

d) Siła podłużna. Wedle równania (b) linia wpływowa siły podłużnej (fig. 274) jest sumą powierzchni wpływowej T'_{om} ze współczynnikiem $\sin \varphi$ i powierzchni wpływowej M_{os} ze współczynnikiem $\frac{\cos \alpha}{f}$. Zależnie od

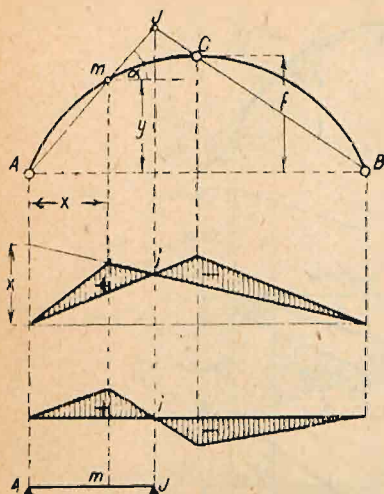


Fig. 275.

wyznaczyć dodatnią część linii wpływowej momentu M_m jak dla belki prostej zastępczej o długości AJ .

wielkości obu powierzchni linia wpływowa siły podłużnej może się składać z powierzchni dodatniej i ujemnej (fig. 274 e) lub też może być cała dodatnia (fig. 274 c i d). Ten ostatni wypadek otrzymamy dla dużego $\cotg \varphi$, więc w pobliżu środka i dla łuków płaskich.

e) Moment zginający. Moment osiowy w m wynosi:

$$M_m = M_{om} - Hy = M_{om} - M_{os} \cdot \frac{y}{f}.$$

Linia wpływowa momentu jest różnicą rzędnych linii wpływowej momentów belki prostej M_{om} i linii wpływowej partia poziomego H ze współczynnikiem y (fig. 275). Punkt obojętny J znajdziemy, prowadząc z podpory A prostą, przechodzącą przez punkt m aż do przecięcia się z linią BC . Ciężar stojący bowiem w J daje $M'_m = 0$. Znalazłszy punkt J , możemy

II. Kratownice statycznie wyznaczalne (izostatyczne).

a) Wyznaczanie sił wewnętrznych w kratownicach statycznie wyznaczalnych.

1. Metoda ogólna wyznaczania sił wewnętrznych w kratownicach statycznie wyznaczalnych. Dla każdego (wyciętego) węzła dadzą ustawić się dwa równania:

$$\sum V = 0, \text{ oraz } \sum H = 0$$

(por. str. 1053). Otrzymamy zatem dla w węzłów $2w$ równań równowagi; dla wyznaczenia niewiadomych sił (w prętach istotnych i łożyskowych) musi ilość niewiadomych być równa ilości równań, zatem musi być:

$$2w = p_i + p_l = p,$$

względnie dla belki wolno podpartej ($p_l = 3$):

$$2w - 3 = p_i.$$

Równania te można rozwiązać np. przy pomocy wyznaczników, przyczem niewiadome dadzą się ostatecznie wyrazić w postaci ilorazu dwu wyznaczników; wyznacznik Δ mianownika zależny jest tylko od kształtu kratownicy, zaś wyznacznik licznika Δ_1 także od obciążenia. Jeżeli kształt belki jest taki, że $\Delta = 0$, to siły wewnętrzne będą nieskończenie wielkie, jeżeli $\Delta_1 \geq 0$, zaś nieokreślone, jeżeli $\Delta_1 = 0$. Wtedy zachodzi wypadek omówiony też na str. 1187.

Tego sposobu obliczenia sił wewnętrznych używa się tylko wyjątkowo, jednak jest on punktem wyjścia dla innych sposobów.

2. Metoda wielobokowa albo węzłów (plan sił Cremony) da się zastosować, gdy istnieje węzeł, w którym schodzą się tylko 2 pręty. Stosujemy ją w przypadku, gdy dla danego obciążenia szukamy sił wewnętrznych we wszystkich prętach, zatem głównie w budownictwie, przy obliczeniu mostów zaś dla ciężaru własnego lub dla oddziaływania równego jednostki przy rysowaniu linii wpływowych (por. str. 1065).

Wielobok sił zewnętrznych i wewnętrznych, działających na dany węzeł, musi się zamykać. Zaczynamy od węzła 0 (fig. 276 a), gdzie dana jest reakcja A . Dwie wiadome siły wewn. a i c w prętach 01 i 02 wyznaczamy, kreśląc z obu końców odcinka A (fig. b) $a \parallel 02$ i $c \parallel 01$. W trójkącie Aca kierunek sił c i a wyznaczony jest strzałką reakcji A , zatem przeciwny kierunkowi wskazówek zegara. Siła c działa w kierunku do węzła 0 (ściskanie), a zaś od węzła (rozciąganie; dla przejrzystości odróżniamy siły ściskające w planie sił grubszymi liniami). W węźle 1 działa siła zewnętrzna P_1 i siły wewnętrzne c , d i g . Linję łamaną (fig. b), złożoną z boków P_1 i c należy uzupełnić prostymi $d \parallel 12$ i $g \parallel 13$. Przez kierunki sił c (do węzła) i P_1 (z góry na dół) wyznaczony jest kierunek siły g (ściskanie) i d (rozciąganie). Przystępując do węzła 2, mamy linię łamaną $2ad$ uzupełnić bokami $e \parallel 23$ i $b \parallel 24$. W zamkniętym wieloboku węzła 2, tj. $P_2 a d e b$ kierunek sił jest zgodny ze wskazówkami zegara, więc e i b działają od węzła 2 czyli pręty są rozciągane. Wreszcie siłę f znajdziemy z równowagi węzła 3 albo 4, a zarazem mamy kontrolę, gdyż wielobok egP_3f ma się zamknąć bez błędów, względnie trójkąt bfb . Na fig. b siły zewnętrzne rozstawiono dla przejrzystości (jednak znajdują się one ściśle na jednej pionowej) i wkreślono w tym porządku, jak następują po sobie odpowiednie węzły obwodu. Następstwo boków wieloboku sił danego węzła jest to samo, co następstwo odpowiednich promieni, schodzących się w danym węźle.

3. Metoda przecięć. Jeżeli chodzi o znalezienie siły wewnętrznej tylko w pewnym przecięciu, a nie we wszystkich, prędzej do celu prowadzi metoda przecięć. Da się ona zastosować wtedy, gdy badany pręt można przeciąć prostą, któraby trafiała jeszcze tylko dwa inne pręty. Siły zewnętrzne, działające na lewą (lub prawą) odciętą część belki (wraz z oddziaływaniem), których wypadkową jest siła poprzeczna T (fig. 292) równoważą się z siłami wewnętrznymi DKG w prętach przeciętych. Równowagę tę można zastosować analitycznie (Ritter) lub wykreślnie (Culmann; fig. 296, por. str. 1065 i 1066).

4. Metoda wymiany prętów prowadzi do wyznaczenia sił wewnętrznych, gdy nie można zastosować metod poprzednio omówionych, więc, gdy kratownica nie posiada żadnego węzła dwuprętowego (w którym schodzą się dwa pręty), ani, gdy przez nią nie można przeprowadzić żadnego przekroju, któryby przeciał tylko trzy pręty. Stosując ją, opuszcza się jeden pręt, t. zw. wymienny (względnie m prętów), wstawia natomiast inny pręt t. zw. zastępczy (względnie m prętów zastępczych), taki, aby siły wewnętrzne w kracie można było wyznaczyć. Pręt zastępczy należy umieścić w miejscu należycie wybranym, aby obliczenie było łatwe i aby nie uzyskać dwu układów, z których jeden byłby chwiejny, a drugi hiperstatyczny.

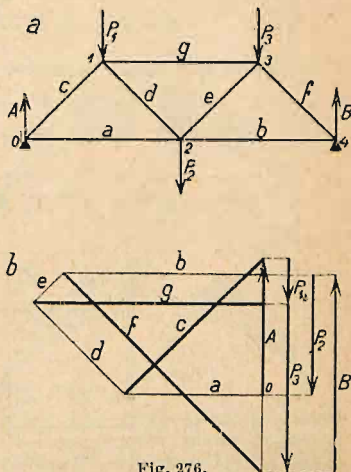


Fig. 276.

sunięcia (nieskończenie małe) poszczególnych punktów, oraz ich prędkości (skończone) są prostopadłe do odpowiednich promieni (aO) i proporcjonalne do nich. Obracając wszystkie te prędkości o 90° (t. zw. prędkości prostopadłe) otrzymamy figurę $a'b'c'$, podobną do abc (fig. 278); fig. $a'b'c'$ jest t. zw. planem prędkości prostopadłych. Wszystkie cechy obrotu tarczy sztywnej będą więc ustalone, jeżeli znany jest a) biegun obrotu O i prędkość wzgl. przesunięcie prostopadłe któregośkolwiek punktu, lub b) prędkości (przesunięcia) prostopadłe dwu punktów.

Jeżeli przesunięcie dowolnego punktu a tarczy równa się promie-

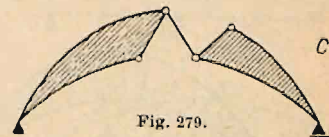
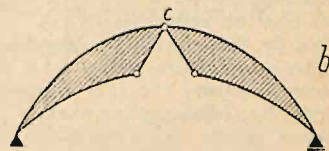
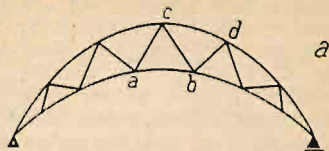


Fig. 278.

Fig. 279.

niowi Oa , to punkt a' (a tem samem i każdy inny punkt planu prędkości prostopadłych) nakrywa się z biegunem O . Przy pomocy planu prędkości prostopadłych można wyznaczyć siły wewnętrzne w kratownicy, a także określić, czy nie zachodzi wypadek jej ruchomości (por. str. 1187 i 1212).

Łańcuchem wodzonym n -tego stopnia nazywamy utwór płaski, składający się z tarcz sztywnych (str. 1185), połączonych ze sobą przegibnie, posiadający o n pretów mniej niż wymaga tego warunek $p = 3t + 2w$. Np. opuszczając w belce (fig. 279 a) pret ab , otrzymujemy łańcuch wodzony pierwszego stopnia (fig. 279 b), opuszczając pret ab i cd łańcuch wodzony 2. stopnia (fig. 279 c). Pretы sztywne są tu równoważne z tarczami sztywnymi. Łańcuch wodzony 1. stopnia ma pojedynczą wolność ruchu; jeżeli bowiem jednemu jego elementowi nadamy jedno określone (jakiiegokolwiek) przesunięcie, to wszystkie punkty łańcucha są zmuszone do ruchu na określonych drogach. Podczas takiego ruchu każda tarcza sztywna odbędzie obrót około pewnego bieguna tak względem stałej ziemi, jakoteż około biegunów względnych względem innych tarcz łańcucha wodzonego.

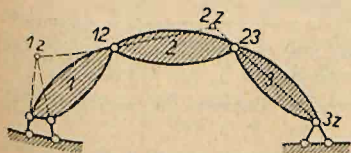


Fig. 280.

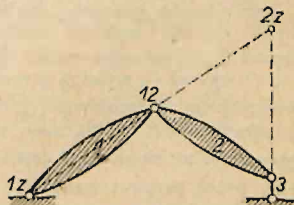


Fig. 281.

