

skutecznego i wyznaczamy następnie środek ciężkości tego pola  $S'$ . Wystawimy w tym punkcie rzędną  $\sigma_s$ , otrzymamy  $\sigma_1$  z wykresu liniowego  $KLM$ .

**Uwaga.** Gdy środek obciążenia nie leży na osi symetrii przekroju, to odpowiadającą oś obojętną można znaleźć tylko przez próby.

## V. Praca odkształcenia.

**51. Energja potencjalna (praca odkształcenia) prętów (belek) prostych.** a) Przy działaniu samej siły podłużnej  $N$  (rozciągającej lub ściskającej) określa według ustępu 13 energję potencjalną elementu pręta o długości  $ds$  wyrażenie:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds = dL.$$

b) Przy działaniu samej siły poprzecznej  $T$  jest (w zwykłych przypadkach symetrii przekroju względem płaszczyzny obciążenia):

$$dL = \frac{1}{2} T \cdot \beta \cdot ds,$$

przyczem  $\beta$  jest średnią wartością kąta odkształcenia postaciowego w całym przekroju. Ta wartość da się przedstawić w postaci:

$$\beta = \alpha' \cdot \frac{T}{G \cdot F}.$$

A zatem:

$$dU = \frac{1}{2} \alpha' \cdot \frac{T^2}{G F} ds = dL \dots \dots \dots (96)$$

Wartość  $\alpha'$  znajdujemy z porównania tego wyrażenia z wyrażeniem dla  $dU$  w postaci:

$$dU = ds \int_{(F)} \frac{\tau^2}{2G} dF,$$

jeżeli, znając rozmieszczenie  $\tau$  w przekroju, wykonamy całkowanie na obszarze pola  $F'$ .

c) Przy działaniu samego momentu skręcającego  $M_s$  mamy:

$$dL = \frac{1}{2} M_s \cdot d\varphi,$$

jeżeli  $d\varphi$  jest kątem skręcenia na długości  $ds$  (str. 1113).

Zważywszy, że

$$d\varphi = \frac{M_s}{\Gamma} ds,$$

jeżeli  $\Gamma = GJ_{\text{red}}$  oznacza sztywność skręcenia, mamy:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{G \cdot J_{\text{red}}} ds = dU \dots \dots \dots (96')$$

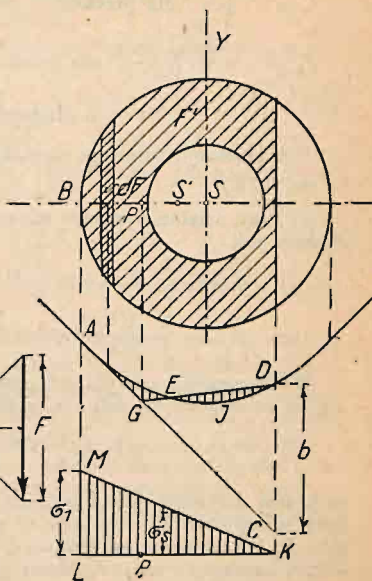


Fig. 181.

przyczem:

$$J_{\text{red}} = J_P \text{ dla przekrojów okrągłych,}$$

$$J_{\text{red}} = \frac{F^4}{\Psi^3 J_P} \text{ dla przekrojów pełnych, wymienionych na str. 1114,}$$

$$J_{\text{red}} = \infty \frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3 \text{ dla przekrojów składanych z wąskich prostokątów}$$

o długościach  $h_i$  i szerokościach  $\delta_i$ .

(Dla przekroju rurowego prostokątnego podano przybliżoną wartość  $J_{\text{red}}$  na str. 1116.)

d) Przy działaniu samego momentu zginającego  $M$  w płaszczyźnie głównej jest

$$dL = \frac{1}{2} M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} M \cdot \frac{ds}{\rho} \text{ (por. wzór } D, \text{ str. 1122), czyli}$$

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} \cdot ds = dU \dots \dots \dots (97)$$

We wszystkich powyższych przypadkach ma wyrażenie dla energii potencjalnej elementarnego odcinka pręta o długości  $ds$  postać:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{(\text{siła lub moment})^2}{\text{„sztywność”}} \cdot ds \dots \dots \dots (97a)$$

przyczem sztywność pręta w rozpatrywanym przekroju mierzy iloczyn modułu sprężystości  $E$ , względnie  $G$ , przez wielkość geometryczną o wymiarze pola  $F$ , lub momentu bezwładności  $J$ , zależnie od tego, czy w liczniku jest (siła)<sup>2</sup>, czy też (moment)<sup>2</sup>. Mamy tedy:

$$\begin{aligned} EF &= \text{sztywność rozciągania lub ściskania,} \\ \frac{1}{\alpha'} \cdot GF &= \text{„} \quad \quad \quad \text{ścinania,} \\ EJ &= \text{„} \quad \quad \quad \text{zginania,} \\ GJ_{\text{red}} &= \text{„} \quad \quad \quad \text{skręcania.} \end{aligned}$$

Przy jednoczesnem działaniu siły podłużnej  $N$ , poprzecznej  $T$ , momentu skręcającego  $M_s$  i zginającego  $M$ , otrzymujemy (dzięki poczynionym założeniom upraszczającym):

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} ds + \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds + \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_{\text{red}}} ds + \frac{1}{2} \alpha' \frac{T^2}{GF} ds \dots (79b)$$

Gdyby w jeszcze ogólniejszym przypadku moment zgięcia nie leżał w płaszczyźnie głównej przekroju, to rozłożywszy go na dwa momenty składowe  $M_1$  i  $M_2$  w płaszczyznach głównych, otrzymalibyśmy zamiast pierwszego wyrazu w powyższym wzorze dwa następujące:  $\frac{1}{2} \frac{M_1^2}{EJ_1} + \frac{1}{2} \frac{M_2^2}{EJ_2}$ . ( $J_1, J_2$  oznaczają przytem odpowiadające główne momenty bezwładności przekroju.)

Uwaga. Powyższy wzór stosuje się z dostatecznem przybliżeniem do obliczenia energii potencjalnej prętów zakrzywionych (łuków), o ile promień krzywizny jest dość wielki w porównaniu do wymiarów przekroju, czyli jest ważny dla prętów słabo zakrzywionych.

**52. Energia potencjalna (praca odkształcenia) układu sprężystego.** Gdy układ jest złożony z prętów prostych lub słabo zakrzywionych, to wyznacza się dla każdego z prętów siłę podłużną (normalną)  $N$ , poprzeczną  $T$ , moment zgięcia  $M$  i moment skręcenia  $M_s$  (jako funkcje współrzędnych środka

przekroju) i stosując wzór (97, b) dla energii potencjalnej elementu o długości  $ds$ , sumuje się wyrażenia  $dU$  dla całego układu.

Jeżeli punkty działania  $a, b, \dots m, n, \dots$  sił  $P_a, P_b, \dots P_m, P_n, \dots$  doznają przesunięć sprężystych  $\delta_a, \delta_b, \dots \delta_m, \delta_n, \dots$ ), przyczem:

1. materiał układu podlega prawu Hooke'a i

2. działania sił zewnętrznych są od siebie nawzajem niezależne, tj. zachodzi zasada superpozycji, natenczas:

$$\delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n + \dots \quad (98)$$

czyli  $\delta_i = \sum \delta_{ik} P_k \quad (i, k = a, b, c, \dots m, n, \dots)$

a więc przesunięcia („ugięcia“) są linjowemi jednorodnemi funkcjami sił zewnętrznych, nadto zaś

$$L = U = \sum_i \frac{1}{2} P_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_i \delta_{ik} P_i P_k \quad (98a)$$

czyli energja potencjalna jest jednorodną kwadratową funkcją sił zewnętrznych.

W obu powyższych twierdzeniach można którakolwiek z sił  $P_i$  zastąpić przez moment  $M_i$ , a odpowiadające przesunięcie  $\delta_i$  przez kąt obrotu  $\varphi_i$  przekroju, na który działa moment. Twierdzenia te stosują się zatem do uogólnionych sił i uogólnionych przesunięć. Spółczynniki  $\delta_{ik}$ , zależne jedynie od postaci i materiału układu, nazywamy wielkościami (liczbami) wpływowemi tego układu. Skoro bowiem na układ działa tylko jedna siła zewnętrzna, np.  $P_m$  (wraz z reakcjami nieruchomych punktów podparcia), przyczem  $P_m = 1$ , to  $\delta_n = \delta_{mn}$  czyli  $\delta_{mn}$  określa wpływ jednostki siły umieszczonej w przekroju (punkcie)  $m$  na ugięcie w przekroju  $n$ . Rozwiązawszy równanie (98) względem sił  $P_k$  otrzymujemy te siły jako linjowe funkcje przesunięć, a po wstawieniu tych wyrażeń w równanie (98a) przekonujemy się, że energja potencjalna układu jest także jednorodną kwadratową funkcją uogólnionych przesunięć (uogólnionych spółrzednych).

**Przykład.** Na końcu  $A$  belki  $AB$  (fig. 182) swobodnie podpartej działa moment (zginający)  $M_1$ , zaś na środek siła  $P_2$ . Z równania linii ugięcia znajdujemy kąt obrotu przekroju  $A$ :

$$\vartheta_1 = \frac{M_1 l}{3 EJ} + \frac{P_2 l^2}{16 EJ},$$

zaś ugięcie pod siłą  $P_2$ :

$$f_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{M_1 l^2}{EJ} + \frac{P_2 l^3}{48 EJ}.$$

A zatem praca odkształcenia:

$$L = \frac{1}{2} M_1 \vartheta_1 + \frac{1}{2} P_2 f_2 =$$

$$= \frac{l}{6 EJ} \left( M_1^2 + \frac{3}{8} l \cdot M_1 \cdot P_2 + \frac{l^2}{16} P_2^2 \right) = \frac{24}{7} \cdot \frac{EJ}{l} \cdot \left( \vartheta_1^2 - \frac{6}{l} \vartheta_1 f_2 + \frac{16}{l^2} f_2^2 \right).$$

**Uwaga.** Jakkolwiek w praktyce mamy najczęściej do czynienia z przypadkami, w których uogólnione przesunięcia i siły podlegają zasadzie superpozycji, to jednak pamiętać należy o przypadkach wyjątkowych, w których ta zasada nie zachodzi, w których zatem energja potencjalna układu nie jest jednorodną kwadratową funkcją uogólnionych sił, względnie przesunięć. Jeden z najważniejszych przykładów stanowi belka zginania i jednocześnie ścisłana podłużnie. (Por. rozdz. IX., A)

**53. Twierdzenie Castigliano'a.** Jeżeli energję potencjalną  $U$  układu sprężystego przedstawimy w postaci funkcji uogólnionych sił zewnętrz-

<sup>1)</sup> Wielkość  $\delta$  oznaczają tutaj składowe całkowitych przesunięć, wzięte w kierunku odpowiadającej siły  $P$ .

