

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 g}{g} = \frac{v^2}{g \rho}.$$

Wartość tego kąta dla środka masy wagonu wyznacza taką „przechyłkę toru“, przy której siła względna jest w przybliżeniu prostopadła do toru, a rąbki kół nie wywierają bocznego nacisku na szyny.

Przykład. Dla łuku o promieniu $r = 400$ m i szerokości toru $s = 1,435$ m przy prędkości jazdy $v = 16$ m/sk wypada podwyższenie h szyny zewnętrznej (jeżeli przy małych α przyjmiemy w przybliżeniu $h/s = \tan \alpha$):

$$h = v^2 s / g r = 0,093 \text{ m}.$$

c) Punkt materialny, zmuszony do pozostawania na gładkiej krzywej, leżącej w płaszczyźnie pionowej, która się obraca jednostajnie około osi pionowej (kule regulatorów), będzie równowadze względnej, jeżeli wypadkowa ciężkości mg i siły odśrodkowej $m \rho \omega^2$ jest normalna do krzywej, (fig. 52) czyli gdy $m \rho \omega^2 / mg = \tan \alpha = \rho / h$.

Dla równowagi musi zatem długość podnormalnej h na osi obrotu czynić zadość warunkowi:

$$h = g / \omega^2.$$

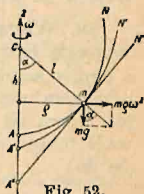


Fig. 52.

Ta równowaga jest stała, jeżeli dana krzywa w otoczeniu położenia równowagi m leży wewnątrz paraboli $A'N'$ o parametrze g/ω^2 przechodzącej przez m . Wówczas bowiem odpowiada położeniu punktu m minimum energii potencjalnej, ponieważ ta energia, mając na paraboli wartość stałą, zwiększa się wewnątrz niej, a zmniejsza na zewnątrz. Dlatego też równowaga będzie niestala, jeżeli krzywa przecina lub leży zewnątrz paraboli (np. $A''N''$) zaś obojętną w przypadku gdy krzywa zlewa się z tą parabolą.

III. Statyka.

A. Część ogólna.

56. Zasada prac przygotowanych (wyobrażalnych, wirtualnych) wymaga konieczny i wystarczający warunek równowagi najogólniejszego układu materialnego, pojmowanego jako układ punktów materialnych, na które działają jakiekolwiek siły zewnętrzne \overline{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i wewnętrzne \overline{W}_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Przy oznaczeniu przez $\delta \overline{s}_i$ wektorów przesunięć przygotowanych punktów m_i , wyraża ten warunek równanie:

$$\sum_i \overline{P}_i \delta \overline{s}_i + \sum_{i,k} \overline{W}_{ik} \delta \overline{s}_i = 0.$$

W położeniu równowagi układu materialnego jakiegokolwiek jest suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu równa zeru przy każdym chwilowym ruchu przygotowanym układu.

57. Rodzaje równowagi układów materialnych. Jeżeli tak siły zewnętrzne jak i wewnętrzne mają potencjał, to równanie powyższe staje się identycznym z warunkiem extremum energii potencjalnej jako funkcji współrzędnych punktów układu.

$$\delta U = 0.$$

Ten warunek może odpowiadać:

1. Minimum energii potencjalnej, jeżeli przyrost rzędu drugiego $\delta^2 U$ (wzgl. inny pierwszy nieznikający przyrost rzędu parzystego) jest dodatni. Odpowiadające położenie równowagi jest położeniem równowagi stałej (Minding i Lejeune-Dirichlet).

2. Maximum energii potencjalnej, jeżeli $\delta^2 U < 0$ (albo inny pierwszy nieznikający przyrost $\delta^{2r} U < 0$).

3. Ani maximum ani minimum. Obu ostatnim przypadkom odpowiada wogóle równowaga niestala.

Oprócz ogólnych dwu typów równowagi stałej i niestałej, czyli chwiejnej, rozróżniają w technice niektóre szczególne rodzaje równowagi. Najważniejszym jest przypadek t. zw. równowagi obojętnej, gdy w otoczeniu położenia równowagi ma energia potencjalna U charakter stałej, czyli nie zmienia się przy żadnym z ruchów przygotowanych układu.

Przykładem równowagi stałej jest wałka kula jednolita spoczywająca na dnie wydrążenia kulistego o większym promieniu. Ta sama kula umieszczona na szczycie innej kuli jest w równowadze niestałej, zaś spoczywająca na poziomej płaszczyźnie jest w równowadze obojętnej.

58. Warunki równowagi, gdy praca przygotowana sił wewnętrznych jest równa zeru. Dla ciał sztywnych lub układów złożonych z ogniw sztywnych i nierozciągliwych cięgien (tj. sznurów, łańcuchów itp.) przyczem poszczególne ogniwa są połączone przegubami itp. bez tarcia, jest praca sił wewnętrznych zawsze równa zeru, a więc równanie równowagi takich układów, wyrażające zasadę prac przygotowanych, sprowadza się do:

$$\sum_i \overline{P_i} \delta s_i = 0.$$

Ważny wniosek: Dwie siły, działające na dwa jakiekolwiek punkty ciała sztywnego (fig. 53), są w równowadze gdy się spełniają razem dwa

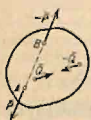


Fig. 53.

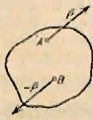


Fig. 54.

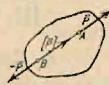


Fig. 55.



Fig. 56.

warunki: 1. suma geometryczna sił jest równa zeru i 2. wektory sił leżą na tej samej prostej.

(Albowiem praca przygotowana takich sił jest przy każdym przesunięciu i każdym obrocie ciała równa zeru.)

59. Para sił. Jeżeli suma geometryczna dwu sił jest wprawdzie równa zeru, ale ich wektory nie leżą na tej samej prostej, (fig. 54), to praca przygotowana przy przesunięciu ciała jest wprawdzie zerem, ale przy jego obrocie nie. Takie dwie siły nie równoważące się nawzajem stanowią parę sił.

60. Przekształcenie układów sił, tj. zastąpienie danego układu sił działających na ciało sztywne innym układem równoważnym odbywa się wogóle przez stosowne dołączanie do układu danego innego układu pomocniczego sił równoważących się nawzajem. Najprostsze ważne przykłady są następujące:

a) Przeniesienie siły \overline{P} , działającej na punkt A (fig. 55) na jakikolwiek inny punkt B ciała, leżący na linii działania tej siły (przez dołączenie układu (\overline{P}) i $-\overline{P}$ sił działających na punkt B i znoszących się nawzajem).

b) Zastąpienie siły \overline{P} , działającej na punkt A (fig. 56) taką samą siłą (\overline{P}) działającą na inny punkt ciała B wraz z parą sił $(\overline{P}, -\overline{P})$.

Drugi sposób przekształcenia układu sił polega na zrównoważeniu danego układu drugim układem stosownie dobranym. Te dwa układy nie są przeto równoważne (także równowarte), lecz znoszące się, czyli równoważące się nawzajem. Atoli odwróciwszy kierunki wszystkich sił układu drugiego, bez zmiany ich wartości, otrzymujemy widocznie nowy układ równoważny z pierwszym (ponieważ równoważący się z drugim).

61. Składanie sił leżących w jednej płaszczyźnie i działających na różne punkty ciała sztywnego zapomocą t. zw. wieloboku sznurowego jest najważniejszym zastosowaniem powyższego sposobu przekształcania układów sił (fig. 57).

Chcąc układ sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ i \vec{P}_4 (fig. 57 a) zastąpić innym prostszym, równoważymy każdą z sił danych dwiema siłami pomocniczymi, które wyznaczamy kreśląc trójkąt tych trzech sił. Siłę \vec{P}_1 równoważymy przeto siłami \vec{S}_1 i \vec{S}_{12} , działającymi na ten sam punkt F . Ich kierunki obieramy dowolnie, a wielkości znajdujemy z $\triangle ABO$ nakreślonego

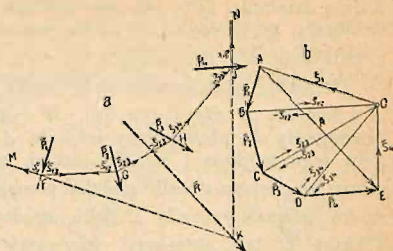


Fig. 57 a, b.

z boku (fig. 57 b). Siłę \vec{P}_2 równoważymy podobnie dwiema siłami, ale już nie zupełnie dowolnymi, obierając jedną z nich ($-\vec{S}_{12}$) tak, aby się znosiła z siłą \vec{S}_{12} ; druga \vec{S}_{23} wypadnie zatem z trójkąta sił $\triangle BCO$ (fig. 57 b). Postępując kolejno w ten sposób dochodzimy do siły ostatniej \vec{P}_4 , zrównoważonej siłami pomocniczymi $-\vec{S}_{34}$ i \vec{S}_4 określonymi trójkątem $\triangle DEO$.

Wszystkie siły pomocnicze \vec{S} leżą na bokach wieloboku $MFGHIN$, zwanego sznurowym i z wyjątkiem sił \vec{S}_1 i \vec{S}_4 , położonych na bokach skrajnych, znoszą się widocznie nawzajem. Wypadkowa sił \vec{S}_1 i \vec{S}_4 , przechodząca przez punkt K przecięcia się ich linii działania, równoważy przeto układ sił danych, a odwróciwszy jej kierunek otrzymujemy siłę $\vec{R} = \vec{AE}$, która oczywiście zastępuje układ sił danych $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_4$, czyli jest wypadkową tegoż układu. Ta wypadkowa $\vec{AE} = \vec{R}$ jest bokiem zamykającym wieloboku sił $\triangle ABCDE$. Punkt O , dowolnie obrany, nazywa się biegunem, zaś proste OA, OB, \dots promieniami.

Uwaga. Nazwa wieloboku sznurowego pochodzi stąd, ponieważ ten wielobok przedstawia zarazem postać równowagi sznura (lub wogóle cięgna) idealnego (tj. nieważkiego, doskonale gładkiego i nierozciągliwego), na który działają w punktach F, G, H, I siły dane, oczywiście przy założeniu, że wszystkie siły \vec{S} są (jak na fig. 54) siłami rozciągającymi. W przypadku, gdyby siły \vec{S} na bokach były ściiskające, można sobie pomyśleć dla przywrócenia równowagi zamiast sznura pręt sztywny z przegubami na końcach boku. Wielobok sznurowy jest przeto wogóle postacią równowagi łańcucha prętów przegibnie połączonych, jeżeli na przeguby końcowe działają siły \vec{S}_1 i \vec{S}_4 , zaś na przeguby pośrednie siły $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_4$.

Z konstrukcji wieloboku sznurowego wypływają twierdzenia:

a) Płaski układ sił, których wielobok się nie zamyka, ma zawsze siłę wypadkową równą sumie geometrycznej danych sił układu. Ta wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia się boków skrajnych jakiegokolwiek wieloboku sznurowego wykreślonego dla tegoż układu.

b) Płaski układ sił, których wielobok się zamyka (fig. 58) nie ma siły wypadkowej, lecz jest wogóle równoważny parze sił, czyli ma parę wypadkową, wyjąwszy przypadek szczególny, w którym:

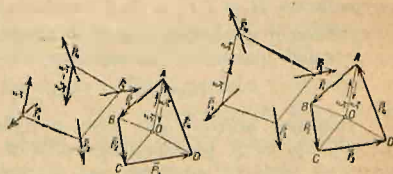


Fig. 58.

Fig. 59.

c) Płaski układ sił jest w równowadze jeżeli tak wielobok sił, jak i wielobok sznurowy się zamykają (fig. 59).

62. Momenty sił względem punktu. Ponieważ działanie dynamiczne siły \vec{P} na ciało sztywne jest zupełnie określone wektorem swobodnym \vec{P} i linią działania, tj. prostą tego wektora, a jest zupełnie niezależne od punktu działania, który można dowolnie przesuwać na tej prostej, przeto określamy z korzyścią siłę \vec{P} działającą na ciało sztywne w sposób następujący:

Obrawszy gdziekolwiek stały punkt O , łączymy go w myśli z początkiem A i końcem B siły \vec{P} (fig. 60). W tym punkcie O wystawiamy wektor \vec{M} prostopadły do płaszczyzny trójkąta ABO o wielkości równej podwójnemu polu tego trójkąta i strzałce takiej, ażeby stojąc stopami w O , a mając głowę w miejscu strzałki widzieć pomyślny obrót promienia $\vec{OA} = \vec{r}$ w kierunku wskazanym siłą \vec{P} jako zgodny z obrotem wskazówki zegarowej. Wektor \vec{M} tak określony nazywamy momentem siły \vec{P} względem punktu O .

Bezwzględna wartość momentu:

$$\vec{M} = |\vec{M}| = Ph,$$

przyczem h , tj. ramię momentu, albo ramię siły jest długością prostopadłej spuszczonej z O na linię działania siły \vec{P} .

Punkt O nazywają także środkiem momentów.

63. Momenty sił względem prostej. Ich określenie wynika z łatwego do uzasadnienia twierdzenia:

Jeżeli momenty danej siły \vec{P} względem różnych punktów O_1, O_2, \dots jednej i tej samej dowolnie obranej prostej (osi, np. X) rzutujemy na tę prostą, to otrzymujemy rzuty geometrycznie równe. Każdy z nich (jako wektor) przedstawia moment siły P względem obranej prostej. Jego bezwzględna wartość jest iloczynem bezwzględnej wartości siły \vec{P} , „najkrótszej odległości“ k linii działania siły od obranej prostej i wstawy kąta nachylenia α siły \vec{P} do tej prostej.

$$|\text{Mom}_x \vec{P}| = Pk \sin \alpha$$

Wniosek. Moment siły P względem osi leżącej z nią w tej samej płaszczyźnie równa się zero.

64. Momenty sił względem płaszczyzny. Gdy mamy do czynienia z przestrzennym układem sił równoległych, to skalary (nie wektory) określające iloczyny sił przez odległości ich punktów początkowych od pewnej płaszczyzny (płaszczyzny momentów) z uwzględnieniem znaków algebraicznych, nazywamy momentami tych sił względem obranej płaszczyzny. Znakami $+$ i $-$ odróżniamy przytem siły zgodnie kierowane od przeciwnie skierowanych oraz odległości punktów leżących po jednej i drugiej stronie płaszczyzny.