Tarcze sztywne, połączone ze sobą (lub z zawsze sztywną i stałą ziemią) przy pomocy przegubu istotnego lub urojonego (por. str. 1186), obracają się względem siebie około tegoż bieguna. Por. fig. 280, gdzie $(1z)$, $(3z)$ oznaczają bieguny

obrotu tarcz 1 i 3 względem stałej ziemi, zaś (12), względnie (23), bieguny obrotu tarcz względem siebie. Przy przegubach urojonych biegun w każdym momencie znajduje się w punkcie przecięcia odpowiednich prętów; podczas obrotu przesuwa się i biegun; dlatego nazywamy go chwilowym biegunem obrotu [por. (1z) na fig. 280]. Tak samo chwilowym biegunem obrotu tarczy 2 względem ziemi na fig. 280 jest punkt (2z) przecięcia prostych (1z)(12), oraz (3z)(32); zaś na fig. 281 punkt (2z) przecięcia prostej (1z)(12) z prętem podporowym 3. Wogóle na jednej prostej leżą wszystkie trzy bieguny trzech którychkolwiek tarcz względem siebie, np. dla tarcz m, n, z bieguny $(mn), (mz)$ i (nz) . Jeżeli zatem znane są np. bieguny (mn) i (nz) , to biegun (mz) (oznaczony dwoma znakami, nie powtarzającami się w obu tych biegunach — litera n powtarza się w obu!) leżeć musi na prostej $(mn)(nz)$.

Na fig. 282 chwilowym biegunem obrotu tarczy 1 względem 2 jest punkt (12) na przedłużeniu prętów 3 i 4. Biegun obrotu (2z) znajdziemy w punkcie przecięcia prostej (1z)(12) z przedłużeniem prawego pręta podporowego. Biegun (3z) leżeć musi w punkcie przecięcia prostych (1z)(13) i (23)(2z); wreszcie biegun (4z) w punkcie przecięcia prostych (1z)(14) i (2z)(24), a biegun (34) w punkcie przecięcia (13)(14) i (23)(24). Kontrola: bieguny (34), (z4) i (z3) muszą leżeć na jednej prostej.

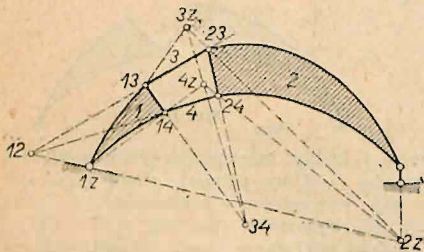


Fig. 282.

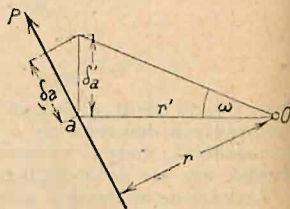


Fig. 283.

Jeżeli przegub G jest w równowadze, to gdybyśmy pomyśleli sobie dowolne nieskończenie małe przesunięcie (δ_g) przegubu (przesunięcie przygotowane), to praca sił G_i zaczepiających w przegubie byłaby równa iloczynowi przesunięcia (δ_g) przez rzut wypadkowej sił na (δ_g) . Ale wypadkowa sił będących w równowadze jest równa zeru, więc i praca tych sił na przesunięciu przygotowanym czyli praca przygotowana $\sum G_i \delta_i = 0$, przyczem $\delta_i =$ rzut przesunięcia punktu G na kierunek siły G_i .

Jeżeli tarcza łańcucha wodzonego, niezależnie od badanych sił, działających na nią, wykona obrót o niezmiernie mały kąt ω około swojego bieguna O , to dowolny punkt tarczy a (fig. 283), którego odległość od bieguna O wynosi r' , wykona przesunięcie $\delta'_a = \omega r'$. Przesunięcie to nazywamy przesunięciem wirtualnem (tj. możliwem) albo przygotowanym. Jeżeli rzut tego przesunięcia na kierunek siły P , działającej w a , jest δ_a , zaś ramię tej siły względem bieguna O jest r , to $\delta_a = \omega r$. Iloczyn $P \delta_a = Pr \omega$ nazywamy pracą przygotowaną siły P .

Jeżeli tarcza jest w równowadze, to praca przygotowana sił P , działających na tą tarczę, $L = \sum \omega Pr = \omega \sum (Pr) = 0$, gdyż $\sum (Pr)$ jako moment statyczny sił P , będących w równowadze, jest równy zeru. Jeżeli dowolny punkt łańcucha wodzonego dozna pewnego niezmiernie małego przesunięcia możliwego, to wszystkie tarcze łańcucha wykonają obrót niezmiernie mały,

każda około swojego bieguna, a siły, działające na łańcuch, wykonają pracę przygotowaną $\Sigma Q\delta$. Jeżeli łańcuch (a więc i każda jego tarcza) jest w równowadze, to praca sił zaczepiających na każdej tarczy jest równa zeru. Na tarczę działają oprócz sił zewnętrznych P jeszcze oddziaływania przegubów G i ewentualnie podpór C .

Jeżeli pracę przygotowaną oddziaływań podpór nazwiemy L_C , oddziaływań przegubowych L_G , sił zewnętrznych L_P , to dla każdej tarczy jest $L_P + L_C + L_G = 0$, więc dla wszystkich tarcz łańcucha jest $\Sigma L_P + \Sigma L_C + \Sigma L_G = 0$. Przesunięcia łożysk stałych są równe zeru, zaś przesunięcia łożysk ruchomych są prostopadłe do kierunku oddziaływań, zatem $\Sigma L_C = 0$. Ponieważ każdy przegub jest w równowadze, więc $\Sigma L_G = 0$.

Wobec tego: $\Sigma L_P = \Sigma P_m \delta_m = 0 \dots \dots \dots (1)$

Praca przygotowana sił zewnętrznych (wyłączając oddziaływania), działających na łańcuch wzdłużony, jest równa zeru. (Zasada pracy przygotowanej). Na tej zasadzie można obliczyć siłę wewnętrzną w dowolnym przecie kratownicy statycznie wyznaczalnej. Należy tylko kratownicę zamienić na łańcuch wzdłużony przez opuszczenie badanego pręta (mn na fig. 284 *a*) i zastąpienie go dwiema siłami S , zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony, a działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli był rozciągany (fig. 284 *b*) i przez udzielenie temu łańcuchowi możliwego niezmiernie małego odkształcenia. Jeżeli przyrost

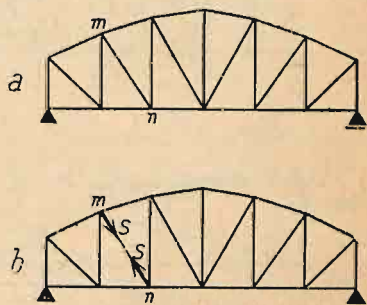


Fig. 284.

odległości węzłów opuszczonego pręta, mierzony w kierunku tego pręta, jest Δs , to praca sił S jest $-S \Delta s$. Równanie (1) będzie wtedy:

$$\Sigma P_m \delta_m = S \Delta s,$$

$$\text{a stąd: } S = \frac{\Sigma P_m \delta_m}{\Delta s} \dots \dots \dots (2)$$

Można też siłę S wyznaczyć przy pomocy planu przesunięć (prędkości) prostopadłych. Jeżeli mm' (fig. 285) jest przesunięciem prostopadłym punktu m , zaś odległość m' od kierunku siły P , zaczepiającej w m , jest c_m , to $\delta_m = c_m$, zatem prawo pracy przygotowanej (równ. 1) można też wyrazić w formie:

$$\Sigma P_m c_m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Fig. 286 jest przykładem zastosowania ostatniego równania. Wyznamy mianowicie napięcie S w przecie ab belki fig. 279 *a* pod obciążeniem P_m, P_n .

Plan przesunięć prostopadłych tarczy I obrano w jej biegunie A , zatem punkty G', a', n' leżą w A .

Punkt B' leży na pionowej podpory B i na prostej $G'B' \parallel GB$.

Punkt b' leży na prostych $G'b' \parallel Gb$, oraz $B'b \parallel Bb$.

Punkt m' leży na prostej $G'm' \parallel Gm$, „ $b'm' \parallel bm$,

gdyż czworobok $G'B'm'b' \sim GBmb$ (por. fig. 278).

Uważając kierunek wskazówek zegara za dodatni dla iloczynów $P_m c_m$, mamy równanie:

$$P_m c_m + P_n c_n + S c_a - S c_b = 0,$$

czyli: $S(c_b - c_a) = P_m c_m + P_n c_n.$

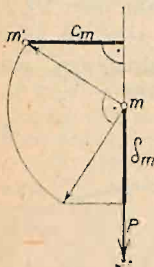


Fig. 285.

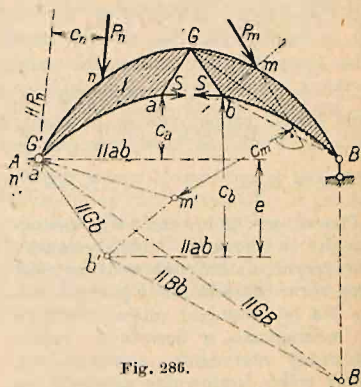


Fig. 286.

Jeżeli odległość węzłów a' i b' , mierzona na prostopadłej do ab , nazwiemy:

$$c_b - c_a = e,$$

to:

$$S = \frac{P_m c_m + P_n c_n}{e} = \frac{\Sigma P c}{e} \quad (4)$$

Linje wpływowe. Dla siły $P=1$ pionowej i poruszającej się po belce, otrzymujemy wedle równań (2) lub (4):

$$S = \frac{1 \cdot \delta_m}{\Delta s} \quad (5)$$

względnie $S = \frac{1 \cdot c_m}{e}$. Siła wewnętrzna w przecie ab jest zatem wprost proporcjonalna do przesunięcia pionowego, względnie pionowej składowej prędkości danego punktu łańcucha wodzonego, zaś linja przesunięć (linja prędkości) tegoż ze współczynnikiem $\frac{1}{\Delta s}$ jest linją wpływową siły S .

Pionowe przesunięcia poszczególnych punktów każdej tarczy wchodzącej w skład łańcucha wodzonego wynoszą $x_m \cdot \omega$, gdzie ω jest prędkością kątową (względnie kątem obrotu), zaś x_m odstęp poziomym punktów tarczy od bieguna obrotu. W linji przesunięć odpowiada zatem każdej tarczy linja prosta, tem samem zaś linja wpływowa dla każdej tarczy jest prosta, której punkt zerowy (obojętny) leży na pionowej bieguna ($x_m = 0$, więc i przesunięcie, względnie prędkość = 0). Biegun względny dwu tarcz przesuwają się dla obu tarcz o tę samą ilość. Muszą się w nim zatem przecinać linje wpływowe obu tarcz (względnie ich przedłużenia). Stąd wynika kształt linji wpływowej: określone są bowiem wszystkie punkty obojętne, oraz wszystkie punkty przecięcia (załamania) linji wpływowej. Dla jej całkowitego określenia potrzeba określić jedną jej rzędną. Uczynić to można parą sposobami; tu podajemy drogę kinematyczną określenia rzędnych.