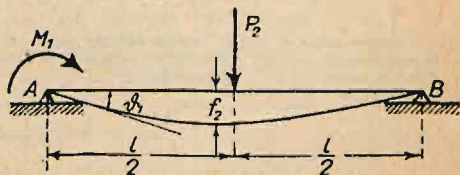


Fig. 182.



trzących jako zmiennych niezależnych  $P_i$ , a funkcja ta jest kwadratową jednorodną, to

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i, \quad \text{czyli}$$

pochodna cząstkowa energii potencjalnej układu względem jakiegokolwiek (uogólnionego) siły zewnętrznej równa się odpowiadającemu przesunięciu.

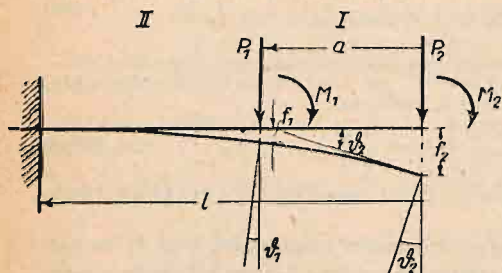


Fig. 183.

[Przymiotnikiem „odpowiadający“ określamy w przypadku siły  $P_i$  składową przesunięcia jej punktu działania, wziętą w kierunku siły; w przypadku zaś momentu (pary sił) kąt obrotu przekroju, względem osi równoległej do wektora momentu.]

**Przykład.** Na swobodny koniec belki prostej, doskonale utwierdzonej drugim końcem, (fig. 183) działa siła  $P_2$  i para zginająca o momencie  $M_2$ . Chcemy

obliczyć ugięcie  $f$  i kąt obrotu  $\theta_2$  przekroju końcowego oraz ugięcie  $f_1$  i kąt  $\theta_1$  przekroju odległego o  $a$  od końca (przekroju  $a$ ). Pomijając wpływ sił poprzecznych, mamy:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx, \quad \text{przyczem} \quad M = M_2 + P_2 x.$$

A więc:

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial P_2} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_2 + P_2 x) x dx = \frac{M_2 l^2}{2EJ} + \frac{P_2 l^3}{3EJ},$$

$$\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_2} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_2 + P_2 x) dx = \frac{M_2 l}{EJ} + \frac{P_2 l}{2EJ}.$$

Ażeby obliczyć  $f_1$  i  $\theta_1$ , wprowadzamy pomocniczą siłę  $P_1$  i parę  $M_1$  w przekroju  $a$ . Wyrażenie dla energii potencjalnej będzie teraz sumą dwu części, odpowiadających działom belki I i II, a mianowicie:

$$U_I = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_I^2}{EJ} dx \quad \text{ i } \quad U_{II} = \frac{1}{2} \int_a^l \frac{M_{II}^2}{EJ} dx.$$

A zatem:

$$\begin{aligned} f_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} &= \int_0^a \frac{M_I}{EJ} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial P_1} dx + \int_a^l \frac{M_{II}}{EJ} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial P_1} dx = \\ &= 0 + \frac{1}{EJ} \int_a^l [M_1 + M_2 + P_1(x-a) + P_2 x](x-a) dx. \end{aligned}$$

Kładąc dalej wielkości pomocnicze  $P_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$ , otrzymujemy:

$$f_1 = \frac{1}{EJ} \left[ M_2 \frac{(l-a)^2}{2} + P_2 (l-a)^2 \frac{2l+a}{6} \right].$$

Podobnież mamy:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_0^a \frac{M_I}{EJ} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial M_1} dx + \int_a^l \frac{M_{II}}{EJ} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial M_1} dx = \\ &= 0 + \frac{1}{EJ} \int_a^l [M_1 + M_2 + P_1(x-a) + P_2 x] \cdot 1 \cdot dx,\end{aligned}$$

z czego po podstawieniu  $M_1 = 0$ ,  $P_1 = 0$  i scałkowaniu:

$$\vartheta = \frac{1}{EJ} \left[ M_2(l-a) + \frac{1}{2} P_2(l^2 - a^2) \right]$$

54. Zasada najmniejszości pracy odkształcenia wypływa jako wniosek z twierdzenia Castigliano'a. Pomiedzy danymi obciążeniami jako siłami zewnętrznymi, a nieznanymi reakcjami podpór lub siłami wewnętrznymi układu, zachodzą związki określone warunkami równowagi. Jeżeli liczba  $r$  od siebie niezależnych równań równowagi jest mniejsza od liczby tych niewiadomych  $m$ , natenczas przez  $m-r$  niewiadomych, zwanych wielkościami hiperstatycznymi (lub statycznie niewyznaczalnymi), dowolnie zresztą obranych, da się wyrazić  $r$  pozostałych wielkości. Oznaczywszy obrane wielkości hiperstatyczne przez  $X, Y, Z, \dots$  mamy:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0 \quad \dots \quad (102)$$

jako dodatkowe równania warunkowe, które wraz z warunkami równowagi wystarczają do obliczenia wszystkich reakcyj, lub sił wewnętrznych. Te równania są wyrazem następującego prawda:

Wielkości hiperstatyczne mają wartości odpowiadające najmniejszości pracy odkształcenia (energji potencjalnej) układu sprężystego.

Przykład. Belka pozioma  $AB$  (fig. 184), obciążona równomiernie  $q \text{ kg/m}$ , utwierdzona doskonale końcem  $A$ , opiera się (przegubowo) końcem  $B$  na słupie  $BC$  o wysokości  $h$  i przekroju  $F$ . Szukane reakcje dostarczają trzech niewiadomych: momentu utwierdzenia  $M_0$ , pionowej reakcji podporowej  $A$  i takież reakcji w  $B$  i  $C$ . Tę ostatnią obieramy za wielkość hiperstatyczną  $X$ . Wtedy reakcja  $A = ql - X$  (według warunku rzutów), a  $M_0 = -\frac{q l^2}{2} + Xl$  (według warunku momentów).

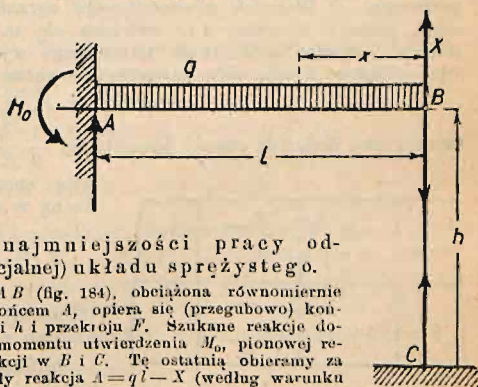


Fig. 184.

Energja potencjalna belki (z pominięciem wpływu sił poprzecznych):

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx, \quad \text{przyczem} \quad M = Xx - \frac{q x^2}{2}.$$

Energja potencjalna słupa:

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{X^2 \cdot h}{E' \cdot F}.$$

Warunek minimum daje:

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_1 + U_2) = 0 = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \frac{X \cdot h}{E' \cdot F}.$$

Po wstawieniu  $\frac{\partial M}{\partial X} = x$ , scałkowaniu i rozwiązaniu względem  $X$  znajdujemy:

$$X = \frac{3}{8} q l \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 E J \cdot h}{E' F \cdot F}}.$$

Gdy w szczególności  $h = 0$ , to podpora  $B$  staje się stałą, a  $X = \frac{3}{8} q l$ . Im większa jest wysokość słupa  $h$  i sztywność zginania belki  $EJ$ , a zarazem im mniejsza jest sztywność ściskania słupa i rozpiętość belki  $l$ , tem mniejsza część obciążenia  $q l$  przenosi się na podporę  $B$ .

Uwaga. Jeżeli jeden z punktów podparcia, np. odpowiadający hiperstatycznej reakcji  $X$ , doznał niezależnie od obciążenia małego przesunięcia składowego  $\delta_x$  w kierunku  $X$ , np. z powodu niedokładności wykonania konstrukcji, to odpowiadające równanie warunkowe z (102) zamieni się na następujące:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \delta_x.$$

Niechaj np. w zadaniu powyżej rozpatrzonem będzie podpora  $C$  osadzona o  $\delta_x$  za wysoko lub za nisko. Wówczas:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{X F}{3 E J} - \frac{1}{8} \frac{q l^3}{E J} + \frac{X \cdot h}{E' F} = \pm \delta_x,$$

a stąd:

$$X = \frac{3}{8} q l \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 E J \cdot h}{E' F \cdot F}} \pm \frac{3 E J}{F^2} \delta_x.$$

**55. Wpływ ogrzania na energję potencjalną obciążonego pręta prostego.** *a)* Wskutek równomiernego ogrzania o  $t^\circ \text{C}$  elementarnego odcinka pręta o długości  $ds$ , zwiększa się ta długość o  $\Delta ds = \alpha \cdot t \cdot ds$ , jeżeli  $\alpha$  oznacza współczynnik termicznego wydłużenia materiału. A zatem siła podłużna  $N$  jako siła wewnętrzna wykona przytem pracę:

$$d L_t = N \cdot \alpha \cdot t \cdot ds,$$

którą trzeba dodać do energii potencjalnej  $\frac{1}{2} \frac{N^2}{E F} ds$ , ażeby otrzymać całkowitą energję potencjalną, nagromadzoną w elemencie o długości  $ds$ , tj.

$$d U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E F} ds + N \cdot \alpha \cdot t \cdot ds.$$

(Momenty i siły poprzeczne nie wykonywa przytem pracy.)

