

Największy moment dodatni w przekroju zewnątrz punktów stałych powstaje podczas obciążenia przesła przekrojonego między punktem granicznym, a najbliższą podporą, pozostała zaś część przesła ma pozostać nieobciążona. Oprócz tego reszta przesła ma być naprzemian nieobciążona i obciążona. Uzupełniające obciążenie wywołuje największy moment ujemny.

Tablice.

Dla użytku praktyki podajemy na końcu działu: „Statyka budowli” tablice do obliczenia belek ciągłych (i belek utwierdzonych), obciążonych ciężarem jednostajnym g , rozłożonym na całą długość belki, ciężarem jednostajnym częściowym p , oraz ciężarami skupionymi G .

Tablice A podają momenty zgięcia siły poprzeczne i oddziaływania w różnych przekrojach belki ciągłej (2-, 3- i 4-przesłowej o przesłach różnych) pod obciążeniem stałym g , obciążeniem ruchomym p i pod ciężarami skupionymi G , stojącymi w różnych odstępach.

Tablice B podają rzędne linii wpływowych belki obustronnie utwierdzonej, oraz belki ciągłej 2- i 3-przesłowej o rozpiętościach równych i nierównych (przy stosunku przesła 1:1, 1:1,2, 1:1,5, oraz 1:1:1, 1:1,2:1, 1:1,5:1).

Przykład. Obliczyć największe momenty i oddziaływania belki ciągłej dwuprzesłowej o rozpiętościach podporowych $l = 8,00 \text{ m}$, $l_1 = 12,00 \text{ m}$, dla obciążenia stałego $g = 0,2 \text{ t/m}$, użytkowego $p = 0,5 \text{ t/m}$; oraz ciężaru skupionego stałego $G = 3,0 \text{ t}$, działającego w odległości $a = \xi l = 0,4 l$ (por. przykład str. 1296).

Do obliczenia używamy tablicy 4., ułożonej dla założenia, iż momenty bezwładności przekrojów belki są stałe i sobie równe.

Stosunek rozpiętości $n = l_1 : l = 12,0 : 8,0 = 1,5$ dla największego momentu dodatniego w przesła 1 otrzymamy:

$$M_1 = (\sum Fg + Fg)l^2 + G\eta l = (0,0325 \cdot 0,2 + 0,100 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 + 3,0 \cdot 0,2131 \cdot 8,0 = 8,616 + 5,144 = 8,7604 \text{ tm};$$

dla największego momentu dodatniego w przesła 1:

$$M_2 = (\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = (0,1825 \cdot 0,2 + 0,2025 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0156 \cdot 8,0 = 8,44 \text{ tm};$$

dla największego momentu podporowego:

a) przesła 1 obciążone:

$$M_c = -(\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = -(0,2188 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -6,01 \text{ t};$$

b) obydwie przesły obciążone:

$$M_c = -(g + p) \sum Fl^2 - G\eta l = -(0,2 + 0,5) \cdot 1,2188 \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -56,21 \text{ tm}.$$

Oddziaływania na podporach obliczamy dla dwu przypadków: a) przesła 1 obciążone, b) obydwie przesły obciążone.

ad a).

$$A = (\sum Fg + Fp)l + G\eta \xi = 0,4 = (0,2812 \cdot 0,2 + 0,45 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,85 \text{ t}.$$

$$B = (0,6042 \cdot 0,2 - 0,0333 \cdot 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 0,69 \text{ t},$$

$$C = (1,6146 \cdot 0,2 + 0,5833 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 6,45 \text{ t}.$$

ad b).

$$A = 0,2812 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,17 \text{ t},$$

$$B = 0,6042 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 3,25 \text{ t},$$

$$C = 1,6146 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 10,58 \text{ t}.$$

G. Ramy.

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

Są to twory hiperstatyczne, złożone z prętów najczęściej prostych (niekiedy zakrzywionych lub łamanych), połączonych ze sobą przy pomocy sztywnych węzłów. Pręty pionowe (lub o kierunku, zbliżonym do pionu) nazywamy słupami, poziome zaś (lub zbliżone do poziomu) rozporami. Każdy pręt ustroju ramowego znajduje się wogóle pod działaniem momentów, oraz sił osiowych i poprzecznych, musi być więc wykształcony sztywnie.

Rozróżniamy ramy jednoprzęsłowe, wieloprzęsłowe i piętrowe, posiadające kilka rozpór jedna nad drugą. Słupy mogą być dołem utwierdzone lub oparte na przegubach.

Ramy można obliczać przy pomocy różnych metod:

1. Metoda ogólnych równań sprężystości, str. 1258, także str. 1148 i 1149.

Jest to sposób najdokładniejszy, gdyż pozwala na uwzględnienie wpływu sił osiowych i poprzecznych na odkształcenie. Ramę dwusłupową (jedno-

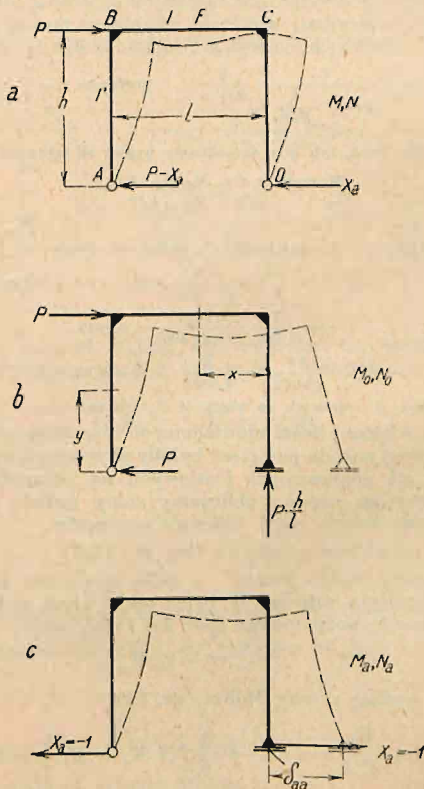


Fig. 408.

przęsłową), dwuprzegubową, oblicza się jak łuk dwuprzegubowy, zaś ramę utwierdzoną jak łuk bezprzegubowy.

Przykład 1. (Fig. 408). Niewiadoma hiperstatyczna:

$$X_a = P \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Słup AB: $M_0 = Py$, $M_a = y$, $N_0 = P \frac{h}{l}$, $N_a = 0$.

Słup CD: $M_0 = 0$, $M_a = y$, $N_0 = -P \frac{h}{l}$, $N_a = 0$.

Rozpora BC: $M_0 = P \frac{h}{l} x$, $M_a = h$, $N_0 = 0$, $N_a = 1$.

$$E\delta_{ma} = \int_A^D M_a \frac{ds}{J} + \int_A^D N_a \frac{ds}{F} = \int_A^B P y \cdot y \cdot \frac{dy}{J^3} + \int_C^B P \frac{h}{l} x \cdot h \frac{dx}{J} = \frac{P}{J^3} \int_0^h y^2 dy + \\ + \frac{P}{J} \frac{h^2}{l} \int_0^l x dx = P \left[\frac{h^3}{3J^3} + \frac{h^2 l}{2J} \right] = P \frac{h^2 l}{J}, \quad \text{gdzie } l = \frac{h}{3} \frac{J}{J^3} + \frac{l}{2}.$$

$$E\delta_{aa} = \int_A^B y^2 \frac{ds}{J^3} + \int_B^C h^2 \frac{dx}{J} + \int_C^D y^2 \frac{dy}{J^3} + \int_B^C l^2 \frac{dx}{F} = 2 \int_0^h y^2 \frac{dy}{J^3} + \int_0^l h^2 \frac{dx}{J} + \int_0^l \frac{dx}{F} = \\ = \frac{2}{3} \frac{h^3}{J^3} + \frac{h^2 l}{J} + \frac{l}{F} = \frac{h^2}{J} \left(2l + l \frac{J}{F h^2} \right),$$

$$X_a = P \frac{l}{2l + l \frac{J}{F h^2}} = \frac{P}{2 + \varepsilon}, \quad \text{przyczem } \varepsilon = \frac{l}{F h^2}.$$

Dla $F = \infty$, albo $l = 0$, lub gdy zaniedbamy wpływ sił osiowych $X_a = \frac{P}{2}$.