Jeżeli ciężar $P = 1$ zaczepta w punkcie m tarczy A (fig. 287), któremu odpowiada pionowe przesunięcie δ_I , to wedle równania (5) $S_I = \frac{1 \cdot \delta_I}{\Delta s} = \eta_I$. Gdyby punkt m był sztywnie połączony z tarczą B , to jego przesunięcie pionowe byłoby δ_{II} , a siła wewnętrzna w badanym przecie s byłaby $S_{II} = \frac{1 \delta_{II}}{\Delta s} = \eta_{II}$. Różnica tych sił $S_{II} - S_I = \frac{\delta_{II} - \delta_I}{\Delta s} = \frac{\Delta \delta}{\Delta s}$ równa się różnicy rzędnych prostych wpływowych, odpowiadających tarczom A i B , zatem $\frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \eta_{II} - \eta_I = w$, czyli pionowemu odstępowi obu prostych w m . Jeżeli

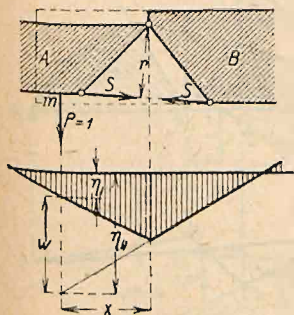


Fig. 287.

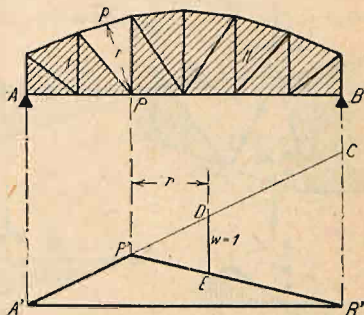


Fig. 288.

obie tarcze łączy pręt badany, to względny obrót obu tarcz $\Delta \alpha = \Delta s : r$, gdzie r = odstęp wzajemnego bieguna (AB) od pręta s .

Przyrost pionowego przesunięcia jest oczywiście:

$$\Delta \delta = x \Delta \alpha = \frac{x \Delta s}{r},$$

stad:

$$w = \frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \frac{x}{r}.$$

Jeżeli $x = r$, to $w = 1$.

Mając np. znaleźć linię wpływową siły wewnętrznej w przecie p kratownicy AB (fig. 288), postępujemy w sposób następujący: Przez opuszczenie pręta p powstaje łańcuch wodzony, złożony z dwu tarcz I i II, których wspólny biegun jest w węźle P w odległości r od p . Na pionowej punktu P , tj. w P' , przecinają się zatem obie proste linii wpływowej, odpowiadające tarczom I i II. Wykreślmy dowolną prostą $A'P'C$. W odległości poziomej r od punktu P' tej prostej odetnijmy $DE = 1$; prosta $P'E'B'$ ogranicza rzędne linii wpływowej na długości PB . Ponieważ biegun tarczy I jest w A , zaś biegun tarczy II leży na pionowej podpory B , więc rzędne linii wpływowej w A i B są równe zeru. Zatem przez punkty A' i B' , leżące na pionowych podporowych przechodzi zamykająca.

W przypadku, jak na fig. 289, znajdziemy względne pionowe przesunięcie punktu n tarczy B względem punktu a tarczy C , jeżeli, uważając tarczę C za nieruchomą, udzielimy punktowi n przesunięcia prostopadłego na ; wtedy

i punkt C' wpadnie w a , punkt b' leży na $c'b' \parallel cb$, zaś ramię $r' \perp ab$ jest równe Δs (por. fig. 285), a składowa pionowa przesunięcia jest $nn' = x = \Delta z$, czyli według równania (5):

$$S = \frac{1 \cdot x}{r'} = w.$$

Linję wpływową siły wewnętrznej w przecie ED belki AB (fig. 290) znajdujemy zatem w sposób następujący: Opuszczając pręt ED , otrzymamy łańcuch wodzony 1. stopnia, złożony z tarcz I i III i prętów II i IV. Uważając tarczę I za nieruchomą, udzielmy punktowi n zaczepienia siły $P=1$ prostopadłą $cn=x$, to i punkt D' planu prędkości prostopadłych znajdzie się w punkcie C , którego odległość od pręta DE jest r . Będzie więc $1 \cdot x = r \cdot S$. Zatem siła w przecie DE , a zarazem rzędna

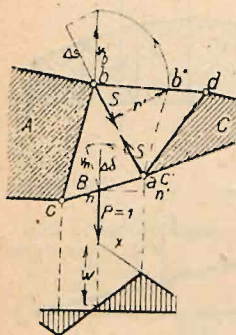


Fig. 289.

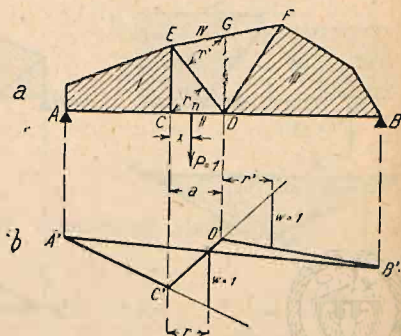


Fig. 290.

w punkcie n linii wpływu siły wewnętrznej $S = w = x : r$. Dla $x = r$ jest $w = 1$. Wykreślmy (fig. b) dowolną prostą $A'C'$. Z punktu C' (na pionowej punktu C) wykreślmy $C'D$, tak, aby rzędna między $A'C'$ a $C'D'$ w odległości r od C' wynosiła $w=1$, to linja łamana $A'C'D'$ odpowiada długościom AC i CD . Odpowiednio do figury 289 wykreślmy $DG \parallel CE$, z punktu G zaś prostą $r' \perp ED$ (fig. 290 a). Z punktu D' wykreślmy prostą $D'B'$ tak, aby rzędna pomiędzy $C'D'$ a $D'B'$ w odległości r' od D' wynosiła $w=1$, to $D'B'$ odpowiada długości DB . Zamykającą jest prosta $A'B'$.

b) Belka wolno podparta.

Belki o pasach równoległych. Prowadząc przekrój $I-I$ na fig. 291 a otrzymujemy $Gh + M_m = 0$, oraz $Dh - M_n = 0$; a stąd:

$$\text{siłę w pasie górnym: } G = -\frac{M_m}{h},$$

$$\text{" " " dolnym: } D = +\frac{M_n}{h}.$$

Zatem linje wpływu sił w pasach są linjami wpływu momentów ze względu na punkty m , względnie n , ze współczynnikiem $\frac{1}{h}$ (por. fig. 291 b).

Siłę w przekątnej otrzymamy, ustawiając równanie równowagi składowych pionowych sił działających na odciętą (lewą) część belki. Wtedy:

$$T - K \cos \alpha = 0,$$

a stąd:

$$K = + \frac{T}{\cos \alpha}.$$

Dla słupów (przekrój II-II) otrzymamy: $V + T = 0$, a stąd:

$$V = - T.$$

Linie wpływowe por. fig. 291 c) i d). Linia wpływowa słupa V_4 por. fig. 291 e).

Dla tej samej belki, jednak o pomoście dołem, linia wpływowa pręta V podana jest na fig. 292. Dla V_4 siła wewnętrzna od obciążenia ruchomego $= 0$. Dla K i G linia wpływowa taka sama, jak dla pomostu góra.

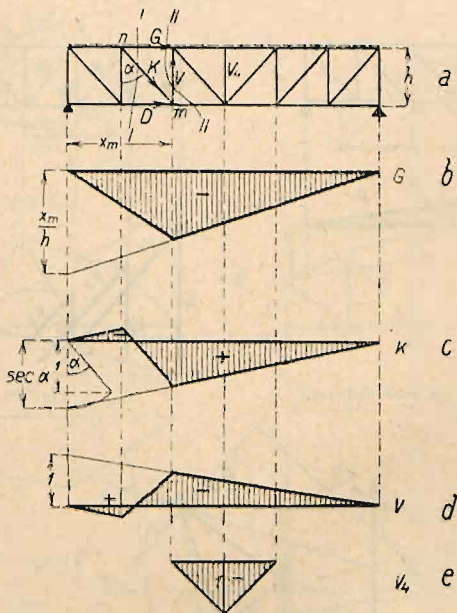


Fig. 291. (Pomost na pasie górnym.)

Przekątnie spadające ku miejscu, gdzie T zmienia znak, są rozciągane, przekątnie wznoszące się ku temu miejscu, są ściskane. Słupy są ściskane, jeżeli przekątnie sąsiadnie są rozciągane i odwrotnie.

Dla szeregu (ciągu) ciężarów skupionych wygodnie jest wyznaczyć największe siły wewnętrzne w krzyżulcach i słupach przy pomocy wieloboku oddziaływań. Ponieważ $K = \pm \frac{T}{\cos \alpha}$, przeto największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy, prowadząc w każdym przedziale wieloboku równoległą do odpowiedniej przekątnej (por. fig. 293).

Najczęściej używamy kraty prostokątnej z przekątniami spadającymi ku środkowi, ścięgnami (krata N; fig. 292, 293), aby uniknąć długich prętów ściskanych. Belkom drewnianym natomiast dajemy często kratę prostokątną z zastrzałami (mosty Rychtera, str. 789). Krata równoramienna (krata V; fig. 306) jest niewygodna ze względów konstrukcyjnych (trudność przytwierdzenia poprzecznic i znaczny ich odstęp); używana najczęściej w połączeniu ze słupami (fig. 296), albo z drugorzędem podparciem (por. niżej).

Belki o pasach nierównoległych. Z równania momentów ze względu na punkt m (fig. 294):

$$M_m + Gr_g = 0,$$

otrzymamy dla pasu górnego:

$$G = - \frac{M_m}{r_g}.$$

Analogicznie dla pasu dolnego:

$$D = + \frac{M_n}{r_d}.$$

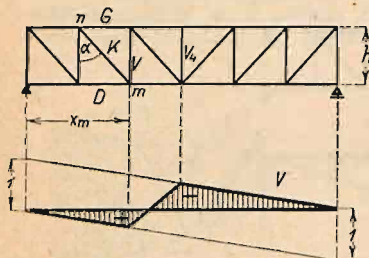


Fig. 292. (Pomost na pasie dolnym.)

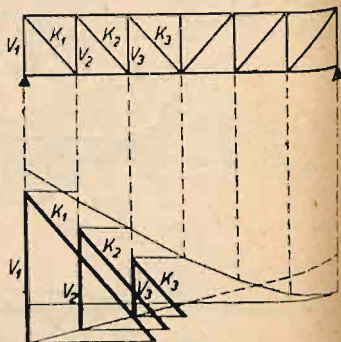


Fig. 293.

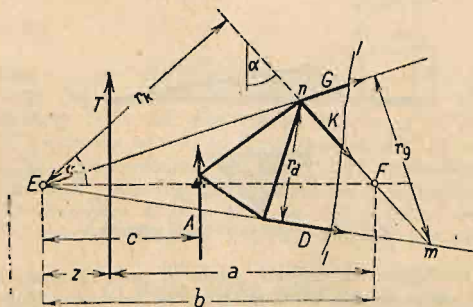


Fig. 294.

Linje wpływowe sił wewnętrznych w pasach są linjami wpływowymi momentów dla punktów m i n ze współczynnikami $-\frac{1}{r_g}$, względnie $+\frac{1}{r_d}$.