*b)* Skoro tenże element belki ogrzeje się nierównomiernie tak, iż temperaturę  $t$  włókna odległego o  $v$  od osi obojętnej określa równanie linjowe:

$$t = t_0 + v \cdot \frac{t_g - t_d}{h},$$

przyczem  $t_0$  oznacza temperaturę warstwy obojętnej,  $t_g$  i  $t_d$  górnej i dolnej warstwy skrajnej, zaś  $h$  wysokość belki (fig. 185), natenczas wewnętrzna

Fig. 185.

siła podłużna  $N$  wykona dodatkową pracę  $N \cdot \alpha \cdot t_0 \cdot ds$ , zaś moment zginający  $M$  dodatkową pracę  $M \cdot d \varphi_t$ .

Kąt

$$d \varphi_t = \frac{\alpha (t_g - t_d) \cdot dx}{h} \dots \dots \dots (105)$$



określa przytem wzajemne nachylenie obu końcowych przekrojów elementu, wywołane ogrzaniem. A zatem dodatkową pracę  $dL_t$ , o którą zwiększa się energia potencjalna  $dU$  elementu, określa równanie:

$$dL_t = \frac{M \cdot \alpha \cdot (t_g - t_d)}{h} ds + N \cdot \alpha \cdot t_0 ds \quad \dots (105 a)$$

Uwaga. Każdy z wyrazów dodatkowej pracy może wypaść dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy siły wewnętrzne działają zgodnie z odkształceniem termicznym, czy też przeciwnie. Skoro np. moment zginający działa tak, że górne włókna są rozciągane a dolne ściskane, to przy  $t_g > t_d$  będzie  $dL_t$  dodatnie.

Przykład. Belka, obu końcami doskonale utwierdzona, zmienia temperaturę włókna górnego i dolnego (fig. 186) odpowiednio o  $t_g$  i  $t_d$ ; obliczyć wywołany przez to moment utwierdzenia  $M_0$  i siłę podłużną  $X$ .

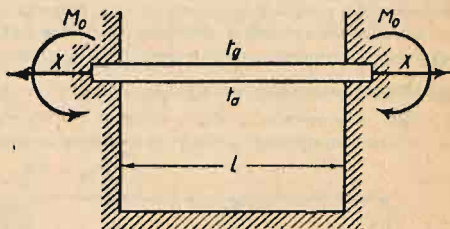


Fig. 186.

Dla pracy odkształcenia (wskutek niewiadomych) sił zewnętrznych mamy wyrażenia:

$$\frac{1}{2} \frac{M_0^2}{EJ} \cdot l + \frac{1}{2} \frac{X^2}{EF} \cdot l,$$

zaś dla pracy dodatkowej:

$$+ M_0 \frac{\alpha(t_g - t_d) \cdot l}{h} + X \cdot \alpha t_0 l,$$

przyczem  $t_0 = \frac{t_g + t_d}{2}$  przy założeniu przekroju o wysokości  $h$  symetrycznego względem osi obojętnej. Przyrównyując pochodne sumy obu prac względem wielkości statycznie niewyznaczalnych  $M_0$  i  $X$  do zera, mamy:

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{EJ} + \frac{\alpha(t_g - t_d) l}{h} = 0, \text{ czyli } M_0 = -\frac{EJ}{h} \alpha(t_g - t_d),$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{X}{EF} \cdot l + \alpha t_0 l = 0, \text{ czyli } X = -EF \cdot \alpha \cdot t_0.$$

## 56. Zasada wzajemności przesunięć. Prawa Betti'ego i Maxwell'a.

Jeżeli (uogólnionym) siłom  $P_a, P_b, P_c, \dots, P_m, P_n, \dots$ , działającym na punkty (przekroje)  $a, b, c, \dots, m, n, \dots$  układu sprężystego, odpowiadają przesunięcia  $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \dots, \delta_m, \delta_n, \dots$  tychże punktów, innej zaś grupie sił  $P'_a, P'_b, \dots, P'_m, \dots$ , działających na te same punkty, odpowiadają przesunięcia  $\delta'_a, \delta'_b, \dots, \delta'_m, \dots$ , natenczas zachodzi równanie:

$$P_a \delta'_a + P_b \delta'_b + \dots = P'_a \delta_a + P'_b \delta_b + \dots \quad (106)$$

wyrażające uogólnione przez Betti'ego (1876) prawo wzajemności przesunięć.

Ponieważ  $\delta_i = \delta_{ia} P_a + \delta_{ib} P_b + \dots + \delta_{ii} P_i + \delta_{ik} P_k + \dots$

$$\delta'_k = \delta_{ka} P'_a + \delta_{kb} P'_b + \dots + \delta_{ki} P'_i + \delta_{kk} P'_k + \dots$$

przeto przyjąwszy, że wszystkie siły są równe zero z wyjątkiem  $P_k = 1$  i podobnie, że wszystkie  $P'$  są równe, z wyjątkiem  $P'_i = 1$ , otrzymujemy z równania (106):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (106 a)$$

czyli prawo Maxwell'a (1864): Wpływ siły  $P_k$  na przesunięcie punktu działania siły  $P_i$  w jej kierunku jest taki sam, jak wpływ siły  $P_i$  na przesunięcie punktu działania siły  $P_k$  w kierunku tejże siły  $P_k$ .

**Przykład.** Siła pionowa  $P_i = 1$ , działająca w dowolnym przekroju  $i$  belki poziomej ramy (fig. 187), opartej na przegubie stałym  $A$  i poziomo przesuwalnym  $B$ , wywołuje przesunięcie poziome  $\delta_{bi}$  tego przegubu. Nawzajem siła pozioma  $P_b = 1$ , działająca na  $B$ , wywołuje ugięcie pionowe przekroju  $i$  o wielkości  $\delta_{ib} = \delta_{bi}$ .

I. Jeżeli obie podpory ramy są przegubami stałymi, to obciążenia pionowe belki wywołują w tych przegubach reakcje o składowych pionowych statycznie wyznaczalnych, lecz niewyznaczalnej składowej poziomej  $X$  (parcie poziome). Do jej obliczenia posłuży zasada superpozycji w połączeniu z prawem Maxwell'a. W tym celu czynimy najpierw przegub  $B$  przesuwalnym i działamy nań siłą poziomą  $= 1$ . Ta siła wywołuje przesunięcie poziome tego przegubu  $\delta_{bb}$  i przesunięcie pionowe punktów  $\delta_{ib}$ . Można je wyznaczyć rachunkowo lub wykreślić. Następnie obciążamy belkę ramy siłami pionowymi  $P_i$ , które wywołają przesunięcie poziome przegubu  $B$  o wielkości  $\sum_i P_i \delta_{bi}$ . Ta suma jest znana, gdyż dzięki prawu Maxwell'a jest  $\delta_{bi} = \delta_{ib}$ .

Przy jednoczesnym działaniu obciążeń  $P_i$  i siły poziomej  $X$  (w przegubie  $B$ ), powstanie na zasadzie superpozycji poziome przesunięcie przegubu  $B$  o wielkości:

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - X \delta_{bb}$$

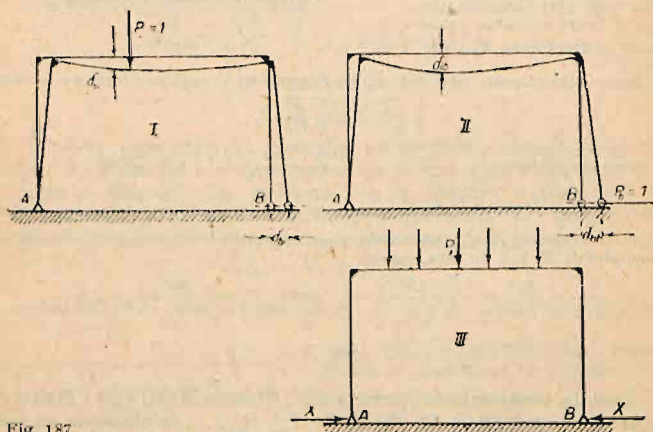


Fig. 187.

które musi się równać zero, jeżeli  $X$  jest poziomą reakcją przegubu  $B$  zupełnie ustalonego względem  $A$ . Równanie warunkowe:

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - X \delta_{bb} = 0$$

pozwala wtedy obliczyć wartość reakcji poziomej, wywołanej dowolnem obciążeniem w przypadku przegubów zupełnie ustalonych.

II. Uwzględniając ogrzanie (równomierne) całej ramy, które w przypadku swobodnej przesuwalności przegubu  $B$  spowodowałoby jego przesunięcie o  $\delta_{bt}$  w kierunku  $-X$ , mamy równanie warunkowe dla  $X$ :

$$\sum_i P_i \delta_{bi} + \delta_{bt} - X \cdot \delta_{bb} = 0.$$

III. Przyjmując, że ustalenie przegubów nie jest zupełne, przyczem wskutek poddania się podpór lub jakichkolwiek innych przyczyn zachodzi przesunięcie przegubu  $B$  o  $\delta_b$  w kierunku  $-X$ , otrzymujemy jako równanie dla  $X$ :

$$\sum_i P_i \delta_{bi} - \delta_b - X \cdot \delta_{bb} = 0.$$

**Uwaga.** Ściśle ważność zasady wzajemności przesunięć jest oczywiście związana z ważnością zasady superpozycji, na której się opiera.

## 57. Ogólne równanie warunkowe dla reakcyj hiperstatycznych.

I. Gdy reakcje  $X_a, X_b, X_c, \dots$  nie wykonują pracy przy odkształceniu





## VI. Pręty zakrzywione.

Technicznie ważne przypadki pozwalają najczęściej na elementarne przybliżone obliczenia teoretyczne przy następujących założeniach:

1. Oś pręta jest krzywą płaską, a przekrój stały lub słabo zmienny w sposób ciągły.

2. Siły zewnętrzne leżą w płaszczyźnie osi pręta, która jest zarazem płaszczyzną główną dla każdego przekroju poprzecznego.

3. Materiał pręta podlega prawu Hooke'a i zasadzie superpozycji.

58. Obliczenie naprężeń. Sprowadzając przy powyższych założeniach siły zewnętrzne części pręta odciętej rozpatrywanym przekrojem (np. części prawej) do siły wypadkowej  $R$  (fig. 189), trafiającej przekrój w odległości  $v$  od środka  $O$ , mamy wogóle do czynienia z siłą podłużną  $N$ , poprzeczną  $T$  i momentem zginającym

$$M = N v = R v.$$

Naprężenia styczne, uwarunkowane siłą poprzeczną  $T$ , grają u prętów zakrzywionych najczęściej jeszcze mniejszą rolę niż u prętów prostych. W razie potrzeby można je w przybliżeniu wyznaczyć tak, jak gdyby pręt był prosty.

