

14. Föppl A.: Festigkeitslehre. Wyd. 8. T. III. Vorl. u. Techn. Mech. 1920. Teubner.
15. Föppl A. u. O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. 1923. Teubner.
16. Föppl A. u. L.: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. I. Bd. 3. Aufl. 1924. II. Bd. 1920. Monachium i Berlin.
17. Keck W.—L. Hotopp: Vorträge über Elastizitätslehre. Wyd. 3. Cz. I. 1922. II. 1924. Hannover.
18. Kirpiczew W.: Soprotiwlenje materjałow. 2 tomy. Moskwa i Petrograd 1923.
19. Lorenz H.: Technische Elastizitätslehre. Monachium i Berlin 1913.
20. H. Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. Wyd. IV. Lipsk 1913.
21. Perry J.: Applied mechanics. Londyn 1907. (Także w przekładzie niemieckim R. Schick'a. 1908. Teubner.)
22. Pigeaud G.: Résistance des matériaux et élasticité. Paryż 1920.
23. Prescott J.: Applied elasticity. Londyn 1924.
24. Rabozée H.: Cours de résistance des matériaux. Wyd. 3. Bruksela i Paryż 1926.
25. Swain G. F.: Structural engineering. Strength of materials. New York 1924.
26. Tallquist H.: Lehrbuch der technischen Mechanik. T. II. Helsingfors 1903.
27. Tetmajer L.: Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Wyd. 3. Lipsk i Wiedeń 1906.
28. Timoshenko S. & Lessels J. M.: Applied elasticity. East Pittsburgh. Pa. 1926.
29. Timoshenko S.: Kurs teorji uprugosti. 2 tomy. Petersburg 1914—1916.
30. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd. IV. Mechanik. 4 tomy. 1901—1908. Teubner.

C. Niektóre prace autora z powyższego działu.

31. Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. Lwów Czas. Techn. 1904.
32. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Ann. d. Phys. 1904, IV., Bd. 14.
33. O natężeniach wywołanych nierównem ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury. Czas. Techn. 1906.
34. Teorja płyt prostokątne-różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami. Lwów, Tow. Nauk. 1921.
35. Studja nad belkami o przekroju I. Warszawa. Spraw. i prace W. T. P. 1923.
36. Wzory obliczenia statycznego ramy prostokątnej nierównoramiennej o słupach doskonałe utwierdzonych. Przegl. Techn. 1924.
37. Kryterja stałości równowagi i ich stosunek do statyki układów sprężystych. 1926, zes. 3., wyd. Akad. Nauk Techn. w Warszawie.
38. O wytrzymałości rury walcowej na wewnętrzne ciśnienie hydrostatyczne. Technika ciepła 1927.
39. Równanie pięciu momentów. Czas. Techn. 1927.
40. Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens. Verhandl. des 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1926. Orell Füssli Verl. 1927.

Statyka budowli.

I. Wstęp. Belki statycznie wyznaczalne o ścianie pełnej.

Napisal

inż. dr. Stefan Bryła,
profesor politechniki, Lwów.

a) Statyczna wyznaczalność.

Belką lub dźwigarem płaskim nazywamy ustrój materialny, złożony z (nieważkich) prętów lub tarcz sztywnych, leżących w jednej płaszczyźnie, który służy do przeniesienia na ziemię sił działających w tejże płaszczyźnie czyli obciążeń.

Pręty przenosić mogą tylko siły osiowe, zatem obciążone mogą być tylko w węzłach. Tarcze mogą przenosić prócz sił osiowych także momenty zginające, muszą one zatem posiadać pewien moment bezwładności. Mogą to

być albo *a*) utwory o ściance pełnej (np. blachownice) albo *b*) kratownice, składające się z prętów połączonych w kratę, albo wreszcie *c*) utwory mieszane, w skład których wchodzi częściowo elementy o ściance pełnej, częściowo elementy kratowe.

Belka kratowa (kratownica płaska) nazywamy belką, składającą się w całości z prętów nieważkich, połączonych ze sobą przegibnie w węzłach. Siły zewnętrzne działają na nią (teoretycznie) tylko w węzłach.