Z równania momentów ze względu na punkt przecięcia się pasów E :

$$\mp Tz + Kr_k = 0$$

otrzymamy:

$$K = \pm T \frac{z}{r_k} = \pm T \frac{z}{b} \frac{1}{\cos \alpha} = \pm Y \frac{1}{\cos \alpha},$$

gdzie $b = EF$ jest poziomą odległością punktu E od krzyżulca k , zaś α kątem odchylenia krzyżulca od pionu. Y nazywamy sprowadzoną siłą po-

przeczną. Jeżeli po lewej stronie przekroju niema żadnej siły zewnętrznej prócz oddziaływania A , to:

$$K = \pm A \frac{c}{b \cos \alpha}.$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych na lewo od danego przekroju (fig. 295) jest pionowa, to suma rzutów sił G , K i D na poziom jest $= 0$, więc:

$$G \cos \beta + D \cos \gamma + K \sin \alpha = 0,$$

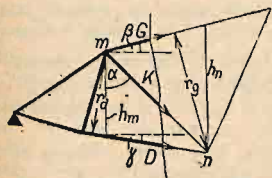


Fig. 295.

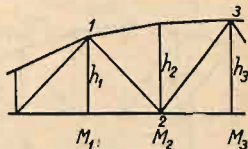


Fig. 296.

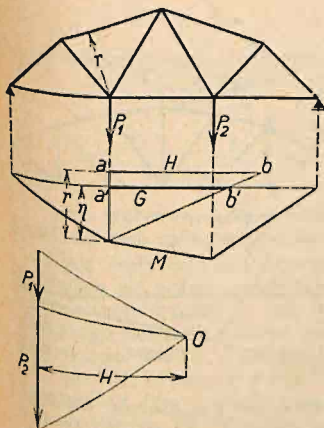


Fig. 297.

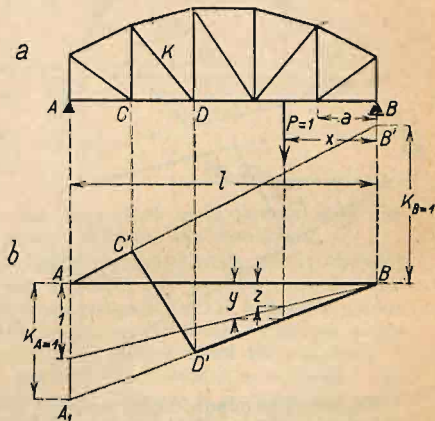


Fig. 298.

stad:

$$K \sin \alpha = - \left(- \frac{M_n}{r_g} \cos \beta + \frac{M_m}{r_d} \cos \gamma \right),$$

czyli:

$$K = \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m} \right) \frac{1}{\sin \alpha};$$

więc:

$$K > 0, \text{ jeżeli } \frac{M_n}{h_n} > \frac{M_m}{h_m}.$$

Przekątnia jest zatem rozciągana, gdy spada w stronę, dla której $\frac{M}{h}$ jest większe. Jeżeli np. $\frac{M_1}{h_1} < \frac{M_2}{h_2} < \frac{M_3}{h_3}$ (fig. 296), to rozciągana jest przekątnia 1-2, zaś ściskana 2-3 (tj. wznosząca się ku większemu $\frac{M}{h}$).

Jeżeli więc wysokości belki (mierzone w węzłach) są wszędzie proporcjonalne do momentów, tj. jeżeli $\frac{M_n}{h_n} = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}}$, to siła wewnętrzna w przekątniach = 0. Dla całkowitego jednostajnego obciążenia siły wewnętrzne w przekątniach belki parabolicznej zbieżnej są więc równe zeru; zaś siła wewnętrzna w pasie prostym jest stała, w pasie zakrzywionym mało zmienna.

Wygodnie jest nieraz wykorzystać to przy obciążeniu stałym wogóle, zwłaszcza symetrycznym, wykonywując jeden pas kratownicy o kształcie linii momentów (a drugi prosty). Np. dla dwu ciężarów symetrycznych odpowiedni jest kształt trapezowy.

Jeżeli wielobok momentów znaleźliśmy wykreślić (fig. 297), to $M = H \cdot \eta$, gdzie η jest rzędną wieloboku momentów, zaś H odległością biegunową. Wtedy siła w pasie np. górnym:

$$G = -\frac{M}{r} = -\eta \frac{H}{r}.$$

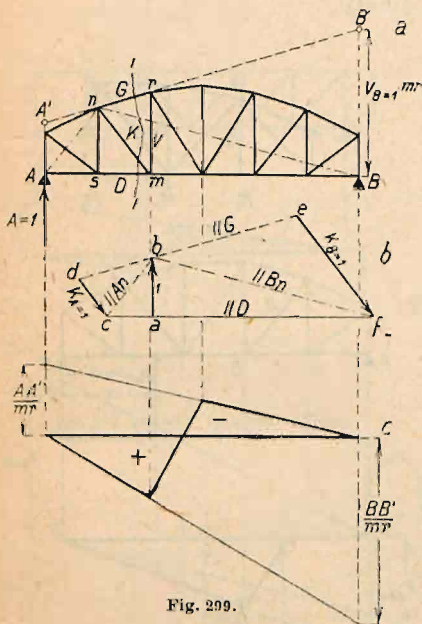


Fig. 299.

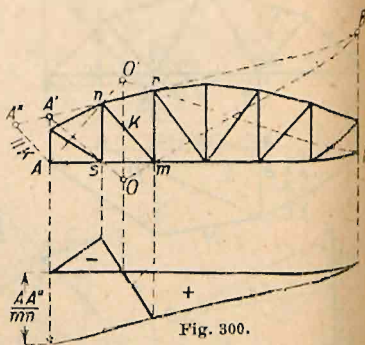


Fig. 300.

Odnieśmy na odpowiedniej rzędnej η długości r , zaś z a długość $ab = H$, to prosta $a'b'$ przedstawia szukaną wielkość siły G .

Linie wpływowe belek o pasach nierównoległych najlepiej wyznaczyć metodą „oddziaływań” = 1^a, fig. 298, 299, 300. Jeżeli $P = 1$ stoi na prawo od prawej poprzecznicy D , w odległości x od B (fig. 298 a), to $A = \frac{x}{l} = z$ (fig. b), zaś siła wewnętrzna $K = y$. Oznaczmy $K_{A=1}$ siłę w przecie K wskutek $P = \frac{l}{x}$, czyli $A = 1$. Jeżeli $A A_1 = K_{A=1}$, to odcinek BD' prostej BA_1 jest linią wpływową dla K na długości DB , ponieważ siła K jest proporcjonalna do A (o ile P jest na prawo od D). Podobnie, odcinając $BB_1 = K_{B=1}$, otrzymamy linię wpływową na długości AC . Na długości CD linią wpływową jest $C'D'$. Jeśli chcemy mieć linie wpływowe wszystkich prętów, najlepiej wyznaczyć wielkości $K_{A=1}$ i $K_{B=1}$, przy pomocy planu sił (Cremony) dla $A = 1$ i siły $P = \frac{l}{a}$ w przedostatnim węźle, oraz dla $B = 1$ (o ile belka jest niesymetryczna). Jeżeli chodzi tylko o jeden pręt, to lepiej znaleźć $K_{A=1}$ i

$K_{B=1}$ metodą Culmanna (fig. 299). Siły D , K , G i $A=1$, działające na lewą część odciętą przekrojem I—I, są w równowadze. Wypadkowa sił D i $A=1$ przechodzi przez punkt A i nakrywa się z wypadkową sił G i K , przechodzącą przez n . Jeżeli (fig. b) $ab=1=A$, $ac \parallel D$, to $bc \parallel An$ jest wypadkową sił G i K . Jeżeli $bd \parallel G$ i $cd \parallel K$, to $cd=K_{A=1}$ i jest dodatnie, gdyż działa od węzła n . Podobnie $ef=K_{B=1}$ i jest ujemne, gdyż działa do węzła m (odciętej prawej części belki). Jeżeli pręt nr przedłużymy na obie strony aż do przecięcia się z pionowymi podporowami, to z uwagi na podobieństwo czworoboków $mrA'A$ i $mrB'B$ z odpowiednimi czworobokami Culmanna jest $AA'=-V_{A=1} \cdot mr$ i $BB'=-V_{B=1} \cdot mr$ (por. fig. 299 c, linia wpływowa dla słupa mr).

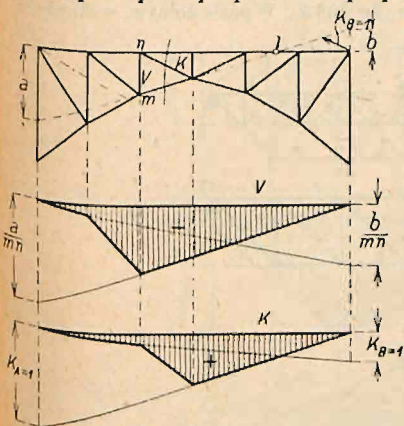


Fig. 301.

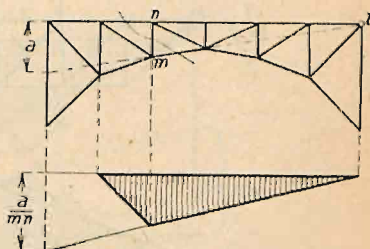


Fig. 302.

Linie wpływowe pasów belek wolno podpartych mają na całej swej długości ten sam znak, więc pasy są zawsze ściskane lub rozciągane.

Linie wpływowe krzyżulców (przekątni i słupów) mają punkt obojętny i składają się z dwu gałęzi o różnych znakach, gdy punkt przecięcia odpowiednich prętów pasu leży (jak zwykle) poza podporami A i B . Położenie punktu obojętnego można wyznaczyć, przedłużając pas nieobciążony (na którym niema poprzecznic) aż do przecięcia z pionowymi podporowami (w punktach A' i B' , fig. 300) i łącząc je z sąsiednimi węzłami odpowiednich części pasu s i m . Proste $A's$ i $B'm$ przecinają się w punkcie O , leżącym w pionowej nad punktem obojętnym. Na tej samej pionowej przetną się proste An i Bn . Znajdząc zaś położenie punktu obojętnego, wystarczy nawet dla belek niesymetrycznych wyznaczyć tylko jeden plan sił, albo tylko $K_{A=1}=AA':mn$, przyczem $AA' \parallel mn$ (por. fig. 300).

Jeżeli punkt przecięcia odpowiednich pasów i znajduje się pomiędzy podporami, to linia wpływowa siły wewnętrznej w odpowiednim krzyżulcu ma na całej długości ten sam znak (fig. 301). Jeżeli punkt i leży na pionowej podpory A , względnie B , to odpowiednia część linii wpływowej spada do zera (fig. 302).

Belka kratowa równoległa z drugorzędem podparciem (fig. 303). Używana dla znaczniejszych rozpiętości, a właściwie dla większych odległości węzłowych. Dla wyznaczenia linii wpływowych najwygodniej system drugorzędny wyodrębnić od zasadniczego.

Celem znalezienia linii wpływowej pasu np. G_3 z podparciem drugorzędem (tu górnego) wyznacza się najpierw linię wpływową $a'b'c'$ dla układu zasadniczego. Dla dźwigara drugorzędowego 3-6-4-5 (fig. 303a) jako dźwigara samodzielnego, obciążonego siłą $P=1$ w $5'$, otrzymujemy siłę dodatkową

w pasie górnym G_3' o wielkości $G_3' = -\frac{M'}{h'} = -\frac{1/2 \lambda \cdot 1}{1/2 h} = -\frac{\lambda}{h}$. Wielkość $\frac{\lambda}{h}$ przedstawia jednak wysokość trójkąta $c'd'e$, a stąd wynika kształt linii wpływowej, podany na fig. 303 b.