65. Momenty sił układu centralnego, tj. sił, których linie działania przecinają się w jednym punkcie C . Takie siły \vec{P}_i mają oczywiście zawsze wypadkową $\vec{R} = \Sigma \vec{P}_i$ o linii działania przechodzącej przez O . Moment tej wypadkowej względem dowolnie obranego punktu O równa się sumie geometrycznej momentów sił składowych, czyli

$$\text{Mom}_O \vec{R} = \text{Mom}_O \vec{P}_1 + \text{Mom}_O \vec{P}_2 + \dots$$

Rzutuując wektory obu stron powyższego równania na dowolnie obraną prostą, np. oś X prostokątnego układu współrzędnych, mamy prawo:

$$\text{Mom}_x \vec{R} = \text{Mom}_x \vec{P}_1 + \text{Mom}_x \vec{P}_2 + \dots,$$

czyli: Moment wypadkowej względem jakiejkolwiek prostej równa się sumie algebraicznej¹⁾ momentów sił składowych względem tejże prostej.

¹⁾ „Algebraicznej“, ponieważ wszystkie wektory-dodajniki leżą na tej prostej.

66. **Ogólny moment sił** jakiegokolwiek układu przestrzennego względem obranego środka O (lub osi) jest to suma geometryczna (wzgl. algebraiczna) momentów wszystkich sił względem tego środka (lub osi).

Ogólny moment pary sił jest wektorem stałym niezależnym od obioru środka momentów i nazywa się momentem pary. Jest przeto wektorem swobodnym \overline{M} (fig. 61) o wartości bezwzględnej równej polu równoległoboku, którego bokami równoległymi są siły pary. Wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny pary i tak skierowany, ażeby człowiek, stojący na tej płaszczyźnie z głową umieszczoną obok strzałki wektora widział obieg strzałek sił dookoła równoległoboku zgodny z obiegiem wskazówek zegara.

Odległość wzajemną obu sił pary nazywamy ramieniem pary.

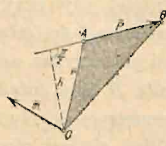


Fig. 60.

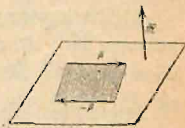


Fig. 61.

67. **Równoważność par sił** jest uwarunkowana geometryczną równością ich momentów, czyli:

Para sił $(\overline{P}, -\overline{P})$ o ramieniu a da się zastąpić inną równoważną $(\overline{Q}, -\overline{Q})$ o ramieniu b , leżącą w płaszczyźnie tej samej, lub równoległej, przyczem siły drugiej pary mogą mieć zresztą położenie dowolne, byleby zachodziła równość $Pa = Qb$, a kierunki obiegu były zgodne.

68. **Składanie par**, rozmaicie w przestrzeni zorientowanych, wypływa z powyższego twierdzenia o równoważności w połączeniu ze składaniem sił i tak:

Ilekolwiek par sił można zawsze zastąpić jedną parą wypadkową, której moment jest sumą geometryczną momentów par składowych.

Wniosek. Układ par sił zorientowanych jakkolwiek w przestrzeni jest w równowadze, jeżeli suma geometryczna ich momentów jest równa zero.

69. **Przestrzenny układ sił** \overline{P}_i da się zawsze zastąpić układem par i układem centralnym sił geometrycznie równych siłom danym. W tym celu wybieramy dowolny punkt O (zwany środkiem redukcji układu sił) i dołączamy pomocniczy układ sił równoważący się nawzajem, a złożony z sił (\overline{P}_i) równych \overline{P}_i i działających na punkt O oraz z sił równych $-\overline{P}_i$ działających również na punkt O . Siły \overline{P}_i i $-\overline{P}_i$ tworzą układ par sił, który daje parę wypadkową o momencie \overline{M} równym ogólnemu momentowi wszystkich danych sił \overline{P}_i względem punktu O ; siły zaś (\overline{P}_i) jako działające na punkt O , dają siłę wypadkową $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i$. A zatem:

Przestrzenny układ sił jest wogóle równoważny jednej sile i jednej parze sił.

Takie sprowadzenie danego układu sił w przestrzeni \overline{P}_i do jednej siły $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i$ i jednej pary o momencie $\overline{M} = \Sigma \text{Mom}_O \overline{P}_i$, da się wykonać na nieskończenie wiele sposobów różniących się obioru punktu O (środka redukcji). W każdym zespole siły \overline{R} i pary \overline{M}^1 zastępujących dany układ sił \overline{P}_i , zmienia się tylko położenie prostej, wzdłuż której działa \overline{R} (zależnie od O) a wielkość i kierunek \overline{R} pozostaje bez zmiany; wielkość natomiast i kierunek wektora momentu pary \overline{M} zmienia się zależnie od obioru punktu O . Atoli z pośród nieskończenie wielu zespołów siły \overline{R} i pary \overline{M} , zastępują-

¹⁾ Mówimy krótko „para \overline{M} “, zamiast: „para o momencie \overline{M} “.

cych dany przestrzenny układ sił \overline{P}_i , wyróżnia się wogóle jeden, w którym $\overline{R} \parallel \overline{\mathcal{M}}$, czyli płaszczyzna pary $\overline{\mathcal{M}}$ jest prostopadła do kierunku siły \overline{R} . Taki zespół nosi nazwę: skrętnik.

Wnioski: a) Przestrzenny układ sił nie da się wogóle zastąpić jedną siłą, czyli nie ma siły wypadkowej. Natomiast da się wtedy zastąpić dwiema siłami skośnemi, z których jedną stanowi jedna ze sił pary, a drugą wypadkowa siły \overline{R} i drugiej siły pary przecinającej linję działania siły \overline{R} .

b) Przestrzenny układ sił ma siłę wypadkową, jeżeli $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i = 0$, a zarazem $\overline{\mathcal{M}} \perp \overline{R}$, czyli płaszczyzna pary $\overline{\mathcal{M}}$ jest równoległa do \overline{R} , wtedy bowiem para sił $\overline{\mathcal{M}}$ i siła \overline{R} jako leżące w jednej płaszczyźnie sprowadzają się do jednej siły geometrycznie równej \overline{R} , a tylko przesuniętej równolegle.

c) Przestrzenny układ sił jest równoważny parze sił (czyli ma parę wypadkową), jeżeli $\overline{R} = \Sigma \overline{P}_i = 0$, a zarazem $\overline{\mathcal{M}} \neq 0$.

d) Przestrzenny układ sił znosi się nawzajem, czyli jest równoważny zeru, jeżeli spełniają się razem warunki:

$$\Sigma \overline{P}_i = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma \text{Mom}_0 \overline{P}_i = 0.$$

70. Ogólne warunki równowagi, konieczne i wystarczające dla ciała sztywnego, a tylko konieczne dla jakiegokolwiek układu materjalnego wyrażają się [jak wynika z wniosku (d)] powyższemi dwoma równaniami wektorowemi, czyli słowami:

Dla najogólniejszego układu sił (układu materjalnego), będącego w równowadze, jest zarówno suma geometryczna wszystkich sił (układu) jak i suma geometryczna ich momentów względem dowolnie obranego jednego i tego samego punktu równa zeru.

Wniosek. Siły wewnętrzne jakiegokolwiek układu materjalnego (pojmowanego jako układ punktów materjalnych) spełniają (wszystkie razem) zawsze ogólne warunki równowagi.

Jeżeli siły \overline{P}_i są określone analitycznie składowemi X_i, Y_i, Z_i w kierunkach trzech osi prostokątnego układu współrzędnych, a położenia punktów m_i na które siły działają współrzędnemi x_i, y_i, z_i , to obadwa ogólne warunki równowagi, wyrażone powyższemi dwoma równaniami wektorowemi, prowadzą do sześciu równań zwyczajnych, czyli sześciu analitycznych warunków równowagi. Trzy pierwsze odpowiadają warunkowi $\Sigma \overline{P}_i = 0$ i noszą nazwę warunków rzutów; zaś trzy pozostałe wyrażają to samo co $\Sigma \text{Mom}_0 \overline{P}_i = 0$ i nazywają się warunkami momentów.

Obrawszy bowiem punkt O za początek układu współrzędnych i oznaczwszy przez $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, kąty, jakie wektor \overline{P}_i tworzy z osiami x, y, z , mamy

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_i \cos \alpha_i &\equiv \Sigma X_i = 0 \\ \Sigma P_i \cos \beta_i &\equiv \Sigma Y_i = 0 \\ \Sigma P_i \cos \gamma_i &\equiv \Sigma Z_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{warunki rzutów})$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \text{Mom}_x \overline{P}_i &\equiv \Sigma (Y_i z_i - Z_i y_i) = 0 \\ \Sigma \text{Mom}_y \overline{P}_i &\equiv \Sigma (Z_i x_i - X_i z_i) = 0 \\ \Sigma \text{Mom}_z \overline{P}_i &\equiv \Sigma (X_i y_i - Y_i x_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{warunki momentów}).$$

Słowami: Dla najogólniejszego układu sił w równowadze jest suma algebraiczna rzutów sił, czyli składowych w kierunku dowolnie obranych

osi prostokątnego układu współrzędnych, dla każdej osi z osobna równa zeru a zarazem suma algebraiczna momentów sił układu względem tychże osi, dla każdej z osobna, równa zeru.

Uwaga. Powyższe warunki można także wyprowadzić z zasady prac przygotowanych, przyczem warunki rzutów wyrażają warunki równowagi ze względu na przesunięcia ciała względem odpowiednich osi współrzędnych; zaś warunki momentów określają warunki równowagi ze względu na obroty około tychże osi.

71. Warunki równowagi płaskiego układu sił, wyrażone „wykreślnie“ na końcu ust. 61, sprowadzają się w postaci analitycznej do trzech następujących, skoro osie x i y oberzemy w płaszczyźnie układu (dwa warunki rzutów i jeden momentów):

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum (X_i y_i - Y_i x_i) = 0;$$

albo jeżeli przez r_i oznaczymy ramię momentu siły \overline{P}_i względem punktu O , a przez α_i kąt (\overline{P}_i, x):

$$\sum P_i \cos \alpha_i = 0, \quad \sum P_i \sin \alpha_i = 0, \quad \sum \pm P_i r_i = 0.$$

Iloczyn $P_i r_i$ opatrujemy przytem znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy wektor momentu jest skierowany ku przodowi dla patrzącego na płaszczyznę XY , czy też przeciwnie. Wyrażają to także inaczej mówiąc, że moment siły P_i względem punktu O poczytujemy za dodatni lub ujemny, stosownie do tego (w razie pomyślanego ustalenia punktu ciała w O) czy siła \overline{P} powodowałaby obrót zgodny, czy też przeciwny z obrotem wskazówek zegara.

W przypadku, gdy się nie spełnia warunek momentów, a nadto jeden lub obadwa z warunków rzutów, czyli gdy np. $\sum P_i \cos \alpha_i = R_x \neq 0$, $\sum P_i \sin \alpha_i = R_y \neq 0$, $\sum \pm P_i r_i = \mathfrak{M} \neq 0$, układ sił ma siłę wypadkową o wielkości $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, nachyloną do osi X pod kątem α , wyznaczonym równaniem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$ i działającą wzdłuż prostej odległej od początku układu współrzędnych o $\frac{\mathfrak{M}}{R}$.

W przypadku wreszcie, gdy się spełniają warunki rzutów, a warunek momentów nie, czyli $\sum X_i = 0$, $\sum Y_i = 0$, $\sum \pm P_i r_i = \mathfrak{M} \neq 0$ układ sił ma parę wypadkową o momencie określonym zupełnie znakiem i wartością \mathfrak{M} .

72. Siły równoległe w przestrzeni posiadają wogóle siłę wypadkową równą sumie algebraicznej wszystkich sił układu, jeżeli jednak ta suma jest zerem, a zarazem ogólny moment nie jest zerem, to układ sił sprowadza się do pary wypadkowej.

Układ sił równoległych zgodnie skierowanych posiada zawsze siłę wypadkową równą sumie arytmetycznej wszystkich sił układu. Jeżeli siły P_i takiego układu obracamy około ustalonych w ciele punktów x_i, y_i, z_i , na które działają, to ich wypadkowa $\overline{R} = \sum \overline{P}_i$ obraca się około pewnego punktu stałego (x_0, y_0, z_0) , zwanego środkiem sił równoległych. Punkt ten określają równania:

$$x_0 = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_0 = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_0 = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}.$$

W przypadku sił ciężkości działających na wszystkie cząstki ciała i uważanych z wystarczającym przybliżeniem za równoległe, schodzi się środek tych sił ze środkiem masy ciała, co usprawiedliwia nazwę: środek ciężkości.

B. Część szczegółowa.

73. Statyka ciała sztywnego nieswobodnego. Podparcie lub zawieszenie. Gdy na ciało nieswobodne działają dane siły zewnętrzne, jak np. ciężar Q , a ciało to pozostaje w równowadze, to dołączysz do owych sił nieznane reakcje (oddziaływania) punktów podparcia lub zawieszenia, otrzymujemy układ sił, który musi czynić zadość ogólnym warunkom równowagi wyprowadzonym dla ciała swobodnego. Z równań równowagi można więc niekiedy wyznaczyć szukane reakcje (przypadki statycznie wyznaczalności, albo izostaticzne), ale skoro np. liczba niewiadomych, określających reakcje, jest większa od liczby równań równowagi, to mamy do czynienia z przypadkami statycznie niewyznaczalnymi, czyli hyperstatycznymi.

Największą liczbą niewiadomych wielkości statycznie wyznaczalnych dla jednego ciała jest 6, stosownie do liczby równań równowagi i stopni swobody.

a) Łącząc (fig. 62) punkt 1 ciała ze stałym punktem A zapomocą idealnego sztywnego pręta z przegubami kulistymi na obu końcach odbieramy ciało tylko jeden stopień swobody, gdyż usuwamy możliwość przesunięcia przygotowanego w kierunku tego pręta. Przesunięcia w dwu kierunkach doń prostopadłych i obroty około trzech osi wzajemnie prostopadłych pozostają możliwe i określają 5 pozostałych stopni swobody.

Tę samą rolę co pręt łączący, lub sznur, gra także podpora gładka, w której kierunku reakcji jest prostopadły do płaszczyzny styczności (fig. 63). Przy zawieszeniu na pręcie, koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi jest, aby siły zewnętrzne miały wypadkową \bar{Q} o linii działania leżącą na osi pręta. Wtedy bowiem znoszą się z reakcją R , która co do wielkości jest równa, a co do kierunku przeciwna sile Q .

(W przypadku podpory gładkiej musi być nadto siła Q skierowana ku wnętrzu ciała podpierającego.)

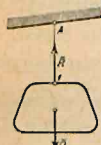


Fig. 62.



Fig. 63.

