

CZĘŚĆ SZÓSTA

STATYKA BUDOWLI

TREŚĆ

Mechanika ogólna. Napisał inż. dr. Maksymiljan T. Huber, profesor politechniki, Warszawa

I. Kinematyka (Geometria ruchu)	1009
II. Dynamika ogólna	1018
III. Statyka	1047
IV. Kinetyka	1066

Sprężystość i wytrzymałość. Napisał inż. dr. Maksymiljan T. Huber, prof. politechniki, Warszawa

I. Część ogólna	1079
II. Rozciąganie i ściskanie	1105
III. Ścinanie i skręcanie	1111
IV. Zginanie	1116
V. Praca odkształcenia	1141
VI. Pręty zakrzywione	1150
VII. Płyty	1153
VIII. Wyboczenie	1166
IX. Ważniejsze złożone przypadki zgięcia i wyboczenia	1174

Statyka budowli. Napisali: inż. dr. Jan Bogucki, profesor politechniki, Lwów; inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów; inż. Stefan Pazirski, Lwów; inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów

I. Belki statycznie wyznaczalne o ścianie pełnej (Bryła)	1185
II. Kratownice statycznie wyznaczalne (izostatyczne), Bryła	1210
III. Kratownice przestrzenne (Bryła)	1232
IV. Przesunięcia kratownic (Bryła)	1238
V. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych (Bryła)	1249
VI. Ustroje hiperstatyczne (Bryła, Pazirski, Thullie)	1256
VII. Budowle ziemne i mury oporowe (Bogucki)	1323
VIII. Teoria żelbetu (Thullie)	1332
Tablice	1379
Przepisy dotyczące obliczeń statycznych w budownictwie lądowym	1438

Mechanika ogólna.

Napisał

dr. inż. Maksymiljan T. Huber,

profesor politechniki, Lwów.

I. Kinematyka (Geometria ruchu).

A. Ruch punktu.

1. Wstępne określenie. Mówimy, że punkt M (lub wogóle ciało C) się porusza, jeżeli z upływem czasu t zmienia swoje położenie w przestrzeni geometrycznej, określonej danym układem odniesienia. Tym układem jest zwykle ład stały naszej ziemi; niekiedy zaś inny układ, praktycznie niezmienny i poruszający się względem ziemi, jak np. pokład statku, klatka windy, rama lokomotywy itp. Jakikolwiek układ odniesienia da się zastąpić układem trzech osi spólrzędnych, zwykle prostokątnym. Położenie punktu M określają wtedy jego spólrzędne prostokątne x, y, z , albo promień—wektor \vec{r} , łączący początek układu O z punktem M ($\vec{r} = \overline{OM}$), albo spólrzędne biegunowe itp.

Względne położenie dwu punktów $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ wyznacza wektor $\vec{w} = \overline{M_1 M_2}$ niezależnie od obranego układu osi spólrzędnych. Symbol \vec{w} zastępuje trzy rzuty $w_x = x_2 - x_1$, $w_y = y_2 - y_1$, $w_z = z_2 - z_1$ zorientowanego w przestrzeni odcinka $\overline{M_1 M_2}$, co wyrażamy równaniem określającym:

$$\vec{w} \equiv \{w_x, w_y, w_z\}.$$

Jeżeli rozpatrywane położenia punktu M leżą na jednej płaszczyźnie, to obierając ją za płaszczyznę XY prostokątnego układu spólrzędnych, określamy wektor $\overline{M_1 M_2} = \vec{w}$ dwoma rzutami w_x, w_y (fig. 1); czyli:

$$\vec{w} \equiv \{w_x, w_y\} \equiv \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Podobnież widzimy z fig. 1, że

$$\vec{r}_1 \equiv \{x_1, y_1\}, \quad \vec{r}_2 \equiv \{x_2, y_2\}.$$

Pomiędzy \vec{r}_1, \vec{r}_2 i \vec{w} zachodzi przeto związek, który wyrażamy równaniem wektorowym

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

w ogólnym przypadku wyrażającym związek to samo, co trzy równania algebraiczne

$$w_x = x_2 - x_1, \quad w_y = y_2 - y_1, \quad w_z = z_2 - z_1.$$

(W tym przypadku można pojmować fig. 1 jako rzut utworu trójwymiarowego na płaszczyznę XY , obraną za płaszczyznę rysunku.)

2. Niektóre pomocnicze pojęcia rachunku wektorowego. W mechanice mamy do czynienia z różnemi wielkościami (prędkość, przyspieszenie, siła itd.), mającemi te same cechy matematyczne, co zorientowany odcinek $\overline{M_1 M_2} = \vec{w}$, czyli mającemi charakter wektora. Cechami temi są

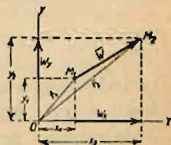


Fig. 1.

1. wartość bezwzględna, określona liczbą mianowaną, 2. kierunek, określony prostą w przestrzeni i 3. znak albo zwrot (kierunku), oznaczony strzałką odróżniającą zarazem początek od końca wektora. Dany wektor może mieć znaczenie mechaniczne niezależne od umieszczenia początku wektora w przestrzeni (wektory swobodne), albo niezależne od umieszczenia początku wektora na jego prostej (wektory nieswobodne, związane z prostą), albo wreszcie może być związany ze swym punktem początkowym (wektor nieswobodny, związany z punktem).

Dla wszystkich tych wektorów określa się w ten sam sposób operacje dodawania, odejmowania i mnożenia, które są uogólnieniem tak samo nazwanych operacji wielkościami algebraicznymi.

Tutaj określimy narazie tylko dodawanie i odejmowanie dwu wektorów.

$$\bar{a} \equiv \{a_x, a_y, a_z\} \quad \text{i} \quad \bar{b} \equiv \{b_x, b_y, b_z\}$$

zapomocą schematu:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

Wektor $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ nazywa się (geometryczną) sumą, wektor $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ (geom.) różnicą wektorów \bar{a} i \bar{b} (fig. 2). Symbol $-\bar{a}$ oznacza wektor przedstawiony tym samym odcinkiem, co wektor \bar{a} , lecz opatrzonym strzałką przeciwną (fig. 3).

(Geometryczna) suma \bar{s} ilu kolwiek wektorów (fig. 4) $\bar{w}_1 = \overline{A_1 B_1}$, $\bar{w}_2 = \overline{A_2 B_2}$, . . . $\bar{w}_n = \overline{A_n B_n}$ jest określona równaniem:

$$\bar{s} = \Sigma \bar{w} \equiv \{\Sigma w_x, \Sigma w_y, \Sigma w_z\}.$$

Wykreślnie otrzymujemy tę sumę, łącząc wektory-dodajniki (w dowolnym porządku) tak, aby koniec poprzedniego dodajnika był początkiem następnego



Fig. 2.



Fig. 3.

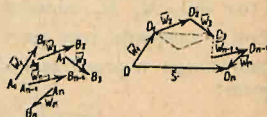


Fig. 4.

(wielobok wektorów). Wektor, który łączy początek utworzonego wieloboku z jego końcem i tworzy bok zamykający wielobok wektorów-dodajników, przedstawia sumę $\bar{s} = \overline{CD_n}$, zwaną niekiedy wektorem wypadkowym układu $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$.

Uwagi. Suma geometryczna podlega (tak samo jak algebraiczna) prawom przemienności $(\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a})$ i łączności $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$ itd.).

Niektórzy autorowie uwydatniają operacje wektorami zapomocą odmiennych znaków dodawania i odejmowania. Ten sposób można usprawiedliwić jedynie względami dydaktycznymi, gdyż kładąc znak $+$ między dwoma wektorami, zaznaczamy tem samym powyżej określone (geometryczne) dodawanie wektorów. Dodawanie zaś ich bezwzględnych wartości przedstawiamy przez $a + b$, albo $|a| + |b|$.

3. Różne sposoby przedstawienia ruchu punktu. Najpierw nasuwa się sposób nomograficzny. W nim dana jest wykreślnie linja, którą opisuje punkt podczas ruchu, zwana torem punktu. Na torze tym (płaskim lub przestrzennym) oznaczamy przez O punkt początkowy, w którym poruszający się punkt znajdował się w chwili początkowej, a następnie oznaczamy liczbą 1, 2, 3 itd. miejsca zajęte przez ten punkt po jednej, dwu, trzech... sekundach (minutach, godzinach itd., zależnie od dokład-

dnosci, z jaką ruch przedstawić chcemy i od wielkości przedziału czasu potrzebnego do opisanie całego toru). Zamiast tego można na torze odmierzyć od punktu początkowego jedną, dwie, trzy... n jednostek długości i otrzymane w ten sposób miejsca oznaczyć liczbami określającymi chwilę t , w której się tam punkt znajdował.

Te oznaczania liczbami punktów na torze zastępuje z pewną korzyścią równanie

$$s = f(t),$$

zwane równaniem ruchu. Tutaj oznacza s drogę, tj. długość toru mierzoną od punktu początkowego do miejsca zajętego przez punkt w chwili t . Przedstawiając funkcję $f(t)$ obrazem geometrycznym (fig. 5) mamy t. zw. wykres drogi.

Dwa rysunki, tj. wykres toru (przedstawiony w ogólnym przypadku rzutami prostokątnymi na dwie płaszczyzny) i wykres drogi daje zupełny wykresalny obraz ruchu punktu.

Matematycznie określa się ruch punktu zwykle trzema równaniami

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

przedstawiającymi współrzędne prostokątne poruszającego się punktu, albo też równoważnem z nimi jednym równaniem wektorowem

$$\vec{r} = \vec{F}(t),$$

określającym promień-wektor tegoż punktu, wychodzący ze stałego punktu O , obranego w układzie odniesienia.

4. Różne rodzaje ruchu punktu rozróżniamy 1. według postaci toru: ruch prostoliniowy i krzywoliniowy; 2. według wykresu drogi: ruch jednostajny, gdy wykres drogi jest linią prostą, czyli droga s jest liniową funkcją czasu t , i ruch niejednostajny, czyli zmienny, gdy wykres drogi jest linią krzywą.

Uwaga. Rozpatrywanie ruchu punktu ma nie tylko znaczenie teoretyczne, przygotowujące do studiów ruchu ciał, lecz także nader ważne znaczenie praktyczne, często bowiem ruch punktu jest wystarczającym obrazem ruchu ciała nawet bardzo złożonego jak np. pociągu kolejowego, jeżeli chodzi tylko o obraz ogólny, potrzebny np. przy sporządzaniu rozkładu jazdy itp. zadaniach. Wtedy mówimy zwykle o ruchu ciała, mając przytem na myśli ruch jednego stosownie obranego punktu tego ciała; dajmy na to środka przedniej latarni lokomotywy w przypadku ruchu pociągu kolejowego.

5. Prędkość średnia i chwilowa. Wektor prędkości. Gdy pociąg wyjeżdżający ze stacji A do drugiej B , odległej o 80 km, osiąga ją po 80 minutach, to mówimy, że jechał ze średnią prędkością $\frac{80 \text{ km}}{80 \text{ min.}}$

$= 1 \text{ km/min.}$ (jednego kilometra na minutę, czyli 60 km na godzinę, albo wreszcie $16\frac{2}{3} \text{ m/sek.} = \frac{60000 \text{ m}}{3600 \text{ sek.}}$). Oznaczysz przez s_1 i s_2 długość drogi mierzonej od początku linii kolejowej do stacji A i B , zaś przez t_1 i t_2 chwile wyjazdu ze stacji A i przyjazdu do B , widzimy, że średnią prędkość v_m określa równanie

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

przyczem $\Delta s \equiv s_2 - s_1$, $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.

Wogóle ma prędkość średnia różną wartość na rozmaitych odcinkach drogi. Jeżeli ta wartość jest stała bez względu na długość odcinka Δs , na

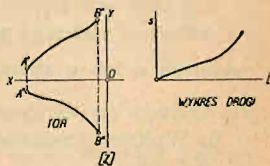


Fig. 5.

jego miejsce na torze i na odpowiadający przedział czasu Δt , to ruch jest jednostajny. Jego równaniem jest $s = s_0 + c t$.

W ogólnym przypadku ruchu zmiennego odpowiada przedziałowi czasu od chwili t do chwili $t + \Delta t$ średnia prędkość $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, która się zmienia zależnie od t . Gdy $\Delta t \rightarrow 0$ (czytaj: zdąża do zera), to

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

nazywa się prędkością chwilową w odpowiadającym chwili t miejscu toru, albo krótko prędkością w chwili t .

Gdy ruch jest prostoliniowy i określony równaniem $s = f(t)$, to prędkość ma widocznie charakter wektora \bar{v} leżącego na torze i skierowanego w stronę rosnących s , lub w stronę przeciwną, zależnie od tego czy pochodna $\frac{ds}{dt}$ jest dodatnia, czy też ujemna. Wektor \bar{v} nazywa się wektorem prędkości.

6. Wykres prędkości. Tak nazywamy geometryczny obraz równania $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$. Wykres prędkości przedstawia przeto krzywą różniczkową dla wykresu drogi jako krzywej całkowej. Według wykresu prędkości rozróżniamy ruch jednostajnie zmienny, którego wykres prędkości jest prostoliniowy od ruchu niejednostajnie zmiennego, którego wykres prędkości jest krzywoliniowy.

7. Przyspieszenie średnie i chwilowe. Wektor przyspieszenia. Iloraz przyrostu prędkości $v_2 - v_1 = \Delta v$ przez odpowiadający przedział czasu $t_2 - t_1 = \Delta t$ nazywamy przyspieszeniem średnim ruchu w czasie Δt . Dla ruchu jednostajnie zmiennego ma przyspieszenie średnie wartość stałą, niezależną od przedziału czasu. Wówczas

$$v = v_0 + a t.$$

W ogólnym przypadku ruchu niejednostajnie zmiennego jest

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = a$$

wartością przyspieszenia w chwili t , określoną jako funkcja zmiennej t .

Dla ruchu prostoliniowego jest charakter wektorowy przyspieszenia od razu widoczny. Strzałka wektora przyspieszenia \bar{a} jest skierowana zgodnie z \bar{v} lub przeciwnie zależnie od tego czy \bar{v} rośnie (przyśp. dodatnie) czy też maleje z upływem czasu (przyśp. ujemne).

8. Najogólniejsze określenie wektora prędkości ruchu krzywoliniowego. Gdy ruch ten przedstawia równanie

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

określające promień-wektor \bar{r} jako funkcję czasu t , to wektor prędkości średniej

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

ma kierunek cięciwy łączącej punkt toru M , zajęty w chwili t , z punktem M' , zajętym w chwili $t + \Delta t$.

Wektor

$$\lim \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

czyli iloraz różniczkowy promienia-wektora względem czasu określa wektor prędkości w chwili t , styczny do toru w odpowiadającym miejscu.

Ta definicja jest w zgodzie z poprzednią mniej ogólną, albowiem $|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$.

9. Hodograf. Najogólniejsze określenie wektora przyspieszenia ruchu krzywoliniowego. Naturalnem uogólnieniem wykresu prędkości ruchu prostoliniowego jest dla ruchu krzywoliniowego t. zw. hodograf, tj. krzywa utworzona przez końce wektorów prędkości, wykreślonych z obranego dowolnie stałego punktu początkowego, np. Ω na fig. 6.

Jeżeli $\vec{r} = \vec{F}(t)$ jest równaniem ruchu danego, to

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}'(t)$$

jest równaniem odpowiadającego ruchu po hodografie.

Prędkość ruchu po hodografie (jako wektor)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

określa zarazem wektor przyspieszenia \vec{a} danego ruchu krzywoliniowego.

Wektor przyspieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru (gdy tor jest płaski w płaszczyźnie tego toru); jest wogóle nachylony do toru i zawsze skierowany ku wnętrzu jego wklęsłości.

