływowe, tylko o wartość dla danego obciążenia stałego, to z równania (6), (3) i (5), otrzymamy:

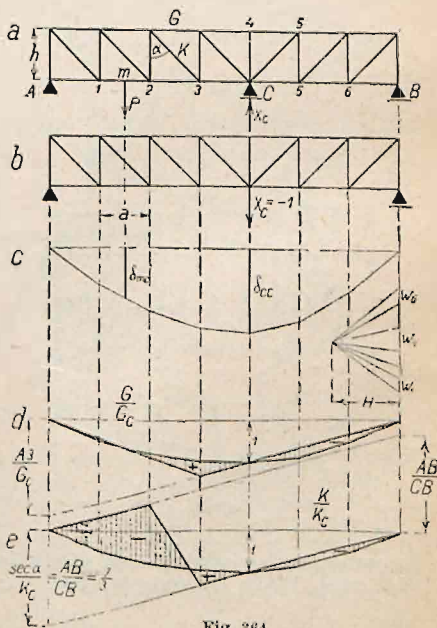


Fig. 364.



$$X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{\sum S_0 S_c \frac{s}{EF}}{\sum S_c^2 \frac{s}{EF}},$$

przez wartości  $S_0$  i  $S_c$  znaleźć można z dwu planów Cremony jednego dla obciążenia układu zasadniczego siłami  $\sum P_m$ , drugiego dla obciążenia siłą  $X_c = -1$ . Siła wewnętrzna w dowolnym przecię  $S = S_0 - S_c X_c = -S_c \left( \frac{S_0}{S_c} - X_c \right)$ . Fig. d przedstawia linję wpływową pręta  $G$ , fig. e zaś pręta  $K$ , podzielone odpowiednio przez  $G_c$  i  $K_c$ .  $G_c$  i  $K_c$  są to siły w prętach  $G$  i  $K$  wskutek

$$X_c = -1, \text{ więc } G_c = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{A3}{h}, K_c = \frac{CB}{AB} \sec \alpha, \text{ czyli } \frac{\sec \alpha}{K_c} = \frac{AB}{CB}.$$

Łuk kratowy bezprzegubowy (fig. 365). Opuszczając pręty  $a$ ,  $b$  i  $c$ , które możemy uważać za pręty łożyskowe, otrzymamy wspornik

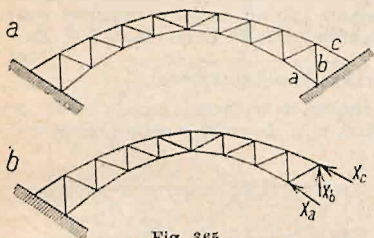


Fig. 365.

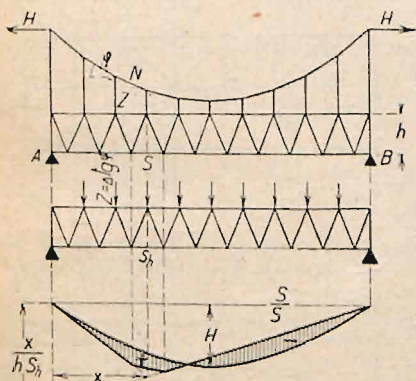


Fig. 366.

(układ zasadniczy, fig. b). Działając nań kolejno siłą  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1$  (fig. b), otrzymamy trzy plany sił, następnie trzy plany przesunięć, a stąd trzy linje ugięcia pasa górnego (pomostowego), które są linjami wpływowymi przesunięć  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$  i  $\delta_{mc}$ . Można z nich skonstruować linje wpływowe niewiadomych  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  (równanie 9 i 8), a następnie linje wpływowe sił wewnętrznych w prętach i linje wpływowe oddziaływań wedle równania (1).

Wieszar usztywniony belką kratową (fig. 366) jest ustrojem hiperstatycznym pierwszego stopnia. Jako wielkość hiperstatyczną obierzemy składową poziomą  $H$  ciągnięcia w wieszarze  $N$ . Otrzymamy wtedy:

$$N = H \sec \varphi.$$

Siła w przecię wiszącym (wieszaku):

$$Z = H \Delta \tan \varphi,$$

gdzie  $\Delta \tan \varphi$  = różnica tangensów nachylenia wieszar z lewej

i prawej strony wieszaka. Jeżeli wieszar jest parabolą, to  $\Delta \tan \varphi = \text{const.}$ , więc  $Z = \text{const.}$  Wedle równania (6) jest:

$$H = \frac{\delta_{mh}}{\delta_{hh}}.$$

Jeżeli  $H = -1$ , to pręty wiszące naciskają na belkę usztywniającą siłami  $\Delta \tan \varphi$ . Należy je uważać za ciężary działające w węzłach pasa

górnego belki  $AB$  (fig.  $b$ ). Plan Cremony przedstawia wówczas siłę  $S_h$ , zaś linia ugięcia pasa pomostowego (dolnego) linię wpływową dla  $\delta_{mh}$ , względnie  $H$ , jeżeli za jednostkę obierzemy  $\delta_{hh}$ . Wedle równania 3 i 5:

$$\delta_{hh} = \Sigma S_h^2 \frac{s}{EF}, \quad \delta_{mh} = \Sigma S_0 S_h \frac{s}{EF}.$$

$S_0$  jest siłą wewnętrzną w przecie belki wolno podpartej  $AB$  (jak gdyby wiszara nie było).

Siła wewnętrzna w dowolnym przecie belki usztywniającej (równanie 1):

$$S = S_0 - HS_h = S_h \left( \frac{S_0}{S_h} - H \right) = S_h \cdot s.$$

Linję wpływową dla

$$s = \frac{S_0}{S_h} - H = \frac{S}{S_h}$$

łatwo skonstruować na linii  $H$ , przez naniesienie linii wpływowej dla  $S_0$  w skali  $1 = S_h$  (por. fig.  $c$ ).

Poniżej podajemy liczbowy przykład obliczenia hiperstatycznego więzara dachowego (fig. 367). Ciężary węzłowe pionowe  $P = 3000 \text{ kg}$ .

