

W podobny sposób otrzymamy wpływową X_b jako wielobok sznurowy dla sił x , z warunkiem, że rzędne jej ξ muszą być zmniejszone w stosunku 1 : $p_x w_x$ (fig. d).

Obciążając belkę n siłami równymi g , otrzymamy dla odległości biegunowej ng wielobok sznurowy, którego rzędne ξ są równe momentowi X_c (fig. e).

W danym przykładzie z uwzględnieniem podziałki długości:

$$X_a = \frac{200 p_y h}{w_y p_y + c} = \frac{h}{0,02086}; \quad X_b = \frac{200 p_x \xi}{p_x w_x} = \frac{\xi}{0,0653}; \quad X_c = 200 \zeta.$$

Odczytane rzędne mają być wyrażone w metrach. Moment w dowolnym punkcie osi łuku obliczymy wedle równania (8), zaś siłę normalną wedle równania (5), gdzie $V = V_0 + X_b$.

Łuk paraboliczny. Równanie (7) osi łuku parabolicznego przybiera dla układu współrzędnych o początku w O ($u = \frac{l}{2}$, $v = \frac{2}{3}f$) formę:

$$y = \frac{f}{l^2} (l^2 - 12x^2);$$

wówczas przyjmując $J_0 = J \cos \varphi$,

$$X_a = \frac{45}{4 f^2 l} \left[\int_0^l M_0 y dx + E \varepsilon J_0 t l \right] r_1,$$

$$X_b = \frac{12}{l^3} \int_0^l M_0 x dx = \frac{12}{l^3} F_0 \quad X_c = \int_0^l M_0 \frac{dx}{l} = \frac{F_0}{l},$$

gdzie F_0 oznacza powierzchnię momentów M_0 , zaś $\frac{1}{r_1} = 1 + \frac{45 J_0}{4 f^2 F_0'}$.

Dla łuków symetrycznych o kształcie linii ciśnienia podaje Strassner („Neuere Methoden zur Statik d. Rahmentragwerke“, II. Bd., D. Bogen u. d. Brückengewölbe) tablice do linii wpływowych parcia poziomego i momentów, tablice rzędnych osi łuku w zależności od stosunku obciążenia łuku w kluczu i węzłowie i od stosunku grubości łuku w kluczu i we węzłowie, wreszcie wzory i tablice do obliczenia grubości łuku w kluczu i we węzłowie.

E. Obliczanie sklepień i murów przy pomocy linii ciśnienia.

Napisał

inż. dr. Maksymiljan Thullie, profesor politechniki, Lwów.

Warunki równowagi sklepień, murów i filarów, są następujące:

1. Środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej, działającej na szew, a więc punkt przecięcia się szwu z linią ciśnienia, powinien leżeć w przekroju. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłińców, połączonych zaprawą, to, ponieważ nie możemy liczyć na wytrzymałość zaprawy na rozciąganie, więc w sklepieniu nie dopuszczamy wcale ciągnięcia. Środek więc ciśnienia a zatem i linia ciśnienia powinny leżeć w rdzeniu a dla przekroju prostokątnego w średniej trzeciej części sklepienia. Warunek ten nie odnosi się jednakże do sklepień litych betonowych lub żelbetowych, u których możemy dopuścić ciągnięcie. Tam więc linia ciśnienia może wyjść nie tylko z rdzenia, ale i z przekroju.

2. Jeżeli sklepienie składa się z kłińców, to wypadkowa na szew nie powinna być odchyloną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie kłińców. Średnio możemy przyjąć $f = 0,4$, $\rho = 22^\circ$. Dla świeżej zaprawy ρ może być mniejsze.

3. Wreszcie napężenie nie powinno być większe, niż dopuszczalne. Jeżeli c oznacza odstęp środka ciśnienia od środka przekroju, więc odstęp linii ciśnienia od osi, to:

$$\nu_1 = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{bc}{h} \right), \quad \nu_2 = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{bc}{h} \right);$$

a jeżeli $b = 100 \text{ cm}$, to:

$$\nu_1 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{bc}{h} \right), \quad \nu_2 = \frac{P}{100h} \left(1 - \frac{bc}{h} \right).$$

Napężenie w środku ciężkości przekroju: $\nu_1 = \frac{P}{F}$.

Wykreślnie możemy wyznaczyć napężenia w przekroju w nast. sposób: Zróbmy $s s_1 = \nu_0$ (fig. 384 a). Połączmy O_1 z J_1 i J_2 z punktami rdzennymi (przyczem $A J_1 = J_1 J_2 = J_2 B = \frac{1}{3} h$), aż do przecięcia się z kierunkiem siły p i wykreślmy $C_2 B_1$ i $C_1 A_1 \parallel AB$, to $A A_1 = \nu_2$, $B B_1 = \nu_1$.

Jeżeli środek ciśnienia wychodzi z rdzenia, a ciągnięcie jest możliwe, to powyższa konstrukcja da nam ν_2 ujemne (fig. b). Jeżeli, ze względu na bardzo małą wytrzymałość zaprawy na rozciąganie, nie przyjmujemy wcale rozciągania, to $\nu_1 = \frac{2P}{3bc}$ (fig. c). Najkorzystniej byłoby dla sklepienia i dla

zeskładów murowanych wogóle, gdyby $c = s_1$, tj., gdyby linja ciśnienia wpadała na oś, to wtedy w każdym przekroju napężenie rozdzielałoby się równo na przekrój, byłoby więc stosunkowo najmniejszym. Wedle przepisów mostowych M. R. P. można przy obliczaniu murów oporowych i przyczółków dopuścić wyjście linii ciśnienia z rdzenia przekroju do 0,2 szerokości, licząc od krawędzi przyczółka, o ile napężenia nie przekraczają granicy dopuszczalności.

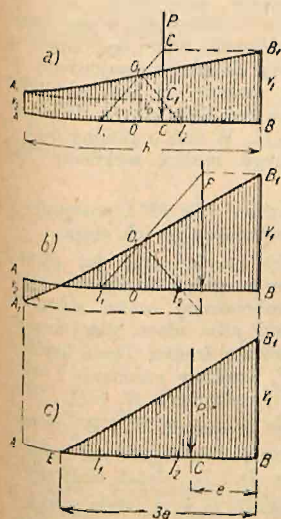


Fig. 384.

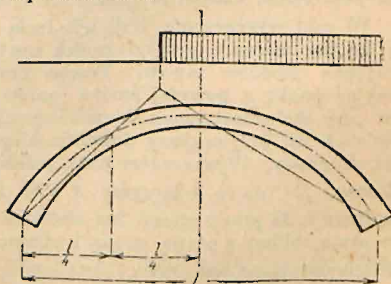


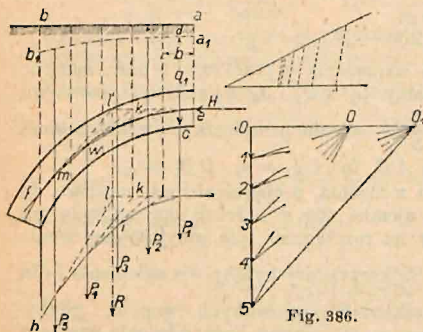
Fig. 385.

Linja ciśnienia. Dla mniejszych sklepień (mosty do 20 m) wyznacza się zazwyczaj napężenia przy pomocy linii ciśnienia. Linja ciśnienia nazywamy linję, łączącą środki ciśnienia poszczególnych szwów. Położenie jej w sklepieniu można wyznaczyć analitycznie, wychodząc z równania różniczkowego linii ciśnienia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \gamma \frac{q}{H} \dots \dots \dots (1)$$

(por. str. 1062, a także Thullie: „Statyka budowli“, wyd. IV., str. 419) lub też wykreślnie. Sposób analityczny jest żmudny i dlatego rzadko go się używa. Wykreślnie wyznaczyć można linię ciśnienia w przybliżeniu lub dokładnie.

1. Sposób przybliżony. Tok postępowania: Obciążamy łuk najniekorzystniej; obciążenie nieco poza połowę rozpiętości według konstrukcji na fig. 385 jest najniekorzystniejsze dla węzłowania i dla przekroju w $\frac{1}{4} l$. Dla klucza najniekorzystniejsze jest obciążenie $\frac{1}{4}$ rozpiętości przy obu podporach. Największe parcie poziome wywołuje obciążenie zupełne sklepienia. We-



(por. autora „Statyka budowli“, IV. w., str. 436). W celu wykreślenia linji ciśnienia postępujemy w następujący sposób:

Dzielimy sklepienie, jak pierwiej, na paski, wyznaczamy ich ciężary, kreślimy wielobok sił, przyjmujemy narazie dowolnie biegun (fig. 388) i wielobok sznurowy. W tym wieloboku kreślimy linję zamykającą $L_1 K_1$, by suma powierzchni, zawartych między zamykającą, a wielobokiem sznurowym powyżej i poniżej

zamykającej, była zerem, gdyż w tym przypadku będzie $\int_A^B M dx = 0$.

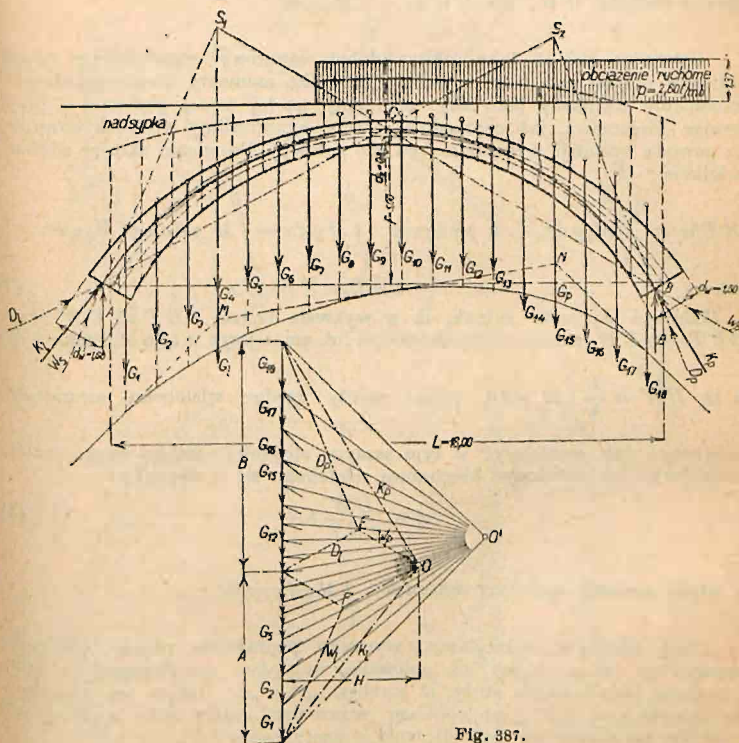


Fig. 387.

Teraz sprawdzamy, czy moment statyczny powierzchni powyżej i poniżej zamykającej ze względu na prostą EF jest zerem. Gdy nie zachodzi ten wypadek, natenczas należy skrócić zamykającą około punktu środkowego o wielkość $L_2 L_3 = \frac{6S}{l^2}$, przyczem: $L_2 L_3$ = długość, o jaką należy przesunąć punkt L_2 , S = moment statyczny powierzchni poniżej i powyżej zamykającej ze względu na prostą EE , l = rozpiętość.

