

III. na ścinanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do siły poprzecznej  $T$ ;

IV. na skręcanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary skręcającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie równoległej do przekroju  $F$  [moment tej pary  $M_N$  nazywa się momentem skręcającym (momentem skręcenia)];

V. na zginanie, gdy wszystkie siły zewnętrzne odciętej części sprowadzają się do pary zginającej, tj. pary sił leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju  $F$  (czyli równoległej do osi pręta w danym miejscu). [Moment tej pary  $M_T$  nazywa się momentem zginającym (momentem zgięcia).]

W przypadku prętów prostych o stałym przekroju (pryzmatycznych) rozróżniamy stosownie do powyższych pięciu przypadków, tyleż głównych rodzajów wytrzymałości prętów. Jeżeli zaś pręt jest narażony jednocześnie na dwa lub więcej z powyższych sposobów obciążenia przekroju, to mówimy o złożonej wytrzymałości pręta. I tutaj odróżniamy doraźną wytrzymałość od wytrzymałości przy powtarzającym się lub przemiennym obciążeniu. Zależnie tedy od sposobu obciążenia pręta mówimy jak w ustępie 19. o obciążeniu rozrywającym, zgniatającym, a nadto o obciążeniu ścinającym, ukrecającym i łamiącym.

Przekrój, w którym zachodzi największe wyężenie materiału, nazywamy przekrojem niebezpiecznym.

## II. Rozciąganie i ściskanie.

28. Pręty proste narażone na rozciąganie lub ściskanie bez niebezpieczeństwa wyboczenia (fig. 130 a). Ogólny typ wzorów do obliczenia (wzory podstawowe):

I. napężenie  $\sigma$  przy danym obciążeniu  $P$  przekroju o polu  $F$ :

$$\sigma = \frac{P}{F} \dots \dots \dots I$$

II. potrzebne pole przekroju przy danym obciążeniu i danej wartości napężenia bezpiecznego:

$$F = \frac{P}{k} \dots \dots \dots II$$

III. obciążenie bezpieczne przekroju przy danym polu  $F$  i danej wartości napężenia bezpiecznego materiału:

$$P_{\text{bezp}} = F \cdot k \dots \dots \dots III$$

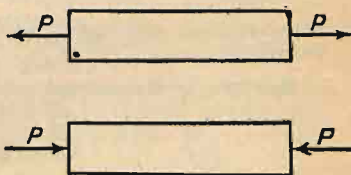


Fig. 130 a.

a) Pręty proste o stałym przekroju. 1. Jeżeli siły zewnętrzne działają tylko na przekroje końcowe, to przy najprostszym założeniu ich równomiernego rozkładu na tych przekrojach mamy do czynienia z jednakowym we wszystkich przekrojach linowym stanem napięcia, a zatem obowiązują wzory podstawowe (I, II, III). Chcąc nadto obliczyć całkowite wydłużenie sprężyste pręta o długości pierwotnej  $l$ , zastosujemy do granicy proporcjonalności wzór:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}.$$

2. Uwzględniając ciężar własny pręta wiszącego lub stojącego pionowo (fig. 131) widzimy, że przekrojem niebezpiecznym jest ten przekrój końcowy,

w którym sumuje się obciążenie siłą zewnętrzną  $P$  z obciążeniem własnym ciężarem  $G$ . A zatem:

$$\sigma_{\max} = \frac{P+G}{F'} \dots \dots \dots (I)$$

Przy projektowaniu jest nieznanem  $F'$ , a więc i  $G = F' \cdot l \cdot \gamma$  ( $\gamma$  ciężar właściwy materiału). Wstawiając to we wzór (I) i zastępując  $\sigma_{\max}$  przez  $k$ , otrzymujemy:

$$F' = \frac{P}{k - \gamma l} \dots \dots \dots (II)$$

$$\text{a zarazem: } P_{\text{bezp}} = F' (k - \gamma l) \dots \dots \dots (III)$$

Z ostatniego równania widać, że jeżeli długość pręta  $l = \frac{k}{\gamma}$ , to pręt może bezpiecznie dźwigać tylko ciężar własny. Podstawiając zamiast  $k$  doraźną wytrzymałość  $K_r$  względnie  $K_c$ , otrzymujemy t. zw. długość zerwania  $l_r = \frac{K_r}{\gamma}$ , albo wysokość zgniecenia  $l_c = \frac{K_c}{\gamma}$ .

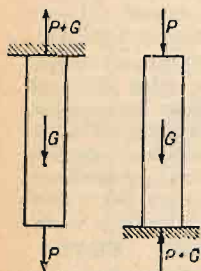


Fig. 131.

Pręt czyni zadość warunkowi ekonomii, jeżeli jego koszt  $C F l \gamma$  jest mniejszy od kosztu  $C' F' l' \gamma'$  pręta z każdego innego materiału ( $C$  jest ceną jednostki ciężaru pierwszego,  $C'$  drugiego materiału). A zatem:

$$\frac{C P l \gamma}{k - \gamma l} < \frac{C' P l' \gamma'}{k' - \gamma' l'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{C}{C'} < \frac{\frac{k}{\gamma} - l}{\frac{k'}{\gamma'} - l'}$$

jest warunkiem gospodarczej wyższości pręta pierwszego nad drugim (kreskowanym).

Sprężyste wydłużenie pręta

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E F} + \frac{1}{2} \frac{G \cdot l}{E F} = (P + \frac{1}{2} G) \frac{l}{E F}$$

3. Jeżeli pręt jest zbudowany symetrycznie z dwu materiałów (np. beton i żelazo), to z warunku równego wydłużenia obu materiałów wynika, że naprężenia w tym samym przekroju są wprost proporcjonalne względem modułów wydłużenia  $E_b$  i  $E_z$  tychże materiałów. Gdy zatem oznaczymy stosunek  $E_z : E_b = n$ , to naprężenie w materiale  $b$  (betonie) określi wzór:

$$\sigma_b = \frac{P}{F' + n f} \quad \text{a w materiale } z \text{ (żelazo)} \quad \sigma_z = \frac{n P}{F' + n f}$$

przyczem  $F'$  oznacza przekrój materiału  $b$ , a  $f$  materiału  $z$ .

Uwaga. Z powodu wielkich zboczeń betonu od prawa Hooke'a rośnie stosunek  $n$  z wartością naprężenia, wskutek czego coraz większa część obciążenia przenosi się na żelazo.

b) Pręty proste o przekroju zmiennym. Przy łagodnie zmiennym przekroju możemy zawsze bez wielkiego błędu stosować wzory podstawowe prętów o stałym przekroju, albowiem rozkład naprężeń normalnych w każdym przekroju różni się niewiele od równomiernego, a powstające dodatkowe naprężenia styczne są bardzo małe. W przypadku działania sił zewnętrznych tylko na przekroje końcowe jest niebezpiecznym przekrój najmniejszy  $F_0$  i ten przekrój bierzemy w rachubę.

Przy ostrych zmianach przekroju jest rozkład naprężeń aż do granicy sprężystości wysoce nierównomierny i największe naprężenie (na konturze przekroju) przewyższa nieraz wielokrotnie średnią wartość naprężenia. Po przekroczeniu granicy sprężystości, a zwłaszcza po przekroczeniu granicy plastyczności wyrównywiają się naprężenia tem bardziej, im materiał jest plastyczniejszy. Dlatego w przypadku stałego obciążenia prętów z żelaza kowalnego, miękkiej stali, miedzi itp. można obliczenia wytrzymałości wykonywać ze względu na przekrój niebezpieczny  $F_0$ , tak jak gdyby pręt miał przekrój  $F_0$  na całej długości. Doświadczenia pouczają nawet, że wytrzymałość doraźna pręta okrągłego o przekroju  $F$ , który pomniejszono lokalnie do wartości  $F_0$  przez wytoczenie dokoła żłobka, jest większa od wytrzymałości pręta walcowego o przekroju  $F_0$ . To się tłumaczy utrudnieniem poprzecznego zwięźnienia po przekroczeniu granicy plastyczności przez materiał sąsiednich grubszych części pręta.

W przypadku obciążeń przemiennych wytrzymałość prętów o lokalnie zmniejszonym przekroju  $F_0$  okazuje się z doświadczeń mniejszą od wytrzymałości pręta walcowego tegoż przekroju. Różnica zaś jest tem większa, im ostrzejsze są zmiany przekroju. Przez miejscowe osłabienie przekroju zmniejsza się wytrzymałość prętów z plastycznych metali przy obciążeniu przemiennem w tym samym prawie stosunku, co doraźna wytrzymałość prętów tego samego kształtu z materiału kruchego (np. szkła).<sup>1)</sup>

Przy uwzględnieniu ciężaru własnego jest zmienność przekroju poddyktowana niekiedy wa-

Fig. 132.

Fig. 133.

runkiem ekonomji. Najmniejszy ciężar własny będzie wtedy, gdy w każdym przekroju zachodzi ta sama pewność przeciwko osiągnięciu granicy plastyczności, względnie granicy wytrzymałości. Taką postać pręta o równomiernej wytrzymałości (fig. 132) określa równanie

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma}{k} x},$$

w którym  $F_0 = \frac{P}{k}$  oznacza przekrój obciążony siłą  $P$ ,  $k$  naprężenie bezpieczne,  $\gamma$  ciężar właściwy materiału, a  $F$  przekrój w odległości  $x$  od  $F_0$ .

**29. Naprężenia w cienkich ścianach naczyń.** Jeżeli grubość ściany  $\delta$  jest mała wobec rozmiarów naczynia i promieni krzywizny powierzchni środkowej (tj. połowiącej wszędzie grubość  $\delta$ ), to przy zwykle obieranych kształtach tej powierzchni można pominąć zmianę jej postaci i przyjąć równomierny rozkład naprężeń przez całą grubość ściany.

Przy założeniu, że ta powierzchnia jest obrotową i obciążoną od wewnątrz ciśnieniem gazu lub płynu  $p$  ( $\text{kg/cm}^2$ ), znajdujemy z warunków równowagi elementu (fig. 133), wyciętego dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami południkowymi i takimiż przekrojami do nich prostopadłymi:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta}.$$

<sup>1)</sup> A. Föppl, „Mittell. aus d. mech.-techn. Labor.“, München, Heft 31.



Tutaj oznacza:

- $\sigma_1$  naprężenie równoleżnikowe, normalne do płaszczyzny południkowej, (o kierunku stycznym do równoleżnika),  
 $\sigma_2$  naprężenie południkowe, tj. działające na przekrój normalny do południka,  
 $\rho_1$  promień krzywizny tegoż przekroju,  
 $\rho_2$  " " przekroju południkowego.

Szczególne przypadki:

- a) Naczynie kuliste ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = r$ )

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{2 \delta}.$$

- b) Rura walcowa (fig. 134 a)  $\rho_2 = \infty$ ,  $\rho_1 = r = \frac{d}{2}$ , jeżeli  $d$  oznacza średnicę.

$$\text{Naprężenie obwodowe } \sigma_1 = \frac{p r}{\delta} = \frac{p \cdot d}{2 \delta}.$$

Do wyznaczenia naprężenia podłużnego  $\sigma_2$  służy warunek równowagi sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym (fig. 134 b) o wypadkowej  $\sigma_2 \cdot 2 r \pi \cdot \delta$ .

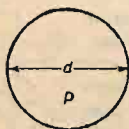


Fig. 134 a.

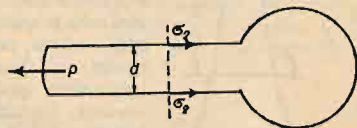


Fig. 134 b.

z siłami zewnętrznymi działającymi na część odciętą o wypadkowej  $r^2 \pi p$ .  
 A zatem:

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot r}{2 \delta} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{p d}{4 \delta}.$$

30. Wytrzymałość ściskanych kul i wałków. a) Wskutek nacisku  $F$  na kulę o promieniu  $r$ , podpartą grubą płytą z tego samego materiału, odkształcają się oba ciała w miejscu stykania (fig. 135). Według ogólnego roz-

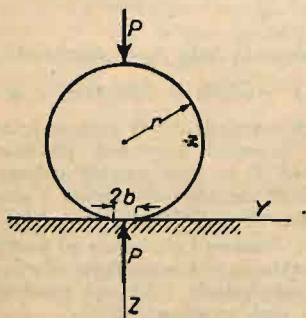


Fig. 135.

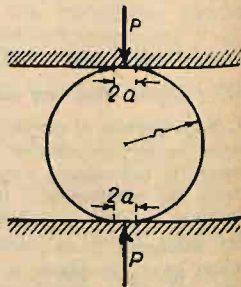


Fig. 136.

wiązania odpowiadającego zadania teorii sprężystości zachodzi stykanie w bardzo płytkiej czaszy kulistej o promieniu konturu.

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P r}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}.$$

(Rozwiązanie jest bardzo dokładne w granicach ważności prawa Hooke'a, o ile  $a$  jest dość małe w porównaniu do  $r$ , co się z reguły spełnia w praktycznych zastosowaniach).

Średnie ciśnienie w miejscu stykania ma zatem wartość

$$p = \frac{P}{a^2 \pi}.$$

Rozkład ciśnień wzdłuż średnicy koła stykania przedstawia się wykresem eliptycznym. Największe ciśnienie zachodzi przeto w środku i ma wartość bezwzględna:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} p = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{E^2}{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2} \cdot \frac{P}{r^2}}.$$

Towarzyszą mu główne ciśnienia poprzeczne o tej samej wielkości:

$$\sigma' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \sigma_{\max}$$

widocznie mało różniącej się od  $\sigma_{\max}$ . W materiale nieściśliwym ( $m = 2$ )

byłoby nawet  $\sigma' = \sigma_{\max}$ . Dla stali ( $m = \frac{10}{3}$ ) wypada  $\sigma' = 0,8 \sigma_{\max}$ . Do-

świadczenie poucza, że ten punkt nie jest miejscem niebezpiecznym. Pęknięcie kruchej materjału zachodzi bowiem zawsze wzdłuż obwodu koła stykania. To dowodzi istnienia ciągnięć w kierunku promienia lub ciśnień w kierunku obwodu, albo wreszcie jednego i drugiego. Teoria potwierdza to ostatnie i daje:

$$\sigma_r = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max}, \quad \sigma_t = -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max}$$

jako wartości ciągnięcia w kierunku promienia  $\sigma_r$  i ciśnienia w kierunku obwodu. W miejscu niebezpiecznym panuje zatem proste ścinanie. Odpowiadające wyężenie materjału, określone wartością  $\sigma_{\text{red}} = 2\tau$  według hipotezy największego naprężenia stycznego obliczymy zatem z wzoru:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\max} = \left[ \frac{2}{3\pi} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{E^2}{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2} \cdot \frac{P}{r^2}} \right] \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{r^2}},$$

albo:

$$\sigma_{\text{red}} = \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{r^2}},$$

jeżeli  $\beta = [\dots]$  oznacza stałą wartość, zależną od sprężystych własności materjału. Stąd znajdujemy niebezpieczne obciążenie kul:

$$P_{\text{nieb}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{\beta^3} r^2 = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{4 \beta^3} d^2,$$

zaś obciążenie bezpieczne przy  $n$ -krotnej pewności

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{4 \beta^3} d^2.$$

Okazuje się, że obciążenie bezpieczne jest (w rozpatrywanym prostym przypadku) proporcjonalne względem kwadratu średnicy kuli i sześciemu wytrzymałości materiału.<sup>1)</sup>

W przypadku stali jako materiału kuli i płyty można przyjąć, średnio  $4 \beta^3 = 12 \cdot 10^9 \text{ kg}^2 \cdot \text{cm}^{-4}$  ( $E = 2120000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $m = 3$ ). A zatem:

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{\text{nieb}}^3}{12 \cdot 10^9} d^2 = \frac{1}{n} C d^2.$$

Wartość  $\sigma_{\text{nieb}}$  waha się dla stali zlewnej od 5000 do 20000  $\text{kg/cm}^2$ . Odpowiadająca wartość  $C = 10,4$  do 667  $\text{kg/cm}^2$ . Zgodnie z tem dały bezpośrednio doświadczenia Stribeck'a z kulami z twardej stali jako wartość obciążenia, przy którym zachodzi pęknięcie dokoła powierzchni stykania  $P = 550 d^2$  do 700  $d^2$ .

b) Przy przyciskaniu wałka do płyty z tego samego materiału (fig. 136) zachodzi według rozwiązania teorii sprężystości zetknięcie powierzchnią paska o szerokości:

$$2b = 4 \sqrt{\frac{2 P \cdot r}{\pi l E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}.$$

Średnie ciśnienie na pasek stykania jest:

$$p = \frac{P}{2 b l}.$$

Miejsce niebezpieczne leży na linii środkowej paska. Odpowiadające ciśnienie (w kierunku siły  $P$ ) ma wartość bezwzględną

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{4}{\pi} p.$$

Taką samą wartość ma ciśnienie poprzeczne  $\sigma_y$  w przekroju podłużnym wałka; ciśnienie zaś  $\sigma_x$  w przekroju poprzecznym wałka, tj. ciśnienie poprzeczne ma wartość:

$$\sigma' = \frac{2}{m} \sigma_{\text{max}}.$$

A zatem wyężenie materiału według hipotezy największego naprężenia ścinającego:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{max}} - \sigma' = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sigma_{\text{max}}$$

$$\text{czyli} \quad \sigma_{\text{red}} = \left[ \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sqrt{\frac{E}{\pi \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}} \right] \cdot \sqrt{\frac{P}{2 l \cdot r}} = \beta \sqrt{\frac{P}{2 l \cdot r}}$$

jeżeli  $\beta = [\dots]$  oznacza znowu stałą materiału. Wstawivszy  $\sigma_{\text{nieb}}$  zamiast  $\sigma_{\text{red}}$  i rozwiązavszy względem  $P$  mamy:

$$P_{\text{nieb}} = \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{\beta^2} \cdot 2 l \cdot r$$

zaś przy  $n$ -krotnej pewności i  $d = 2 r$ :

$$P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{\beta^2} l d.$$

<sup>1)</sup> Prawidło proporcjonalności względem  $d^2$  wynika z najelementarniejszych rozważań podobieństwa dynamicznego i było oddawna znane; natomiast prawo proporcjonalności względem  $\sigma_{\text{nieb}}^3$  zawdzięczamy dopiero rozwiązaniu teorii sprężystości.