Naprężenia normalne składają się z naprężeń  $\sigma_N$ , wywołanych siłą podłużną i naprężeń  $\sigma_{zg}$ , wywołanych momentem zginającym  $M$ . Pierwsze

można z dostateczną dokładnością przyjąć jako rozłożone równomiernie w przekroju.

A zatem:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}.$$

Drugie zaś oblicza się (również w przybliżeniu) z t. zw. „hipotezy płaskich przekrojów“ (jak dla prętów prostych), a właściwie z przyjęcia linjowego rozkładu wydłużeń podłużnych włókien elementarnych, na obszarze przekroju poprzecznego. Z tego przyjęcia wynika hiperboliczny rozkład naprężeń zginających  $\sigma_{zg}$  w zależności od  $\eta$ , tj. odległości włókna od głównej osi przekroju prostopadłej do płaszczyzny obciążenia. Przyjmując, że dodatni kierunek rzędnych  $\eta$  wskazuje od środka krzywizny osi pręta, a dodatni moment  $M$  zwiększa krzywiznę, czyli zmniejsza promień krzywizny  $r$ , mamy:

$$\sigma_{zg} = \frac{M}{r F} + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{r F} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \quad (\text{wzór III. przybliżenia}),$$

przyczem stałą przekroju  $k$  (zawsze dodatnią) określa równanie:

$$k = - \frac{1}{F} \int \frac{\eta dF}{r + \eta}.$$

Całkowanie rozpościera się tutaj na całe pole przekroju. Hiperbola wykresu naprężeń zginających przecina oś  $\eta$  w odległości:

$$\eta_0 = - \frac{k}{1 + k} \cdot r$$

od środka przekroju i ma asymptotę prostopadłą do przekroju, wystawioną w środku krzywizny osi pręta. Oś obojętna przy czystym zginaniu zbacza zatem od środka przekroju ku wklęsłej stronie osi pręta.

Liczba stała przekroju  $k$  maleje szybko z krzywizną  $\frac{1}{r}$  osi pręta przy niezmiennych wymiarach poprzecznych i da się wyznaczyć rachunkiem

lub wykreślnie. Jeżeli, jak to często bywa, rozmiary poprzeczne są niewielkie w stosunku do promienia  $r$  (łuki mostowe, sklepienia itp.), to z dostatecznym przybliżeniem jest:

$$k = \infty \frac{J}{r^2 F}, \text{ zaś } \eta_0 = -\frac{i^2}{r^2 + i^2} \cdot r,$$

przyczem  $J$  oznacza moment bezwładności przekroju względem osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny obciążenia, a  $i$  odpowiadające ramię bezwładności. Wtedy:

$$\sigma_{zg} = \infty \frac{M}{r F} + \frac{M}{J} \cdot \frac{r \eta}{r + \eta} \text{ (wzór II. przybliżenia).}$$

Dla jeszcze większych wartości  $r$  można pierwszy wyraz pominąć wobec drugiego, a w drugim zastąpić ułamek  $\frac{r}{r + \eta}$  przez 1.

A zatem w pierwszym przybliżeniu mamy:

$$\sigma_{zg} = \infty \frac{M}{J} \eta,$$

jak dla prętów prostych.

Przy jednoczesnem działaniu siły podłużnej  $N$  i momentu zginającego  $M (= Nv)$  określają tedy naprężenia normalne wzory następujące:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \cdot \eta \dots \dots \dots \text{ (w I. przybliżeniu dla bardzo wielkich } r \text{).}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r F} + \frac{M}{J} \cdot \frac{r \eta}{r + \eta} \dots \dots \dots \text{ (w II. przybliżeniu dla dość wielkich } r \text{).}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r F} + \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{r F} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \dots \dots \dots \text{ (w III. przybliżeniu).}$$

59. Odkształcenia osi pręta. Siła podłużna  $N$  nie zmienia krzywizny pręta, a tylko zmienia długość elementu  $ds$  jego osi w stosunku:

$$\epsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{E F}.$$

Przyrost długości elementu  $ds$ , wywołany (dodatnim) momentem  $M$ , określa równanie:

$$\Delta ds = \frac{M}{r E F} \cdot ds.$$

Całkowitą zmianę długości  $s$  osi pręta określa przeto równanie:

$$\Delta s = \int \left( \frac{M}{r E F} + \frac{N}{E F} \right) ds.$$

Kąt elementarny  $d\alpha$  między dwoma sąsiednimi przekrojami przed odkształceniem zmienia się wskutek siły podłużnej o

$$\Delta d\alpha = \frac{N}{E F} d\alpha,$$

zaś wskutek momentu  $M$  o

$$\Delta d\alpha = \frac{M}{r E F} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) d\alpha,$$

przyczem  $k$  ma to samo znaczenie co w ust. 56.



Całkowitą zmianę kąta  $\Delta \alpha$  na długości  $s$  przedstawia zatem wzór:

$$\Delta \alpha = \int \left[ \frac{M}{r^2 E F'} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) + \frac{N}{r E F'} \right] ds \quad \text{w III. przybliżeniu,}$$

albo wzór: 
$$\Delta \alpha = \int \left[ \frac{M}{E J} \left( 1 + \frac{r^2}{r^2} \right) + \frac{N}{r E F'} \right] ds \quad \text{w II. przybliżeniu,}$$

lub wreszcie: 
$$\Delta \alpha = \int \left( \frac{M}{E J} + \frac{N}{r E F'} \right) ds \quad \text{w I. przybliżeniu.}$$

60. Linja ugięcia. Zmianę krzywizny  $\frac{1}{r}$  na  $\frac{1}{\rho}$ , wywołaną momentem  $M$ , i siłą podłużną  $N$  określa równanie:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{k r^2 E F'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{r E F'} + \frac{N}{E F'}} \quad (\text{w III. przybliżeniu}),$$

albo 
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E J} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{r E F'} + \frac{N}{E F'}} \quad (\text{w II. przybliżeniu}),$$

albo wreszcie 
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E J} \quad (\text{w I. przybliżeniu dla łuków niezbyt płaskich}).$$

Jeżeli oś pręta jest łukiem koła o promieniu  $R$ , to obracając początek  $O$  biegunowego układu współrzędnych (fig. 190) w środku koła i oznaczając przez  $R + y$  promień wodzący zgiętej osi, mamy przy założeniu, że  $y$  i  $\frac{dy}{d\varphi}$  są bardzo małe wobec  $R$ :

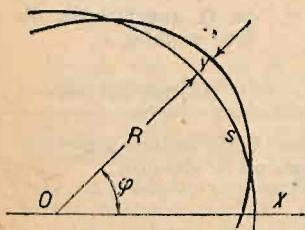


Fig. 190.

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = -\frac{y}{R^2} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{y}{R^2},$$

przyczem  $R d\varphi = ds$ . Równanie różniczkowe linii ugięcia w pierwszym przybliżeniu przybiera zatem postać:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{M}{E J} - \frac{y}{R^2},$$

odpowiadającą przybliżonemu równaniu linii ugięcia prętów prostych.

61. Energia potencjalna (praca odkształcenia). Pomijając wpływ naprężeń ścinających i odkształceń poprzecznych mamy w III. przybliżeniu:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{M^2}{r^2 E F'} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{E F'} ds + \frac{M N}{r E F'} ds,$$

jako wyrażenie dla energii potencjalnej elementu pręta o długości  $ds$ .

W II. przybliżeniu (tj. przy podstawieniu  $k = \frac{J}{F r^2}$ ) będzie:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E J} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{r^2 E F'} ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{E F'} ds + \frac{M N}{r E F'} \cdot ds.$$

Nakoniec w I. przybliżeniu, tj. z opuszczeniem wyrazu drugiego i czwartego, otrzymamy to samo co dla prętów prostych.

## VII. Płyty.

62. Zgięcie walcowe płyty. Sztywność zginania. Założywszy, że płaszczyzna środkowa płyty nie rozciąga się, ani kureczy w żadnym kierunku, czyli że spełnia rolę warstwy obojętnej, łatwo wywnioskować, że zgięciu walcowemu (o tworzących równoległych do osi  $X$ ) towarzyszą:

1. Naprężenia zginające główne  $\sigma_y$  (fig. 191), rozciągające lub ściskające włókna elementarne prostopadłe do tworzących walca, czyli równoległe do płaszczyzny zginania. Te  $\sigma_y$  są proporcjonalne względem odległości  $y$  od warstwy obojętnej.

2. Naprężenia zginające poprzeczne  $\sigma_x$  rozciągające lub ściskające włókna elementarne równoległe do tworzących walca, czyli prostopadłe do płaszczyzny zginania. Przytem jest

$$\sigma_x = \frac{1}{m} \sigma_y.$$

Fig. 191.

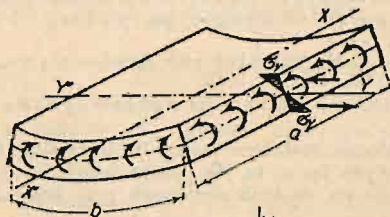
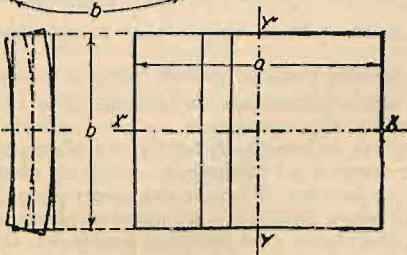


Fig. 192.



Naprężenia  $\sigma_x$  zapobiegają poprzecznemu zakrzywieniu przekrojów skrawków (pretów) elementarnych, na które dzielimy płytę w myśli płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny zgięcia (por. ust. 40 a). Tych naprężeń nie byłoby wcale przy zgięciu walcowem tylko wówczas, gdyby liczba Poisson'a była równą zeru.

Krzywiznę główną zgięcia walcowego określa wzór:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot EJ}, \quad \text{przyczem } J = \frac{1}{12} 1 \cdot h^3$$

oznacza moment bezwładności prostokątnego przekroju skrawka płyty o szerokości 1, a grubości  $h$ , zaś  $M$  oznacza moment sił wewnętrznych w tymże przekroju tworzących parę zginającą.