Moment w C: $M_C = -h X_a$

" w B: $M_B = h(P - X_a)$.

Niech: $l = 8 \text{ m}$, $h = 4 \text{ m}$.

Rozpora: 2 [] Nr. 30: $F = 117,6 \text{ cm}^2$, $J = 16 052 \text{ cm}^4$. Stupy: 2 [] Nr. 28: $J: J^3 = 1,28$,

$$P = 4t, \quad t = \frac{4}{3} 1,28 + \frac{8}{2} = 1,705 + 4 = 5,705 \text{ m},$$

$$\varepsilon = \frac{8}{5,705} \frac{16 052}{117,6 \cdot 400^2} = 0,0012,$$

$$X_a = \frac{4t}{2,0012} = \frac{2}{1,0006} = (2 - 0,0012) t.$$

Widać stąd, że wpływ sił osiowych na wielkość X_a jest znikomy.

W przypadku większej ilości niewiadomych hiperstatycznych (ramy wieloprzęsłowe i piętrowe) metoda powyższa byłaby zbyt uciążliwa. Toteż, z uwagi na mały wpływ sił poprzecznych i osiowych na odkształcenia (por. przykład 1.) pomijamy go często i obliczamy ramy metodą punktów stałych, lub metodą równań trzech, wzgl. czterech momentów.

2. Metoda punktów stałych (por. str. 1297).

Każdy pręt ramy można uważać za belkę sprężystą utwierdzoną, o ile pominiemy przesunięcia węzłów. W belce takiej obrót podpory jest proporcjonalny do momentu podporowego (por. str. 1131), więc:

$$\tau_a = -\varepsilon_a M_a \dots \dots \dots (1)$$

Jednakowoż według zasady Mohra (str. 1291):

$$\tau_a = \frac{R_m}{EJ} = \left\{ [A_0] + \frac{1}{6} l (2 M_a + M_b) \right\} = EJ \dots \dots (2)$$

Z porównania (1) i (2) otrzymamy zatem:

$$M_a \left(2 + \frac{1}{l} 6 EJ \varepsilon_a \right) + M_b = - \frac{6 [A_0]}{l} \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli przeszło jest nieobciążone, to $[A_0] = 0$, więc:

$$M_a : M_b = -1 : \left(2 + \frac{1}{l} 6 EJ \varepsilon_a \right) = a : (l - a),$$

stąd odstęp lewego punktu stałego od lewej podpory:

$$a = \frac{l}{3} \frac{1}{l + \frac{1}{l} 2 EJ \varepsilon_a} \dots \dots \dots (4)$$

Jeżeli M_3 jest lewym momentem podporowym przesła znajdującego się na prawo od D (fig. 409) i jeżeli 1, 2 i 3 są punktami nieskończenie bliskimi matematycznego węzła D , to w punktach 1 i 2 powstaną odpowiednio momenty:

$$M_1 = \mu_{31} M_3, \quad M_2 = \mu_{32} M_3 \quad \dots \quad (5)$$

tak, że:

$$M_1 + M_2 = M_3 \quad \dots \quad (6)$$

czyli:

$$\mu_{31} + \mu_{32} = 1 \quad \dots \quad (7)$$

Moment dodatni powoduje wypukłość linii ugięcia w rozporach ku dołowi, w słupach zaś ku prawej stronie (fig. b). Gdyby na koniec 1 pręta $A-1$ działał moment $M=1$ (fig. c), to kąt odchylenia stycznej w punkcie 1 od cięciwy $A-1$ wynosiłby γ_1 .

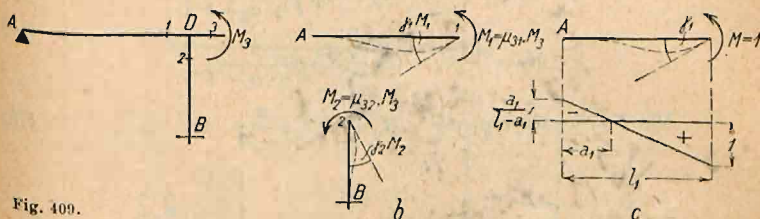


Fig. 409.

Ponieważ zaś moment wynosi M_1 , więc kąt ten będzie $\gamma_1 M_1$ (fig. b). Podobnie kąt odchylenia pręta 2-C jest $\gamma_2 M_2$. Wskutek sztywności węzła B obrót jego:

$$\epsilon_3 M_3 = \gamma_1 M_1 = \gamma_2 M_2 \quad \dots \quad (8)$$

Z równań (5), (6) i (8) wynika:

$$\frac{1}{\epsilon_3} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \quad \dots \quad (9)$$

$$\mu_{31} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \mu_{32} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \dots \quad (10)$$

Jeżeli w A jest utwierdzenie sprężyste, określone wartością a_1 (fig. c), to podstawiając we wzorze na $[B_0]$ tabl. I, str. 1293, poz. 20, $M_b = 1$, $M_a = -\frac{a_1}{l_1 - a_1}$, otrzymamy:

$$\gamma_1 = \frac{[B_0]}{EJ_1} = \frac{l_1}{6 EJ_1} \left(2 - \frac{a_1}{l_1 - a_1} \right) \quad \dots \quad (11)$$

Jeżeli A jest podporą skrajną, wolną, to $a = 0$,

więc:
$$\gamma_1 = \frac{l_1}{3 EJ_1} \quad \dots \quad (12)$$

W przypadku utwierdzenia zupełnego jak w punkcie B (fig. d): $a_2 = l_2 : 3$,

więc:
$$\gamma_2 = \frac{l_2}{4 EJ_2} \quad \dots \quad (13)$$

Jeżeli tylko jedno przesło jest obciążone, to linia momentów we wszystkich rozporach lewych przechodzi przez lewe punkty stałe, we wszystkich rozporach prawych przez prawe punkty stałe, a w słupach przez dolne punkty stałe. W przesle obciążonym wykres momentów składa się z trapezu, odpowiadającego ujemnym momentom podporowym i wykresu momentów dodatnich dla belki wolno podpartej.

Zamykającą lini momentów znajdziemy wykreślić przy pomocy punktów stałych i linii krzywych, jak w belce ciągłej (por. str. 1298, równ. 7). Można to zrobić i analitycznie. Pionowy odstęp zamykającej od punktu stałego lewego:

$$\left. \begin{aligned} S_a &= t_b \frac{a}{l} \\ S_b &= t_a \frac{b}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

podobnie:

Momenty podporowe wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= -S_a - (S_a - S_b) \frac{a}{l - a - b} \\ M_b &= -S_b - (S_b - S_a) \frac{b}{l - a - b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{Dla } b = 0 \text{ otrzymujemy } M_a = -t_b \frac{a}{l - a} \dots \dots \dots (16)$$

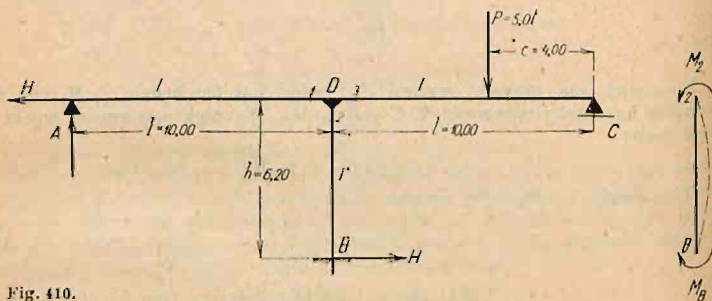


Fig. 410.

Przyjmując po kolei każde przesło obciążone, sumujemy następnie algebraicznie rzędne poszczególnych wykresów dla otrzymania rzeczywistego obrazu momentów wskutek równoczesnego obciążenia wszystkich przeseł.