Dla górnej części przekątni głównej otrzymujemy siłę dodatkową K_3' o wielkości $+\frac{1}{2 \cos \alpha}$ (przez rozłożenie siły $\frac{1}{2}$ na G_3' i K_3'), por. fig. 303 c. Linia wpływowa pręta V' jest trójkątem (fig. 303 d). W pasie dolnym, w słupach

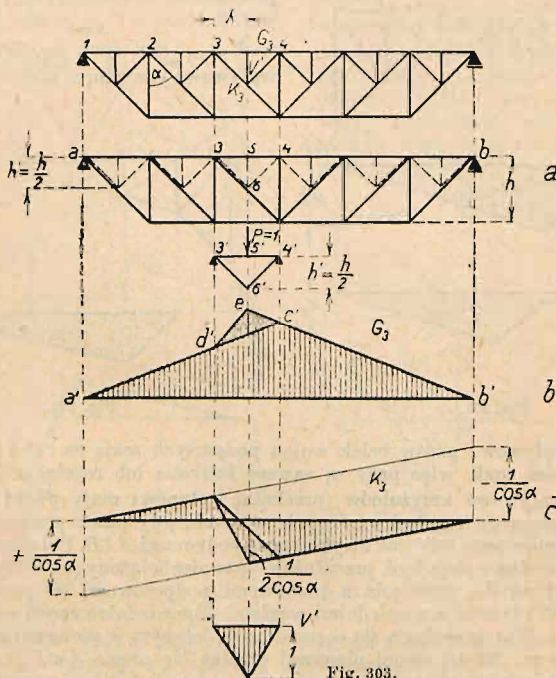


Fig. 303.

głównych i w dolnych częściach przekątni siły (i linie wpływowe) są takie same, jak dla belki bez podparcia drugorzędnego.

Belka równoległa o kracie półprzekątniowej (kracie K, fig. 304). Ustawiając dla przekroju 1—1 równanie momentów względem punktu 2.: $Gh + M = 0$, otrzymamy:

$$G = -\frac{M}{h}, \text{ podobnie: } D = +\frac{M}{h}.$$

Dla przekątni otrzymujemy, prowadząc przekrój 2—2 i ustawiając równanie $\Sigma H = 0$:

$$K \sin \alpha + K' \sin \alpha = 0, \text{ a więc: } K = -K'.$$

Dla przekroju 3—3 i równania $\Sigma V = 0$:

$$K \cos \alpha - K' \cos \alpha + T = 0,$$

a stąd:

$$K = -\frac{T}{2 \cos \alpha}, \quad K' = +\frac{T}{2 \cos \alpha}.$$

Dla przekroju 4—4 i $\Sigma V = 0$:

$$V + K \cos \alpha = 0, \quad V = -K \cos \alpha = +\frac{1}{2} T.$$

Linie wpływowe wszystkich tych sił są zatem linjami wpływowymi momentu, względnie siły poprzecznej, z odpowiednimi współczynnikami.

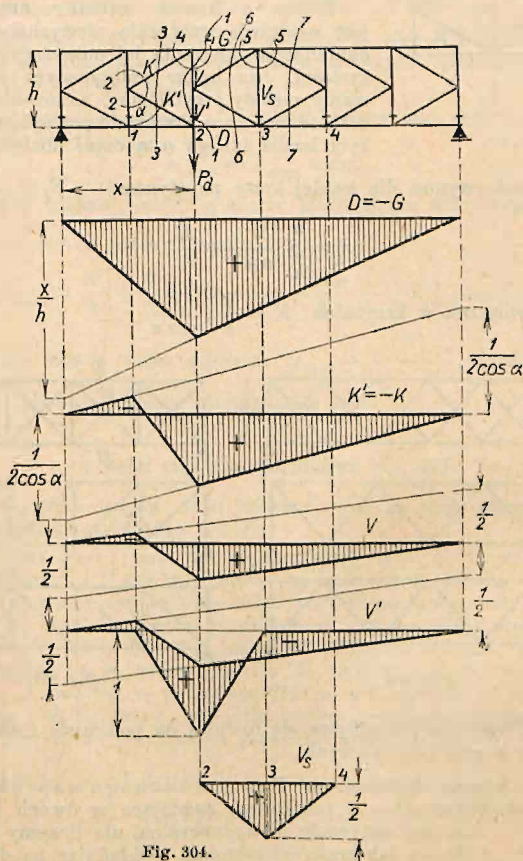


Fig. 304.

Siłę wewnętrzną w części słupa V' (pomost na pasie dolnym) znajdziemy z równania $\Sigma V = 0$,

$$V' + K' \cos \alpha - P = 0, \quad V' = -\frac{1}{2} T + P.$$

Zatem od linii wpływowej dla $T \cdot \frac{1}{2}$ należy odjąć linię wpływową siły węzłowej P_d (rzędna = 1 w węźle 2, rzędna = 0 w węzłach 1 i 3).

Linję wpływową V_s otrzymujemy, prowadząc przekroje 5, 6 i 7, dla warunku $\Sigma V = 0$ (fig. 305).

Dla przekroju 6: $2 K_l \cos \alpha + P - A = 0$, $K_l \cos \alpha = \frac{1}{2}(A - P)$.

" " 7: $2 K_p \cos \alpha + A - P - P_s = 0$, $K_p \cos \alpha = \frac{1}{2}(P + P_s - A)$,

a ponieważ:

$$V_s = K_l \cos \alpha + K_p \cos \alpha,$$

przeto, podstawiając wyżej otrzymane wartości, otrzymujemy:

$$V_s = \frac{1}{2} P_s.$$

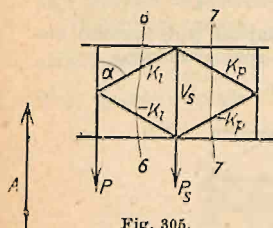


Fig. 305.

Belka o kracie wielokrotnej (fig. 306) jest właściwie statycznie niewyznaczalna i dla dokładnego obliczenia jej potrzeba równań sprężystości. Dla celów praktycznych jednak używamy metody przybliżonej. Kratownicę n -krotną rozkładamy na n kratownic pojedynczych, z których każda dźwiga n -tą część obciążenia.

Siła w pasie wynosi dla każdej kraty pojedynczej: $S_i = \frac{M}{nh}$,

czyli razem:

$$S = \sum_1^n \frac{M}{nh} = \frac{M}{h}.$$

Siła wewnętrzna w krzyżulcu: $K = \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{\cos \alpha}$.

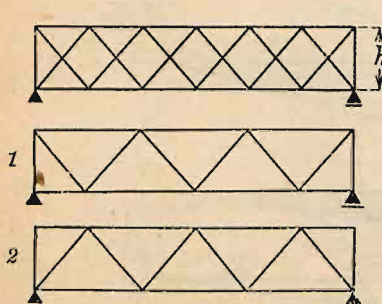


Fig. 306.

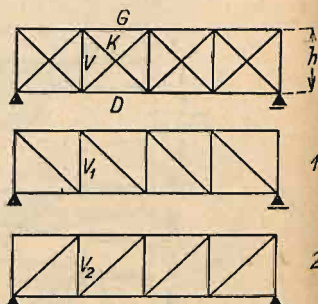


Fig. 307.

Wykres linii wpływowych odbywa się również na podstawie rozdziału kraty n -krotnej na n krat pojedynczych.

Belka o kracie złożonej. a) Bez sztucznego naprężenia. Jest to krata, posiadająca słupy i przekatnie, spadające w dwóch kierunkach. Jest ona statycznie niewyznaczalna, ale liczymy ją w przybliżeniu, jak kratę wielokrotną, rozkładając na dwie części: kratę z przekątniami, spadającymi w lewo, oraz na kratę z przekątniami, spadającymi w prawo.

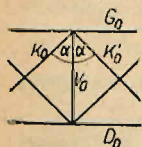


Fig. 308.

Wtedy siła w krzyżulcach: $K = \frac{T}{2 \cos \alpha}$,

w pasach: $S = \frac{M}{h}$ (fig. 307).

Słup V w kracie pierwszej jest ściskany, w kracie drugiej rozciągany i w rezultacie niesie tylko różnicę ciężarów węzłowych $V = P_d - P_g$; jest więc rozciągany, gdy pomost jest dołem, zaś ściskany, gdy pomost jest górną.

b) Ze sztucznem naprężeniem (belka Howe'a; fig. 308). Jeżeli w belce kratowej złożonej, podpartej jeszcze rusztowaniem, tak, że ciężar własny kraty nie wywołuje sił w prętach, naciągniemy sztucznie śruby, czyli spowodujemy sztuczne napięcia w słupach V_0 , powstaną sztuczne siły wewnętrzne:

$$\text{w krzyżulcach:} \quad K_0 = K'_0 = \frac{V_0}{2 \cos \alpha},$$

$$\text{zaś w pasach:} \quad G_0 = D_0 = -K_0 \sin \alpha = \frac{1}{2} V_0 \tan \alpha.$$

Możemy wywołać tak wielkie rozciąganie V_0 , aby K i K' były zawsze ściskane tak, aby dla najniekorzystniejszego obciążenia ruchomego była siła w odstrzale $K' = 0$. Musi więc być $V_0 = T_{\max}$.

Wówczas największa siła w zastrzale K osiąga taką wartość, jak gdyby odstrzałów nie było, czyli

$$K_{\max} = T_{\max} \sec \alpha,$$

więc dwa razy większą aniżeli w kracie złożonej bez sztucznego napięcia.

Największa siła w pasie dolnym:

$$D_{\max} = \frac{M}{h} + \frac{1}{2} V_0 \tan \alpha = \frac{M_{\max}}{h} + \frac{1}{2} T_{\max} \tan \alpha.$$

Największa siła w pasie górnym: $G_{\max} = -\frac{M_{\max}}{h}$, jeżeli opuścimy dla większej pewności wpływ naciągnięcia śrub.

c) Belki ciągle wspornikowe (fig. 309).

Linje wpływowe prętów belki wiszącej CD są takie same, jak belki wolno podpartej na podporach C i D .

Jeżeli ciężar $P=1$ znajduje się pomiędzy A i B , to we wszystkich prętach pomiędzy A i B siły wewnętrzne są takie same, jak dla belki wolno podpartej AB , natomiast we wszystkich prętach na prawo od B siła wewnętrzna = 0; więc dla prętów pomiędzy A i B jest linja wpływowa na długości A i B taka, jak dla belki wolno podpartej AB , zaś na długości BD rzędne jej są proporcjonalne do rzędnych linii wpływowej oddziaływania A [trójkąt o podstawie BD o wierzchołku w C (por. linje wpływowa g_1 i k) fig. 309 c i d]. Dla prętów, znajdujących się na prawo od B , linja wpływowa nie posiada gałęzi na długości AB .

Ze względu na węzeł 8 jest:

$$M_8 - G_2 r_2 = 0, \text{ stąd } G_2 = \frac{M_8}{r_2}.$$

$$\text{Podobnie:} \quad D_2 = -\frac{M_8}{h_8}.$$

Linja wpływowa D_2 podana jest na fig. 309 e.

Gdy ciężar $P=1$ jest w C , siła wewnętrzna dla słupa S_2 we wsporniku BC wynosi $S_{C=1}$. Można ją znaleźć według metody Culmanna dla przekroju $t-t$ (fig. g). Gdy ciężar $P=1$ jest w węźle 7, to $S_2 = 1$ (por. fig. f). Wpływ ciężaru znajdującego się na prawo od C na wielkość oddziaływania C maleje z odległością od C do zera w punkcie D , zatem i rzędne linii wpływowych wszystkich prętów belki wspornikowej maleją na długości CD do zera według prostej.

d) Łuk tróprzegubowy (fig. 310).