Po wykonaniu tego przesunięcia będzie spełnione równanie: $\int_A^B M x dx = 0$, przyczem poprzednio uzyskany warunek nie zostanie naruszony.

Teraz oś łuku uważamy jako wielobok sznurowy i kreślimy dla niego zamykającą, jak poprzednio. Rzędne wieloboku sznurowego, liczone od zamykającej, wyobrażają momenty. Poszczególne powierzchnie tych momentów z uwzględnieniem ich znaków uważamy jako siły, kreśląc na dowolnej prostej poziomej wielobok sił z uwzględnieniem znaków i przyjmując dowolną odległość biegunową h_1 . Potem kreślimy promienie, a z punktów osi ponad środkami ciężkości trapezów kreślimy poziome i wykreślamy wielobok sznurowy UNW . Promienie skrajne odcinają na prostej równoległej do wypad-

kowej odcinek UW , zaś $UWh_1 = \int_A^B M_a y dx$.

Uważając zaś oś łuku jako wielobok sznurowy, otrzymujemy rzędne, zawarte między osią łuku a zamykającą jako momenty. Powierzchnie tych momentów uważamy jako siły, odcinamy na tej samej poziomej i przyjmując biegunową, jak poprzednio, równą h_1 , kreślimy wielobok sznurowy (z powodu symetrii wykreślamy go dla połowy). Promienie skrajne odcinają wielkość:

$$RTh_1 = \frac{1}{2} \int_A^B M_b y dx, \quad \text{a ponieważ: } \int_A^B My dx = \int_A^B M_a y dx - \int_A^B M_b y dx = 0,$$

więc:

$$2RT = UW \dots \dots \dots (3)$$

Zdarzyć się może jednak, iż w wykresie będzie $2RT \geq UW$, czyli $2RT = \alpha UW$, zatem należy zwiększyć lub zmniejszyć w tym stosunku UW ,

a że $UW = \frac{1}{h} \int_A^B M_a y dx$, zatem należy rzędne wieloboku sznurowego

zwiększyć lub zmniejszyć w tym samym stosunku, wobec czego należy zmniejszyć lub zwiększyć biegunową wieloboku sił w stosunku:

$$b = \frac{UW}{2RT} b_1 \dots \dots \dots (4)$$

a wtedy zostanie spełniony warunek: $\int_A^B My dx = 0$.

Linję ciśnienia wykreślamy, nanosząc poprawione rzędne wieloboku sznurowego w zależności od położenia względem zamykającej na łuku, przyczem jako kontrola służy, iż punkty „g” i „d”, leżące na przecięciu się zamykającej LK z wielobokiem sznurowym muszą leżeć u pionowych punktów przecięcia się linii ciśnienia z zamykającą łuku.

Wykres naprężeń w sklepieniu kreślimy w znany sposób, przyczem należy z końca odpowiedniej siły G wykreślić równoległą do szwu, następnie zaś z bieguna prostopadłą do kierunku szwu, odległość tak otrzymanego punktu od bieguna, mierzona w kierunku prostopadłym do szwu, da wielkość siły normalnej.

Przykład. Wyznaczyć linję ciśnienia w sklepieniu kamiennem sposobem przybliżonym i dokładnym.

Dane: $l = 18,00$ m, $f = 5,00$ m, grubość sklepienia w kluczu $d_k = 0,80$ m, grubość sklepienia w wezłowi $d_w = 1,60$ m, grubość żwirówki w kluczu $z = 0,50$ m, obciążenie ruchome $p = 2,60$ t/m², ciężar żwirówki $\gamma_1 = 1,90$ t/m³, ciężar kamienia ciosowego $\gamma = 2,40$ t/m³.

I. Sposób przybliżony (fig. 387). Obciążenie ruchome $p = 2,60$ t/m² zamieniamy na warstwę o ciężarze gatunkowym nadsypki żwirowej o wysokości $h = \frac{p}{\gamma_1} = \frac{2,60}{1,90} = 1,37$ m. Obciążenie zaś, wywołane nadsypką żwirową i ciężarem ruchomym, zamieniamy na także

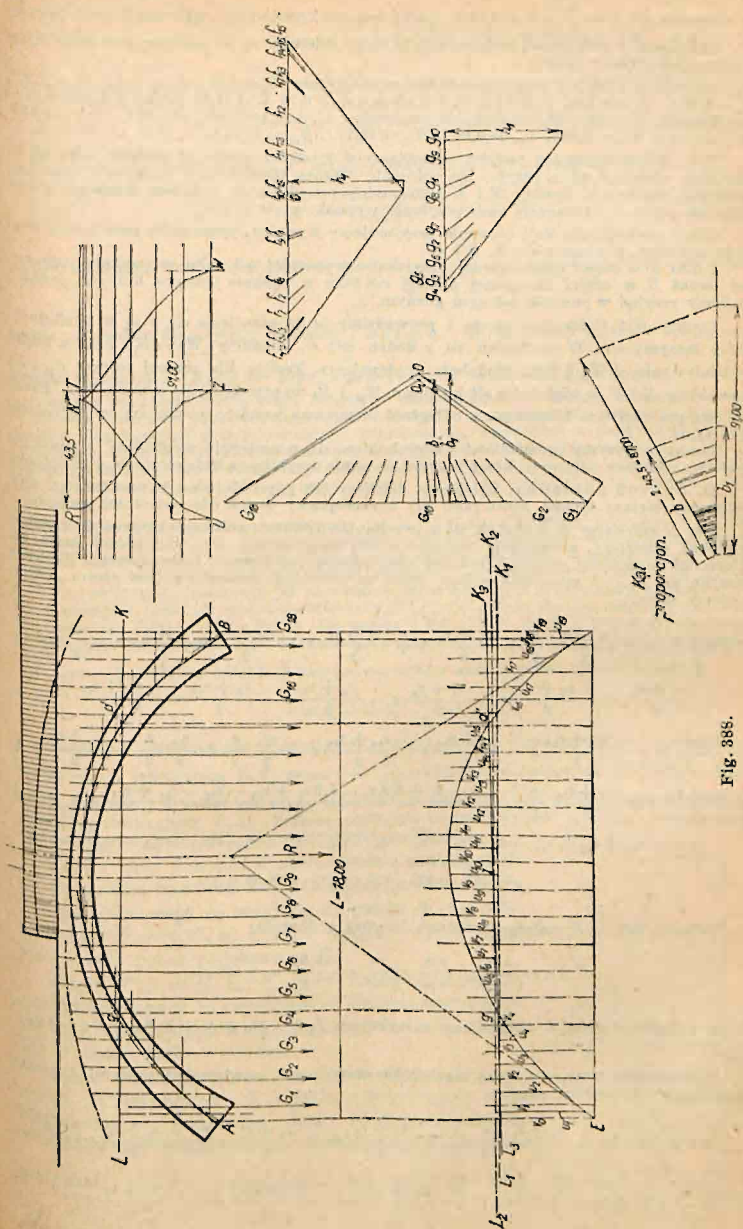


Fig. 388.

same obciążenie, murem z kamienia ciosowego, zmniejszając warstwę nadsypki żwirowej w stosunku $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} h = \frac{1,90}{2,40} h = 0,79 h$. Na tej zasadzie kreślimy sprowadzoną linię obciążenia.

Sklepienie o rozpiętości podporowej 18,00 m, dzielimy na 18 pasków, szerokości 1,0 m i obliczamy ciężary pasków:

$G_1 = \frac{1}{2}(6,50 + 4,30) \times 2,40 \times 1,00 = 12,96 t$, analogicznie: $G_2 = 9,14 t$, $G_3 = 7,08 t$, $G_4 = 5,52 t$, $G_5 = 4,82 t$, $G_6 = 3,48 t$, $G_7 = \frac{1}{2}(1,30 + 1,12) \times 2,40 \times 0,70 + \frac{1}{2}(2,30 + 2,20) \times 2,40 \times 0,30 = 3,61 t$, $G_8 = 5,16 t$, $G_9 = 5,04 t$, $G_{10} = 5,04 t$, $G_{11} = 5,16 t$, $G_{12} = 5,58 t$, $G_{13} = 6,21 t$, $G_{14} = 7,10 t$, $G_{15} = 8,32 t$, $G_{16} = 9,30 t$, $G_{17} = 12,15 t$, $G_{18} = 16,07 t$.

Tak obliczone ciężary pasków zaczepiamy w środkach ciężkości pasków jako siły G , kreślimy wielobok sił, a przyjmując położenie bieguna (dowolnie) w punkcie O' , kreślimy wielobok sznurowy. Punkty M i N jako punkty przecięcia się promieni skrajnych z promieniem przez C wyznaczają nam położenie wypadkowych G_I i G_P .

Celem wykreślenia linii ciśnienia przyjmujemy 3 punkty, przez które przechodzić musi linia ciśnienia, a mianowicie A , B i C .

Punkt A w części nieobciążonej przyjmujemy powyżej osi łuku w punkcie jędrnym, zaś punkt B w części obciążonej poniżej osi łuku w punkcie jędrnym dolnym, punkt C możemy przyjąć w punkcie jędrnym górnym.

Punkty B i C łączymy prostą i prowadzimy ją do przecięcia się z G_I w punkcie S_1 , który łączymy z A . W wieloboku sił z końca siły G_1 kreślimy $W_1 \parallel AS_1$, oraz z końca oddziaływania $AW_P \parallel BS_1$. Podobnie postępujemy, kreśląc dla prawej połowy D_P i D_I . Z punktów E i F w wieloboku sił kreślimy W_P i D_I do przecięcia się w punkcie O . Punkt ten jest prawdziwym biegunem, a odległość biegunowa parciem poziomą w sklepieniu $H = 44,0 t$.

Punkt O łączymy promieniami z wielobokiem sił, a następnie wychodząc z punktu A kreślimy wielobok sznurowy, który jest równocześnie przybliżoną linią ciśnienia w sklepieniu.

II. Sposób dokładny. Sklepienie dzielimy jak poprzednio na 18 pasków (fig. 389), obliczamy ciężary tychże, które jako siły G zaczepiamy w połowie szerokości pasków.