10. Przyspieszenie styczne i normalne. Wektor przyspieszenia da się zawsze rozłożyć na sumę geometryczną dwu wektorów według schematu:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Pierwszy z nich \vec{a}_t nazywa się przyspieszeniem stycznem, gdyż leży na stycznej do toru, przyczem ma wartość i kierunek określony drugą pochodną łuku toru względem czasu, tj. $\frac{d^2s}{dt^2}$. Drugi zaś, czyli \vec{a}_n nazywa się przyspieszeniem normalnem, czyli dośrodkowem i ma wartość bezwzględną $\frac{v^2}{\rho}$, jeżeli ρ jest długością promienia krzywizny toru. Przytem ma kierunek wzdłuż normalnej głównej toru ku środkowi jego krzywizny:

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

W ruchu krzywoliniowym jednostajnym jest przyspieszenie styczne stale równe zero, a całkowite przyspieszenie jest normalne i równa się $\frac{v^2}{\rho}$.

Wogóle można powiedzieć, że przyspieszenie styczne jest warunkowane tylko zmianą wielkości prędkości, zaś przyspieszenie normalne tylko zmianą kierunku prędkości.

11. Rzutowanie ruchu. Rzut równoległy albo prostokątny poruszającego się punktu porusza się na płaszczyźnie rzutów z prędkością i przyspieszeniem, które są odpowiednio rzutami prędkości i przyspieszenia ruchu danego.

Z trzech równań określających ruch punktu

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

przedstawia każde z osobna dla siebie ruch rzutu tegoż punktu na odpowiadającą oś. Prędkościami tych oddzielnych ruchów są rzuty prędkości ruchu danego, tj.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = f_2'(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = f_3'(t).$$

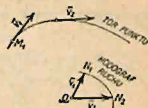


Fig. 6.

Podobnież ma się rzecz z przyspieszeniami:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

12. Prosty ruch harmoniczny (drżanie harmoniczne). Tak nazywamy rzut ruchu jednostajnego po okręgu koła na oś leżącą w płaszczyźnie tego koła (fig. 7). Licząc czas t od chwili przejścia punktu przez C a jego rzutu przez O' , mamy dla drogi s rzutu M' równanie $s = a \sin \varphi$, przyczem $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$,

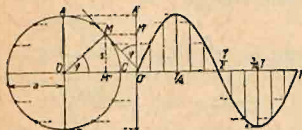


Fig. 7.

Promień koła a określa t. zw. amplitudę (obszerność) drżania, T zaś okres drżania, tj. czas, w którym punkt M opisuje cały okrąg koła, a odpowiadający promień kąt 2π . Wartość $\frac{2\pi}{T} = \omega$ nazywają częstością drżania. (Jest to liczba pełnych drgań przypadająca na 2π sekund. Inni autorowie nazywają częstością $\frac{1}{T}$, czyli liczbę pełnych drgań w jednej sekundzie.) Oznaczywszy przez V prędkość ruchu po kole, a $\frac{V^2}{a}$ przyspieszenie (normalne) tego ruchu, mamy widocznie dla ruchu harmonicznego jako rzutu: prędkość $v = V \cos \frac{2\pi}{T} t$, przyspieszenie $p = -\frac{V^2}{a} \sin \frac{2\pi}{T} t$.

To samo wyrażają równania:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad p = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

zważywszy, że $V = \frac{2\pi a}{T}$. Na rysunku uwidoczniło także wykres drogi jako sinusoidę o długości fali $= T$.

Uwaga. Jeżeli czas mierzymy nie od chwili gdy kąt $\varphi = 0$, lecz od chwili gdy kąt $\varphi = \alpha$, to równanie drżania harmonicznego ma postać ogólną

$$s = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Kąt α nazywa się kątem fazy. Jakiegokolwiek dwa drżania harmoniczne mogą się różnić 1. amplitudą 2. okresem lub częstością i 3. fazą, tj. wartością kąta α . Skoro up. w dwu drganiach równokierunkowych jest dla pierwszego $s = 0$, a jednocześnie dla drugiego $s = +a$, to mówimy że drugi ruch wyprzedza fazą pierwszy o $\frac{\pi}{2}$, albo o ćwierć okresu.

Inne przykłady w kinetyce.

B. Ruch ciała sztywnego (układu niezmiennego).

13. Ogólny ruch ciała sztywnego jest określony ruchem jego trzech punktów tworzących trójkąt. Tory tych punktów nazywają się kierownicami ruchu. Każdy z tych punktów może być obrany także zewnątrz ciała, byleby zachowywał niezmiennie odległości od wszystkich punktów ciała.

W szczególności nazywamy ruch postępowym, gdy trójkąt punktów nie zmienia podczas ruchu orientacji w przestrzeni (odpowiadającej układowi odniesienia). Taki ruch jest zupełnie określony ruchem jednego punktu ciała. Ruch postępowy może być krzywoliniowy, jak np. ruch trzonu łączącego dwie korby równe i równoległe, albo prostoliniowy, zwany także przesunięciem (translatio).

Ruch postępowy krzywoliniowy można sobie wyobrazić jako nieprzerwany ciąg przesunięć chwilowych, tj. przesunięć dokonanych w elementach czasu dt .

Ruch ciała nazywamy obrotowym (obrotem), gdy z owych trzech punktów są dwa nieruchome. Te dwa punkty wyznaczają oś obrotu. Wszystkie punkty ciała nie leżące na osi obrotu opisują koła o promieniach r równych odległościom tych punktów od osi. Kąty, jakie jednocześnie opisują wszystkie te promienie, mają wspólną wartość φ zwaną kątem obrotu ciała. Ruch obrotowy jest zatem zupełnie określony daną osią i kątem obrotu φ jako daną funkcją czasu.

Pierwsza pochodna kąta obrotu $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ nazywa się prędkością kątową, druga zaś, tj. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt^2} = \varepsilon$ przyspieszeniem kątowym.

Wartość prędkości (linowej) punktu ciała obracającego się, leżącego w odległości r od osi obrotu, daje równanie

$$v = r\omega = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Przyspieszenie styczne tegoż punktu określa równanie

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon,$$

przyspieszenie normalne zaś

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Ogólny ruch chwilowy ciała da się zastąpić zespołem przesunięcia chwilowego z obrotem chwilowym na nieskończenie wiele sposobów. W każdym zespole jest kierunek osi obrotu ten sam, a tylko kierunki przesunięcia są różne. Pomiedzy temi zespólami zachodzi tylko jeden, w którym kierunek przesunięcia jest równoległy do osi obrotu. Taki ruch nazywa się skrętem (ruchem śrubowym).

Jakikolwiek ruch chwilowy ciała da się wywołać skrętem chwilowym.

Przesunięcia i obrót są przeto ruchami elementarnymi, do których wszelkie inne ruchy ciała sprowadzić można. Przesunięcie da się nadto pojmować jako obrót około osi leżącej w nieskończoności z prędkością kątową nieskończenie małą.

14. Ruch równoległy do płaszczyzny stałej, zwany także ruchem posuwistym, albo płaskim, jest wyznaczony ruchem dwu punktów ciała A i B (fig. 8) obranych w tej płaszczyźnie (płaszczyzna ruchu, albo płaszczyzna kierująca).

Po czasie Δt zajmie odcinek AB położenie $A'B'$. To położenie łatwo osiągnąć obrotem odcinka AB około osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Jej ślad C znajdujemy jako punkt przecięcia się symetrycznych dla odcinków AA' i BB' (fig. 8). Przebieg rzeczywistego ruchu ciała między dwoma rozpatrywanymi położeniami różni się wogóle od powyższego obrotu, gdyż drogi AA' i BB' mogą się różnić od łuków kół zakreślonych ze środka C . Skoro jednakże przedział czasu, Δt zdąża do 0 a wraz z nim i wektory przemieszczeń $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$, to rzeczywisty ruch chwilowy zlewa się z obrotem chwilowym. A zatem:

Ogólny ruch posuwisty można uważać za nieprzerwany szereg obrotów chwilowych około coraz to nowych osi chwilowych prostopadłych do płaszczyzny kierującej.

Znając tory dwu punktów ciała A i B , leżących na płaszczyźnie kierującej, znajdujemy dla każdego położenia AB odpowiadający środek chwilowy C (ślad osi chwilowej na płaszczyźnie kierującej), jako punkt

przecięcia się prostopadłych AC i BC do prędkości chwilowych obu punktów (fig. 9), czyli do stycznych obu torów w odpowiadających punktach.

Przytem jest $\frac{V_1}{AC} = \frac{V_2}{BC} =$ prędkości kątowej obrotu chwilowego. Mieszcem geometrycznym środków chwilowych C (zwanych także „biegunami”) na płaszczyźnie kierującej jako stałej płaszczyźnie odniesienia jest krzywa $[C]$ zwana centrodją stałą, albo centrodją w przestrzeni (do której

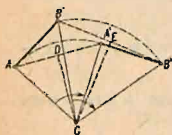


Fig. 8.

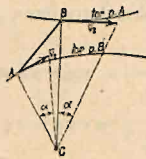


Fig. 9.

ruch ciała odnosimy). Skoro w poruszającym się ciele oznaczymy punkty C , to otrzymamy krzywą $[C]$ nieruchomą względem ciała a więc poruszającą się wraz z niem. Jest to centrodją rachoma, albo centrodją ciała.

Skoro w punktach P_1, P_2, \dots układu poruszającego się równoległe do płaszczyzny (fig. 10) wykreślimy wektory prędkości v_1, v_2, \dots i obrócimy je o

kąt prosty taki, iż padną na promienie łączące środki chwilowy C z punktami P_1, P_2, \dots , to otrzymujemy t. zw. prędkości „prostopadłe” lub „obrócone” (v_1), (v_2)....

Końce prędkości prostopadłych tworzą wielobok podobny i podobnie położony do wieloboku punktów P_1, P_2, \dots ze środkiem podobieństwa w C .

Kreśląc z dowolnie obranego początku O (fig. 10) wektory prędkości (rzeczywistych lub obróconych) punktów P_1, P_2, \dots otrzymujemy wielokąt utworzony z końców A_1, A_2, \dots podobny do wielokąta P_1, P_2, \dots . Otrzymany przytem rysunek nazywa się planem prędkości i oddaje ważne usługi przy kreśleniu planu przesunięć dla kratownicy.

15. Wektor obrotu chwilowego $\bar{\omega}$ i składanie obrotów. Stan ruchu ciała obracającego się w chwili t około pewnej osi jest zupełnie określony wektorem $\bar{\omega}$ związanym z tą osią, którego długość wyraża liczbową wartość prędkości kątowej ω , a strzałka jest umieszczona tak, ażeby można było znaleźć kierunek obrotu według następującej umowy:

Skoro pomyślanego obserwatora zwiążemy z wektorem $\bar{\omega}$ tak, aby strzałka wektora wskazywała od stóp ku głowie, to obserwator stwierdzi pod stopami obrót ciała zgodny z obrotem wskazówek na tarczy zegarowej. (Patrząc przed siebie widzi ruch punktów ciała od ręki lewej ku prawej.)

Uwaga. W niektórych książkach przyjęto umowę odwrotną, co oczywiście prowadzi do odwrócenia strzałki wektora $\bar{\omega}$ określającego obrót dany.

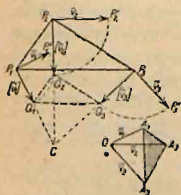


Fig. 10.



Fig. 11.

Często ciało bierze udział jednocześnie w dwu obrotach chwilowych, jeżeli np. należy do dwu układów odniesienia, z których jeden obraca się względem drugiego. (Np. wirnik prądnicy w wagonie tramwajowym obraca się względem wagonu, a wagon jadący w łuku obraca się względem ziemi. Osi obu obrotów przecinają się pod kątem prostym). Dwa obroty chwilowe określone wektorami prędkości

kątowych $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ około osi przecinających się w punkcie A (fig. 11) są równoważne obrotowi chwilowemu z prędkością kątową

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

około osi przechodzącej przez tenże punkt A (i leżącej z tamtymi w jednej płaszczyźnie). Składanie obrotów chwilowych sprowadza się w ten sposób do geometrycznego dodawania wektorów prędkości kątowych (podobnie jak składanie sił). Odwrotnie każdy obrót chwilowy można rozłożyć na obroty składowe około osi przecinających się, czyli zastąpić dany obrót chwilowy $\overline{\omega}$ obrotami $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$, byleby powyższe równanie było spełnione.

Dowód polega na okazaniu, że dowolny punkt ciała N na prostej wektora $\overline{\omega}$ otrzymuje od obrotów $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ odpowiadające prędkości o równych wartościach bezwzględnych $r_1 \omega_1$ i $r_2 \omega_2$, a wprost przeciwnych kierunkach, które zatem się znoszą. Prosta AN jest przeto osią obrotu wypadkowego itd.

Dwa obroty chwilowe $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$ równoległych, określone wektorami prędkości kątowych $\overline{\omega}_1$ i $\overline{\omega}_2$, dają obrót wypadkowy z prędkością kątową $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ zależnie od tego czy obroty są zgodne, czy też przeciwnie. Wektor obrotu wypadkowego $\overline{\omega}$ znajduje się tak samo jak wypadkowa sił równoległych.

16. Zmiana układu odniesienia. Ruch względny. Dla obserwatora na pływającym statku W jako układzie odniesienia przedstawia się ruch jakiegokolwiek ciała, np. piłki, inaczej, aniżeli dla obserwatora stojącego na brzegu, czyli na ziemi jako układzie odniesienia U . Często wypada znając prędkość \overline{v}_w i przyspieszenie \overline{a}_w punktu ciała względem układu W , wyznaczyć prędkość \overline{v}_b i przyspieszenie \overline{a}_b w odniesieniu do układu U lub nawzajem. Dla wygody nazywamy często (zapożyczając się z dynamiki) układ U układem „bezwzględnym“, zaś W układem „względny“, jakkolwiek ze stanowiska kinematyki są oba układy równouprawnione i mogą zamienić swoje role.

Ruch chwilowy w układzie W (statku) względem U (ziemi) jest wogóle złożony z przesunięcia z prędkością \overline{v}_o i obrotu ω . Wskutek tego każdy punkt nieruchomy w układzie W (względem statku) porusza się względem U (ziemi) z prędkością \overline{v}_u i przyspieszeniem \overline{a}_u , które wyznaczamy według prawideł powyżej wymienionych. Nazywamy je prędkością unoszenia \overline{v}_u i przyspieszeniem unoszenia \overline{a}_u . Każdemu przeto położeniu punktu M względem układu U odpowiadają pewne wartości prędkości i przyspieszenia unoszenia \overline{v}_u i \overline{a}_u , obok jednoczesnych wartości prędkości i przyspieszenia względnego \overline{v}_w i \overline{a}_w . Od nich zależą wartości prędkości \overline{v}_b i przyspieszenia \overline{a}_b w układzie U w sposób przedstawiony wzorami:

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u; \quad \overline{a}_b = \overline{a}_w + \overline{a}_u + \overline{a}_c,$$

które wyrażają twierdzenia:

I. Prędkość bezwzględna punktu jest sumą geometryczną prędkości względnej i prędkości unoszenia.

II. Przyspieszenie bezwzględne punktu jest sumą geometryczną przyspieszenia względnego, przyspieszenia unoszenia i przyspieszenia Coriolisa'a, zwanego także dodatkowym.

Przyspieszenie Coriolisa'a ma wartość bezwzględną

$$a_c = 2 v_w \omega \sin(\overline{v}_w, \overline{\omega}),$$

a kierunek prostopadły do \overline{v}_w i do $\overline{\omega}$ tak, aby wektory \overline{v}_w , $\overline{\omega}$ i \overline{a}_c tworzyły w tym porządku układ prawy (tj. odpowiadający kolejno rozstawionym przestrzennie trzem palcom prawej ręki, poczynawszy od wielkiego; fig. 12).