Powyższy wzór wyraża, że obciążenie bezpieczne walka przyciskanego do płyty z tego samego materiału jest proporcjonalne względem pola  $ld$  przekroju osiowego walka i względem kwadratu wytrzymałości materiału.

Skoro np. materiałem jest odlew stalowy (łożyska belek mostowych), to przyjmąwszy  $m = \frac{10}{3}$ ,  $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$ , znajdziemy:

$$\beta^2 = 12 \cdot 10^4,$$

$$\text{czyli} \quad P_{\text{bezp}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_{\text{nieb}}^2}{12 \cdot 10^4} \cdot ld = \frac{1}{n} \cdot C \cdot l \cdot d.$$

A zatem dla  $\sigma_{\text{nieb}} = K_r = 3500 \text{ do } 5000 \text{ kg/cm}^2$  mamy:

$$C = 102 \text{ do } 208 \text{ kg/km}^2.$$

Uwaga. W obu powyższych przypadkach jest  $P_{\text{nieb}}$  znacznie mniejsze od tej wartości doraźnego obciążenia, przy której kula lub wałek pęka w płaszczyźnie średnicowej przechodzącej przez kierunek siły, rozpadając się przytem na dwie części. Takie pęknięcie zachodzi oczywiście tylko przy dostatecznie małej plastyczności materiału (czyli znacznej kruchości). Odpowiadające obciążenie (zgniatające) jest np. według doświadczeń Striebecka z kulami stalowymi 6–10 razy większe od dającego się teoretycznie obliczyć  $P_{\text{nieb}}$ , przy którym grozi tylko powierzchowne pęknięcie lub trwałe odkształcenie w najbliższej okolicy miejsca stykania. Dlatego przy stosowaniu powyższych wzorów do praktyki można stosownie do okoliczności zejść z wartością  $n$  nawet poniżej 2, tem bardziej, że rzeczywiste wytrzymaenie materiału jest jeszcze nieco mniejsze od obliczonego na podstawie teorii sprężystości.

### III. Ścinanie i skręcanie.

31. Pręty proste, narażone głównie na ścinanie. Siła poprzeczna o stałej wartości nie może występować na skończonej długości pręta bez współdziału momentów zginających, atoli w jednym przekroju da się przypadek samej siły poprzecznej zrealizować przez dwustronne podparcie końców długiego pręta i obciążenie go w środkowej części dwiema siłami prostopadłymi  $P$ ,  $P$  tworzącymi parę (fig. 137). Wówczas w środkowym przekroju między siłami  $P$ ,  $P$  panuje widocznie siła poprzeczna bez żadnego momentu zginającego, a pręt jest w tym przekroju narażony tylko na ścinanie. Nie jest to oczywiście proste ścinanie, albowiem rozkład naprężeń stycznych jest nierównomierny. W przypadku przekroju prostokątnego udało się ten rozkład wyznaczyć na drodze teoretycznej, przyczem się pokazało, że zależy on w znacznej mierze od względnej odległości przekroju od miejsca bezpośrednio obciążonego. Rozmieszczenie naprężeń stycznych w przekroju środkowym  $CC$  przedstawia wykres na fig. 137 dla różnych wartości stosunku  $b : h$ . To rozmieszczenie różni się znacznie od równomiernego, zwłaszcza przy małej wartości  $b : h$ . Przy rosnących wartościach  $b : h$  zdąża rozkład naprężeń szybko do rozkładu parabolicznego z wartością  $\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \tau_{\text{śred}}$  w połowie wysokości przekroju.

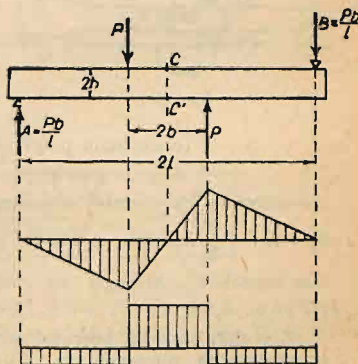


Fig. 137.

Już z tego widać, że niebezpieczna wartość siły poprzecznej w danym przekroju pręta zależy nie tylko od jego rozmiarów i wytrzymałości mate-

rzału, ale nadto od sposobu rozmieszczenia sił zewnętrznych. Im bardziej te siły są skoncentrowane w bezpośredniej bliskości przekroju, tem mniejszą się okazuje niebezpieczna wartość siły poprzecznej.

Z powodu praktycznych trudności nie wykonywa się w doświadczalniach technicznych prób ścinania według powyższego teoretycznego schematu, lecz np. dla betonu w sposób przedstawiony na fig. 138. Zakreskowane prosto-

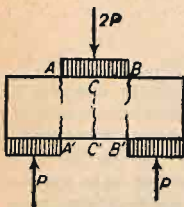


Fig. 138.

kąty przedstawiają stalowe tłoki (stemple), za których pośrednictwem wywieramy nacisk na górną i dolną powierzchnię krótkiej belki prostokątnej. W przekrojach  $AA'$  i  $BB'$ , w których nakonieć zachodzi pęknięcie, przy osiągnięciu przez  $P$  wartości krańcowej, panować musi obok siły poprzecznej o wielkości  $P$ , także dość znaczny moment zginający, którego ramie jest tem większe, im szersze są (stemple) tłoki przenoszące nacisk  $P$ . Ten moment ma niewątpliwie największą wartość w przekroju środkowym  $CC'$ , co zdradza się przy doświadczeniach pęknięciem w punkcie  $C'$ , powstającym jeszcze przed pęknięciami w punktach  $A, A', B$  i  $B'$ .

Te ostatnie zaś wskazują bynajmniej nie na kierunek naprężeń stycznych, jak to zwykle przyjmują, ale na kierunek zbyt wielkich ciśnień albo kierunek prostopadły do miejscowych niebezpiecznych ciągnięć. Iloraz z krańcowej wartości  $P_w$  siły  $P$  przez przekrój  $F'$  będzie przeto zależny od stosunku szerokości tłoków (stempli) do wysokości belki, co też stwierdzono doświad-

czaniem. Wartość tego ilorazu  $\left(\frac{P_w}{F'}\right)$  wyrażoną w  $kg/cm^2$  nazywają mimo to

w praktyce wytrzymałością na ścinanie materiału belki. Ponieważ ona nie ma

oczywiście nic (a przynajmniej bardzo niewiele) wspólnego z wytrzymałością

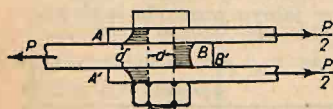


Fig. 139.

materiału przy prostym ścinaniu (czyli przy czystym odkształceniu postaciowym).

przeto dla odróżnienia będziemy ją nazywać technologiczną wytrzymałością na

ścinanie. Nie tedy dziwnego, że obliczając w praktyce sworznie (fig. 139), nity itp.

elementy, narażone przeważnie na ścinanie, na podstawie równania:

$$\frac{P(\text{obciążenie przekroju})}{F'(\text{pole przekroju})} = k'_s(\text{naprężenie ścinające})$$

nie jesteśmy bynajmniej obowiązani przyjmować (dla plastycznych metali

$k'_s = k_s = \frac{1}{2} k_r$ , lub  $= 0,58 k_r$ , (jak tego żądają hipotezy wytrzymałościowe),

lecz wartość  $k'_s$  obieramy na podstawie praktycznych doświadczeń równą  $0,7 k_r$  do  $0,8 k_r$ .

Z tychże samych powyżej rozważanych powodów nie wystarcza połączeń sworzniowych, nitowych itp. obliczać tylko ze względu na technologiczną

wytrzymałość na ścinanie w płaszczyznach przylegania łączonych części,

lecz zupełnie słusznie domaga się praktyka od dawna, aby średnie ciśnienie na ściankę otworu (wywierane przez trzon sworznia, nitu itp.)  $\sigma_d$  nie prze-

kraczało oznaczonej wartości  $k_d$  pozostającej w stałym stosunku do  $k_r$  lub  $k'_s$ .

Dla konstrukcyj żelaznych przyjmują  $k_d = 1,5 k_r$  do  $2 k_r$ , albo  $k_d = 2 k'_s$  do  $3 k'_s$ .

32. Pręty proste narażone na skręcanie. a) Przekrój okrągły. Teoria małych odkształceń sprężystych i odpowiadających im naprężeń

w prętach narażonych na moment skręcający  $M_s$  da się wyprowadzić drogą

elementarną tylko w przypadku kołowej symetrii przekroju, a więc dla prze-



kroju pierścieniowego i jego szczególnego przypadku przekroju kołowego. Wtedy bowiem można przyjąć, że kolejne płaskie przekroje poprzeczne pręta (fig. 140) nie ulegają wskutek skrećenia żadnemu odkształceniu, a tylko obracają się względem siebie o kąt  $\varphi$  proporcjonalny względem ich wzajemnej odległości.

Ustaliwszy w myśli np. lewy przekrój i obróciwszy prawy (odległy od niego o  $dx$ ) o kąt  $d\varphi$ , znajdujemy, że punkt tego przekroju, odpowiadający promieniowi  $\rho$ , przesuw się w kierunku prostym do tego promienia o długość  $\rho d\varphi$ . Ta wielkość jest zarazem posunięciem ściany elementu  $dF$  przekroju prawego względem takiejże ściany przekroju lewego przy niezmiennym kąt odpowiadającego prostego odkształcenia postaciowego, mamy tedy:

$$\rho d\varphi = \gamma dx, \text{ czyli } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \text{stałej } (C)$$

dla wszystkich punktów przekroju.

Tak w przekrojach poprzecznych, jak i w przekrojach osiowych panują przeto naprężenia styczne  $\tau = \gamma \cdot G = \rho \cdot C \cdot G$  proporcjonalne względem promienia  $\rho$  (odległości od środka przekroju) i prostopadłe do tego promienia. Największe  $\tau$  występuje na zewnętrznym konturze o promieniu  $r$ . A zatem:

$$\tau_{\max} : r = \tau : \rho = C \cdot G.$$

Z warunku równowagi sił wewnętrznych  $\tau \cdot dF$  z zewnętrznymi, tworzącymi moment  $M_s$ , wynika:

$$\int_{(F)} \tau \rho dF = C \cdot G \int_{(F)} \rho^2 dF = M_s = C \cdot G \cdot J_p,$$

jeżeli  $J_p = \frac{r^4 \pi}{2} - \frac{r_0^4 \pi}{2}$  oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju o wewnętrznym promieniu  $r_0$ .

Stąd:

$$C = \frac{M_s}{G \cdot J_p},$$

a zatem:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{G \cdot J_p},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{J_p} \cdot r = \frac{M_s}{W_s}.$$

Z powyższych wzorów czytamy:

1. Kąt skrećenia na jednostkę długości pręta równa się ilorazowi momentu skrećającego przez „sztywność skrećenia“, która dla przekroju okrągłego  $= G \cdot J_p$ .

2. Największe naprężenie styczne występuje w elementach, leżących na zewnętrznej poboczniczy pręta walcowego (wydrążonego lub pełnego) i równa się ilorazowi momentu skrećającego przez odpowiadający „moduł przekroju“ (moment oporu), który dla przekroju okrągłego  $= \frac{J_p}{r}$  (bieg. moment bezwład.) (promień zewnętrzny).

Te wyniki potwierdza ogólna teoria sprężystości pod warunkiem, że siły zewnętrzne równoważne parze skrećającej są na każdym z przekrojów końcowych rozłożone według tego samego prawa, co w przekrojach pośrednich. Wszelako odmienny rozkład sił zewnętrznych ma według zasady de Saint-

Venant'a uwagi godny wpływ, tylko w bezpośredniej bliskości; w dalszych zaś przekrojach zbliża się rozmieszczenie naprężeń i odkształceń do powyższego prostego obrazu, zgodnie z wynikami licznych doświadczeń.

Jak wyżej zaznaczono, mamy przy skręcaniu do czynienia z prostym ścinaniem w najczystszej postaci i dlatego tylko doświadczenia ze skręcaniem okrągłych prętów mogą posłużyć do wyznaczenia wytrzymałości materiału na proste ścinanie.

Geometrycznym obrazem rozmieszczenia naprężeń w przekroju skręcanym są t. zw. linie naprężeń stycznych. Kierunek naprężenia w dowolnym punkcie przekroju  $P$  wskazuje styczna w tym punkcie do linii naprężeń poprowadzonej przez ten punkt. W przypadku przekroju okrągłego są linie naprężeń oczywiście kołami współśrodkowymi. Kreśląc bardzo wiele linii naprężeń, możemy ich gęstością przedstawić wielkość naprężenia.

**b) Przekroje nieokrągłe.** Dla przekrojów nieokrągłych są linie naprężeń krzywymi zamkniętymi (nigdzie się nawzajem nie przecinającymi), których kształt przechodzi od wewnątrz w sposób ciągły w kontur przekroju. To wypływa z rozwiązań teorii

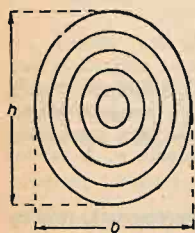


Fig. 141.

sprężystości i własności stanu napięcia na swobodnej powierzchni ciała (ust. 2.). W szczególności są naprężenia we wszystkich wypukłych wierzchołkach przekroju wielobocznego równe 0, a w wierzchołkach wklęsłych osiągają z reguły największe wartości. Dlatego nawet w przybliżeniu nie może być mowy o proporcjonalności względem odległości elementu od środka przekroju. Przyjmując zatem dla wygody tę samą postać wzorów dla  $\varphi'$  i  $\tau_{\max}$ , co w przypadku przekroju okrągłego, musimy zastosować inne wyrażenia dla sztywności skręcenia  $\Gamma$  i dla modułu przekroju  $W_s$ . Na-

leży przytem starannie odróżniać przekroje pełne (o polach jednospójnych) od przekrojów wydrążonych (o polach wielospójnych), które znowu mogą być dwu-, trzy-,  $n$ -spójne. Z tych ostatnich mają praktyczne znaczenie przede wszystkim przekroje dwuspójne, czyli rurowe.

1. Przekroje pełne. Proste ścisłe rozwiązanie dla przekroju eliptycznego znalazł de Saint-Venant (1878): Linie naprężeń są elipsami homotetycznymi z konturem (fig. 141), zaś  $\tau_{\max}$  powstaje na końcach osi małej (szerokości)  $b$ , przyczem:

$$\varphi' = \frac{M_s}{\Gamma}, \quad \Gamma = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} \cdot G = \frac{F^4 \cdot G}{4 \pi^2 J_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}, \quad W_s = \frac{\pi}{16} \cdot b^2 h.$$

Wzór dla  $\varphi'$  podają często w postaci:

$$\varphi' = \Psi \cdot \frac{J_p}{F^4 \cdot G} M_s,$$

ważnej dla wszelkich przekrojów pełnych przy stosownej wartości współczynnika liczbowego  $\Psi$ , która wynosi:

dla koła i elipsy . . . . .	$\Psi = 39,5 = 4 \pi^2$
" prostokąta, jeżeli $b:h = 1:1$ . . . . .	$\Psi = 42,68$
" " " $b:h = 1:2$ . . . . .	$\Psi = 42,0$
" " " $b:h = 1:4$ . . . . .	$\Psi = 40,2$
" " " $b:h = 1:8$ . . . . .	$\Psi = 38,5$
" trójkąta równobocznego . . . . .	$\Psi = 45$

Do niedawna zalecano jako przybliżoną wspólną wartość  $\Psi'$  dla wszelkich przekrojów pełnych  $\Psi' = 40$ , jednakże już wartość dla trójkąta równobocznego przekracza ją o 12,5%. Jeszcze większe zboczenia zachodzą u smukłych przekrojów (kształtowniki  $\text{+} \text{---} \text{+}$ ), które nadto nastroczają wielkie trudności ścisłemu obliczeniu. Wystarczającą nieraz dla praktyki dokładność daje dla takich przekrojów przybliżony wzór A. Foeppla:

$$\varphi' = \frac{M_s}{\frac{1}{3} G \sum_i h_i \delta_i^3},$$

o ile można je rozłożyć na wąskie prostokąty o długościach  $h_i$  i szerokościach  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). W szczególności dla prostokątnego przekroju cienkiej a bardzo szerokiej wstęgi jest sztywność skrećania

$$\Gamma = \frac{1}{3} b^3 h \cdot G$$

(z błędem przez niedobór mniejszym od 7% przy  $b:h = 0,1$  i zdążającym do 0 wraz z wartością  $b:h$ ). W przekroju prostokątnym powstaje  $\tau_{\max}$  w środkach dłuższych boków ( $h > b$ ) i określa je wzór przybliżony, wystarczający dla praktyki:

$$\tau_{\max} = (1,8b + 3h) \frac{M_s}{b^2 h^2}, \text{ a zatem } W_s = \frac{b^2 h^2}{1,8b + 3h}.$$

W przekrojach, dających się rozłożyć na wąskie prostokąty (jak wyżej), jest w przybliżeniu:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3} \cdot \delta_{\max},$$

przyczem  $\delta_{\max}$  oznacza szerokość najgrubszej prostokątnej części przekroju, a miejscem  $\tau_{\max}$  jest środek długiego boku tej części. Jest to ważne pod warunkiem (z reguły w praktyce spełnionym), że wklęsłe kąty przekroju są stosownie zaokrąglone.