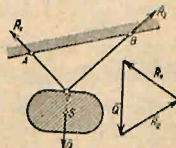


Fig. 64.

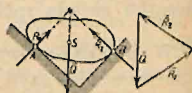


Fig. 65.

b) Dwa pręty łączące jeden punkt (1) ciała z punktami stałymi A i B (fig. 64) zabierają mu dwa stopnie swobody, umożliwiając tylko przesunięcia w jednym kierunku prostopadłym do płaszczyzny prętów i obroty około wszystkich trzech osi. Tutaj jest koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi, aby siły zewnętrzne miały wypadkową \bar{Q} , o linii działania przechodzącej przez punkt 1 i leżącej w jednej płaszczyźnie z obu prętami. Reakcje R_1 i R_2 znajdujemy z trójkąta sił. Tak samo ma się rzecz w przypadku dwu podpór gładkich (fig. 65) a podobnie przy połączeniu dwu punktów ciała z dwoma punktami stałymi (fig. 66).

Atoli w przypadku szczególnym, gdy te dwa pręty są równe i równoległe (fig. 67), mamy do czynienia z utratą jednego przesunięcia (w kierunku prętów) i jednego obrotu (około osi prostopadłej do płaszczyzny prętów). Dla równowagi musi wypadkowa z sił zewnętrznych, czyli „obciążeń“ leżeć w płaszczyźnie prętów i być do nich równoległa. Z warunku momentów dla punktów 1 i 2, tj.

$$Qa - R_2 l = 0,$$

$$Qb - R_1 l = 0,$$

znajdujemy bezwzględne wartości i kierunki reakcyj R_1 i R_2 . Do kontroli służy warunek rzutów:

$$Q + R_2 - R_1 = 0.$$

c) Trzy pręty, łączące punkt ciała (1) z punktami stałymi A , B i C (fig. 68), nstają ten punkt, zabierając ciału 3 stopnie swobody tj. trzy przesunięcia, a pozostawiając trzy obroty. Dla równowagi musi wypadkowa z obciążeń (np. Q) przechodzić przez ten punkt. Reakcje R_1 , R_2 i R_3 dają się obliczyć z warunków rzutów, wyjąwszy przypadek, w którym wszystkie trzy pręty leżą w jednej płaszczyźnie (przypadek statycznie niewyznaczalny).

d) Zupełne ustalenie ciała przy statycznej wyznaczalności reakcyj dla jakiegokolwiek obciążenia osiągamy zapomocą 6 prętów łączących je z punktami

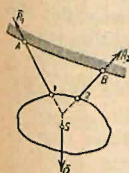


Fig. 66.

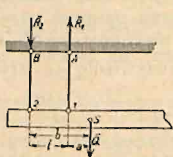


Fig. 67.

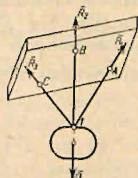


Fig. 68.

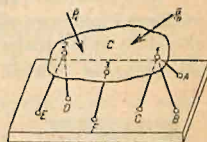


Fig. 69.

stałymi. Jeden z najprostszych układów uzmysławia fig. 69, przyczem punkty 1, 2 i 3 ciała C muszą tworzyć trójkąt właściwy. Inny praktycznie ważny przypadek przedstawia fig. 70.

Już na powyższych przypadkach widać, że o statycznej niewyznaczalności nie rozstrzyga sama tylko liczba niewiadomych ≤ 6 . Ona jest tylko warunkiem koniecznym, ale często niewystarczającym. Tak np. zawieszenie ciała na dwu prętach, leżących na tej samej prostej (fig. 71), prowadzi przy sile obciążającej Q działającej wzdłuż tejże prostej do statycznej niewyznaczalności reakcji R_1 i R_2 , albowiem warunki równowagi nie więcej nie dają ponad równanie:

$$R_1 + R_2 = Q.$$

Każda z reakcyj może mieć przeto wartość dowolnie wielką, byleby ich suma algebraiczna była równa Q .

W przypadku siły obciążającej S , prostopadłej do prostej AB , wymagałyby warunki równowagi widocznie nieskończenie wielkich wartości R_1 i R_2 (które jednakże stają się skończone przy założeniu pewnej, choćby bardzo małej odkształcalności prętów).

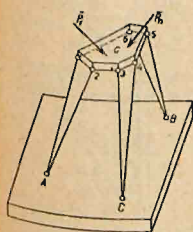


Fig. 70.

74. Dwuwymiarowe zagadnienia równowagi ciała sztywnego nieswobodnego. Gdy wszystkie siły obciążające i reakcje podpór leżą w jednej płaszczyźnie, to rozpatrujemy ciało pod postacią figury płaskiej, czyli „płazy”, połączonej z nieruchomym układem odniesienia (ziemią) w punktach odpowiadającym podporom.

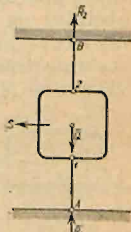


Fig. 71.

Trzy główne sposoby podparcia płazy odpowiadają pozbawieniu jej jednego, dwu lub trzech stopni swobody.

Pierwszy i drugi przypadek, rozpatrywany już w ust. 73, realizuje się w praktyce często przy pomocy łożysk, trzeci przez t. zw. „utwierdzenie” (zamocowanie).

1. Łożysko wałkowe (fig. 72) zastępuje jeden pręt podpierający (fig. 73) i znosi jeden stopień swobody. Linia działania reakcji jest dana, jej wielkość nieznana. (Jedna niewiadoma.)

2. Przegub stały lub łożysko kołowe (fig. 74) zastępuje dwa pręty podpierające (fig. 75) i znosi dwa stopnie swobody. Tylko punkt działania reakcji dany, zaś wielkość jej i kierunek nieznane. (Dwie niewiadome, za które uważamy zwykle składową poziomą X i pionową Y reakcji.)

3. Utwierdzenie, czyli zupełnie sztywne połączenie z układem podpierającym (fig. 76) czyto zapomocą przyśrubowania, przyklejenia itp.

Utwierdzenie znosi wszystkie 3 stopnie swobody i dostarcza trzech niewiadomych. Jako takie uważamy (fig. 77) poziomą i pionową składową siły X i Y oraz moment pary M , które razem określają układ reakcji rozmieszczonych w nieznany zwykle sposób w miejscu utwierdzenia. Układ ten sprowadza się oczywiście do siły \bar{R} (fig. 76), gdy



Fig. 72. Fig. 73.



Fig. 74.

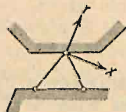


Fig. 75.

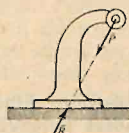


Fig. 76.

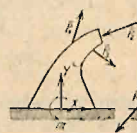


Fig. 77.



Fig. 78.

siły obciążające mają wypadkową P , przyczem $\bar{P} + \bar{R} = 0$. Skoro w szczególności realizujemy utwierdzenie przez połączenie trzema prętami (fig. 78) to rozmieszczenie reakcji jest statycznie wyznaczalne.

Pręty te mogą wychodzić z trzech różnych punktów płazy (fig. 79), byleby ich osi nie przecinały się w jednym punkcie.

Uwaga. Obciążenia pionowe (poziome) wywołują wogóle nie tylko pionowe składowe reakcji podpór, lecz także i poziome (pionowe), można jednakże urządzić podpory tak, ażeby obciążenia pionowe (poziome) wywoływały tylko reakcje pionowe (poziome). Taki przypadek zachodzi zwykle u belek prostych.

75. Wyznaczenie reakcji podpór belki prostej (lub krzywej) przy działaniu obciążeń na linię środkową, czyli oś belki, odbywa się rachunkiem lub wykreślnie przez zastosowanie warunków równowagi dla układu sił obciążających wraz reakcjami.



Fig. 79.

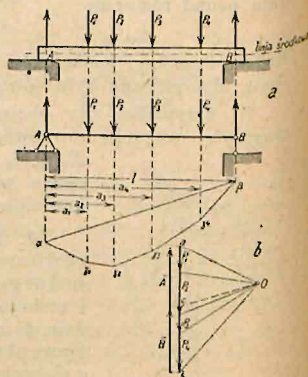


Fig. 80 a, b.

a) Belka na podporze „stałej” A i „ruchomej” B według fig. 80 a. Oznaczywszy temi samymi literami reakcje odpowiednich podpór, piszemy warunek momentów dla środka obra-

nego w jednym z teoretycznych punktów podparcia, np. w A :

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots = B l, \text{ a stąd } B = \frac{1}{l} \sum P_i a_i.$$

Z warunku rzutów: $A + B = P_1 + P_2 + \dots$,

znajdziemy A : $A = \sum P_i - B$.

Bezpośrednio z warunku momentów dla środka w B otrzymujemy też:

$$Al = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots,$$

czyli $A = \frac{1}{l} \sum P_i b_i$, przy czym $b_i = l - a_i$,

a warunku rzutów używamy tylko do sprawdzenia rachunku.

Dla wykresnego rozwiązania zadania kreślimy wielobok danych sił $P_1, P_2 \dots P_n$ (fig. 80 b) i obrawszy biegun O , kreślimy odpowiadający wielobok sznurowy dla tychże sił. Ponieważ szukane reakcje A i B muszą się równoważyć z temi siłami, przeto tak wielobok sił $P_1, P_2 \dots, A$ i B , jako też ich wielobok sznurowy musi być zamknięty. Niewiadomy bok „zamykający“ wieloboku sznurowego znajdujemy przeto łącząc punkty przecięcia się α i β boków „skrajnych“ (wychodzących z pierwszej i ostatniej z sił P_i) z danemi linjami działania reakcyj. Kreśląc teraz z bieguna promień $Oc \parallel \alpha\beta$, wyznaczamy na wieloboku sił reakcje $\overline{ca} = \overline{A}$ i $\overline{bc} = \overline{B}$, zamykające ten wielobok.

Uwaga. W przypadku działania siły poziomej W na jakikolwiek punkt tej belki powstaje odpowiadająca reakcja $= -W$ tylko na podporze stałej.

b) W przypadkach, przedstawionych na fig. 81 a i b, nie zmieniają się reakcje przy obciążeniach pionowych w porównaniu z przypadkiem poprzecznym. Natomiast siła pozioma W (fig. 81 c) wywoła w B reakcję pionową B' , wyznaczalną z warunku momentów względem A , tj.

$$B' l = W h, \text{ a więc } B' = W \frac{h}{l};$$

zaś w A reakcję pionową $A' = -B'$ i poziomą $A'' = -W$ (stosownie do warunku rzutów).

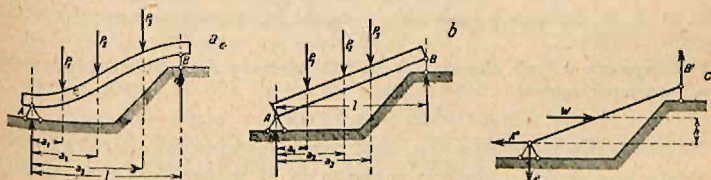


Fig. 81 a, b, c.

c) W przypadku podpory ruchomej B , oddziaływującej ukośnie względem obciążeń pionowych, zachodzą obok pionowych składowych reakcyj także i poziome. Jeżeli belka AB jest pozioma (fig. 82), to pionowe składowe V i V' reakcyj A i B wypadają z warunku momentów takie same jak w przypadku (a). Poziome skła-

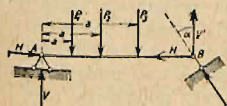


Fig. 82.

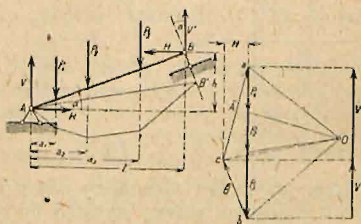


Fig. 83.

dowe zaś są co do wartości równe a co do kierunku wprost przeciwne (jak wynika z warunku rzutów).

Ich wartością jest: $H = V' \operatorname{tg} \alpha$.

Jeżeli jednak belka AB jest nachylona do poziomu pod kątem α (fig. 83), to warunek momentów dla środka w A daje: $\sum P_i a_i - H h - V' l = 0$,

a ponieważ $H = V' \operatorname{tg} \alpha = V' \frac{h}{l}$, więc po wstawieniu tej wartości i rozwiązaniu względem V' otrzymujemy:

$$V' = \frac{l}{h^2 + l^2} \sum P_i a_i; \text{ albo } V' = \frac{\sum P_i a_i}{l} \cos^2 \alpha.$$

Z warunków rzutów wypływa:

$$V = \sum P_i - \frac{\sum P_i a_i}{l} \cos^2 \alpha$$

$$H = \frac{\sum P_i a_i}{l} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Wykreślne rozwiązanie znajdujemy, kreśląc wielobok sznurowy danych obciążeń belki (fig. 83), tak, aby bok między reakcją podpory stałej A , a sąsiednią siłą P_i przechodził przez punkt A , który jest jednym punktem boku zamykającego AB' . Promień Oc , doń równoległy, wyznacza na kierunku $bc \parallel B'B$ wielkość reakcji \overline{B} , a bok zamykający ca wyznacza reakcję \overline{A} .

76. Równowaga ciała ciężkiego podpartego w trzech lub więcej punktach gładką płaszczyzną poziomą. Takim ciałem jest np. stół o trzech nogach dotykający podłogi w punktach A, B, C (fig. 84) tworzących trójkąt. Kierunek ciężaru Q trafia ten trójkąt w punkcie Q' , odległym o a_1, a_2, a_3 od boków tego trójkąta. Pisząc kolejno warunek momentów dla prostych BC, AC i AB , jako osi momentów, mamy:

$$Q a_1 = A h_1, \quad Q a_2 = B h_2, \quad Q a_3 = C h_3,$$

jeżeli h_1, h_2, h_3 oznaczają odpowiednie wysokości trójkąta spuszczone z wierzchołków A, B i C .

Obliczywszy z tych równań A, B i C , możemy dla sprawdzenia zastosować warunek rzutów

$$A + B + C = Q.$$

Najmniejszy z momentów $Q a_i$ nosi nazwę momentu stałości ciała.

Gdyby trzy punkty podparcia znalazły się na jednej prostej, która trafia kierunek Q , to mielibyśmy do czynienia widocznie ze statyczną niewyznaczalnością reakcyj. To samo zachodzi wogóle, gdy liczba punktów podparcia jest większa od trzech. Wszelako równowaga jest zapewniona pod warunkiem, ażeby linia działania siły Q trafiała płaszczyznę podpierającą w punkcie Q' , leżącym wewnątrz najmniejszej figury, wszędzie wypukłej, która zawiera wszystkie punkty podparcia. (Figura podparcia.) W tym ogólnym

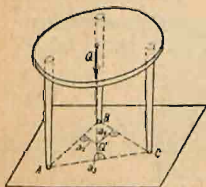


Fig. 84.