Z równań powyższych wynika nawzajem:

$$\overline{v}_w = \overline{v}_b + (-\overline{v}_u); \quad \overline{a}_w = \overline{a}_b + (-\overline{a}_u) + (-\overline{a}_c),$$

czyli słowami:

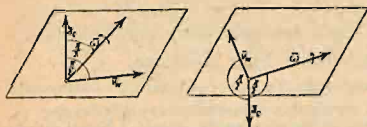


Fig. 12.

I. Prędkość względna jest sumą geometryczną (wypadkową) prędkości bezwzględnej i przeciwnie wziętej prędkości unoszenia.

II. Przyspieszenie względne jest sumą geometryczną (wypadkową) przyspieszenia bezwzględnego, przeciwnie wziętego przyspieszenia unoszenia i przeciwnie wziętego przyspieszenia Coriolis'a.

II. Dynamika ogólna.

A. Podstawy dynamiki.

17. Jednostki podstawowe. Wszelkie wielkości mechaniczne dają się wyrazić jednostkami długości czasu i masy. W t. zw. centymetrogramo-sekundowym układzie jednostek (skrót C. G. S.) jest:

a) Jednostką długości centymetr (*cm*) określony jako jedna setna długości wzorca metrowego przechowywanego w Sèvres pod Paryżem (przy temperaturze 0° C i normalnem ciśnieniu barometrycznem).

b) Jednostką czasu jest sekunda (*sk*) czasu średniego, wyznaczonego pośrednio przez obserwacje astronomiczne. Te obserwacje określają bezpośrednio czas gwiazdowy, którego sekunda (*s*) jest nieco mniejsza od (*sk*), a mianowicie:

$$1 (s) = 0,99726957 (sk).$$

Nawzajem jest

$$1 (sk) = 1,00273972 (s).$$

c) Jednostką masy jest masa jednego grama (*g**), określona jako $\frac{1}{1000}$ masy jednego kilograma (*kg**), czyli masy wzorca kilogramowego ze stopu platyny z irydem, przechowywanego w Sèvres pod Paryżem. (Ostatnia masa jest z wielkiem przybliżeniem równa masie 1000 *cm*³ czystej wody przy 4° C.)

Obok układu jednostek C. G. S. używa się jeszcze, zwłaszcza w mechanice technicznej, układu technicznego, który ma te same jednostki długości i czasu, co układ C. G. S. (fizyczny); natomiast trzecią jednostką podstawową jest w nim nie jednostka masy, lecz jednostka siły.

Techniczną jednostką siły jest siła jednego kilograma (*kg*), określona naciskiem, jaki wywiera na podstawę ciężar jednego kilograma spoczywającego w Paryżu, czyli siła ciężkości działająca na masę jednego kilograma w Paryżu.

Przejęcie od jednostki siły do jednostki masy w układzie technicznym i odwrotnie w układzie C. G. S. będzie omówione w następnym ustępie.

18. Pierwsze podstawowe prawo dynamiki wyraża się równaniem

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \overline{P},$$

w którym oznacza *m* masę punktu materialnego, \overline{v} jego prędkość, a \overline{P} siłę nań działającą. Wektor $m\overline{v}$ nazywa się ilością ruchu, albo pędem punktu materialnego. A zatem słowami: Pochodna pędu punktu materialnego względem czasu równa się sile wywołującej zmianę pędu.

To wyślowienie stwierdza już charakter wektorowy siły \bar{P} . Według trzeciego z założeń w ust. 2 jest masa m stała, a równanie przybiera postać zwykle stosowaną:

$$m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}; \quad (\text{masa} \times \text{przyspieszenie} = \text{sile})$$

albo po rozłożeniu wektorów na trzy składowe w kierunkach osi X, Y, Z :

$$m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Pierwsze prawo pozwala wielkości sił mierzyć przyspieszeniami, jakich te siły udzielały jednemu i temu samemu punktowi materialnemu. Z drugiej strony mając daną siłę określoną statycznie, np. nateżeniem pola sił, możemy przy pomocy pierwszego prawa znaleźć przyspieszenie, jakiego siła udzieli punktowi materialnemu o masie m . Nakoniec pierwsze prawo określa jednostkę siły w układzie C. G. S., zaś jednostkę masy w układzie technicznym, a mianowicie:

W układzie C. G. S. jest jednostką siły dyna, t. j. siła, która masie jednego grama udziela przyspieszenia równego jednostce, t. j. 1 cm/sk^2 .

Ponieważ siła jednego kilograma (jako ciężar) udziela masie jednego kilograma w Paryżu przyspieszenia $980,665 \text{ cm/sk}^2$, przeto ta sama siła udzieliłaby masie jednego grama przyspieszenia $980,665 \text{ cm/sk}^2$; czyli techniczna jednostka siły

$$1 \text{ kg} = 980,665 \text{ dyn}.$$

Nadodwrót

$$1 \text{ dyna} = \frac{1}{980,665} \text{ kg} = 1,0197 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

(W zwykłych rachunkach technicznych wystarcza przyjąć w przybliżeniu $1 \text{ kg} = 0,981 \cdot 10^6 \text{ dyn}$ i $1 \text{ dyna} = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$.)

Przy rzeczywistym mierzeniu sił ciężarami trzeba pamiętać, że ciężar jednej i tej samej masy zmienia się zależnie od szerokości geograficznej φ i wzniesienia nad poziom morza h . Zależność tę określa wzór dla przyspieszenia ciężkości g , który ma postać:

$$g = 9,806\,056 - 0,025\,028 \cos 2\varphi - 0,000\,003 \cdot h,$$

Przyчем h jest wyrażone w metrach, zaś g w m/sk^2 .

Stąd wypada dla poziomu morza na równiku $g_0 = 9,781 \text{ m/sk}^2$; na biegunach $g_{90^\circ} = 9,831 \text{ m/sk}^2$; dla środkowej Polski okrągło $g_P = 9,81 \text{ m/sk}^2$, a więc około 2‰ mniej niż na biegunach, a 3‰ więcej niż na równiku.

Zapomocą ważenia na zwykłych wagach dźwigniowych znajdujemy nie ciężar ciała, lecz jego masę wyrażoną w kg^* . W utartym sposobie wyrażania się: „Ciało waży x kilogramów” tkwi właściwie zdanie: „Ciało ma masę x kilogramów (kg^*)”, jeżeli wykluczmy zastosowanie wag sprężynowych. Ciężar tegoż ciała w układzie C. G. S. będzie równy

$$1000 \cdot x \cdot g \text{ dyn (jeżeli } g \text{ wyrazimy w } \text{cm/sk}^2\text{)}.$$

Ten sam ciężar wyrażony w jednostkach technicznych równa się, biorąc ściśle:

$$x \cdot \frac{g}{g_{\text{Paryż}}} (\text{kg}),$$

zaś z błędem nie przekraczającym 3‰ w żadnym miejscu powierzchni ziemi... $x (\text{kg})$.

Natomiast masa naszego ciała wyraża się w układzie C. G. S. jako $x (\text{kg}^*)$, albo $1000 \cdot x (g^*)$, zaś w układzie technicznym ściśle jako

$$\frac{x}{980,665} = \frac{x}{g_{\text{Paryż}}} (\text{kg} \cdot \text{cm}^{-1} \text{sk}^2),$$

a w przybliżeniu najczęściej wystarczającym:

$$\frac{x}{9,81} (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{sk}^2).$$

Z powyższego widać, jak pożytecznem jest odróżnienie gwiazdką jednostek masy kg^* i kg układu C. G. S., nazywanych na nieszczęście temi samemi wyrazami, co jednostki siły układu technicznego. Jest to nieraz powodem fatalnych nieporozumień, zwłaszcza u początkujących.

19. Drugie podstawowe prawo dynamiki wyraża, że jakkolwiek siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ działające na dany punkt materialny można zastąpić wypadkową \bar{R} , która jest ich sumą geometryczną, czyli

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots$$

To prawo stanowi zarazem punkt wyjścia statyki. (Prawo składania sił.) (Zasada niezależności działania sił.)

20. Trzecie podstawowe prawo dynamiki brzmi w lapidarnym wyśłowieniu: Działanie jest równe i wprost przeciwne oddziaływaniu. Znaczy to, że siłę \vec{P} określającą działanie punktu materialnego m_2 na punkt materialny m_1 towarzyszy zawsze siła $-\vec{P}$, przedstawiająca działanie m_1 na m_2 , przyczem kierunki obu sił leżą na prostej $m_1 m_2$.

T. zw. prawo bezwładności, które Newton postawił na czele dynamiki jako wysnute z doświadczenia, mieści się już w pierwszym podstawowym prawie jako przypadek szczególny jego zastosowania. Skoro bowiem $\vec{P}=0$, to $m\vec{v}=\text{stała}$, czyli punkt materialny, na który żadne siły nie działają, porusza się jednostajnie i prostoliniowo (oczywiście w bezwzględnym układzie odniesienia). To samo zachodzi widocznie i wtedy, gdy siły działające na punkt materialny się nawzajem znoszą, czyli są w równowadze.

21. Zasada względności mechaniki klasycznej opiewa: Skoro znajdziemy jeden bezwzględny układ odniesienia, to każdy układ poruszający się względem niego prostoliniowo i jednostajnie jest również układem bezwzględnym. We wszystkich tych układach są ważne podstawowe prawa dynamiki, a więc i prawo bezwładności. O żadnym z tych układów nie można twierdzić, że jest w bezwzględnym spoczynku, albo w bezwzględnym ruchu. Wszystkie są równouprawnione w dynamice. Dlatego tradycyjna nazwa: „układ bezwzględny“ nie jest stosowna i ustępuje nowszej: „układ inercjalny (bezwładnościowy)“. Za taki układ można uważać z bardzo wielką ścisłością układ gwiazd stałych. Wobec tego ziemia obracająca się względem tego układu nie jest, biorąc ściśle, układem inercjalnym, jakkolwiek w bardzo wielu zadaniach mechaniki technicznej można ją z dostatecznym przybliżeniem traktować jako taki układ. Natomiast układ współrzędnych o początku w środku ziemi i osiach równoległych do osi układu związanego z gwiazdami stałymi ma z bardzo znacznym przybliżeniem cechy układu bezwładnościowego. Względem tego układu obraca się ziemia ze stałą prędkością kątową

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ (s)}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0,99727 \text{ (sk)}} = 0,000\,072\,921 \text{ (sk}^{-1}\text{)}.$$

B. Środek masy.

22. Określenie środka masy. Środek ciężkości. Ciała materialne traktujemy w mechanice bądź to jako układy oddzielnych punktów materialnych, bądź też jako bryły geometryczne wypełnione materią ciągłą. W pierwszym modelu określamy położenia punktów materialnych o masach m_1, m_2, \dots promieniami — wektorami $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ wychodzącymi z obranego punktu O w układzie odniesienia, w drugim zaś określamy położenie dowolnego elementu masy $dM = \mu \cdot dV$ (μ gęstość, dV objętość elementu) jego promieniem-wektorem \vec{r} zmieniającym się w sposób ciągły od punktu do punktu ciała. Środkiem masy ciała nazywamy punkt S wyznaczony promieniem-wektorem $\vec{r}_0 = \vec{OS}$ zapomocą równania:

$$M\vec{r}_0 = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots \equiv \sum m_i\vec{r}_i, \text{ albo } M\vec{r}_0 = \int_V \vec{r} dM,$$

w którym M oznacza masę całego ciała. To równanie czytamy: Moment masy całego ciała skupionej w punkcie S względem dowolnie obranego punktu stałego O równa się sumie geometrycznej momentów mas wszystkich punktów materialnych ciała względem tegoż punktu.

Łatwo się przekonać, że położenie środka masy określonego powyższem równaniem nie zależy od obioru początku O promieni wektorów.

Przy stosowaniu metody analitycznej określamy środek masy współzrzednieniami x_0, y_0, z_0 , czyli odległościami środka S od płaszczyzn współzrzednych. Zamiast powyższego równania mamy następujące trzy równania analityczne:

$$M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots = \sum m_i x_i; \quad \text{albo} = \int x dM$$

$$M y_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots = \sum m_i y_i; \quad \text{"} = \int y dM$$

$$M z_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = \sum m_i z_i; \quad \text{"} = \int z dM$$

Iloczynny $m_i x_i, m_i y_i$ itd. nazywamy momentami mas m_i względem płaszczyzny YZ, ZX itd.

Z postaci równań określających wynika, że środek masy jest zarazem środkiem sił zgodnie równoległych i proporcjonalnych względem mas m_i . Takimi siłami są w pierwszym, zwykle bardzo wielkiem przybliżeniu siły ciężkości, działające na ciała, z którymi technika ma do czynienia. Dlatego środek masy zlewa się praktycznie ze środkiem ciężkości i bywa nazywany tem mianem.

Własności kinetyczne środka masy. Różniczkując równania określające środek masy względem czasu otrzymujemy:

$$M \frac{d\bar{r}_0}{dt} = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}; \quad M \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2}, \quad \text{albo}$$

$$M \bar{v}_0 = \sum m_i \bar{v}_i; \quad M \bar{p}_0 = \sum m_i \bar{p}_i,$$

czyli słowami: Pęd (ilość ruchu) całej masy ciała skupionej w środku masy równa się sumie geometrycznej pędów wszystkich punktów materialnych (cząstek) ciała.

Siła bezwładności ($M \bar{p}_0$) całej masy ciała skupionej w środku masy równa się sumie geometrycznej ($\sum m_i \bar{p}_i$) sił bezwładności wszystkich cząstek ciała.

Te bardzo ogólne twierdzenia nadają znaczenie konkretne (fizyczne) matematycznej akcji punktu materialnego. Drugie z nich tłumaczy nadto jasno, dlaczego w wielu książkach, zwłaszcza angielskich, nazywają środek masy „środkiem bezwładności”.

24. Inne ogólne własności środka masy.

a) Jeżeli dla obranego początku promieni wektorów O (dla obranej płaszczyzny współzrzednych np. YZ) jest $\sum m_i \bar{r}_i = 0$ (jest $\sum m_i x_i = 0$), to w tym punkcie (na tej płaszczyźnie) leży środek masy.

b) Jeżeli wszystkie punkty materialne danego układu punktów materialnych leżą na jednej płaszczyźnie (lub prostej), to na tej płaszczyźnie (prostej) leży środek masy tego układu.

c) Jeżeli dany układ punktów materialnych (ciało) podzielimy na części o masach M_1, M_2, \dots i znajdziemy środki mas S_1, S_2, \dots każdej części, to środek masy całego układu o masie $M = M_1 + M_2 + \dots$ jest zarazem środkiem masy układu punktów materialnych o masach M_1, M_2, \dots umieszczonych w S_1, S_2, \dots .

d) Jeżeli układ punktów materialnych posiada płaszczyznę, oś lub środek symetrii, to na nich leży środek masy układu.

25. Środek masy ciał jednolitych (jednorodnych). Gęstość u takich ciał (wyrażona w g/cm^3) jest stałą, wskutek czego równanie określające środek masy upraszcza się i po podstawieniu $M = \mu V, dM = \mu dV$ (przy czem V oznacza objętość) przybiera postać:

$$V \bar{r}_0 = \int \bar{r} dV.$$

Z tego widać, że środek masy układów materialnych jednolitych jest zupełnie określony ich postacią geometryczną. Obok ciał trójwymiarowych rozważamy często w mechanice dwuwymiarowe powierzchnie materialne i jednowymiarowe linie materialne. Oznaczywszy przez dS element powierzchni (jego pole), a przez $d\ell$ element długości linii, mamy wzory dla wyznaczenia środka masy w przypadku jednolitości:

$$S\bar{r}_0 = \int_S \bar{r} dS; \quad \ell\bar{r}_0 = \int_\ell \bar{r} d\ell.$$

Wszystkie te równania oraz odpowiadające im równania analityczne dają się ująć w wyślowienie:

Moment całości skupionej w szukanym środku masy równa się sumie geometrycznej (lub algebraicznej) momentów wszystkich części elementarnych względem tego samego dowolnie obranego punktu (lub płaszczyzny).