Siły G składamy w wielobok sił a przyjmując dowolnie położenie bieguna O , kreślimy wielobok sznurowy, a następnie szukamy takiej zamykającej LK_1 , dla której suma powierzchni momentów poniżej i powyżej zamykającej położonych, będzie zerem. Kreślimy zamykającą $L_2 K_2$ i sprawdzamy, czy suma powierzchni momentów jest zerem. Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} \Sigma F = \int_A^B M dx &= \frac{v_0 + v_1}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} e + \frac{v_2 + v_3}{2} e + \frac{v_3 + v_4}{2} e + \frac{v_4}{2} 0,4 e - \frac{v_5}{2} 0,6 e - \\ &- \frac{v_5 + v_6}{2} e - \frac{v_6 + v_7}{2} e - \frac{v_7 + v_8}{2} e - \frac{v_8 + v_9}{2} e - \frac{v_9 + v_{10}}{2} e - \frac{v_{10} + v_{11}}{2} e - \\ &- \frac{v_{11} + v_{12}}{2} e - \frac{v_{12} + v_{13}}{2} e - \frac{v_{13} + v_{14}}{2} e - \frac{v_{14} + v_{15}}{2} e - \frac{v_{15}}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_{16}}{2} \frac{e}{2} + \frac{v_{16} + v_{17}}{2} e + \\ &+ \frac{v_{17} + v_{18}}{2} e + \frac{v_{18} + v_{19}}{2} \frac{e}{2} = \left[\frac{v_0 - v_1 + 2,8 v_4 - 3,2 v_5 + v_{15} - v_{16} - v_{18} + v_{19}}{4} + v_1 + v_2 + \right. \\ &\quad \left. + v_3 + v_{16} + v_{17} + v_{18} - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_{10} - v_{11} - v_{12} - v_{13} - v_{14} - v_{15} \right] e = \\ &= \left[\frac{9,8}{4} + 98 - 128,5 \right] e = -28,05 e. \end{aligned}$$

Zamykającą $L_1 K_1$ należy przesunąć do góry o długość:

$$\Delta a = \frac{em}{l} = \frac{em}{en} = \frac{m}{n} = \frac{28,05}{18} = 1,557 \text{ mm}.$$

W tej odległości ponad $L_1 K_1$ kreślimy zamykającą $L_2 K_2$, dla której $\Sigma F = \int_A^B M dx = 0$.

Sprawdzamy teraz, czy suma momentów statycznych powierzchni powyżej i poniżej zamykającej jest zerem, zatem:

$$\begin{aligned} \Sigma S = \int_A^B M x dx &= \frac{v_0 + v_1}{2} \frac{e}{2} \frac{e}{4} + \frac{v_1 + v_2}{2} ee + \frac{v_2 + v_3}{2} e 2e + \frac{v_3 + v_4}{2} e 3e + \\ &+ \frac{v_4}{2} 0,6 e 3,7 e - \frac{v_5}{2} 0,4 e 4,13 e - \frac{v_5 + v_6}{2} e 5e - \frac{v_6 + v_7}{2} e 6e - \frac{v_7 + v_8}{2} e 7e - \\ &- \frac{v_8 + v_9}{2} e 8e - \frac{v_9 + v_{10}}{2} e 9e - \frac{v_{10} + v_{11}}{2} e 10e - \frac{v_{11} + v_{12}}{2} e 11e - \frac{v_{12} + v_{13}}{2} e 12e - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{v_{13} + v_{14}}{2} e 13 e - \frac{v_{14} + v_{15}}{2} e 14 e - \frac{v_{15}}{2} 0,3 e 14,6 e + \frac{v_{16}}{2} 0,7 e 15,23 e + \frac{v_{16} + v_{17}}{2} e 16 e + \\
& + \frac{v_{17} + v_{18}}{2} e 17 e + \frac{v_{18} + v_{19}}{2} e 17,66 e = \frac{e^2}{2} \left[\frac{v_0 + 9 v_1}{8} + 3 v_2 + 5 v_3 + 5,22 v_4 - 6,652 v_5 - \right. \\
& - 11 v_6 - 13 v_7 - 15 v_8 - 17 v_9 - 19 v_{10} - 21 v_{11} - 23 v_{12} - 25 v_{13} - 27 v_{14} - 18,88 v_{15} + \\
& \left. + 26,661 v_{16} + 33 v_{17} + 34,66 v_{18} + 17,66 v_{19} \right] = \frac{e^2}{2} [2425,926 - 2242,222] = 91,852 e^2.
\end{aligned}$$

Zatem należy zamykającą $L_2 K_2$ skrócić około punktu J o wielkość:

$$L_2 L_3 = \frac{6 S}{l^2} = \frac{6 \times 91,852 e^2}{(18 e^2)} = 1,70 \text{ mm.}$$

Po wykonaniu powyższego skrótu warunek $\int_A^B M x dx = 0$ będzie spełniony bez nar-

zenia poprzednio spełnionego warunku $\int_A^B M dx = 0$. W podobny sposób postępujemy,

kreśląc zamykającą LK dla osi łuku, którą uważamy za wielobok sznurowy.

Rzędne wieloboku sznurowego, liczone od zamykającej, wyobrażają momenty. Zatem w połowie szerokości pasków powierzchni momentów zaczepiamy siły równe powierzchni pasków i na dowolnej poziomej kreślimy wielobok sił, wychodząc z punktu O z uwzględnieniem znaków powierzchni momentów, a przyjmując dowolną biegunową h_1 , łączymy biegun promieniami z wielobokiem sił. Odcinamy zatem $Of_1 = \frac{1}{2} u_1$, $f_1 f_2 = u_2$ itd., uwzględniając ich znaki. A że $\Sigma F = 0$, zatem punkt ostatni f_{13} wieloboku sił musi się zejść z punktem O .

Punkty zaczepienia sił „ u ” rzutujemy na oś łuku, skąd kreślimy poziome, a na nich wielobok sznurowy UNW . Promienie skrajne wieloboku sznurowego odcinają na poziomej odcinek $UW = 91 \text{ mm}$. Podobnie składamy w wielobok sił rzędne, zawarte między zamykającą a osią łuku. Ponieważ łuk jest symetryczny, więc robimy to tylko dla połowy łuku. A przyjmując biegunową, jak poprzednio, łączymy biegun promieniami z wielobokiem sił, a następnie kreślimy wielobok sznurowy TZR . Promienie skrajne odcinają na poziomej odcinek $TR = 43,6 \text{ m}$. Mamy tu zatem $2 TR < UW$, gdyż $2 \times 43,6 < 91$ musimy zmienić więc rzędne wieloboku sznurowego oraz odległość biegunową $b = 45 t$ w stosunku $\frac{91}{87}$, zatem prawdziwa odległość biegunowa, a tem samem parcie poziome będzie:

$$H = b_1 = 45 \times \frac{91}{87} = 47,1 t.$$

Dokładną linię ciśnienia wykreślamy, mnożąc rzędne zawarte między wielobokiem sznurowym a zamykającą $L_3 K_3$ przez $\alpha = \frac{91}{87} = 1,046$ i odcinając tak otrzymane rzędne od zamykającej LK w dół lub górę, zależnie od położenia ich w wieloboku sznurowym względem zamykającej $L_3 K_3$. Zmianę rzędnych można również wykonać przy pomocy kąta proporcjonalnego, jak to uwidoczniło na fig. 388.

Filary. Aby filar był w równowadze, muszą spełnić się te same warunki, co dla sklepień (por. str. 1278).

Dla równowagi ze względu na punkt A (fig. 389) musi być $P \cdot b \leq C \cdot a$, t. zn., wypadkowa R musi przechodzić przez podstawę AB .

Jeżeli $P \cdot b = C \cdot a$, tj., gdy zachodzi równość momentów, mamy do czynienia ze stanem równowagi niestałej (chwijnej), wtedy najmniejsze zwiększenie siły P może ciało wyrzucić.

Jeżeli wreszcie $C \cdot a < P \cdot b$, wtedy ciało wywraca się (wypadkowa R wyszła z przekroju), o ile ciągnięcie w podstawie jest niedopuszczalnym. W budowlach inżynierskich żądamy 1,5–2-krotnej

pewności; wtedy największa dopuszczalna siła ukośna: $P = \frac{C \cdot a}{1,5 b}$

do $P = \frac{C \cdot a}{2 b}$.

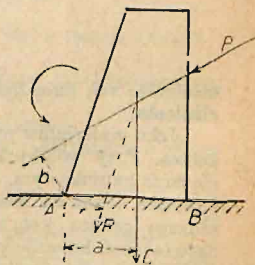


Fig. 389.

Przy nowszych ustrojach żelbetowych (np. ramowych), gdzie filary są sztywnie połączone z belkami głównymi, słupy odkształcają się wraz z całym układem. Tutaj słupy pracują na zginanie przy jednoczesnem działaniu siły osiowej (mimośrodkowe obciążenie), a oblicza się je na podstawie zasad zeskładów hiperstatycznych.

Jeżeli na filar działają oprócz sił pionowych także siły ukośne (np. przy sklepieniach lub łukach), to obliczamy naprężenia nie tylko w podstawie, ale i w kilku przekrojach (szwach) poziomych. W tym celu dzieli się filar na kilka części (fig. 390) i dla każdej z nich znajduje się położenie odpowiedniej wypadkowej i największe naprężenie. Punkty przecięcia poszczególnych wypadkowych z odpowiednimi przekrojami nazywamy środkami

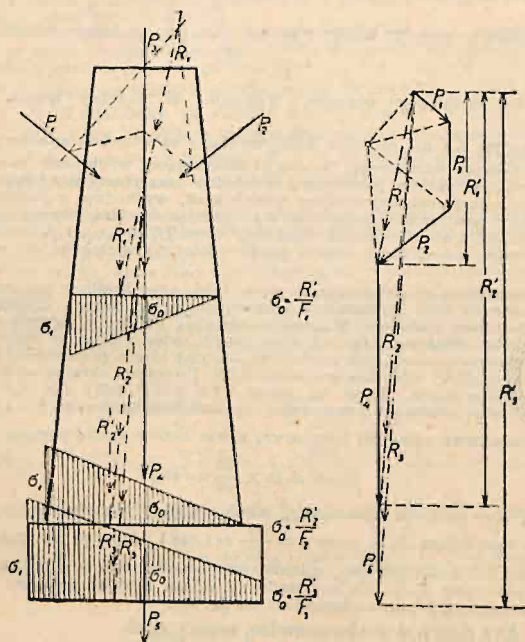


Fig. 390.

ciśnienia, zaś linję łączącą środki ciśnienia poszczególnych przekrojów linją ciśnienia.

Jako materiałów przy budowie filarów używamy kamienia, betonu, żelbetu, żelaza. Przy wielkich siłach poziomych jest wskazany materiał o wielkim ciężarze gatunkowym. Jeżeli filar stoi w wodzie, to wypór odgrywa ważną rolę i zmusza nieraz do rozszerzenia podstawy. Wielkość wyporu w zależności od rodzaju gruntu jest najczęściej nieznana. Przyjmujemy go na podstawie doświadczeń laboratoryjnych lub spostrzeżeń w praktyce. Naprężenia dopuszczalne nie powinny być przekroczone, a w tym celu wypadkowa sił zewnętrznych nie powinna bardzo zbliżyć się do krawędzi filaru. Odległość między punktem zaczepienia wypadkowej, a krawędzią powinna być nie mniejsza jak $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$ szerokości szwu.

Przykład. Należy zbadać filar mostowy (fig. 390), na który działają obustronnie sklepienia, t. j. na 1 m szerokości siły $P_1 = 15 \text{ t}$ i $P_2 = 20 \text{ t}$ pod kątem 45° . Ciężar właściwy $2,2 \text{ t/m}^3$.