Wielkość  $\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot J = \bar{B}$  jest miarą sztywności zginania płyty, podobnie jak  $EJ = B$  jest miarą sztywności zginania belki. A zatem: Sztywność

zginania walcowego płyty  $\bar{B}$  jest  $\frac{m^2}{m^2-1}$  razy większa od sztywności zginania pręta  $B$  z tego samego materiału przy równych momentach bezwładności przekroju.

Ponieważ  $m \geq 2$ , przeto  $\bar{B} \geq \frac{4}{3} B$ , skąd widać znaczenie liczby Poisson'a w teorii płyt. (Dla  $m = \infty$  jest  $\bar{B} = B$ .)

Gdy zgięcie zachodzi według walca kołowego, to wyciąwszy w myśli prostokątną część płyty przekrojami wzdłuż tworzących walca i prostopadłymi do nich (fig. 192), otrzymujemy równomierny rozkład momentów zginających  $M_y$  wzdłuż dwu pierwszych i równomierny rozkład momentów zginających  $M_x$  wzdłuż dwu drugich przekrojów. Wszystkie momenty  $M_x$  i  $M_y$  dokoła prostokątnej części płyty tworzą układ sił zewnętrznych czyniący zadość ogólnym warunkom równowagi. A zatem:

Jeżeli wzdłuż jednej pary brzegów równoległych  $a$  płyty prostokątnej działają równomiernie rozmieszczone momenty zginające  $M_y$ , a wzdłuż drugiej pary brzegów równoległych  $b$  momenty  $M_x = \frac{1}{m} M_y$ , również równomiernie rozłożone, to płyta zgina się według powierzchni walcowej o tworzących równoległych do  $a$ .

Skoro równomiernie rozłożone momenty  $M$  działają tylko na jedną parę brzegów równoległych np.  $a$ , to, jak pociąga doświadczenie, różni się zgięcie od walcowego tylko na wąskich skrawkach przy brzegach  $b$ . W środkowej części płyty zachodzi walcowe zgięcie przy naprężeniach  $\sigma_y$  i  $\sigma_x = \frac{1}{m} \sigma_y$  tem dokładniej, im mniejsza jest grubość płyty  $h$  wobec  $a$ .

W praktyce można niemal zawsze obliczać płytę na zginanie walcowe, jeżeli tylko wszelkie siły zewnętrzne są równomiernie rozłożone wzdłuż prostych równoległych do jednej pary boków. Np. płyta prostokątna swobodnie podparta wzdłuż brzegów  $a$  i dźwigająca obciążenie równomiernie rozłożone  $q \text{ kg/cm}^2$  na całej powierzchni. Wówczas traktujemy płytę jako belkę, względnie układ belek obok siebie leżących o tej samej rozpiętości  $b$ , przekroju prostokątnym  $1.h$  i o obciążeniu  $q$  na jednostkę rozpiętości. O wytrzymałości decyduje największa wartość  $\sigma_y$ , obliczona tak jak dla belki, a wpływ  $\sigma_x$  można z reguły pominąć. Tylko przy obliczaniu ugięć należy pamiętać o wprowadzeniu sztywności zginania płyty:

$$\bar{B} = \frac{m^2}{m^2-1} E J.$$

Jeżeli płyta jest podparta lub utwierdzona brzegami równoległymi ruchomo (ust. 41), to wskutek zgięcia zbliżają się brzegi płyty. Nierzadko brzegi płyty są podparte lub utwierdzone stałe, wskutek czego powstają reakcje rozciągające płytę w kierunku rozpiętości, a zarazem zmniejszające momenty zgięcia. Szczegółowe obliczenie w tych przypadkach por. Timoszenko: „Kurs wytr. Materj.“, § 145.

### 63. Ogólne zgięcie płyty. (Energia potencjalna zgiętej płyty.)

a) Przy ogólnem zgięciu płyty zamienia się płaszczyzna środkowa, połowiąca jej grubość  $h$  na powierzchnię bardzo słabo zakrzywioną, zwaną powierzchnią ugięcia. Jej równanie ma postać  $w = f(x, y)$ . Niechaj  $\rho_1$  i  $\rho_2$  oznaczają promienie krzywizny głównych przekrojów normalnych, wzajemnie prostokątnych, poprowadzonych w dowolnym punkcie powierzchni ugięcia,



którego współrzędne przed ugięciem  $(x, y, o)$  zmieniły się na  $(x, y, w)$ . Element płyty (fig. 193), wycięty przekrojami równoległymi do głównych, ma w płaszczyźnie środkowej wymiary  $ds_1$  i  $ds_2$ . W warstwach, leżących w odległości  $z$  od tej płaszczyzny, doznają te wymiary wydłużeń głównych w stosunku:

$$\varepsilon_1 = \frac{z}{\rho_1} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = \frac{z}{\rho_2}.$$

Wydłużeniom głównym  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  towarzyszą (główne) normalne naprężenia:

$$\sigma_1 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} z \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_2} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} z \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Odpowiadające momenty zgięcia, działające na ściany boczne elementu, mają w odniesieniu do jednostki szerokości wartość:

$$M_1 = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_2} \right); \quad M_2 = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Dla energii potencjalnej (pracy odkształcenia) elementu mamy wyrażenie:

$$dL = \frac{1}{2} \left( \frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} \right) ds_1 ds_2 = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right] ds_1 ds_2. \quad (1191)$$

b) Skoro ściany boczne elementu płyty zorjentujemy według obranych osi współrzędnych, to  $dx$  i  $dy$  są wymiarami jego w płaszczyźnie środkowej. Na ścianach bocznych elementu (fig. 194 a i b) działają teraz (w płaszczyźnie

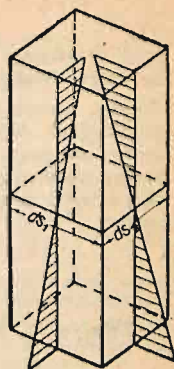
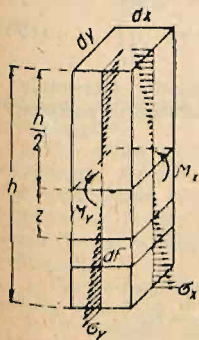
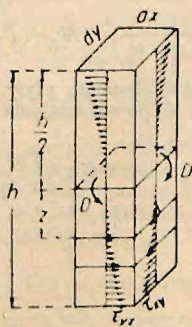


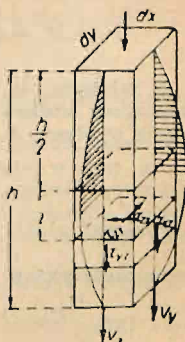
Fig. 193.



a



b



c

Fig. 194.

$XY$ , równoległej do płaszczyzny płyty) obok naprężeń normalnych  $\sigma_x$ , względnie  $\sigma_y$ , także naprężenia styczne  $\tau_{xy}$ , względnie  $\tau_{yx}$ , przyczem  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Wartości  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  określają dwuwymiarowy stan napięcia w warstwie elementarnej równoległej, do płaszczyzny środkowej o grubości  $dz$ . Ponieważ:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta; \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \vartheta + \sigma_2 \cos^2 \vartheta;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\vartheta,$$

jeżeli  $\vartheta$  oznacza kąt nachylenia do osi  $x$  głównego przekroju normalnego, na który działają tylko naprężenia  $\sigma_1$ ; przeto naprężenia styczne  $\tau_{xy}$  są również proporcjonalne względem odległości  $z$  od warstwy obojętnej. Odpowiadające siły, działające na ścianę boczną elementu, sprowadzają się znowu do pary. Jej moment, jako prostopadły do płaszczyzny ściany, tworzy moment skręcający. Oznaczwszy przez  $D$  jego wartość odniesioną do jednostki szerokości przekroju (widocznie równą dla obu ścian elementu), mamy:

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \dots \dots \dots (1201)$$

Zważywszy, że

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_y dz,$$

widzimy, że między  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $D$  a momentami  $M_1$ ,  $M_2$  w przekrojach głównych, zachodzą takie same związki, jak między  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  a  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a mianowicie:

$$M_x = M_1 \cos^2 \vartheta + M_2 \sin^2 \vartheta, \quad M_y = M_1 \sin^2 \vartheta + M_2 \cos^2 \vartheta.$$

$$D = \frac{1}{2} (M_1 - M_2) \sin 2\vartheta.$$

Oznaczwszy przez  $\rho_x$  i  $\rho_y$  promienie krzywizny przekrojów  $XZ$  i  $YZ$  powierzchni ugięcia, mamy analogicznie jak wyżej:

$$M_x = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_y} \right); \quad M_y = \bar{B} \left( \frac{1}{\rho_y} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho_x} \right) \dots (1202)$$

Z założenia, że krawędzie elementu płyty, prostopadłe pierwotnie do płaszczyzny środkowej, stają się po odkształceniu normalnemi do powierzchni ugięcia wypływa, że

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{Ponieważ nadto} \quad \frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

przeto oznaczwszy jeszcze

$$C = GJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot EJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \bar{B},$$

otrzymujemy z równań (1201) i (1202) wzory:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & M_y &= -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ D &= -\frac{m-1}{m} \bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Te wzory pozwalają obliczyć momenty zginające i skręcające, a więc i naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  w dowolnym miejscu płyty z danej powierzchni ugięcia w postaci równania  $w = f(x, y)$ .

Energję potencjalną (pracę odkształcenia) elementu o polu  $dx \cdot dy$  znajdziemy, dodając do pracy zginania, wyrażonej według (1191) w postaci:

$$dL_z = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy,$$

pracę skręcania:

$$dL_{skr} = \frac{m-1}{m} \bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

albowiem obie prace są od siebie niezależne.

A zatem:

$$dL = \frac{\bar{B}}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{m-1}{m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Uwaga. W najogólniejszym przypadku działają na ścianach elementu płyty jeszcze siły poprzeczne  $V_x$  (na ścianach prostopadłych do  $x$ ),  $V_y$ , wywołujące naprężenia ścinające  $\tau_x$  i  $\tau_y$  (fig. 194 c), rozłożone jak w belce prostokątnej parabolicznie, a wreszcie siły podłużne. Wpływ sił poprzecznych na pracę odkształcenia jest najczęściej tak nieznacznym, że nie potrzeba dodawać odpowiedniego wyrazu do wyrażenia dla  $dL$ . Atoli w przypadku sił podłużnych będzie uzupełnienie wyrażenia dla  $dL$  najczęściej koniecznem.