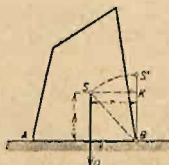


Fig. 85.

nijszym przypadku rozumiemy przez moment stałości najmniejszy moment ciężaru względem prostej stycznej do obwodu figury podparcia.

77. T. zw. „stałość dynamiczna“ ciała ciężkiego podpartego mierzy się pracą konieczną do przewrócenia tego ciała zapomocą obrotu około jednej z „krawędzi podparcia“. Skoro np. obrócimy ciało, przedstawione na fig. 85 około krawędzi podstawy, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, któremu śladem jest B , aż środek ciężkości S znajdzie się w S' pionowo nad B , to musimy przytem podnieść środek ciężkości o wysokość $S'k = z = \sqrt{h^2 + r^2} - h$, czyli wykonać pracę:

$$Qz = \frac{Qr^2}{h + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Stałość dynamiczna naszego ciała jest więc proporcjonalna do jego ciężaru, a nadto jest tem większa, im większa jest pozioma odległość r środka ciężkości od krawędzi podparcia, a im mniejsza jest wysokość h tego środka nad podstawę.

78. Zasada Torricelli'ego. Skoro jedno ciało sztywne lub układ ciał, określony w art. 58, znajduje się w polu ciężkości, uważanem za jednorodne, to w położeniu równowagi stałej środek ciężkości układu zajmuje położenie możebnie najniższe. Statyczne warunki równowagi są spełnione także np. w przypadku, gdy środek ciężkości zajmuje położenie najwyższe, ale wówczas równowaga jest niestała, czyli chwiejna. Jeżeli wreszcie przy każdym ruchu chwilowym środek ciężkości układu pozostaje w tej samej wysokości, to równowaga jest obojętna.

79. Równowaga ciała obracalnego około osi stałej. Jedyńemu stopniowi swobody takiego ciała odpowiada jeden analityczny warunek równowagi sił obciążających, który wyraża, że suma algebraiczna momentów tych sił względem osi obrotu musi być równa zeru.

W odpowiadające równanie warunkowe nie wchodzi widocznie reakcja osi obrotu, które wraz z obciążeniami muszą czynić zadość pozostałym pięciu warunkom. Zadanie staje się statycznie wyznaczalnym, gdy np. ustalenie osi obrotu jest urzeczywistnione jednym łożyskiem stopowym i jednym sztywnym (fig. 86). Reakcja bowiem łożyska sztywnego dostarcza dwu niewiadomych składowych do osi prostopadłych, łożyska stopowego zaś oprócz tych dwu jeszcze trzeciej, mającej kierunek osi, zwanej przeto „podłużną”. (Razem 5, tj. tyle, ile równań warunkowych.)

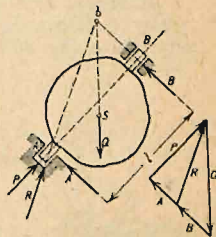


Fig. 86.

W przypadku działania tylko dwu sił obciążających np. \bar{P} i \bar{Q} nosi ciało obracalne około stałej osi x często nazwę dźwigni, zwłaszcza gdy występuje w roli „maszyny prostej”. Wtedy warunek równowagi:

$$\text{Mom}_x \bar{P} = - \text{Mom}_x \bar{Q}$$

wyraża t. zw. „prawo dźwigni”, odkryte przez Archimedesesa w postaci szczegółowej, jaką otrzymuje, gdy obie siły leżą w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu:

Wówczas jest $Pa = Qb$, jeżeli a oznacza ramię siły P , zaś b ramię „ciężaru” Q .

80. Tarcie statyczne. Kąt i stożek tarcia. Spółczynnik tarcia. Doświadczenia pouczają, że reakcja, jakiej doznaje w stanie równowagi ciało stałe obciążone, od ciała je podpierającego, może zbacać od kierunku normalnej płaszczyzny stykania się nawet wówczas, gdy powierzchnie zetknięcia się są tak oszlifowane, że przedstawiają się jako „optycznie gładkie”. Atoli w tych samych zresztą warunkach nie może kąt nachylenia α reakcji do normalnej przekroczyć granicy zwanej kątem tarcia φ . Rozłożywszy reakcję \bar{R} na składową normalną N i styczną T , nazywamy tę ostatnią siłą tarcia, albo krótko „tarciem” (statycznym). A zatem:

$$T = N \tan \alpha \leq N \tan \varphi \quad T_{\max} \quad (\text{całkowite tarcie statyczne}).$$

Stożek opisany obrotem kąta φ dookoła normalnej nazywa się stożkiem tarcia; wartość zaś $\tan \varphi = f_0$ spółczynnikiem tarcia (fig. 87).

Spółczynnik tarcia okazuje się w dość obszernych granicach wartości nacisku normalnego N prawie niezależnym od wielkości tego nacisku (jeżeli

zachodzi bezpośrednie stykanie się obu ciał stałych, czyli tarcie „na sucho” przy dość wielkiej powierzchni stykania się). Ten współczynnik liczbowy może być przeto uważany w przybliżeniu za stałą charakterystyczną dla materiałów ciał trących i stopnia wygładzenia ich powierzchni stykających się nawzajem.

Wielkość f_0 dla dwu danych materiałów znajduje się doświadczalnie, sporządzivszy z jednego materiału równię pochyłą a z drugiego płaską ścianę ciała ciężkiego, które się kładzie na równi, poczem zwiększa się jej nachylenie do poziomu stopniowo, aż do wartości, po przekroczeniu której ciało się zsuwa. Ta wartość jest widocznie kątem tarcia.

To doświadczenie poucza zarazem, że tarcie statyczne występuje tylko w takiej wielkości, jaka jest niezbędna do utrzymania równowagi. Gdy ciało spoczywa na płaszczyźnie poziomej tylko pod działaniem ciężaru własnego, to nie ma wcale tarcia. Natomiast podczas ślizgania się tegoż ciała po płaszczyźnie poziomej zachodzi tarcie o określonej wielkości podobnie zależnej głównie od nacisku normalnego i dającej się przedstawić w postaci:

$$T = N f,$$

przyczem jednakże współczynnik f jest mniejszy od f_0 malejąc ze wzrostem prędkości względnej.

81. Zagadnienia równowagi z uwzględnieniem tarcia. Tarcie ułatwia znakomicie urzeczywistnienie równowagi w przypadkach, w których by jej nie mogło być bez tarcia.

a) Tak np. drabina, oparta o poziomą posadzkę i pionową ścianę, nie mogłaby pozostawać w równowadze przy żadnej skończonej wartości kąta nachylenia α (fig. 88), gdyby nie tarcie. Dzięki tarcu jest równowaga za-

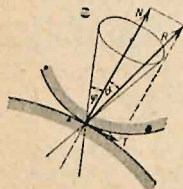


Fig. 87.



Fig. 88.

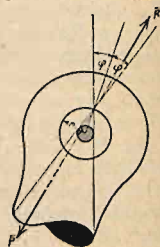


Fig. 89.

pewniona przy tych wartościach α , dla których ciężar drabiny Q (lub wypadkowa z jej obciążeń) trafia zakreskowany czworokąt jako ślad wspólnej przestrzeni obu stożków tarcia w punktach A i B na płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez te punkty i zawierającej siłę Q . (Rysunek przedstawia skrajne położenie równowagi.)

b) Ciało obracalne na przegubie walcowym (fig. 89) byłoby bez tarcia w równowadze tylko wtedy, gdyby składowe obciążenie prostopadłe do osi obrotu, miały wypadkową \bar{P} o kierunku normalnej stykania się ciała z czopem, a więc gdyby ta siła \bar{P} trafiała dokładnie oś czopa. Z powodu tarcia może ta siła wraz z równoważącą ją reakcją czopa przegubu zbaczać od normalnej o kąt $\alpha \leq \varphi$, czyli może mieć względem osi czopa ramię momentu zwanego momentem tarcia, które musi być $\leq r \sin \varphi$, jeżeli r jest promieniem czopa.

Koło o promieniu $\rho = r \sin \varphi = r f'$ nazywają kołem tarcia, a współczynnik $f' = \sin \varphi < f$ współczynnikiem tarcia przegubowego (czopowego). Dla krańcowego momentu tarcia mamy przeto wyrażenie:

$$M_f = P r \sin \varphi = P r f'.$$

82. Statyka układów ciał sztywnych. Układy przegubowe prętów. Łańcuchy i kratownice¹⁾. W układzie ciał połączonych ze sobą w jakikolwiek sposób dają się połączenia określić siłami zależnymi od obciążeń danych. Siły te jako siły wewnętrzne dla całego układu znikają z jego

¹⁾ Por. też dział: „Statyka budowli”.

warunków równowagi; natomiast wchodzą w warunki równowagi każdego poszczególnego ogniwa układu, jakie również muszą być spełnione, skoro każde z tych ogniw jest w równowadze. Przez zastosowanie równań równowagi do odpowiednio wydzielonych części układu można przeto obliczyć siły wewnętrzne (reakcje) częściowo lub zupełnie, zależnie od warunków statycznej wyznaczalności. W równania równowagi każdej takiej wydzielonej części układu wchodzą jako siły wewnętrzne, oprócz danych obciążeń jeszcze wszystkie reakcje od pozostałych części układu. W szczególnie prosty sposób rozwiązują się zadania wyznaczenia sił wewnętrznych w układzie przegubowym prętów, jeżeli siły obciążające działają tylko w przegubach. Każdy bowiem z prętów pozostaje wówczas pod działaniem dwu sił przeniesionych nań przez przeguby, które dla równowagi muszą działać wzdłuż osi pręta i być co do wielkości równe, a co do kierunku przeciwnie. Siły te (\bar{S} i $-\bar{S}$) mogą być rozciągające albo ściskające (fig. 90).

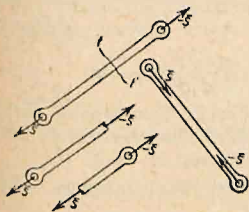


Fig. 90.

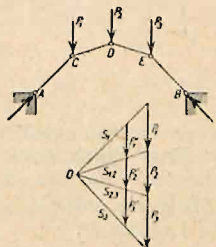


Fig. 91.

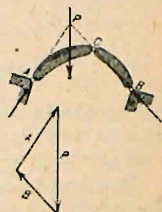


Fig. 92.

Dwie części pręta rozdzielone w myśli przekrojem tt' (fig. 90), działają na siebie nawzajem siłami wewnętrznymi czyli napięciami (wysilami) \bar{S} i $-\bar{S}$, które również będą albo siłami rozciągającymi albo też ściskającymi.

Układ przegubowy prętów może być jako całość sztywnym, czyli może mieć postać geometryczną niezależną od sił zewnętrznych, albo też niesztynym (jako całość), a wówczas przybiera postać równowagi zależną od sił zewnętrznych. W pierwszym przypadku bywa nazywany zwykle kratownicą, w drugim zaś łańcuchem. Atoli można także pojmować łańcuch prętów jako kratownicę niesztyną, albo nawzajem kratownicę jako łańcuch sztywny.

W płaskim zagadnieniu równowagi łańcucha prętów, obciążonego siłami pionowymi (fig. 91), którego końce ustalono przegibnie w punktach A i B , znajdujemy wartości sił $P_1, P_2 \dots$ odpowiadające danej postaci równowagi, traktując ją jako wielobok sznurowy i kreśląc z dowolnie obranego bieguna O promienie $S_{11}, S_{12} \dots$ równoległe do odpowiednich boków AC, CD, \dots tego wieloboku.

W ten sposób znajdujemy oczywiście tylko stosunki wielkości szukanych sił $P_1 : P_2 : \dots$. Rozwiązanie staje się dopiero oznaczonym, skoro np. suma obciążeń jest dana.

Uwaga. W rozpatrywanym przypadku jest każdy z prętów ściskany, a równowaga układu niestala.

W płaszczyźnie ma łańcuch z n ogniw ($n + 2$) stopnie swobody; po ustaleniu początku i końca pozostaje jeszcze $(n - 2)$ stopni. Układ, złożony z dwu ogniw o ustalonych dwu przegubach końcowych, jak np. t. zw. „łuk trójjprzegubowy” (fig. 92), jest przeto sztywny i statycznie wyznaczalny (izostateczny), t. zn. dla każdego obciążenia można z warunków równowagi znaleźć reakcje w przegubach podporowych. Przy obciążeniu tylko jednego ogniwa, np. lewego, siłą P , znajdujemy reakcje w A i w B

jako boki trójkąta sił uwzględniając równowagę drugiego ogniwa nieobciążonego, która wymaga, ażeby reakcje w B i w C leżały na prostej $B\dot{C}$.

83. Krzywa sznurowa. Dla płaskiego układu sił rozmieszczonych w sposób ciągły (jak np. ciężar własny cięgna, uważanego za ważyk linię materialną itp.), przechodzi wielobok sznurowy w krzywą sznurową. W szczególnie ważnym przypadku sił równoległych przedstawiamy je jako ciężary pasków elementarnych pola jednorodnego (fig. 93), ograniczonego z jednej strony

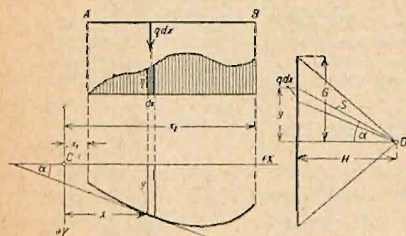


Fig. 93.

osią prostopadłą do kierunku sił. Pasek o polu ηdx ma ciężar $\gamma \eta dx$, a zatem siła przypadająca na jednostkę szerokości paska (w kg/cm)

$$q = \gamma \eta$$

jest proporcjonalna do rzędnej η .

Oznaczywszy przez H „odległość biegunową” od wieloboku sił (mierzoną w podziałce sił), mamy równanie różniczkowe krzywej sznurowej:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q$$

przy uwidocznionym na rysunku układzie współrzędnych. To równanie określa zarazem postać równowagi cięgna obciążonego siłami równoległymi do osi Y o natężeniu q w odniesieniu do jednostki rzutu cięgna na oś X .