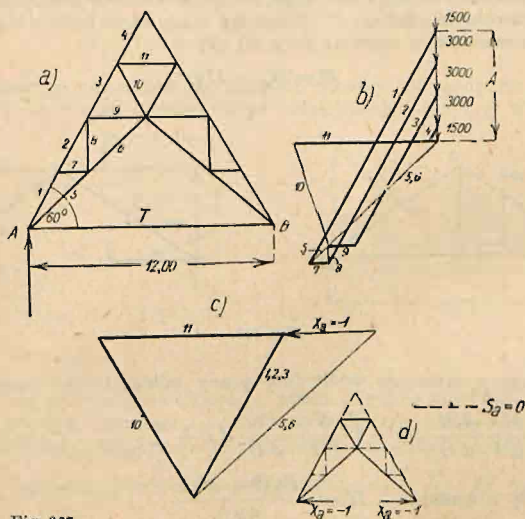


Fig. 367.

Jako ilość hiperstatyczną przyjmujemy siłę w ścięgnię  $T = X_a$ . Wyznamy plan sił  $S_0$  dla obciążenia pionowego (fig.  $b$ ) i plan sił  $S_a$  dla  $X_a = -1$  (fig.  $c$ ). Siły  $S_a$  w prętach 4, 7, 8 i 9 są równe zero (fig.  $d$ ). Dla obliczenia  $X_a$  musimy przyjąć przekroje prętów. W mniejszych konstrukcjach dachowych możemy uczynić to w sposób następujący. Jeżeli średni przekrój pasa górnego wynosi  $F_g$ , to przekrój pasa dolnego w przybliżeniu  $F_d = 0,6 - 0,8 F_g$ , zaś przeciętny przekrój krzyżuleców  $F_k = 0,2 - 0,5 F_g$ . W danym wypadku szacujemy:  $F_g = 40 \text{ cm}^2$ ,  $F_d = 32 \text{ cm}^2$ ,  $F_k = 20 \text{ cm}^2$ , przekrój ścięgna  $F_s = 15 \text{ cm}^2$ . Podstawiając w pierwszym z równań (6), str. 1258:  $L_a = 0$ ,  $\delta_{at} = 0$ ,  $X_b = X_c = 0$ ,  $E\delta_a = \frac{X_a s_a}{F_a} = X_a e_a$  otrzymamy, rozwiązując ze względu na  $X_a$ ,  $X_a = \frac{\Sigma S_0 S_a e}{\Sigma S_a^2 e} = \frac{+4350}{+702,4} = 6,17 \text{ t}$ , por.

tabelę. Siły w prętach  $S = S_0 - S_a X_a$  są około 50% mniejsze niż  $S_0$ . Podobnie należy uwzględnić wpływ parcia wiatru. Przekroje potrzebne będą mniejsze, niż gdyby ściegna nie było, a wskutek tego więzar hiperstatyczny wypadnie o 25–30% tańszy.

Tablica 80.

Pręt	s cm	F cm <sup>2</sup>	$\varrho = \frac{s}{F}$ 1/cm	$S_a$	$S_a^2$	$S_a^2 \varrho$	$S_0$	$S_0 S_a \varrho$	$S_a X_a$	S
1	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-24,4	+366	-12,34	-12,06
2	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-21,8	+328	-12,34	-9,46
3	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-15,8	+237	-12,34	-3,47
10	300	20	15	+2,0	+4,0	60	+12,0	+360	+12,34	+0,34
11	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-18,4	+276	-12,34	-6,06
T	1200	15	80	-1,0	+1,0	80	0	0	-6,17	+6,17
$\Sigma S_a^2 \varrho = 702,4$							$\Sigma = +4350$			

### C. Belki rozporowe i wieszarowe.

Rozpornica trójkątna (wzgl. wiązanie wiszące trójkątne) (fig. 368). Moment w dowolnym punkcie C równa się momentowi belki wolno podpartej AB, pomniejszonemu o moment pary sił Hy:

$$M = M_0 - Hy \quad (15)$$

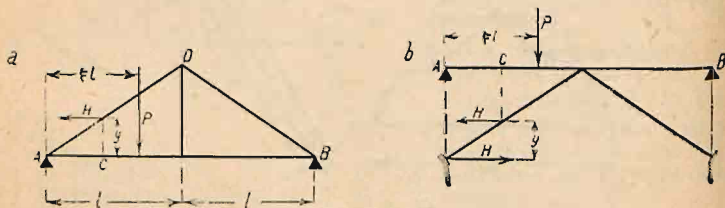


Fig. 368.

Wychodząc z równania pochodnej pracy odkształcenia (równanie 10a)

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dH} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{dN}{dH} dx + \sum \frac{Ss}{EF} \frac{dS}{dH} = 0,$$

otrzymuje się równanie: 
$$H = \frac{P\xi(3 - \xi^2)l}{4\mu h},$$

względnie dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całej długości belki:

$$H = \frac{5gl^2}{8\mu h},$$

przez co współczynnik  $\mu$  zależy od wymiarów i materiału i wynosi:

$$\mu = 1 + \frac{3J}{Fh^2} \left( 1 + \frac{E}{E_1} \cdot \frac{F}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + 2 \frac{EF}{E_2 F_2} \operatorname{tg}^3 \alpha \right). \quad (16)$$

w którym to równaniu  $E$ ,  $J$  i  $F$  oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki poziomej AB,  $E_1$  i  $F_1$  moduł sprężystości i przekrój zastrzałów AD i BD, a  $E_2$  i  $F_2$  odpowiednie wartości dla słupa.



Przy pomocy górą (fig. 368 b):

$$\mu = 1 + \frac{3J}{F_1 h^2} \frac{E}{E_1} \cdot \frac{s}{l \cos^2 \alpha} \dots \dots \dots (16a)$$

przyczem  $s$  jest rzeczywistą długością zastrzałów.