**64. Siły poprzeczne i równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty.** Warunki krańcowe. Z warunku równowagi (warunek momentów) elementu płyty wypływają analogicznie do równania  $T = \frac{dM}{dx}$  dla prętów zginanych następujące wyrażenia dla sił poprzecznych, odniesionych do jednostki szerokości przekroju:

$$V_x = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}; \quad V_y = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y}.$$

Zaś z warunku rzutów na oś  $Z$  otrzymujemy równanie różniczkowe powierzchni ugięcia w postaci:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B},$$

przyczem  $p$  oznacza obciążenie płyty (jako funkcja  $x, y$ ), odniesione do jednostki pola.

Ażeby całka powyższego równania różniczkowego dawała rozwiązanie konkretnego zadania zgięcia płyty obciążonej i podpartej w dany sposób, musi rozwiązanie  $w = f(x, y)$  czynić jeszcze zadość warunkom krańcowym. Rozpatrzmy je tutaj tylko dla przypadku swobodnego podparcia i utwierdzenia brzegów płyty pomyślanej poziomo i obciążonej z góry siłami pionowymi.

1. Przedewszystkiem musi być w obu przypadkach wzdłuż brzegów podpartych  $w = 0$ .

2. W wypadku swobodnego podparcia brzegu muszą tam zniknąć naprężenia zginające, a zatem musi być:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

W wypadku doskonałego utwierdzenia momenty zginające nie znikają; natomiast wzdłuż brzegów utwierdzonych musi być:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

czyli styczne do powierzchni ugięcia muszą być poziome.



3. W obu przypadkach muszą zniknąć naprężenia styczne poziome. Jednakże z tego nie wynika, aby musiało być  $D = 0$ , względnie  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ ; albowiem momenty skręcające, rozmieszczone w sposób ciągły wzdłuż brzegu płyty, są statycznie równoważne siłom pionowym o wielkości  $\frac{\partial D}{\partial s}$  odniesionej do jednostki długości podpartego brzegu płyty (jeżeli  $ds$  oznacza element tej długości; fig. 195). Te siły zaś są zrównoważone dodatkowymi reakcjami podparcia  $R''$ , które wraz z reakcjami  $R'$ , określonymi wartością sił poprzecznych  $V$  wzdłuż brzegu podpartego tworzą reakcje całkowite  $R = R' + R''$  (odniesione do jednostki długości). Przytem jest:

$$R' = -V; \quad R'' = -\frac{\partial D}{\partial s}.$$

Gdy podparty brzeg płyty załamuje się pod kątem prostym tworząc róg (fig. 196), a  $D$  w tym miejscu nie znika, natenczas obok dodatkowych reakcyj  $R$

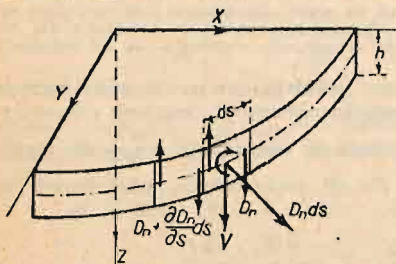


Fig. 195.

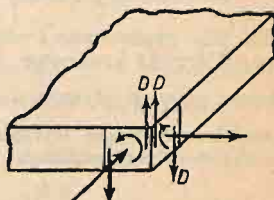


Fig. 196.

wzdłuż brzegów potrzeba do zrównoważenia momentów skręcających w rogu jeszcze siły skupionej  $\hat{R} = -2D$ , zwanej reakcją narożną.

65. Kuliste zgięcie płyty. Naprężenia termiczne. Przy kulistym zgięciu płyty musi być widocznie  $M_1 = M_2$ ,  $D = 0$  w każdym przekroju, a więc i wzdłuż brzegów płyty o dowolnej postaci, czyli: Momenty zginające  $M$  (jako siły zewnętrzne), rozłożone równomiernie wzdłuż brzegu płyty wywołują jej zgięcie kuliste o promieniu:

$$R = \frac{\bar{B}}{M} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{Eh^3}{12M}.$$

Zgięcie kuliste może także powstać bez udziału sił zewnętrznych, gdy płyta o brzegach swobodnych tworzy ścianę oddzielającą dwie przestrzenie o różnych temperaturach. Przyjawszy wtedy jednostajny spadek temperatury na grubości płyty i oznaczwszy temperaturę obu powierzchni zewnętrznych przez

$$t + \frac{\Delta t}{2} \quad \text{i} \quad t - \frac{\Delta t}{2},$$

maamy dla promienia środkowej kulistej powierzchni wygięcia wyrażenie:

$$R = \frac{h}{\alpha \Delta t},$$

przyczem  $\alpha$  oznacza współczynnik termicznego wydłużenia materiału płyty.

Gdy brzegi takiej płyty są doskonale utwierdzone, to wzdłuż brzegów powstają reakcyjne momenty zginające  $M$ , które zapobiegają kulistemu

zgięciu płyty wskutek nierównego ogrzania obu ścian. Te momenty obliczymy z porównania prawych stron obu powyższych wyrażeń dla  $R$ , a mianowicie:

$$M = \frac{m}{m-1} \cdot E \cdot \frac{h^2}{12} \alpha \Delta t.$$

Ich wielkość określa odpowiadające naprężenia termiczne w płycie:

$$\sigma = \frac{6M}{h^2}.$$

Gdy utwierdzenie brzegów płyty nie jest doskonałe, to oczywiście naprężenia termiczne się zmniejszą.

66. Środkowo symetryczne zgięcie płyt okrągłych zachodzi w szczególności prostej postaci, jeżeli obciążenia i reakcje są równomiernie rozłożone na okręgach kół współśrodkowych z płytą. Wówczas ugięcia  $w$ , siły wewnętrzne itd. są funkcjami jednej zmiennej, tj. promienia wodzącego  $r$ , a równanie różniczkowe powierzchni ugięcia przybiera postać:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p}{B},$$

przyczem  $p$  w  $\text{kg/cm}^2$  oznacza obciążenie właściwe płyty.

W przypadku gdy  $p = \text{stałej} = q$ , a nadto w środku działa siła skupiona  $I$ , jest ogólnem rozwiązaniem powyższego równania:

$$w = \frac{qr^4}{64B} + \frac{Pr^2}{8\pi B} (\log r - 1) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \log r + C_3.$$

a) Płyta okrągła o promieniu  $R$  całkowicie równomiernie obciążona i dokoła doskonale utwierdzona. Momenty zginające  $M_r$  (w przekrojach elementarnych prostopadłych do promieni) i momenty zginające obwodowe  $M_t$  (w przekrojach radialnych) określają wzory:

$$M_r = \frac{q}{16} \cdot \left[ R^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) - r^2 \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \right],$$

$$M_t = \frac{q}{16} \cdot \left[ R^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) - r^2 \left( 1 + \frac{3}{m} \right) \right].$$

Wartości skrajne przyjmuje  $M_r$  na utwierdzonym obwodzie, zaś  $M_t$  w środku płyty, a mianowicie:  $M_r$  (dla  $r = R$ ) =  $-\frac{qR^2}{8}$ , albo =  $-\frac{ql^2}{32}$  jeżeli  $l = 2R$  oznacza średnicę (rozpiętość) płyty.

$$M_t \text{ (dla } r = 0) = M_r = \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{qR^2}{16} = \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{ql^2}{64}.$$

Niebezpieczne miejsce leży zatem na obwodzie.

Strzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \frac{qR^4}{64B} = \frac{ql^4}{1024B}.$$

b) Płyta okrągła całkowicie równomiernie obciążona i dokoła swobodnie podparta.

$$M_r = \frac{q}{16} \left( 3 + \frac{1}{m} \right) (R^2 - r^2); \quad M_t = \frac{q}{16} \left[ \left( 3 + \frac{1}{m} \right) R^2 - \left( 1 + \frac{3}{m} \right) r^2 \right];$$

$$\max M_t = \max M_r \text{ (dla } r = 0) = \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \frac{qR^2}{16} = \left( 3 + \frac{1}{m} \right) \frac{ql^2}{64};$$

$$w_{r=0} = f = \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{qR^4}{64B} = \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{ql^4}{1024B}.$$

c) Płyta okrągła obciążona siłą skupioną  $P$  w środku i dookoła doskonale utwierdzona.

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} - 1 \right]; \quad M_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} - \frac{1}{m} \right].$$

Skrajne wartości momentów na utwierdzonym obwodzie są:

$$M_r = -\frac{P}{4\pi}; \quad M_t = -\frac{1}{m} \frac{P}{4\pi}.$$

Te wartości są niezależne od promienia (rozpiętości) płyty. Drugie skrajne wartości (maximum momentów dodatnich) w środku płyty wypadają z powyższych wzorów nieskończenie wielkie, z czego wynika, że w teorii zgięcia płyt nie można schematyzować obciążenia skupionego analogicznie do teorii zgięcia prętów, lecz trzeba zgodnie z rzeczywistością, przyjąć rozłożenie siły skupionej na pewnym polu skończonym o promieniu  $R_0$ . Atoli dla obliczenia strzałki ugięcia  $f$  okazał się schemat obciążenia  $P$  skupionego w punkcie zupełnie wystarczającym, a mianowicie:

$$f = \frac{PR^2}{16\pi B} = \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{Pl^2}{Eh^3} = \left[ 0,0597 \frac{m^2 - 1}{m^2} \right] \cdot \frac{Pl^2}{Eh^3}.$$

d) Płyta okrągła obciążona siłą skupioną  $P$  w środku i dookoła swobodnie podparta.