Wnioski. a) Składowa pozioma napięcia cięgna obciążonego siłami pionowymi jest stała i równa H .

b) W miejscach nieobciążonych jest krzywa sznurowa prostą, a napięcie cięgna S stałe.

c) Gdy q jest stałe, t. zn. przy obciążeniu równomiernie rozłożonym względem na rzut poziomy cięgna jest krzywa sznurowa parabolą o osi pionowej:

$$\frac{2H}{q} y = -x^2 + Cx + C',$$

przyczem C i C' są stałymi całkowania. Parametrem tej paraboli jest iloraz H/q .

d) Jeżeli w pewnym punkcie cięgna działa nadto siła skupiona P , to w krzywej sznurowej powstaje załom (fig. 94), przyczem:

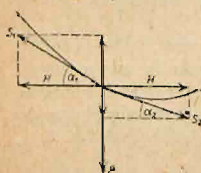


Fig. 94.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P}{H},$$

ponieważ dla równowagi musi być $P - S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 = 0$.

e) Napięcia końców cięgna, a zarazem reakcje stałych punktów zawieszenia są określone skrajnymi promieniami wieloboku sił.

f) Krzywa sznurowa jest drugą linią całkową dla linii obciążenia $\eta = f(x)$.

g) Danej linii obciążenia odpowiada, przy stałym H , ∞^2 krzywych sznurowych na płaszczyźnie, atoli tylko jedna krzywa przechodząca przez dwa punkty dane, lub przechodząca przez jeden punkt dany i mająca w nim styczność daną.

h) Gdy dane obciążenie ciągle podzielimy na części pionowymi prostymi i każde obciążenie częściowe zastąpimy siłą wypadkową, to wielobok sznurowy układu sił wypadkowych (odpowiadający temu samemu biegunowi), jest opisany na krzywej sznurowej, a punkty styczności leżą na prostych podziałowych.

i) Jeżeli punkty zawieszenia cięgna są na tym samym poziomie, to składowe pionowe reakcyj w tych punktach są takie same, jak dla belki poziomej o tej samej rozpiętości (i tak samo obciążonej).

84. Linja łańcuskowa (katenoidea) zwyczajna jest postacią równowagi cięgna jednorodnego, doskonale giętkiego i nierozciągliwego, zawieszonego obu końcami w stałych punktach A i B (fig. 95) i pozostającego tylko pod wpływem ciężaru własnego γ kg/m. Ta postać jest krzywą sznurową, dla której

$$-q dx = \gamma ds,$$

jeżeli ds oznacza długość elementu łuku. A zatem:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

a po zcałkowaniu i wyznaczeniu punktu x_0, y_0 , leżącego na pionowej najniższego punktu łańcuskowej w odległości $m = \frac{H}{\gamma}$ (parametr łańcuskowej) otrzymujemy:

$$y - y_0 = \frac{m}{2} \left[e^{\frac{x-x_0}{m}} + e^{-\frac{x-x_0}{m}} \right],$$

albo dla układu spólrzędnych o początku w $\Omega (x_0, y_0)$:

$$y = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \operatorname{Ch} \frac{x}{m},$$

(jeżeli Ch oznacza „cosinus hyperbolicus“).

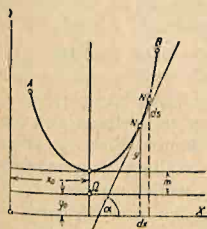


Fig. 95.

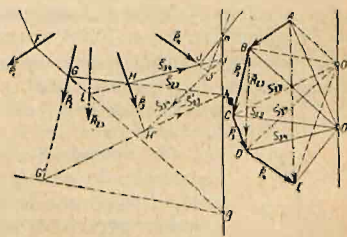


Fig. 96.

Parametr m ma znaczenie długości cięgna o ciężarze równym H , tj. poziomej składowej napięcia. Napięcie S w dowolnym miejscu cięgna określa równanie:

$$S = \gamma (y - y_0).$$

Wniosek. Środek ciężkości łuku łańcuskowej leży na pionowej przecięcia się stycznych w jego końcach.

85. Najważniejsze własności wieloboku sznurowego (i krzywej sznurowej).

a) Gdy wykreślimy dwa wieloboki sznurowe danego układu sił dla dwu biegunów O i O' (fig. 96), to odpowiednie boki tych wieloboków przecinają się w punktach $(g, h, i \dots)$, leżących na prostej równoległej do OO' .

b) Moment wypadkowej sił danego układu względem jakiegokolwiek środka Ω na jego płaszczyźnie równa się iloczynowi odległości biegunowej H przez odcinek prostej przechodzącej przez Ω i równoległej do tej wypadkowej, wyznaczony przez boki skrajne wieloboku sznurowego (fig. 97):

$$\text{Mom}_{\Omega} \bar{R} = Rr = Hm,$$

$$\text{Mom}_{\Omega'} \bar{R} = -Rr' = -Hm'.$$

To twierdzenie pozwala mierzyć momenty siły \bar{R} zapomocą podziałki na wykresie uwytłumionym przez zakreskowanie równoległe do \bar{R} .

Szczególnie korzystne jest powyższe przedstawienie momentu, gdy wszystkie siły układu są równoległe jak np. na fig. 98, przedstawiającej

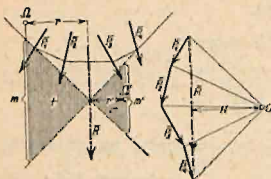


Fig. 97.

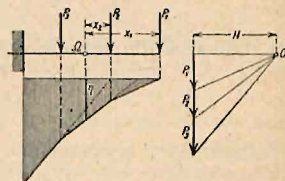


Fig. 98.

belkę końcem utwierdzoną i obciążoną siłami P_1, P_2 i P_3 . Rzędna η zakreskowanego pola, pomnożona przez odległość biegunową H , daje moment wypadkowej sił, leżących po prawej stronie względem odpowiadającego punktu Ω . Moment ten nosi w nauce o wytrzymałości nazwę momentu zginającego daną belkę w przekroju Ω . Wielobok sznurowy dostarcza przeto wykresu momentów zginających.

86. Konstrukcja wieloboku sznurowego, którego pewne trzy boki przechodzą przez punkty dane, polega na twierdzeniu a) w ust. 85. Nazywawszy te boki dla wygody przez a, b, c znajdujemy wypadkową \bar{R}_1 sił, dla których a i b są bokami skrajnymi, oraz wypadkową \bar{R}_2 sił, dla których bokami skrajnymi są b i c . Wtedy mamy do czynienia z dwiema siłami \bar{R}_1 i \bar{R}_2 , których wielobok sznurowy zawiera trzy boki, mające po kolei przechodzić przez dane punkty A, B i C (fig. 99). Otóż najpierw kreślimy jakiegokolwiek dwa boki a' i b' wieloboku sznurowego, przechodzące przez A i B , znajdujemy odpowiadający im biegun O , prowadząc z początku i końca siły \bar{R}_1 promienie równoległe do a' i b' ; a potem kreślimy przynależny bok trzeci c' , który nie będzie wogóle trafiać punktu C . Skoro jednakże poprowadzimy prostą AB i przedłużymy bok c' aż do przecięcia się z tą prostą w n , to przez punkt n przechodzić musi na podstawie przytoczonego twierdzenia także bok c szukanego wieloboku, poczem boki b i a znajdujemy z łatwością. Inne rozwiązanie tego samego zadania w teorii łuku trójperegubowego.

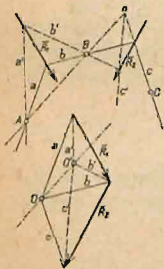


Fig. 99.

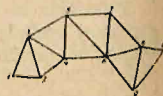


Fig. 100.

87. Warunki sztywności i statycznej wyznaczalności (izostatyczności) kratownicy płaskiej w jej płaszczyźnie.¹⁾ Ażebym węzłów połączyć prętami w figurę sztywną, musi liczba prętów p wynosić przynajmniej:

$$p = 2w - 3,$$

albowiem każdy nowy węzeł ustala się przez połączenie go dwoma prętami nie leżącymi na jednej prostej z dwoma innymi węzłami, a tylko pierwsze (trzy) węzły tworzące trójkąt wymagają nie $6 = 2 \cdot 3$, lecz tylko 3 prętów (fig. 100). Kratownica, zbudowana w ten sposób i tworząca figurę złożoną

¹⁾ Przy art. 87—91 por. też dział: „Statyka budowlana”.

z szeregu trójkątów, nigdzie się nawzajem nie nakrywających, nazywa się kratownicą prostą. Jest ona sztywna, oraz statycznie wyznaczalna, czyli izostatyczna. Jeżeli bowiem na węzły tej kratownicy działają siły zewnętrzne $P_1, P_2 \dots$, czyniące zadość trzem warunkom równowagi, koniecznym do unieruchomienia całości, to wyciąwszy w myśli każdy węzeł z osobna i zastąpiwszy połączenie siłami wewnętrznymi w prętach, otrzymujemy dla każdego węzła 2 równania równowagi. Razem tedy mamy $2w$ równań, w których jednakże tkwią jeszcze owe 3 warunki równowagi sił zewnętrznych. Do wyznaczania p niewiadomych sił wewnętrznych w prętach pozostaje więc $2w - 3$ równań, czyli tyle, ile koniecznie potrzeba. Że te równania są zarazem wystarczające, łatwo się przekonać w każdym poszczególnym przypadku, rozwiązując je wykresnie, czyli kreśląc dla każdego węzła zamknięty wielobok sił. W tym celu trzeba rozpoczynać od węzła, w którym się schodzą tylko dwa pręty, co jest zawsze możliwe u kratownicy prostej.

Gdy kratownica nie jest prosta, może warunek $p = 2w - 3$ okazać się niewystarczający. Jeżeli w kratownicy płaskiej jest $p < 2w - 3$, to kratownica jest oczywiście niesztwna, jeżeli zaś $p > 2w - 3$, to jest przesztwniona, czyli (wewnętrznie) statycznie niewyznaczalna (por. dział: „Statyka budowli“).

88. Plan sił jako figura „odwrotna“ względem planu kratownicy prostej wraz z siłami zewnętrznymi. Taki plan jest wielce dogodnym połączeniem wszystkich wieloboków sił równoważących się nawzajem w każdym węzle z osobna. Jego kreślenie ułatwia reguła Bow'a, wynikająca ze stwierdzenia, że:

1. „Plan kratownicy“ i „plan sił“ zawierają tę samą liczbę prostych, przyczem każdej prostej jednego planu (osi pręta lub siły zewnętrznej) odpowiada równoległa do niego prosta planu drugiego (siła wewnętrzna lub zewnętrzna).

2. Proste każdego z obu planów dzielą płaszczyznę na tę samą ilość pól.

3. Prostym otaczającym pole na jednym planie odpowiadają proste wychodzące z jednego punktu na planie drugim i odwrotnie.

Wobec tego przed kreśleniem planu sił dla danego planu kratownicy (fig. 101) oznaczamy wszystkie pola np. literami $a, b, c \dots$ a węzły np. cyframi rzymskimi $I, II, III \dots$. Rozpoczynając teraz kreślić plan sił od węzła I , ponieważ w nim schodzą się tylko 2 pręty, oznaczamy pole trójkąta sił P_1, S_4, S_5 również przez I ; wierzchołek zaś tego trójkąta, utworzony

Fig. 101.

przez S_4 i S_5 , oznaczamy literą f , albowiem pręty 4, 5 i 6 otaczają pole f na planie kratownicy itd. Po wykreśleniu planu sił odróżniamy siły wewnętrzne ściskające np. przez zgrubienie lub podwojenie linii na planie kratownicy. (Kreślenia strzałek unika się, ponieważ każda siła S_i na planie przedstawia dwie siły wewnętrzne, jakimi pręt działa na swoje przeguby końcowe).

89. Sposób Culmann'a. Kratownica prosta da się zawsze podzielić na dwie części przekrojem przecinającym nie więcej jak trzy pręty (nie schodzące się w jednym węzle), np. 1, 2, 3 na fig. 102. Rozpatrując równowagę

Fig. 102.

np. lewej odciętej części kratownicy, mamy do czynienia z warunkami równowagi wypadkowej \bar{R} sił zewnętrznych na tę część działających z napięciami $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$, które określają działanie drugiej części na część rozpatrywaną. Równowaga tych czterech sił wymaga, aby wypadkowa dwu z nich, np. \bar{R} i \bar{S}_1 , która musi przechodzić przez znany punkt β , leżała na tej samej prostej, co wypadkowa dwu pozostałych, tj. \bar{S}_2 i \bar{S}_3 , przechodząca przez α . Kierunek $\alpha\beta$ wyznacza przeto linię działania \bar{W} obu wypadkowych, co pozwala natychmiast wykreślić czworokąt sił (fig. 102), rozpoczynając od $S_1 \parallel 1$ aż do przecięcia się z kierunkiem \bar{W} itd.

90. Sposób Ritter'a. Podzieliwszy kratownicę na dwie części przekrojem przecinającym pręty 1, 2, 3, nie schodzące się w jednym węźle (fig. 103) piszemy warunek momentów dla części rozpatrywanej, przyczem obieramy środek momentów tak, aby równanie zawierało tylko jedną niewiadomą. Chcąc więc znaleźć siłę wewnętrzną S_1 w przecie 1 obieramy środek momentów w α , gdzie przecinają się pręty 2 i 3. Warunek momentów daje:

$$Rr + S_1 r_1 = 0, \text{ czyli } S_1 = -R \frac{r}{r_1}.$$

Znak $-$ wskazuje, że siła S_1 jest skierowana ku węzłowi I, czyli że jest siłą ściskającą pręt 1.

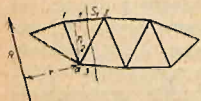


Fig. 103.

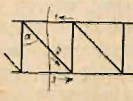


Fig. 104.

Dla obliczenia siły S_3 trzeba środek momentów obrać w γ ; zaś dla siły S_2 w punkcie przecięcia się osi prętów 1 i 3. Z tego widać, że sposób Rittera zawodzi niekiedy, jeżeli środek momentów wypada, jak w tym przykładzie, poza granicami rysunku, albo nawet w przypadku równoległości prętów 1 i 3 — w nieskończoności. W tym ostatnim przypadku stosuje się

często z korzyścią warunek rzutów zwłaszcza gdy wypadkowa \bar{R} jest pionowa, a pręty 1 i 3 poziome (fig. 104). Warunek rzutów na oś pionową daje wówczas:

$$S_2 \cos \alpha - R = 0, \text{ czyli } S_2 = R \sec \alpha.$$

91. Warunki sztywności i statycznej wyznaczalności kratownicy przestrzennej. Każdy nowy węzeł łączy się sztywnie z resztą kratownicy zapomocą 3 prętów nie leżących w jednej płaszczyźnie. Tylko pierwsze 4 węzły wymagają do sztywnego połączenia w czworoscian nie $12 = 3 \cdot 4$ prętów, lecz tylko 6 (tj. o 6 mniej), a zatem liczba prętów p musi czynić zadość równaniu:

$$p = 3w - 6.$$

Jest to warunek konieczny sztywności i statycznej wyznaczalności (wewnętrznej) kratownicy przestrzennej. Będzie on zarazem wystarczającym przedewszystkiem w przypadku kratownicy prostej utworzonej przez kolejne dołączanie czworoscianów (por. dział: „Statyka budowli“, Kratownice przestrzenne).