Spółczynnik  $\mu$  różni się niewiele od jedności; dla  $\mu = 1$  wartości zarówno momentów zginających, jak i oddziaływań są identyczne z wartościami dla belki ciągłej dwuprzęsłowej, bo opuszcza się wtedy wpływ skrócenia zastrzałów, przez co podpora środkowa  $D$  staje się stałą.

$$\text{Oddziaływanie środkowe: } D = \frac{Hh}{l} = \frac{P\xi(3 - \xi^2)}{4\mu};$$

$$\text{dla ciężaru jednostajnie rozłożonego: } D = \frac{5gl}{8\mu}.$$

Linje wpływowe momentów otrzymuje się w myśl równania (15) przez odjęcie rzędnych linii wpływowej parcia poziomego  $H$ , pomnożonych przez  $y$  od rzędnych linii wpływowej momentu belki wolno podpartej o rozpiętości  $2l$  (fig. 369).

Wartość  $\mu$  uwzględnia się praktycznie w ten sposób, że obliczywszy przekroje dla  $\mu = 1$ , wyznacza się  $\mu$  z wzoru (16), poczem poprawia się linje wpływowe, dodając różnicę powstałą przez zmianę wartości  $\mu$ :

$$\Delta_{\mu} = Hy - \frac{Hy}{\mu} = Hy \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Jeżeli przekroje obliczono na moment ujemny na podporze  $D$ , to powyższą poprawkę można opuścić, gdyż zmniejszenie parcia  $H$  wywołuje

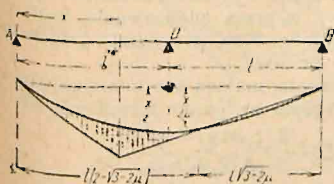


Fig. 369.

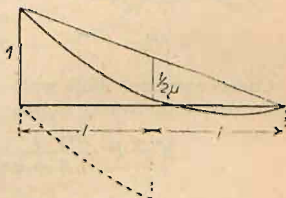


Fig. 370.

zmniejszenie się momentu ujemnego, a zatem popełnia się błąd na korzyść pewności. Poprawka dla przekroju zastrzałów nie ma praktycznej wartości.

Linje wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań otrzymuje się, odejmując rzędne linii wpływowej parcia  $H$ , pomnożonej przez  $\frac{h}{l}$  od trójkąta oddziaływań belki wolno podpartej o rozpiętości  $2l$  (fig. 370).

Rozpornica podwójna (trapezowa) (fig. 371). Wychodząc j. w. z zasadniczego równania (15), otrzymuje się z równania pracy odkształcenia:

$$H = \frac{\int_0^L My dx}{\mu \int_0^L y^2 dx},$$

$$\text{co czyni dla } \xi < 1 \text{ (por. fig.): } H = P\xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)},$$



$$\text{zaś dla } 1 < \xi < \frac{2 + \varphi}{2}: \quad H = Pl \frac{2 + 3\xi\varphi - 3(\xi - 1)^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)}$$

$$\text{dla całk., jednostajnego obciążenia } g: \quad H = \frac{g(5 + 10\varphi + 6\varphi^2 + \varphi^3)l^2}{4\mu h(2 + 3\varphi)}$$

Dla belek o pomoście zawieszonym na rozpornicy wartość  $\mu$  wynosi:

$$\mu_1 = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \frac{2 + \varphi}{2 + 3\varphi} + \frac{3}{h^2(2 + 3\varphi)} \left( 2 \frac{E}{E_1} \cdot \frac{J}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{E}{E_2} \cdot \frac{J}{F_2} \cdot \varphi + \frac{E}{E_3} \cdot \frac{J}{F_3} \operatorname{tg}^3 \alpha \right),$$

przyczem  $E, J, F$  oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki głównej  $AB$ ,  $E_1$  i  $F_1$  moduł sprężystości i przekrój zastrzalów,  $E_2$  i  $F_2$  moduł sprężystości i przekrój rozpory, a  $E_3$  i  $F_3$  moduł sprężystości i przekrój słupów wiszących.

Jeżeli belka główna spoczywa na rozpornicy (pomost górą), to  $\mu$  oblicza się z wzoru:

$$\mu_2 = 1 + \frac{3EJ}{E_1 h^2 (2 + 3\varphi) l} \left( \frac{2s}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \frac{\varphi l}{F_2} \right).$$

Przy rozpornicy trapezowej można tak samo, jak poprzednio, opuścić  $\mu$  (zwłaszcza, dla  $\alpha \geq 30^\circ$ , gdy  $\mu_1$  dochodzi do 5%, zaś  $\mu_2$  do 1,5%). Linje wpływowe momentów otrzymuje się j. w. przez odejmowanie linii  $H_y$  od linii  $M_0$  (fig. 371), por. dział: „Mosty drewniane“, str. 787.

Chcąc otrzymać linję wpływową momentu, mającą absolutnie największą rzędną dodatnią, tworzy się moment ze względu na punkt zaczepienia siły  $P$ :

$$M = P \frac{2 + \varphi - \xi}{2 + \varphi} \xi l - P \xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)} \cdot y,$$

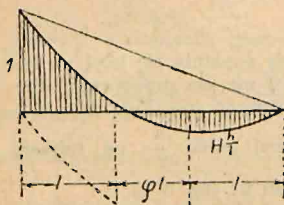


Fig. 372.

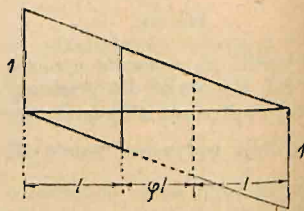


Fig. 373.

podstawiając  $y = \xi h$ ,  $P = 1$  oraz  $\mu = 1$ , co w tym wypadku można przyjąć z wystarczającą dokładnością, otrzymuje się równanie:

$$M = \frac{\{\xi^4(2 + \varphi) - \xi^2(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + \xi(8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)}$$

Różniczkując podług  $\xi$  i porównyując pochodną do zera:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\{4\xi^3(2 + \varphi) - 2\xi(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + (8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)} = 0,$$

dochodzi się do równania 3. stopnia, określającego  $\xi$  w zależności od  $\varphi$ . (Wyniki zestawiono tabelarycznie, por. „Mosty drewniane“, str. 787).