Przykład 2. (Fig. 410). $l = 10 \text{ m}$, $h = 6,2 \text{ m}$, $J : J' = 3 : 2$, $c = 4 \text{ m}$, $P = 5 \text{ t}$. Znaleźć momenty przy węźle D: M_1 , M_2 , M_3 , moment stopowy M_B i moment w miejscu działania siły P M_P i oddziaływania A, B, C.

$$\text{Wedle (11): } \gamma_1 = \frac{l}{3 EJ'}, \quad \text{wedle (12): } \gamma_2 = \frac{h}{4 EJ'}.$$

Nazwijmy dla skrócenia:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{4}{3} \frac{l}{h} \frac{J'}{J} = k = \frac{4 \cdot 10 \cdot 2}{3 \cdot 6,2 \cdot 3} = 1,433, \quad \text{to } \mu_{31} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2,433} = 0,41 \text{ (równ. 10),}$$

$$\mu_{32} = 1 - \mu_{31} = \frac{k}{k+1} = 0,59, \quad \gamma_1 = \frac{l}{3 EJ'} \text{ (równ. 12),}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\gamma_1} (1+k) \text{ (równ. 9),} \quad \varepsilon_3 = \frac{\gamma_1}{1+k} = \frac{l}{3 EJ' (1+k)}.$$

$$\frac{6 EJ' \varepsilon_3}{l} = \frac{2}{1+k} = \frac{2}{2,433} = 0,822, \quad a = \frac{l}{3 + \frac{2}{1+k}} = \frac{10}{3,822} = 2,615 \text{ m,}$$

$$t_b = \frac{6}{l} P \frac{6 \cdot 4 \cdot 14}{6 \cdot 10} = 16,8 \text{ tm (równ. 7, str. 1298, poz. 2, tabl. 1., str. 1292).}$$

$$M_3 = -t_b \frac{a}{l-a} = -16,8 \frac{2,615}{7,385} = 5,95 \text{ tm (równ. 16).}$$

$$M_1 = -0,41 \cdot 5,95 = -2,44 \text{ t/m}, \quad M_2 = -0,59 \cdot 5,95 = -3,51 \text{ t/m}.$$

$$\text{Kontrola:} \quad M_1 + M_2 = M_3, \quad 2,44 + 3,51 = 5,95,$$

$$M_B = -1/2 M_2 = +1,755 \text{ t/m},$$

$$M_P = P \frac{c(l-c)}{l} + M_3 \frac{c}{l} = \frac{4}{10} (5 \cdot 6 - 5,95) = 0,4 \cdot 24,05 = 9,62 \text{ t/m},$$

$$A = \frac{M_1}{l} = -0,244 \text{ t},$$

$$C = P \frac{e}{l} + \frac{M_3}{l} = (5 \cdot 0 \cdot 4,0 - 5,95) : 10 = 1,405 \text{ t},$$

$$B = P - A - C = 5 - 1,161 = 3,839 \text{ t},$$

$$H = M_2 : h - M_B : h = (M_2 - M_B) : h = (-3,51 - 1,755) : 6,2 = -\frac{5,265}{6,2} = -0,85 \text{ t}.$$

W rozporze AD wystąpi ciążnienie $N = H = 0,85 \text{ t}$.

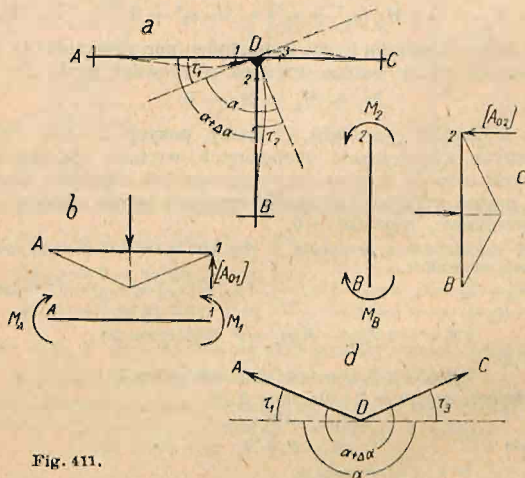


Fig. 411.

3. Metoda równań trzech, wzgl. czterech momentów (czysto rachunkowa).

Weźmy pod uwagę spośród prętów, schodzących się w sztywnym węźle D , pręty $A-1$ i $2-B$, zamykające ze sobą kąt α (fig. 411 α). Wskutek obciążenia pręty te wygną się, węzły się przesuną i kąt pomiędzy cięciwami $A-1$ i $2-B$ będzie wynosił $\alpha + \Delta \alpha$. Kąt między cięciwą $A-1$ a styczną w 1:

$$\tau_1 = \left[[A_{01}] + \frac{1}{6} s_1 (2 M_1 + M_A) \right] : E J_1 \quad \dots \quad (17)$$

por. str. 1295.

Dla pręta $2-B$ będzie odpowiednio:

$$\tau_2 = \left[[A_{02}] + \frac{1}{6} s_2 (2 M_2 + M_B) \right] : E J_2 \quad \dots \quad (18)$$

Z figury a) czytamy: $\alpha + \Delta \alpha + \tau_2 = \alpha + \tau_1$

$$\text{czyli:} \quad \tau_1 - \tau_2 = \Delta \alpha \quad \dots \quad (19)$$

Wstawmy (17) i (18) w (19) i nazwijmy:

$$s_1 \frac{J_0}{J_1} = s_1', \quad s_2 \frac{J_0}{J_2} = s_2', \quad [A_{02}] \frac{J_0}{J_2} = [A_{02}'],$$

to otrzymamy równanie czterech momentów:

$$6 E J_0 \Delta \alpha_{12} = M_A s_1' + 2 M_1 s_1' - 2 M_2 s_2' - M_B s_2' + 6 ([A_{01}'] - [A_{02}']). \quad (20)$$

Dla prętów $A-1$ i $3-C$ byłoby (fig. d): $\alpha + \Delta\alpha = \alpha + \tau_1 + \tau_3$, stąd zamiast (19):

$$\tau_1 + \tau_3 = \Delta\alpha_{13},$$

zatem równanie czterech momentów będzie:

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{13} = M_A s_1' + 2 M_1 s_1' + 2 M_3 s_3' + M_C s_3' + 6 ([A_{01}'] + [A_{03}']) . \quad (21)$$

Jeżeli w węźle D schodzą się tylko dwa pręty, np. $A-1$ i $2-B$, to $M_1 = M_2 = M_D$, więc zamiast (20) będzie:

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{12} = M_A s_1' + 2 M_D (s_1' - s_2') - s_2' M_B + 6 ([A_{01}'] - [A_{02}']) . \quad (22)$$

Analogicznie dla prętów $A-1$ i $3-C$ byłoby zamiast (21) z uwagi na $M_1 = M_3 = M_D$:

$$6 EJ_0 \Delta\alpha_{13} = M_A s_1' + 2 M_D (s_1' + s_3') + M_C s_3' + 6 ([A_{01}'] + [A_{03}']) . \quad (23)$$

Są to uogólnione równania trzech momentów (por. równanie (4), str. 1295). Prócz tych równań mamy jeszcze warunek równowagi węzła D :

$$M_1 + M_2 - M_3 = 0 \quad (24)$$

Dla ramy trójkątnej (por. tabl. C. Ramy, pozycje 1—10), tudzież dla ram symetrycznych, symetrycznie obciążonych, wreszcie dla ram wieloprzęsłowych, których rozpora skrajna przytrzymana jest łożyskiem nieruchomym (por. fig. 413), można, pomijając skrócenie sprężyste prętów, przyjąć, że węzły nie doznają przesunięć, więc $\Delta\alpha = 0$.

Przykład 3. Zagadnienie z przykładu 2. (fig. 410) rozwiązać metodą równań trzech względnie czterech momentów.