26. Wyznaczenie środka masy w przypadkach praktycznych ułatwiają własności podane w ust. 24, a nadto twierdzenie: Jeżeli dany układ materialny da się podzielić na części, których środki masy leżą na jednej prostej lub na jednej płaszczyźnie, to na tej prostej lub tej płaszczyźnie musi leżeć środek masy układu.

W przypadku ciał lub powierzchni jednolitych prowadzi często do celu podział na elementy o równej masie, których środki są znane. W ten sposób sprowadzamy szukanie środka masy ciała do szukania środka masy powierzchni jednolitej, w której leżą owe środki elementów; zaś szukanie środka masy powierzchni materialnej do szukania środka masy linii jednolitej.

Wyznaczanie środka masy w zagadnieniach praktycznych odbywa się rachunkiem, wykreślnie lub doświadczalnie. Metoda wykreślna jest wskazana zwłaszcza dla figur i linii płaskich nieokreślonych analitycznie, lecz danych na rysunku. Metodę doświadczalną stosujemy do ciał rzeczywistych w postaci złożonej, np. samolotów, bądź to dla ominięcia żmudnego rachunku, bądź też dla jego sprawdzenia. W tym celu zawieszamy ciało na stosownem cięgnie. Po ustaleniu równowagi musi prosta oś napiętego cięgna trafiać środek ciężkości, a więc i środek masy. Wieszając ciało w innym punkcie znajdujemy znowu prostą, zajmującą inne położenie względem ciała, na której leży środek masy. Obie proste połączone niezmiennie z ciałem wyznaczają zatem środek masy swoim punktem przecięcia się.

Z pośród sposobów w wykreślnych są najprostsze dwa następujące:

a) Mając np. znaleźć środek masy jednolitej krzywej AB (fig. 13) dzielimy ją na równe części dość małe, aby je można traktować w przybliżeniu jako odcinki proste i przyjąc środki masy w połowie ich długości. Z dowolnie obranego punktu O prowadzimy promienie-wektory 1, 2, 3, ..., które sumujemy geometrycznie rozpoczynając od jakiegokolwiek punktu Ω (fig. 13). Znaleziona suma $\overline{\Omega D}$ jest widocznie równa n -krotnemu promieniowi-wektorowi środka masy $\bar{r}_0 = \overline{OS}$, jeżeli n jest liczbą części, (w naszym przypadku 7).

Gdyby sumowanie nie mieściło się na płaszczyźnie rysunku, to zamiast dodawać całe wektory 1, 2, 3, ... można doda-

wać m -te części, czyli zmniejszyć skalę rysunku (b) m -krotnie. Wówczas będzie szukane

$$\bar{r}_0 = \overline{OS} = \frac{m}{n} \overline{\Omega D}.$$



Fig. 13.

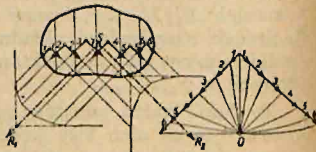


Fig. 14.

b) Chcąc znaleźć środek masy figury płaskiej jednolitej czyli środek pola (powierzchni) tej figury (fig. 14) dzielimy ją prostymi równoległymi na paski, których pola i środki są z dostateczną dokładnością znane. W tych środkach wyobrażamy sobie siły 1, 2, 3, ... równoległe i proporcjonalne względem pól pasków. Kształc wielobok sznurowy tych sił znajdujemy linię działania wypadkowej R , na której musi leżeć szukany środek masy.

Przez powtórzenie tej konstrukcji dla innego, najlepiej prostopadłego do poprzedniego kierunku prostych podziału i sił pomocniczych, otrzymujemy drugą prostą, na której leży środek masy figury, w punkcie przecięcia się z poprzednią.

Uwaga. Niekiedy okazuje się korzystnym wprowadzenie fikcyjnych mas (objętości, pól itp.) ujemnych, czyli uważanie danego ciała za różnicę dwu innych. Wówczas należy w rachunku uwzględnić zmianę znaku w momentach mas ujemnych, a w konstrukcji wykresłej odwrócić odpowiadające kierunki sił pomocniczych sił równoległych.

27. Położenie środka masy najważniejszych technicznie linii, powierzchni i ciał jednolitych. (W tekście i na rysunkach oznacza S środek masy.)

Odcinek prostej: S leży w połowie odcinka.

Obwód trójkąta: S leży w środku koła wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków a_1, a_2 i a_3 danego trójkąta.

Odległością S od boku trójkąta a_1 jest

$$x_s = \frac{h_1}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

jeżeli h_1 oznacza wysokość odpowiadającą a_1 jako podstawie.

Obwód równoległoboku: S leży w punkcie przecięcia się przekątnych.

Łuk koła (fig. 15): S na dwusiecznej kąta środkowego 2α w odległości od środka koła $x_s = r \frac{\text{cięciwa } AB}{\text{łuk } AB} = \frac{r \sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$, (przyczem $\text{arc } \alpha = \pi \alpha^\circ / 180^\circ$).

Płaski łuk jakiegokolwiek krzywej regularnie w jedną stronę zakrzywionej (fig. 16): Odległość S od cięciwy, $y_s = \infty \frac{2}{3} h$. Rzut prostopadły na cięciwę (S') połówi ją w przybliżeniu, jakkolwiek rzut wierzchołka łuku C dość znacznie zbacza od środka cięciwy.

Wzór przybliżony daje y_s z nadwyżką, która np. dla łuku kołowego 60° jest mniejsza od $0,5\%$, zaś dla łuku 90° nie dochodzi do $1,1\%$.

Pole trójkąta: S leży w punkcie przecięcia się linii środkowych (łączących środki boków z przeciwległymi wierzchołkami). Odległość S od boku równa się jednej trzeciej odpowiadającej wysokości trójkąta. Jeżeli $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ są współrzędnymi prostokątnymi trzech wierzchołków trójkąta, to współrzędne środka masy przedstawiają wzory:

$$x_s = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3), \quad y_s = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3), \quad z_s = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3).$$

Pole równoległoboku: S w punkcie przecięcia się przekątnych.

Pole trapezu: 1. S leży na linii środkowej t. j. prostej łączącej środki boków równoległych a i b (fig. 17). Odległościami S od tychże boków są:

$$h_a = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}, \quad h_b = \frac{h}{3} \frac{2a + b}{a + b}.$$

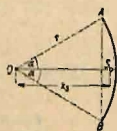


Fig. 15.

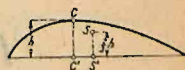


Fig. 16.

Stąd konstrukcja: Na przedłużeniach boków równoległych odcinamy $BE = a$, $CF = b$. Prosta EF wyznacza S na MN . 2. Dzielimy trapez na dwa trójkąty (fig. 18) o środkach masy S_1 i S_2 . Prosta $S_1 S_2$ przecina MN w S .

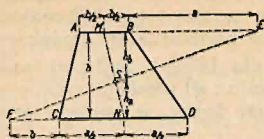


Fig. 17.

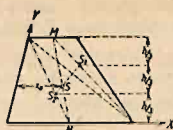


Fig. 18.

Odcietą x_0 punktu S w ukośnokątnym układzie współrzędnych o osi x na D i osi Y na CA określa wzór:

$$x_0 = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Pole czworokąta (fig. 19): S jest zarazem środkiem masy trójkąta ACF , którego jednym bokiem jest przekątna AC , a wierzchołkiem przeciwnym punkt F znaleziony na drugiej przekątnej tak, aby było $FB = DE$. Łącząc zatem środek AC , czyli G z F i odcinając $GS = \frac{1}{3} GF$, otrzymujemy S .

Jeżeli jedna z przekątnych jest spółwioną drugą, to na tej drugiej musi leżeć środek czworokąta.

Pole wielokąta: Jeżeli x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) oznaczają współrzędne prostokątne kolejno po sobie następujących wierzchołków W_i wielokąta (jednospójnego), przyczem kierunek obiegu jest zgodny z kierunkiem obrotu zapomocą którego oś X zajmie położenie osi Y na drodze najkrótszej, to rozłożywszy wielokąt na trójkąty prostymi poprowadzonymi z początku współrzędnych mamy:

$$Ax_s = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{6} (x_i + x_{i+1}) (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}),$$

$$Ay_s = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{6} (y_i + y_{i+1}) (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$$

$$\text{przyczem pole wielokąta } A = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}), \text{ zaś wielkości}$$

x_{n+1} i y_{n+1} są identyczne z x_1 i y_1 .

Dla skrócenia rachunku obieramy zwykle początek współrzędnych O na jednym z wierzchołków. To samo czynimy przy zastosowaniu sposobu wykreślnego przy pomocy wieloboku sznurowego, podobnie jak w ust. 11, II. Ażeby przytem dla wygody uniknąć trójkątów o polach ujemnych, trzeba obrać O tak, aby obieg $OW_i W_{i+1} O$ był w wszystkich trójkątach zgodny.

Wycinek koła (fig. 20): $x_s = \frac{2}{3} r \frac{\text{cięciwa } AB}{\text{łuk } AB} = \frac{2}{3} r \frac{c}{l}$, albo $x_s = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\text{arc } \alpha} = 38,1972 \frac{r \sin \alpha}{\alpha^{(o)}} = \frac{c r^2}{3 A}$, jeżeli $A = r^2 \text{ arc } \alpha$ jest polem wycinka.

Wycinek półkolisty: $x_s = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,4244 r$. Wycinek ćwierć-

kolisty: $x_s = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} r = 0,6002 r$. Wycinek 60° : $x_s = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 r$.

Odcinek koła (fig. 21): $x_s = \frac{C^3}{12 A} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\text{arc } 2 \alpha - \sin 2 \alpha}$

przyczem pole odcinka $A = \frac{1}{2} r^2 (\text{arc } 2 \alpha - \sin 2 \alpha)$.

Wycinek pierścienia kołowego (fig. 22).

$$x_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha} = 38,1972 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha (^\circ)}.$$

Pole ograniczone łukiem koła i dwiema stycznymi (fig. 23).

$$\text{Odległość } S \text{ od środka koła } x_s = \frac{r}{3} \frac{\sin \alpha \text{tg}^2 \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{arc } \alpha}.$$

Wycinek i odcinek elipsy (fig. 24): Spółrzędne środka masy znajdujemy najprościej uważając elipsę za rzut koła o promieniu a , nachylonego

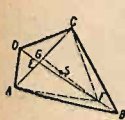


Fig. 19.



Fig. 20.



Fig. 21.

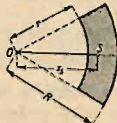


Fig. 22.

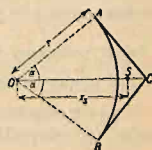


Fig. 23.

do płaszczyzny elipsy pod kątem α , dla którego $\cos \alpha = \frac{b}{a}$. Rachunek można zastąpić konstrukcją wykreślną uwidocznioną na rysunku, a polegającą na pokrewieństwie elipsy z kołem. Wogóle są środki masy dwu figur pozostających do siebie w stosunku pokrewieństwa punktami odpowiadającymi sobie nawzajem.

Parabola $y^2 = 2px = \frac{b^2}{a} x$ (fig. 25) dzieli prostokąt utworzony ze współrzędnych a b na pola o środkach S i S' . Pierwszy ma współrzędne

$$x_s = \frac{3}{5} a, \quad y_s = \frac{3}{8} b,$$

$$\text{drugi zaś} \quad x_{s'} = \frac{3}{10} a, \quad y_{s'} = \frac{3}{4} b.$$

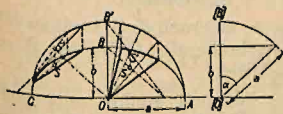


Fig. 24.

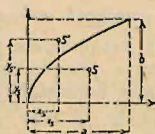


Fig. 25.



Fig. 26.

Odcinek paraboli (fig. 26): S leży na prostej łączącej środek cięciwy C' z punktem styczności C równoległej do niej stycznej do paraboli (ta prosta ma kierunek osi paraboli), przyczem

$$S C' = \frac{2}{5} C C', \quad \text{czyli} \quad y_s = \frac{2}{5} h.$$

Pas i czasza kuli: S na osi symetrii w połowie wysokości.

Pobocznicą stożka obrotowego: S leży na prostej łączącej wierzchołek ze środkiem podstawy, w odległości od tejże równej jednej trzeciej wysokości.

Pobocznicą stożka obrotowego ściętego o wysokości h , promieniach R i r , podstawy dolnej i górnej, ma S na osi symetrii, w odległości od dolnej podstawy:

$$x_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}.$$

Graniastosłup i walec o podstawach równoległych: S leży w połowie prostej łączącej środki obu podstaw.

Dla walca o tworzących równoległych do osi Z i podstawie dolnej na płaszczyźnie XY , a górnej na płaszczyźnie przechodzącej przez oś Y i nachylonej do X pod kątem α (fig. 27) jest:

$$x_s = \frac{\int x^2 dA}{\int x dA}; \quad y_s = \frac{\int xy dA}{\int x dA}; \quad z_s = \frac{1}{2} x_s \operatorname{tg} \alpha.$$

Tutaj jest $\int x dA = M_y$ momentem statycznym, $\int x^2 dA = J_y$ momentem bezwładności pola podstawy A względem osi Y , $\int xy dA = I_{xy}$ momentem zbieżności tegoż pola względem osi X i Y (ob. art. 30).

Jeżeli podstawa jest symetryczną względem osi równoległej do Y , to $y_s = \frac{\int y dA}{A}$, czyli jest równe odległości środka ciężkości podstawy.

Walec kołowy ukośnie ścięty (fig. 28): S leży na płaszczyźnie symetrii prostopadłej do obu podstaw (na fig. płaszczyzna XY)

$$x_s = \frac{1}{4} \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{h},$$

$$y_s = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{h}.$$

Klin walcowy (fig. 29) o jednej ścianie (podstawie) półkolistej:

$$x_s = \frac{3}{16} \pi r,$$

$$y_s = \frac{3}{32} \pi h.$$

Pobocznicą tego klina:

$$x_s = \frac{1}{4} \pi r,$$

$$y_s = \frac{1}{8} \pi h.$$

Klin z walca wydrążonego o podstawie kształtu pierścienia półkolistego:

$$x_s = \frac{3}{16} \pi (R^4 - r^4) / (R^3 - r^3), \quad y_s = \frac{3}{32} \pi (H^4 - h^4) / (H^3 - h^3).$$

R i H promień i wysokość zewnętrzne; r i h wewnętrzne.

Czworościan: S jest punktem przecięcia się czterech linii środkowych (łączących środki ścian z przeciwległymi wierzchołkami). Odległość S od ściany jest jedną czwartą odpowiadającej wysokości.

Ostrosłup i stożek: S leży na prostej łączącej środek pola podstawy Σ z wierzchołkiem W , przyczem odległość S od podstawy równa się ćwierci wysokości.

Ostrosłup ścięty: Przy oznaczeniach przez A i B pól dolnej i górnej podstawy, a przez h wysokości ostrosłupa ściętego, mamy dla odległości S od podstawy A wzór:

$$y_s = \frac{h}{4} \frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

Stożek ścięty o promieniach R i r podstawy dolnej i górnej, a wysokości h ma S w odległości od podstawy dolnej:

$$y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Obelisk (fig. 30): Odległość środka S od podstawy dolnej jest

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a(b+b_1) + a_1(b+3b_1)}{a(2b+b_1) + a_1(b+2b_1)}.$$

Klin prosty: Z poprzedniego wzoru wypływa po podstawieniu $b_1 = 0$ odległość środka S od podstawy (głowy klina) o polu ab :

$$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a+a_1}{2a+a_1}.$$

Odcinek kuli: Oznaczywszy przez h wysokość odcinka mamy dla odległości jego środka masy od środka kuli wzór:

$$x_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h},$$

zaś dla odległości tegoż środka masy od koła podstawowego o promieniu ρ

$$x'_s = h - (r - x_s) = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r-h}{3r-h} = \left[\frac{h}{2} \frac{h^2 + 2\rho^2}{h^2 + 3\rho^2} \right].$$

Te wzory (z wyjątkiem ostatniego wyrażenia ujętego w klamry) stosują się także do odcinka elipsoidy obrotowej, której oś obrotu równa się $2r$.