**Uwaga.** Wszystkie przekroje niekolowe zakrzywiają się wskutek skrećenia, przyczem pewne ich części wyginają się nieco w jedną, inne zaś w drugą stronę; są jednak przypadki wyjątkowe, w których zakrzywienie przekroju jest utrudnione, albo nawet uniemożliwione warunkami statycznymi. Tak się rzecz ma np. gdy na przekrój środkowy pręta działa moment skrećający  $2M$  zrównoważony dwoma momentami o wielkości  $M$  działającymi na przekroje końcowe. Z powodu symetrii musi przekrój środkowy pozostać płaskim. Znaczne zaś utrudnienie zakrzywienia przekroju zachodzi w przypadku, gdy stosunkowo krótki pręt (nieokrągły) o małej sztywności dokładnie utwierdzony w końcowych przekrojach prętów o sztywności bardzo wielkiej. W tych przekrojach powstanie niewątpliwie rozkład naprężeń ścinających z tem bardziej różny od zwykłego, im mniejsza jest długość pręta wobec rozmiarów przekroju. Skoro ta długość zdąży do zera, to prawo rozkładu naprężeń będzie się nawet zbliżać do prawa, które daje teoria prętów okrągłych (t. zn. prostopadłość i proporcjonalność  $r$  do promienia  $\rho$ , mierzonego od środka przekroju). Na koniec w obu przypadkach okaże się sztywność skrećania większą, aniżeli w normalnych warunkach.

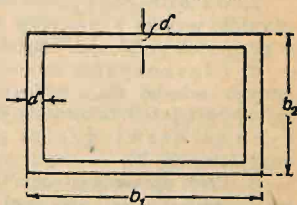


Fig. 142.

2. Przekroje rurowe. W przekroju prostokątnym o ścianach jednakowej grubości  $\delta$ , a średniej szerokości  $b_1$  i  $b_2$  (fig. 142) panuje  $\tau_{\max}$  na obwodzie zewnętrznym i ma wartość:



$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}, \text{ przy czym } W_s = \frac{2 b_1 \cdot b_2 \delta}{1 + \frac{b_1^2 + b_2^2 - 2 \delta^2}{b_1 b_2 - \delta^2} \cdot \frac{\delta}{b_1 + b_2}},$$

zaś kąt skręcenia na jednostkę długości:

$$\varphi' = \frac{M_s}{G \cdot J_{\text{red}}}, \text{ przy czym } J_{\text{red}} = \frac{b_1 \cdot b_2 \delta (b_1 + b_2 - 2 \delta)}{1 + \frac{(b_1 - b_2)^2}{2 (b_1 - \delta) \cdot (b_2 - \delta)}}.$$

Obydwa wzory są przybliżone (ze stanowiska teorii sprężystości) i tem dokładniejsze, im mniejsze jest  $\delta$  wobec  $b_1$  i  $b_2$ .

## IV. Zginanie.

### A. Naprężenia w prętach prostych narażonych na zginanie.

33. Naprężenia przy czystym zginaniu w płaszczyźnie obciążenia. Odróżnia się czyste zgięcie (bez sił poprzecznych) od zgięcia ogólnego, albo złożonego (z udziałem sił poprzecznych). Przy czystym zgięciu powstają tylko naprężenia normalne  $\sigma$  podłużnych włókien elementarnych pręta, które muszą być w jednej części przekroju ciągnięciami, a w drugiej ciśnieniami, aby siły wewnętrzne równoważyły parę zginającą. Obliczamy je z warunków równowagi przy pomocy dodatkowej „hipotezy płaskich przekrojów”. Z tej hipotezy wynika bezpośrednio, że wydłużenia właściwe  $\varepsilon$  włókien są proporcjonalne względem odległości  $\eta$  od warstwy obojętnej (fig. 143). O ile więc materiał pręta podlega prawu Hooke'a, to i naprężenia  $\sigma$  będą proporcjonalne względem  $\eta$ . Wówczas jest

jeżeli  $e_1, e_2$  oznaczają odległości włókien skrajnych od warstwy obojętnej albo od osi obojętnej (w której warstwa obojętna przecina przekrój).

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{\sigma_1}{e_1} = \frac{\sigma_2}{e_2} = \text{stałe},$$

Niechaj płaszczyzna rysunku będzie płaszczyzną  $XY$  pary zginającej o momencie  $M$ . Z warunków równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych wypływa teraz:

1. Oś obojętna przechodzi przez środek pola przekroju. To prawidło wynika z warunku rzutów na oś  $X$  i jest oczywiście ważne tylko w granicach proporcjonalności:

2. Płaszczyzna zginania, tj. płaszczyzna prostopadła do osi obojętnej schodzi się z płaszczyzną obciążenia (tj. płaszczyzną pary zginającej), jeżeli ta ostatnia jest płaszczyzną jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju. (Wynika to z warunku momentów względem osi  $Y$ .)

3. Przy upraszczającym założeniu, że płaszczyzna pary zginającej jest prostopadła do osi obojętnej jako osi głównego momentu bezwładności  $J$  daje warunek momentów względem osi  $Z$  (osi obojętnej):

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{M}{J} = \frac{\sigma_1}{e_1} = \frac{\sigma_2}{e_2}.$$

Stąd wynika bezpośrednio podstawowy dla obliczeń wytrzymałości przy zginaniu wzór na naprężenie „skrajne” (tj. we włóknie skrajnym):

$$\sigma_{\text{skr}} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (A)$$

przyczem za  $W$ , tj. moduł przekroju (dla zginania) [zwany także niefortunnie momentem wytrzymałości lub oporu] wstawiamy:

$$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad \text{albo} \quad W_2 = \frac{J}{e_2},$$

zależnie od tego, które z naprężeń skrajnych (czy ciągnienie, czy też ciśnienie) decyduje o wytrzymałości. Prawidło wyrażone wzorem (A) obowiązuje również tylko w granicach proporcjonalności.

**34. Naprężenia przy zginaniu ukośnem.** Zgięcie nazywamy ukośnem, jeżeli płaszczyzna obciążenia nie jest prostopadła do jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Wtedy przy założeniach poprzednich jest:

Kierunek płaszczyzny pary zginającej sprężony z kierunkiem odpowiadającej osi obojętnej ze względu na centralną elipsę bezwładności przekroju.

Naprężenia najłatwiej obliczyć rozłożywszy siły pary zginającej na składowe w kierunkach  $Y$  i  $Z$  głównych osi bezwładności przekroju. (Fig. 144). Jeżeli płaszczyzna obciążenia odchyła się od płaszczyzny  $XY$  o kąt  $\alpha$ , to  $F \cdot \cos \alpha$  i  $F \cdot \sin \alpha$  będą odpowiednio składowymi sił  $P$  w kierunku  $Y$  i  $Z$ . Ten rozkład pociąga za sobą rozkład momentu zginającego na  $M \cdot \cos \alpha$  i  $M \cdot \sin \alpha$ . Każdy z nich z osobna wytwarza proste zgięcie; pierwszy wytwarza naprężenia normalne:

$$\sigma' = \frac{M \cdot \cos \alpha}{J_1} \cdot \eta, \quad \text{drugi zaś} \quad \sigma'' = \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_2} \cdot \zeta.$$

W granicach proporcjonalności będzie według zasady superpozycji naprężeniem wypadkowym:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = M \left( \frac{\eta \cdot \cos \alpha}{J_1} + \frac{\zeta \cdot \sin \alpha}{J_2} \right).$$

Ażeby znaleźć  $\sigma_{\text{skr}}$ , trzeba wyszukać na konturze przekroju takie punkty ( $\eta, \zeta$ ), dla których wyrażenie w nawiasie przybiera skrajną wartość dodatnią lub ujemną.

W przypadku przekroju prostokątnego (drewniana płatew dachowa) jest takim punktem wierzchołek  $A$  (fig. 31), a odp. naprężenie określa wzór.

$$\sigma_{\text{skr}} = \frac{M \cos \alpha}{\frac{b h^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M \sin \alpha}{\frac{b^3 h}{12}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6 M}{b^2 h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) = \frac{6 M c}{b^2 h^2},$$

przyczem  $c = b \cos \alpha + h \sin \alpha$  jest szerokością rzutu przekroju na płaszczyznę prostopadłą do kierunku obciążenia.

**35. Naprężenia styczne przy ogólnem zgięciu w płaszczyźnie obciążenia.** Przyjawszy, że siła poprzeczna  $T$  nie wpływa na rozkład naprężeń normalnych (i pomijawszy wpływ nieuniknionych naprężeń poprzecznych<sup>1)</sup>) możemy z warunków równowagi warstwy elementarnej o gru-

<sup>1)</sup> W rzeczywistości może siła poprzeczna mieć wpływ na rozmieszczenie naprężeń normalnych, atoli ten wpływ jest godnym uwagi tylko w okolicy przekroju bezpośrednio obciążonego siłą nie o wiele mniejszą od  $T$ . Wówczas, jak pociąga ścisła teoria i doświadczenie, różni się prawo rozkładu nawet bardzo znacznie od przedstawionego wzorem (B). Wobec tego muszą w tych warunkach wystąpić także zboczenia od linowego rozkładu naprężeń normalnych.

Iloczyn  $r_{\text{gr}} \cdot v = T''$  przedstawia t. zw. siłę ściągającą w warstwie  $AB$ , odniesioną do jednostki długości pręta. Tą siłą działają na siebie wzajemnie podłużne warstwy zginanego pręta.

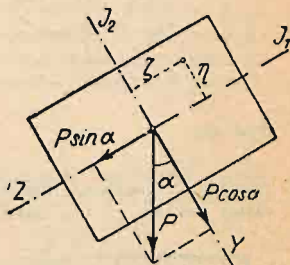


Fig. 144.

kości  $dx$  (zakreskowanej na fig. 145) obliczyć dokładnie średnią wartość naprężeń stycznych  $\tau$  wzdłuż cięciwy  $AB = v$  przekroju, uwzględniając związek  $\frac{dM}{dx} = T$ .

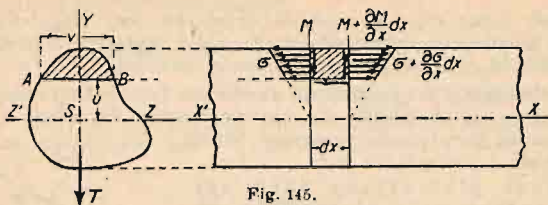


Fig. 145.

Jest nią:

$$\tau_{sr} = \frac{T \cdot S}{J \cdot v} \quad \dots \dots \dots (B)$$

przyczem  $S$  oznacza moment statyczny zakreskowanej części przekroju (odciętej cięciwą  $v$ ), a  $J$  moment bezwładności całego przekroju względem osi obojętnej  $ZZ'$  (odpowiadającej płaszczyźnie pary zginającej  $YY'$ ).

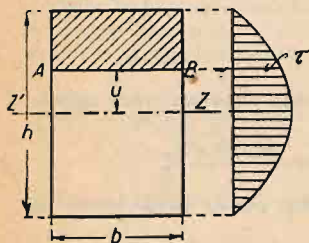


Fig. 146.

$$Z \text{ wzoru: } T' = \frac{T}{J} \cdot S$$

czytamy, że siła ścinająca ma największą wartość w osi obojętnej i maleje w miarę odległości od tej osi aż do zera w warstwach skrajnych.

O rozmieszczeniu naprężeń stycznych wzdłuż cięciwy  $AB$  nie możemy nic pewnego dowiedzieć się elementarną drogą dalszych prostych hipotez, stosowanych dawniej po-

wszechnie w literaturze technicznej. Wyjątek stanowi przekrój prostokątny i do pewnego stopnia przekroje złożone z prostokątów jak np. przekroje  $\text{I}$   $\text{T}$  itp. belek walcowanych lub nitowanych.

a) Przekrój prostokątny. Wzdłuż odcinka  $AB$  równoległego do osi obojętnej  $ZZ'$  (fig. 146) jest  $\tau$  stałe i równe:

$$\tau = \tau_{sr} = \frac{T}{2J} \left( \frac{h^2}{4} - u^2 \right) = \frac{6T}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - u^2 \right) \quad \dots \dots (a_1)$$

Rozkład  $\tau$  na wysokości przekroju jest zatem paraboliczny z największością w osi obojętnej, tj. dla  $u = 0$ :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{F}$$

$\left( \frac{T}{F} \right)$  jest oczywiście średnią wartością  $\tau$  w całym przekroju.)

b) Przekrój  $\text{I}$ . Z wyjątkiem miejsc osobliwych, gdzie ścianka łączy się ze stopką, można również ze znaczną dokładnością przyjąć w przekrojach równoległych do osi obojętnej  $\tau$  stałe i równe  $\tau_{sr}$  (fig. 147 a.) A zatem w stopkach obowiązuje wzór  $(a_1)$ , w ściance zaś wzór

$$\tau = \frac{T}{J \cdot \delta} \left[ \frac{b h^2}{8} - \frac{b h_1^2}{8} \left( 1 - \frac{\delta}{b} \right) - \delta \frac{u^2}{2} \right],$$



z którego dla  $u = 0$  wypada:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot b \cdot h^2}{8 J \cdot \delta} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \left( 1 - \frac{\delta}{b} \right) \right],$$

zaś dla  $u = \frac{h}{2}$ , tj. w miejscach połączenia ścianki ze stopkami:

$$\tau_1 = \frac{T \cdot b \cdot h^2}{8 J \cdot \delta} \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \right].$$

Dla całkiem cienkich ścianek, jakie się stosuje w praktyce, różni się  $\tau_{\max}$  niewiele od  $\tau_1$ , a w stopkach są napężenia  $\tau$  bardzo małe. W obliczeniach orjentacyjnych można wówczas przyjąć przybliżeniu, że cała siła poprzeczna przenosi się na ściankę o polu  $F_1$  i warunek wytrzymałości napisać w postaci,

$$\frac{T}{F_1} = \tau \leq k_s.$$

W stopkach należy szukać największych napężeń stycznych raczej w przekrojach prostopadłych do osi obojętnej ( $A A'$  na fig. 147 b). Dla tych

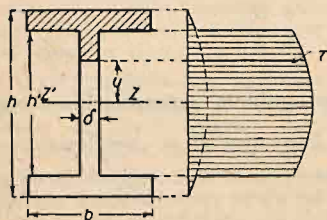


Fig. 147 a.

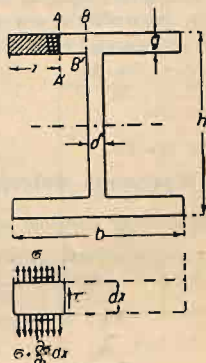


Fig. 147 b.

napężeń  $\tau'$  otrzymujemy z warunków równowagi elementu wyciętego z warstwy o grubości  $dx$ , podobnie jak powyżej:

$$\tau = \frac{T \cdot S'}{J \cdot g},$$

jeżeli  $S'$  oznacza moment statyczny zakreskowanej części pola przekroju względem osi obojętnej, a  $g$  grubość stopki w rozpatrywanym miejscu. W zwykłym przypadku stałej grubości  $g$  jest

$$S' = z \cdot g \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{g}{2} \right),$$

a zatem:

$$\tau' = \frac{T}{J} \cdot \frac{h - g}{2} \cdot z,$$

czyli  $\tau'$  rośnie proporcjonalnie względem odległości od krawędzi stopki osiągając największą wartość w przekroju  $B B'$ , gdzie stopka przechodzi w ściankę

$$a \ z = \frac{b}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

c) Przekrój okrągły pełny. (Fig. 148.) Ponieważ w punktach  $A$  i  $B$  musi całkowite naprężenie styczne mieć kierunek styczny do konturu, przeto kierunki naprężeń w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$  przecinają się w  $D$ . Dlatego przyjmują w przybliżonym rachunku 1., że przez tenże punkt  $D$  przechodzą kierunki wszystkich  $\tau$  wzdłuż  $AB$ . Nadto przyjmują 2., że końce odcińków) przedstawiających całkowite naprężenia  $\tau$  wzdłuż  $AB$ , leżą na prostej równoległej do  $AB$ .