IV. Kinytika.

A. Zagadnienia kinetyki punktu materialnego.

92. Ruch pionowy w polu ciężkości uważanem za jednorodne.

a) Równanie ruchu bez uwzględnienia oporu powietrza napiszemy w postaci:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \pm mg, \text{ albo } \frac{d^2 z}{dt^2} = \pm g,$$

przyczem znak $+$ odpowiada osi dodatnich z skierowanej w dół, a znak $-$ w górę. Przyjmując c jako wartość prędkości skierowanej w górę w położeniu początkowym $z = 0$, otrzymujemy z pierwszego całkowania:

$$v = \frac{dz}{dt} = c - gt,$$

z drugiego zaś:

$$z = ct - \frac{1}{2}gt^2,$$

jeżeli z liczymy dodatnio w górę. Punkt wznosi się ruchem jednostajnie zwalnianym, aż jego początkowa energia kinetyczna $\frac{mv^2}{2}$ zamieni się na potencjalną mgh , a prędkość v stanie się równa zero. Czas wznoszenia się jest przeto równy $t_1 = \frac{c}{g}$, a wysokość wzniesienia się $h = \frac{c^2}{2g}$. Jest to największa wartość, jaką osiąga z , jak wynika z powyższego równania. Od tej chwili t_1 rozpoczyna się swobodny spadek i dla $t = 2t_1$ otrzymujemy znowu $z = 0$, a $v = -c = -\sqrt{2gh}$, czyli punkt wraca z prędkością o tej samej wartości, z którą wyszedł.

b) Z uwzględnieniem oporu powietrza lub innego ośrodka jednorodnego, będzie równaniem spadania:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - kv^2,$$

jeżeli k oznacza współczynnik oporu proporcjonalnego do kwadratu prędkości. Wartość k znajdujemy empirycznie obserwując tę prędkość spadku v^0 przy której ruch staje się jednostajnym, czyli $mg - kv^0{}^2 = 0$.

Stąd
$$k = \frac{mg}{v_0^2},$$

a równanie ruchu przybierze postać:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right).$$

Całkowanie daje
$$v = v_0 \sqrt{1 - e^{-\frac{2gs}{v_0^2}}},$$

z czego widać, że prędkość zdąża asymptotycznie do prędkości jednostajnego spadania v_0 , którą teoretycznie osiąga dla $s = \infty$. Atoli po przebieżeniu drogi s ,

kilkakrotnie większej od $\frac{v_0^2}{2g}$ staje się różnica między v a v_0 znikomo

mała, tak iż przy stosunkowo znacznych współczynnikach oporu, jakich doznają np. krople deszczu w powietrzu, albo ziarenka piasku w wodzie, obserwujemy już po spadku z niewielkiej wysokości ruch praktycznie jednostajny.

Z powtórnego całkowania wynika:

$$S = \frac{v_0^2}{g} \log \text{nat} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{gt}{v_0}} + e^{-\frac{gt}{v_0}} \right) = \frac{v_0^2}{g} \log \text{nat} \text{Ch} \frac{gt}{v_0}.$$

93. Ważki punkt materialny na równi pochyłej porusza się w płaszczyźnie równi jak swobodny pod wpływem wypadkowej siły ciężkości mg i reakcji równi, która bez tarcia ma kierunek normalnej do równi. Siła poruszająca ma wtedy wartość $mg \sin \alpha$ i kierunek największego spadku na płaszczyźnie równi. Reakcja $N = mg \cos \alpha$. To samo otrzymujemy rozkładając siłę ciężkości mg na składową normalną i styczną do równi, ponieważ składowa normalna jest zniesiona reakcją, a tylko styczna wytwarza przyspieszenie $a = g \sin \alpha$ (fig. 105).

Bez prędkości początkowej jest tor punktu materialnego prostą nachyloną do poziomu pod kątem α , a ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem $a = g \sin \alpha$. Tak samo ma się rzecz, gdy prędkość początkowa ma kierunek owej prostej.

Jeżeli pomiędzy punktem materialnym a równią zachodzi tarcie przy stałej wartości współczynnika tarcia f , wówczas przyspieszenia a spadku po prostej nachylonej pod kątem α ¹⁾ określi równanie ruchu:

$$ma = mg \sin \alpha - Nf = mg \sin \alpha - mf \cdot g \cos \alpha,$$

czyli

$$a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Przy ruchu zaś w górę po tejże prostej ma przyspieszenie wartość:

$$a = -g (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

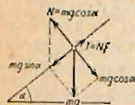


Fig. 105.

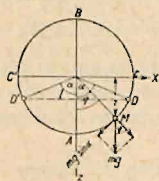


Fig. 106.

94. Ruch ważkiego punktu materialnego po okręgu pionowym. Wahadło proste matematyczne. Oznaczywszy przez s długość łuku mierzonego od najniższego punktu jako położenia równowagi stałej, a przez φ odpowiadający kąt środkowy (fig. 106), otrzymujemy bez oporów równanie ruchu:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}, \quad \text{albo} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Jego pierwszą całkę znajdujemy najprościej z zasady zachowania energii. Obracząc poziom porównawczy (odpowiadający zeru energii potencjalnej) na wysokości środka koła mamy:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi),$$

jeżeli v_0 oznacza wartość prędkości w najniższym punkcie. Od tej wartości zależy ogólny charakter ruchu:

1. Gdy $v_0^2 > 2gh$, przyczem $h = 2l$ (średnicy koła), to v nie staje się zerem przy żadnej wartości kąta φ , a ruch odbywa się po jednym półkołu oddzielnym pionową średnicą z dołu ku górze z prędkością malejącą, a po drugim w dół z prędkością rosnącą, poczem powtarza się identycznie w nieskończoność. Punkt obiega okrąg z prędkością okresowo zmienną w tym samym kierunku.

2. Gdy $v_0^2 < 2gh = 4gl$, to prędkość staje się zerem w dwu położeniach odpowiadających $\varphi = \pm \alpha$, przyczem α otrzymujemy z warunku

$$v_0^2 = 2gl(1 - \cos \alpha).$$

Ruch ma wówczas charakter wahadłowy czyli odbywa się tam i napowrót po łuku odpowiadającym kątowi 2α . Przy bardzo małym kącie amplitudy α (czyli małych odchyleniach) można z wielką dokładnością zastąpić $\sin \varphi$ przez φ i napisać równanie ruchu nieskończenie małych wahań w postaci:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s,$$

określającej według art. 45 prosty ruch harmoniczny o okresie (podwójnego) wzniesienia

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

niezależnym od amplitudy.

¹⁾ Równym kątowi nachylenia płaszczyzny.

Dla wielkich odchylenń znajdujemy dokładnie po łatwym przekształceniu:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{całka eliptyczna}),$$

a stąd po rozwinięciu na szereg trwanie (okres) jednego pełnego (podwójnego) wahnienia:

$$T_{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Te wahnienia nie są już izochroniczne, jak wahnienia nieskończenie małe, lecz zależą od kąta amplitudy α . Skoro jednakże $\alpha \leq 8^\circ$, to $T_{\alpha} \leq 1,0012 T_0$.

Wahadło sekundowe tj. takie, dla którego $T_0/2 = 1 \text{ sk}$, ma długość $l_1 = g/\pi^2$.

W Warszawie, gdzie $g = 9,8122 \text{ m/sk}^2$, jest $l_1 = 0,9943 \text{ m}$.

Reakcja okręgu jako toru, albo napięcie nici łączącej punkt materialny ze środkiem O , ma wartość:

$$R = mg \cos \varphi + ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

95. Wpływ obrotu ziemi na ruch ważkiego punktu materialnego. Z powodu obrotu ziemi w układzie bezwzględny z prędkością kątową $\omega = 0,000\,073 \text{ sk}^{-1}$ porusza się punkt materialny względem układu stale połączonego z ziemią tak, jakby nań oprócz siły ciężkości względnej $m\bar{g}$ działała nadto przeciwnie wzięta siła Coriolis'a $2m\bar{v}_w \sin(\bar{v}_w, \bar{\omega})$.

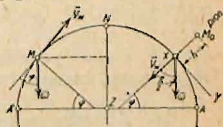


Fig. 107.

Dostrzegalne skutki siły Coriolis'a wykazano np. na spadku swobodnym ze znacznej wysokości. Punkt materialny zbacza od pionu na wschód, a wielkość tego zбочenia obliczamy z dostatecznym przybliżeniem przyjmując wartość prędkości pionowej $v_z = gt$. Wektor prędkości kątowej obrotu ziemi $\bar{\omega}$ tworzy z \bar{v}_z kąt $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ (fig. 107), a zatem przyspieszenie Coriolis'a jest skierowane poziomo na zachód i ma wartość $2v_z \omega \cos \varphi$. Obrawszy oś X skierowaną ku wschodowi otrzymujemy:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2gt \omega \cos \varphi, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g$$

jako przybliżone równania ruchu.

Całkowanie daje:

$$x = \frac{gt^3}{3} \omega \cos \varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} gt^2.$$

Zбочenie wschodnie x wynosi np. dla wysokości spadku $158,8 \text{ m}$ i szerokości geograficznej $\varphi = 50^\circ 53'$ (doświadczenie Reich'a w kopalniach saskich w r. 1831), obliczone przy pomocy powyższych wzorów $x = 2,75 \text{ cm}$.

Przy ruchu nieswobodnym punktu materialnego w płaszczyźnie poziomej wchodzi w grę pozioma składowa siły Coriolis'a. Jej wartość jest niezależna od azymntu prędkości względnej \bar{v} i równa się $2m\bar{v}\omega \sin \varphi$. Kierunek odpowiadającej poziomej składowej siły dodatkowej — $m\bar{a}_c$ dla patrzącego w kierunku prędkości wskazuje na półkuli północnej na prawo, na połu-

dniowej zaś na lewo. Wskutek tego np. pociąg jadący na północnej półkuli wywiera boczny nacisk na prawą szynę nie przekraczający jednakże przy $v = 30 \text{ m/sk}$ w naszej szerokości $1/3000$ ciężaru pionowego.

B. Kinetyka układów materialnych.

Rzeczywiste ciała materialne lub ich zespoły, czyli wogóle układy materialne rozpatrujemy pod postacią dwu modeli teoretycznych: albo jako układy skończonej lub nieskończonej liczby punktów materialnych, albo też jako utwory geometryczne wypełnione materią ciągłą. W najogólniejszych rozważaniach mechaniki stosujemy zwykle model pierwszy; w mechanice płynów i sprężystych ciał stałych a także materiałów sypkich posługujemy się nadto z korzyścią modelem drugim i traktujemy te ciała jako *continua* materialne.

Ciało sztywne można uważać za układ punktów materialnych o niezmiennym ustroju geometrycznym, czyli nieodkształcalny. W obu modelach ważną rolę gra dokładne rozróżnianie sił zewnętrznych od wewnętrznych, jakkolwiek siła wewnętrzna w jednym zagadnieniu może się stać zewnętrzną w innym. Tak np. grawitacja pomiędzy ciałami układu słonecznego, rozpatrywanego jako całość, stanowi siły wewnętrzne układu, natomiast przy badaniu ruchu układu ziemia—księżyc określa przyciąganie przez słońce obu ciał siły zewnętrzne, a ich wzajemna grawitacja siły wewnętrzne. W układzie: rura działowa z pociskiem wewnątrz podczas wybuchu naboju są siłami wewnętrznymi: prężność gazów wybuchowych i tarcie między rurą a pociskiem; zewnętrznymi zaś: siła ciężkości i nacisk sprężyny przenoszącej reakcję wystrzału na lawetę. W poruszającym się ciele sprężystym są siłami wewnętrznymi naprężenia (napięcia). W nowoczesnych pojazdach mechanicznych (parowóz, rower, samochód itp.) występują jako siły zewnętrzne: siła ciężkości, reakcja tarcia kół napędowych o podłoże, opór toczenia się kół i opór powietrza; zaś jako siły wewnętrzne, np. w parowozie: prężność pary, tarcie w łożyskach osi, nacisk w krzyżulcu, czopach korbowych itd.

96. Zasada pracy i energii. Jeżeli $E_0 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$ oznacza energję kinetyczną układu punktów materialnych m_i o prędkościach v_i w położeniu obranem za początkowe, $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$ energję kinetyczną w jakimkolwiek późniejszym położeniu układu, L_w pracę sił wewnętrznych, L_z pracę sił zewnętrznych układu, wykonaną podczas ruchu pomiędzy temi dwoma położeniami, wówczas:

$$E - E_0 = L \equiv L_w + L_z,$$

czyli słowami: Energia kinetyczna jakiegokolwiek układu materialnego wzrasta (względnie maleje) podczas ruchu o wielkość pracy wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu (zależnie od tego czy ta praca jest dodatnia, czy też ujemna).

Gdy siły układu mają potencjał, a U_0 i U oznaczają odpowiadające wartości energii potencjalnej układu (tj. sumy algebraicznej energii potencjalnych wszystkich punktów materialnych układu) w obu jego położeniach, to z powyższego równania otrzymujemy:

$$E + U = E_0 + U_0 = \text{stałe},$$

czyli: W przypadku sił (zewnętrznych i wewnętrznych), pochodzących od potencjału, całkowita energia (tj. suma energii kinetycznej i potencjalnej) układu podczas ruchu zachowuje wartość stałą.

Uwaga. W zagadnieniach technicznych występują zawsze obok sił pochodzących od potencjału, czyli sił zachowawczych, także siły innego rodzaju (jak tarcie, opór powietrza

(itp.) zwane siłami rozpraszającymi (energje). Wskutek tego całkowita energia układu ubywa podczas ruchu o wartość pracy sił rozpraszających. Ten ubytek idzie oczywiście na koszt energii kinetycznej. Nazwa sił rozpraszających pochodzi stąd, ponieważ strata energii mechanicznej jest ze stanowiska fizyki pozorna i polega właściwie na zamianie tej energii na inną postać, w ostatniej instancji na zdążającą do rozprószania w przestrzeni energję cieplną.