Dla półkuli pełnej: $x_s = \frac{3}{8}r$; dla półkuli wydrążonej:

$$x_s = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

Wycinek kuli (utworzony przez obrót wycinka koła o kącie środkowym 2α około osi symetrii): Przy oznaczeniach jak na fig. 18 jest:

$$x_s = \frac{3}{8}(1 + \cos \alpha)r = \frac{3}{8}(2r - h).$$

Paraboloida obrotowa (utworzona przez obrót paraboli około swej osi) ograniczona przekrojem kołowym prostopadłym do osi jako podstawą ma środek masy w odległości od podstawy równej jednej trzeciej wysokości.

Elipsoida trójosiowa o osiach $2a, 2b$ i $2c$. Objętość jednej ósmej elipsoidy, wyciętej płaszczyznami głównymi, ma środek określony współrzędnymi:

$$x_s = \frac{3}{8}a, \quad y_s = \frac{3}{8}b,$$

$$z_s = \frac{3}{8}c.$$

Wycinek bryły obrotowej (fig. 31) utworzonej obrotem figury o polu A około osi Z (jej nie przecinającej) ma środek masy S w punkcie, który jest zarazem środkiem masy łuku o promieniu $\rho = \int x^2 dA / \int x dA = I_z / M_z$. Odległością S od osi Z jest przeto:

$$x_s = \rho \sin \alpha / \arccos \alpha$$

jeżeli 2α jest kątem środkowym wycinka; odległością zaś od płaszczyzny XY jest:

$$z_s = \frac{\int xz \cdot dA}{\int x \cdot dA}.$$

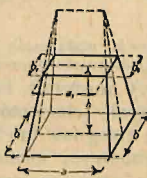


Fig. 30.

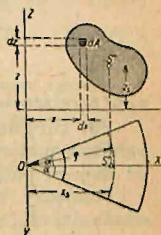


Fig. 31.

W przypadku symetrii figury tworzącej względem prostej równoległej do osi obrotu upraszcza się powyższy wzór na:

$$z_s = \frac{\int x dA}{A}.$$

czyli z_s jest równe odległości środka pola figury tworzącej od osi X .

C. Momenty bezwładności.

1. Momenty bezwładności i zboczenia ciał materialnych.

28. Określenia. Ramię czyli promień bezwładności. Masa zredukowana. Zwyczajnym, albo osiowym momentem bezwładności I układu punktów materialnych m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazywamy sumę iloczynów $m_i r_i^2$, tj. iloczynów mas punktów materialnych układu przez kwadraty ich odległości od danej prostej zwanej osią momentu. Dla układu materialnego ciągłego staje się w granicy ta suma całką elementów $r^2 dM$ rozprowadzoną na całą objętość układu o masie M . A zatem:

$$I = \sum m_i r_i^2, \text{ albo } = \int r^2 dM.$$

Jednostką momentu bezwładności w układzie C. G. S. jest $g^* cm^2$ albo $kg^* cm^2$; w układzie technicznym $kg. cm. sk^2$.

Odległość k od osi momentu, w której pomyślany punkt materialny o masie równej masie M danego ciała, ma ten sam moment bezwładności I , co to ciało, nazywa się ramieniem lub promieniem bezwładności. A zatem:

$$I = Mk^2, \text{ a stąd } k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Pomyślaną masę M_{red} skupioną w punkcie o danej odległości d od osi momentu, dla której $M_{\text{red}} d^2 = I$, czyli równa się momentowi bezwładności danego ciała, nazywamy masą zredukowaną, albo sprowadzoną na odległość d . A więc:

$$M_{\text{red}} = \frac{I}{d^2}.$$

Moment bezwładności ciała może być przeto określony także: a) jego masą i ramieniem bezwładności, b) dowolnie obraną odległością d i masą sprowadzoną na tę odległość.

29. Biegunowy moment bezwładności jest to suma iloczynów mas punktów materialnych (elementów) układu przez kwadraty ich odległości od danego punktu (bieguna lub środka momentu).

Pomiędzy biegunowym momentem bezwładności I_0 a momentami bezwładności I_x, I_y, I_z tego samego ciała względem trzech wzajemnie prostopadłych osi przechodzących przez biegun momentu I_0 zachodzi związek:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z.$$

Tak osiowy jak i biegunowy moment bezwładności jest zawsze wielkością dodatnią.

30. Moment zboczenia, albo moment odśrodkowy ciała względem dwu płaszczyzn jest to suma iloczynów z mas elementarnych i obu ich odległości np. x i y od tych płaszczyzn:

$$I_{xy} = \int xy dM, \text{ albo } = \sum x_i y_i dM.$$

Najczęściej przyjmuje się obie płaszczyzny wzajemnie prostopadłe, wobec czego x i y są współrzędnymi prostokątnymi.

Obranemu układowi współrzędnych X, Y, Z odpowiadają trzy momenty zboczenia I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} , które bywają także oznaczane symbolami D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} .

Momenty zboczenia mają ten sam wymiar, co momenty bezwładności, lecz mogą być zarówno ujemne jak dodatnie, a w szczególności równe zero.

31. Momenty względem osi równoległych. Moment bezwładności I względem jakiejkolwiek osi równa się sumie z momentu bezwładności $I^{(0)}$ względem osi do niej równoległej, a przechodzącej przez środek masy S i iloczynu Ma^2 , tj. masy ciała przez kwadrat odległości obu osi:

$$I = I^{(0)} + Ma^2.$$

Taki sam związek zachodzi pomiędzy biegunowym momentem bezwładności $I_0^{(0)}$ względem S , a biegunowym momentem bezwładności I_0 względem punktu O odległego od S o a :

$$I_0 = I_0^{(0)} + Ma^2.$$

Podobny związek między momentami zboczenia dla układu prostokątnego o początku w środku masy S , a takimiż momentami (odróżnionymi kreską) dla układu równoległego, w którym środek masy ma współrzędne a, b, c , ma postać:

$$I'_{xy} = I_{xy} + Mac, \quad I'_{yz} = I_{yz} + Mbc, \quad I'_{zx} = I_{zx} + Mca.$$

32. Momenty względem osi przecinających się w jednym punkcie ciała. Elipsoida bezwładności. Jeżeli $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$ oznaczają odpowiednio momenty bezwładności i zboczenia względem osi i płaszczyzn danego układu prostokątnego, którego początkiem jest dowolny punkt ciała O , to moment bezwładności I względem prostej przechodzącej przez O i tworzącej z osiami kąty α, β, γ określa równanie:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Dla każdego punktu O można znaleźć taki układ osi x, y, z , dla którego momenty zboczenia stają się zerami. Te trzy osi nazywają się osiami głównymi, a odpowiadające im osiowe momenty bezwładności noszą nazwę głównych (dla punktu O). Oznaczamy je zwykle przez A, B i C (przyczem $A \geq B \geq C$). W odniesieniu do osi głównych jako osi współrzędnych mamy tedy:

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Skoro na każdej z osi przechodzących przez O odmierzymy po obu stronach O długości $= K/\sqrt{I}$ (jeżeli K oznacza dowolnie obraną stałą), to miejscem geometrycznym wyznaczonych w ten sposób punktów jest elipsoida zwana elipsoidą bezwładności (Poinso't) punktu O .

Jej osie leżą na głównych osiach bezwładności tegoż punktu ciała, a jej równanie ma postać:

$$K^2 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2.$$

Wielkościami półośi są $K/\sqrt{A}, K/\sqrt{B}, K/\sqrt{C}$, a zatem największemu momentowi bezwładności odpowiada najkrótsza oś elipsoidy.

33. Centralna elipsoida bezwładności odpowiada punktowi O obranemu w środku masy ciała S . Jej osie noszą nazwę centralnych głównych osi b , albo z powodu ważnych własności kinetycznych: osi swobodnych. Szukanie głównych osi bezwładności ułatwiają twierdzenia następujące:

a) Układ trzech głównych osi bezwładności dla każdego punktu leżącego na jednej z głównych osi centralnych jest równoległy do tychże osi.

b) Jedną z głównych osi bezwładności dla każdego punktu leżącego na płaszczyźnie dwu głównych osi centralnych jest równoległą do trzeciej z tychże osi.

c) Głównymi osiami bezwładności ciała są (między innymi): 1. Każda oś symetrii, 2. każda prosta prostopadła do płaszczyzny symetrii i 3. każda prosta, na której leżą środki masy warstw elementarnych, otrzymanych przez podział ciała płaszczyznami prostopadłymi do tej prostej.

2. Momenty bezwładności i zboczenia płaskich układów materjalnych.

34. **Elipsa bezwładności.** Obracząc osie X i Y na płaszczyźnie układu widzimy, że dla jakiegokolwiek punktu tej płaszczyzny jest oś Z osią główną, albowiem momenty zboczenia I_{xz} i I_{yz} stają się równe zeru. Nadto I_z staje się równe biegunowemu momentowi bezwładności I_o , wobec czego:

$$I_z = I_o = I_x + I_y.$$

Zatem mamy do czynienia z jednym momentem zboczenia I_{xy} , który oznaczamy zwykle przez D .

Śladem elipsoidy bezwładności na płaszczyźnie układu jest elipsa:

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 - 2 D \xi \eta = K^2$$

zwana elipsą bezwładności.

Obróciwszy dany układ osi X i Y o kąt α otrzymujemy dla nowego układu X' i Y' momenty bezwładności i zboczenia w postaci:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D \sin 2 \alpha$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D \sin 2 \alpha$$

$$D' = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2 \alpha + D \cos 2 \alpha.$$

35. **Culmannowska elipsa bezwładności.** Elipsa i elipsoida bezwładności Poinso'ta jest określona równaniami w poprzednich ustępach tylko co do postaci i położenia, a nieokreślona co do wielkości, gdyż parametr K jest dowolny. Jeżeli X i Y są kierunkami głównych osi bezwładności, a odpowiadające momenty bezwładności I_x i I_y oznaczmy przez I_1 i I_2 , to równanie elipsy bezwładności przyjmie postać:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 = K^2.$$

Ustaliwszy wartość K zapomocą równania

$$K^2 = \frac{I_1 I_2}{M}$$

i wprowadziwszy ramiona bezwładności i_1 , i_2 równaniami $I_1 = M i_1^2$, $I_2 = M i_2^2$, otrzymujemy zupełnie oznaczoną szczególną elipsę bezwładności, zwaną Culmannowską, która gra nader ważną rolę w teorii zginania belek. Jej równanie jest:

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1.$$

Elipsa Culmann'a ma ważną własność następującą: Ramię bezwładności i względem prostej o dowolnym kierunku, przechodzącej przez środek elipsy równa się odległości tego środka od stycznej do elipsy równoległej do danej prostej.

36. **Szukanie głównych osi bezwładności. Koło bezwładności.** Jeżeli dla obranego kierunku osi współrzędnych X i Y , o początku O w danym

punkcie układu płaskiego, znamy I_x , I_y i D , to główne momenty bezwładności dla tego punktu określają wzory:

$$I_{\max} \equiv A = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D^2}$$

$$I_{\min} \equiv B = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 D^2}.$$

Kąt α_0 , o jaki trzeba obrócić układ osi, aby padły na kierunki główne, wyznacza się z warunku $D' = 0$, czyli

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 D}{I_y - I_x}.$$

Temu równaniu czynią zadość dwie wartości α_0 w granicach od 0° do 360° . Jedna z nich odpowiada oczywiście osi I_{\max} , druga zaś I_{\min} . Na pytanie „która?” odpowiada reguła:

Oś momentu I_{\max} przechodzi przez pierwszą i trzecią ćwiartkę płaszczyzny XY , jeżeli moment zbieżności D jest ujemny; w przypadku dodatniej wartości D leży oś I_{\max} w ćwiartce drugiej i czwartej.

W praktyce można zwykle z postaci figury poznać, jaki mniej więcej kierunek odpowiada I_{\max} i I_{\min} .

Obliczenie zapomocą powyższych równań zastępuje nader prosta konstrukcja wykreslna:

Na osi OY (fig. 32) odmierzymy $OC = I_x$, $CE = I_y$, znajdujemy środek M odcinka OE i promieniem $MO = \frac{1}{2} (I_x + I_y)$ zakreślamy z tego środka koło. W punkcie C wystawiamy następnie prostopadłą do OY i odcinamy na niej długość $CT = D$ (momentu zbieżności) z uwzględnieniem znaku (na rysunku przyjęto D dodatnie). Średnica AB poprowadzona przez punkt T wyznacza swemi końcami A i B kierunki osi głównych OA i OB ; zaś wielkości głównych momentów bezwładności długościami odcinków $BT = I_{\max}$ i $AT = I_{\min}$.

Koło nakreślone w powyższej konstrukcji, zwane kołem bezwładności i punkt T , zwany głównym punktem bezwładności, można nadto zastosować do wyznaczenia $I_{x'}$, $I_{y'}$ i D' dla układu osi obróconego z danego położenia XY o dowolny kąt α (fig. 33). W tym celu wystarczy połączyć punkty przecięcia się tych osi z okręgiem koła średnicą $F'G'$ i spuścić z T prostopadłą TH na tę średnicę. Wtedy $GH = I_{y'}$, $HF = I_{x'}$, $HT = D'$.

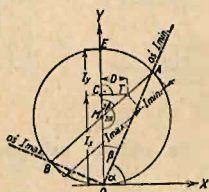


Fig. 32.

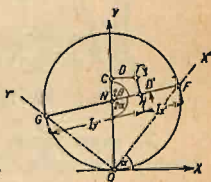


Fig. 33.

3. Momenty bezwładności najważniejszych technicznie linii, powierzchni i ciał materialnych.

37. Uproszczenia dla ciał jednolitych. Geometryczne momenty bezwładności i zbieżności. Gdy gęstość μ ciała jest stała, to

$$I = \int r^2 dM = \mu \int r^2 dV = \mu J,$$

$$J = \int r^2 dV$$

a wielkość

o wymiarze cm^5 nazywamy geometrycznym momentem bezwładności. Mnożąc go przez gęstość otrzymujemy zwykły (materialny) moment bezwładności ciała jednolitego.

Łuk kołowy o promieniu r i kącie środkowym 2α (fig. 37):

$$I_x = M \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\arcsin 2\alpha} \right), \quad I_y = M \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\arcsin 2\alpha} \right)$$

$$I_0 = I_x + I_y = M r^2, \quad M = \mu r \arcsin 2\alpha.$$

Dla całego okręgu: $2\alpha = 360^\circ$, $\arcsin 2\alpha = 2\pi$

$$I_x = I_y = M \frac{r^2}{2}, \quad I_0 = M r^2.$$

Obwód elipsy o półosiach a , b ($a > b$) i mimośrodkie liczbowym $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ma długość:

$$l = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot 3 \epsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot 5 \epsilon^6 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot 7 \epsilon^8 - \dots \right]$$

a moment bezwładności względem osi wielkiej:

$$J_a = 2\pi a b^3 \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} \epsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{5}{8} \epsilon^6 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} \epsilon^8 - \dots \right]$$

Pole trójkąta o środku masy S (fig. 38):

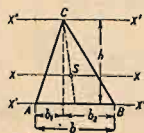


Fig. 38.

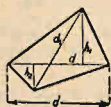


Fig. 39.

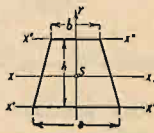


Fig. 40.

$$I_x = M \frac{h^2}{18}, \quad I_{x'} = M \frac{h^2}{2}, \quad I_{x''} = M \frac{h^2}{6};$$

$$(J_b)_B = \frac{b h^3}{4} + \frac{(b_1^3 + b_2^3) h}{12}; \quad (J_b)_{S'} = M \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}.$$

Względem dowolnej prostej przechodzącej przez S jest

$$J = M (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)/12,$$

przyczem d_1 , d_2 , d_3 są odległościami wierzchołków trójkąta od tej prostej.