Dla wyznaczenia linii wpływowych najwygodniej zastosować zasadę belki zastępczej (por. str. 1210). Biorąc moment ze względu na punkt i (fig. a), otrzymujemy dla pasa górnego: $G h_i + M_{0i} = 0$, a stąd:

$$G = - \frac{M_{0i}}{h_i}.$$

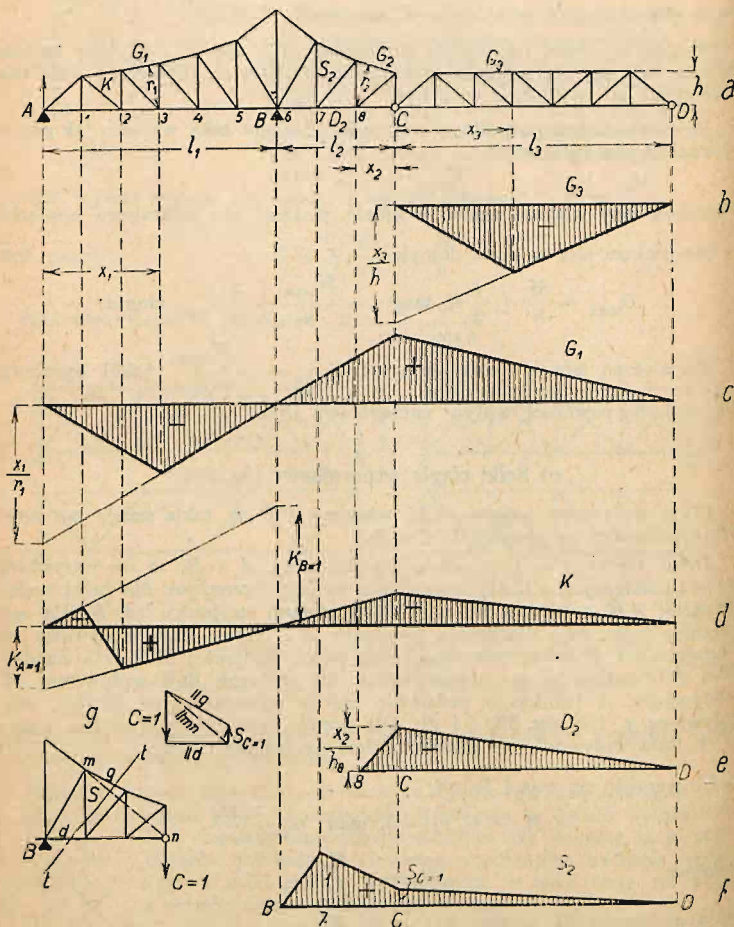


Fig. 309.

Moment $M_{0i} = 0$, gdy ciężar $P=1$ znajduje się w punkcie m , zatem belka zastępcza ma długość AM . Linia wpływowa siły G jest linią wpływową momentu M_{0i} , pomnożoną przez $\frac{1}{h_i}$ (fig. b). Analogicznie znajdujemy linie wpływowe dla pasa dolnego (fig. c).

Krzyżulce. Z równania momentów ze względu na punkt p mamy:
 $M_{0p} - K \cdot t = 0$, a stąd $K = \frac{1}{t} M_{0p}$. Linja wpłyowa — por. fig. d .

Słupy: $M_{0p} - V l_p = 0$, $V = \frac{M_{0p}}{l_p}$ (fig. e).

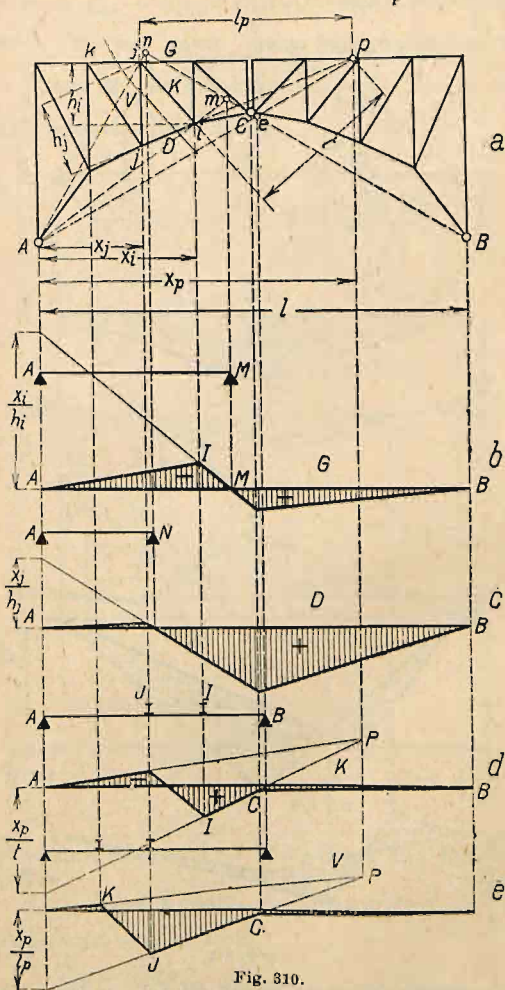


Fig. 310.

Łuk gibki z usztywnieniem belką przegubową (fig. 311). Posiada 2 tarcze (belki kratowe), oraz w węzłów (na fig. 311 $w=5$), zatem do użyskania belki statycznie wyznaczalnej potrzeba według równania (1) $(6+2w)$ prętów. Mamy $2w+1$ prętów istotnych, tj. $w+1$ prętów łuku i w podwieszek, nadto 2 pręty przegubu; zatem potrzeba $(6+2w) - (2w+1+2) = 3$ prętów łożyskowych; więc podparcie, jak dla belki wolno podpartej (prostej).

Dla obciążenia pionowego oddziaływania są pionowe. Składowa pozioma H sił w prętach łuku jest stała. Prowadząc przekrój 1—1 (fig. a), otrzymujemy ze względu na punkt O :

$$M_{0o} + Hf = 0, \text{ a stąd } H = -\frac{M_{0o}}{f},$$

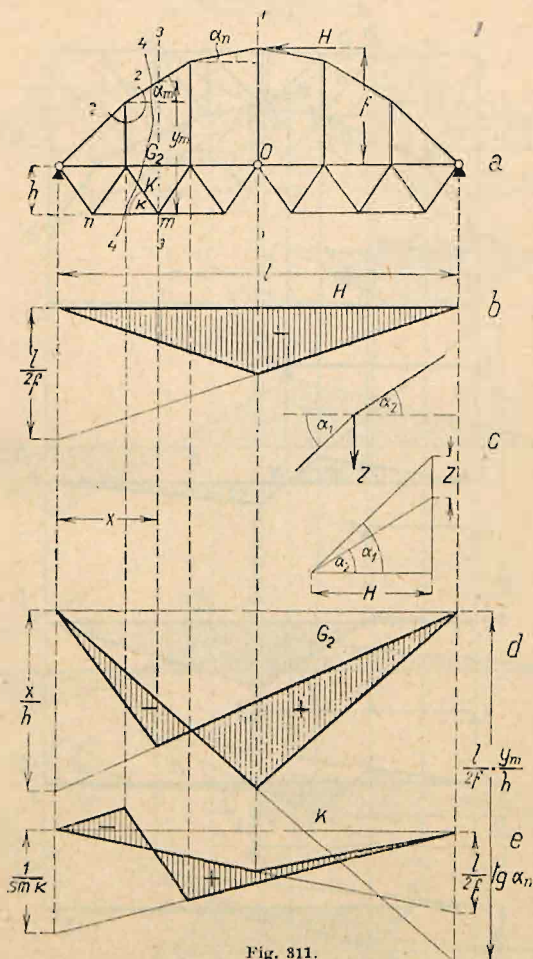


Fig. 311.

gdzie M_{0o} jest momentem sił zewnętrznych dla belki wolno podpartej, w punkcie O . Linja wpływowa, por. fig. b.

Siła wewnętrzna w prętach łuku $\mathcal{L} = \frac{H}{\cos \alpha_n} = -\frac{M_{0o}}{f \cos \alpha_n}$. Linje wpływowe \mathcal{L} daje więc linja wpływowa H ze współczynnikiem $\frac{1}{\cos \alpha_n} = \sec \alpha_n$.

Siły w podwieszakach znajdziemy, wycinając odpowiedni węzeł górny (przekrój 2—2 i fig. c) i rzutując siły w wyciętych prętach na oś pionową. Wtedy $Z = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)$.

Dla znalezienia siły w pasie górnym, np. G_2 , prowadzimy przekrój 3—3 przez węzeł m , wtedy $M_{0m} + Hy_m + G_2h = 0$, a stąd $G_2 = -\frac{1}{h}(M_{0m} + Hy_m)$. Linia wpływowa G_2 jest zatem sumą linii wpływowej H ze współczynnikiem $-\frac{y_m}{h}$, oraz M_{0m} ze współczynnikiem $-\frac{1}{h}$ (por. fig. d). Podobnie znajdziemy linię wpływową pasa dolnego.

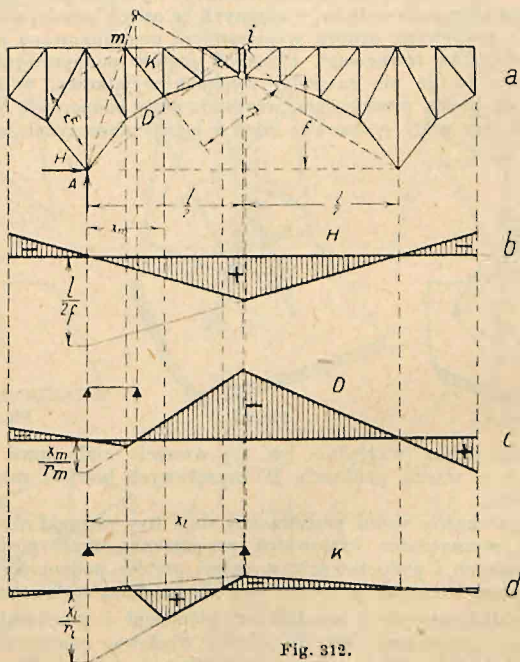


Fig. 312.

Prowadząc wreszcie przekrój 4—4 i ustawiając dlań równanie $\sum V = 0$, otrzymujemy:

$$T_{0n} + \mathcal{L}_m \sin \alpha_m - K \sin \alpha = 0;$$

a stąd po podstawieniu wartości za \mathcal{L} :

$$K = \frac{T_{0n} + H \operatorname{tg} \alpha_m}{\sin \alpha} \quad (\text{Linia wpływowa, por. fig. e}).$$

Łuk trójprzegubowy ze wspornikami (fig. 312). Linie wpływowe dla łuku trójprzegubowego usztywnionego belką kratową.

Łuk trójprzegubowy ze wspornikami (fig. 312). Linie wpływowe dla łuku bez wsporników przedłuża się aż do końców wsporników, por. fig. b — linia wpływowa parcia poziomego, c) pasa dolnego D, d) krzyżulca K.