Składamy ciężary P_1, P_2 i P_3 , przyczem $P_1 = 3 \cdot 1,5 \cdot 1,2 = 9,9 t$, zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy wypadkową R_1 . Obliczamy teraz $P_4^{1/2} = (1,0 + 2,5) 1,6 \cdot 2,2 = 22 t$ i otrzymujemy wypadkową R_2 . Wreszcie wyznaczamy $P_5 = 1,25 \cdot 3 \cdot 1,2 = 8,25 t$, składamy z R_2 i otrzymujemy R_3 . Badamy naprężenia w przekroju aa_1 i bb_1 .

W przekroju aa_1 działa prostopadle do przekroju $R_2' = 56 t$, składowa pionowa siły R_2 .

$$\text{Naprężenie w środku przekroju: } \sigma_0 = \frac{56000}{100 \cdot 250} = 2,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{a największe naprężenie: najw. } \sigma = 2,3 \left(1 + \frac{6 \cdot 20}{1250} \right) = 3,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Pionowa składowa siły $R_3, R_3' = 64 t$, wtedy ciśnienie na grunt w środku przekroju:

$$\sigma_0 = \frac{64000}{100 \cdot 300} = 2,13 \text{ kg/cm}^2, \quad \text{zaś najw. } \sigma = 2,13 \left(1 + \frac{6 \cdot 25}{300} \right) = 3,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Tesame wartości otrzymaliśmy z wykresu.

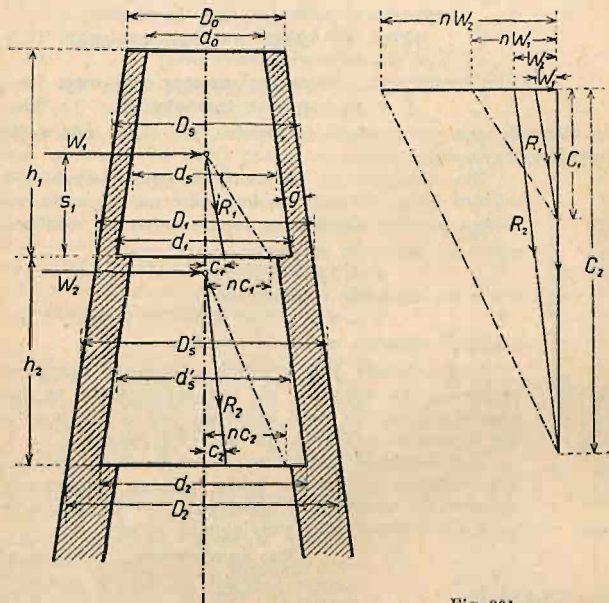


Fig. 391.

Kominy fabryczne. Komin fabryczny składa się z trzonu (słupca), podnóża (odziemia) i fundamentu (posady).

Przekrój trzonu i podnóża jest prawie zawsze kołowy lub ośmioboczny, fundament natomiast prawie zawsze kwadratowy.

Na komin działają: a) ciężar własny, b) parcie wiatru.

Ciężar własny (fig. 391): przy stałej grubości g dla piętra o wysokości h .

$$\left. \begin{aligned} C &= O\gamma = 0,785 (D_s^2 - d_s^2) h \gamma \text{ (dla przekroju kołowego)} \\ &= 0,828 (D_s^2 - d_s^2) h \gamma \text{ (" " ośmiobocznego)} \end{aligned} \right\} \cdot (1)$$

($\gamma = 1650 \text{ kg/cm}^2$ dla muru z cegły zwykłej, 1900 z klinkierów i zendrówek, 2250 dla żelbetu).

$$\text{Parcie wiatru: } W_1 = D_s \cdot h_1 \cdot w \cdot \delta \dots \dots \dots (2)$$

gdzie w parcie wiatru według przepisów M.R.P. przyjmuje się według podanego szkicu (fig. 392, — w Niemczech 150 kg/m^2), δ jest współczynnikiem, uwzględniającym wpływ ześlizgania wiatru i wynosi:

dla kominów okrągłych	$\delta = 0,67,$
" " ośmiobocznych	$\delta = 0,7,$
" " kwadratowych	$\delta = 1,00.$

Trzon powinien u podstawy wykazać najmniej podwójną pewność ($n=2$) przeciw wywrotowi. W żadnym przekroju nie może być naprężenie większe niż podano poniżej.

Na ściskanie: z cegły zwykłej na zaprawie wapiennej	7 kg/cm^2 ,
" " " " wapienno-cementowej	8,5 kg/cm^2 ,
" " " " cementowej	10 kg/cm^2 ,
" maszynowej na zapr. wapiennej	8,5 kg/cm^2 ,
" " " " cem.-wap.	11,0 kg/cm^2 ,
" " " " cementowej	14,0 kg/cm^2 ,
" wyborowej normalnej lub kominowej o	
wytrż. 200 kg/cm^2 na zapr. cem.-wap.	13,5 kg/cm^2 ,
" j. w. na zaprawie cementowej	16 kg/cm^2 ,
z klinkierów (wytrż. 300 kg/cm^2) na zapr. cem.-wap.	16 kg/cm^2 ,
" j. w. na zaprawie cementowej	20 kg/cm^2 .

O ile ciśnienie ma przekraczać te granice, nie może ono dojść do $\frac{1}{10}$ stwierdzonej wytrzymałości muru.

Dla kominów na zaprawie cementowo-wapiennej do wysokości 50 m, jakoteż dla kominów na zaprawie cementowej można przyjąć naprężenia dopuszczalne na rozciąganie:

muru na zaprawie wapienno-cementowej
 $k = 1,5 - 0,05 (H - 30) \text{ kg/cm}^2$,

muru na zaprawie cementowej
 $k = 2,5 - 0,05 (H - 30) \text{ kg/cm}^2$,

gdzie H oznacza wysokość kominu.

Dopuszczalne jest również obliczenie uproszczone przy przyjęciu, że zaprawa nie jest wytrzymała na rozciąganie i szew pęknie. To samo założenie należy przyjmować zawsze dla kominów wyższych niż powyżej podane.

Dla kominów żelbetowych przyjmować należy przy dokładniejszym obliczeniu także różnice temperatury gazów dymowych wewnątrz i powietrza (10°C) zewnątrz¹⁾. Naprężenia dopuszczalne przyjmować należy:

	Przy uwzględnieniu obciążeń, oraz ciepła:	Bez uwzględnienia ciepła:
Beton (na ściskanie)	0,22 K	0,15 K
Żelazo (na rozciąganie)	1200 kg/cm^2	900 kg/cm^2

W powyższem K jest wytrzymałością kostkową betonu.

Obliczenie kominu murowanego przeprowadzamy piętrami, zaczynając od piętra najwyższego.

I tak dla piętra najwyższego mamy:

$$\text{Ramię momentu dla parcia wiatru (fig. 391): } S_1 = \frac{h_1}{3} \cdot \frac{2 D_0 + D_1}{D_0 + D_1} \quad (3)$$

$$\text{moment parcia wiatru: } M_1^w = S_1 W_1 = \frac{1}{6} \delta w h_1^2 (2 D_0 + D_1) \quad (4)$$

$$\text{moment ciężaru własnego: } M_1^g = C_1 \frac{D_1}{2} = O_1 \gamma \cdot \frac{D_1}{2} \quad (5)$$

Z obu tych momentów można znaleźć punkt, w którym wypadkowa z ciężaru własnego i wiatru przecina podstawę:

¹⁾ Por. Döring: „Wind und Wärme bei der Berechnung hoher Schornsteine aus Eisenbeton“ i art. Mörscha (Beton und Eisen, 1925, str. 377).

$$M_1^w = C_1 c, \quad \text{a stąd: } c = \frac{M_1^w}{C_1} \dots \dots \dots (6)$$

wreszcie naprężenia krawędziowe obliczamy z wzorów:

$$\begin{aligned} \text{najw. } \sigma_1^{\max} &= \sigma_0 \left(1 + \frac{c}{r} \right) \\ \text{najmn. } \sigma_2^{\min} &= \sigma_0 \left(1 - \frac{c}{r} \right) \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

gdzie r jest promieniem rdzennym i wynosi:

$$\begin{aligned} \text{dla przekroju kołowego: } r &= \frac{W}{F} = \frac{1}{8} \left(D_1 + \frac{d_1^2}{D_1} \right) \\ \text{" " ośmiobocznego: } r &= 0,133 \left(D_1 + \frac{d_1^2}{D_1} \right) \end{aligned} \dots \dots \dots (8)$$

Zupełnie tak samo postępujemy dla niższych pierścieni, przyczem należy pamiętać, że parcie wiatru, jakoteż ciężar własny uwzględnić musimy dla całej górnej części kominu ponad danym przekrojem.

Wypadkowa R z ciężaru własnego C i parcia wiatru W nie powinna wychodzić z rdzenia ($c < r$).

W wypadku przeciwnym występują ciągnienia, które według przepisów M. R. P. nie powinny przekraczać wyżej podanych wartości.

Tak samo obliczamy wszystkie bębny i trzon, wreszcie badamy stałość całego kominu. Ponieważ w fundamencie nie możemy dopuścić żadnego ciągnienia, więc wypadkowa na fundament nie może wychodzić z rdzenia.

Obecnie przy coraz szerszym zastosowaniu żelbetu do budowy kominów fabrycznych, dopuszczamy ciągnienia znacznie większe, które w całości muszą być przeniesione przez wkładki żelazne. Z powodu znacznej wytrzymałości żelaza na ciągnienie grubość kominów może być mała. Naprężenia sprawdzamy na podstawie wzorów podanych w żelbetnictwie dla obciążenia mimośrodowego, dla których położenie osi obojętnej najłatwiej jest wyznaczyć wykreślnie.

Przykład. Niech będzie wysokość kominu $H = 30$ m. Wymiary podane zresztą na fig. 393. Użyto cegły promieniówki na zaprawie półcementowej ($\gamma = 1800$), podnoże z cegieł zwykłych ($\gamma = 1650$), fundament z betonu ($\gamma = 2400 \text{ kg/cm}^2$).

Parcie wiatru na trzon wynosi:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0,75 \cdot \frac{1,10 + 1,00}{2} \cdot 15 \cdot \frac{130 + 100}{2} + \\ &+ 0,75 \cdot \frac{1,91 + 2,4}{2} \cdot 9 \cdot 100 = 1825 + 1117 = 2942 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Parcie wiatru na podnoże (przekrój ośmioboczny):

$$P_2 = 0,89 \cdot 100 \cdot 2,72 \cdot 600 = 1452 \text{ kg}^1).$$

¹⁾ Obliczenie wykonane wedle dawniej obowiązujących przepisów. Obecnie należy przyjmować δ nie 0,89, ale 0,7 (por. str. 1288).