Trójkąt równoramienny ($b_1 = b_2 = b/2$):

$$\text{Względem osi symetrii: } J = \frac{b^3 h}{48};$$

$$\text{względem środka } S: J_s = \frac{b h (4 h^2 + 3 b^2)}{144};$$

$$\text{względem wierzchołka } B: J_B = \frac{b h (12 h^2 + b^2)}{48}.$$

Pole czworokąta (fig. 39). Względem przekątnej d jest:

$$J_d = \frac{d (h_1^3 + h_2^3)}{12}, \quad I_d = M \frac{1}{6} \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}.$$

W przypadku równoległoboku jest:

$$J_d = \frac{d d_1^2 \sin^2 \varphi}{48}, \quad I_d = M \frac{d_1^2 \sin^2 \varphi}{24}.$$

W przypadku trapezu równoramiennego (fig. 40):

$$I_{x'} = \mu \frac{h^3 (a + 3b)}{12} = M \frac{h^2}{6} \cdot \frac{a + 3b}{a + b},$$

$$I_{x''} = \mu \frac{h^3 (3a + b)}{12} = M \frac{h^2}{6} \frac{3a + b}{a + b},$$

$$I_y = \mu \frac{h}{48} \frac{a^4 - b^4}{a - b} = M \frac{a^2 + b^2}{24},$$

$$I_x = \mu \frac{h^3}{36} \left[2(a + b) - \frac{a^2 + b^2}{a + b} \right] = M \frac{h^2}{18} \left[1 + \frac{2ab}{(a + b)^2} \right].$$

Pole wielokąta umiarowego. Długość boku a , liczba boków n , promień koła wpisanego r , opisanego R . Dla osi przechodzących przez środek jest

$$I_x = I_y = I = \mu \frac{n a r (12 r^2 + a^2)}{48} = M \frac{12 r^2 + a^2}{24} = M \frac{6 R^2 - a^2}{12}.$$

Pole koła. Względem każdej średnicy o długości $d = 2r$ jest

$$I = \mu \frac{\pi r^4}{4} = \mu \frac{\pi d^4}{64} = M \frac{r^2}{4}.$$

$$\text{Względem środka: } I_o = \mu \frac{\pi r^4}{2} = \mu \frac{\pi d^4}{32} = M \frac{r^2}{2}.$$

Półkole. Przy położeniu osi X na średnicy ograniczającej, a osi Y na osi symetrii jest:

$$I_x = I_y = \mu \frac{\pi r^4}{8} = M \frac{r^2}{4}.$$

$$\text{Względem środka koła } O: I_o = \mu \frac{\pi r^4}{4} = M \frac{r^2}{2}.$$

$$\text{Względem środka masy } S: I_s = M \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{32}{9\pi^2} \right).$$

Pierścień kołowy o promieniu zewnętrznym R , wewnętrznym r .

$$\text{Względem każdej średnicy jest } I = \mu \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4} = M \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

$$\text{Względem środka } I_o = 2I.$$

Wycinek koła (fig. 37).

$$I_x = \mu \frac{r^4}{8} \left(\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha \right) = M \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right),$$

$$I_y = \mu \frac{r^4}{8} \left(\text{arc } 2\alpha + \sin 2\alpha \right) = M \frac{r^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha} \right),$$

$$I_o = M \frac{r^2}{2}, \quad I_s = M \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c^2}{l^2} \right).$$

Odcinek koła (fig. 41).

$$J_x = \frac{r^4}{8} \left(\text{arc } 2\alpha - \frac{4}{3} \sin 2\alpha + \frac{1}{6} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_x = M \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$J_y = \frac{r^4}{8} \left(\operatorname{arc} 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_y = M \frac{r^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$J_o = \frac{r^4}{4} \left(\operatorname{arc} 2\alpha - \frac{2}{3} \sin 2\alpha - \frac{1}{6} \sin 4\alpha \right),$$

$$I_o = M \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha} \right).$$

Pole ograniczone łukiem koła i dwiema stycznymi (fig. 42). Centralnymi głównymi momentami bezwładności są:

$$J_x = r^4 \left(\frac{1}{6} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{24} \sin 2\alpha - \frac{1}{8} \operatorname{arc} 2\alpha \right),$$

$$J_y = r^4 \left(\frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{24} \sin 2\alpha - \frac{1}{8} \operatorname{arc} 2\alpha - \frac{1}{9} \frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{arc} \alpha} \right).$$

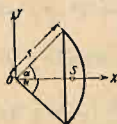


Fig. 41.

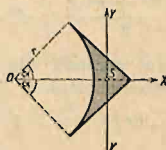


Fig. 42.

Nadto jest: $J_o = \frac{r^4}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{arc} \alpha \right).$

Elipsa. Względem osi wielkiej $2a$ jest $I_a = \mu \frac{\pi a b^3}{4} = M \frac{b^2}{4},$

względem osi małej $2b$ jest $I_b = \mu \frac{\pi a^3 b}{4} = M \frac{a^2}{4},$

względem środka O jako bieguna: $I_o = M \frac{a^2 + b^2}{4}.$

Parabola (fig. 43). $I_x = \mu \frac{4 a b^3}{15} = M \frac{b^2}{5},$

$$I_y = \mu \frac{4 a^3 b}{7} = M \frac{3 a^2}{7}; \quad I_{y''} = \mu \frac{32 a^3 b}{105} = M \frac{8 a^2}{35};$$

$$I_{y'} = \mu \frac{16 a^3 b}{175} = M \frac{12 a^2}{175}; \quad I_s = M \frac{12 a^2 + 35 b^2}{175}.$$

Prosty graniastosłup lub walec o wysokości h i polu podstawy (przekroju normalnego) B . Jedna z centralnych osi głównych Z łączy środki podstaw, dwie pozostałe X i Y są zarazem centralnymi osiami głównymi przekroju B . Oznaczawszy przez i_x, i_y, i_z odpowiadające ramiona bezwładności tego przekroju, mamy dla głównych centralnych momentów bezwładności ciała wzory:

$$I_x = M \left(\frac{h^2}{12} + i_x^2 \right), \quad I_y = M \left(\frac{h^2}{12} + i_y^2 \right), \quad I_z = M i_z^2.$$

W przypadku prostopadłościanu o krawędziach a, b, c przybierają powyższe wzory postać:

$$I_a = M \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad I_b = M \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad I_c = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

W przypadku sześcianu o krawędzi a :

$$I_x = I_y = I_z = M \frac{a^2}{6}.$$

W przypadku walca kołowego o promieniu r :

$$I_x = I_y = M \cdot \frac{3r^2 + h^2}{12}, \quad I_z = M \frac{r^2}{2}.$$

Względem prostej nachylonej do osi walca pod kątem α (przechodzącej przez środek masy):

$$I_\alpha = M \frac{1}{12} \left[3r^2 (1 + \cos^2 \alpha) + h^2 \sin^2 \alpha \right].$$

W przypadku walca kołowego wydrążonego o promieniach R i r :

$$I_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}, \quad I_x = I_y = M \frac{1}{4} \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right).$$

Z tych wzorów wypada dla samej pobocznic walca jako rury o ścianie nieskończenie cienkiej ($R = r$):

$$I_z = M r^2, \quad I_x = I_y = M \frac{1}{12} (6r^2 + h^2).$$

Prosty ostrosłup lub stożek o wysokości h i polu podstawy B . Prosta łącząca środek podstawy z wierzchołkiem (prostopadła do podstawy) jest jedną z centralnych głównych osi bezwładności (oś Z). Dwie drugie (X i Y) są równoległe do głównych centralnych osi bezwładności podstawy B . Oznaczywszy przez i_x, i_y, i_z odpowiadające ramiona bezwładności podstawy B , mamy dla głównych centralnych osi bezwładności ciała wzory:

$$I_x = M \frac{3}{5} \left(\frac{h^2}{16} + i_x^2 \right), \quad I_y = M \frac{3}{5} \left(\frac{h^2}{16} + i_y^2 \right), \quad I_z = M \frac{3}{5} i_z^2.$$

W przypadku ostrosłupa prostokątnego o bokach podstawy a i b przyjmują powyższe wzory postać:

$$I_a = M \cdot \frac{4b^2 + 3h^2}{80}, \quad I_b = M \frac{4a^2 + 3h^2}{80}, \quad I_h = M \frac{a^2 + b^2}{20}.$$

W przypadku stożka obrotowego (kołowego) o promieniu podstawy r :

$$I_x = I_y = M \frac{3}{20} \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right), \quad I_z = M \frac{3r^2}{10}.$$

Dla samej pobocznicy stożka (jako jednolitej powierzchni materialnej) jest przy oznaczeniu długości tworzącej przez t :

$$I_z = M \frac{r^2}{2}, \quad J_z = \frac{\pi r^3 t}{2}.$$

Stożek obrotowy ścięty, o wysokości h , promieniach podstaw R i r . Moment bezwładności względem osi symetrii:

$$I_z = \mu \frac{\pi h}{10} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R - r} = M \frac{3}{10} \frac{R^3 - r^3}{R - r}.$$

Dla samej pobocznicy stożka ściętego: $I_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}.$

Kula o promieniu r . Względem którejkolwiek średnicy jest

$$I = \mu \frac{8}{15} \pi r^5 = M \frac{2 r^2}{5}.$$

Półkula. Względem którejkolwiek prostej przechodzącej przez środek kuli jest:

$$I = \mu \frac{4}{15} \pi r^5 = M \frac{2 r^2}{5}.$$

Kula wydrążona o promieniu zewnętrznym R , wewnętrznym r . Względem każdej średnicy jest

$$I = \mu \frac{8 \pi}{15} (R^5 - r^5) = M \frac{2}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Powierzchnia kuli, względem którejkolwiek średnicy ma

$$J = \frac{8 \pi r^4}{3}, \quad I = M \frac{2 r^2}{3}.$$

Odcinek kuli o wysokości h (promień kuli r). Względem osi symetrii jest

$$I = \mu \frac{\pi h^3}{30} (20 r^2 - 15 r h + 3 h^2) = M \frac{1}{10} \frac{20 r^2 - 15 r h + 3 h^2}{3 r - h}.$$

Wycinek kuli. (Wysokość czaszy h , promień kuli r .) Względem osi symetrii jest

$$I = \mu \frac{2 \pi r^2 h^2}{15} (3 r - h) = M \frac{h}{5} (3 r - h).$$

Elipsoida trójosiowa o półosiach a, b, c ma centralne główne momenty bezwładności:

$$I_a = M \cdot \frac{1}{5} (b^2 + c^2), \quad I_b = M \frac{1}{5} (c^2 + a^2), \quad I_c = M \cdot \frac{1}{5} (a^2 + b^2).$$

Paraboloida obrotowa. Przy oznaczeniach jak na fig. 43 moment bezwładności względem osi symetrii:

$$I_x = M \frac{b^2}{3}, \quad \text{przyczem} \quad M = \mu \frac{\pi}{2} a b^2.$$

Pierścień, tj. bryła obrotowa pierścieniowata. Przy założeniu, że przekrój radialny pierścienia jest figurą symetryczną względem prostej $Z'Z'$, równoległej do osi obrotu ZZ (fig. 44); przy oznaczeniu ramion bezwładności tej figury tworzącej o polu F przez i_z (względem osi $Z'Z'$) i_x (względem osi $XO \perp Z'Z'$) mamy:

$$I_z = \mu 2 \pi R F (R^2 + 3 i_z^2)$$

$$I_x = \mu \pi R F (R^2 + 3 i_x^2 + 2 i_z^2).$$

Nadto jest: $M = \mu 2 \pi R F$ (według reguły Pappusa-Guldina).

Pierścień okrągły. Dla osi X przechodzącej przez środek koła tworzącego o promieniu a wypada z powyższych wzorów ogólnych:

$$I_z = \mu \frac{\pi^2 R a^2}{2} (4 R^2 + 3 a^2) = M (R^2 + \frac{3}{4} a^2),$$

$$I_x = \mu \frac{\pi^2 R a^2}{4} (4 R^2 + 5 a^2) = M \frac{1}{2} (R^2 + \frac{5}{4} a^2).$$

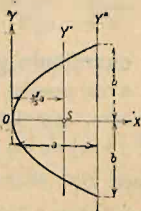


Fig. 43.

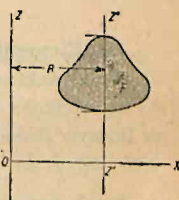


Fig. 44.

Pierścień okrągły wydrążony. Figura tworząca jest pierścieniem kołowym o promieniu wewnętrznym a_0 , zewnętrznym a . Przy tem samym położeniu osi X , co powyżej, jest

$$I_z = M \left[R^2 + \frac{3}{4} (a_0^2 + a^2) \right]; \quad M = \mu 2 \pi^2 R (a^2 - a_0^2).$$

$$I_x = M \frac{1}{2} \left[R^2 + \frac{5}{4} (a_0^2 + a^2) \right]$$

Pierścień eliptyczny. Dla osi X przechodzącej przez środek elipsy tworzącej o półosiach a (w płaszczyźnie równikowej) i b (równoległej do osi obrotu z), otrzymujemy podobnie jak powyżej:

$$I_z = \mu \frac{\pi^2 R a b}{2} (4 R^2 + 3 a^2) = M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right)$$

$$I_x = \mu \frac{\pi^2 R a b}{2} (4 R^2 + 3 a^2 + 2 b^2) = M \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \right).$$

D. Praca i energia.

39. Pomocnicze wiadomości z rachunku wektorowego. Wielkość algebraiczną, czyli skalar, utworzony z dwu jakichkolwiek wektorów \vec{a} i \vec{b} przez pomnożenie bezwzględnej wartości wektora \vec{a} przez bezwzględną wartość wektora \vec{b} i przez dostawę kąta między \vec{a} i \vec{b} , nazywamy iloczynem skalarowym obu wektorów i wyrażamy symbolem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \text{ albo } \overline{a b}.$$

A zatem:

$$\overline{a b} = a b \cos (\overline{a, b}).$$

Z powyższego określenia wynika odrazu:

$$\overline{a b} = \overline{b a} \text{ (prawo przemienności)}$$

$$\overline{a (\vec{b} + \vec{c})} = \overline{a b} + \overline{a c} \text{ (prawo rozdzielności).}$$

Nadto gdy wektory \vec{a} i \vec{b} są określone swemi rzutami na osie współrzędnych prostokątnych, tj.

$$\vec{a} \equiv \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} \equiv \{b_x, b_y, b_z\},$$

wówczas

$$\overline{a b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

40. Elementarne określenie pracy. Jeżeli ciało odbywa przesunięcie określone wektorem \vec{s} , a na pewien punkt m tego ciała działa siła \vec{P} , stała co do wielkości i kierunku, zamykająca z przesunięciem \vec{s} z punktu m kąt α , to iloczyn skalarowy $\vec{P} \cdot \vec{s}$ nazywa się pracą siły \vec{P} na przesunięciu \vec{s} . A zatem:

$$\text{Praca } L = P \cdot s \cos \alpha = \overline{P s}.$$

Praca jest zatem wielkością algebraiczną, dodatnią w przypadku, gdy kąt α jest ostry, ujemną zaś, gdy kąt α jest rozwarty. Gdy w szczególności $\alpha = 90^\circ$, czyli gdy siła \vec{P} jest prostopadła do przesunięcia \vec{s} , to praca równa się zeru. $L = P s$, gdy $\alpha = 0$, czyli gdy siła ma ten sam kierunek co przesunięcie (droga); w przypadku gdy kierunek siły jest wprost przeciwny kierunkowi przesunięcia, jest $\alpha = 180^\circ$, zaś $L = -P s$ (jeżeli $P = |\vec{P}|$, $s = |\vec{s}|$).