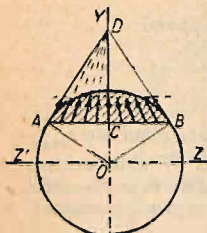


Fig. 148.

Jakkolwiek z tych założeń, zwłaszcza drugie znacznie odbiega od rzeczywistości, jak to wykazuje dokładniejsze rozwiązanie<sup>1)</sup>, to jednak główny wynik, tj. obliczenie  $\tau$  w warstwie obojętnej jest wystarczająco dokładny. Wypada bowiem:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{F} = 1,33 \frac{T}{F},$$

podczas gdy rozwiązanie ścisłe daje (w środku koła):

$$\tau_{\max} = \frac{3m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{T}{F} = 1,4 \frac{T}{F} \text{ do } 1,33 \frac{T}{F}.$$

(m=4) (m=2)

d) Przekrój kwadratowy obciążony w kierunku przekątnej. (Fig. 149.) Założenia przybliżonego obliczenia  $\tau$  są tutaj zupełnie niedopuszczalne, albowiem prowadzą w warstwie obojętnej do  $\tau_{\max}$  w wierzchołkach  $A$  i  $B$ , podczas gdy tamże musi być  $\tau = 0$ . Z dokładniejszego rozwiązania dra Z. Fuchs'a wynika, że

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{F}$$

panuje w środku.

36. Wyteżenie materiału przy ogólnem zginaniu. Linje naprężeń głównych. Przy czystem zginaniu momentem  $M$  są naprężenia  $\sigma = \frac{M}{J} y$  zarazem naprężeniami głównymi o kierunkach równoległych do osi pręta  $X$ . Pozostałe dwa naprężenia główne są równe zero. Inaczej ma się rzecz

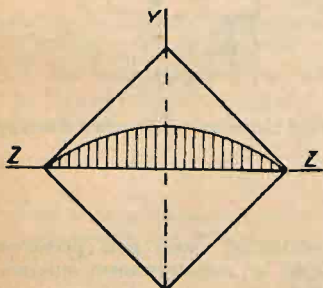


Fig. 149.

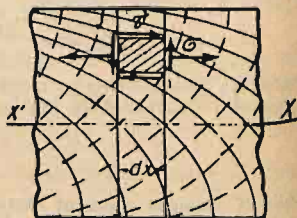


Fig. 150.

w przypadku ogólnego zgięcia, tj. przy współdziałe siły poprzecznej  $T$ , albowiem wtedy są naprężenia normalne  $\sigma$  (uwarunkowane momentem  $M$ ) tylko w warstwach skrajnych naprężeniami głównymi. Wydzieliwszy w innych warstwach element prostopadłościenny przekrojami poprzecznymi i podłużnymi (fig. 150) mamy widocznie do czynienia przynajmniej z dwuwymiarowym stanem napięcia określonym naprężeniami normalnymi  $\sigma_x = \sigma$ .

<sup>1)</sup> Dr. Z. Fuchs Zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen Stäben. Zeitschrift d. Ver. d. Ing. r. 1914, str. 1330.

$\sigma_y = 0$  i stycznymi  $\tau$ , wywołanymi siłą poprzeczną  $T$ . Wtedy kierunki i wielkości naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  znajdujemy najprościej zapomocą koła naprężeń (fig. 121). Przytem jest 
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}.$$

A zatem największa różnica naprężeń głównych (jako miara wyteżenia materiału dla plastycznych metali):

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} \quad \dots \dots \dots (C)$$

To równanie ma zastosowanie przy obliczeniu belek walcowanych i nitowanych w przekrojach narażonych jednocześnie na wielki moment i wielką siłę poprzeczną. (Nie można go stosować do belek z żeliwa, kamienia, drewna itp.) W takich belkach o przekroju  $\text{I}$  może  $\sigma_{\text{red}}$  osiągnąć największą wartość w miejscach połączenia ścianki ze stopką. Zaprojektowawszy zatem przekrój tak, aby  $\sigma_{\text{max}}$  we włóknach skrajnych i  $\tau_{\text{max}}$  we warstwie obojętnej nie przekroczyły wartości bezpiecznych, sprawdzamy dodatkowo, czy  $\sigma_{\text{red}}$  w wymienionem niebezpiecznem miejscu czyni zadość warunkowi wytrzymałości  $\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_{\text{bezp}} = k_r$ .

Znajdując w płaszczyźnie obciążenia, przechodzącej przez oś pretu i główną oś bezwładności przekroju, kierunki naprężeń głównych dla wielu punktów różnych przekrojów, łatwo nakreślić linje naprężeń głównych (fig. 150).

Każda z tych linii przecina warstwę obojętną pod kątem  $45^\circ$  i trafia warstwę skrajną (o ile nie napotyka przekroju końcowego) normalnie z jednej strony, a stycznie z drugiej.

**37. Wytrzymałość na zginanie. Moment niebezpieczny („łamiący“).** O pewności pretu, narażonego na czyste zgięcie, decyduje „moment łamiący“, albo ogólniej moment niebezpieczny, tj. ta wartość momentu zgięcia, przy której pojawiają się niedopuszczalne odkształcenia trwałe (ugięcie) lub pęknięcie. Ta wartość nie da się obliczyć z wzoru (A) po podstawieniu za  $\sigma$  wartości  $\sigma_{\text{nieb}} = \sigma_f$  lub  $K_f$  jako

$$M = W \cdot \sigma_{\text{nieb}}.$$

W rzeczywistości jest bowiem najczęściej  $M_{\text{nieb}} > W \sigma_{\text{nieb}}$  albo, co na jedno wychodzi,  $\sigma$  obliczone z wzoru (A) po podstawieniu wartości  $M = M_{\text{nieb}}$ , znalezionej doświadczalnie, jest zawsze większe od  $\sigma_{\text{nieb}}$ , otrzymanego z doświadczeń nad rozciąganiem lub ściskaniem. Główną przyczyną tego jest fakt, że po przekroczeniu granicy proporcjonalności we warstwie skrajnej, a jeszcze więcej po przekroczeniu granicy plastyczności, przestają prawie wzrastać naprężenia w tej warstwie, a zato warstwy pod nią leżące biorą na siebie coraz większą część odporu siłom zewnętrznym. Wykres naprężeń przybiera postać przedstawioną na fig. 151, zamiast zakreskowanej, odpowiadającej wzorowi (A).

Druga przyczyna, wybijająca się na pierwszy plan u materiałów kruchych (jak szkło) i podlegających aż do pęknięcia prawu Hooke'a, tkwi w tem, że sama wartość naprężenia nie decyduje jeszcze o wyteżeniu materiału przy nierównomiernym rozkładzie naprężeń w przekroju, nawet w tym prostym przypadku linjowego stanu napięcia. Wskutek tego w rzeczywistości:

$$M_{\text{nieb}} = \alpha W \cdot \sigma_{\text{nieb}} \quad \dots \dots \dots (A')$$

przyczem  $\alpha$  zwykle  $> 1$  jest liczbowym współczynnikiem doświadczalnym,

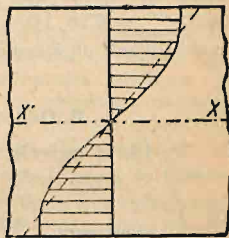


Fig. 151.



zależnym niestety, także od postaci przekroju. W przypadku przekroju prostokątnego zaleca np. Geusen dla żeliwa, granitu, wapienia  $\alpha \approx 2$  dla betonu 2,2, dla piaskowca 3. Jednakże Bach znajduje w tymże przypadku dla żeliwa  $\alpha = 1,75$  (bez względu na stosunek  $b:h$ ). Dla szkła w postaci płyt (szyb) jest  $\alpha$  zależne od grubości (co dowodzi wpływu drugiej przyczyny) i rośnie, gdy grubość maleje. Dla żelaza spawanego i zlewnego w postaci kształtowników  $\text{I}$   $\text{L}$  itd., znaleziono  $\alpha = 1$ , zaś w postaci belek nitowanych  $\alpha = 0,9$  do 0,8. Podobnie jest dla belek drewnianych według Tetmajera  $\alpha = 0,7$  do 0,75, a więc znowu  $\alpha < 1$ , jednakże z innego powodu. U belek żelaznych nitowanych jest powodem zejścia wartości  $\alpha$  poniżej 1 mała sztywność ścianki, wywołująca wraz z naprężeniami drugorzędowymi miejscowe objawy niestateczności (wyboczenia). Natomiast u belek drewnianych jest właściwie  $\alpha > 1$ , jeżeli odniesiemy równanie (A') do  $\sigma_{\text{nieb}}$  jako ciśnienia. Podana powyżej wartość  $\alpha$  odnosi się do  $\sigma_{\text{nieb}}$  jako ciągnięcia, albowiem tak oblicza się  $\alpha$  dla innych materiałów, które mają  $k_r \leq k_r$ , podczas gdy dla drewna jest  $k_r > k_c$ .

Ponieważ przy obliczeniach wytrzymałości posługujemy się zawsze równaniem (A), przeto wartość  $\alpha$  daje wskazówkę do obioru wartości  $\sigma_{\text{bezp}}$  przy zginaniu, a mianowicie należy przyjąć:

$$\sigma_{\text{bezp}} = \alpha \cdot k_r.$$

Skoro np. dla drewna jest  $k_r = 120 \text{ kg/cm}^2$ , to przy zginaniu trzeba przyjmować  $\sigma_{\text{bezp}} = 0,75 \cdot 120 = 90 \text{ kg/cm}^2$ , aby osiągnąć tę samą pewność w obu przypadkach obciążenia.

## B. Odształcenia belek prostych przy zginaniu.

38. Linją ugięcia nazywamy zakrzywioną wskutek zgięcia (pierwotnie prosta) oś pręta. Leżąc w warstwie obojętnej, nie doznaje ta oś wydłużenia ani skrócenia. Dwa sąsiednie przekroje o wzajemnej odległości  $dx$  (fig. 152) przed zgięciem wyznaczają przeto na linii ugięcia element łuku  $ds = dx$ , a na innych włóknach odległych o  $\eta$  od osi obojętnej wyznaczają długości  $ds + \Delta ds$ , przyczem  $\Delta ds = \varepsilon ds =$

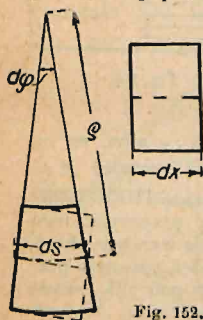


Fig. 152.

$= \frac{\sigma}{E} ds = \frac{M}{EJ} \eta ds$ . Ponieważ  $\Delta ds = \eta d\varphi$ , jeżeli  $d\varphi$  oznacza kąt nachylenia obu przekrojów, przeto:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho} \quad \dots \quad (D)$$

przyczem  $\rho$  oznacza promień krzywizny linii ugięcia.

Przy prostym zgięciu jest  $M$  stałe, a więc i  $\rho$  stałe, czyli linia ugięcia jest łukiem koła.

Skoro  $M$  zmienia się od przekroju do przekroju, to i krzywizna  $\frac{1}{\rho}$  jest zmienna. Odnosząc linję ugięcia do pierwotnej osi pręta jako osi  $X$  i do osi  $Y$ , leżącej w płaszczyźnie zgięcia, mamy:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EJ} \quad \dots \quad (D')$$

Wyraziwszy  $M$  jako funkcję współrzędnych  $(x, y)$  dowolnego punktu linii ugięcia, należy powyższe równanie różniczkowe zcałkować, aby otrzymać skończone analityczne równanie linii ugięcia.

W przeważającej liczbie przypadków praktyki  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  jest znikomo małe wobec 1 i z wystarczającą dokładnością zastępujemy powyższe równanie bez porównania prostszem przybliżeniem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (E)$$

Dwie stałe całkowania dadzą się wyznaczyć z warunków podporowych. Te warunki mogą też posłużyć do wyznaczenia reakcyj, momentów utwierdzenia — wogóle wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli sztywność zginania  $EJ$  pręta zmienia się łagodnie od przekroju do przekroju, to można z wystarczającą dla praktyki przybliżeniem zastępować również powyższe równanie linii ugięcia, uwzględniając zmienność  $EJ$ .

Ugięcia  $y$ , obliczone przez całkowanie równania ( $E$ ), podlegają widocznie zasadzie superpozycji, jeżeli  $M$  jest funkcją samego  $x$ , o ile oczywiście nie przekroczono granicy proporcjonalności (por. załączoną tablicę).

Inaczej ma się rzecz 1. gdy  $M$  jest zależne także od  $y$ , albo 2. gdy wypada się uciec do dokładnego równania ( $D$ ), albo wreszcie 3. gdy materiał pręta objawia znaczne zboczenia od prawa Hooke'a. Z pośród tych przypadków musimy w praktyce uwzględnić szczególnie często trzeci (belki betonowe), nierzadko pierwszy (giętkie belki, obciążone nie tylko siłami poprzecznymi, ale i podłużnymi), a tylko wyjątkowo drugi (sprężyny).

Przy stosowaniu równań ( $D'$ ) i ( $E$ ) należy umowę co do znaku algebraicznego momentu  $M$  uzgodnić z ustaleniem wyrażenia analitycznego po przeciwnej stronie znaku równości. (Obrawszy np. pierwotną oś pręta, pomyślaną poziomo za oś  $X$  o kierunku dodatnim na prawo i skierowaną w dół dodatnią oś  $Y$ , musimy moment  $M$  w równaniu ( $E$ ) uważać za dodatni, jeżeli wygina belkę wypukłością do góry.)

**39. Wykreślna konstrukcja linii ugięcia jako krzywej sznurowej.** Równanie różniczkowe krzywej sznurowej dla obciążenia siłami równoległymi do osi  $Y$  ma postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \dots \dots \dots (F)$$

przyczem  $q$  (kg/cm) jest rzędną powierzchni obciążenia, a  $H$  (kg) „odległością biegunową”.

Z porównania tego równania z równaniem ( $E$ ) wynika:

Linja ugięcia belki prostej o stałej sztywności zginania  $EJ$ , obciążonej siłami prostopadłymi do osi belki (leżąciami w płaszczyźnie zgięcia) jest krzywą sznurową dla odpowiadającej powierzchni momentów, uważanej za powierzchnię obciążenia przy odległości biegunowej równej sztywności  $EJ$  (o ile oczywiście są spełnione warunki podporowe).

Jeżeli sztywność zginania  $EJ$  jest zmienna na długości belki, to obrawszy pewną stałą jej wartość  $(EJ)_0$  i zredukowawszy rzędne powierzchni momentów w stosunku  $(EJ)_0 : EJ$  znajdujemy linię ugięcia jako krzywą sznurową zredukowanej powierzchni momentów, uważanej za powierzchnię fikcyjnego obciążenia przy odległości biegunowej  $(EJ)_0$ .

Ponieważ rzędne powierzchni momentów mają wymiar „siła  $\times$  długość”, przeto pole tej powierzchni ma wymiar siła  $\times$  (długość)<sup>2</sup>. Ten sam wymiar ma widocznie odległość biegunowa  $EJ$ , albo  $(EJ)_0$ . Ażeby rzędne linii ugięcia, jako bardzo małe wobec odciętych, nie zgubiły się w wykreślniej



konstrukcji opartej na powyższej zasadzie, zwiększa się ich podziałkę  $n$ -krotnie, zmniejszając  $n$ -krotnie odległość biegunową  $\left(\frac{EJ}{n}$  zamiast  $EJ$ ). Skoro np. skala długości rysunku jest  $1:n$ , a przy wykreśle powierzchni momentów przyjęto odległość biegunową  $H$  kg, to rzędne powierzchni momentów mierzymy skalą:  $1\text{ cm} = n H \text{ kg/cm}$ . Obrawszy przy kreśleniu linii ugięcia jako krzywej sznurowej odległość biegunową równą  $\frac{EJ}{n}$ , otrzymamy rzędne linii ugięcia w naturalnej wielkości. Samo wykreślenie krzywej sznurowej dla powierzchni momentów belki uważanej za powierzchnię obciążenia nie wystarcza jeszcze do znalezienia ugięć, albowiem ogólna całka równania ( $E$ ) czyli:

$$y = \int dz \int \frac{M}{EJ} dz + C_1 x + C_2$$

zawiera dwie stałe dowolne  $C_1$  i  $C_2$ . Ich wyznaczenie jest równoznaczne z wyznaczeniem linii zamykającej drugiej krzywej sznurowej z warunków podporowych. (Pierwsza krzywa sznurowa daje wykres momentów.) W przypadku podparcia obu końców są ugięcia tychże końców dane i zwykle równe 0. Linia zamykająca łączy tedy punkty przecięcia drugiej krzywej sznurowej z pionowymi podporowymi.

W przypadku doskonałego utwierdzenia tylko jednego końca przy drugim swobodnym jest linia zamykająca styczna do drugiej krzywej sznurowej w punkcie jej przecięcia się z pionową utwierdzonego przekroju. Z przedstawienia linii ugięcia jako krzywej sznurowej nie trudno odczytać jeszcze inne proste twierdzenia, prowadzące do bardzo wygodnego obliczenia ugięcia  $y$  i kąta nachylenia stycznej, tj.  $\frac{dy}{dz}$  w obranym przekroju. Jeżeli  $M^*$  i  $T^* = \frac{dM^*}{dz}$  oznacza moment zgięcia i siłę poprzeczną, które odpowiadają fikcyjnemu obciążeniu belki przez powierzchnię momentów  $M$ , to w przypadku zwykłego podparcia obu końców belki jest

$$y = \frac{M^*}{EJ}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{T^*}{EJ} \dots \dots \dots (79)$$

przyczem  $EJ$  oznacza stałą sztywność zginania.