97. Ważniejsze zastosowania zasady pracy i energii polegają na tem, że przy ich pomocy można w niektórych przypadkach znaleźć łatwo ruch układu pod wpływem danych sił czynnych. Np:

Obrót ciała sztywnego około stałej osi z pominięciem tarcia w łożyskach pod wpływem jakichkolwiek sił czynnych \overline{P}_i . Przy chwilowej prędkości kątowej ω i momencie bezwładności I względem osi obrotu, jest

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

wartością energii kinetycznej tego ciała. Stosując zasadę pracy dla nieskończonego małego przyrostu energii kinetycznej w czasie dt , otrzymujemy zważywszy, że praca reakcyj łożysk i sił wewnętrznych jest równa zeru,

$$I \omega d\omega = \mathcal{M} \omega dt,$$

jeżeli $\mathcal{M} = \Sigma \text{Mom}_{os} \overline{P}_i$ oznacza ogólny moment sił czynnych względem osi obrotu. Stąd

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathcal{M}}{I},$$

czyli przyspieszenie kątowe równa się ilorazowi z momentu sił czynnych względem osi obrotu przez moment bezwładności ciała względem tejże osi.

98. Zasada d'Alemberta sprowadza zagadnienie ruchu układu materialnego pod wpływem danych sił działających do zagadnienia równowagi na podstawie następującego rozumowania: Siły zewnętrzne \overline{P}_i , działające na punkty m_i układu materialnego, nie wywołują wogóle takich przyspieszeń tych punktów, jakieby zachodziły, gdyby te punkty m_i były swobodne i zupełnie niezależne od innych punktów materialnych układu. Atoli w myśl zasadniczych praw dynamiki można traktować każdy z punktów układu m_i jako swobodny, ale pozostający pod wpływem nie tylko danej siły \overline{P}_i , lecz także pewnej siły \overline{W}_i zastępującej więzy nałożone punktowi m_i i siły (wewnętrzne), które działają nań inne punkty materialne układu. Obie te siły udzielają punktowi m_i przyspieszenia \overline{a}_i . To przyspieszenie rzeczywiste dałoby się oczywiście znieść działaniem na punkt m_i siły fikcyjnej $\overline{B}_i = -m_i \overline{a}_i$. Nazywamy ją siłą (albo oporem) bezwładności. W każdym przeto położeniu poruszającego się układu materialnego (fikcyjne) siły bezwładności równoważą się z siłami zewnętrznymi, o ile siły wewnętrzne same się nawzajem znoszą. Tak się rzecz ma w przypadku ciała sztywnego lub układu ciał sztywnych połączonych ze sobą przegubami bez tarcia, niciami nierozciągliwymi itp. W innych przypadkach należy do sił zewnętrznych oddzielnych punktów materialnych układu zaliczyć nadto te siły wewnętrzne, których praca przygotowana jest różna od zera.

Zasadę d'Alemberta wyrażamy przy pomocy zasady prac przygotowanych równaniem:

$$\sum_i \left(\overline{P}_i - m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} \right) \delta \overline{r}_i = 0,$$

albo przy zastosowaniu metody analitycznej:

$$\sum_i \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0.$$

Wniosek. Dwa układy sił działających na ciało sztywne, które są równoważne statycznie, są zarazem równoważne kinetycznie, t. zn. wywołują ten sam ruch ciała swobodnego ze stanu spoczynku.

Przykłady. 1. Przy ruchu postępowym ciała sztywnego swobodnego poruszają się wszystkie jego punkty z tem samem przyspieszeniem \bar{a} . Odpowiadające równoległe siły bezwładności mają więc wypadkową $\sum m_i \bar{a} = M \bar{a}$, która przechodzi przez środek masy ciała. Dlatego siły zewnętrzne, ruch taki wywołujące, muszą mieć również wypadkową, przechodzącą przez środek masy ciała o wielkości $M \bar{a}$.

2. Przy ruchu obrotowym ciała sztywnego osadzonego na stałej osi w łożyskach A i B ma siła bezwładności każdego punktu m_i ciała składową styczną (do koła o promieniu ρ_i , jakie opisuje ten punkt) i składową normalną. Pierwsza, tj. styczna siła bezwładności ma wartość $m_i \rho_i \varepsilon$; druga zaś zwana znowu siłą odśrodkową (z powodu formalnej identyczności z siłą odśrodkową w dwu pierwszych znaczeniach) jest równa $m_i \rho_i \omega^2$ (Jeżeli $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, oznaczają odpowiednio prędkość i przyspieszenie kątowe). Siły odśrodkowe są w ogólnym przypadku zrównoważone odpowiednimi reakcjami łożysk. Styczne siły bezwładności dają ogólny moment względem osi obrotu o wartości $\sum m_i \rho_i^2 \varepsilon = I \varepsilon$, który się znosi z momentem sił czynnych P_i względem tejże osi oznaczonym już poprzednio przez M . Stąd równanie ruchu obrotowego, wprowadzone w art. 98 z zasady pracy. Zastosowanie zasady d'Alembert'a przedstawia w naszym zadaniu tę korzyść, że pozwala wyznaczyć także reakcje łożysk z warunków równowagi tych reakcyj z danymi siłami zewnętrznymi i siłami bezwładności. Ograniczając się do przypadku, w którym niema sił zewnętrznych, widzimy, że do utrzymania obrotu jednostajnego około danej osi AB wystarcza równowaga sił odśrodkowych z reakcjami łożysk (oczywiście z pominięciem tarcia). Układ sił odśrodkowych sprowadza się metodami podanymi w statyce do jednej siły $\bar{R} = M \bar{r}_0 \omega^2$, tj. siły odśrodkowej całej masy ciała pomyślanej w jej środku (o promieniu \bar{r}_0) i do jednej pary $(\bar{Q}, -\bar{Q})$ (fig. 108) w płaszczyźnie przechodzącej przez oś obrotu o momencie $\bar{M}_C = (D_y \bar{j} - D_z \bar{k}) \omega^2$ (przyczem \bar{j} i \bar{k} oznaczają wektory jednostkowe na osiach Y i Z prostokątnego układu związanego z ciałem, którego osią X jest oś obrotu; D_y zaś i D_z są odpowiadającymi momentami zbieżności.

W szczególnym przypadku $\bar{r}_0 = 0$, tj. gdy oś obrotu przechodzi przez środek ciała, staje się $\bar{R} = 0$, ale pozostaje jeszcze para sił, chyba, że jednocześnie jest $D_y = 0$ i $D_z = 0$, czyli gdy oś obrotu jest główną osią bezwładności. Wtedy i tylko wtedy siły odśrodkowe nawzajem się znoszą, a zatem obrót jednostajny zachodzi bez reakcyj w łożyskach. Taka oś jest swobodną osią obrotu ciała sztywnego.

3. Wahadło fizyczne, jest to jakiegokolwiek ciało sztywne obracalne około poziomej stałej osi nie przechodzącej przez jego środek masy i poruszające się „wahadłowo“ pod wpływem samej tylko siły ciężkości. Moment siły ciężkości Mg względem osi obrotu $= -Mg \cdot a \sin \varphi$, jeżeli a oznacza odległość środka ciężkości S od osi obrotu, zaś φ kąt odchylenia (fig. 109). Równanie ruchu

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{Mg \cdot a \sin \varphi}{I}$$

różni się od równania ruchu wahadła matematycznego o długości l :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \varphi$$

tylko postacią stałego współczynnika. Prawo obu ruchów będzie jednakowe skoro obadwa współczynniki będą sobą równe, czyli gdy $\frac{Ma}{I} = \frac{1}{l}$. Obliczona z tego warunku długość wahadła matematycznego wyznacza na przedłużeniu OS_0 punkt C wahadła fizycznego, zwany środkiem wahań. Odległość

$$CO = l_{\text{red}} = \frac{I}{Ma} = \frac{r^2}{a}$$

Gdzie $I = Mr^2$ nazywa się długością sprowadzoną danego wahadła fizycznego albowiem okres jego pełnego wahanienia (przy bardzo małym kącie amplitudy α) wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{red}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg \cdot a}}.$$

Przy pomocy twierdzenia z teorii momentów bezwładności $I = I_0 + Ma^2$ łatwo dowieść, że zawieszony wahadło na osi równoległej do pierwotnej i przechodzącej przez środek wahanienia C otrzymujemy znowu ten sam czas wahanienia, chociaż zmieniła się odległość środka ciężkości od osi obrotu.

Z warunków równowagi sił bezwładności z ciężkością i reakcjami osi obrotu nie trudno teraz wyznaczyć te ostatnie.

99. Zasada ruchu środka masy i zasada pól, czyli zasada momentów ilości ruchu (pędów). Siły wewnętrzne jakiegokolwiek układu materjalnego nie wpływają na ruch środka masy tego układu, który odbywa się tak, jak ruch punktu materjalnego o masie ($M = \sum m_i$) równej całej masie układu pod działaniem wszystkich sił zewnętrznych \overline{P}_i układu przeniesionych do środka masy.

$$M \frac{d^2 \overline{r}_0}{dt^2} = \sum \overline{P}_i, \text{ albo } \frac{d}{dt} (M \overline{v}_0) = \sum_i \overline{P}_i,$$

jeżeli $M \overline{v}_0 = \sum m_i \overline{v}_i$ ($\overline{r}_0, \overline{v}_0$ promień wektor i prędkość środka masy układu).

Dowód wynika z dodania równań ruchu wszystkich punktów materjalnych układu, ponieważ suma sił wewnętrznych równa się zero. Podobnie uwzględniając, że geometryczna suma momentów sił wewnętrznych układu jest dla każdego środka momentów O równa zero, znajdujemy łatwo równanie:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \text{Mom}_O m_i \overline{v}_i = \sum_i \text{Mom}_O \overline{P}_i.$$

Dla wygody wysłowienia t. zw. zasady pól wyrażonej powyższem równaniem, nazwiemy sumę geometryczną momentów ilości ruchu względem punktu O , czyli $\sum \text{Mom}_O m_i \overline{v}_i = \overline{K}$, krętem układu. A zatem:

Dla dowolnie obranego punktu przestrzeni O jest prędkość zmiany (pochodna względem czasu) krętu jakiegokolwiek układu materjalnego (geometrycznie) równa ogólnemu momentowi sił zewnętrznych tegoż układu.

Posługując się metodą analityczną otrzymujemy z powyższego równania wektorowego trzy następujące:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = \sum (X_i z_i - Z_i x_i),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum (Y x_i - X_i y_i).$$

Wyrażenia w nawiasach po lewej stronie mają proste znaczenie kinematyczne, albowiem przedstawiają podwójne prędkości wycinkowe rzutów punktów m_i na odpowiadające płaszczyzny współrzędnych (fig. 110). Tem się tłumaczy nazwa „zasady pól”.

100. Szczególne przypadki i przykłady zastosowania zasady ruchu środka masy i zasady pól. Pierwsza zasada, wyrażona drugim z równań na początku art. 99, daje się także wysłowić w postaci: Prędkość zmiany pędu jakiegokolwiek układu materjalnego równa się wypadkowej sił zewnętrznych układu. (Przez pęd układu rozumiemy przytem sumę $\sum m_i \overline{v}_i$

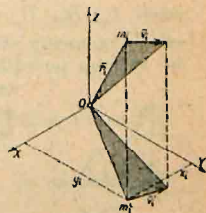


Fig. 110.

równą $M\bar{v}_0$, tj. pędowi całej masy skupionej w środku masy i poruszającej się z prędkością tego środka.)

W przypadku gdy nie ma sił zewnętrznych, albo gdy $\Sigma \bar{P}_i = 0$, jest $M\bar{v}_0 = \text{stałe}$, czyli środek masy układu porusza się jednostajnie i prostoliniowo, albo w szczególności jest w spoczynku.

Przykłady. 1. Dwa ciała o masach M_1 i M_2 są w ruchu postępowym prostoliniowym ze stałymi prędkościami v_1 i v_2 . To dowodzi, że siły wewnętrzne na nie działające albo się znoszą, albo też ich nie ma wcale. Skoro te ciała podczas ruchu się zderzą, to powstają między nimi wewnętrzne siły uderzenia, które sprawiają, że ich prędkości staną się inne po rozłączeniu się obu ciał w przypadku uderzenia (choćby częściowo) sprężystego. Oznaczwszy je przez w_1 i w_2 mamy według zasady ruchu środka masy:

$$M_1 \bar{v}_1 + M_2 \bar{v}_2 = M_1 \bar{w}_1 + M_2 \bar{w}_2.$$

W szczególnym przypadku zderzenia prostego i środkowego otrzymujemy zamiast powyższego równania wektorego równanie algebraiczne:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 w_1 + M_2 w_2.$$

2. Środek masy bomby rzuconej t. zw. miotaczem min opisuje z pominięciem wpływu oporu powietrza parabolę. Po wybuchu bomby w powietrzu poruszają się odłamki w różnych kierunkach, ale tak, że ich wspólny środek masy opisuje dalej parabolę do chwili, w której jeden lub więcej z odłamków uderzy o przeszkodę, czyli do chwili pojawienia się nowej siły zewnętrznej obok siły ciężkości.

Kręt układu $\bar{K} = \sum_i \text{Mom}_O m_i \bar{v}_i$ ma wogóle wartość zależną od obrotu punktu odniesienia O , chyba, że spełnia się warunek $\sum m_i \bar{v}_i = 0$. Tak się ma rzecz przedewszystkiem wtedy, gdy środek masy układu jest w spoczynku, albo też gdy ruch danego układu materialnego odnosimy do układu współrzędnych połączonego niezmiennie z owym środkiem masy.

Obliczenie krętu ciała sztywnego przy jego obrocie chwilowym około osi X (fig. 111) z prędkością kątową $\bar{\omega} = \omega \bar{i}$, daje

$$\bar{K} = \omega (I_x \bar{i} - D_z \bar{j} - D_y \bar{k}),$$

jeżeli I_x , D_z , D_y oznaczają odpowiednio moment bezwładności względem osi X i momenty zboczenia względem osi X, Y oraz X, Z układu współrzędnych, do którego początku O odnosimy kręt. Ten kręt nie leży przeto wogóle na osi obrotu z wyjątkiem ważnego szczególnego przypadku, gdy oś obrotu jest jedną z głównych osi bezwładności. Wówczas jest

$$\bar{K} = I \bar{\omega}.$$

W ogólnym przypadku można jeszcze inaczej przedstawić wektor \bar{K} , rozłożywszy obrót chwilowy z prędkością kątową $\bar{\omega}$ na trzy obroty około głównych osi bezwładności ciała (wzajemnie prostopadłych), przecinających się na danej osi obrotu, według schematu:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3.$$

Wtedy jest

$$\bar{K} = I_1 \bar{\omega}_1 + I_2 \bar{\omega}_2 + I_3 \bar{\omega}_3,$$

przyczem I_1, I_2, I_3 oznaczają odpowiadające momenty bezwładności.