Ponieważ $s \cos \alpha = s'$ jest rzutem przesunięcia s na kierunek siły \overline{P} , czyli „przesunięciem składowym w kierunku siły \overline{P} “, przeto pracę siły \overline{P} na przesunięciu s można określić także jako iloczyn z wielkości siły i przesunięcia składowego w kierunku tejże siły, albo też jako iloczyn z wielkości przesunięcia i składowej siły w kierunku tegoż przesunięcia.

Przy działaniu na ten sam punkt ciała iluokolwiek sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \dots$; o wypadkowej \overline{R} , mamy:

$$\overline{R}s = \overline{P}_1 s + \overline{P}_2 s + \dots,$$

czyli: Praca siły wypadkowej równa się sumie algebraicznej prac sił składowych.

Podobnie gdy przesunięcie s punktu m , na który działa dana siła \overline{P} , jest wypadkowym przesunięć s_1, s_2, \dots , to

$$\overline{P}s = \overline{P}s_1 + \overline{P}s_2 + \dots$$

czyli: Praca siły na przesunięciu wypadkowym równa się sumie algebraicznej prac tej siły na przesunięciach składowych.

41. Ogólne określenie pracy. Gdy siła \overline{P} , zmieniając wogóle wielkość i kierunek, działa na punkt m (fig. 45), poruszający się z położenia A do B po drodze krzywoliniowej o długości s , to rozkładamy cały ruch na przesunięcia elementarne \overline{ds} , a pracę pojmujemy jako sumę, czyli całkę prac elementarnych. Przez pracę elementarną zaś rozumiemy (w każdym dowolnym punkcie drogi) pracę chwilowej wartości geometrycznej siły \overline{P} na przesunięciu elementarnym \overline{ds} (odpowiadającemu temu punktowi drogi). A zatem:

Praca elementarna $dL = \overline{P} \overline{ds} = P \cos \alpha \cdot ds$,

zaś praca całkowita:

$$L = \int_{(A)}^{(B)} \overline{P} \overline{ds} = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

jeżeli X, Y, Z oznaczają składowe siły a dx, dy, dz składowe przesunięcia w kierunkach osi prostokątnego układu współrzędnych.

Wymiarem pracy jest iloczyn $[L]$ $[P]$ wymiaru długości i siły. Jednostkę pracy w układzie technicznym jest 1 kgm („kilogramometr“, albo „metrokilogram“) tj. praca siły jednego kilograma na długości jednego metra. W układzie C.G.S. jest jednostką pracy 1 erg , tj. praca siły 1 dyny na długości 1 cm . Większą jednostką pochodną jest 1 Joule (czyt. Dżul) = 10^7 ergów .

$1 \text{ km} = 9,81 \text{ Joule'ów}$; $1 \text{ Joule} = 0,102 \text{ kgm}$.

42. Praca w jednostce czasu, czyli moc lub dzielność jest określona ogólnym równaniem

$$E = \frac{dL}{dt} = P v \cos \alpha,$$

jeżeli α jest kątem pomiędzy siłą \overline{P} a prędkością \overline{v} punktu, na który siła działa.

Gdy w szczególności siła ma kierunek prędkości, to $E = P \cdot v$.

Jednostką techniczną mocy jest 1 kgm/sk , czyli $1 \text{ kilogramometr na sekundę}$. Osobną nazwę ma tradycyjna jednostka pochodna: $75 \text{ kgm/sk} = 1 \text{ KM}$, tj. koń mechaniczny.

Jednostką mocy w układzie C. G. S. jest $1 \text{ Joule na sekundę} = 10^7 \text{ ergów na sekundę} = 1 \text{ Watt}$ (skrót = 1 W). Większą jednostką pochodną jest $1 \text{ kilowatt} = 1000 \text{ Wattów} = 10^{10} \text{ erg/sk}$.

$1 \text{ KM} = 75 \text{ kgm/sk} \sim 0,736 \text{ KW}$,
 $1 \text{ KW} \sim 1,36 \text{ KM}$, albo 102 kgm/sk ,
 $1 \text{ kgm/sk} \sim 9,81 \text{ W}$.



Fig. 45.

Moc E określona powyżej jest to moc chwilowa. Znając moc chwilową w zależności od czasu t obliczamy pracę w czasie $t_2 - t_1$ z wzoru: $L = \int_{t_1}^{t_2} E dt$.

$$\text{Iloraz } \frac{L}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} E dt}{t_2 - t_1} = E_{\text{śr}}$$

określa moc średnią. Nawzajem jest $L = E_{\text{śr}} (t_2 - t_1)$.

To równanie prowadzi do nowych, również rozpowszechnionych w praktyce, jednostek pracy:

$$\begin{aligned} 1 \text{ koniogodzina} &= 1 \text{ KM godz.} = 270\,000 \text{ kgm} = 270 \text{ tm (tonmistrzów)} \\ 1 \text{ kilowattgodzina} &= 1 \text{ KW h} \sim 367\,000 \text{ kgm} = 367 \text{ tm.} \end{aligned}$$

43. Wykres pracy. Z określenia pracy równaniem,

$$L = \int P' ds,$$

przyczem $P' = P \cos \alpha$ jest rzutem siły na kierunek przesunięcia, wypływa wykreślne przedstawienie pracy (fig. 46) jako pola ograniczonego krzywą AB , przedstawiającą zależność P' od s , osią dróg i rzędniemi odpowiadającymi początkowym i końcowym wartościom P' i s .

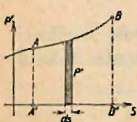


Fig. 46.

Podobnie przedstawia się wykreślenie pracę daną w postaci $L = \int P ds'$, przyczem $ds' = ds \cos \alpha$ jest rzutem elementu drogi na kierunek siły. W przypadku np. siły ciężkości G uważanej za stałą, jest przy jakimkolwiek ruchu punktu, na który siła działa, wykres pracy ograniczony prostą równoległą do osi s' , czyli do osi wysokości, a praca

$$L = Gh,$$

jeżeli h oznacza wysokość położenia początkowego nad końcowym.

44. Obliczenie pracy w przypadku, gdy siła jest określona polem potencjalnem. Pole sił nazywamy potencjalnem, jeżeli praca elementarna siły pola jest różniczką zupełną jednowartościowej funkcji miejsca — $U(x, y, z)$, czyli jeżeli

$$X dx + Y dy + Z dz = -dU = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Ten warunek jest identyczny z następującym:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Funkcja U nazywa się potencjałem pola sił. (Wprowadzenie jej ze znakiem — ma tylko historyczne uzasadnienie, dzięki pierwszemu zastosowaniu pojęcia potencjału do pola ciężkości.)

Pracę siły \vec{P} na dowolnej drodze od położenia początkowego $M_0(x_0, y_0, z_0)$ do końcowego $M_1(x_1, y_1, z_1)$ przedstawia w tym przypadku wyrażenie:

$$L = \int_{M_0}^{M_1} (X dx + Y dy + Z dz) = U(x_0, y_0, z_0) - U(x_1, y_1, z_1) = U_0 - U_1$$

niezależnie od postaci i długości drogi.

Potencjał ma przeto wymiar pracy. Jego wartość liczbową jest jednakże nieoznaczona, skoro bowiem dane pole sił określa funkcja U , to określa je również funkcja $U + C$, przyczem C jest stałą dowolną, która przy różniczkowaniu znika. Dlatego można mierzyć tylko różnice potencjału w różnych

miejscach, przyjmując w jednym miejscu, stosownie obranem, dowolną stałą wartość potencjału, np. równą 0.

45. Potencjał jednostkowy, czyli właściwy. Pole siły ciężkości. Jeżeli siła pola jest określona w odniesieniu do punktu materialnego o masie $= 1$, czyli dana natężeniem pola, to odpowiadający potencjał nazywamy jednostkowym. Ma on wymiar ilorazu pracy przez masę. (Natężenie pola ma wymiar przyspieszenia). Mnożąc potencjał właściwy przez masę punktu materialnego, znajdującego się w pewnym miejscu pola, otrzymujemy odpowiadający potencjał zwyczajny. Dla siły ciężkości, określonej natężeniem pola g uważanem w pierwszym przybliżeniu za stałe, jest potencjał jednostkowy

$$U = g z,$$

jeżeli z oznacza wysokość ponad obranym poziomem porównawczym, dla którego $U = 0$. Stąd nazwa „powierzchni poziomu“ dla powierzchni ekwipotencjalnych wogóle.

Dla siły ciężkości określonej w drugim przybliżeniu jako siła skierowana ku środkowi ziemi (uważanej za kulę) jest stosownie do newtonowskiego

prawa grawitacji natężenie ciężkości $= f \frac{M}{(R+z)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$, jeżeli f

oznacza stałą grawitacji, M masę ziemi o promieniu R , z wysokość nad poziomem morza, zaś g_0 natężenie ciężkości w poziomie morza. Stąd potencjał:

$$U = -\frac{g_0 R^2}{R+z} = -g R + g z - g \frac{z^2}{R} + \dots$$

Powierzchnie ekwipotencjalne są kulami współśrodkowymi z ziemią. (Wpływ obrotu ziemi na pole ciężkości względnej będzie rozpatrywany w art. 54.).

46. Energia kinetyczna. (E_k). Dla punktu materialnego o masie m , poruszającego się z prędkością \bar{v} , jest

$$E_k = \frac{1}{2} m \bar{v} \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Dla układu punktów materialnych m_i o prędkościach \bar{v}_i jest

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Dla ciała materialnego ciągłego: $E_k = \int \frac{1}{2} v^2 dM$.

Energja kinetyczna jest przeto zawsze skalarem dodatnim o tym samym wymiarze co praca. Jednostki pracy są zarazem jednostkami energii kinetycznej.

Mimo to nie wolno utożsamiać pojęć energii kinetycznej i pracy. Wszak i moment siły ma ten sam wymiar co praca i energja. Obok wybitnych różnic fizykalnych łatwo zauważyć i matematyczne; np. praca może być równie dobrze dodatnia jak ujemna, podczas gdy energja kinetyczna tylko dodatnia. Obliczenie energii kinetycznej ciała przedstawia się szczególnie prosto w przypadkach ruchu postępowego i ruchu obrotowego. W pierw-

szym jest $E_k = \frac{1}{2} M v^2$, jeżeli M oznacza masę całego ciała; w drugim zaś

$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$, przyczem oznacza I moment bezwładności, a ω prędkość kątową ciała względem (chwilowej) osi obrotu.

47. Twierdzenie Koenig'a. Energia kinetyczna ciała sztywnego. Połączmy w myśli ze środkiem masy S danego układu materialnego (najogólniejszego), poruszającego się dowolnie, pomocniczy układ odniesienia, obdarzony ruchem postępowym; wówczas energia kinetyczna układu danego jest sumą dwu wielkości: Jedna z nich przedstawia energję kinetyczną, jakaby miał punkt materialny poruszający się z prędkością u środka masy układu S , gdyby w nim skupić całą masę układu M ; druga zaś jest energją kinetyczną ruchu względnego w pomocniczym układzie odniesienia. Czyli

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \sum \frac{1}{2} m_i w_i^2,$$

jeżeli $\overline{w_i}$ oznaczają prędkości punktów m_i względem pomocniczego układu odniesienia.

Gdyby pomocniczy układ odniesienia miał początek nie w S , lecz w innym punkcie poruszającego się układu materialnego, to w równaniu powyższem przybywa jeszcze wyraz $M \overline{u} \overline{w_0}$, w którym $\overline{w_0}$ oznacza prędkość środka masy S względem pomocniczego układu odniesienia. Stosując powyższy wynik do ciała sztywnego, którego ogólny ruch chwilowy, jak wiadomo z kinematyki, jest złożony z obrotu chwilowego z prędkością kątową ω , około osi przechodzącej przez dowolnie obrany punkt ciała i z przesunięcia chwilowego z prędkością \overline{u} , otrzymujemy w wypadku ogólnym:

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + M (\overline{u} \cdot \overline{v_0} - u^2).$$

Tutaj oznacza I moment bezwładności ciała względem obranej osi obrotu, $\overline{v_0}$ prędkość środka masy ciała, wreszcie \overline{u} prędkość punktu leżącego na obranej osi obrotu. Skoro zaś oś obrotu oberzemy tak, aby przechodziła przez środek masy ciała S , to $\overline{u} = \overline{v_0}$, a zatem:

$$E_k = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

czyli energia kinetyczna ciała sztywnego jest równa sumie energii kinetycznej jego ruchu chwilowego postępowego z prędkością środka masy i energii kinetycznej obrotu chwilowego około osi przechodzącej przez ten środek.

E. Zasady dynamiki punktu materialnego.

48. Zasada pracy. Jeżeli \overline{P} jest wypadkową sił działających na punkt materialny swobodny o masie m , to mnożąc podstawowe równanie dynamiki $m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{P}$ skalarowo przez $\overline{v} dt = d\overline{s}$, dochodzimy do równania:

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \overline{P} d\overline{s} \text{ albo } = X dx + Y dy + Z dz,$$

czyli: Przyrost elementarny energii kinetycznej równa się pracy elementarnej całkowitej siły wywołującej ruch punktu materialnego swobodnego.

Całkowanie zaś powyższego równania między położeniem początkowym $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a końcowym $M_1(x_1, y_1, z_1)$ daje:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = L = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \overline{P} d\overline{s},$$

lub słowami: Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego swobodnego między jakimkolwiek dwoma po sobie następującymi punktami jego toru równa się pracy siły wywołującej ruch tego punktu na drodze od położenia początkowego do końcowego.

49. Ruch nieswobodny powstaje, gdy przy pomocy pewnych ciał uważanych za sztywne zmusimy punkt materialny poruszający się pod wpływem sił danego pola do uczynienia zadość pewnym warunkom geometrycznym jak np.:

1. Punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na pewnej powierzchni.

2. Punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na pewnej krzywej.

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z jednym warunkiem ograniczającym w postaci równania powierzchni $F(x, y, z) = 0$. Punkt materialny ma jeszcze 2 stopnie swobody. W drugim przypadku zachodzą dwa warunki ograniczające w postaci dwu równań krzywej np. $\Phi(x, y, z) = 0$ i $\Psi(x, y, z) = 0$, a punkt ma już tylko 1 stopień swobody.

Ograniczenie swobody jest równoważne sile, jaką powierzchnia lub krzywa ograniczająca swobodę wywiera na dany punkt materialny. Tę siłę nazywamy reakcją, oddziaływaniem, albo odporem powierzchni lub krzywej. Przez wprowadzenie reakcji sprowadza się zadanie ruchu nieswobodnego do zadania ruchu swobodnego pod wpływem wypadkowej siły pola i reakcji.

Siły pola (zależne zwyczajnie od miejsca, a niekiedy i od czasu) noszą także nazwę sił czynnych, tj. takich, które wytwarzają ruch punktu materialnego ze stanu jego spoczynku. Natomiast reakcje ciał (sztywnych) ograniczających swobodę punktu materialnego, oraz siły zależne od prędkości (jak np. opór ośrodka ciągłego), zalicza się do sił biernych, tj. takich, które same nie mogą wywołać ruchu punktu materialnego będącego w spoczynku.

Ogromne uproszczenie uzyskujemy w przypadku, gdy reakcja może być tylko normalną do powierzchni lub krzywej ograniczającej swobodę. Powierzchnie i krzywe nazywamy wtedy doskonale gładkimi. Praca odpowiadających im reakcji jest zawsze równa zeru. Wtedy dla ruchu po danej krzywej pod wpływem danych sił pola znajdujemy z zasady pracy od razu skończone równanie ruchu.