Linie wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań<sup>1)</sup> znajduje się, jak dla rozpornie trójkątnej; ponieważ oba oddziaływania środków są przy dowolnem obciążeniu zawsze sobie równe, przeto wystarczy odjąć od oddziaływania belki wolno podpartej o rozpiętości  $L = l(2 + \varphi)$ , jedno z oddziaływań

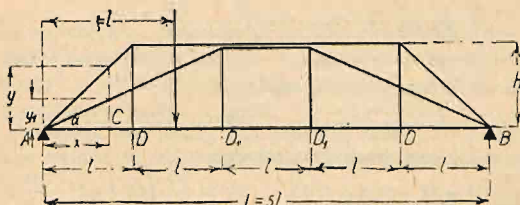
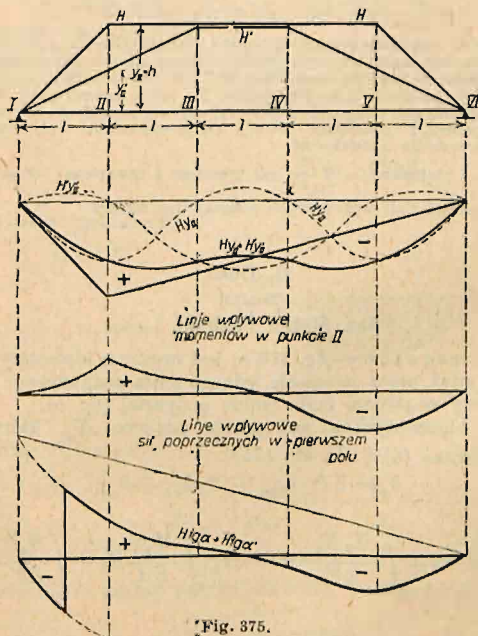


Fig. 374.



'Fig. 375.

środkowych  $D = H \frac{h}{l}$ , by uzyskać wartość oddziaływania rozprzeczki, przypadającego na belkę poziomą (fig. 372).

Ponieważ suma sił po lewej stronie przekroju jest dla punktów położonych w polu środkowym większa o  $l$  niż dla punktów położonych w polu skrajnem, przeto linia wpływowa sił poprzecznych dla środkowego pola nie różni się niczem od tejże linii wpływowej dla belki wolno podpartej o rozpiętości  $l(2 + \varphi)$ , por. fig. 373.

<sup>1)</sup> Tablice rzędnych linii wpływowych oddziaływań  $D$  podano na końcu działu: „Statyka budowlana”.

**Przykład.** Rozpornica trapezowa poczwórna (fig. 374). Jeżeli siły poziome rozpornic, działające na przyczółek, nazwiemy  $H$ , oraz  $H'$ , to równanie momentu zginającego (por. równanie 1a), przedstawi się następująco:

$$M = M_0 - Hy - H'y' \quad (17)$$

przyczem  $y$  i  $y'$  oznaczają wysokości przekroju jak poprzednio.

Wychodząc, jak poprzednio, z równania (10a):  $\frac{\partial L}{\partial H} = 0$ , oraz  $\frac{\partial L}{\partial H'} = 0$ ,

czyli: 
$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0, \quad \text{oraz} \quad \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H'} dx = 0,$$

otrzymuje się po scałkowaniu i rozwiązaniu względem  $H$  i  $H'$ , układ równań:

a) gdy ciężar stoi w polu pierwszym lub piątym:

$$H_1 = \frac{\xi(30 - 11\xi^2)}{38} \cdot \frac{l}{h}, \quad H_1' = \frac{12\xi(\xi^2 - 1)}{38} \cdot \frac{l}{h};$$

b) gdy ciężar stoi w polu drugim lub czwartym:

$$H_2 = \frac{l}{38h} (19 - 3\xi - 33\xi^2 + 17\xi^3), \quad H_2' = \frac{3l}{19h} \left( 4\xi + 6\xi^2 - \frac{11}{3}\xi^3 \right);$$

c) gdy ciężar stoi w polu środkowym:

$$H_3 = \frac{3l}{19h} (3\xi^2 - 3\xi), \quad H_3' = \frac{3l}{19h} \left( \frac{19}{3} + 5\xi - 5\xi^2 \right).$$

Linje wpływowe rozporów poziomych można wykreślić wprost z powyższych wzorów, zaś do wykreślenia linii wpływowych momentów trzeba użyć równania zasadniczego (17), odejmując wykreślenie rzędne krzywych  $Hy$  i  $H'y'$  od rzędnych linii wpływowej dla momentów belki wolno podpartej o rozpiętości  $5l$ . To samo dotyczy linii wpływowych sił poprzecznych i oddziaływań skrajnych, gdzie odejmuje się od trójkąta o wysokości równej  $l$  na podporze skrajnej i podstawić równej  $5l$ , powierzchnie wpływowe oddziaływań środkowych, przyczem dla oddziaływań

drugiego i piątego:  $D = H \frac{h}{l}$ , zaś trzeciego i czwartego:  $D' = H' \frac{h}{2l}$ .

Sposób wykreślenia linii wpływowych pokazano na fig. 375.

## D. Łuki.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Łuk dwuprzegubowy (fig. 376 a) jest utworem hiperstatycznym pierwszego stopnia, gdyż przez usunięcie jednego pręta podporowego otrzymujemy utwór zasadniczy w postaci belki wolno podpartej (fig. b).