Tutaj jest $M_A = M_C = 0$, $\Delta\alpha_{12} = \Delta\alpha_{13} = 0$, $[A_{01}] = [A_{02}] = [A_{03}] = 0$. Będzie więc dla prętów $A-1$ i $2-B$:

$$2 M_1 s_1' - 2 M_2 s_2' - M_B s_2' = 0 \quad (\text{por. równ. 20});$$

dla prętów $A-1$ i $3-C$:

$$2 M_1 s_1' + 2 M_3 s_3' = -6 [A_{03}'] \quad (\text{por. równ. 21});$$

dla pręta nieskończenie małego w B i dla pręta $B-2$:

$$2 M_B s_2' + M_2 s_2' = 0,$$

wreszcie dla węzła D :

$$M_3 = M_1 + M_2 \quad (\text{por. równ. 18}).$$

Obierzmy $J_0 = J$, to $s_1' = s_3' = 10 m$,

$$s_2' = h \frac{J}{J'} = 6,2 \frac{3}{2} = 9,3 m,$$

$$6 [A_{03}'] = 6 [A_{03}] = 6 P \frac{(l-c)c(l+c)}{6l} = 5,0 \frac{6,0 \cdot 4,0 \cdot 14,0}{10,0} = 168 tm^2,$$

(por. tabl. I., str. 1292, poz. 2).

Równania momentów podporowych będą zatem:

$$20 M_1 - 18,6 M_2 - 9,3 M_B = 0,$$

$$20 M_1 + 20 (M_1 + M_2) = -168 tm^2,$$

$$2 M_B + M_2 = 0.$$

Stąd:

$$M_2 = - \frac{168 tm^2}{47,9 m} = -3,51 tm,$$

$$M_1 = \frac{27,9}{40} M_2 = -2,45 tm,$$

$$M_3 = M_1 + M_2 = -5,98 tm.$$

$$M_B = -M_2 : 2 = +1,755 tm.$$

Wartości M_P , A , B , C i H patrz przykład 2.

Dla ramy prostokątnej (fig. 412) otrzymujemy (ponieważ prostokąt zamienić się może tylko na równoległobok):

$$\Delta\alpha + \Delta\beta = 0,$$

$$\Delta\beta + \Delta\gamma = 0,$$

$$\Delta\gamma + \Delta\delta = 0.$$

W innych przypadkach posłużyć się możemy równaniem (11), str. 1244:

$$\sum y \Delta \alpha = \Delta l - \sum \Delta s \cos \varphi.$$

Jeżeli opuścimy wpływ sił osiowych, to:

$$\sum \Delta s \cos \varphi = \omega t \Delta l.$$

Zamiast l możemy obrać którykolwiek pręt, np. s_{1n} , wtedy:

$$\sum y \Delta \alpha = \Delta s_{1n} - \omega t s_{1n}.$$

Jeżeli podpory są sztywne, to $\Delta l = 0$.

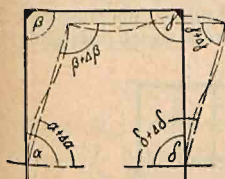


Fig. 412.

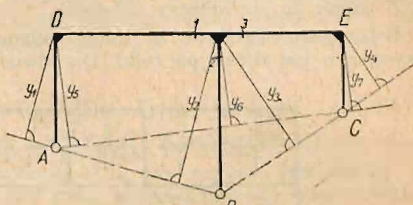


Fig. 413.

Dla ramy wedle fig. 413 mamy np. dla dowolnego obciążenia:

$$\Delta s_{AB} = 0 = y_1 \Delta \alpha_D + y_2 \Delta \alpha_{12},$$

$$\Delta s_{BC} = 0 = y_3 \Delta \alpha_{23} + y_4 \Delta \alpha_E,$$

$$\Delta s_{AC} = 0 = y_5 \Delta \alpha_D + y_6 (\Delta \alpha_{12} + \Delta \alpha_{23}) + y_7 \Delta \alpha_E.$$

Przyrosty $\Delta \alpha_D$ i $\Delta \alpha_E$ wyrażą się przy pomocy równań trzech momentów, zaś $\Delta \alpha_{12}$ i $\Delta \alpha_{23}$ przy pomocy równań czterech momentów.

Jeżeli rama zostaje ogrzana równomiernie o t^0 , to lewe strony równań powyższych będą odpowiednio — $\omega t s_{AB}$, — $\omega t s_{BC}$ i $\omega t s_{AC}$.

H. Belki bezprzekątniowe.¹⁾

Napisał

inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

Omówimy tu wyłącznie belki bezprzekątniowe równoległe²⁾. a) Obciążenie pionowe stałe (fig. 414). Przyjmujemy, iż ciężary węzłowe skutkiem obciążenia stałego działają w węzłach pasa dolnego.

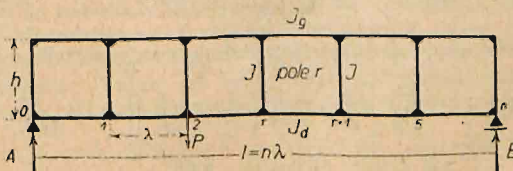


Fig. 414.

Dla wyznaczenia sił wewnętrznych sprowadzamy belkę do układu zasadniczego, tj. belki w dwu punktach wolno podpartej, przyjmując każdy pręt pasa górnego przy pomocy dołem (lub pasa dolnego przy pomocy

¹⁾ Belki bezprzekątniowe nazywamy czasem belkami Vierendeel'a.

²⁾ Według Kriso, „Statik der Vierendeelträger“, rok 1922.

górną) przecięty w połowie swej rozpiętości, przyczem z punktów przecięcia prowadzimy dwa ramiona sztywne ($J = \infty$) do środka ciężkości pola (fig. 415). W układzie pracuje pas dolny (górny) jako belka wolno podparta w dwu punktach, zaś pas drugi i słupy nie doznają żadnych naprężeń.

Ugięcie wywołuje w układzie zasadniczym przesunięcia Δx i Δy i obrót ramion sztywnych o kąt $\Delta \varphi$ w stosunku do pierwszego położenia (fig. 416).

Ażeby układ zasadniczy działał jako belka bezprzekątniowa, musi doznawać tych samych odkształceń, zatem ramiona sztywne układu zasadniczego, które pod wpływem ciężarów węzłowych P doznały przesunięć Δx , Δy , muszą pod wpływem wielkości statycznie niewyznaczalnych X , Y , Z wrócić do pierwotnego położenia.

Belki bezprzekątniowe są zatem układem $3n$ -krotnie hiperstatycznym, przyczem n jest ilością pól belki. Dla równowagi oprócz trzech zasadniczych

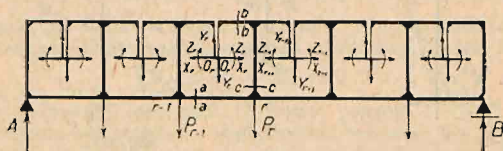


Fig. 415.

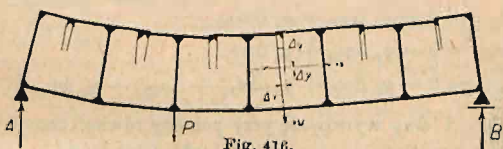


Fig. 416.

warunków musi być w każdym polu suma odkształceń równa zero, zatem $\Delta \varphi_r = 0$, $\Delta x_r = 0$, $\Delta y_r = 0$.

Odształcenia belki i związane z niemi przesunięcia Δx , Δy , oraz obrót $\Delta \varphi$, następują pod działaniem sił poprzecznych i normalnych, oraz momentów zgięcia. Odształcenia skutkiem sił poprzecznych są bardzo małe i można je opuścić.