Tarcza (lub pręt) jest połączona stale i statycznie wyznaczalnie z drugą tarczą (prętem) wogóle przy pomocy trzech prętów. Do ustalenia punktu (na płaszczyźnie) względem tarczy potrzeba dwu prętów. Układ płaski, złożony z *t* tarcz i *w* węzłów, połączony będzie stale (sztywnie) i statycznie wyznaczalnie z innym układem stałym, jeżeli posiada:

$$p = 3t + 2w \text{ prętów}$$

(połączonych ze sobą odpowiednio, tj. tak, aby nie zachodził wypadek wyjątkowy, por. str. 1187 i 1212).

Ziemię uważać można też za tarczę sztywną; zatem dla stałego i statycznie wyznaczalnego ustalenia układu względem ziemi potrzeba $p = 3t + 2w$ prętów, z czego część może przypaść na pręty istotne (ustrojowe), część na pręty podporowe (łożyskowe), część na przegubowe.

Do ustalenia belek (dźwigarów) względem ziemi używamy zwykle łożysk, które w działaniu swem są równoważne z pewną ilością prętów, i które przy obliczaniu często się temi prętami zastępuje (t. zw. pręty łożyskowe). Łożysko stałe na płaszczyźnie (fig. 214) odpowiada dwu prętom podporowym, które możemy przyjąć dowolnie (fig. 215); zazwyczaj jednak przyjmujemy jeden pręt poziomy i jeden pionowy (fig. 216). Łożysko ruchome (na płas-



Fig. 214.



Fig. 215.

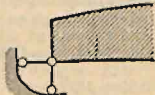


Fig. 216.

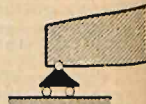


Fig. 217.

szczyźnie) odpowiada jednemu prętowi podporowemu, który ma kierunek oddziaływania, a więc prostopadły do kierunku ruchu (tarcia zazwyczaj nie uwzględniamy) (fig. 217 i 218). Utwierdzenie, czyli wmurowanie odpowiada w przyjęciu statycznym zwykle trzem prętom, nie przecinającym się w jednym punkcie (fig. 219 i 220; por. też str. 1056).

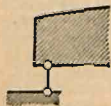


Fig. 218.

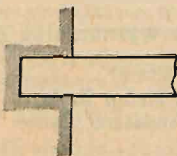


Fig. 219.

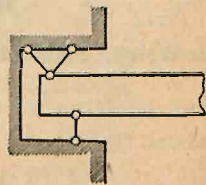


Fig. 220.

Pręty układu, łączące ze sobą tarcze i węzły, mogą być albo istotne, wykonane jako pręty (np. belka kratowa) albo mogą być zastąpione przegubami (pręty przegubowe). Przegub stały odpowiada dwu prętom przegubowym, przecinającym się w środku przegubu (przegub urojony), przegub ruchomy jednemu prętowi przegubowemu. Łożyska są właściwie również przegubami, a pręty łożyskowe prętami przegubowymi.

Nazywając p_i = ilość prętów istotnych, p_l = ilość prętów łożyskowych, p_g = ilość prętów przegubowych, otrzymamy dla belki stałej i statycznie wyznaczalnej czyli izostatycznej (por. str. 1064) potrzebną ilość prętów:

$$p = p_i + p_l + p_g = 3t + 2w \dots \dots \dots (1)$$

Podparcie stałe i statycznie wyznaczalne wymaga przynajmniej 3 prętów łożyskowych. Wtedy:

$$p_i = p - p_g - 3 = 3t + 2w - p_g - 3 \dots \dots \dots (2)$$

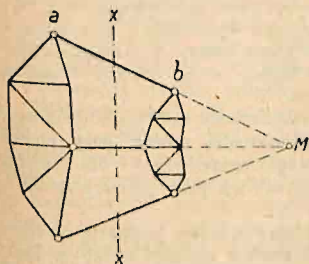


Fig. 221 a.

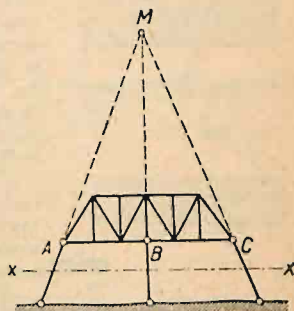


Fig. 221 b.