Wielkością hiperstatyczną jest parcie poziome  $X_a$ , którego wielkość obliczymy z równań (6) i (3), str. 1258:

$$\delta_a = \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} + \delta_{ab}$$

$$\delta_a = \int_0^S \frac{M_0 M_a}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_0 N_a}{EF} ds - X_a \left[ \int_0^S \frac{M_a^2}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_a^2}{EF} ds \right] + \int_0^S \omega t N_a ds.$$

Dla sztywnych podpór, z uwagi na  $dx = ds \cos \varphi$ , i z pominięciem wpływu  $N_0$ :

$$X_a = \frac{\int_0^S \frac{M_0 y}{J} ds + E \omega t l}{\int_0^S \frac{y^2 ds}{J} + \frac{l}{F_s}} \quad (1)$$

gdzie  $F'_s$  oznacza średnią powierzchnię pionowego przekroju, zaś  $S$  długość osi łuku, lub:

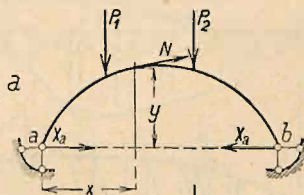
$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y \frac{s}{J} + E \omega t l}{\sum_1^n y^2 \frac{s}{J} + \frac{l}{F'_s}} \dots \dots \dots (2)$$

Dla łuku ze ścięgmem, łączącym przegibnie oba węzłowania a posiadającym przekrój stały  $F'_s$  i moduł sprężystości  $E_s$ , należy mianownik równania (1) i (2) powiększyć o wyraz  $(El):(E_s F'_s)$ ; wtedy  $X_a$  jest napięciem ścięgna,  $t$  różnicą temperatury łuku i ścięgna.

Celem określenia sum należy łuk podzielić na możliwie małe części  $s$  tak, aby można je uważać za odcinki prostej. Momenty bezwładności przekroju  $J$

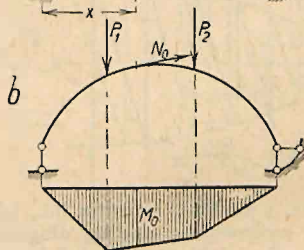
Ustrój  
statycznie niewyznaczalny:

$$M = M_0 - X_a y.$$



Utwór zasadniczy:

$$X_a = 0.$$



Stan  $X_a = -1$ ,

$$M_a = 1 \cdot y, \quad N_a = 1 \cdot \cos \varphi.$$

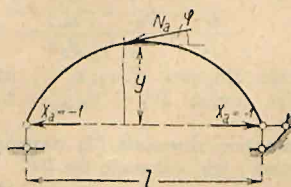


Fig. 376.

na długości odcinków można przyjąć za stałe. Dobierając długości tak, aby

$$\frac{s}{J} = \frac{1}{K} = \text{const},$$

otrzymamy:

$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y + K E \omega t l}{\sum_1^n y^2 + \frac{K l}{F'_s}} \dots \dots \dots (3)$$

Postępowanie przy obliczeniu  $X_a$  jest następujące:

Oś łuku (fig. 377) dzielimy na pewną ilość równych części; punkty podziału przenosimy na rozwiniętą oś łuku  $OO$  (fig. c), a na pionowych



przechodzących przez nie odcinamy po obu stronach osi  $O—O$  odpowiednie momenty bezwładności przekroju, przez co otrzymujemy dwie symetryczne krzywe bezwładności  $J—J$ .

Pierwszą długość odcinka łuku  $OA$  obieramy dowolnie; pionowa w  $A$  przecina krzywe  $J—J$  w punktach  $a$  i  $b$ ; z punktu  $b$  kreślimy  $bc$  równo-

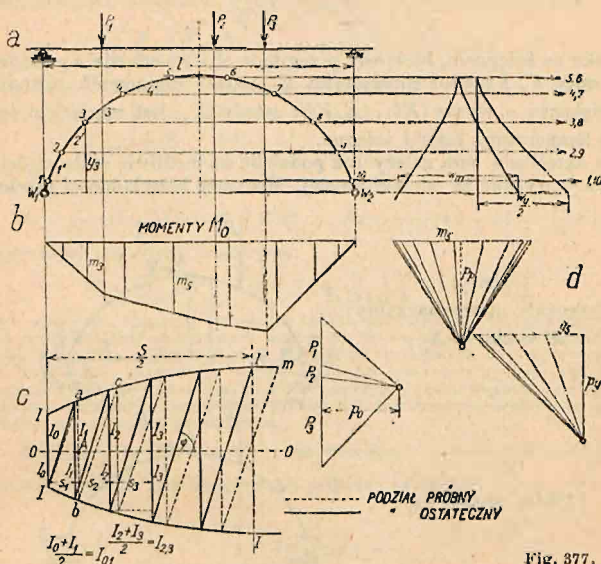


Fig. 377.

ległą do  $Ja$ , z punktu  $c$  pionową itd., jak wskazuje kreskowana linja łamana. Ten wykres przez zmianę długości pierwszego odcinka  $OA$  trzeba powtarzać, póki punkt  $m$  nie wpadnie w punkt  $J$ . Wówczas otrzymamy:

$$\frac{s_1}{J_1} = \frac{s_2}{J_2} = \frac{s_3}{J_3} = \dots = 2 \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{K} \dots \dots \dots (4)$$

Przenosząc długości  $s_1, s_2, s_3 \dots$  na oś łuku (fig. a), otrzymujemy łuk podzielony na odcinki  $W_1—1', 1'—2' \dots$  ze środkami ciężkości w punktach 1, 2, 3...

Obliczenie sum równania (3) następuje albo według podanej tabliczki albo wykreślnie, jak wskazuje fig. 377.

Tabela do obliczenia sum równania (1).

Punkt	$y$ $m$	$y^2$ $m^2$	$M_0$ $t \cdot m$	$M_0 y$ $t \cdot m^2$
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$n$	...	...	...	...
		$\sum_1^n y^2$		$\sum_1^n M_0 y$

Z fig. d czytamy:

$$\sum_1^n M_0 y = p_0 p_p w_m, \quad \sum_1^n y^2 = p_y w_y.$$

Moment w dowolnym punkcie osi łuku:

$$M = M_0 - X_a y,$$

zaś siła normalna (fig. 378):

$$N = X_a \cos \varphi + V \sin \varphi \dots (5)$$

W łukach płaskich w przybliżeniu  $N = X_a$ .

a) Łuk dwuprzegubowy pod działaniem ciężaru skupionego ruchomego  $P$ .

W tym wypadku dla ustroju zasadniczego (fig. 379 a):

$$\text{dla } x < u \quad M_0 = P \frac{l-u}{l} x, \quad \text{dla } x > u \quad M_0 = \frac{P(l-x)}{l} u.$$

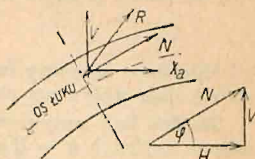


Fig. 378.