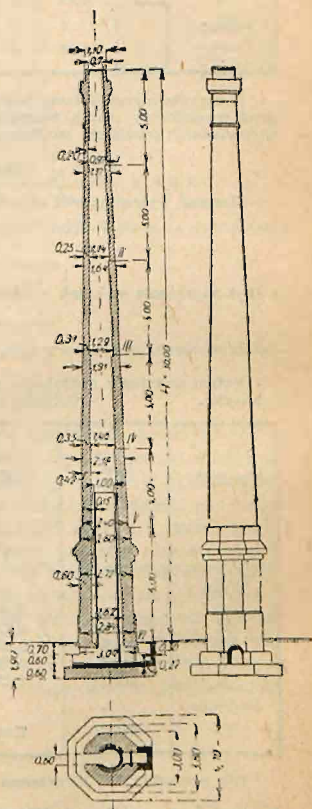


Fig. 393.

Obliczać będziemy naprężenie w wysokości każdej odsadzki komina, więc w przekrojach I, II i III. W tym celu znaleźć należy ciężar każdego pierścienia i parcie wiatru na jego powierzchnię. Zestawiamy dane wyniki w następującej tabelce:

Przekrój poziomy	Grubość ścian	Powierzchnia średniego przekroju ¹⁾	Wysokość h	Objętość $O = F_3 h$	Ciężar gątowników	Ciężar $C = O \cdot \gamma$	Ciężar wszystkich pierścieni górnych ΣC	Powierzchnia podstawy T	Cisnienie jednostkowe σ_0
	cm	m ²	m	m ³	kg/m ³	kg	kg	m ²	kg/cm ²
Trzon									
I	20	0,66	5	3,30	1800	5940	5940	0,73	0,8
II	25	0,99	5	4,95	1800	8910	14850	1,09	1,4
III	31	1,43	5	7,15	1800	12870	27730	1,58	1,8
IV	36	1,91	6	9,55	1800	17190	44920	2,06	2,2
V	42	2,47	4	9,88	1800	17780	62700	2,61	2,4
Podnóże									
VI		4,31	6	25,86	1650	42870	105070	4,47	2,4

Następnie uwzględniamy naprężenia, powstające wskutek parcia wiatru na komin. Moment wypadkowy parcia wiatru na poszczególne części komina, mierzone od szczytu do odpowiednich odsadzek, znajdziemy (4) w kgm :

$$M_n^w = \frac{1}{6} 0,75 w \cdot h_n^2 (2D_3 + D_1) = \frac{1}{8} w h_n^2 (2D_0 + D_1) \dots \dots \dots (9)$$

Moment wytrzymałości odpowiedniego przekroju (I, II, ...) wynosi:

$$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^3 - d^3}{D} \dots \dots \dots (10)$$

a stąd naprężenia wskutek ciśnienia wiatru: $\sigma_w = \pm \frac{M_n^w}{W}$.

Jeżeli momenty obliczono w kgm , a W w m^3 , to: $\sigma_w = \pm \frac{M_n^w}{10000 W} \dots \dots \dots (11)$

Potem dodajemy naprężenia wskutek ciężaru własnego i wiatru. Otrzymujemy następującą tabliczkę.

Przekrój	M_n^w	W	σ_w (11)	Skrajne naprężenia	
				najw. $\sigma = \sigma_0 + \sigma_w$	najmn. $\sigma = \sigma_0 - \sigma_w$
	kg/m	m ³	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²
Trzon					
I	1394	0,192	0,7	1,5	0,1
II	5760	0,338	1,7	3,1	— 0,3
III	13520	0,552	2,5	4,3	— 0,7
IV	21423	0,828	2,6	4,8	— 0,4
V	38380	1,130	3,4	5,8	— 1,0
Podnóże					
VI	67952	2,06	3,3	5,7	— 0,9

Dla przekroju IV. otrzymamy:

$$M_n^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left(5 + \frac{15}{3} \frac{2 \cdot 111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 5 (1,91 + 2,18) \cdot 100 \frac{5}{3} = 21423.$$

¹⁾ Dla trzonu wedle wzoru $(D_s^2 - d_s^2) \frac{\pi}{4}$, dla podnóża wedle wzoru $0,828 D^2 - d^2 \frac{\pi}{4}$.

Dla przekroju V.:

$$M_5^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left(9 + \frac{15}{3} \frac{2,111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \\ + \frac{1}{2} 0,75 \frac{9^2}{3} (2 \cdot 1,91 + 2 \cdot 80) 100 = 38380.$$

Dla podnóża mamy:

$$M_{II} = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left(15 + \frac{15}{3} \frac{2 \cdot 1,11 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \\ + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 9 (6 + 3) (2 \cdot 1,91 + 2,80) \cdot 100 + 4,31 \cdot 6 \cdot 100 \frac{6}{3} = 42670 + 20110 + 5172 = 67952.$$

$$W = 0,101 D^3 - 0,091 \frac{d^3}{D} = 2,06 m^3.$$

Obliczenie fundamentu:

Ciężar słupa i podnóża	= 105370 kg
Ciężar murów fundamentowych z cegły		
$(0,828 (3,00^2 \cdot 0,70 + 3,80^2 \cdot 0,60) - 1,50^2 \frac{\pi}{4} 1,08)$	1600	= 16768 kg
Ciężar ścianki $(1,3^2 - 1,0^2) \frac{\pi}{4} 8,0$	1600	= 6936 kg
Ciężar ławy betonowej: $0,828 \cdot 4,7^2 \cdot 0,6$	2200	= 24144 kg
	Razem	163218 kg

Powierzchnia podstawy: $0,828 \cdot 4,7^2 = 18,29 m^2$.

Naprężenie od ciężaru własnego: $\frac{163218}{182900} = 0,85 kg/cm^2$.

Moment wiatru względem podstawy fundamentu:

$$M_p^w = \frac{1}{2} 0,75 (1,11 + 1,91) 15 \cdot 115 \left(16,9 + \frac{15}{3} \frac{2,111 + 1,91}{1,11 + 1,91} \right) + \frac{1}{2} 0,75 \cdot 9 (7,9 + 3) \cdot \\ \cdot (2 \cdot 2,91 + 2,80) \cdot 100 + 4,31 \cdot 6 \cdot 100 \left(1,9 + \frac{6}{3} \right) = 46390 + 24360 + 10090 = 80830 kym.$$

Moment wytrzymałości podstawy: $W = 0,0982 \cdot 4,7^2 = 10,19$.

Naprężenie wskutek wiatru: $\frac{80830}{101900} = 0,8 kg/cm^2$.

Największe ciśnienie na grunt: $6 = 0,85 + 0,8 = 1,65 kg/cm^2$.

Najmniejsze ciśnienie: $0,85 - 0,8 = 0,05 kg/cm^2$.

F. Belki ciągłe o ściance pełnej.

Są to belki proste, podparte na więcej, niż dwu łożyskach, z których tylko jedno jest stałe (por. str. 1132 i 1185). Jako utwory hiperstatyczne można je obliczać na zasadzie ogólnych równań sprężystości (por. str. 1258). Sposobu tego używa się czasem do wykreślenia linii wpływowych oddziaływania belki dwuprzęsłowej (por. str. 1263). Zwykle jednak wychodzimy z twierdzenia Mohra (por. str. 1124) i obliczamy belki ciągłe przy pomocy równań trzech momentów (sposób analityczny) lub też przy pomocy punktów stałych (sposób wykresalny). W tym ostatnim wypadku stosuje się najczęściej linie krzyżowe.

W przypadkach prostych, często w praktyce się zdarzających (ciężar jednostajnie rozłożony stały lub ruchomy, ciężary skupione w równych odstępach), można z korzyścią użyć tablic liczbowych. Punktem wyjścia do teoretycznych rozważań, a zarazem specjalnym i najprostszym przypadkiem belki ciągłej jest belka utwierdzona.

Obliczenie analityczne.

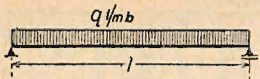
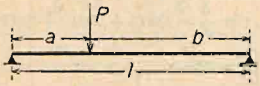
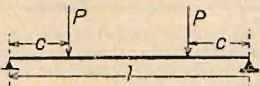
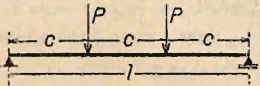
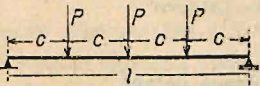
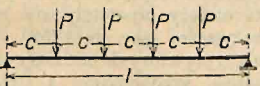
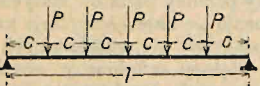
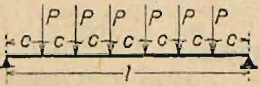
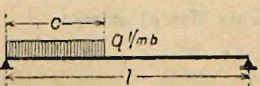
Napisał

dr. inż. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

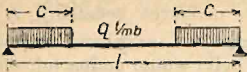
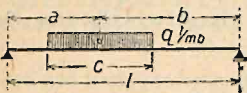



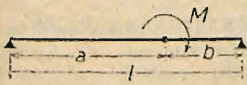
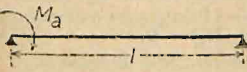
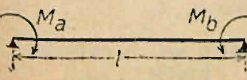
Wedle równania 79 (str. 1124, twierdzenie Mohra) mamy:

$$\tau = \frac{R_m}{EJ} \quad \dots \quad (1)$$

Tablica I.

1		$[A_0] = [B_0] = \frac{ql^3}{24}$
2		$[A_0] = P \cdot \frac{ab(l+b)}{6l}$ $[B_0] = P \cdot \frac{ab(l+a)}{6l}$
3	dla $a=b$	$[A_0] = [B_0] = \frac{Pl^2}{16}$
4		$[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} Pc(l-c)$
5		Dla $c = l/3$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{9} Pl^2$
6		Dla $c = l/4$ $[A_0] = [B_0] = \frac{5}{32} Pl^2$
7		Dla $c = l/5$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{5} Pl^2$
8		Dla $c = l/6$ $[A_0] = [B_0] = \frac{35}{144} Pl^2$
9		Dla $c = l/7$ $[A_0] = [B_0] = \frac{2}{7} Pl^2$
10		$[A_0] = \frac{qc^2(2l-c)^2}{24l}$ $[B_0] = \frac{qc^2(2l^2-c^2)}{24l}$

Tablica I.

11		$[A_0] = [B_0] = \frac{qc^2}{12} (3l - 2c)$
12		$[A_0] = \frac{qcb}{6l} \left[a(l+b) - \left(\frac{1}{2} c \right)^2 \right]$ $[B_0] = \frac{qca}{6l} \left[b(l+a) - \left(\frac{1}{2} c \right)^2 \right]$
13	dla $a=b=l/2$	$[A_0] = [B_0] = \frac{qc}{48} (3l^2 - c^2)$
14		$[A_0] = \frac{qlc^2}{36} \left[2,0 - 1,5 \cdot \frac{c}{l} + 0,3 \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right]$ $[B_0] = \frac{qlc^2}{36} \left[1,0 - 0,3 \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right]$
15	dla $c=l$	$[A_0] = \frac{ql^3}{45,0}$ $[B_0] = \frac{ql^3}{51,4}$
16		$[A_0] = [B_0] = \frac{ql^3}{38,4}$
17		$[A_0] = [B_0] = \frac{ql^3}{64}$
18		$[A_0] = -\frac{Ml}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]$ $[B_0] = +\frac{Ml}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$
19		$[A_0] = M_a \cdot \frac{l}{3}$ $[B_0] = M_a \cdot \frac{l}{6}$
20		$[A_0] = \frac{1}{6} l (2M_a + M_b)$ $[B_0] = \frac{1}{6} l (2M_b + M_a)$

Czyli: kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia na podporze belki jest proporcjonalny do reakcji, jaką otrzymamy na tejże podporze, uważając powierzchnie momentów jako obciążenie belki. Reakcje te oznaczamy będziemy $R_m = [A]$ lub $[B]$, zależnie od podpory — lewej czy prawej — przyczem wartości $[A_0]$ i $[B_0]$ odnoszą się będą do figury momentów belki wolno podpartej, statycznie wyznaczalnej. Dla zasadniczych wypadków obciążenia belki podajemy wartości $[A_0]$ i $[B_0]$ w tablicy I.