50. Reakcja toru doskonale gładkiego. Siła odśrodkowa. Całkowite przyspieszenie \bar{p} punktu materialnego zmuszonego, do pozostawania na torze danym, odpowiada wypadkowej z siły czynnej (siły pola) \bar{P} i reakcji \bar{R} , która ma kierunek normalny do toru, czyli

$$m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$$

Ograniczając się do przypadku gdy siła P i tor leżą w jednej płaszczyźnie (fig. 47), otrzymujemy przez rzutowanie powyższego równania na kierunek stycznej i normalnej:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P_t \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_n + R.$$

Te równania wyrażają:

1. Składowa styczna przyspieszenia $\frac{d^2 s}{dt^2}$ jest uwarunkowana składową styczną P_t siły czynnej.

2. Składowa normalna przyspieszenia $\frac{v^2}{\rho}$ jest uwarunkowana wypadkową składowej normalnej P_n siły czynnej i reakcją R .

3. Reakcja toru występuje wogóle także wtedy, gdy $P_n = 0$ i równa się wówczas $\frac{mv^2}{\rho}$ (siła dośrodkowa). Nawzajem punkt materialny poruszający się po torze danym wywiera nań nacisk o tej samej wielkości $\frac{mv^2}{\rho}$, lecz skierowany przeciwnie, t. zn. od środka krzywizny na zewnątrz toru. Siła ta nosi nazwę: „Siła odśrodkowa“.

Zważywszy, że pod tem samem mianem kryją się jeszcze dwa inne pojęcia dynamiczne, należy pamiętać, że przez siłę odśrodkową w ruchu nieswobodnym na danym torze rozumiemy siłę, jaką poruszający się punkt materialny wywiera na tor.

51. Zasada zachowania energii. W polu sił potencjalnem jest (według ust. 44) $L = U_0 - U_1$. Po wstawieniu tej wartości w równanie wyrażające zasadę pracy (ust. 48) otrzymujemy wzór:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = \text{stałe};$$

albo

$$E_k + U = \text{stałe},$$

ważny tak dla ruchu swobodnego, jak i nieswobodnego bez oporów (tj. gdy reakcje są normalne do torów). Wyrażenie $E_k + U$ nazywamy całkowitą energią punktu materialnego. Otrzymane równanie wyraża zasadę zachowania energii dla jednego punktu materialnego; czyli słowami:

Podczas ruchu punktu materialnego w potencjalnem polu sił zachowuje całkowita energia punktu wartość stałą.



Fig. 47.

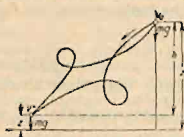


Fig. 48.

Dla pola siły ciężkości, uważanej w niewielkim obszarze za stałą jest:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g z = \text{stałe} = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0.$$

Stąd dla punktu materialnego, spadającego (bez tarcia) po jakimkolwiek wymuszonym torze (zakrzywionym w sposób ciągły; fig. 48) przy prędkości początkowej $v_0 = 0$, mamy:

$$v^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh.$$

52. Równowaga punktu materialnego. Położenie równowagi. Zasada prac przygotowanych. Położeniem równowagi punktu materialnego w danem polu sił i przy danych warunkach geometrycznych nazywamy miejsce, w którym punkt materialny może spoczywać. Koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi jest:

1. Dla punktu materialnego swobodnego, aby w tem miejscu siła pola $\bar{P} = 0$ (albo $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$).

2. Dla punktu materialnego nieswobodnego (bez tarcia), aby siła \bar{P} była prostopadła do krzywej lub powierzchni ograniczającej swobodę.

Obadwa powyższe uśłowienia warunków równowagi ujmnie razem z ogólnego stanowiska zasada prac przygotowanych.

W położeniu równowagi jest suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił działających na punkt materialny równa zeru. Ta równość stanowi konieczny i wystarczający warunek równowagi.

Przez pracę przygotowaną (wyobraźlną, wirtualną) rozumiemy fikcyjną pracę na przesunięciu przygotowanym, t. zn. takim przesunięciu elementarnem, jakiego by mógł punkt doznać, gdyby go w jakimkolwiek sposób niezależny od sił rzeczywiście działających wyprowadzić z położenia równowagi. Przesunięcie przygotowane punktu materialnego swobodnego jest przeto zupełnie dowolne tak co do kierunku, jak i wielkości (nieskończenie małej); dla punktu materialnego, zmuszonego do przebywania na danej powierzchni, leżą wszystkie kierunki przesunięcia przygotowanego w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w odpowiadającym punkcie; zaś dla punktu materialnego, zmuszonego do pozostawiania na

danej krzywej, wskazuje styczna w odpowiadającym punkcie jedyne dwa możliwe kierunki przesunięcia przygotowanego o wielkości również dowolnej, lecz nieskończenie małej.

Dla odróżnienia od przesunięć elementarnych rzeczywistych oznaczamy przesunięcia przygotowane przez δs , a pracę przygotowaną $\bar{P} \delta s$ przez δL .

W polu sił, określonych potencjałem U , jest:

$$\delta L = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right) = - \delta U.$$

W położeniu równowagi jest $\delta U = 0$, czyli U jako funkcja współrzędnych x, y, z osiąga ekstremum.

53. Stałość czyli stateczność równowagi w polu potencjalnem. Równowagę punktu materialnego nazywamy stałą czyli stateczną, gdy po udzieleniu punktowi bardzo małej prędkości w położeniu równowagi powstają pod wpływem sił pola tylko bardzo małe wahnięcia około tego położenia. Skoro natomiast zamiast wahań powstaje ruch oddalający punkt materialny na zawsze od położenia równowagi, to nazywamy ją niestałą. Równowaga punktu materialnego w polu potencjalnem jest stałą w położeniu odpowiadającym minimum energii potencjalnej (kryterjum Minding'a i Lejeune-Dirichlet'a), zaś niestałą w położeniu odpowiadającym maximum energii potencjalnej.

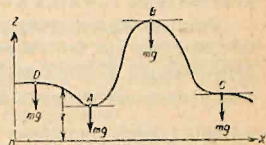


Fig. 49.

Przykład. Na krzywej $DABC$ (fig. 49), leżącej w płaszczyźnie pionowej i ograniczającej swobodę ruchu punktu materialnego jest A położeniem równowagi stałej, B niestałej. W punktach C i D jest równowaga widocznie również niestałą (z wykluczeniem tarcia). $U = mgz$ osiąga w nich również ekstremum, które nie jest ani minimum, ani maximum.

54. Dynamika punktu materialnego w układzie względnym. Jeżeli siła „bezwzględna“ \bar{P}_b udziela punktowi o masie m przyspieszenia \bar{a}_b w układzie bezwzględnym czyli inercjalnym, to $\bar{P}_b = m \bar{a}_b$. Według związku, podanego w ust. 16 kinematyki, jest przyspieszenie względne $\bar{a}_w = \bar{a}_b - \bar{a}_u - \bar{a}_c$, przyczem oznacza \bar{a}_u przyspieszenie unoszenia, zaś \bar{a}_c przyspieszenie Coriolis'a. A zatem:

$$m \bar{a}_w = m \bar{a}_b - m \bar{a}_u - m \bar{a}_c,$$

czyli

$$\bar{P}_w = \bar{P}_b - \bar{P}_u - \bar{P}_c,$$

co wyraża twierdzenie:

W układzie względnym odbywa się ruch punktu materialnego tak, jak gdyby nań działała „siła względna“ \bar{P}_w , która jest wogóle wypadkową „siły bezwzględnej“ \bar{P}_b , przeciwnie wziętej „siły unoszenia“ $\bar{P}_u = m \bar{a}_u$ i przeciwnie wziętej „siły Coriolis'a“ $\bar{P}_c = m \bar{a}_c$.

W szczególnym przypadku równowagi względnej znika zawsze siła Coriolis'a \bar{P}_c , a siła względna jest wypadkową siły bezwzględnej i przeciwnie wziętej siły unoszenia.

Skoro ruch układu względnego jest obrotem jednostajnym z prędkością kątową ω , to $-\bar{P}_u = m \rho \omega^2$ nazywamy „siłą odśrodkową“ (jeżeli ρ

jest promieniem-wektorem prostopadłym do osi obrotu, którego koniec schodzi się z punktem materialnym). Oto drugie ze znaczeń nazwy „siła odśrodkowa“, wspomnianych w art. 50.

Takim układem jest ze znacznym przybliżeniem nasza ziemia dzięki obrotowi dziennemu z prędkością kątową $\omega = \frac{2\pi}{86164 \text{ sk}} = 0,000073 \text{ sk}^{-1}$. Pomiary siły ciężkości na powierzchni ziemi określają siłę względną, która jest wypadkową grawitacji jako siły bezwzględnej i siły odśrodkowej. Ta ostatnia ma ściśle wartość $\rho \omega^2$, jeżeli ρ oznacza promień równoleżnika i jest prostopadłą do osi ziemskiej. Wartość grawitacji według prawa

Newton'a przedstawia się w pierwszym przybliżeniu wyrażeniem $f \frac{M \cdot m}{r^2}$, przyczem oznacza: f stałą grawitacji, M masę ziemi, m masę punktu materialnego r jego odległość od środka ziemi. (To wyrażenie byłoby ściśle gdyby ziemia miała budowę o symetrii kulistej). Z powodu sferoidalnego kształtu ziemi jest dokładne obliczenie grawitacji wielce złożone i prowadzi do wyrażenia, które również maleje ze wzrostem r , czyli w miarę oddalania się od biegunów ku równikowi. Obraczący za zmienną niezależną szerokość geograficzną φ , otrzymujemy przyrost grawitacji od równika ku biegunom z wielką dokładnością proporcjonalny względem $\sin^2 \varphi$. Taką samą zależność znajdujemy dla składowej pionowej siły odśrodkowej, którą należy odjąć od odpowiadającej składowej grawitacji, ażeby otrzymać ciężkość względną. Stąd prawidło, że ciężkość względna przystała od równika ku biegunom proporcjonalnie względem $\sin^2 \varphi$.

Jeżeli punkt materialny porusza się w polu ciężkości względnej, to zachowuje się tak, jak gdyby nań działała nadto siła Coriolis'a. Jej wartość $2m \cdot v \cdot \sin(\nu, \omega)$ staje się największa, gdy kierunek prędkości (względnej) v jest prostopadły do osi ziemskiej. Wówczas stosunek siły Coriolis'a do ciężkości względnej mg równa się $\frac{0,000146 v}{9,81}$, czyli około

0,000015 v (jeżeli v wyrażamy w m/sk). A zatem dla prędkości kuli karabinowej może siła Coriolis'a dopiero dojść do 1% ciężkości, dlatego pomijamy ją w zwykłych zadaniach mechaniki technicznej, a pole ciężkości względnej, uważane w obrębie jednego budynku za jednorodne, traktujemy zarazem jako pole siły bezwzględnej.

55. Względna równowaga ważkiego punktu materialnego w układzie poruszającym się względem ziemi. Takim układem jest np. wagon kolejowy, statek itp.

a) Przy ruchu postępowym układu z poziomem przyspieszeniem \bar{a} (fig. 50) jest siła względna \bar{P}_w wypadkową pionowej siły ciężkości $m \bar{g}$ i poziomej — $m \bar{a}$. Siła \bar{P}_w jest odchylna od pionu o kąt α , określony równaniem

$\text{tg } \alpha = \frac{a}{g}$. Jej natężenie $a_w = \sqrt{a^2 + g^2}$. W tym przypadku mamy więc

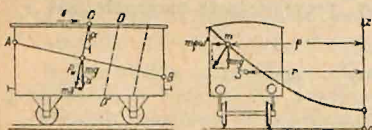


Fig. 50.

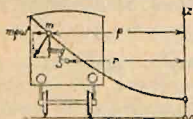


Fig. 51.

do czynienia z polem jednorodnym o pochyłych liniach sił i płaszczyznach ekwipotencjalnych opadających pod kątem α w kierunku przyspieszenia układu względem ziemi.

b) Przy ruchu obrotowym układu około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω (np. wagon jadący po łuku poziomym, fig. 51) jest siła względna

wypadkową ciężkości mg i siły odśrodkowej $m \rho \omega^2$. Obraczący osie x i y w płaszczyźnie poziomej, a z na osi obrotu otrzymujemy wyrażenie dla energii potencjalnej:

$$U = mgz - \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2.$$

Powierzchnie ekwipotencjalne $\omega^2 \rho^2 - 2gz = \text{stałej}$, czyli

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = C$$

są paraboloidami obrotowymi o wspólnym parametrze $p = \frac{g}{\omega^2}$. Kąt nachylenia siły względnej do pionu jest określony równaniem

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 g}{g} = \frac{v^2}{g \rho}.$$

Wartość tego kąta dla środka masy wagonu wyznacza taką „przechyłkę toru“, przy której siła względna jest w przybliżeniu prostopadła do toru, a rąbki kół nie wywierają bocznego nacisku na szyny.

Przykład. Dla łuku o promieniu $r = 400$ m i szerokości toru $s = 1,435$ m przy prędkości jazdy $v = 16$ m/sk wypada podwyższenie h szyny zewnętrznej (jeżeli przy małych α przyjmiemy w przybliżeniu $h/s = \tan \alpha$):

$$h = v^2 s / g r = 0,093 \text{ m}.$$

c) Punkt materialny, zmuszony do pozostawania na gładkiej krzywej, leżącej w płaszczyźnie pionowej, która się obraca jednostajnie około osi pionowej (kule regulatorów), będzie równowadze względnej, jeżeli wypadkowa ciężkości mg i siły odśrodkowej $m \rho \omega^2$ jest normalna do krzywej, (fig. 52) czyli gdy $m \rho \omega^2 / mg = \tan \alpha = \rho / h$.

Dla równowagi musi zatem długość podnormalnej h na osi obrotu czynić zadość warunkowi:

$$h = g / \omega^2.$$

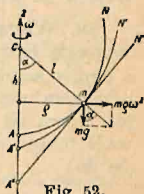


Fig. 52.

Ta równowaga jest stała, jeżeli dana krzywa w otoczeniu położenia równowagi m leży wewnątrz paraboli $A'N'$ o parametrze g/ω^2 przechodzącej przez m . Wówczas bowiem odpowiada położeniu punktu m minimum energii potencjalnej, ponieważ ta energia, mając na paraboli wartość stałą, zwiększa się wewnątrz niej, a zmniejsza na zewnątrz. Dlatego też równowaga będzie niestala, jeżeli krzywa przecina lub leży zewnątrz paraboli (np. $A''N''$) zaś obojętną w przypadku gdy krzywa zlewa się z tą parabolą.

III. Statyka.

A. Część ogólna.

56. Zasada prac przygotowanych (wyobrażalnych, wirtualnych) wymaga konieczny i wystarczający warunek równowagi najogólniejszego układu materialnego, pojmowanego jako układ punktów materialnych, na które działają jakiekolwiek siły zewnętrzne \overline{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i wewnętrzne \overline{W}_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Przy oznaczeniu przez $\delta \overline{s}_i$ wektorów przesunięć przygotowanych punktów m_i , wyraża ten warunek równanie:

$$\sum_i \overline{P}_i \delta \overline{s}_i + \sum_{i,k} \overline{W}_{ik} \delta \overline{s}_i = 0.$$

W położeniu równowagi układu materialnego jakiegokolwiek jest suma algebraiczna prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu równa zero przy każdym chwilowym ruchu przygotowanym układu.

57. Rodzaje równowagi układów materialnych. Jeżeli tak siły zewnętrzne jak i wewnętrzne mają potencjał, to równanie powyższe staje się identycznym z warunkiem extremum energii potencjalnej jako funkcji współrzędnych punktów układu.

$$\delta U = 0.$$

Ten warunek może odpowiadać:

1. Minimum energii potencjalnej, jeżeli przyrost rzędu drugiego $\delta^2 U$ (wzgl. inny pierwszy nieznikający przyrost rzędu parzystego) jest dodatni. Odpowiadające położenie równowagi jest położeniem równowagi stałej (Minding i Lejeune-Dirichlet).

2. Maximum energii potencjalnej, jeżeli $\delta^2 U < 0$ (albo inny pierwszy nieznikający przyrost $\delta^{2r} U < 0$).

3. Ani maximum ani minimum. Obu ostatnim przypadkom odpowiada wogóle równowaga niestala.