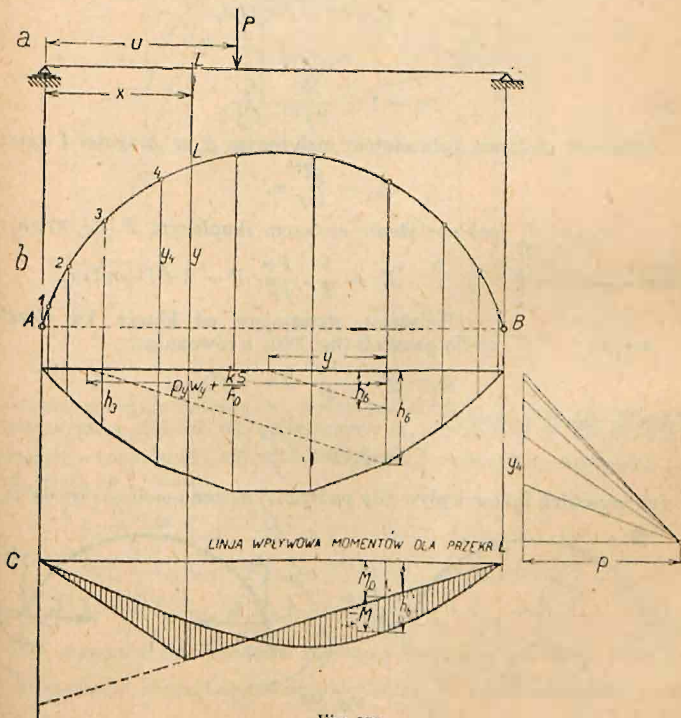


Fig. 379.

Wstawiając wyrażenie na  $M_0$  w iloczyn  $\sum_1^n M_0 y$ , można  $P$  umieścić przed znakiem sumy i wówczas suma wyraża moment w punkcie  $L$ , wywołany obciążeniem belki siłami  $y$ :

$$\sum_1^n M_0 y = P M_{0y} \dots \dots \dots (6)$$

tak, że parcie poziome  $X_a = \frac{P M_{0y}}{p_y w_y + \frac{Kl}{F_s}}$ .

Wielobok sznurowy wykreślony dla obciążenia siłami  $y$  (fig. b) przedstawia linię wpływową parcia poziomego ( $M_{0y} = p h$ ).

Rzędne linii wpływowej momentu  $M$  dla przekroju  $L$  otrzymamy przez odjęcie rzędnych  $h' = Hy$  od rzędnych linii wpływowej  $M_0$  (fig. c).

b) Dla łuku parabolicznego o równaniu osi:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \dots \dots \dots (7)$$

i dla  $J_0 = J \cos \varphi$ , gdzie  $f$  oznacza strzałkę łuku zaś  $J_0$  moment bezwładności łuku w kluczu otrzymujemy:

$$X_a = \frac{\int_0^l M_0 y dx + E \omega t l J_0}{\frac{8}{15} f^2 l} \eta,$$

gdzie:

$$\eta = 1 + \frac{15}{8 f^2} \cdot \frac{J_0}{F_s}.$$

Obciążenie ciężarem jednostajnie rozłożonym  $g$  na długości  $l$  daje:

$$X_a = \frac{g l^2}{8 f} \eta,$$

zaś obciążenie ciężarem skupionym  $P$  (fig. 379 a):

$$X_a = \frac{5}{8} \cdot \frac{P u}{f l^3} (l^3 - 2 u^2 l + u^3) \eta.$$

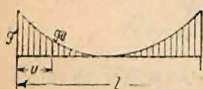


Fig. 380.

Obciążenie wzrastające od klucza ku wierzgłowiu wedle paraboli (fig. 380) o równaniu:

$$g_u = g' - \frac{4 g'}{l^2} (l u - u^2)$$

wywołuje parcie poziome:

$$X_a = 0,0106 \frac{g' l^2}{f} \eta.$$

Dla wysokich łuków wpływ siły podłużnej można pominąć; wtedy  $\eta = 1$ .

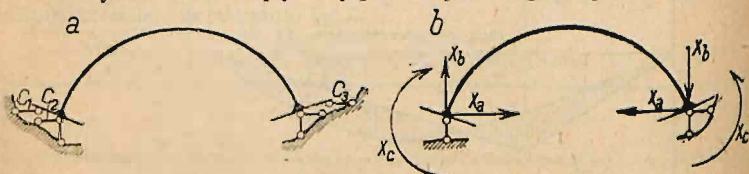


Fig. 381.

Łuk bezprzegubowy jest belką hiperstatyczną stopnia trzeciego, gdyż do obliczenia sześciu niewiadomych podporowych mamy trzy równania równowagi (trzy pręty nadliczbowe:  $C_1, C_2, C_3$ ) (fig. 381 a).

Dla przejścia od utworu zasadniczego (fig. b) do utworu pierwotnego (fig. a), należy belkę poddać działaniu wielkości statycznie niewyznaczalnych  $X_a, X_b$  i  $X_c$ , których wielkość wyznaczymy w następujący sposób:

Linja łamana kreskowana na fig. 382 *a* przedstawia linię ciśnienia, wykreśloną dla odległości biegunowej  $H$  (fig. 382 *b*); wówczas moment  $M$  w dowolnym punkcie  $L$  osi łuku odniesionego do układu  $x, y$ , o początku  $O$ :

$$M = H \cdot \overline{KL} = H \left[ KR - y - e_0 - \frac{e}{l} x \right]$$

lub

$$M = M_0 - X_a y - X_b x - X_c \quad \dots \quad (8)$$

gdzie wielkości hiperstatyczne:

$$X_a = H, \quad X_b = X_a \frac{e}{l}, \quad X_c = X_a e_0.$$

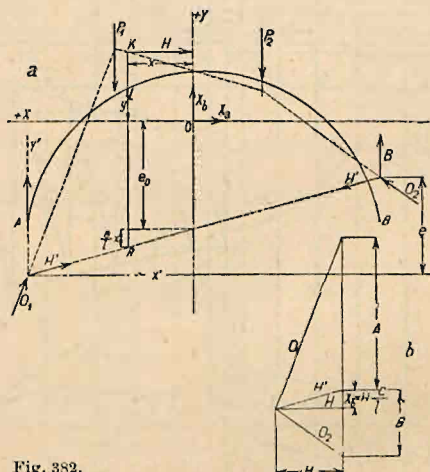


Fig. 382.