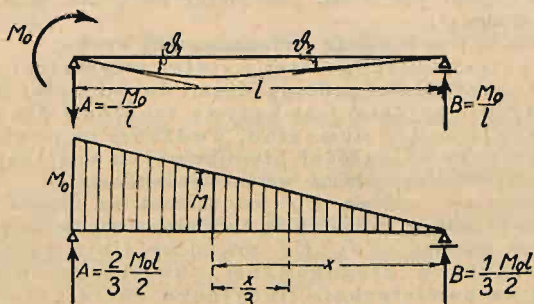


Fig. 153.

**Przykład A.** Obciążenie belki tworzy tylko para sił  $M_0$ , działająca na przekrój podporowy A (fig. 153). Wtedy powierzchnia momentów jest trójkątem o polu  $\frac{1}{2} M_0 l$ , a zatem fikcyjne reakcje:



Zestawienie rozwiązań najczęstszych zadań obliczenia belki prostej.

L. p.	Schemat obciążenia i podparcia	Reakcje $A, B$ i momenty podporowe $M_A$ i $M_B$	Momenty zgięcia $M$ w dowolnym przekroju i $M_{\max}$	Równania linii ugięcia i tang. kąta $\beta$ obrotu przekroju belki (nachylenia stycznej)	Ugięcia $f$	U w a g i
1.		$A = P$ $M_A = -P \cdot l$	$M = -P \cdot x$ $\max  M  = P \cdot l$	$f - y = \frac{Pl^3}{2EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\operatorname{tg} \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EJ} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$	$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$ $(\operatorname{tg} \beta)_{x=0} = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$
2.		$A = q \cdot l$ $M_A = -\frac{ql^2}{2}$	$M = -\frac{qx^2}{2}$ $\max  M  = \frac{ql^2}{2}$	$f - y = \frac{ql^4}{2EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{x^3}{l^3}\right)$ $\operatorname{tg} \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{ql^3}{6EJ} \left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{Ql^3}{8EJ}$ $(\operatorname{tg} \beta)_{x=0} = \frac{ql^3}{6EJ} = \frac{4}{3} \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$ $Q = ql$
3.		$A = Q = \frac{pl}{2}$ $M_A = -\frac{Ql}{3}$	$M = -\frac{Qx^3}{3l^2}$ $\max  M  = \frac{Ql^3}{3}$	$f - y = \frac{Ql^3}{12EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{x^4}{l^4}\right)$ $\operatorname{tg} \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{Ql^2}{12EJ} \left(1 - \frac{x^4}{l^4}\right)$	$f = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{15} = \frac{2}{5} \frac{k_g}{E} \cdot \frac{l^2}{h}$ $(\operatorname{tg} \beta)_{x=0} = \frac{Ql^2}{12EJ} = \frac{5}{4} \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w $A$ $h$ wysokość przekroju symetrycznego względem osi obojętnej
4.		$A = \frac{P(l-c)}{l}, \quad B = \frac{P \cdot c}{l}$	$M = Ax \quad \text{dla } x \leq c$ $M = B(l-x) \quad \text{dla } x > c$ $\max M = M_c = \frac{P(l-c)c}{l}$	$y = \frac{P}{EJ} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \cdot \frac{x}{c} \left(2 + \frac{c}{c_1} - \frac{x^2}{c c_1}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \cdot \frac{x_1}{c_1} \left(2 + \frac{c_1}{c} - \frac{x_1^2}{c c_1}\right)$	$f = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3} \cdot \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{c_1^2}{l^2}$ dla $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{c}}$ przy $c > c_1$ $f_{\max} = \frac{P}{3EJ} \cdot \frac{c_1}{l} \left[\frac{c}{3} (l + c_1)\right]^{3/2}$	Przekrój niebezpiecz. w $C$
		Dla $c = \frac{l}{2}$ $A = B = \frac{P}{2}$	$\max M = \frac{Pl}{4}$	$y = \frac{Pl^3}{16EJ} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$	$f = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{1}{6} \frac{k_g}{E} \frac{l^2}{h}$	$h$ jak wyżej
5.		$A = B = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}$	$M = \frac{qx}{2} (l-x)$ $\max M = \frac{ql^2}{8}$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$ albo $y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x x_1}{l^2} \left(1 + \frac{x x_1}{l^2}\right)$	$f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$ $(\operatorname{tg} \beta)_{x=0} = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^2}{24} = 3,2 \frac{f}{l}$	Przekrój niebezpiecz. w środku
6.		$A = \frac{Q}{3} = \frac{pl}{6}$ $B = \frac{2}{3} Q = \frac{pl}{3}$	$M = \frac{Qx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\max M = \frac{2}{9\sqrt{3}} Ql = 0,128 Ql$	$y = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{180} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5}\right)$	$f_{\max} = 0,01304 \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = 0,5193 l$	Przekrój niebezpiecz. dla: $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,5774 l$
7.		$A = B = P$	Miedzy $A$ i $B$ $M = P \cdot a = \text{stała}$ zewnątrz podpór $M = Px$	Miedzy $A$ i $B$ linia ugięcia jest łukiem koła o promieniu $r = \frac{EJ}{Pa}$	$f = \frac{P \cdot a \cdot l^2}{8EJ} = \frac{l^2}{8r}$ w środku $f_1 = \frac{Pa^2}{6EJ} (3l + 2a)$ po końcach	Przekroje niebezpiecz. na podporach ze względu na siłę poprzeczną

Zestawienie rozwiązań najczęstszych zadań obliczenia belki prostej.

L. p.	Schemat obciążenia i podparcia	Reakcje $A, B$ i momenty podporowe $M_A, M_B$	Momenty zgięcia $M$ w dowolnym przekroju i $M_{\max}$	Równania linii ugięcia i tang. kąta $\beta$ obrotu przekroju belki (nachylenia stycznej)	Ugięcia $f$	U w a g i
8.		$A = B = \frac{Q}{2} = q \frac{l+2a}{2} = \frac{ql_1}{2}$	$M = \frac{Qx}{2} \left(1 - \frac{a}{x} - \frac{x}{l_1}\right)$ między $A$ i $B$ $M = -\frac{Qx^2}{2l^2}$ zewnątrz podpór Bezwzględne wartości momentów zgięcia $M_A$ i $M_C$ stają się równe przy $a = 0,207 l_1$ a mianowicie $M_A = M_{\max} = 0,02145 Q l_1 = \infty \frac{1}{47} Q l_1$		$f = \frac{Ql^2}{384 EJ l_1} (5l^2 - 24a^2)$ $f_1 = \frac{Qa}{24 EJ l_1} (3a^3 + 6a^2 l - l^3)$	Przekroje niebezpieczne na podporach albo w środku, zależnie od tego czy jest $a > 0,207 l_1$ czy też $a < 0,207 l_1$
9.		$A = \frac{Pc^2(2l+c)}{2l^3}$ $B = \frac{P \cdot c(3l^2-c^2)}{2l^3}$	$M = Ax$ (A do C) $M = Ax - P(x-c) = M_B + B(l-x)$ (C do B) $M_B = -\frac{P \cdot c \cdot (l^2-c^2)}{2l^2}$ najw. $M_B$ (dla $c = l/\sqrt{3}$ ) = $-0,193 Pl$	Gdy $c = l/2$ $y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{32} \left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{32} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{Pc^2}{12 EJ} \frac{(l-c)^3}{l^3} (3l+c)$ $\max f = \frac{P(l-c)^2 c}{6 EJ} \sqrt{\frac{c}{2l+c}}$ dla $x = l \sqrt{\frac{c}{2l+c}}$	Przekrój niebezpieczny w B Punkt przegięcia dla $x_1 = \frac{5}{22} l$
10.		$A = \frac{P}{l^3} (l-c)^2 (l+2c)$ $B = \frac{P}{l^3} (3l-2c)c^2$	$M = M_A + Ax$ (A do C) $M_A = -\frac{P \cdot c}{l^2} (l-c)^2$ $M = M_B + B(l-x)$ (C do B) $M_B = -\frac{Pc^2}{l^2} (l-c)$ $\max M_A = -\frac{4}{27} Pl$ dla $c = l/3$	Gdy $c = \frac{l}{2}$ $y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{16} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{Pc^2}{3 EJ} \frac{(l-c)^3}{l^3}$ $\max f = \frac{2 P \cdot c^2}{3 EJ} \frac{(l-c)^3}{(3l-2c)^2}$ gdy $c = l/2$ , to $\max f = \frac{Pl^3}{192 EJ}$	Przekroje niebezpieczne w A, B i C dla $x = \frac{l^2}{3l-2c}$
11.		$A = \frac{3}{8} Q$ $B = \frac{5}{8} Q$	$M = \frac{Qx}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$ , $M_B = -\frac{Ql}{8}$ $\max M = \frac{9}{128} Ql$ w przekroju $x = \frac{3}{8} l$	$y = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{48} \left(\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4}\right)$	$\max f = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{185}$ dla $x = 0,4215 l$	Przekrój niebezpieczny w B Punkt przegięcia dla $x = \frac{3}{4} l$
12.		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{Ql}{12}$ $M_C = \frac{Ql}{24}$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$	$f = \frac{Q}{EJ} \frac{l^3}{384} = \frac{1}{16} \frac{k_b}{E} \cdot \frac{l^2}{h}$	Przekrój niebezpieczny w A i B Punkty przegięcia $x_1 = 0,2113 l$ $x_2 = 0,7887 l$
13.		$A = \frac{1}{5} Q$ $B = \frac{4}{5} Q$	$M = Qx \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_B = -\frac{Ql}{7,5}$ $\max M = 0,0596 Ql$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{60} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2$	$\max f = \frac{1}{209,63} \cdot \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = \frac{l}{\sqrt{5}} = 0,447 l$	Przekrój niebezpieczny w B Największy moment dodatni dla $x = l/\sqrt{5}$ Punkt przegięcia dla $x = 0,775 l$
14.		$A = \frac{3}{10} Q$ $B = \frac{7}{10} Q$	$M = Ql \left(-\frac{1}{15} + \frac{3}{10} \frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3}\right)$ $M_A = -\frac{Ql}{15}$ $\max M = M_B = -\frac{Ql}{10}$ Największy moment dodatni $M_D = \frac{Ql}{23,3}$	$y = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{60} \left(2 \frac{x^2}{l^2} - 3 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^5}{l^5}\right)$	$\max f = \frac{1}{382} \cdot \frac{Ql^3}{EJ}$ dla $x = 0,525 l$	Przekrój niebezpieczny w B Największy moment dodatni dla $x = 0,548 l$ Punkty przegięcia $x = 0,237 l$ i $0,808 l$

NR 3313



NR 3313



NR 3313



NR 3313





$$A^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0 l}{2}, \quad B^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_0 l}{2}.$$

Stąd kąty stycznych podporowych (według wzoru 79):

$$\vartheta_1 = \frac{1}{3} \frac{M_0 l}{EJ}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{M_0 l}{EJ} \quad \dots \quad (77)$$

Fikcyjny moment zgięcia w przekroju odległym o  $x$  od podpory  $B$  ma wartość:

$$M^* = B^* x - \frac{x}{3} \cdot \frac{M_0 x}{2}, \quad \text{a ponieważ} \quad M = M_0 \frac{x}{l},$$

więc:

$$y = \frac{M^*}{EJ} = \frac{M_0}{6 EJ} \cdot l x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

**Przykład B.** Obciążenie jedną siłą skupioną  $P$  w przekroju odległym o  $a$  i  $b$  od podpór  $A$  i  $B$  ( $a+b=l$ ) (fig. 154). Powierzchnia momentów jest trójkątem o polu

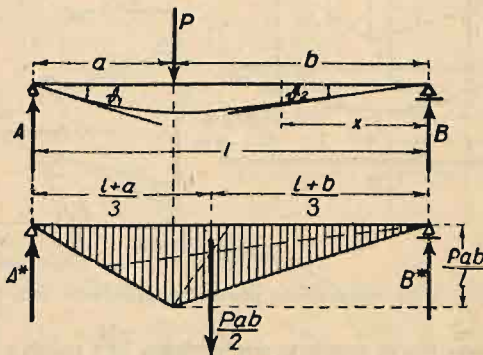


Fig. 154.

$\frac{1}{2} l \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = P \frac{a \cdot b}{2}$ . Środek ciężkości tego pola leży w odległości  $\frac{l+a}{3}$  i  $\frac{l+b}{3}$  od pionowych podporowych  $A$  i  $B$ .

A zatem fikcyjne reakcje:

$$A^* = \frac{P \cdot a \cdot b}{2} \cdot \frac{l+b}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{P \cdot a \cdot b (b+l)}{6 l}, \quad B^* = \frac{P \cdot a \cdot b (a+l)}{6 l},$$

zaś fikcyjny moment zgięcia w przekroju odległym o  $x$  od prawej podpory:

$$M^* = \frac{P \cdot a \cdot b (a+l)}{6 l} x - \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{P \cdot a \cdot x}{6 l} (l^2 - a^2 - x^2).$$

Stąd kąty stycznych podporowych:

$$\vartheta_1 = \frac{A^*}{EJ} = \frac{P a b (b+l)}{6 EJ \cdot l}, \quad \vartheta_2 = \frac{B^*}{EJ} = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (a+l)}{6 EJ \cdot l},$$

zaś ugięcie:

$$y = \frac{P a x}{6 EJ \cdot l} (l^2 - a^2 - x^2).$$

**Przykład C.** Belka  $AB$  (fig. 155) ma w środkowej części o długości 3,6 m stałą sztywność zginania  $EJ_2$ , zaś w dwóch częściach skrajnych o długościach 0,7 m i 1,7 m mniejszą, lecz również stałą sztywność  $EJ_1$ . Materiałem jest żelazo zlewne ( $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ), przy czym  $J_1 = 5450 \text{ cm}^4$ ,  $J_2 = 9950 \text{ cm}^4$ . Naprężenia normalne nie przekraczają nigdzie  $1200 \text{ kg/cm}^2$ . Linje ugięcia znaleziono jako krzywą sznurową dla fikcyjnego obciążenia powierzchnią momentów, przy czym dla części środkowej przyjęto jako odległość biegunową  $\frac{EJ_2}{n}$ , zaś dla części skrajnych  $\frac{EJ_1}{n}$ , jeżeli 1 :  $n$  oznacza obraną na rysunku skalę długości.

**Przykład D.** Płyta żelbetonowa, działająca jako belka  $AB$  obustronnie doskonale utwierdzona (fig. 156), o szerokości  $b = 100 \text{ cm}$  i wysokości  $h = 24 \text{ cm}$  w części środkowej.  $h = 37 \text{ cm}$  na podporach. Przekroje obliczono dla naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_b = 40$  (betonu) i  $\sigma_z = 1200 \text{ kg/cm}^2$  (żelaza). Przyjąwszy  $E_b = 140\,000 \text{ kg/cm}^2$ , otrzymano dla części środ-



kowej stałą sztywność  $EJ_1 = 691000 \cdot 22^3$ , zaś dla części skrajnej sztywność zmienną  $EJ_x = 691000 \cdot \left(35 - \frac{x}{8}\right)^3$ . Momenty  $M$  zredukowano przeto na rysunku według równania

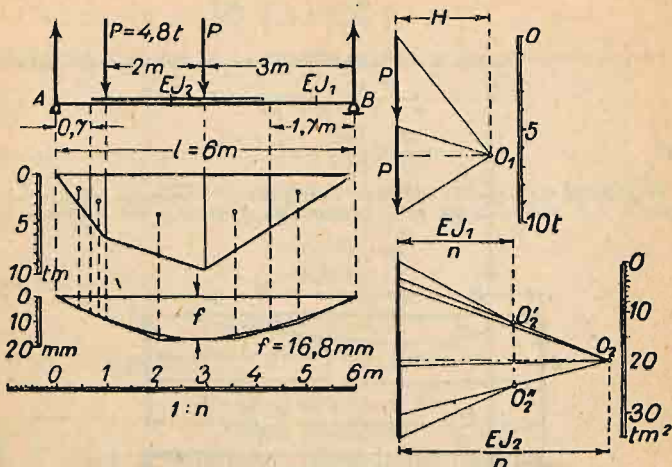


Fig. 155.

$M_{\text{red}} = M \frac{22^3}{\left(35 - \frac{x}{8}\right)^3}$  i dla zredukowanej powierzchni momentów jako powierzchni obciążenia wykreślono krzywą sznurową, przedstawiającą linię ugięcia o skali rzędnych  $2n$ -razy większej od skali długości  $1:n$  (ponieważ odległość biegunowa  $H = EJ_1/2n$ ).