1. Belka jednym końcem sztywnie utwierdzona (fig. 394). Na podstawie twierdzenia (1) otrzymujemy:

$$\tau_a = \frac{R_m^a}{EJ} = \frac{[A]}{EJ} = 0,$$

czyli $[A] = 0$;

a ponieważ w tym wypadku na podstawie tablicy I. pod 19:

$$[A] = [A_0] + M_a \frac{l}{3} = 0,$$

stad moment podporowy:

$$M_a = -\frac{3[A_0]}{l}.$$

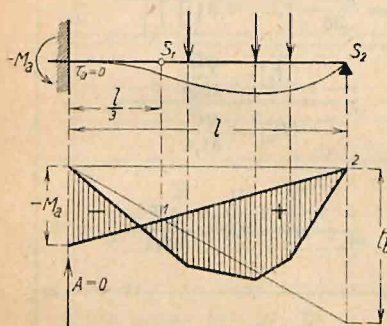


Fig. 394.

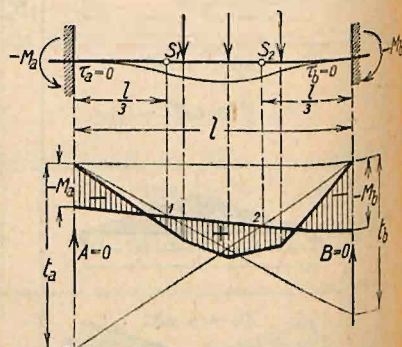


Fig. 395.

Moment ten da się obliczyć na podstawie wartości $[A_0]$, podanych w tablicy I. (por. str. 1130).

2. Belka obustronnie sztywnie utwierdzona (fig. 395). Analogicznie do poprzedniego:

$$[A] = 0, \quad [B] = 0,$$

a ponieważ według tablicy I. pod 20:

$$[A] = [A_0] + \frac{1}{6} l (2 M_a + M_b) = 0$$

$$i \quad [B] = [B_0] + \frac{1}{6} l (2 M_b + M_a) = 0,$$

więc szukane momenty podporowe:

$$M_a = -\frac{2(2[A_0] - [B_0])}{l}, \quad M_b = -\frac{2(2[B_0] - [A_0])}{l}.$$

W szczególnym wypadku, dla obciążenia symetrycznego, gdy $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} F_0$, gdzie F_0 oznacza powierzchnię momentów statycznie wyznaczalnych (jak dla belki wolno podpartej):

$$M_a = M_b = -\frac{F_0}{l}.$$

3. Belki ciągłe. a) Przekrój na całej długości belki stały. Dla środkowej podpory każdej pary sąsiednich przęseł (fig. 396) $\tau_1 = -\tau_2$, czyli

$$\tau_1 + \tau_2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Biorąc pod uwagę twierdzenie (1) i podstawiając w równaniu powyższem:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ} \quad \dots \quad (3)$$

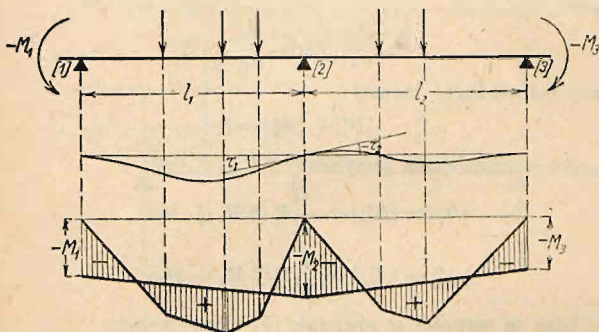


Fig. 396.

gdzie na podstawie tablicy I. pod 20:

$$[B_1] = [B_{01}] + \frac{1}{6} l_1 (2 M_2 + M_1)$$

i

$$[A_2] = [A_{02}] + \frac{1}{6} l_2 (2 M_2 + M_3),$$

otrzymamy znane ogólnie równanie trzech momentów w formie:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6 [C_{02}] = 0 \quad \dots \quad (4)$$

gdzie $[C_{02}] = [B_{01}] + [A_{02}]$ i dla obciążeń według tablicy I. da się obliczyć.

Ustawiając równanie (4) dla każdej pary sąsiednich przęseł otrzymamy tyle równań, ile jest niewiadomych momentów podporowych; z tych więc równań momenty te dadzą się obliczyć.

W razie, jeżeli koniec belki nie jest wolno podparty, ale sztywnie utwierdzony, należy po stronie utwierdzenia dodać przęsło nieobciążone, na końcu wolno podparte o rozpiętości $l = 0$, i wprowadzić je do rachunku przy pomocy równań (4).

Po wyznaczeniu momentów podporowych moment w dowolnym przekroju przęsła w odległości x od lewej podpory:

$$M_x = M_0 + M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l},$$

a siła poprzeczna w tym przekroju:

$$T_x = T_0 + \frac{M_b - M_a}{l},$$

gdzie M_0 i T_0 odnoszą się do belki statycznie wyznaczalnej, a M_a i M_b oznaczają momenty podporowe na lewej i prawej podporze przeszła.

b) Przekrój wzdłuż każdej rozpiętości stały w każdym jednak przęśle inny. Niechaj dla danej pary sąsiednich przęseł (fig. 396) o rozpiętościach l_1 i l_2 moment bezwładności przekroju belki wynosi w pierwszym przęśle J_1 , w drugim J_2 .

Zamiast równań (3) otrzymamy:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ_1}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ_2}.$$

Mnożąc z uwzględnieniem równania (2) dla uproszczenia rachunku powyższe wartości przez dowolnie obraną stałą wartość J_0 (zwykle równą J_{\min} danego układu lub najczęściej się powtarzającej w tym układzie wartości J), otrzymamy:

$$[B_1] \frac{J_0}{J_1} + [A_2] \frac{J_0}{J_2} = 0,$$

co możemy też oznaczyć inaczej:

$$[B'_1] + [A'_2] = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Przy takim znakowaniu otrzymamy:

$$[B'_1] = [B'_{01}] + \frac{1}{6} l'_1 (2M_2 + M_1)$$

$$[A'_2] = [A'_{02}] + \frac{1}{6} l'_2 (2M_2 + M_3),$$

a podstawiając te wartości w równanie (5) i oznaczając:

$$[B'_{01}] + [A'_{02}] = [C'_{02}],$$

dojdziemy do równania trzech momentów w formie:

$$M_1 l'_1 + 2M_2 (l'_1 + l'_2) + M_3 l'_2 + 6[C'_{02}] = 0,$$

gdzie każda z kreskowanych wartości uwzględnia czynnik $\frac{J_0}{J_1}$ lub $\frac{J_0}{J_2}$, zależnie od rozpiętości, do której się odnosi, a więc:

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= l_1 \frac{J_0}{J_1}; & l'_2 &= l_2 \frac{J_0}{J_2}; \\ [B'_{01}] &= [B_{01}] \frac{J_0}{J_1}; & [A'_{02}] &= [A_{02}] \frac{J_0}{J_2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (6)$$

Dalsze zastosowanie równania (6) jest analogiczne do tego, co powiedziano o równaniu (4).

Przykład. Belka ciągła dwuprzęsłowa (fig. 397).

Stosunek momentów bezwładności $J_1 : J_2 = 4 : 5$. Oba przęsła obciążone na całej swej długości ciężarem jednostajnym $g = 200 \text{ kg/m}$, ponadto lewe przęsło obciążone całkowicie ciężarem ciągłym jednostkowym $p = 500 \text{ kg/m}$ i ciężarem skupionym $P = 3000 \text{ kg}$ w odległości $a = 3,2 \text{ m}$ od lewej podpory. Znaleźć momenty podporowe, moment w miejscu działania siły P i oddziaływania A , B i C .

Przyjmijmy $J_0 = J_1$, to $l'_1 = l_1 = 8 \text{ m}$, $l'_2 = l_2 \frac{J_1}{J_2} = 12 \cdot \frac{4}{5} = 9,6 \text{ m}$.

Moment podporowy M_C z uwagi na $M_A = 0$ i $M_B = 0$ znajdziemy z równania:

$$2M_C (l'_1 + l'_2) = -6[B_{01}] - 6[A_{02}],$$

przyczem wedle tabl. 1., pozycji 1 i 2, jest:

$$[B_{01}] = \frac{1}{24} (g + p) l_1^3 + P \frac{a(l_1 - a)(l_1 + a)}{6l} = \frac{1}{24} \cdot (200 + 500) \cdot 8^3 + 3000 \frac{3,2 \cdot 4,8 \cdot 11,2}{6 \cdot 8} =$$

$$= \frac{760}{3} \cdot 64 + 10752 = 25652 \text{ kgm}^2.$$

$$[A_{02}] = \frac{1}{24} g l_2^3 \frac{J_0}{J_2} = \frac{1}{24} \cdot 200 \cdot 12^3 \cdot \frac{4}{5} = 100 \cdot 144 \cdot \frac{4}{5} = 11500 \text{ kgm}^2.$$

$$[B_{01}] + [A_{02}] = 37152 \text{ kg m}^2, \quad l_1' + l_2' = 8 + 9,6 = 17,6 \text{ m}.$$

$$M_C = -\frac{6 \cdot 37152}{2 \cdot 17,6} = -6320 \text{ kg'm} = -6,32 \text{ tm}.$$

Oddziaływanie lewej podpory:

$$A = A_0 + \frac{M_C}{l_1},$$

$$A_0 = \frac{1}{2} (g + p) l_1 + \frac{l_1 - a}{l_1} P = \frac{1}{2} 0,7 \cdot 8 + \frac{4,8}{8} 3,0 = 2,8 + 1,8 = 4,6 \text{ t}.$$

$$M_C : l_1 = -6,32 : 8 = -0,79, \quad A = 4,60 - 0,79 = 3,81 \text{ t}.$$

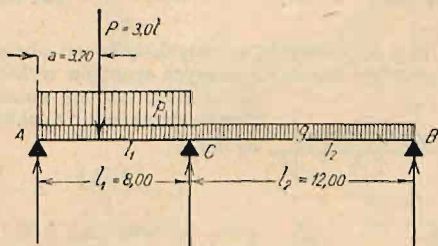


Fig. 397.

$$\text{Podobnie: } B = \frac{1}{2} g l_2 + \frac{M_C}{l_2} = \frac{0,2}{2} 8 - \frac{6,32}{12} = 0,8 - 0,527 = 0,273 \text{ t}.$$

Oddziaływanie środkowej podpory:

$$C = (g + p) l_1 + g l_2 + P - A - B = 0,7 \cdot 8 + 0,2 \cdot 12 + 3,0 - 3,81 - 0,273 =$$

$$= 5,6 + 2,4 + 3,0 - 4,083 = 6,917 \text{ t}.$$

Moment w miejscu działania siły P w odległości a od podpory A .

$$M_a = A \cdot a - \frac{a^2}{2} (g + p) = a \left[A - \frac{a}{2} (g + p) \right] = a (3,81 - \frac{1}{2} 3,2 \cdot 0,7) =$$

$$= 3,2 (3,81 - 1,12) = 3,2 \cdot 2,69 = 8,6 \text{ tm}.$$

Metoda wykreślna.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Obliczanie wykreślnie belek ciągłych polega na wyznaczeniu punktów stałych i linii krzyżowych. W każdym prześle belki mamy dwa punkty stałe i dwie linie krzyżowe; rzutując punkty stałe na górną część linii krzyżowych, otrzymujemy na tych ostatnich dwa punkty, przez które przechodzi prosta momentów podporowych, wywołanych obciążeniem danego przesła.