Obrócenie początku układu w dowolnym punkcie  $O$  jest równoznaczne z przeniesieniem układu sił działających w węzłowie  $A$  do punktu  $O$ .

Stosując równanie (6), str. 1258, otrzymamy z uwagi na sztywność podpór ( $L_a = L_b = L_c = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta_a &= \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ \delta_b &= \sum P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ \delta_c &= \sum P_m \delta_{cm} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Celem uproszczenia rachunku wybieramy położenie początku układu  $O$  w środku ciężkości elementarnych mas idealnych  $\frac{ds}{J}$ ; wówczas współczynniki:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0, \quad \delta_{ac} = \delta_{ca} = 0, \quad \delta_{bc} = \delta_{cb} = 0,$$

$$\delta_{ac} = \int_0^s \frac{M_a M_c}{J} ds = \int_0^s y \frac{ds}{J} = 0, \quad \delta_{bc} = \int_0^s \frac{M_b M_c}{J} ds = \int_0^s \frac{x ds}{J} = 0$$



(równanie 3, str. 1258), gdyż całki powyższe oznaczają momenty statyczne ze względu na środek ciężkości łuku, zaś

$$\delta_{ab} = \int \frac{M_a M_b}{EJ} ds = \int \frac{xy ds}{J} = 0$$

oznacza moment zboczenia ze względu na osie sprzężone  $x, y$ .

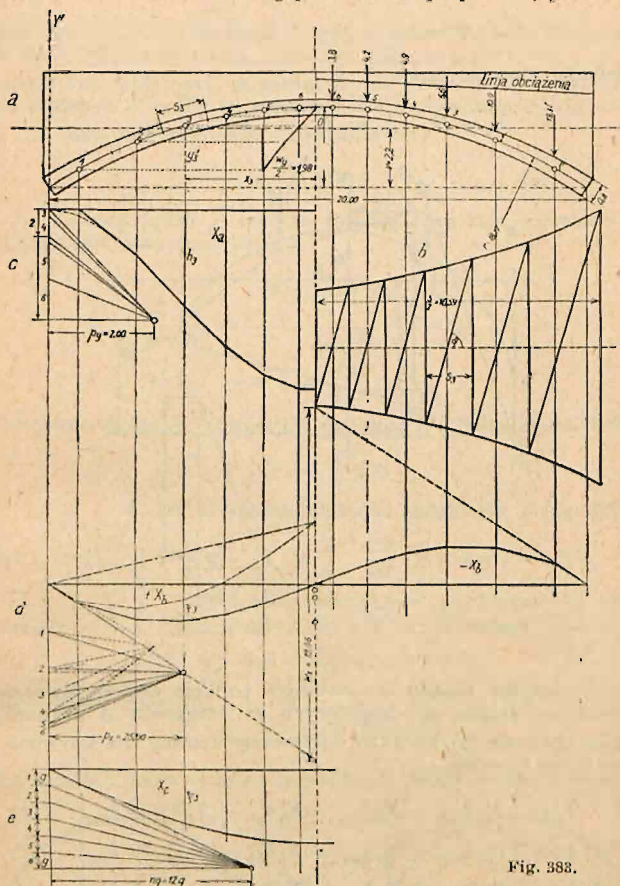


Fig. 383.

Z uwagi na  $\delta_{bt} = \delta_{ct} = 0$  przyjmując sztywne podpory i stosując podział łuku na takie elementy, aby  $\frac{s}{J} = \frac{1}{K} = \text{const}$  (równanie 4) otrzymamy:

$$X_a = \frac{\sum_1^n M_0 y + KE\varepsilon + l}{\sum_1^n y^2 + c}, \quad X_b = \frac{\sum_1^n M_0 x}{\sum_1^n x^2}, \quad X_c = \frac{\sum_1^n M_0}{n} \dots (10)$$

gdzie

$$c = \frac{Kl}{F_s}$$

**Przykład.** Dla łuku symetrycznego o rozpiętości  $l=20\text{ m}$  i strzałce  $f=3\text{ m}$  należy obliczyć wielkości  $X_a$ ,  $X_b$  i  $X_c$  dla obciążenia układem ciężarów stałych, oraz wykreślić ich linie wpływowe (fig. 383).

Podziału osi łuku dla warunku  $\frac{s}{J} = \frac{1}{K}$  dokonano na fig. 6 (por. str. 1272). Dane potrzebne do obliczenia łuku zestawiono w tabeli.

Punkt	$x$ m	$y'$ m	$y=y'-v$ m	$x^2$ $m^2$	$y^2$ $m^2$	$F=d$ $m^2$	$s$ m	$J$ $m^4$	$K=\frac{J}{s}$ $m^3$	$M_o$ t m	$M_o y$ t m <sup>2</sup>	$M_o x$ t m <sup>2</sup>
1	8,87	0,67	-1,54	78,677	2,371	0,78	2,68	0,039550	0,01476	55,14	-84,916	
2	6,72	1,70	-0,51	45,158	0,260	0,73	2,12	0,032418	0,01529	118,58	-60,476	
3	4,90	2,33	0,12	24,010	0,014	0,68	1,73	0,026203	0,01515	154,07	18,488	
4	3,36	2,68	0,47	11,290	0,221	0,65	1,49	0,022885	0,01536	173,94	81,752	
5	1,92	2,90	0,69	3,686	0,476	0,63	1,35	0,020837	0,01543	185,48	127,981	
6	0,66	2,98	0,77	0,436	0,593	0,61	1,22	0,018915	0,01554	190,26	146,500	
Sumy	13,26		0,00	163,257	3,935	4,08	10,59	—	0,09153	877,47	229,329	