Dla wyznaczenia odkształceń skutkiem momentów zgięcia z uwzględnieniem wpływu sąsiednich pól otrzymujemy równania (Kriso, str. 28):

$$\Delta \varphi_r = \frac{\lambda h}{2E} \left(\frac{1}{J_g} - \frac{1}{J_d} \right) X_r - \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r+1} - \frac{h}{EJ} Z_{r-1} + \frac{1}{E} \left[\frac{2h}{J} + \lambda \left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] Z_r - \frac{h}{EJ} Z_{r+1} + \frac{fr}{EJ_d} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\Delta x_r = \frac{h^3}{12EJ} X_{r-1} - \frac{h^2}{2E} \left[\frac{h}{3J} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] X_r + \frac{h^3}{12EJ} X_{r+1} + \frac{\lambda h}{2E} \left(\frac{1}{J_d} - \frac{1}{J_d} \right) Z_r + \frac{hfr}{2EJ_d} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\Delta y_r = -\frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda^2}{2E} \left[\frac{h}{J} + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d} \right) \right] Y_r - \frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r+1} - \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r+1} - \frac{\lambda^3}{12EJ_d} T_{or} = 0 \quad \dots (3)$$

Sposób przybliżony, dogodny dla pierwszego przeliczenia przekrojów (fig. 417).

Oznaczmy przez $S_g, J_g, J_1, J_2 \dots$ momenty bezwładności pasu górnego, dolnego i słupów 1, 2...

$N_g, N_d, N_1, N_2 \dots$	siły osiowe	w	prętach pasów i słupów
$T_g, T_d, T_1, T_2 \dots$	siły poprzeczne	"	"
$M_g, M_d, M_1, M_2 \dots$	momenty zgięcia	"	"

Jeżeli rozpatrywać będziemy ramę zamkniętą między słupami 2 i 3 o długości rozpiętości a_2 , to punkty zerowe momentów będą w słupach w odległości v_g od pasa górnego, oraz w pasach w odległości w_2 od lewego słupa 2. Położenie tych punktów można wyznaczyć w przybliżeniu jak w ramie zamkniętej. Przeciętnie:

$$v_g = \frac{m_0 h}{1 + m_0} = k_0 h,$$

$$w_2 = \frac{m_2 a_2}{1 + m_2} = k_2 a_2,$$

przez co:

$$m_0 = \sqrt{\frac{J_g}{J_d}},$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}};$$

siła osiowa w pasach:

$$-N_{g2} = N_{a2} = \frac{M_{a2}}{h},$$

siła poprzeczna w pasach: $T_{g2} = k_0 T_{a2}, \quad T_{d2} = (1 - k_0) T_{a2};$

moment zgięcia w pasach w odległości x od punktu zerowego:

$$M_{g2} = T_{g2} x = k_0 T_{a2} x = k_0 (M_x - M_{a2}),$$

$$M_{d2} = T_{d2} x = (1 - k_0) T_{a2} x = (1 - k_0) (M_x - M_{a2}).$$

Siła poziomo ścinająca w słupie 2:

$$T_2 = \int \frac{T_x dx}{h} = \frac{M_{a2} - M_{a1}}{h} = N_{d2} - N_{d1};$$

moment zgięcia w odległości y od punktu zerowego w słupie 2: $M_2 = T_2 y.$

Siła osiowa w słupie 2: $N_2 = (1 - k_0) (P_{d2} - P_{g2}).$

Siła osiowa w słupie 1: $N_1 = -(k_0 T_{a1} = P_{g1}).$

Moment pasowy w węzłach słupa 2:

lewe: pas górny: $M_{g12} = k_0 (M_{11} - M_{a1}),$

pas dolny: $M_{d12} = (1 - k_0) (M_{11} - M_{a1});$

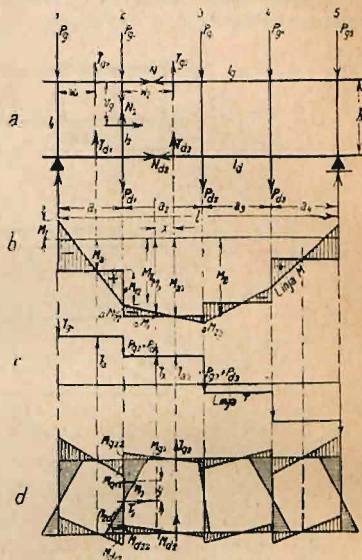


Fig. 417.

prawo: pas górny: $M_{g22} = k_0 (M_{II} - M_{a2}),$
 pas dolny: $M_{d22} = (1 - k_0) (M_{II} - M_{a2}).$

Momenty węzłowe w słupie 2:

górny: $M_{2g} = k_0 (M_{a1} - M_{a2}),$
 dolny: $M_{2d} = (1 - k_0) (M_{a2} - M_{a1}).$

Gdy pas dolny jest gibki, natenczas: $V_0 = h$, gdy zaś $S_g = J_d$, to $v_0 = \frac{1}{2} h$. Powyższy sposób może być zastosowany do przybliżonego obliczenia belek bezprzekątniowych o dowolnym rodzaju podparcia.

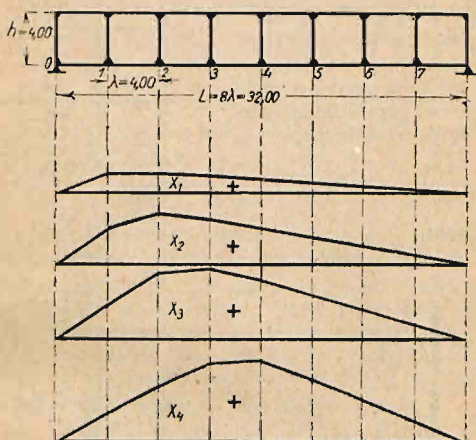


Fig. 418.

Dla belki bezprzekątniowej wolno podpartej będzie $M_I = 0$, dla belki utwierdzonej na podporach M_I jest momentem utwierdzenia, dla belki ciąglej momentem podporowym.

Przykład. Wykreślić linie wpływowe sił normalnych, poprzecznych i momentów, w pasach i słupach belki bezprzekątniowej równoległej o pomoście dołem (fig. 418).

Wymiary belki: $L = 32,00$, $h = 4,00$, ilość pól $n = 8$, $\lambda = 4,00$ m.

Dla pierwszego obliczenia przyjmujemy: $J_g = J_d = J$. Wtedy z wzorów 4. i 5.:

$$Z_r = -0,5 M_{or} \quad Y_r = -0,5 T_{or} :$$

Wyznaczenie X_r . Podstawiając w równ. 6: $\frac{\xi}{1} T = \frac{M_0 \xi}{\lambda}$, oraz $f_{\xi} = \frac{\lambda}{2} (M_0 \xi_{-1} + M_0 \xi)$,

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= k \frac{6}{h^2} (f_1 + f_2 k + \dots + f_{\xi} k^{\xi-1} + \dots + f_{n-1} k^{n-2} + f_n k^{n-1}) \\ X_r &= \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{h^2} (f_1 k^r - 1 + \dots + f_{\xi} k^{r-\xi} + \dots + f_{r-1} k + f_r + \\ &\quad + f_{r+1} k + \dots + f_{\xi} k^{\xi-r} + \dots + f_n k^{n-r}) \\ X_n &= k \frac{6}{h^2} (f_1 k^{n-1} + f_2 k^{n-2} + \dots + f_{\xi} k^{n-\xi} + \dots + f_{n-1} k + f_n) \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

przy pomocy tego równania obliczamy rzędne linii wpływowych sił normalnych w pasach.