Punkt stały danego przesła jest to punkt, w którym moment = 0, gdy na jeden z końców przesła działa moment dowolny, a zresztą przesło jest nieobciążone.

Dla dwóch podpór otrzymujemy przeto dwa punkty stałe: S_1 i S_2 (fig. 398 i 399). Położenie tych punktów od wielkości momentów M_b i M_a nie zależy (stąd nazwa: „punkty stałe”), — zależy natomiast od sposobu podparcia i utwierdzenia belki na przyległej, bliższej punktu stałego podporze. I tak: dla belki w punkcie A wolno podpartej $s_1 = 0$, dla belki w tym punkcie sztywnie utwierdzonej $s_1 = \frac{1}{3} l$, dla częściowego natomiast

utwierdzenia (np. z powodu obecności poza punktem A sąsiedniego przesła) wartość s_1 leży w granicach od 0 do $\frac{1}{3}l$, a wyznaczenie jej por. poniżej.

To samo odnosi się i do wartości s_2 , oraz przyległej jej podpory B . Na fig. 398 i 399 stopień utwierdzenia belki na podporach oznaczony jest ogólnie literami u_a i u_b .

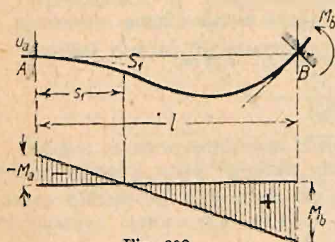


Fig. 398.

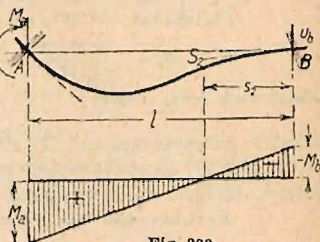


Fig. 399.

Co się tyczy linii krzyżowych, zależnych tylko od obciążenia belki, to dadzą się one wyznaczyć zapomocą znanych sposobów wykreślnych (fig. 400, 401 i 402), lub też analitycznie na podstawie odcinków t_a i t_b , obliczonych z wzoru ogólnego:

$$t_a = \frac{6[B_0]}{l}, \quad t_b = \frac{6[A_0]}{l} \quad \dots (7)$$

gdzie wartości $[A_0]$ i $[B_0]$ dla rozmaitych rodzajów obciążenia podane są w tablicy I.

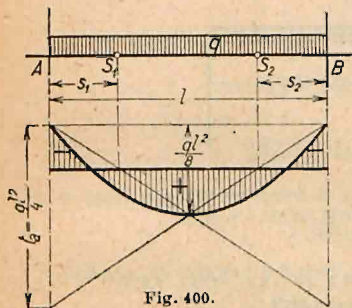


Fig. 400.

stały S_1 . Przez otrzymany w ten sposób punkt 1 oraz punkt 2, spadający w tym wypadku z prawą podporą belki kreślimy prostą 1—2 momentu podporowego M_a .

O ile obciążenie belki da się rozłożyć na stany obciążenia, odpowiadające fig. 400, 401 i 402, wartość t_b można znaleźć także wykreślnie, co jednak się opłaca tylko w wypadkach mniej skomplikowanych.

2. Belka obustronnie sztywnie utwierdzona. Punkty stałe S_1 i S_2 (fig. 395) leżą w odległościach $s_1 = s_2 = \frac{1}{3}l$ od podpór. Po wyznaczeniu linii krzyżowych zapomocą odcinków t_a i t_b (jak poprzednio) i odrzutowaniu punktów stałych, otrzymujemy prostą 1—2 momentów podporowych M_a i M_b .

3. Belki ciągłe. a) Przekrój na całej długości belki stały. Wyznaczenie punktów stałych odbywa się albo:

α) wykreślnie — zapomocą znanej konstrukcji, uwidocznionej na fig. 406, zaczynając od pierwszej lub ostatniej podpory, gdzie pierwsza prosta I lub I' o kierunku dowolnym, wychodzi z punktu stałego pierwszego przesła (który dla belki na końcu wolno podpartej spada z tą podporą, a dla belki na końcu sztywnie utwierdzonej leży w $\frac{1}{3}l$ od podpory), lub też

β) analitycznie — na podstawie wzoru:

$$s = \frac{l}{3 + \frac{l'}{l} \left(2 - \frac{s'}{l' - s'} \right)} \dots \dots \dots (8)$$

w którym wartości kreskowane odnoszą się do przęsła poprzedniego, a niekreskowane do tego przęsła, w którym s obliczamy. Idąc od początku belki i podstawiając $s' = s_1'$, znajdujemy wartości $s = s_1$; idąc od końca belki dla $s' = s_2'$, otrzymamy wartości $s = s_2$.

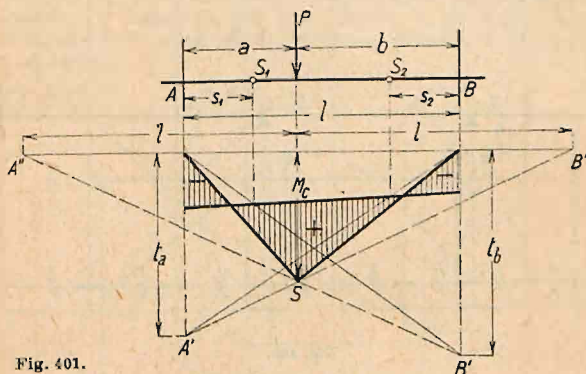


Fig. 401.

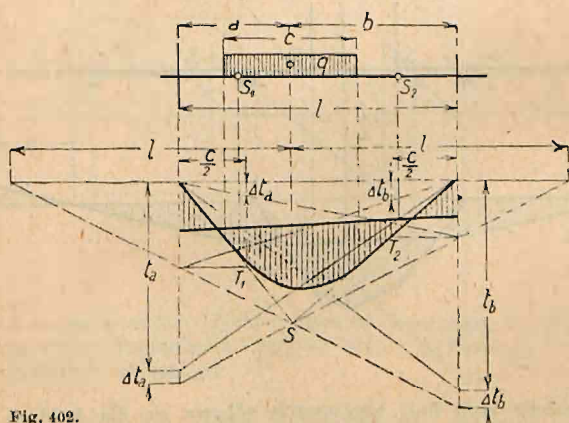


Fig. 402.

Linje krzyżowe wyznaczamy sposobem poprzednio już omówionym, zaznaczyć jednak należy, że za każdym razem badamy belkę obciążoną w jednym tylko przęśle, wyznaczając wpływ tego obciążenia na przęsła nieobciążone zapomocą prostych, wychodzących z otrzymanych w przęśle obciążonem wartości M_a i M_b , a przechodzących przez następne (w stosunku do przęsła obciążonego) punkty stałe (fig. 404). Otrzymane w ten sposób, przy obciążeniu poszczególnych przęseł, momenty podporowe dla równoczesnego obciążenia całej belki sumujemy na podporach z uwzględnieniem znaku, pamiętając o tem, że pomiędzy podporami wpływ tych momentów na belkę rozkłada się wedle linii prostej.

b) Przekrój w każdym przęśle inny, w obrębie jednak przęsła stały.

W stosunku do poprzedniego zmianie ulega tylko sposób wyznaczenia punktów stałych. Wykreślnie otrzymujemy je zapomocą pewnego rodzaju linii krzyżowych (o innym jednak niż poprzednio znaczeniu), a według fig. 405 a i b zastępują one nie nadającą się już w tym wypadku konstrukcję, podaną na fig. 405.

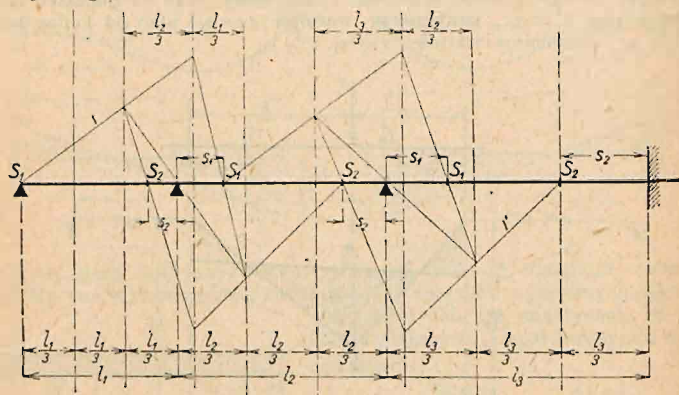


Fig. 403.

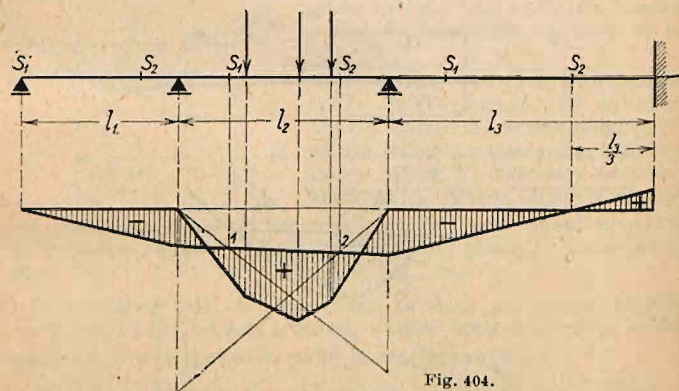


Fig. 404.

Wyznaczenie tych linii krzyżowych odbywa się dla każdego przęsła z osobna na podstawie wartości z , którą obliczamy z wzoru:

$$z = \frac{J_0}{J} l^2,$$

gdzie l i J odnoszą się do danego przęsła, a J_0 jest dowolną wartością dla wszystkich przęseł stałą (por. ustęp 3 b, str. 1296).