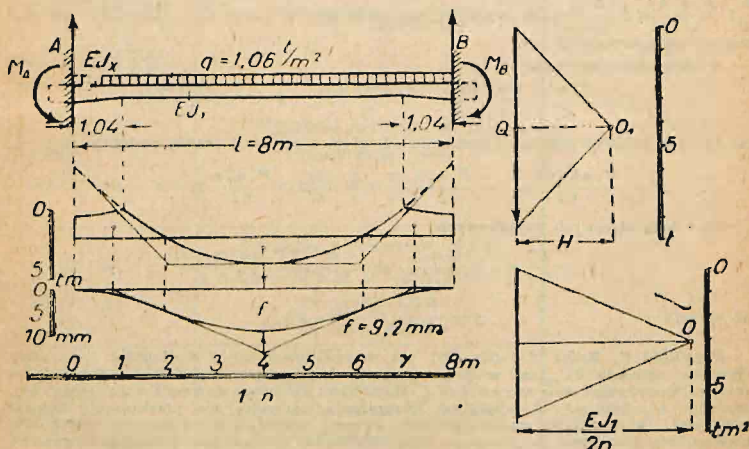


Fig. 156.

40. Wpływ sił poprzecznych na ugięcie belek. Naprężenia styczne, uwarunkowane siłą poprzeczną, wywołują odkształcenia postaciowe prostopadłościennych elementów pręta  $dx \cdot dy \cdot dz$ , które osiągają największą wartość w warstwie obojętnej. Oznaczywszy przez  $\beta$  odpowiadający kąt

odkształcenia postaciowego (fig. 157), a przez  $dy_1$  przyrost ugięcia wywołany tem odkształceniem, mamy:

$$dy_1 = \beta dx = \frac{\tau_0}{G} dx,$$

jeżeli  $\tau_0$  oznacza naprężenie styczne w środkowym elemencie przekroju. Zważywszy, że  $\tau_0 = \alpha \cdot \frac{T}{F}$ , przyczem  $k > 1$  jest współczynnikiem liczbowym, zależnym od kształtu przekroju, otrzymujemy:

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha \cdot \frac{T}{G \cdot F} = \frac{\alpha}{G \cdot F} \cdot \frac{dM}{dx}.$$

Stąd łatwo znaleźć dla belki w obu końcach podpartej, że dodatkowe ugięcia, uwarunkowane naprężeniami stycznymi są proporcjonalne względem odpowiadających momentów zgięcia:

$$y_1 = \frac{\alpha M}{G F}.$$

W ogólniejszych przypadkach podparcia i obciążenia belek szukamy całkowitego ugięcia, całkując uogólnione przybliżone równanie różniczkowe linii ugięcia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{\alpha}{GF} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2},$$

wynikające z kombinacji równań (E) i (F').

(Znak prawej strony odpowiada umowie, że dodatnie  $M$  zgina pręt wypukłością w kierunku dodatnim osi  $Y$ .)

Przy wyznaczaniu stałych całkowania w przypadku, gdy przynajmniej jeden z przekrojów podporowych jest utwierdzonym (np. przekrój  $x_1$ ) należałoby teoretycznie odróżnić utwierdzenie dwójakiego rodzaju:

1. Utwierdzenie, które nie dopuszcza obrotu elementu osi belki

$$\left( \text{odpowiadający warunek podporowy: } \left. \frac{dy}{dx} = 0 \right|_{x=x_1} \right).$$

2. Utwierdzenie, które nie dopuszcza obrotu środkowego elementu pola przekroju

$$\left( \text{odpowiadający warunek podporowy: } \left. \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_0}{G} \right|_{x=x_1} \right).$$

Zważywszy, że w praktyce niepodobna najczęściej liczyć na utwierdzenie doskonałe, lecz tylko na częściowe, przy którym kąt obrotu przekroju podporowego  $\vartheta$  jest proporcjonalny względem wielkości odpowiadającego momentu, możemy jako warunek podporowy przyjąć

$$\left. \frac{dy}{dx} = \vartheta + \frac{\tau_0}{G} \right|_{x=x_1}$$

stosownie do drugiego rodzaju utwierdzenia.

**41. Odkształcenie przekroju poprzecznego przy czystym zginaniu.** Jakkolwiek przekroje pręta zginanego stałym momentem  $M$  pozostają płaskie, to jednak w płaszczyźnie przekroju zachodzą wogóle wydłużenia lub skrócenia, wywołujące pewną zmianę geometrycznej postaci przekroju.

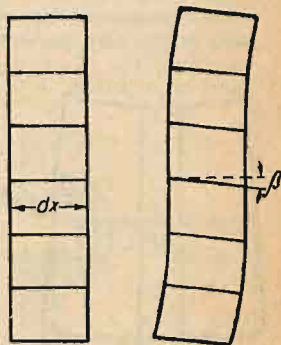


Fig. 157.

Ta zmiana zależy od wartości liczby Poisson'a  $\frac{1}{m}$  i to w ten sposób, że gdyby istniał materiał, dla któregooby było dokładnie  $\frac{1}{m} = 0$ , to przekrój pozostałby zupełnie niezmienionym. Wtedy bowiem nie byłoby odkształcenia poprzecznego podłużnych włókien pręta, narażonych na naprężenia  $\sigma$ . Te odkształcenia poprzeczne są równe  $-\frac{1}{m}$  odkształceń podłużnych, a więc są również proporcjonalne względem odległości  $\eta$  włókna od osi obojętnej, jeżeli przyjmujemy, że ujemne odkształcenia poprzecznych, co odpowiada

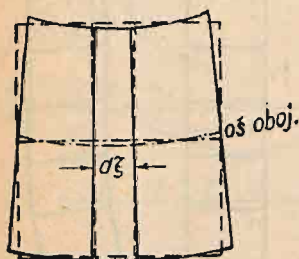


Fig. 158.

rzeczywistości tem ściślej, im mniejsze są rozmiary poprzeczne pręta wobec promienia krzywizny zgięcia. Dzięki odkształceniom poprzecznym zamieni się prostokątny elementarny pasek przekroju, prostopadły do osi obojętnej o stałej szerokości  $d\xi$  na pasek zbieżający się równomiernie ku warstwie skrajnej rozciąganej, a rozszerzający się w ten sam sposób ku warstwie ściskanej, tak, iż przybiera postać nieskończenie wąskiego trapezu, a właściwie elementu pierścienia kołowego (fig. 158). Wskutek łączności wszystkich takich pasków, na jakie dzielimy w myśli cały przekrój, nastąpi równomierne zakrzywienie każdej z warstw równoległych do warstwy obojętnej. W szcze-

gółności zakrzywi się oś obojętna przekroju tak, że jej krzywizna  $\frac{1}{\rho}$ , jest

$m$ -tą częścią krzywizny  $\frac{1}{\rho}$  osi pręta wywołanej zgięciem. Zgięciu osi pręta do promienia  $\rho$  towarzyszy przeto zakrzywienie (zgięcie) poprzeczne o promieniu  $m\rho$ , co stwierdzono (Cornu 1869) bardzo ściśłymi pomiarami na prętach szklanych. Te wyniki mają ważne zastosowanie w teorii zgięcia płyt.

### C. Statycznie niewyznaczalne przypadki zgięcia belek prostych.

42. Proste sposoby podparcia belek i obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych. Napotykanie w praktyce zwykle sposoby ustalenia belek prostych można sprowadzić zwykle do kombinacji następujących teoretycznych rodzajów ustalenia jednego przekroju:

1. Podpora ruchoma, jeżeli środek przekroju jest zmuszony do pozostawania na prostej, najczęściej na pierwotnej osi belki. Reakcję takiej podpory określa w płaszczyźnie jedna wielkość algebraiczna  $A$  (fig. 159).

2. Podpora stała, jeżeli środek przekroju jest unieruchomiony. Do określenia reakcji potrzeba dwu wielkości algebraicznych, np. składowa prostopadła  $V$  i równoległa do osi  $H$  (fig. 160).

3. Utwierdzenie ruchome, jeżeli położenie stycznej do osi jest ustalone w utwierdzonym przekroju, ale sam przekrój (a właściwie pewna część belki) może się jeszcze przesuwać np. w kierunku osi (fig. 161). Reakcję określają dwie wielkości: Moment utwierdzenia  $M_A$  i składowa prostopadła do osi  $A$ .

4. Utwierdzenie stałe, jeżeli ustalono nie tylko położenie stycznej do osi w przekroju utwierdzonym, lecz i jego środek. Reakcję określają trzy wielkości: Moment utwierdzenia  $M_A$ , oraz składowe prostopadła  $V$  i równoległa  $H$  (fig. 162).



Do ustalenia belki w przypadku dowolnych obciążeń, leżących w płaszczyźnie jej osi, wystarcza widocznie utwierdzenie stałe jednego przekroju. Wielkości podporowe  $M_A$ ,  $V$  i  $H$  dadzą się wówczas zawsze obliczyć z trzech warunków równowagi.

Utwierdzenie ruchome wystarcza tylko wtedy, gdy wypadkowa z danych obciążeń jest prostopadła do pierwotnej osi belki.

Trzecim przypadkiem podparcia statycznie wyznaczalnego jest widocznie kombinacja podpory stałej w jednym przekroju z ruchomą w drugim. Wszelkie inne kombinacje prowadzą wogóle do przypadków statycznie niewyznaczalnych, tj. do liczby niewiadomych większej od trzech. Atoli w szczególnie ważnym praktycznym przypadku dwu podpór stałych przy obciążeniu, nie dającym składowej równoległej do osi, można, o ile belka

Fig. 159.

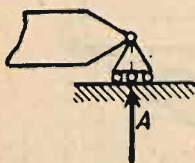


Fig. 160.

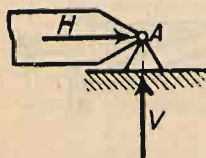


Fig. 161.

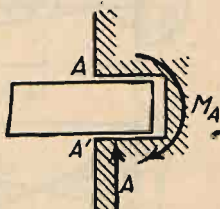
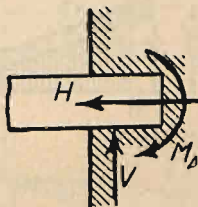


Fig. 162.



nie jest zbyt wiotka, pominąć wpływ składowych reakcyj równoległych do osi i bez wielkiego błędu traktować zadanie jako statycznie wyznaczalne, czyli „izostatyczne”.

Podobnie można zadanie belki w obu końcach stałe utwierdzonej traktować przy powyższem zastrzeżeniu tak, jak gdyby jeden jej koniec był utwierdzony ruchomo, czyli uważać ją w przybliżeniu za podwójnie (zamiast potrójnie) statycznie niewyznaczalną, czyli „hiperstatyczną”.

Teoria linii ugięcia pozwala zawsze obliczyć wielkości „statycznie niewyznaczalne” z warunków podporowych. Aby je znaleźć, wychodzimy z równania różniczkowego linii ugięcia i wyraziwszy moment zginający  $M$  w zależności od odciętej  $x$  oraz sił zewnętrznych, między którymi będą także wielkości statycznie niewyznaczalne, całkujemy je. Warunki podporowe wystarczają nie tylko do wyznaczenia stałych całkowania, ale także wszystkich wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Prościej dochodzimy do celu drogą następującą:

Usuwanie zbędne ustalenia tak, aby otrzymać belkę statycznie wyznaczalną i obliczamy kąty obrotu lub ugięcia przekrojów podporowych pod wpływem danych obciążeń. Następnie usuwamy te obciążenia i działamy na belkę nieznanymi siłami, zastępującymi zbędne ustalenia. Będą to bądź reakcje poprzednie usuniętych podpór, bądź też momenty usuniętych utwierdzeń. Uważając je za znane, obliczamy znowu odpowiadające ugięcia i kąty obrotów przekrojów podporowych. Z warunku, aby wypadkowe ugięcia

zbędnych podpór, albo kąty obrotu przekrojów, niepotrzebnie utwierdzonych, były równe zero, łatwo obliczyć wielkości statycznie niewyznaczalne.

**Przykład.** Belka równomiernie obciążona, w jednym końcu utwierdzona, a w drugim ruchomo podparta.

**Rozwiązanie I.** Usuamy zbyteczne utwierdzenie, wskutek czego belka staje się w obu końcach podpartą. Reakcje podpór są teraz obie równe  $+\frac{ql}{2}$ ; wykres momentów jest parabolą  $A'C'B'$  (fig. 163) a wykres sił poprzecznych prostą  $A_1B_1$ . Z równania linii ugięcia (lub według ust. 7, str. 77) obliczamy kąty obrotu przekrojów podporowych:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{ql^3}{24 EJ}.$$

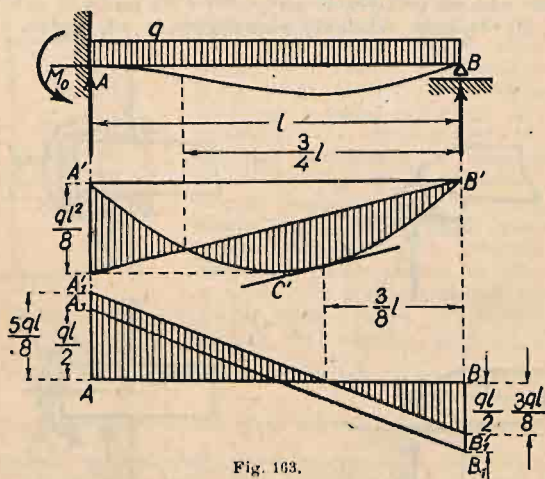


Fig. 163.

Na koniec A działamy teraz nieznanym momentem  $M_0$ , który wywołuje w A i B dodatkowe reakcje równe  $-\frac{M_0}{l}$  i  $+\frac{M_0}{l}$  i kąty obrotu przekrojów:

$$\vartheta_1' = +\frac{M_0 l}{3 EJ}, \quad \vartheta_2' = +\frac{M_0 l}{6 EJ}.$$

Z warunku utwierdzenia, tj.  $\vartheta_1 + \vartheta_1' = 0$ , czyli  $\frac{ql^3}{24 EJ} + \frac{M_0 l}{3 EJ} = 0$ , wynika  $M_0 = -\frac{1}{8} ql^2$ . Dla reakcyj otrzymujemy wartości wypadkowe:

$$A = \frac{ql}{2} - \frac{M_0}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8} ql; \quad B = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8} ql,$$

zaś w wykresie sił poprzecznych prostą  $A_1'B_1'$  równoległą do  $A_1B_1$ .

**Rozwiązanie II.** Usuamy podporę B, wskutek czego belka staje się jednym końcem utwierdzoną. Reakcja w utwierdzonym przekroju staje się teraz równą  $+ql$ , a moment utwierdzenia równy  $-\frac{ql^2}{2}$ . Wykres momentów zginających (fig. 164) staje się parabolą  $A''B$  o wierzchołku w B. Dla ugięcia końca B mamy wzór:

$$f_1 = \frac{ql^3}{8 EJ}.$$

Teraz działamy na tenże koniec siłą równą niewiadomej reakcji B, która sama wywołuje ugięcie:

$$f_2 = -\frac{B l^3}{3 EJ}.$$

Z warunku:  $f_1 + f_2 = 0$  wynika:

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

Odpowiadający moment podporowy w  $A$  równa się  $+Bl = \frac{3}{8}ql^2$ , a zatem wypadkowy moment utwierdzenia w  $A$ :

$$M_0 = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql^2 = -\frac{1}{8}ql^2 = \overline{A'A''}.$$

Łącząc linią prostą punkt  $A''$  z  $B$  otrzymujemy zakreskowany wykres momentów zginających ilościowo zgodny ze znalezionym poprzednio. Do identycznego z poprzednim wy-

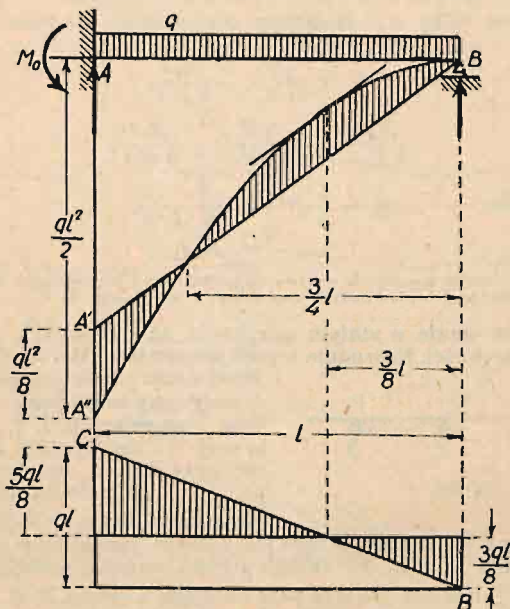


Fig. 164.

kresu sił poprzecznych dochodzimy zaś odejmując od rzędnych trójkąta  $ABC$  o wysokości  $AC = ql$  rzędne prostokąta o wysokości  $\frac{3}{8}ql$ .

43. Belka o końcach sprężysto utwierdzonych. Przy utwierdzeniu sprężystym obraca się styczna podporowa (do linii ugięcia) o kąt  $\vartheta_0$ , który z wystarczającym przybliżeniem przyjmujemy jako proporcjonalny względem momentu podporowego  $M_0$ .

A zatem:  $M_0 = K \cdot \vartheta_0$ .