Linia wpływowa X_1 .

$$X_1 = k \frac{6}{h^2} (f_1 + f_2 k + f_3 k^2 + f_4 k^3 + f_5 k^4 + f_6 k^5 + f_7 k^6 + f_8 k^7)$$

w równaniu tem f_r = powierzchnia linii wpływowej momentów belki wolno podpartej w polu r ; z fig. 419 otrzymamy:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \frac{\lambda^2}{2n} & f_2 &= 3 \frac{\lambda^2}{2n} = 3f_1 & f_3 &= 5 \frac{\lambda^2}{2n} = 5f_1 \\ f_4 &= 7 \frac{\lambda^2}{2n} = 7f_1 & f_5 &= 9 \frac{\lambda^2}{2n} = 9f_1 & f_6 &= 11 \frac{\lambda^2}{2n} = 11f_1 \\ f_7 &= 13 \frac{\lambda^2}{2n} = 13f_1 & f_8 &= 15 \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 15f_1 - \frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości w równanie na X_1 , otrzymamy rzędną linii wpływowej w węźle 7:

$$\eta_7 = k \frac{6}{h^2} \left[f_1 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7) - \frac{\lambda^2}{2} k^7 \right]$$

a ponieważ:

$$f_1 = \frac{\lambda^2}{2n}, \quad m_1 = 3k \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2,$$

$$A_1 = 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7,$$

zatem rzędne linii wpływowej x_1 będą:

$$\eta_7 = m_1 \left[\frac{1}{n} A_1 - k^7 \right]$$

$$\eta^5 = m_1 \left[\frac{3}{n} A_1 - k^5 (1 + 3k + 5k^2) \right]$$

$$\eta_6 = m_1 \left[\frac{2}{n} A_1 - k^6 (1 + 3k) \right] \quad \eta^4 = m_1 \left[\frac{4}{n} A_1 - k^4 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \right]$$

$$\dots \dots \dots \eta_1 = m_1 \left[\frac{7}{n} A_1 - k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6) \right].$$

Linia wpływowa X_1 . Rozróżniamy tu dwa przypadki: 1. ciężar z prawej strony węzła 4., 2. ciężar z lewej strony węzła 4., i w zależności od tych przypadków obliczamy równania rzędnych linii wpływowej.

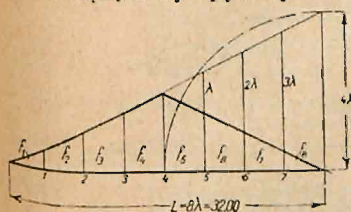


Fig. 420.

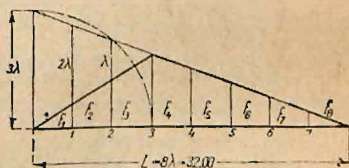


Fig. 421.

Ad 1 (fig. 420).

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \frac{4\lambda^2}{2n} & f_2 &= 3 \frac{4\lambda^2}{2n} = 3f_1 & f_3 &= 5 \frac{4\lambda^2}{2n} = 5f_1 & f_4 &= 7 \frac{4\lambda^2}{2n} = 7f_1 \\ f_5 &= 9 \frac{4\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 9f_1 - \frac{\lambda^2}{2} & f_6 &= 11 \frac{4\lambda^2}{2n} - 3 \frac{\lambda^2}{2} = 11f_1 - 3 \frac{\lambda^2}{2} \\ f_7 &= 13 \frac{4\lambda^2}{2n} - 5 \frac{\lambda^2}{2} = 13f_1 - 5 \frac{\lambda^2}{2} & f_8 &= 15 \frac{4\lambda^2}{2n} - 7 \frac{\lambda^2}{2} = 15f_1 - 7 \frac{\lambda^2}{2}; \end{aligned}$$

równanie rzędnej linii wpływowej w węźle 4. będzie:

$$\eta_4 = \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{h^2} \left[f_1 (k^3 + 3k^2 + 5k + 7k + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4) - \frac{\lambda^2}{2} (k + 3k^2 + 5k^3 + 7k^4) \right]$$

a że:

$$f_1 = \frac{4\lambda^2}{2n}, \quad m_2 = \frac{3k}{1-k^2} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2,$$

$$A_4 = k^3 + 3k^2 + 5k + 7k + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4,$$

zatem rzędne prawej gałęzi linii wpływowej będą:

$$\eta_7 = m_2 \left[\frac{1}{n} A_4 - k^4 \right]$$

$$\eta_6 = m_2 \left[\frac{2}{n} A_4 - k^3 (1 + 3k) \right]$$

$$\eta_5 = m_2 \left[\frac{3}{n} A_4 - k^2 (1 + 3k + 5k^2) \right]$$

$$\eta_4 = m_2 \left[\frac{3}{n} A_4 - k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3) \right].$$

Ad 2 (fig. 421).

$$f_8 = 1 \frac{3\lambda^2}{2n} \quad f_7 = 3 \frac{3\lambda^2}{2n} = 3f_8 \quad f_6 = 5 \frac{3\lambda^2}{2n} = 5f_8 \quad f_5 = 7 \frac{3\lambda^2}{2n} = 7f_8$$

$$f_4 = 9 \frac{3\lambda^2}{2n} = 9f_8 \quad f_3 = 11 \frac{3\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^2}{2} = 11f_8 - \frac{\lambda^2}{2}$$

$$f_2 = 13 \frac{3\lambda^2}{2n} - 3 \frac{\lambda^2}{2} = 13f_8 - 3 \frac{\lambda^2}{2} \quad f_1 = 15 \frac{3\lambda^2}{2n} - 5 \frac{\lambda^2}{2} = 15f_8 - 5 \frac{\lambda^2}{2}$$

$$\eta_3 = \frac{k}{1-k^2} \frac{6}{k^2} \left[f_8 (15k^3 + 13k^2 + 11k + 9 + 7k + 5k^2 + 3k^3 + k^4) - \frac{\lambda^2}{2} (6k^3 + 3k^2 + k) \right];$$

podstawiając zaś: $f_8 = \frac{3\lambda^2}{2n}, \quad m_2 = \frac{3k}{1-k^2} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2,$

$$B_4 = 15k^3 + 13k^2 + 11k + 9 + 7k + 5k^2 + 3k^3 + 3k^4 + k^4,$$

otrzymamy równania rzędnych linii wpływowych:

$$\eta_3 = m_2 \left[\frac{3}{n} B_4 - k(1 + 3k + 5k^2) \right] \quad \eta_2 = m_2 \left[\frac{2}{n} B_4 - k^2(1 + 3k) \right] \quad \eta_1 = m_2 \left[\frac{1}{n} B_4 - k^3 \right].$$

W podobny sposób obliczamy rzędne linii wpływowych dla X_2, X_3 .

Obliczenie analityczne rzędnych linii wpływowych sił normalnych przeprowadzamy schematycznie, obliczając wartości pomocnicze, a następnie zestawiając wartości rzędnych w tabeli:

$$2 = 2 + \frac{6\lambda}{h} \frac{J}{Jd} = 2 + \frac{6 \times 4}{4} \times \frac{1}{1} = 8$$

$$k = 0,5 (a - \sqrt{a^2 - 4}) = 0,5 (8 - \sqrt{8^2 - 4}) = 0,12$$

$$k^2 = 0,0144, \quad k^3 = 0,0017, \quad k^4 = 0,0002, \quad k^5 = 0,0000,$$

$$1 - k^2 = 0,9856, \quad \frac{3k}{1 - k^2} = \frac{3 \times 0,12}{0,9856} = 0,365$$

$$m_2 = \frac{3k}{1 - k^2} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 = 0,365 \times \left(\frac{4}{4} \right)^2 = 0,365 \quad m_1 = 3k \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 = 3 \times 0,12 \times \left(\frac{4}{4} \right)^2 = 0,36$$

$$A_1 = 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6 + 15k^7 = 1 + 3 \times 0,12 + 0,0144 \times 5 + 7 \times 0,0017 + 9 \times 0,0002 + 11 \times 0,0000 = 1,4457$$

$$\frac{1}{n} A_1 = \frac{1}{8} \times 1,4457 = 0,1807$$

$$A_2 = k + 3 + 5k + 7k^2 + 9k^3 + 11k^4 + 13k^5 + 15k^6 = 0,12 + 3 + 5 \times 0,12 + 7 \times 0,0144 + 9 \times 0,0017 + 11 \times 0,0002 + 13 \times 0,0000 = 3,8383$$

$$\frac{1}{n} A_2 = \frac{1}{8} \times 3,8383 = 0,4797$$

$$B_2 = 15k + 13 + 11k + 9k^2 + 7k^3 + 5k^4 + 3k^5 + k^6 = 15 \times 0,12 + 13 + 11 \times 0,12 + 9 \times 0,0144 + 7 \times 0,0017 + 5 \times 0,0002 + 3 \times 0,0000 = 16,2625$$