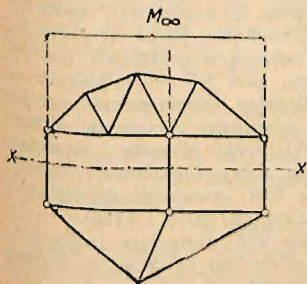
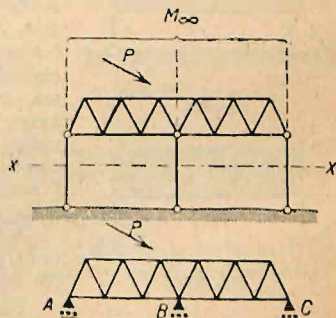


Fig. 222.



Jeżeli belka nie posiada tarcz, ale wyłącznie pręty, to $t = 0$, a wtedy:

względnie

$$\begin{aligned} p &= 2w, \\ p_i &= 2w - 3 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Warunki te są konieczne, jednak w wyjątkowych wypadkach mogą być niewystarczające. Mimo ich spełnienia bowiem belka może nie być sztywna, ale być chwiejna o nieskończenie małej, lub skończonej ruchomości. Pierwszy wypadek zachodzi wtedy, gdy pod wpływem obciążenia wystąpią w ogóle w kratownicy teoretycznie siły nieskończenie wielkie (por. str. 1055 i 1212), a przyposzczególnych obciążeniach siły o wielkości skończonej ale nieokreślone (por. str. 1061). Wypadek drugi, gdy dla ogólnego obciążenia belka będzie chwiejna, a tylko dla specjalnego układu belka może spełnić swoje zadanie.

Np. przy trzech prętach istotnych, łączących z sobą tarcze sztywne, względnie kratownice a i b (fig. 221 a), lub podporowych (fig. 221 b) zachodzi wypadek ruchomości nieskończenie małej. Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych przekroju xx przechodzi przez punkt M , wystąpią w prętach przeciętych

siły skończone, ale nieokreślone; jeżeli nie przechodzi przez ten punkt, wystąpią siły nieskończenie wielkie, które wprawdzie wskutek sprężystości dojdą do wielkości skończonych, pozostaną jednak w każdym razie bardzo znaczne i albo uniemożliwią, albo bardzo utrudnią wykonanie takiej belki w praktyce.

Jeżeli punkt M znajdować się będzie w nieskończoności (pręty przecięte będą równoległe), nastąpi wogóle pod wpływem dowolnej siły zmiana kształtu, więc belka będzie chwiejna. Np. pod wpływem składowej siły P (fig. 222), prostopadłej do kierunku prętów podporowych, belka ABC zostanie wprawiona w ruch. Dla specjalnego obciążenia, w danym wypadku dla pionowego, względnie dla takiego, którego wypadkowa jest pionowa, tj. przechodząca przez leżący w nieskończoności punkt M , belka będzie stała, ale siły w prętach będą nieokreślone.

Wypadek nieskończenie małej lub skończonej ruchomości belki określić można przy pomocy równań równowagi ustawionych dla każdego węzła (str. 1210), lub też przy pomocy zasad kinematyki.

Fig. 223 przedstawia belkę, podpartą na trzech ruchomych podporach; fig. 224 belkę podpartą na jednej stałej i jednej ruchomej ukośnej podporze; fig. 225 i fig. 226 belkę t. zw. prostą, czyli wolno podpartą, tj. wspierającą się na jednej stałej i jednej ruchomej pionowej podporze, (najczęściej przechodzącą w praktyce). Dla obciążenia pionowego, oba jej oddziaływania są też pionowe. Obliczając oddziaływanie na łożysku stałym dla dowolnego obciążenia, wyznaczamy zwykle składową pionową i poziomą, czemu odpowiadają pręty łożyskowe pionowy i poziomy (por fig. 226; oznaczenie fig. 225 jest mniej celowe. Por. też str. 1056 i 1186).

Jeżeli tarczę (fig. 226) zastąpimy belką kratową, posiadającą w węzłów (fig. 227), to według (3) ilość prętów istotnych $p_i = 2w - 3$.