Spółczynnik  $K$  o wymiarze momentu mierzy „sztywność utwierdzenia”. Przy utwierdzeniu zupełnym (doskonałym)  $K = \infty$ , przy swobodnym podparciu  $K = 0$ . W wielu przypadkach można obliczyć  $K$ , np.: Belka pozioma  $AC$  (fig. 165) półramy  $ACB$  zachowuje się jak podparta w punkcie  $A$ , a sprężysto utwierdzona w  $C$ . Słup zaś  $CB$  działa jako belka podparta

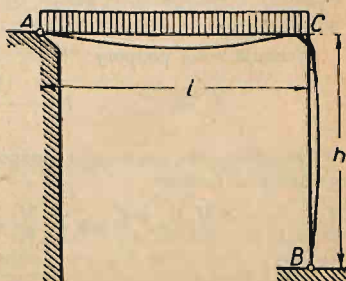


Fig. 165.



w  $B$  i sprężystość utwardzona w  $C$ . Pomijając wpływ sił podłużnych i poprzecznych na odkształcenie, mamy dla słupa  $BC$  kąt obrotu przekroju  $C$  pod wpływem momentu  $M_0$  w tymże przekroju:

$$\vartheta_0 = \frac{M_0}{K} = \frac{M_0 h}{3 E_1 J_1}; \text{ a więc } K = \frac{3 E_1 J_1}{h},$$

szttywność utwardzenia  $K$  belki  $AC$  jest przeto tem większa, im większa jest sztywność zginania słupa, a mniejsza jego wysokość.

Jeżeli teraz belkę  $AC$  obciążymy równomiernie, to tenże kąt określi równanie:

$$\vartheta_0 = \frac{q l^3}{24 E J} - \frac{M_0 l}{3 E J}.$$

A zatem:

$$\frac{M_0 h}{3 E_1 J_1} = \frac{q l^3}{24 E J} - \frac{M_0 l}{3 E J},$$

z czego wynika:

$$M_0 = \frac{1}{8} q l^2 \frac{1}{1 + \frac{E \cdot J}{E_1 J_1} \frac{h}{l}}.$$

Uwaga. Z powodu pominięcia wpływu sił podłużnych i poprzecznych nie można stosować tego wzoru przy bardzo małych wartościach  $h$  w stosunku do  $l$ .

#### 44. Belka ciągła o stałym przekroju na sztywnych podporach o równej wysokości. Równanie trzech momentów (Bertot-Clapeyron).

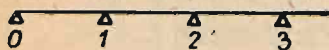


Fig. 166.

Jeżeli liczba podpór jest większa od 2, to nazywamy belkę ciągłą. Podpory po sobie następujące 0, 1, 2, ... ( $r-1$ ),  $r$ , ( $r+1$ ) ...  $n$  (fig. 166) dzielą belkę na przęsła o rozpiętościach  $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ . Belka ciągła bywa przeto dwu-, trzy-, ...  $n$ -przęsłowa.

Obliczywszy dla każdego przęsła pomyślanego jako belka w obu końcach podparta reakcje  $A_r$  i  $B_r$  ( $r$  wskaźnik przęsła), momenty zginające  $M^0$  i siły poprzeczne  $T^0$ , możemy obliczyć odpowiadające wielkości  $R, M, T$  dla belki ciągłej, jeżeli wyznaczymy wielkości momentów podporowych  $M_0, M_1, \dots, M_n$ .

Dla  $r$ -tego przęsła (fig. 167) mamy w przekroju odległym o  $x$  od lewej podpory:

$$M = M^0 + M_{r-1} \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \frac{x}{l_r},$$

$$T = T^0 + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} x.$$

Reakcja  $r$ -tej podpory:

$$R_r = A_{r+1} + B_r + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Do obliczenia momentów podporowych służą równania trzech momentów o postaci:

$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} =$$

$$= -6 \frac{\Omega_r \cdot a_r}{l_r} - 6 \frac{\Omega_{r+1} \cdot b_{r+1}}{l_{r+1}} = U_{r, r+1}.$$

Tutaj oznacza:

$\Omega_r$  pole powierzchni momentów  $M^0$  przęsła  $r$ -go przy dowolnem obciążeniu;  $a_r$  i  $b_r$  odległości środka tego pola od lewej i prawej podpory. Te równania w liczbie  $(n-1)$  wystarczają do obliczenia  $(n-1)$  momentów podporowych. W przypadku doskonałego utwierdzenia na podporach skrajnych przybierają nadto równania:

$$2 M_0 l_1 + M_1 l_1 = - \frac{6 \Omega_1 b_1}{l_1} = U_{0,1},$$

$$M_{n-1} l_n + 2 M_n l_n = - \frac{6 \Omega_n a_n}{l_n} = U_{n,n+1},$$

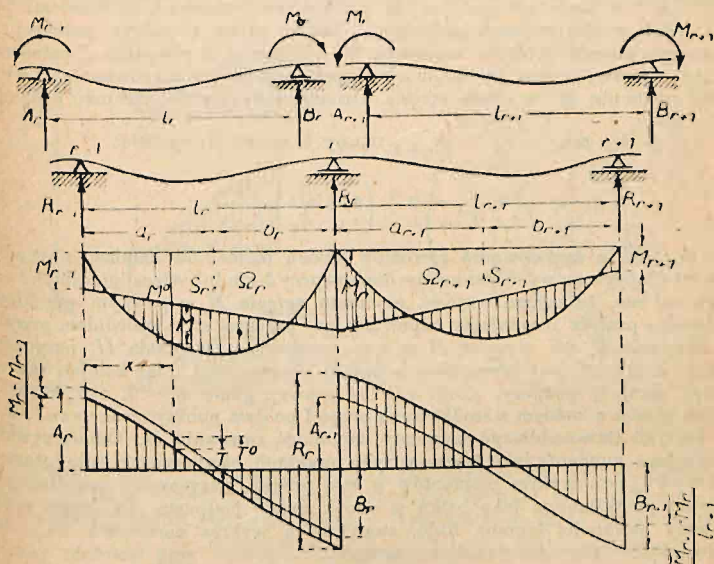


Fig. 167.

które łatwo napisać według ogólnego schematu dla pomyślanego przęsła zero-wego i 1-go, oraz dla przęsła  $n$ -tego i pomyślanego  $(n+1)$ -go, przyjmąwszy  $l_0 = l_{n+1} = 0$ ,  $\Omega_0 = \Omega_{n+1} = 0$ .

Jeżeli obciążenie każdego przęsła tworzy jedna siła skupiona  $P_r$ , odległa od lewej podpory o  $c_r$ , a od prawej o  $d_r$ , tudzież obciążenie równomiernie rozłożone  $q_r$  (kg/m) na całej długości przęsła, to:

$$U_{r,r+1} = - \frac{q_r \cdot l_r^3}{4} - \frac{q_{r+1} \cdot l_{r+1}^3}{4} - \frac{P_r \cdot c_r \cdot d_r (l_r + c_r)}{l_r} - \frac{P_{r+1} \cdot c_{r+1} \cdot d_{r+1} (l_{r+1} + c_{r+1})}{l_{r+1}},$$

45. Równanie dwóch momentów (M. Lévy). Niechaj  $M$  oznacza moment zgięcia w przekroju  $x|l_r$  —  $x$  przęsła  $r$ -go, zaś  $M'$  oznacza moment zgięcia w przekroju  $x'|l_{r+1}$  —  $x'$  przęsła  $(r+1)$ -go; to jeżeli zachodzi związek:

$$2(l_r + l_{r+1}) - \frac{x}{l_r - x} \cdot l_r - \frac{l_{r+1} - x'}{x'} \cdot l_{r+1} = 0 \quad \dots I$$

$$\text{albo} \quad \frac{l_r^2}{l_r - x} + \frac{l_{r+1}^2}{x'} = 3(l_r + l_{r+1}) \quad \dots I'$$

wówczas  $M$  i  $M'$  czynią zadość równaniu dwóch momentów:

$$(M - M^0) \frac{l_r^2}{l_r - x} + (M' - M'^0) \frac{l_{r+1}^2}{x'} = U_{r,r+1} \quad \dots II$$

przyczem  $U_{r,r+1}$  ma to samo znaczenie, co w ustępie 44., a momenty  $M^0$  i  $M'^0$  w przekrojach  $x$  i  $x'$  są wielkościami znanymi, obliczonymi jak dla belek w obu końcach podpartych. Znając zatem w jednym przekroju  $x$  danego przesła wielkość momentu  $M$ , obliczymy z równania  $I$  położenie „odpowiadającego“ przekroju  $x'$  w przesele sąsiednim, a z równania  $II$  wielkość momentu  $M'$  w temże przesele. Oznaczywszy wartość stosunku podziału  $\frac{l_r - x}{x} = k_r$ , zaś  $\frac{l_{r+1} - x'}{x'} = k_{r+1}$  mamy z wzoru (I) ogólnie:

$$k_{r+1} = 2 + \left(2 - \frac{1}{k_r}\right) \frac{l_r}{l_{r+1}} \quad \dots I''$$

Korzyść z zastosowania równania dwóch momentów zamiast równania Bertot-Clapeyrona wychodzi na jaw dopiero przy 5-ciu lub więcej przesłach i polega na tem, że znając wartość momentu zgięcia  $M$  w pewnym przekroju  $x$  danego przesła znajdujemy odpowiadający przekrój  $x'$  w sąsiednim przesele z równania  $I$ , zaś moment  $M$  w tym przekroju z równania  $II$ , przyczem każde z równań jest równaniem o jednej niewiadomej. Idąc kolejno raz od lewej skrajnej podpory, drugi raz od prawej, gdzie  $M = 0$ , otrzymujemy w ten sposób w każdym z środkowych przesłów po dwa punkty zwane stałemi, w których łatwo obliczyć momenty zapomocą równania  $II$ . Odmierzwszy znalezione momenty jako rzędne w tych punktach, otrzymujemy linię (prostą), zamykającą wykres momentów w tem przesele, narysowany przedtem dla przesła pomyślanego jako belka w obu końcach podparta. Tą drogą znajdujemy najłatwiej łamaną linię, zamykającą wykres momentów na całej belce, która łączy dwie podpory skrajne.

### D. Zginanie w połączeniu z siłą podłużną.<sup>1)</sup>

(Mimoosiowe rozciąganie lub ściskanie.)

46. Prosty przypadek szczególny. Jeżeli siły zewnętrzne, działające na część pręta, odciętą rozpatrywanym przekrojem, spowodują się do siły podłużnej  $P$  i momentu zginającego  $M$  (fig. 168), to takie obciążenie przekroju jest statycznie równoważne z obciążeniem mimośrodkowem taką samą siłą  $P$ , przyczem mimośród  $e = \frac{M}{P}$  i leży w płaszczyźnie pary zginającej. Ten przypadek zachodzi najczęściej u prętów pionowych czyli słupów. Jeżeli zatem mimośrodkowe obciążenie  $P$  leży w płaszczyźnie głównej słupa, czyli trafia w główną centralną oś bezwładności przekroju, to obrawszy ją za oś  $Y$ , obliczymy naprężenie normalne  $\sigma$  przy pomocy zasady superpozycji jako sumę:

<sup>1)</sup> W tym rozdziale pominięto ważną kwestję wpływu sił ściskających lub rozciągających pręt podłużnie na zginanie główne, wywołane momentami poprzecznych. O tem będzie traktować rozdział IX.



$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{M}{J_z} y = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot e}{J_z} y.$$

Pierwszy wyraz oznacza tutaj naprężenia, wywołane obciążeniem środkowym  $P$ , drugi zaś naprężenie, wywołane momentem zginającym  $M = P \cdot e$ , przy czym oś objętną (zginania) jest oś  $Z$ . Znak  $+$  obu wyrazów odpowiada przypadkowi siły ciągnącej  $P$  w punkcie leżącym na dodatniej części osi  $Y$ . Rozmieszczenie naprężeń wzdłuż osi  $Y$  (lub jakiegokolwiek prostej równoległej do niej) przedstawia wykres, trapezowy (fig. 169), jeżeli w całym obszarze przekroju ma  $\sigma$  ten sam znak algebraiczny. Pomyślana oś obojętna (linia zerowa) leży wówczas zewnątrz przekroju. Natomiast wykres ten składa się z dwu trójkątów, jeżeli  $\sigma$  zmienia znak na obszarze przekroju. Odpowiadająca oś obojętna przecina wtedy przekrój, dzieląc go na część rozciąganą



Fig. 168.



Fig. 169.

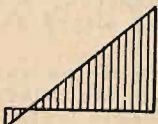


Fig. 170.



Fig. 171.

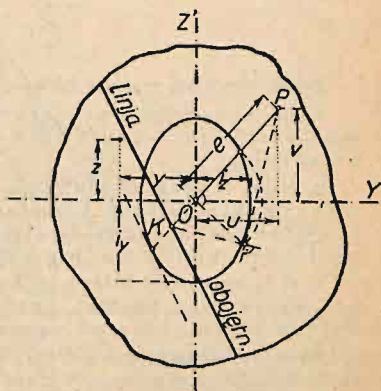


Fig. 172.

i ściskaną (fig. 170). W przypadku granicznym staje się wykres trójkątem (fig. 171); linia zerowa dotyka wtedy konturu przekroju nie przecinając go.

Gdy np. przekrój jest prostokątem o wymiarach  $b, h$ , to wypadek graniczny zachodzi przy  $e = \pm \frac{h}{6}$ . Jeżeli zatem jest liczebnie  $e \leq \frac{h}{6}$ , to naprężenia nie zmieniają znaku w przekroju. To prowadzi do reguły, przestrzeganej odnośnie do murów na zaprawie wapiennej, aby wypadkowa z obciążeń przekroju nie wychodziła ze środkowej trzeciej części grubości muru. Ta reguła ma na celu uniknięcie ciągnięć, na które zaprawa wapienna jest mało wytrzymała.

**47. Przypadek ogólny.** Jeżeli płaszczyzna pary zginającej nie przechodzi przez jedną z głównych osi bezwładności przekroju, czyli gdy środek obciążenia  $P$  nie trafia żadnej z tych osi  $Y$  i  $Z$  (fig. 172), lecz ma współrzędne  $(u, v)$ , to moment zginający  $P \cdot e$  rozkładamy na dwa momenty  $M_z = P \cdot u$  i  $M_y = P \cdot v$  zginające odpowiednio w płaszczyznach  $XY$  i  $XZ$ , a naprężenie  $\sigma$  w dowolnym punkcie przekroju o współrzędnych  $(y, z)$  obliczamy według zasady superpozycji jako sumę:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot u}{J_z} y + \frac{P \cdot v}{J_y} z.$$

Ponieważ  $J_z = F i_z^2$ ,  $J_y = F i_y^2$  ( $i_y, i_z$  odpowiadające ramiona bezwładności), przeto:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{u \cdot y}{i_z^2} + \frac{v \cdot z}{i_y^2} \right).$$

Kładąc  $\sigma = 0$ , otrzymujemy równanie odpowiadającej linii obojętnej:

$$1 + \frac{u \cdot y}{i_z^2} + \frac{v \cdot z}{i_y^2} = 0.$$

Ta linia wyznacza na osiach  $Y$  i  $Z$  odcinki  $-\frac{i_z^2}{u}$ ,  $-\frac{i_y^2}{v}$ , a zatem ze względu na środek przekroju  $O$  leży po przeciwnej stronie niż środek obciążenia ( $u, v$ ) i to tem bliżej  $O$ , im większe  $u$  i  $v$ , czyli im większe  $e$ . Równanie Culmannowskiej elipsy bezwładności przekroju ma postać:

$$\frac{\eta^2}{i_z^2} + \frac{\xi^2}{i_y^2} = 1.$$

Z obu ostatnich równań łatwo odczytać następujące prawidła:

1. Kierunek linii obojętnej jest sprzężony z kierunkiem mimośrodowo obciążenia ze względu na elipsę bezwładności przekroju.

2. Gdy środek obciążenia znajduje się na obwodzie Culmannowskiej elipsy bezwładności, to odpowiadająca linia obojętna jest styczna do elipsy w punkcie leżącym na przeciwnym końcu średnicy  $2\rho$ .

3. Gdy środek obciążenia  $P$  oddala (zbliża) się od środka przekroju  $O$  po prostej, przechodzącej przez  $O$ , to odpowiadająca linia obojętna porusza się równolegle i zbliża do (oddala od)  $O$  tak, że  $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \text{stała} = \rho^2$  ( $K$  jest punktem przecięcia linii obojętnej z prostą  $OP$ , zaś  $\rho$  połową średnicy elipsy leżącej na  $OP$ ).

Zważywszy, że taki sam związek ( $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \rho^2$ ) zachodzi między punktem  $P$  jako biegunem, a prostą  $l$  jako biegunową, przecinającą średnicę o kierunku  $OP$  w punkcie  $K$ , przyczem jednak  $K$  i  $P$  leżą po tej samej stronie środka elipsy  $O$ , nazywamy linię obojętną przeciwbiegunową punktu  $P$  i nawzajem ten punkt przeciwbiegunem dla owej linii. Przenosząc znane z geometrii twierdzenie o biegunach i biegunowych krzywych rzędu drugiego do środka obciążenia i linii obojętnej jako przeciwbieguna i przeciwbiegunowej, otrzymujemy prawidła następujące:

1. Każdemu punktowi płaszczyzny przekroju, uważanemu za środek obciążenia, odpowiada jako oś obojętna przeciwbiegunowa tego punktu względem Culmannowskiej elipsy bezwładności; nawzajem każdej dowolnej prostej na płaszczyźnie przekroju, uważanej za oś obojętną odpowiada przeciwbiegun tej prostej jako środek obciążenia.