III. Kratownice przestrzenne.

Łożyska utworów przestrzennych mogą być:

a) stałe (fig. 313); w obliczeniu dają się zastąpić trzema prętami podporowymi, których siły wewnętrzne są równe odpowiednim składowym oddziaływaniom;

b) ruchome linjowe (jednokierunkowe, wahadłowe = dwu prętom podporowym; fig. 314), poruszające się w linii prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez pręty podporowe; można je wykonać jako wałkowe lub przesuwowe;

c) ruchome płaszczyznowe (wielokierunkowe) = jednemu prętowi podporowemu (fig. 315), poruszające się w płaszczyźnie prostopadłej do pręta podporowego w dowolnym kierunku; można je wykonać jako kulowe lub wałkowe o dwu szeregach wałków, ruchomych w osiach prostopadłych do siebie.

Stalność zewnętrzna utworu w przestrzeni uwarunkowana jest spełnieniem sześciu warunków równowagi. Przeto 6 prętów podporowych ustala ciało w przestrzeni, o ile nie zachodzi wypadek wyjątkowy, w którym da się poprowadzić prosta przecinająca wszystkie pręty podporowe. Nie mogą zatem więcej niż trzy pręty podporowe leżeć w jednej płaszczyźnie, ani przechodzić

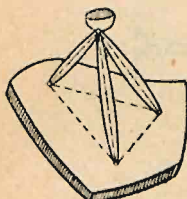


Fig. 313.

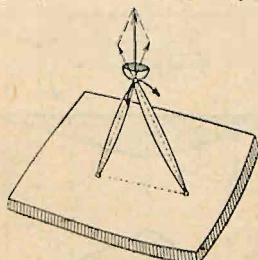


Fig. 314.

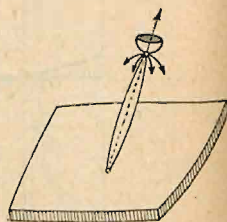


Fig. 315.

przez jeden punkt (względnie być \parallel); wreszcie ciało musi być podparte conajmniej w trzech punktach. W przeciwnych bowiem razach podparcie jest chwilowe.

Ponieważ każdy węzeł przestrzenny daje trzy warunki równowagi, przeto statycznie wyznaczalna kratownica przestrzenna musi posiadać $p = 3w$ prętów istotnych i podporowych, z czego prętów podporowych conajmniej $p_p = 6$, zatem istotnych $p_i = 3w - 6$. Najczęściej stosowane utwory przestrzenne, składające się z narożników, pierścieni i przekątni, leżących na powierzchni kratownicy (kopuły, dachy wieżowe, namiotowe, filary itd.), posiadają łożyska i pręty podporowe znacznie więcej. Mianowicie zwykle dla n naroży, $p_p = 2n$ (w każdym węźle podporowym łożysko ruchome), jeżeli dołem istnieje pierścień podporowy; zaś $p_p = 3n$ (w każdym węźle podporowym łożysko stałe), jeżeli pierścienia podporowego niema. Wtedy dla zachowania statycznej wyznaczalności ilość prętów istotnych wynosić musi $p_i = 3w - 2n$, względnie $p_i = 3w - 3n$. Zazwyczaj osiąga się to w ten sposób, że w kopułach pierścieni najwyższy wykonywa się jako pierścień otwarty, zwykle używany pod latarnię, w dachach, posiadających zaś ostry szczyt, opuszcza się w obliczeniu pręty szczytowe, uważając je z wystarczającą dokładnością za ustrój drugorzędny.

Np. filar o postaci, jak fig. 316, jest statycznie wyznaczalny; posiada bowiem $w = 12$ węzłów, zaś $p = 36 = 3w$ prętów, w czym $p_i = 30$, $p_p = 6$. Zazwyczaj jednak opuszcza się pręty istotne 1-3 i 9-11, zwiększając odpowiednio ilość prętów podpartych. Por. fig. 317, gdzie $p_i = 28$, $p_p = 8$,

$p = 28 + 8 = 36$, oraz fig. 318, gdzie $p_i = 24$, $p_p = 12$, $p = 24 + 12 = 36$.

Ustrój wedle fig. 318 jest częściej używany.

Statycznie wyznaczalną kratownicę przestrzenną otrzymać można:

a) przez dołączanie do stałej podstawy, względnie stałej kratownicy, nowych węzłów, każdego przy pomocy trzech prętów (istotnych lub podporowych);

b) przez połączenie ze stałą statycznie wyznaczalną kratownicą drugiej kratownicy statycznie wyznaczalnej przy pomocy sześciu prętów;

c) przez wymianę prętów w istniejącej statycznie wyznaczalnej kratownicy (por. fig. 316—318, a także str. 1234); wymieniać można pręty istotne

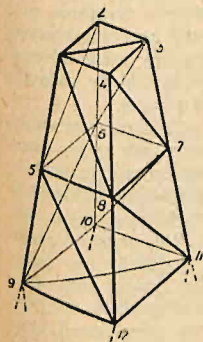


Fig. 316.

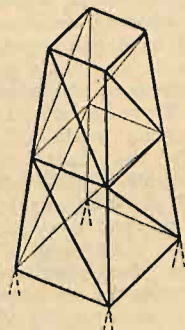


Fig. 317.

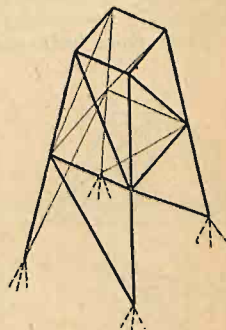


Fig. 318.

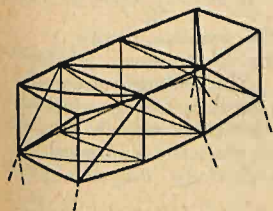


Fig. 319.

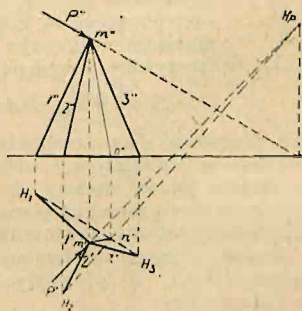


Fig. 320.

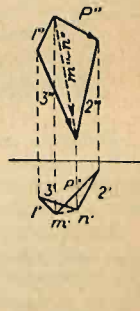


Fig. 321.

miedzy sobą lub z podporowymi, przemieszczając je wogóle dowolnie, tak jednak, aby utrzymać wewnętrzną i zewnętrzną stałość kratownicy.

Kształtem statycznie wyznaczalnej kratownicy przestrzennej, jaki daje ująć się najłatwiej, a z którego dadzą się wyprowadzić prawie wszystkie używane postacie, jest kratownica siatkowa (fig. 319), której wszystkie pręty powiązane są w trójkąty, a leżą na powierzchni, zamykającej swojemi płaszczyznami pewną przestrzeń.

Wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach kratownicy przestrzennej. a) Wyznaczanie sił wewnętrznych w węźle trójpętowym. Przez kierunek siły P i jeden z prętów, np. 2 (fig. 320), przeprowadza się płaszczyznę ($P-2$), która przecina się z płaszczyzną, przechodzącą przez pozostałe pręty (1-3) wedle prostej (mn). Siłę P rozkłada się następnie

w obu rzutach na siły 2 i (mn), a wreszcie składową (mn) na siły 1 i 3 (fig. 321). Wielkości sił 1, 2 i 3 znajduje się z składu rzutów tychże sił.

Zazwyczaj można jedną z płaszczyzn przeprowadzić równoległą, względnie prostopadłą do płaszczyzny rzutowej, a wtedy wyznaczenie sił wewnętrznych znacznie się upraszcza.

Metody tej używamy również, gdy w węźle o większej ilości prętów trzy siły wewnętrzne są nieznane, a pozostałe wiadome.

b) Metoda momentów używana, gdy kratownica nie ma węzłów trójprętowych.

Prowadzi się płaszczyznę przekroju tak, aby przecięła pręt, którego siłę wewnętrzną chcemy wyznaczyć, wybierając jako oś momentów prostą, przecinającą możliwie wiele przekrojonych prętów, i ustawia równanie momentów siły zewnętrznej i siły szukanej. Jeżeli oś momentu przecina wszystkie pręty prócz badanego (np. 5 na 6 przeciętych), wystarczy jedno równanie; o ile np. 4 na 6 przeciętych, należy ustawić dwa równania ze względu na dwie osi.

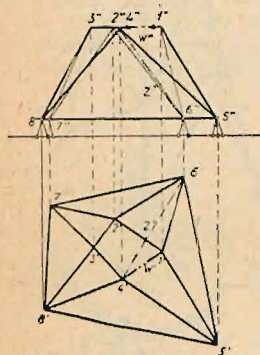


Fig. 322.

c) Metoda wymiany prętów używana, gdy niema węzła trójprętowego lub gdy inne metody nie dadzą się zastosować (znacznie częściej niż w kratownicach płaskich). Dowolny pręt W (fig. 322), zwykle w pierścieniu górnym, odrzuca się (pręt wymienny), tak, aby uzyskać przynajmniej jeden węzeł o trzech prętach, nie leżących w jednej płaszczyźnie; dla utrzymania stałości umieszcza się natomiast w dogodnym miejscu pręt, t. zw. zastępczy Z . W tak otrzymanej kratownicy wyznacza się siły wewnętrzne S_0 i Z_0 dla obciążenia zewnętrznego (stan $X=0$), oraz siły wewnętrzne S_1 i Z_1 dla obciążenia siłami $=1$, zaczepiającami w końcach usuniętego pręta wymiennego w kierunku osi tegoż (stan $X=1$). Siły rzeczywiste, występujące w prętach, wynoszą:

$$S = S_0 + W S_1, \text{ gdzie: } W = -\frac{Z_0}{Z_1}, \text{ por. str. 1212.}$$

Podobnie można zastosować dwu- i wielokrotną wymianę prętów.

Kratownice przestrzenne hiperstatyczne oblicza się tak samo, jak hiperstatyczne płaskie; wogóle jednak staramy się unikać takiego skomplikowanego obliczenia, decydując się raczej na pewne uproszczenia i przybliżenia.

Najczęściej używane systemy kratownic przestrzennych składają się z narożników (krokwi) prostych lub łamanych, pierścieni wielobocznych, oraz przekątni (pojedynczych lub podwójnych gibkich); wszystkie pręty leżą na powierzchni kratownicy.

a) Kopuły przestrzenne. Węzły narożników leżą na krzywej; w najczęściej używanych kopułach Schwedlerowskich na paraboli (por. fig. 323). Łożyska zwykle ruchome o kierunku ruchu prostopadłym do jednego z przyległych pierścieni (fig. 323). Dla kopuł o rzucie poziomym regularnym i obciążenia rozłożonego jednostajnie na całym pierścieniu (np. obciążenie stałe) obliczenie przeprowadza się następująco (fig. 324):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -P_1 \frac{k_1}{a_1}, & K_n &= -\left(\sum_1^n P\right) \frac{k_n}{a_n} \\ R_1 &= -\frac{1}{2 \cos \alpha} P_1 \frac{b_1}{a_1}, & R_n &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \left[\left(\sum_1^{n-1} P\right) \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \left(\sum_1^n P\right) \frac{b_n}{a_n} \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

dla pierścienia murowego (najniższego) $R_m = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\sum_1^{m-1} P\right) \frac{b_m}{a_m}$

We wzorach tych 2α jest to kąt, jaki zawierają dwa sąsiednie pręty pierścienia. Dla kopuły ośmiobocznej umiarowej $\alpha = 67^\circ 30'$.