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r}; \quad M_t = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{r} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right],$$

$$f = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{3PR^2}{16\pi B} = 0,0597 \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{Pl^2}{Eh^3}.$$

Przy założeniu, że  $P$  rozkłada się równomiernie na polu kołowym o promieniu  $R_0$ , otrzymujemy dla największego momentu w środku wyrażenie:

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{R}{R_0} + 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{R_0^2}{4R^2} \right].$$

Uwaga. Przy obciążeniu silnie skupionem decydują o wytrzymałości płyty nie tyle naprężenia zginające (momenty zginające), ile siły poprzeczne, albo też ciśnienie  $\sigma_z$  prostopadłe do powierzchni płyty. W przypadkach (c) i (d) powstaje największa siła poprzeczna  $V$  na obwodzie koła o promieniu  $R_0$ , przyczem

$$V = \frac{P}{2\pi R_0}.$$

Przyjąwszy paraboliczny rozkład naprężeń ścinających  $\tau$ , znajdujemy:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{P}{\pi R_0 h}.$$

Średnią wartość ciśnienia  $\sigma_z$  obliczymy łatwo według wzoru:

$$\text{śred } \sigma_z = \frac{P}{\pi R_0^2}.$$

Przy obliczeniu płyt ze względu na wytrzymałość należy przeto baczyć, aby tak naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , uwarunkowane momentami zginającymi, jak i naprężenia styczne  $\tau_{\max}$  i ciśnienia poprzeczne  $\sigma_z$  nie przekroczyły wartości bezpiecznej.

Ze względów konstrukcyjnych wystaje bżeg płyty mniej lub więcej poza linię podparcia. Podczas gdy wystawanie belki poza podpory nie ma żadnego wpływu na jej zgięcie pod obciążeniami rozmieszczonymi między podporami, to wystająca część płyty zwiększa wydatnie jej odporność na obciążenie rozpostarte w obrębie linii podparcia. Współdziałanie wystającej części płyty objawia się najsilniej w przypadku kołowej, kwadratowej itp. linii podparcia.

67. Płyta prostokątna dookoła swobodnie podparta. Jeżeli podparcie płyty pomyślanej poziomo dopuszcza reakcje podporowe z obu stron, to przy obciążeniu  $p \text{ kg/cm}^2$ , rozłożonem dowolnie, można znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia (ust. 62) w postaci szeregów nieskoń-



czonych (por. autora: „Teoria płyt“, str. 56), a stąd obliczyć strzałkę ugięcia, momenty, siły poprzeczne i reakcje. Tutaj ograniczymy się tylko do podania kilku najprostszych i najważniejszych wyników, odsyłając zresztą do „Teorii płyt“. Doświadczenia potwierdzają główne teoretyczne wyniki wcale dokładnie nawet wtedy, gdy podparcie jest jednostronne i nie mogą powstać reakcje narożnikowe, zapobiegające podniesieniu się rogów płyty, byleby tylko podpory linjowe były dostatecznie sztywne w porównaniu do sztywności samej płyty.

Dla uproszczenia wzorów wprowadzamy t. zw. momenty zastępcze  $M_1'$ ,  $M_2'$  określone równaniami:

$$M_1' = \frac{\bar{B}}{\rho_1} = -\bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad M_2' = \frac{\bar{B}}{\rho_2} = -\bar{B} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Rzeczywiste momenty zginające  $M_1$  i  $M_2$  wyrażają się zatem przez powyższe wzorami:

$$M_1 = M_1' + \frac{1}{m} M_2'; \quad M_2 = M_2' + \frac{1}{m} M_1'.$$

a) Wzory I-go przybliżenia dla momentów zginających wskutek całkowitego obciążenia równomiernego  $q$  kg/cm<sup>2</sup>.

Przyjawszy w przybliżeniu rozmieszczenie reakcyj wzdłuż boków  $a$  i  $b$  według wykresu (fig. 197), znajdujemy dla średniej wartości momentu zgina-

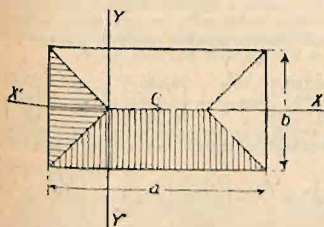


Fig. 197.

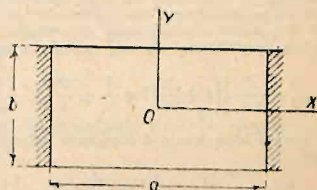


Fig. 198.

jacego  $M_2$  (odniesionego do jednostki szerokości) w przekroju niebezpiecznym  $XX'$  i średniej wartości momentu  $M_1$  w przekroju  $YY'$  wyrażenia:

$$M_2 = \frac{1}{24} \left( 3 - 2 \frac{b}{a} \right) q b^2 \dots \quad M_1 = \frac{1}{24} q b^2 \dots \dots \dots (1290)$$

Porównanie ze ścisłymi obliczeniami największych wartości  $M_1$  i  $M_2$  poucza, że powyższe wzory określają te wartości z przybliżeniem wystarczającym dla wielu celów praktycznych. (Por. M. T. Huber „Prosty sposób obliczania płyt prostokątnych ...“. Czas. techn. 1919.)

b) Wzory interpolacyjne II-go przybliżenia, obliczone na podstawie ścisłych rozwiązań dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całej płycie. Momenty zastępcze.

W środku płyty  $C$  mają momenty zastępcze wartości:

$$M_1' = \frac{17,2 \varepsilon^2 \cdot q b^2}{(\varepsilon^2 + 1)^2 (\varepsilon^4 + 8,5 \varepsilon^2 + 107)}; \quad M_2' = \left( 0,125 + \frac{0,19 \varepsilon}{3 \varepsilon^2 - 2,83 \varepsilon + 8,4} \right) \frac{\varepsilon^4 q b^2}{(\varepsilon^2 + 1)^2}$$

przyczem

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \quad (a \geq b).$$

Strzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \left( 0,013 + \frac{0,0073 \varepsilon}{1,3 + \varepsilon^2} \right) \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + 1)^2} \cdot \frac{q b^4}{B}.$$

W szczególności dla płyty kwadratowej o boku  $a$  wypada dokładnie:

$$M_1' = M_2' = 0,0368 q a^2; \quad f = 0,00406 \frac{q a^4}{B} = \frac{1}{246,3} \cdot \frac{q a^4}{B}$$

$$M_1 = M_2 = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot 0,0368 q a^2.$$

c) Siła skupiona  $P$  w środku płyty wywołuje ugięcia:

$$f = \frac{P b^2}{2 \pi^3 B} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^3} \frac{Sh \cdot n \pi \varepsilon - n \pi \varepsilon}{Ch n \pi \varepsilon + 1} \dots \text{ (wzór ścisły) (1301)}$$

W szczególności dla płyty kwadratowej wypada z dokładnością 0,1%:

$$f = \frac{1}{86,5} \cdot \frac{P a^2}{B} = 0,01156 \frac{P a^2}{B}.$$

Skupienie obciążenia w środku płyty kwadratowej zwiększa przeto strzałkę ugięcia niemal trzykrotnie (dokładniej 2,85 razy). Odpowiadające zwiększenie momentu zginającego jest, oceniając z gruboza, przynajmniej czterokrotnie. Dokładniejsze obliczenie jest możliwe tylko przy bliższym określeniu wymiarów skończonego pola, na które siła  $P$  się przenosi. Rozważania teoretyczne A. i L. Föppla (Drang und Zwang — tom I, § 30) prowadzą do następującego przybliżonego obliczenia niebezpiecznych momentów zginających pod siłą skupioną  $P$ , działającą na płytę dokoła swobodnie podpartą, o konturze bądź to kołowym, bądź też prostokątnym lub jakimkolwiek wypukłym. Przy założeniu, że obciążone miejsce leży w pobliżu środka płyty w odległości  $d$  od najbliższego punktu podpieranego brzegu określa przybliżoną wartość momentu zginającego w obciążonym punkcie wzór:

$$M_{\max} = \frac{P}{4 \pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{d}{h} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right] = P \left[ \begin{matrix} 0,119 \\ 0,103 \\ 0,0796 \end{matrix} \right] \log \frac{d}{h} + \begin{matrix} \{0,030\} \\ \{0,040\} \\ \{0,060\} \end{matrix} \text{ dla } \frac{1}{m} = \begin{matrix} \{0,5\} \\ \{0,3\} \\ \{0\} \end{matrix}$$

zaś przybliżoną wartość momentu zginającego w punktach odległych o  $r$  od tegoż punktu wzór:

$$M = \frac{P}{4 \pi} \left[ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \log \frac{d}{r} + 1 - \frac{1}{m} \right] = \left[ \begin{matrix} 0,119 \\ 0,103 \\ 0,0796 \end{matrix} \right] \log \frac{d}{r} + \begin{matrix} \{0,040\} \\ \{0,053\} \\ \{0,080\} \end{matrix} \text{ dla } \frac{1}{m} = \begin{matrix} \{0,5\} \\ \{0,3\} \\ \{0,0\} \end{matrix}.$$

68. Płyta bardzo długa o brzegach równoległych swobodnie podpartych. Pod obciążeniem całkowitem równomiernie rozłożonem ( $q \text{ kg/m}^2$ ) zachodzi (por. ust. 60), zgięcie walcowe. Obliczenie największego momentu zginającego i strzałki ugięcia wykonywa się przeto dla skrawka poprzecznego płyty o szerokości 1 tak, jak dla belki o przekroju prostokątnym 1  $h$ . Tylko na końcach płyty ma ugięcie inny charakter, zależny oczywiście od sposobu ewentualnego ustalenia brzegów poprzecznych [krótkich boków prostokątnego konturu płyty<sup>1)</sup>].

Natomiast obciążenie częściowe płyty, czyto połowe (powierzchniowe), czy też linjowe lub wreszcie punktowe, wywołuje ugięcie odczuwalne tylko w odległości mniejszej od 1,5-krotnej rozpiętości (szerokości  $b$ ) płyty. (Odległość należy przytem mierzyć od konturu obciążonego pola.) Obustronny zasięg działania ciężaru skupionego obejmuje tedy część długości płyty równą  $3b$ .