$$\frac{1}{n} B_2 = \frac{1}{8} \times 16,2625 = 2,0328$$

$$A_3 = k^2 + 3k + 5 + 7k + 9k^2 + 11k^3 + 13k^4 + 15k^5 = 0,0144 + 3 \times 0,12 + 5 + 7 \times 0,12 + 9 \times 0,0144 + 11 \times 0,0017 + 13 \times 0,0002 + 15 \times 0,0000 = 6,3653$$

$$\frac{1}{n} A_3 = \frac{1}{8} \times 6,3653 = 0,7956$$

$$B_3 = 15k^2 + 13k + 11k + 9k + 7k^2 + 5k^3 + 3k^4 + k^5 = 15 \times 0,0144 + 13 \times 0,12 + 11 \times 0,12 + 9 \times 0,12 + 7 \times 0,0144 + 5 \times 0,0017 + 3 \times 0,0002 + 0,0000 = 14,9574$$

$$\frac{1}{n} B_3 = \frac{1}{8} \times 14,9574 = 1,8695$$

$$A_4 = k^3 + 3k^2 + 5k + 7 + 9k + 11k^2 + 13k^3 + 15k^4 = 0,0017 + 3 \times 0,0144 + 5 \times 0,12 + 7 + 9 \times 0,12 + 11 \times 0,0144 + 13 \times 0,0017 + 15 \times 0,0002 = 8,9084$$

$$\frac{1}{n} A_4 = \frac{1}{8} \times 8,9084 = 1,1135$$

$$B_4 = 15k^3 + 13k^2 + 11k + 9 + 7k + 5k^2 + 3k^3 + k^4 = 15 \times 0,0017 + 13 \times 0,0144 + 11 \times 0,12 + 9 + 7 \times 0,12 + 5 \times 0,0144 + 3 \times 0,0017 + 0,0002 = 11,4500$$

$$\frac{1}{n} B_4 = \frac{1}{8} \times 11,4500 = 1,4312$$

$$\begin{aligned}
 1 + 3k &= 1 + 3 \times 0,12 = 1,36 \\
 1 + 3k + 5k^2 &= 1,36 + 5 \times 0,0144 = 1,432 \\
 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 &= 1,432 + 7 \times 0,0017 = 1,4439 \\
 1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 &= 1,4439 + 9 \times 0,0002 = 1,4457
 \end{aligned}$$

Rzędne linii wpływowych sił normalnych X_r w pasach:

Punkt	Rzędne linii wpływowych			
	X_1	X_2	X_3	X_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3929	0,6982	0,6771	0,5218
2	0,3828	0,9872	1,3052	1,0876
3	0,3244	0,8679	1,3886	1,5046
4	0,2601	0,6994	1,1540	1,5625
5	0,2052	0,5252	0,8703	1,2118
6	0,1301	0,3465	0,5807	0,8120
7	0,0651	0,1751	0,2904	0,4064
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Linie wpływowe sił normalnych w pasach na podstawie powyżej obliczonych rzędnych naniesiono na fig. 418. Siły normalne w pasie górnym otrzymują znak $-$, w pasie dolnym znak $+$.

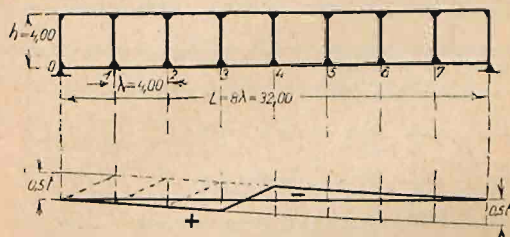


Fig. 422.

Ogólnie możemy napisać równanie rzędnych linii wpływowych sił normalnych wzorem:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\xi} &= \frac{n - \xi}{n} A_r^0 - a_{\xi r} & \text{dla } \xi \geq r, \\
 \eta_{\xi} &= \frac{\xi}{n} B_r^0 - \beta_{\xi r} & \text{dla } \xi \leq r - 1, \\
 A_r^0 &= m_r A_r; \quad B_r^0 = m_r B_r.
 \end{aligned}$$

przyczem:

Linie wpływowe sił poprzecznych w pasach. Dla założenia $J_g = J_d = J$ otrzymujemy $y_r = 0,5 T_r$ dla obu pasów. Zatem linię wpływową sił poprzecznych kreślimy jak dla belki wolno podpartej przy obciążeniu pośrednim, z tą różnicą, że odcinamy na podporze zamiast wielkości 1,0t, tylko 0,5t. Linie wpływowe sił poprzecznych w pasach wykreślono na fig. 422.

Linie wpływowe momentów w pasach. Dla przyjętego założenia otrzymujemy $M_{rx} = 0,5 (M_{orx} - X_r h)$. Mając zatem wyznaczone wielkości X_r , możemy łatwo wykreślić linię wpływową momentów w pasach jako różnicę M_{orx} i $X_r h$, jednakowoż przez odpowiednie przekształcenie możemy obliczyć wprost wielkości rzędnych linii wpływowych momentów. Oznaczając przez y_{ξ} rzędne linii wpływowej momentów w belce wolno podpartej, otrzymamy równanie jej rzędnych:

$$y_{\xi} = \frac{n - \xi}{n} a_{\xi} \quad \text{dla } \xi \geq r, \quad \text{oraz} \quad y_{\xi} = \frac{\xi}{n} b_{\xi} \quad \text{dla } \xi \leq r - 1,$$

przyczem:

$$a_{\xi} = (2r - 1 + \varphi) \frac{\lambda}{2} \quad b_{\xi} = [2(n - r) + 1 - \varphi] \frac{\lambda}{2} \quad X = \varphi \frac{\lambda}{2};$$

równanie więc rzędnych linii wpływowych momentów w pasach będzie:

$$\eta_{\xi}' = 0,5 (y_{\xi} - \eta_{\xi} h),$$

po podstawieniu zaś wartości za y_{ξ} i η_{ξ} otrzymamy:

$$\eta_{\xi}' = \frac{n - \xi}{n} A'_{rx} + a'_{\xi r} \quad \text{dla } \xi \geq r,$$

$$\eta_{\xi}' = \frac{\xi}{n} B'_{rx} + \beta'_{\xi r} \quad \text{dla } \xi \leq r-1,$$

przyczem:

$$A'_{rx} = (q - R'_{Ar}) \frac{\lambda}{4} \quad B'_{rx} = -(q - R'_{Br}) \frac{\lambda}{2}$$

$$R'_{Ar} = \mu_a k^r - v_a k^{n-r} \quad R'_{Br} = v_b k^r - \mu_b k^{n-r}$$

$$\mu_a = \frac{1}{1-k} \quad \mu_b = k \mu_a \quad v_b = \frac{2n}{1+k} + \frac{1}{1-k} \quad v_a = k v_b$$

$$a_{\xi r}' = 0,5 h a_{\xi r} \quad \beta_{\xi r}' = 0,5 h \beta_{\xi r};$$

dla otrzymania lewego momentu węzłowego pola r należy w powyższych równaniach podstawić: $X = -\frac{1}{2}\lambda$, $q = -1$,
zaś dla prawego momentu węzłowego pola r : $X = +\frac{1}{2}\lambda$, $q = +1$,
Zatem otrzymamy dla:

lewego momentu węzłowego

$$A_{r'}'(-\frac{1}{2}\lambda) = -(1 + R'_{Ar}) \frac{1}{4}\lambda$$

$$B_{r'}'(-\frac{1}{2}\lambda) = +(1 + R'_{Br}) \frac{1}{4}\lambda$$

prawego momentu węzłowego

$$A_{r'}'(+\frac{1}{2}\lambda) = +(1 - R'_{Ar}) \frac{1}{4}\lambda$$

$$B_{r'}'(+\frac{1}{2}\lambda) = -(1 - R'_{Br}) \frac{1}{4}\lambda$$

Na podstawie powyżej wyprowadzonych wzorów ustawiamy równania rzędnych linii wpływowych momentów w pasach.

a) Lewe momenty węzłowe.