Dla sił inaczej rozłożonych (np. wiatru) najlepiej użyć metody Müller-Breslau'a (fig. 325). Obciążenie węzła (w węzłach niższych złożone z siłą wewnętrzną krokwi górnej i składowymi przekątni w kierunku tej krokwi)

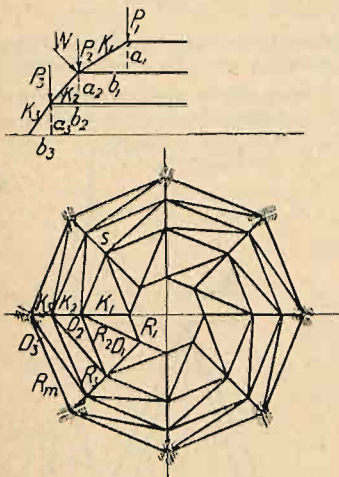


Fig. 323.

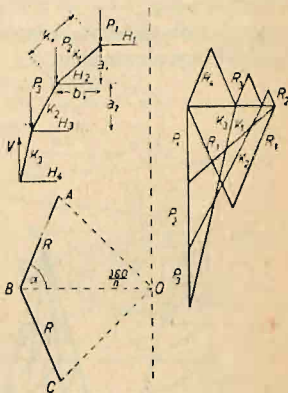


Fig. 324.

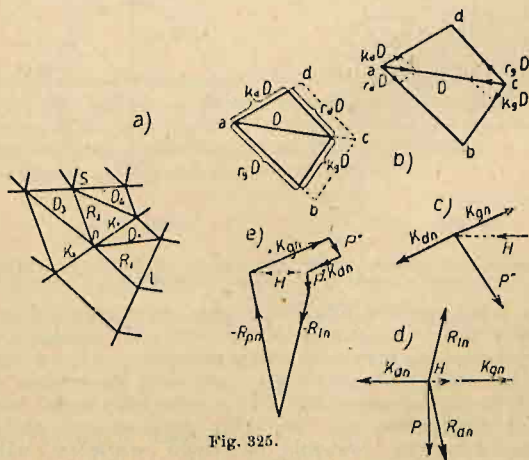


Fig. 325.

rozkłada się na siłę w kierunku krokwi dolnej, oraz siłę poziomą, z których to sił znajdujemy siły rzeczywiste w krokwi i przekątniach dolnych. Niech oznacza (fig. 325): k_g , względnie r_g — składowe siły $D=1$ w kierunku krokwi, względnie pierścienia górnego, k_d , względnie r_d — składowe siły $D=1$ w kierunku krokwi, względnie pierścienia dolnego (wartości dla każdego pręta inne; najlepiej wyznaczyć je wykreślnie; por. fig. 325), to suma sił w kierunku krokwi powyżej węzła n :

poniżej n :

$$\left. \begin{aligned} K_{gn} &= K_1 + k_{d1} D_1' \\ K_{dn} &= K_2 + k_{g2} D_2'' \\ \text{w kierunku pierścienia prawego: } R_{pn} &= R_2' + r_{d1} D_1' \\ \text{w kierunku pierścienia lewego: } R_{ln} &= R_2'' + r_{g2} D_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Obliczenie rozpoczyna się od pierścienia górnego, gdzie няма prętów górnych, więc $k_g = r_g = 0$, i obejmuje kolejno węzły tegoż. Potem przechodzi się do pierścienia następnego. Znając siły w prętach ponad m , otrzymamy z figury niewiadome K_d , R_p i R_l , a następnie siły rzeczywiste:

$$\left. \begin{aligned} R_2' &= R_{pn} - r_{d1} D_1', & R_2'' &= R_{ps} - r_{d1} D_1'', \\ D_2'' &= \frac{R_{ln} - R_2''}{r_{g2}}, & K_2 &= K_{dn} - k_{g2} D_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (2a)$$

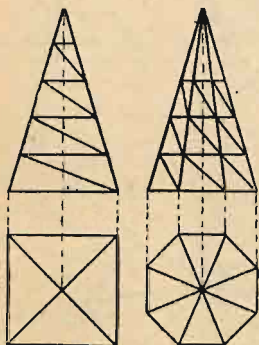


Fig. 326.

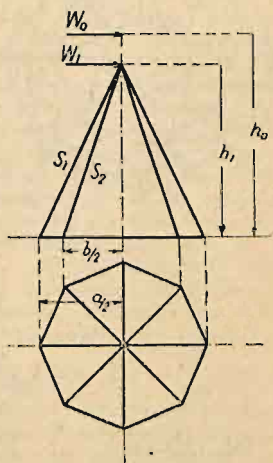


Fig. 327.

Uwaga. Znaczek „p” oznacza „prawy”, „l” — lewy, „d” dolny, „g” — górny, „n” dotyczy prętów, wychodzących z węzła n , „s” prętów, wychodzących z węzła s .

b) Dachy wieżowe (fig. 326 i 327; przy nachyleniu krokwi do poziomu mniejszem od 45° nazywamy je namiotowymi) posiadają narożniki proste. U góry kończą się zazwyczaj ostrym szczytem, w którym zbiegają się wszystkie naroża; wtedy dla n naroży przy normalnie stosowanym podparciu dach jest $(n-3)$ -krotnie hiperstatyczny. Siły w najwyższej części dachu, uważanej za układ drugorzędny (por. str. 1232), wyznaczamy wtedy zwykle w przybliżeniu, ustawiając równanie momentów względem najwyższego pierścienia (fig. 327):

$M = W_0 h_0 + W_1 h_1 = S_1 a \sin \alpha + 2 S_2 b \sin \alpha$; ponieważ zaś $S_1 : S_2 = a : b$, przeto:

$$S_1 = \frac{Ma}{(a^2 + 2b^2) \sin \alpha} = \frac{Mas}{(a^2 + 2b^2) h_1} \dots \dots \dots (3)$$

We wzorach tych α jest kątem nachylenia krokwi do poziomu, s długością krokwi.

Pozatem dachy te oblicza się jak kopuły; wzory i wykresy upraszczają się jednak wskutek stałego pochylenia krokwi. (Stosunek $\frac{k}{a}$ (por. wzór 1) jest stały.)

Na parcie wiatru można je też obliczać jako dźwigary kratowe płaskie, zawarte między narożnikami. Obciążenie węzłowe P rozkłada się na trzy składowe, jedną P_n w kierunku narożnika i dwie poziome P'_h i P''_h w płaszczyznach, przylegających ścian. Następnie oblicza się kratownicę płaską, jako utwierdzoną dołem, na siły poziome P'_h i P''_h , leżące w jej płaszczyźnie. Siły w narożnikach są równe sumie odpowiednich składowych P_n , oraz sił w pasach tych kratownic płaskich. Siły w pozostałych prętach wyznacza się wprost z obliczenia odpowiednich kratownic płaskich.

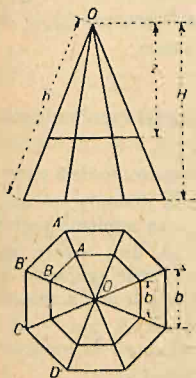


Fig. 328.

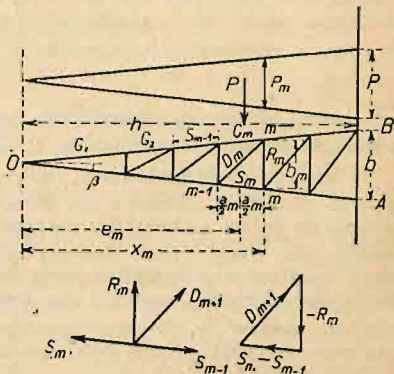


Fig. 329.

Obliczenie dachów wieżowych ośmiobocznych (fig. 328) da się w myśl powyższego sprowadzić do obliczenia więzara płaskiego ABO o powierzchni obciążenia wedle trójkąta (fig. 329), przy czym $p = 0,7 bw$ (w = parcie wiatru na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru). Siły wewnętrzne w krokwi:

$$G_m = + \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta, \quad S_m = - \frac{M_m}{b_m} \sec \beta.$$

Odpowiednio dla ściany CDO :

$$G'_m = + \frac{M'_m}{b'_m} \sec \beta, \quad S'_m = - \frac{M'_{m-1}}{b'_{m-1}} \sec \beta \quad \dots (4)$$

przyczem: $M_m = \frac{p x_m^3}{6 h}, \quad M_{m-1} = \frac{p x_{m-1}^3}{6 h}.$

Siła w przekątnej o długości d_m :

$$D_m = 0,233 e_m d_m w \quad \dots (4a)$$

Siła w pierścieniu:

$$R_m = - \frac{w}{3} (1,04 e_{m+1} b_{m+1} + 0,35 e_m b_{m-1}) \quad \dots (4b)$$

Zupełnie podobnie oblicza się filary wieżowe, gdzie dla sił poziomych zaczepiających powyżej aa $V = \frac{H h_0}{b}$ (fig. 330), i inne podobne konstrukcje przestrzenne.

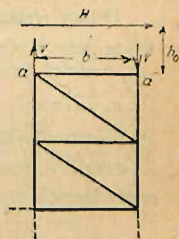


Fig. 330.

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznicami, oraz teżnikami pionowymi i poziomymi są też utworami przestrzennymi.

IV. Przesunięcia kratownic.

a) Metody analityczne.

Prawo pracy przygotowanej. Jeżeli węzeł m kratownicy dozna przesunięcia $m m' = [\delta_m]$, to praca sił P_i , zaczepiających w m , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty $\bar{\delta}_i$ przesunięcia $[\delta_m]$ na kierunki tychże sił, więc $L_m = \sum P_i \bar{\delta}_i$. Praca L_m równa się jednak też przesunięciu $[\delta_m]$, pomnożonemu przez rzut wypadkowej tychże sił na kierunek $[\delta_m]$. Jeżeli siły P_i są w równowadze, to wypadkowa ich $= 0$; zatem:

$$\sum P_i \bar{\delta}_i = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\delta}_i$ oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły P_i na kierunek jej.

Dla każdego węzła kratownicy, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne $[\delta]$ i ustawić równanie (1). Skoro te równania dodamy, to znak \sum rozciągać się będzie na wszystkie zewnętrzne siły Q_m i na napięcia prętów S , działające na węzły. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem S , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślanych przesunięć obu węzłów nastąpi ich oddalenie czyli wydłużenie pręta o Δs , to praca przygotowana napięcia S jest $-S \cdot \Delta s$. Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi $-\sum S \Delta s$, zaś prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \dots \dots \dots (2)$$

czyli praca przygotowana sił zewnętrznych = pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Dany rzeczywisty układ sił Q_m , działających we węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcia S i wydłużenia Δs , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił Q_m są $\bar{\delta}_m$. Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił \bar{Q}_m , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia \bar{S} . Zastosujmy równanie (2) do pomyślanego układu sił \bar{Q}_m i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem Q_m , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s \dots \dots \dots (2a)$$

Siły zewnętrzne \bar{Q} składają się z sił \bar{P}_m i oddziaływań \bar{C} , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia podpór c , mierzone w kierunku sił C (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (2a) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{C} c \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli nazwiemy s długość, F przekrój jednego pręta, E moduł sprężystości, ω współczynnik rozszerzalności, t przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{EF},$$

to:

$$\Delta s = S \rho + \omega t s,$$