2. Gdy środek obciążenia porusza się na dowolnej prostej, to odpowiednia oś obojętna obraca się około przeciwbieguna tej prostej i nawzajem:

3. Gdy oś obojętna obraca się około dowolnego punktu, to odpowiedni środek obciążenia porusza się na przeciwbiegunowej tegoż punktu.

48. Rdzeń czyli jądro przekroju. Tak nazywamy miejsce geometryczne wszystkich środków obciążenia, które w danym przekroju wywołują naprężenia tego samego znaku. Ażeby tedy znaleźć dowolną liczbę punktów konturu rdzenia, kreślimy dla przekroju Culmannowską elipsę bezwładności i dowolną liczbę prostych nie przecinających przekroju, lecz mających z jego

konturem przynajmniej jeden punkt wspólny. Wyznaczywszy na podstawie związku  $\overline{KO} \cdot \overline{OP} = \rho^2$  przeciwbieguny tych prostych mamy tyleż punktów konturu rdzenia.

Jeżeli kontur przekroju jest wielobokiem wypukłym, to każdemu bokowi jako linii obojętnej odpowiada punkt jako wierzchołek wielokątnego konturu rdzenia.

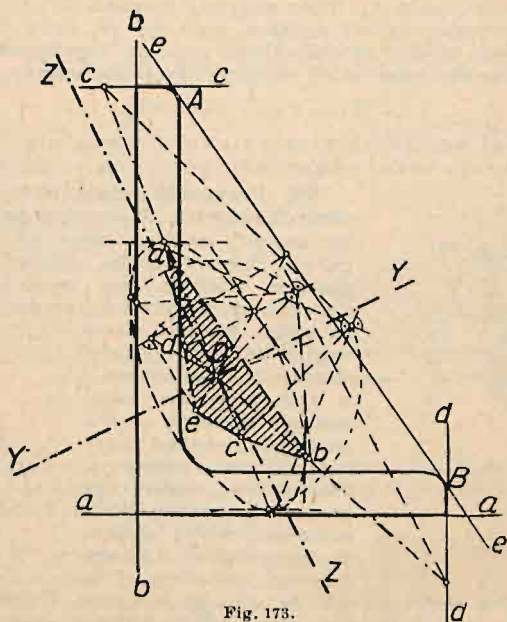


Fig. 173.

Jeżeli kontur przekroju jest wklęsły między punktami A i B (fig. 173), to łączymy je prostą AB, a odpowiadający jej przeciwbiegun e jest wierzchołkiem konturu rdzenia.

Wykreślenie Culmannowskiej elipsy bezwładności nie jest konieczne potrzebne do konstrukcji rdzenia. Można ją oprzeć na równaniu linii obojętnej w postaci odcinkowej:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\text{przyczem } b = -\frac{i_z^2}{u}, \quad c = -\frac{i_y^2}{v}.$$

Przedłużwszy np. prostą AB aż do przecięcia się z osiami bezwładności Y i Z, znajdujemy odcinki b i c, a z nich obliczamy lub wyznaczamy wykreślnie zapomocą znanej konstrukcji (fig. 174):

$$u = -\frac{i_z^2}{b}, \quad v = -\frac{i_y^2}{c}.$$

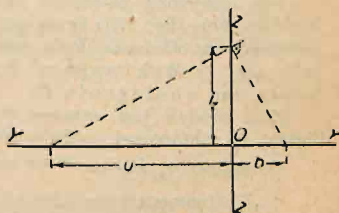


Fig. 174.

49. Wyznaczenie naprężeń skrajnych przy ukośnem zginaniu przy pomocy rdzenia przedstawia się w nadzwyczaj prosty sposób. Płaszc-



czyzna obciążenia, wywołującego zgięcie, wyznacza dwa promienie rdzenia  $OK_1 = k_1$  i  $OK_2 = k_2$  (fig. 174 a). Naprężenia we włóknie skrajnem, leżącym po przeciwnej stronie punktu  $K$  (względem  $O$ ), określa wzór:

$$\sigma_1 = \frac{M}{F k_1}$$

i podobnie dla punktu  $K_2$ . Wzór powyższy prowadzi do uogólnienia wielkości geometrycznej zwanej modułem przekroju  $W$ , którą w przypadku prostego zgięcia określa się jako iloraz momentu bezwładności przez odległość włókna skrajnego od osi obojętnej. Teraz zaś mamy:

$$W_1 = F k_1, \quad W_2 = F k_2,$$

czyli moduł przekroju przy zginaniu równa się iloczynowi pola przekroju przez odpowiadający promień rdzenia.

**50. Przypadek przekrojów nieprzenośzących ciśnień.** W szwach słupa murywanego bez zaprawy nie mogą oczywiście powstać ciągnięcia, chociażby środek obciążenia leżał poza rdzeniem przekroju [nie wychodząc zarazem z wnętrza figury (obwiedniej) przekroju ze względu na ogólne warunki równowagi]. Każdemu środkowi obciążenia  $P$  odpowiada i w tym przypadku jednoznacznie określona oś obojętna, jeżeli również przyjmujemy linjowe prawo rozkładu ciśnień, jako najprostsze i prawdopodobnie najczęściej wielce zbliżone do rzeczywistości. Atoli wyznaczenie osi obojętnej dla

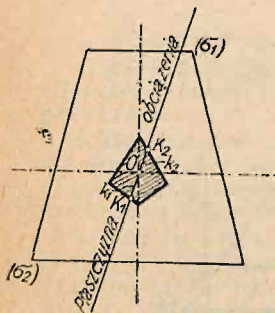


Fig. 174 a.

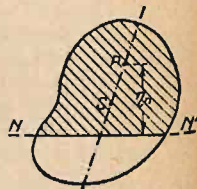


Fig. 175.

danego środka obciążenia nie da się ująć w ogólne i proste prawidła, podobne do podanych powyżej w przypadku zdolności przekroju do przenoszenia tak ciągnięć jak i ciśnień. Natomiast bardzo łatwo rozwiązać zadanie odwrotne, tj. znaleźć środek obciążenia, odpowiadający danej osi obojętnej.

Ich wzajemną zależność można określić w następujący sposób: Pomysłmy sobie (fig. 175) figurę przekroju w takim położeniu, aby jej część  $F'$ , narażona na ciśnienie, była zanurzona w płynie aż po oś obojętną  $NN'$ ; wówczas środek naporu hydrostatycznego na  $F'$  jest zarazem środkiem obciążenia  $P$ .

[Ten środek jest zarazem środkiem wahań jednolitej ciężkiej figury  $F'$ , obracalnej około poziomo ustawionej osi  $NN'$ ].

Odległość  $r_n$  środka  $P$  od osi  $NN'$  określa wtedy równanie

$$r_n = \frac{J_n \text{ (moment bezwładności ściskanej części przekroju względem } NN')}{S_n \text{ (moment statyczny ściskanej części przekroju względem } NN')}$$

To równanie wystarcza do rozwiązania zadania w przypadku, gdy oś obojętna jest prostopadła do osi symetrii przekroju jak np.:

A. W przekroju prostokątnym obciążonym siłą osi  $P$  na osi symetrii (fig. 176) w odległości  $d < \frac{1}{3} b$  od boku  $h$ , leży odpowiadająca oś obojętna  $NN'$  w odległości  $r_n = 2d$  od  $P$ . Szerokość ściskanej strefy  $= 3d$ . Skrajne ciśnienie:

$$\sigma_1 = 2 \frac{P}{3 b d} = 2 \sigma_0',$$

jeżeli  $\sigma_0'$  oznacza średnią wartość ciśnienia w tej strefie. Ta wartość jest widocznie większa od  $\sigma_0 = \frac{P}{b h}$ , czyli średniej wartości ciśnienia w całym przekroju.

B. Inne przypadki. 1.) Oś obojętna odcina trójkąt jako przekrój „skuteczny”. Jeżeli środek obciążenia  $P$  (fig. 177) leży dość

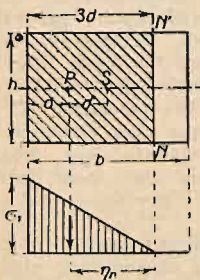


Fig. 176.

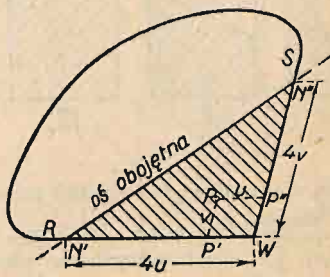


Fig. 177.

blisko wierzchołka  $W$ , w którym się schodzą dwa proste boki  $WR$  i  $WS$ , ograniczające przekrój, wtedy łatwo znaleźć ściśle odpowiadającą oś obojętną zapomocą konstrukcji następującej: Prowadzimy z  $P$  prostą  $PP' \parallel SW$  i  $PF'' \parallel RW$ , odcinamy  $WN' = 4 PP' = 4u$  i  $WN'' = PP' = 4v$ .

Prosta  $N'N''$  jest szukaną osią obojętną, o ile punkty  $N'$  i  $N''$  wypadają na odpowiadających bokach, a nie na ich przedłużeniach. Największe ciśnienie  $\sigma_w$  w wierzchołku  $W$ :

$$\sigma_w = \frac{3P}{8uv \sin \alpha}.$$

2. Oś obojętna  $NN'$  odcina trapez  $NN'BA$  (fig. 178) jako „skuteczną” część przekroju  $ABCD$ . Aby znaleźć środek obciążenia, odcinamy  $AK = \frac{AN}{3} = \frac{x_1}{3}$

i łączymy  $K$  z  $O$ . Następnie obliczamy długość odcinka  $x_0$  z wzoru:

$$x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^3 - x_2^3}$$

i wstawiamy ten odcinek między proste  $AB$  i  $NN'$  równoległe do  $x_1$  i  $x_2$ . Jego punkt przecięcia się z prostą  $KO$  jest szukanym środkiem obciążenia  $P$ . Czasami dogodniej obliczyć i odmierzyć wielkość  $y_0$  z wzoru:

$$y_0 = \frac{y_1}{x_1} x_0 = \frac{y_2}{x_2} x_0 = \frac{3}{4} \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^3 - x_2^3}.$$

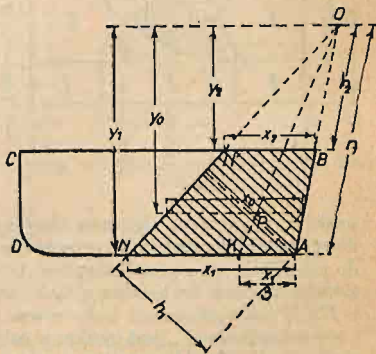


Fig. 178.

Największe ciśnienie  $\sigma_A$  w punkcie  $A$  znajdujemy z wzoru:

$$\sigma_A = \frac{6 P x_1^2}{y_1 (x_1^3 - x_2^3)}.$$

C. Przekrój prostokątny w przypadku ogólnym. Linje wyznaczne. Zależnie od położenia środka obciążenia będzie skuteczna część przekroju mieć jedną z postaci zakreślowanych na fig. 179.

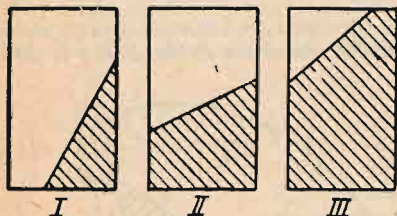


Fig. 179.

rech pól, oznaczonych na fig. 180 przez *II*. Rozwiązanie zadania mieści się w B. 2.

Przypadek *III* zachodzi, gdy środek obciążenia znajduje się w jednym z czterech pól, przylegających do rdzenia i oznaczonych przez *III* na fig. 180. Skuteczna część przekroju jest teraz pięciobokiem. Linje rozgraniczające pola częściowe przekroju *I*, *II*, *III* wraz z rdzeniem nazywają linjami wyznaczniemi.

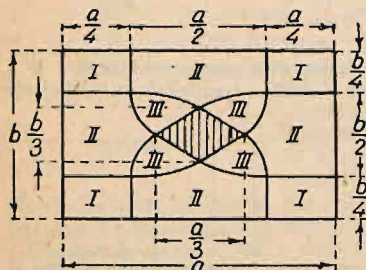


Fig. 180.

D. Wykreślne wyznaczenie osi obojętnej w przypadku, gdy środek obciążenia leży na osi symetrii przekroju. Dany przekrój (fig. 181) dzielimy na wąskie paski prostopadłe do osi symetrii i kreślimy wielobok sznurowy fikcyjnych ciężarów tych pasków, podobnie jak się to robi dla wyznaczenia momentu bezwładności sposobem Mohra. Kierunek długości

pasków, a zarazem kierunek fikcyjnych sił, jest równoległy do osi  $Y$ . Przez dany środek obciążenia  $P$  prowadzimy następnie prostą o tymże kierunku aż do przecięcia się z przedłużeniem  $AC$  skrajnego boku wieloboku w punkcie  $G$ . Z tego punktu wykreślamy bok zamykający  $GED$  tak, aby pola  $AGE$  i  $EJD$  (zakreślowane) były równe. Wtedy prosta, przechodząca przez  $D$  i równoległa do  $Y$ , jest szukaną osią obojętną, odpowiadającą środkowi obciążenia  $P$ . Dowód wynika z równania określającego odległość  $P$  od osi obojętnej ilorazem  $J_n/S_n$ . Ponieważ  $J_n$  = iloczynowi pola figury  $AEDJC$  przez  $2H$  ( $H$  odległość biegunowa), a figurę tę przekształciliśmy na równoważny  $\Delta DGC$ , przeto  $J_n = \frac{b h}{2} \cdot 2H$ .

Zważywszy zaś, że  $S_n = bH$ , otrzymamy:

$$\frac{J_n}{S_n} = \frac{b h H}{b H} = h.$$

Ażeby znaleźć skrajną wartość naprężenia  $\sigma_1$  w punkcie  $B$ , obliczamy średnią wartość naprężenia  $\sigma_s$ , dzieląc obciążenie  $P$  przez pole  $F'$  przekroju



skutecznego i wyznaczamy następnie środek ciężkości tego pola  $S'$ . Wystawimy w tym punkcie rzędną  $\sigma_s$ , otrzymamy  $\sigma_1$  z wykresu liniowego  $KLM$ .

**Uwaga.** Gdy środek obciążenia nie leży na osi symetrii przekroju, to odpowiadającą oś obojętną można znaleźć tylko przez próby.

## V. Praca odkształcenia.

**51. Energja potencjalna (praca odkształcenia) prętów (belek) prostych.** a) Przy działaniu samej siły podłużnej  $N$  (rozciągającej lub ściskającej) określa według ustępu 13 energję potencjalną elementu pręta o długości  $ds$  wyrażenie:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EF} ds = dL.$$

b) Przy działaniu samej siły poprzecznej  $T$  jest (w zwykłych przypadkach symetrii przekroju względem płaszczyzny obciążenia):

$$dL = \frac{1}{2} T \cdot \beta \cdot ds,$$

przyczem  $\beta$  jest średnią wartością kąta odkształcenia postaciowego w całym przekroju. Ta wartość da się przedstawić w postaci:

$$\beta = \alpha' \cdot \frac{T}{G \cdot F}.$$

A zatem:

$$dU = \frac{1}{2} \alpha' \cdot \frac{T^2}{G F} ds = dL \dots \dots \dots (96)$$

Wartość  $\alpha'$  znajdujemy z porównania tego wyrażenia z wyrażeniem dla  $dU$  w postaci:

$$dU = ds \int_{(F)} \frac{\tau^2}{2G} dF,$$

jeżeli, znając rozmieszczenie  $\tau$  w przekroju, wykonamy całkowanie na obszarze pola  $F'$ .

c) Przy działaniu samego momentu skręcającego  $M_s$  mamy:

$$dL = \frac{1}{2} M_s \cdot d\varphi,$$

jeżeli  $d\varphi$  jest kątem skręcenia na długości  $ds$  (str. 1113).

Zważywszy, że

$$d\varphi = \frac{M_s}{\Gamma} ds,$$

jeżeli  $\Gamma = GJ_{\text{red}}$  oznacza sztywność skręcenia, mamy:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{G \cdot J_{\text{red}}} ds = dU \dots \dots \dots (96')$$

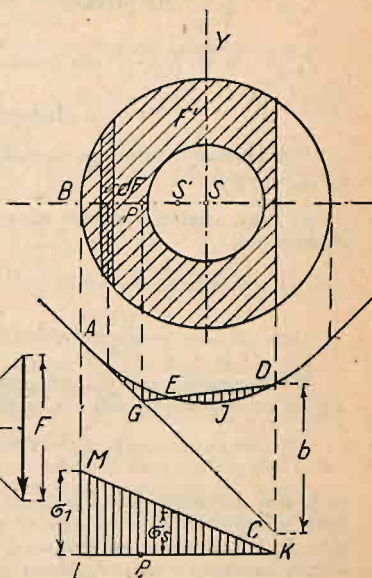


Fig. 181.