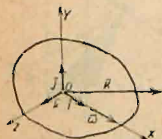


Fig. 111.

Skoro kręt ciała obracającego się około osi x , nie będącej osią główną, odniesiony do środka O obranego na tej osi, rzutujemy na tęż oś, to wartością rzutu, czyli składowej krętu w kierunku x jest

$$K' = I\omega.$$

W przypadku ustalonej osi obrotu otrzymujemy z zasady pól odrazu równanie ruchu obrotowego $I \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}$.

Kręt jakiegokolwiek układu materialnego, odniesiony do jego środka masy jako początku bezwzględnej osi współrzędnych jest stałym, jeżeli ogólny moment sił zewnętrznych względem tego środka jest stale równy zeru. Płaszczyzna prostopadła do krętu nazywa się wówczas płaszczyzną niezmienną.

Przykłady. 1. Ziemia nasza zachowuje się z wielkim przybliżeniem jak ciało sztywne, obracające się około głównej osi bezwładności przechodzącej przez jej środek masy. Jej kręt $I\omega$ musi być przeto stałym i niezależnym od sił wewnętrznych. Jeżeli zaś stygnięcie ziemi wywołuje jej kurczenie się, i co zatem idzie zmniejszanie momentu bezwładności I , to musi odpowiednio zwiększyć się prędkość kątową jej obrotu, aby $I\omega$ pozostało stałym. Temu przeciwdziałają poniekąd spadający na ziemię pył kosmiczny, który zwiększa I .

2. Tratwę pływającą na spokojnej wodzie można obrócić dokoła osi pionowej o dowolny kąt bez użycia wiosel itp., maszerując po torze zamkniętym na tratwie w tym samym kierunku. W najprostszym przypadku kołowego toru obsadzonego równomiernie załogą maszerującą ze stałą prędkością kątową (bezwzględną) ω_1 około środka masy tratwy osiągamy jej obrót w kierunku przeciwnym z prędkością kątową ω_2 , który trwa tak długo, aż załoga stanie. Albowiem kręt tratwy o momencie bezwładności I_1 był na początku równy zeru, a więc podczas marszu musiało być $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0$ (z pominięciem nieznacznego oporu ruchu). Stąd łatwo obliczyć ω_2 z danego ω_1 .

C. Uderzenie.

101. Określenia i pomocnicze twierdzenia z dynamiki. Uderzenie zachodzi, gdy poruszające się dwa ciała stale zetkną się podczas ruchu w ten sposób, że każde z nich stanowi przeszkodę dla ruchu drugiego. Uderzenie zmienia zatem ruch obu ciał, a zmianę tę określa — w myśl zasad dynamiki — siła uderzenia. Ta siła powstaje w miejscu stykania się ciał, i działa nie dłużej jak trwa zetknięcie się. Czas jej działania nazywa się trwaniem uderzenia i bywa zwykle bardzo krótki. W ciągu tego czasu siła uderzenia P rośnie od zera do pewnego maximum, a następnie maleje aż do zera. Jej działanie mierzy najdogodniej t zw.

$$\text{impuls siły} \equiv \bar{P} = \int_t^{t+\tau} P dt,$$

jeżeli τ oznacza trwanie uderzenia, a t chwilę początkową. Wektor $d\bar{P} = \bar{P} dt$ nazywa się impulsem chwilowym, albo elementarnym.

Jeżeli siła \bar{P} działa na punkt materialny o masie m , to stosownie do punktu 3. jest

$$\bar{P} dt = d(m\bar{v})$$

a stąd przez całkowanie w przedziale czasu τ :

$$m\bar{v}' - m\bar{v} = \int \bar{P} dt = \bar{P},$$

czyli: Geometryczny przyrost pędu (ilości ruchu) punktu materialnego równa się impulsowi odpowiadającej siły.

To twierdzenie pozostaje ważnem dla ciała skończonego, jeżeli ruch ciała był postępowym na początku działania siły \bar{P} , a impuls tej siły przechodzi przez środek masy ciała.

Impuls siły uderzenia można przeto mierzyć wielkością przyrostu pędu, jaki ona wywołuje. Wielkość zaś samej siły uderzenia zależy od trwania τ , i jest tem większa, im τ jest krótsze. Średnia wartość siły uderzenia jest bowiem równa ilorazowi z impulsu Π przez trwanie τ .

Jeżeli w początkowej chwili uderzenia ciała dotykają się ścianami regularnie zakrzywionemi, to wspólna normalna w punkcie zetknięcia się tych ścian nazywa się normalną uderzenia (osią uderzenia).

Uderzenie nazywa się środkowem lub mimośrodkowem (dla jednego z obu ciał) stosownie do tego czy normalna uderzenia przechodzi lub nie przez środek masy ciała. Uderzenie nazywamy nadto prostym lub ukośnem (dla jednego z obu ciał) zależnie od tego, czy prędkość środka masy tego ciała jest równoległa, czy też nachylona do normalnej uderzenia.

Ponieważ siły uderzenia są dla układu złożonego z obu ciał siłami wewnętrznymi, przeto uderzenie nie może zmienić wartości geometrycznej sumy pędów obu ciał. Skoro te ciała o masach m_1 i m_2 poruszały się przed uderzeniem postępowo z prędkościami v_1 i v_2 , a po uderzeniu (również postępowo) z prędkościami w_1 i w_2 ; wówczas

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2$$

bez względu na własności fizyczne obu ciał.

Natomiast całkowita energia kinetyczna obu ciał po uderzeniu jest wogóle mniejsza od takiejże energii przed uderzeniem. W idealnym przypadku równości energii przed i po uderzeniu mówimy o uderzeniu doskonale sprężystem.

W dobrem przybliżeniu mamy z takim uderzeniem do czynienia w przypadku zderzenia się przetaczanych ostrożnie na stacji wagonów kolejowych albo w przypadku kul bilardowych z koci ślonej.

102. Uderzenie środkowe i proste. Jeżeli np. kula o masie m_1 i prędkości v_1 zderzy się z kulą o masie m_2 i prędkości v_2 (fig. 112), to pod wpływem nacisku (siły) uderzenia w miejscu zetknięcia się nastąpi spłaszczenie obu ciał rosnące aż do chwili zrównania się ich prędkości. Wspólną wartość u tych prędkości po pierwszym „akcie“ uderzenia określa równanie pędów. W „akcie“ drugim wzajemny nacisk obu ciał maleje aż do zera. Impuls Π_2 tego nacisku zmienia pęd $m_1 u$ na $m_1 w_1$ i $m_2 u$ na $m_2 w_2$. Oznaczwszy przez Π_1 impuls nacisku (siły) uderzenia w akcie pierwszym, mamy:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$\Pi_1 = m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2); \quad \Pi_2 = m_1 (u - w_1) = m_2 (w_2 - u).$$

Gdy $\Pi_1 = \Pi_2$, to uderzenie nazywamy doskonale sprężystem; gdy $\Pi_2 = 0$ — doskonale niesprężystem (czyli plastycznym). Wogóle jest $\Pi_1 > \Pi_2$, a stosunek Π_2/Π_1 nazywamy spółczynnikiem uderzenia k . Jego wielkość określa równanie:

$$k = (w_2 - w_1)/(v_1 - v_2).$$

Strata energii wskutek uderzenia wyraża się wzorem:

$$E_{\text{str}} = (1 - k^2) \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

z którego czytamy, że największa strata zachodzi dla $k = 0$, tj. przy uderzeniu doskonale niesprężystem; zaś dla $k = 1$ (uderzenie doskonale sprężyste) jest strata równa 0.

W pierwszym przypadku da się strata przedstawić w formie:

$$E_{\text{str}} = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u - v_2)^2,$$

wyrażającej t. zw. twierdzenie Carnot'a.

Spółczynnik uderzenia k wyznacza się np. zapomocą spuszczenia swobodnie kuli m_1 z wysokości h na płytę z danego materiału i mierzenia wysokości h_1 , do której kula odskakuje. Wówczas $k = \sqrt{h_1/h}$, skoro oczywiście stratę $m_1 g (h - h_1)$ obliczymy nadto z powyższego wzoru przy założeniu $v_2 = 0$, $m_2 = \infty$, $v_1 = \sqrt{2gh}$.

103. Uderzenie proste mimosrodkowe. Przy założeniu upraszczającym, że płaszczyzna, przechodząca przez normalną uderzenia i środek masy ciała jest prostopadła do jego głównej centralnej osi bezwładności, a obadwa ciała były przed uderzeniem w ruchu postępowym — uderzenie sprawi, że ciało uderzone mimosrodkowo otrzyma ruch złożony z postępowego i obrotowego około wymienionej głównej osi bezwładności.

W przypadku np. przedstawionym na fig. 113 sprowadza się rozwiązanie do postaci podanej w art. 102, jeżeli wprowadzimy t. zw. masę sprowadzoną

$$m_2' = m_2 \frac{i_2^2}{e^2 + i_2^2},$$

przyczem i_2 jest ramieniem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy S_2 i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Wówczas wspólną prędkość u miejsca zetknięcia się obu ciał po pierwszym akcie uderzenia określa wzór:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2' v_2}{m_1 + m_2'}.$$

Jednoczesną prędkość u_0 środka S_2 i prędkość kątową ω w obrocie dają wzory:

$$u_0 = u - e\omega; \quad \omega = \frac{m_1 (v_1 - u) e}{m_2 i_2^2}.$$

Na prostej Y , przechodzącej przez S_2 i prostopadłej do X , leży oś obrotu chwilowego C zastępującego obrót ω około S_2 i przesunięty z prędkością u_0 . Punkty C tej osi nie zmieniają zatem wogóle prędkości wskutek uderzenia. Odległość $CA = l$ oblicza się z wzoru:

$$l = e + \frac{i_2^2}{e}.$$

Wzór ten daje zarazem długość sprowadzoną wahadła, jakiego tworzyło ciało m_2 , zawieszone bądź to na osi A , bądź też C . Stąd prawdziwość:

Ciało spoczywające i swobodnie uderzone mimosrodkowo wzdłuż prostej prostopadłej do jednej z głównych centralnych osi bezwładności obraca się około osi chwilowej do niej równoległej. Ta oś i normalna uderzenia są zamienne tak samo jak „środek wahnienia“ i „punkt zawieszenia“ wahadła.

104. Uderzenie ciała obracalnego dokoła osi stałej. Zadanie sprowadza się również do zadania uderzenia prostego i środkowego (art. 102) przy pomocy t. zw. masy sprowadzonej, określonej teraz jako iloraz z momentu bezwładności ciała przez kwadrat odległości normalnej uderzenia od osi obrotu (przy założeniu ich prostopadłości). Np. ciała, przedstawione na fig. 114, obracające się (przed uderzeniem) z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2

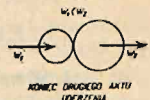


Fig. 112.

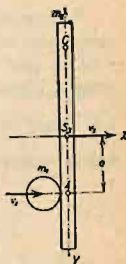


Fig. 113.



Fig. 114.

około osi O_1 i O_2 . A więc prędkości miejsca są: $v_1 = r_1 \omega_1$, $v_2 = r_2 \omega_2$. Po pierwszym akcie uderzenia będzie wspólną prędkością tego miejsca:

$$u = \frac{m_1' v_1 + m_2' v_2}{m_1' + m_2'}, \quad \text{jeżeli} \quad m_1' = \frac{I_1}{r_1^2}, \quad m_2' = \frac{I_2}{r_2^2};$$

zaś odpowiadającymi prędkościami kątowymi będą:

$$\omega_1' = \frac{u}{r_1}, \quad \omega_2' = \frac{u}{r_2}.$$

Uderzenie wywołuje w tym przypadku wogóle oddziaływanie uderzenia (wstrząśnienia) w łożyskach osi. Z p. 104 wynika jednak, że te oddziaływania znikną pod warunkiem, aby normalna uderzenia trafiała t. zw. środek uderzenia, identyczny ze środkiem wahnienia ciała rozpatrywanego jako wahadło na danej osi obrotu. Jeżeli zatem $r_2 = e + \frac{i_2^2}{e}$, to oś O_2 nie dozna wstrząśnięć wskutek uderzenia w A .

LITERATURA.

A. W języku polskim.

1. Autenrieth E.: Mechanika techniczna. Przekł. z niem. St. Patachke'go. Warszawa 1910.
2. Czopowski H.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1911 i 1916.
3. Franke J. N.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1899.
4. Kucharzewski F.: Mechanika w swym rozwoju historycznym. Warszawa 1934.
5. Routh J.: Statyka teoretyczna. Przekł. z ang. Z. Straszewicza. Warszawa 1916.
6. Straszewicz Z.: Nauka o ruchu. Warszawa 1918.

B. W językach obcych.

7. Appell P.: Cours de Mécanique rationnelle. II. wyd. Paryż 1905.
8. Appell P. & Dautheville S.: Précis de Mécanique rationnelle. Paryż 1910.
9. Appell P.: Traité de Mécanique rationnelle. Wyd. II, 3 t. Paryż 1902—1909.
10. Bouligand G.: Précis de Mécanique rationnelle. Paryż 1925.
11. Love A. E. H.: Theoretical Mechanics. II. wyd. Cambridge 1906. (Także w przekładzie niemieckim H. Polster'a. 1920. Springer).
12. Perry J.: Applied Mechanics. Londyn 1907. (Także w przekładzie niemieckim R. Schick'a. 1908. Teubner).
13. Routh E. J.: Rigid Dynamics. 2 tomy. Wyd. VII. Londyn 1905. (Także w przekładzie niemieckim A. Schepp'a. 1898. Teubner).
14. Autenrieth E. & Ensslin M.: Technische Mechanik. 1922. Springer.
15. Föppl A.: Vorlesungen über technische Mechanik. 6 tomów. 1900—1909. Teubner.
16. Hamel G.: Elementare Mechanik. 1912. Teubner.
17. Helmholtz H.: Dynamik diskreter Massenpunkte. Lipsk 1898. J. A. Barth.
18. Planck M.: Einführung in die allgemeine Mechanik, II. wyd. Lipsk 1920. Hirzel.
19. Pöschl Th.: Lehrbuch der technischen Mechanik. 1923. Springer.
20. Tallquist H.: Lehrbuch der technischen Mechanik. 2 tomy. Helsingfors 1903.
21. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. IV. Mechanik, 4 tomy. 1901—1908. Teubner.
22. Kirpiczew W. L.: Biesiedy o mechanikie (ross.). Petersburg 1907.