Spółrzedne początku układu  $O$ :

$$u = \frac{l}{2} = 10\text{ m}, \quad v = \frac{1}{n} \sum y' = \frac{13,26}{6} = 2,21\text{ m}.$$

$$\text{Średnia wartość stałej } K = \frac{0,09153}{6} = 0,01525\text{ m}^3,$$

$$F_s = \frac{4,08}{6} = 0,68\text{ m}^2,$$

$$c = \frac{0,01525 \cdot 21,18}{0,68} = 0,475.$$

Obciążenie stałe:

$$X_a = \frac{\frac{1}{n} \sum M_o y}{\frac{1}{n} \sum y^2 + c} = \frac{229,329 \cdot 2}{3,935 \cdot 2 + 0,475} = 54,9\text{ t}.$$

$$X_b = 0,$$

$$X_c = \frac{\frac{1}{n} \sum M_o}{\frac{1}{n} \sum y^2 + c} = \frac{877,47 \cdot 2}{12} = 146,3\text{ t/m}.$$

Wpływ temperatury:

$$\text{Dla } t = 25^\circ, \quad E = 2,000,000\text{ t/m}^2, \quad \omega = 0,000010,$$

$$X_{at} = \frac{K E \omega t l}{\sum y^2 + c} = \frac{0,01525 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 20}{2 \cdot 3,935 + 0,475} = 18,3\text{ t}.$$

Linie wpływowe. Jeżeli w równaniu (9) wstawimy za  $M_o$  wartość momentu dla obciążenia belki ciężarem skupionym  $P$  (por. równanie 6), to wówczas:

$$X_a = \frac{P \sum_1^n M_{oy}}{\sum_1^n y^2 + c}, \quad X_b = \frac{P \sum_1^n M_{ox}}{\sum_1^n x^2}, \quad X_c = \frac{P \sum_1^n M_{oy}}{n}.$$

Wielobok sznurowy, wykreślony dla obciążenia belki siłami pionowymi  $y$ , przedstawia wpływową parcia poziomego (fig. c), której rzędne odczytać należy w podziałce 1:  $(p_y w_y + c)$ ; wartość  $p_y w_y = \sum y^2$  otrzymamy z wieloboku sznurowego) wykreślonego dla wieloboku sił  $y$ , obróconego o  $90^\circ$  (fig. a).

W podobny sposób otrzymamy wpływową  $X_b$  jako wielobok sznurowy dla sił  $x$ , z warunkiem, że rzędne jej  $\xi$  muszą być zmniejszone w stosunku 1 :  $p_x w_x$  (fig. d).

Obciążając belkę  $n$  siłami równymi  $g$ , otrzymamy dla odległości biegunowej  $ng$  wielobok sznurowy, którego rzędne  $\xi$  są równe momentowi  $X_c$  (fig. e).

W danym przykładzie z uwzględnieniem podziałki długości:

$$X_a = \frac{200 p_y h}{w_y p_y + c} = \frac{h}{0,02086}; \quad X_b = \frac{200 p_x \xi}{p_x w_x} = \frac{\xi}{0,0653}; \quad X_c = 200 \zeta.$$

Odczytane rzędne mają być wyrażone w metrach. Moment w dowolnym punkcie osi łuku obliczymy wedle równania (8), zaś siłę normalną wedle równania (5), gdzie  $V = V_0 + X_b$ .

Łuk paraboliczny. Równanie (7) osi łuku parabolicznego przybiera dla układu współrzędnych o początku w  $O$  ( $u = \frac{l}{2}$ ,  $v = \frac{2}{3}f$ ) formę:

$$y = \frac{f}{l^2} (l^2 - 12x^2);$$

wówczas przyjmując  $J_0 = J \cos \varphi$ ,

$$X_a = \frac{45}{4 f^2 l} \left[ \int_0^l M_0 y dx + E \varepsilon J_0 t l \right] r_1,$$

$$X_b = \frac{12}{l^3} \int_0^l M_0 x dx = \frac{12}{l^3} F_0 \quad X_c = \int_0^l M_0 \frac{dx}{l} = \frac{F_0}{l},$$

gdzie  $F_0$  oznacza powierzchnię momentów  $M_0$ , zaś  $\frac{1}{r_1} = 1 + \frac{45 J_0}{4 f^2 F_0'}$ .

Dla łuków symetrycznych o kształcie linii ciśnienia podaje Strassner („Neuere Methoden zur Statik d. Rahmentragwerke“, II. Bd., D. Bogen u. d. Brückengewölbe) tablice do linii wpływowych parcia poziomego i momentów, tablice rzędnych osi łuku w zależności od stosunku obciążenia łuku w kluczu i węzłowie i od stosunku grubości łuku w kluczu i we węzłowie, wreszcie wzory i tablice do obliczenia grubości łuku w kluczu i we węzłowie.

## E. Obliczanie sklepień i murów przy pomocy linii ciśnienia.

Napisał

inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów.

Warunki równowagi sklepień, murów i filarów, są następujące:

1. Środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej, działającej na szew, a więc punkt przecięcia się szwu z linią ciśnienia, powinien leżeć w przekroju. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłinców, połączonych zaprawą, to, ponieważ nie możemy liczyć na wytrzymałość zaprawy na rozciąganie, więc w sklepieniu nie dopuszczamy wcale ciągnięcia. Środek więc ciśnienia a zatem i linia ciśnienia powinny leżeć w rdzeniu a dla przekroju prostokątnego w średniej trzeciej części sklepienia. Warunek ten nie odnosi się jednakże do sklepień litych betonowych lub żelbetowych, u których możemy dopuścić ciągnięcie. Tam więc linia ciśnienia może wyjść nie tylko z rdzenia, ale i z przekroju.

2. Jeżeli sklepienie składa się z kłinców, to wypadkowa na szew nie powinna być odchyloną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie kłinców. Średnio możemy przyjąć  $f = 0,4$ ,  $\rho = 22^\circ$ . Dla świeżej zaprawy  $\rho$  może być mniejsze.