Analityczne wyznaczenie punktów stałych odbywa się w tym wypadku zapomocą podobnego do (8) wzoru:

$$s = \frac{l}{3 + k \left(2 - \frac{s'}{l - s'} \right)},$$

gdzie w mianowniku zamiast wartości l'/l występuje współczynnik:

$$k = \frac{l'}{l} \cdot \frac{J}{J'},$$

przyczem tak samo jak i poprzednio wartości kreskowane odnoszą się do przęsła poprzedniego, a niekreskowane — do tego przęsła, w którym s obliczamy.

Właściwe linje krzyżowe, zapomocą których przez odrzutowanie punktów stałych znajdujemy proste momentów podporowych, nie zależą od przekroju belki i sposobu jej podparcia, lub utwierdzenia, to też dalsze zastosowanie ich w obliczeniu tych belek nie ulega żadnej zmianie, a więc było już poprzednio omówione.

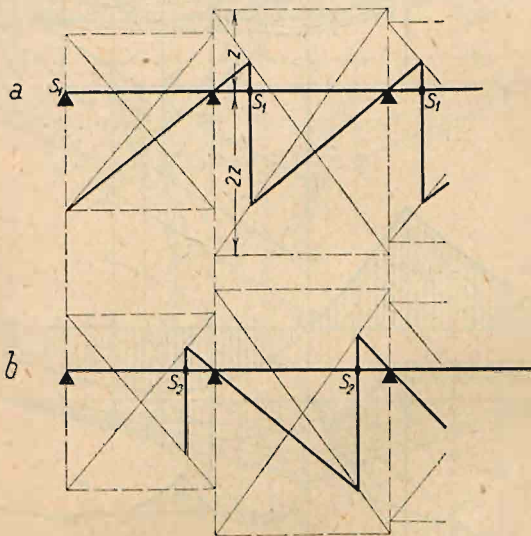


Fig. 405.

Z konieczności pomijamy belki o przekroju zmiennym w każdym punkcie, jakoteż wpływ przesunięcia i ugięcia podpór (p. Straßner, Der einfache und durchlaufende Balken).

Linje wpływowe.

a) Linje wpływowe momentów (fig. 406). Wykreślić linję wpływową momentu dla przekroju l_2 w przęśle l_2 belki ciągłej na 5 podporach.

W tym celu dzielimy przęsło l_2 na 8 równych części i wykreślamy dla położenia w 1, 2, 3... (fig. a) ciężaru ruchomego skupionego $P=1$ linje momentów M_0 belki wolno podpartej. Linje te otrzymamy, dzieląc w wieloboku sił (fig. b) siłę $P=1$ na 8 równych części i wykreślając dla biegunów $O_1, O_2, O_3 \dots$, umieszczonych naprzeciw punktów podziału w odległości H wieloboki sznurowe. Dla tak otrzymanych powierzchni momentów wykreślimy linje krzyżowe $b_1, c_1, b_2, c_2 \dots$ (fig. a), które odcinają na stałych linjach S_1, S_2 punkty, przez które przechodzą zamykające odpowiednich powierzchni momentów. Z otrzymanych tym sposobem powierzchni momen-

tów M dla poszczególnych położań P w punktach 1, 2, 3... przesła znajdziemy momenty w przekroju, oznaczone na fig. *a* czarnymi punktami. Po naniesieniu tych momentów jako rzędnych punktów 1, 2, 3, 4... otrzymamy gałąź b' , c' wpływowej momentu M_2 (fig. *e*).

Celem otrzymania gałęzi wpływowej M_2 w przesłach l_1 wykreślamy linie krzyżowe dla przesła l_1 (fig. *c*), tudzież zamykające w przesłach l_1 i l_2 .

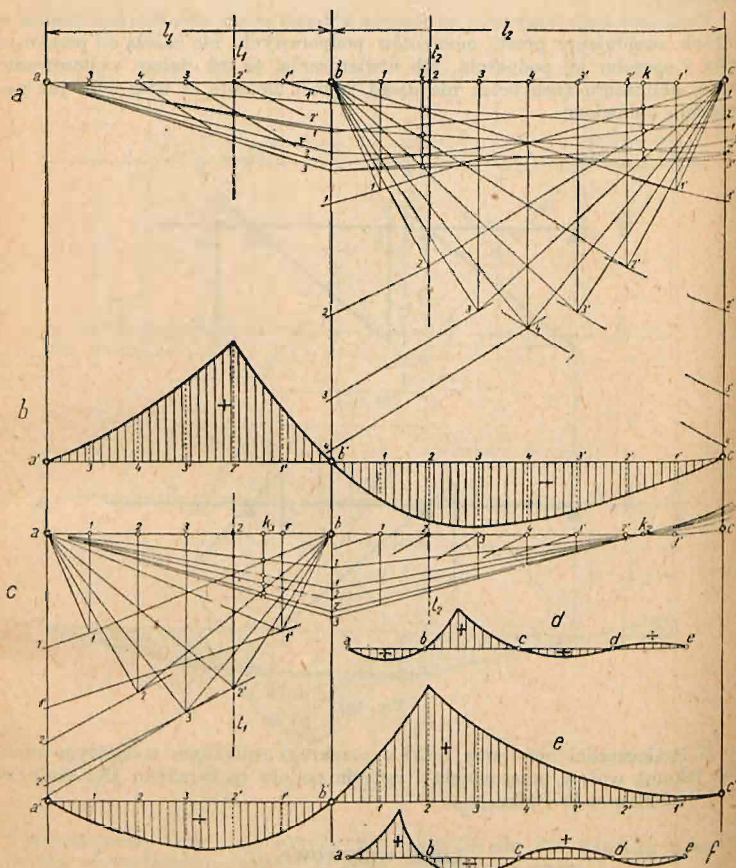


Fig. 406.

Rzędne momentu M_2 (oznaczone na fig. *c* czarnymi punktami), przeniesione pod punkty 1', 2', 3'... przesła l_1 , tworzą część wpływowej M_2 w tem przesłach (fig. *e*).

Fig. 184 *d* wskazuje przebieg wpływowej M_2 w przesłach l_3 i l_4 .

W podobny sposób wykreślimy wpływową momentu M_2' dla przekroju t_1 przesła l_1 . Rzędne momentu M_2' dla gałęzi $a'b'$ oznaczone są czarnymi punktami na fig. *c*, zaś dla gałęzi $b'c'$ na fig. *a*.

b) Linje wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań (fig. 407). Po znalezieniu linii momentów belki ciągłej dla kolejnych położań w przesłach l_2

Największy moment dodatni w przekroju zewnątrz punktów stałych powstaje podczas obciążenia przesła przekrojonego między punktem granicznym, a najbliższą podporą, pozostała zaś część przesła ma pozostać nieobciążona. Oprócz tego reszta przesła ma być naprzemian nieobciążona i obciążona. Uzupełniające obciążenie wywołuje największy moment ujemny.

Tablice.

Dla użytku praktyki podajemy na końcu działu: „Statyka budowli” tablice do obliczenia belek ciągłych (i belek utwierdzonych), obciążonych ciężarem jednostajnym g , rozłożonym na całej długości belki, ciężarem jednostajnym częściowym p , oraz ciężarami skupionymi G .

Tablice A podają momenty zgięcia siły poprzeczne i oddziaływania w różnych przekrojach belki ciągłej (2-, 3- i 4-przesłowej o przesłach różnych) pod obciążeniem stałym g , obciążeniem ruchomym p i pod ciężarami skupionymi G , stojącymi w różnych odstępach.

Tablice B podają rzędne linii wpływowych belki obustronnie utwierdzonej, oraz belki ciągłej 2- i 3-przesłowej o rozpiętościach równych i nierównych (przy stosunku przesła 1:1, 1:1,2, 1:1,5, oraz 1:1:1, 1:1,2:1, 1:1,5:1).

Przykład. Obliczyć największe momenty i oddziaływania belki ciągłej dwuprzesłowej o rozpiętościach podporowych $l = 8,00 \text{ m}$, $l_1 = 12,00 \text{ m}$, dla obciążenia stałego $g = 0,2 \text{ t/m}$, użytkowego $p = 0,5 \text{ t/m}$; oraz ciężaru skupionego stałego $G = 3,0 \text{ t}$, działającego w odległości $a = \xi l = 0,4 l$ (por. przykład str. 1296).

Do obliczenia używamy tablicy 4., ułożonej dla założenia, iż momenty bezwładności przekrojów belki są stałe i sobie równe.

Stosunek rozpiętości $n = l_1 : l = 12,0 : 8,0 = 1,5$ dla największego momentu dodatniego w prześle l otrzymamy:

$$M_1 = (\sum Fg + Fg)l^2 + G\eta l = (0,0325 \cdot 0,2 + 0,100 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 + 3,0 \cdot 0,2131 \cdot 8,0 = 8,616 + 5,1144 = 8,7304 \text{ tm};$$

dla największego momentu dodatniego w prześle l_1 :

$$M_2 = (\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = (0,1825 \cdot 0,2 + 0,2025 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0156 \cdot 8,0 = 8,44 \text{ tm};$$

dla największego momentu podporowego:

a) prześło l obciążone:

$$M_c = -(\sum Fg + Fp)l^2 - G\eta l = -(0,2188 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,5) \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -6,01 \text{ t};$$

b) obydwie przesły obciążone:

$$M_c = -(g + p) \sum Fl^2 - G\eta l = -(0,2 + 0,5) \cdot 1,2188 \cdot 8,0^2 - 3,0 \cdot 0,0671 \cdot 8,0 = -56,21 \text{ tm}.$$

Oddziaływania na podporach obliczamy dla dwu przypadków: a) prześło l obciążone, b) obydwie przesły obciążone.

ad a).

$$A = (\sum Fg + Fp)l + G\eta \xi = 0,4 = (0,2812 \cdot 0,2 + 0,45 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,85 \text{ t}.$$

$$B = (0,6042 \cdot 0,2 - 0,0333 \cdot 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 0,69 \text{ t},$$

$$C = (1,6146 \cdot 0,2 + 0,5833 \cdot 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 6,45 \text{ t}.$$

ad b).

$$A = 0,2812 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,533 = 3,17 \text{ t},$$

$$B = 0,6042 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 - 3,0 \cdot 0,0447 = 3,25 \text{ t},$$

$$C = 1,6146 \cdot (0,2 + 0,5) \cdot 8,0 + 3,0 \cdot 0,5117 = 10,58 \text{ t}.$$

G. Ramy.

Napiął

inż. dr. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

Są to twory hiperstatyczne, złożone z prętów najczęściej prostych (niekiedy zakrzywionych lub łamanych), połączonych ze sobą przy pomocy sztywnych węzłów. Pręty pionowe (lub o kierunku, zbliżonym do pionu) nazywamy słupami, poziome zaś (lub zbliżone do poziomu) rozporami. Każdy pręt ustroju ramowego znajduje się wogóle pod działaniem momentów, oraz sił osiowych i poprzecznych, musi być więc wykształcony sztywnie.