Węzeł 1. $\eta_1' = \frac{1}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^7$

$$\eta_2' = \frac{2}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^6 (1 + 3k)$$

$$\eta_3' = \frac{3}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^5 (1 + 3k + 5k^2)$$

$$\eta_4' = \frac{4}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k^4 (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\eta_n' = \frac{7}{8} A_1' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_1 k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3 + 9k^4 + 11k^5 + 13k^6).$$

Węzeł 4. $\eta_1' = \frac{1}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^4$

$$\eta_2' = \frac{2}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^3 (1 + 3k)$$

$$\eta_3' = \frac{3}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^2 (1 + 3k + 5k^2)$$

$$\eta_4' = \frac{4}{8} A_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k (1 + 3k + 5k^2 + 7k^3)$$

$$\eta_5' = \frac{5}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k (1 + 3k + 5k^2)$$

$$\eta_6' = \frac{6}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^2 (1 + 3k)$$

$$\eta_7' = \frac{7}{8} B_4' \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 0,5 h m_2 k^3.$$

b) Prawe momenty węzłowe. Równania rzędnych linii momentów pozostają te same co dla lewych momentów węzłowych z tą zmianą, że zamiast $A_{r'}'(-\frac{1}{2}\lambda)$ i $B_{r'}'(-\frac{1}{2}\lambda)$ należy wprowadzić $A_{r'}'(+\frac{1}{2}\lambda)$ i $B_{r'}'(+\frac{1}{2}\lambda)$; w ten sam sposób obliczamy linie wpływowe dla momentów w węzłach 2 i 3.

Obliczenie wartości pomocniczych:

Rzędne linii wpływowych lewych momentów węzłowych w pasie dolnym.

Punkt	Rzędne linii wpływowych			
	M_1	M_2	M_3	M_4
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-1,1484	+0,2362	+0,1384	+0,1265
2	-1,0772	-0,6357	+0,3750	+0,2650
3	-0,9084	-0,6200	-0,4996	+0,5014
4	-0,7278	-0,5064	-0,4867	-0,3735
5	-0,5461	-0,3809	-0,3739	-0,3599
6	-0,3641	-0,2541	-0,2503	-0,2483
7	-0,1820	-0,1270	-0,1262	-0,1249
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

dla przyjętego założenia: $y_r = -0,5 t_0$, zatem siła normalna w słupie r będzie:

$$u_r = \pm 0,5 P_r \quad \begin{array}{l} + \text{ dla pomostu dołem,} \\ - \text{ " " " " " górnym.} \end{array}$$

zaś na podporze:

$$\begin{array}{l} u_0 = -0,5 (A - P_0) \text{ dla pomostu dołem,} \\ u_0 = -0,5 (A + P_0) \text{ " " " " " górnym,} \end{array}$$

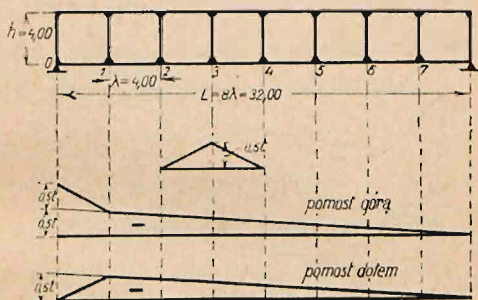


Fig. 424.

λ = oddziaływanie belki wolno podpartej.

Konstrukcja w ten sposób wyprowadzonych równań dla linii wpływowych jest uwidocznioma na fig. 424. Słupy na podporach są zawsze ściskane, zaś słupy pośrednie są ściskane przy pomoście górnym, oraz rozciągane przy pomoście dolnym.

Linie wpływowe sił poprzecznych w słupach. Siła poprzeczna jest stała i wynosi:

$$t_r = X_r - X_{r+1},$$

stąd dla słupa narożnego $t_0 = -X_1$.

Mając wykreślone linie wpływowe sił X_r , otrzymujemy w łatwy sposób różnicę $X_r - X_{r+1}$ i nanosimy ją.

Na fig. 425 wykreślono w ten sposób linie wpływowe sił poprzecznych w słupach.

Linie wpływowe momentów w słupach. Moment działający w słupie obliczamy wzoru na podstawie:

$$m_{ry} = (X_r - X_{r+1}) y - \left[(Y_r + Y_{r+1}) \frac{\lambda}{2} + Z_r - Z_{r+1} \right];$$

wyrażenie: $\left[(Y_r + Y_{r+1}) \frac{\lambda}{2} + Z_r - Z_{r+1} \right]$ oznacza moment działający w połowie wysokości słupa, który dla przyjętego założenia jest zerem, otrzymamy zatem równanie:

$$m_{ry} = (X_r - X_{r+1}) y;$$

podstawiając $y = 0,5 h$, otrzymamy:

$$m_r \pm \frac{h}{2} = \pm 0,5 h (X_r - X_{r+1}) = \pm 0,5 h t_r;$$

z relacji tej wynika, że chcąc otrzymać linie wpływowe momentów w słupie należy pomnożyć rzędne linii wpływowych sił poprzecznych w słupie przez połowę wysokości słupa, lub też odczytywać wprost w zmienionej odpowiednio skali wysokości.

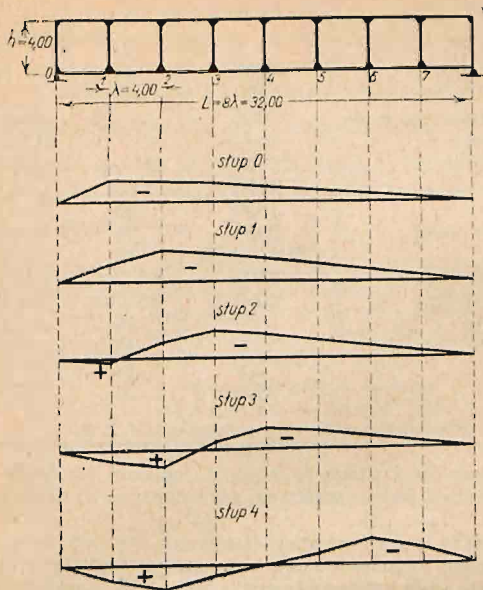


Fig. 425.

W naszym przypadku należy rzędne linii sił poprzecznych pomnożyć przez 2, gdyż $m_r \pm \frac{1}{2}h = \pm 0,5 \times 4 t_r = 2 t_r$.

Moment w stopie słupa otrzymuje znak +, w głowicy —.

VII. Budowle ziemne i mury oporowe.

Napisał

inż. dr. Jan Bogucki,

profesor politechniki, Lwów.

Równowaga stoków. Stoki nasypów z luźnych materiałów (nie tylko ziemne, lecz także np. węgla, zboża) utrzymują się w równowadze stałej pod działaniem ciężaru własnego cząstek G i oporu tarcia T , które przeciwdziałają składowej ciężaru P , działającej wzdłuż pochyłości stoku (fig. 426). Tarcie T przyjmujemy proporcjonalne do nacisku Q , a więc $T = f \cdot Q$, nazywając f współczynnikiem tarcia. Dla równowagi będzie $T = P = Q \tan \alpha$; stąd graniczny kąt równowagi odpowiada równaniu $\tan \alpha = f$ i nazywa się kątem tarcia lub kątem zesypu; oznaczamy go zwykle ρ , więc $\tan \rho = f$.

Wartości f i ρ , wyznaczone doświadczalnie (podgartując dany materiał w stoku), zestawione są w tablicy I. wraz z ciężarem jednostkowym γ danego materiału.

Stok ziemny, nachylony pod kątem tarcia do poziomu, nazywamy sto-kiem naturalnym. Dla nasypów ziemnych przyjmujemy zwykle $\rho = 34^\circ$,

$$\tan \rho = 0,67 = \frac{2}{3}.$$