W praktyce określa się działanie płytowe zwykle tą szerokością poprzecznego skrawka płyty, traktowanego jako belka, na którą trzeba rozłożyć dane obciążenie skupione, aby wyężenie materiału było w obu przypadkach równe. Taka szerokość zastępcza, czyli równoważna  $s_r$ , da się wyznaczyć teoretycznie lub doświadczalnie i okazuje się oczywiście zależną od koncentracji obciążenia i tak:

<sup>1)</sup> Badaniem stanu napięcia i odkształcenia w tych miejscach zajmują się prace: A. Nádai „Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten“, Berlin 1916, M. T. Huber „Teoria płyt“ Lwów 1921.

a) Przy obciążeniu linjowem, równomiernie rozłożonem na całej rozpiętości, jest teoretycznie  $s_r = (0,90 \text{ do } 1,35) b$ , średnio  $\infty 1,1 b$  przy  $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$  do 0.

b) Przy obciążeniu linjowem, skupionem na długości  $\frac{1}{9} b$  w środku rozpiętości (porównywanem z działaniem siły skupionej), wypada („Teorja płyt“, str. 74)  $s_r = (0,61 \text{ do } 0,92) b$ , średnio  $\infty \frac{3}{4} b$  przy  $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$  do 0.

Uwaga. Powyższe wyniki teorii są w dobrej zgodzie z nowszemi doświadczeniami Niem. Wydz. Żelbetowego (zesz. 44), z których przy obciążeniu praktycznie skupionem wywnioskowano, że  $s_r = b$ . Dawniejsze przyjęcie  $s_r = \frac{2}{3} b$  widocznie nie doceniało korzyści działania płytowego.

69. Płyta prostokątna o brzegach podłużnych (a) podpartych i poprzecznych (b) utwierdzonych (doskonale). a) Wzory I-go przybliżenia dla niebezpiecznych momentów zginających przy całkowitem obciążeniu równomiernem  $q \text{ kg/cm}^2$ . W środku płyty (fig. 198):

$$M_1 = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5 + \varepsilon^4} q a^2; \quad M_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\varepsilon^4}{5 + \varepsilon^4} q b^2.$$

W środku brzegu utwierdzonego:

$$M_1 = -\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5 + \varepsilon^4} q a^2.$$

Dokładność praktycznie wystarczająca przy wartościach  $\varepsilon = \frac{a}{b}$ , niezbyt różniących się od 1.

b) Wzory dokładne (por. „Teorja płyt“, § 18) nie nadają się do bezpośredniego praktycznego zastosowania. Zastąpi je tablica A, obliczona z tych wzorów dla przypadku całkowitego obciążenia równomiernie rozłożonego ( $q \text{ kg/cm}^2$ ).

Tablica A.

Stosunek boków $\varepsilon = \frac{a}{b}$	Spółczynnik $\nu$ Sztywności $f = \nu \frac{q b^3}{B}$	Niebezpieczne momenty zginające przy wartości liczby Poisson'a $m = \frac{10}{3}$				Zastępcze niebezpieczne momenty (niezależne od liczby Poisson'a)			
		W środku płyty		W środku brzegu utwierdzonego		W środku płyty		W środku brzegu utwierdzonego	
		$M_1/q b^2$	$M_2/q b^2$	$M_1/q b^2$	$M_2/q b^2$	$M_1'/q b^2$	$M_2'/q b^2$	$M_1'/q b^2$	$M_2'/q b^2$
0,4	0,000019	0,0069	0,0009	-0,01225	-0,0037			-0,0122	0
0,6	0,000294	0,0151	0,0041	-0,02975	-0,0089			-0,0300	0
0,8	0,000913	0,02465	0,0124	-0,0499	-0,0150	0,0230	0,0055	-0,0499	0
1	0,00189	0,0334	0,0239	-0,06975	-0,0209	0,0288	0,0153	-0,0698	0
$\frac{1}{2} = 1,25$	0,00355	0,0413	0,0411	-0,0904	-0,0271	0,0318	0,0315	-0,0904	0
$\frac{1}{3} = 1,667$	0,00647	0,0473	0,0691	-0,1114	-0,0334	0,0292	0,0603	-0,1114	0
$\frac{1}{2} = 2,5$	0,01051	0,0448	0,1045	-0,1234	-0,03705	0,0148	0,1001	-0,1234	0
$\infty$	0,01302	0,0375	0,125	-0,125	-0,0375	0,0000	0,125	-0,125	0

70. Płyta prostokątna dokoła doskonale utwierdzona. Wzory interpolacyjne oparte na dokładnych rozwiązaniach teorii płyt przy całkowitem obciążeniu równomiernie rozłożonem; ważne dla  $\infty > \varepsilon \geq 1$ .



a) Sirzałka ugięcia w środku płyty:

$$f = \frac{0,00260 + \frac{0,00103}{\varepsilon} - \frac{0,00036}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot \frac{q b^4}{B}.$$

b) Momenty zastępcze w środku płyty:

$$M_1' = \frac{0,0659}{1,35 + (1,57 \varepsilon - 1)^4} \cdot \frac{q b^2}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}},$$

$$M_2' = \left[ 0,0417 + \frac{0,00237 \varepsilon^2}{0,657 + (\varepsilon - 1)^4} \right] \frac{q b^2}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}}.$$

c) Niebezpieczny moment utwierdzenia w środku krótszego boku  $b$ :

$$M_2 = - \frac{0,0833 + \frac{0,0122}{\varepsilon} + \frac{0,0300}{\varepsilon^2}}{1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}} \cdot q b^2.$$

71. Płyta ciągła na prostokątnej sieci podpór. Rozróżniamy 1. podpory linjowe, zrealizowane praktycznie przez ściany, mury lub belki podpierające płytę wzdłuż prostych, wyznaczających sieć prostokątów o długości  $a$  i szerokości  $b$ ; 2. podpory punktowe, utworzone przez słupy (filary), podpierające płytę w wierzchołkach sieci prostokątów. Ten drugi przypadek jest szczególnie ważny w zastosowaniu do t. zw. stropów grzybkowych (fig. 199), (por. dział: „Żelbetnictwo“). Ścisłą teorią zajmował się dr. Lewe

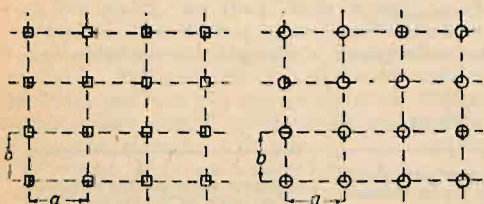


Fig. 199.

(Die strenge Lösung des Pilsdeckenproblems, „Bauingenieur“ 1920, H. 22), podając dokładne rozwiązania dla wielu przypadków przy założeniu równokierunkowości płyty. Zastosowanie w praktyce ułatwiają liczne tablice, zawarte w pracy dra Lewe'go. Największe momenty zginające (ujemne)

występują z reguły nad konturem głowicy słupa i osiągają wartość tem większą, im mniejsze są wymiary głowicy w porównaniu do wymiarów pola  $a \cdot b$  płyty. [Gdyby wymiary głowicy zdążyły do zera, to powyższe momenty stałyby się logarytmicznie nieskończone (por. nast. 64, c)].

72. Płyty ortotropowe. Płyta betonowa, uzbrojona niejednokowo w obu kierunkach wzajemnie prostopadłych, jednolita deska drewniana, blacha falista, prostokątna sieć belek o różnej sztywności w obu kierunkach itp. elementy konstrukcyjne można objąć schematem teoretycznym płyty ortotropowej (czyli prostokątnie różnokierunkowej), tj. płyty, obdarzonej różną sztywnością zginania w każdym z dwu kierunków głównych wzajemnie prostopadłych. Jeżeli  $B_1$  i  $B_2$  oznaczają odpowiednio sztywność zginania pasków płyty równoległych do długości  $a$  (osi  $X$ ) i do szerokości  $b$  (osi  $Y$ );

$\frac{1}{m_1}$  i  $\frac{1}{m_2}$  odpowiadające uogólnione liczby Poisson'a; to zamiast wzorów

(1210) dla momentów w płycie równokierunkowej, otrzymujemy („Teoria płyt“, część I.) następujące:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\bar{B}_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\bar{B}_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ D &= -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1370)$$

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia przybiera przytem postać:

$$\bar{B}_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad \dots \quad (1371)$$

z oznaczeniem dla skrócenia:

$$2H = \frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1} + 4C \quad \dots \quad (1371a)$$

Dla energii potencjalnej ugiętej płyty ortotropowej wypada wyrażenie:

$$L = \frac{1}{2} \iint \left[ \bar{B}_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \bar{B}_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{B}_1}{m_2} + \frac{\bar{B}_2}{m_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4C \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \dots \quad (1380)$$

Rozwiązania zagadnień płyt zwykłych (z materiału równokierunkowego) można przenieść na płyty ortotropowe tylko wtedy, gdy

$$H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}.$$

Ten warunek można uważać za spełniony, przynajmniej z dość znacznem przybliżeniem, u płyt żelaznobetonowych. On się nie spełnia zwykle u krat belkowych z powodu małej stosunkowo sztywności skręcania. Ogólne rozwiązania, ważne dla wszelkich wartości stosunku  $\eta = H : \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$ , zwanego charakterystyką płyty ortotropowej, podaje „Teoria płyt“, w której można znaleźć liczne wzory i tablice. Tutaj musimy poprzestać na podaniu przekształcenia rozwiązań dla płyt ortotropowych, gdy spełnia się warunek  $\eta = 1$  (czyli  $H = \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$ ). W tym celu, nie zmieniając  $b$  i  $y$ , zastępu-

jemy  $\bar{B}$  przez  $\bar{B}_2$ ,  $a$  przez  $a \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$ ,  $x$  przez  $x \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$ ; a zatem  $\epsilon = \frac{a}{b}$

musimy zastąpić przez  $\frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$  (sprowadzony stosunek boków).

Przykłady. Wzory (1290) zmieniają się w przypadku nierównej sztywności zginania podłużnego i poprzecznego na następujące:

$$M_2 = \frac{1}{24} \left( 3 - 2 \frac{b}{a} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_2}} \right) q b^3, \quad M_1 = \frac{1}{24} q b^2 \quad \dots \quad (1380)$$

Wzór ścisły (1301) dla strzałki ugięcia wskutek siły skupionej  $P$  w środku płyty prostokątnej przybiera postać:

$$f = \frac{P b^2}{2 \pi^3 \bar{B}_2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{Sh} n \pi \epsilon - n \pi \epsilon}{\operatorname{Ch} n \pi \epsilon + 1} \quad \dots \quad (1381)$$

przy czem  $\epsilon = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1}}$  itd.