Belka (fig. 224) nie jest prostą, ale rozporową (bez względu na swój wygląd), gdyż oddziaływanie są ukośne. Belki rozporowe o kształcie łukowym nazywamy łukowemi; natomiast belka o kształcie łukowym, ale podparta wedle fig. 226 (por. fig. 228) jest belką prostą, a nie łukiem. Wyjątkowo belkę wedle fig. 229 nazywamy belką łukową ze zniesionem parciem poziomem (por. str. 1203).

Pręty ustrojowe i pręty łożyskowe belek kratowych można pomiędzy sobą wymieniać, byle zostało zachowane równanie (1) i byle przy zamianie stałość i statyczna wyznaczalność nie były naruszone (por. fig. 228 i 230).

Przykłady. Opuszczając w belce wolno podpartej (fig. 228) pręt ab i zastępując go prętem łożyskowym m (fig. 230) otrzymujemy znów belkę statycznie wyznaczalną (łuk trójprzegubowy); natomiast nie możemy zmienić go na inny pręt istotny, gdyż belka będzie wtedy chwiejna.

Belka AB (fig. 231a) składa się z trzech tarcz, połączonych ze sobą: pierwsza z drugą przy pomocy trzech, druga z trzecią też przy pomocy trzech prętów; uwzględniając trzy pręty podporowe, otrzymamy: $3 \times 3 = 9 = 3t$ prętów łączących (równanie 1). Wymieniając pręt ab , oraz cd , i zastępując je prętami podporowymi m i n (fig. 231b), otrzymujemy

belkę ciągłą przegubową o 1 łożysku stałym, 3 ruchomych i 2 przegubach stałych (układ w praktyce niekorzystny). Usuwając nadto pręt af i zastępując go prętem podporowym h , otrzymujemy również belkę ciągłą przegubową o 2 łożyskach stałych, 2 ruchomych, 1 przegubie stałym i 1 ruchomym (fig. 231c), co daje układ korzystniejszy i jest zwykle używane (w nieco zmienionej postaci).

Belki kratowe dzielimy na pojedyncze (tj. składające się z jednej tarczy) i złożone (z dwu lub więcej tarcz połączonych ze sobą przegubami).

Belki kratowe, którym brakuje n prętów do ilości wymaganej przez wzory 1–3, które zatem posiadają $p = (3t + 2w) - n$ prętów, nie zapewniają stałości połączenia dla ogólnego układu sił zewnętrznych; nazywamy je belkami chwiejnymi n -tego stopnia. Chwiejność może dotyczyć tak prętów ustrojowych, jak i podporowych.

Do obliczenia belek posiadających więcej prętów niż wymagają równania 1–3, nie wystarczają równania równowagi, ale potrzeba dołączyć do tychże jeszcze n równań sprężystości, jeżeli

$$p = 3t + 2w + n.$$

Belki takie nazywamy statycznie niewyznaczalnymi (hiperstatycznymi) n -tego stopnia. Statyczna niewyznaczalność może być zewnętrzna, jeżeli prętami nadliczbowymi są pręty podporowe, lub wewnętrzna, jeżeli są niemi pręty ustrojowe.

b) Linje wpływowe (linje wpływu).

Linje wpływowe (wpływu) pewnej ilości statycznej, są to linje, których rzędne podają wielkość tej ilości statycznej pod wpływem poruszającego

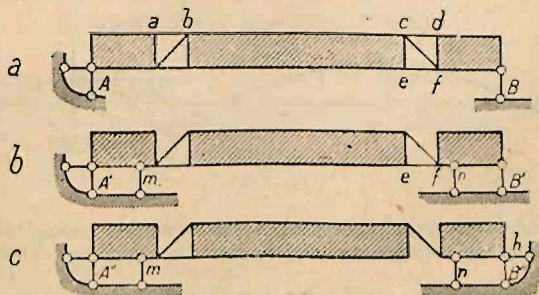


Fig. 231.

się ciężaru $P=1$. W praktyce ciężar ten jest najczęściej pionowy. Powierzchnię zawartą między linią wpływową, a osią, nazywamy powierzchnią wpływu (powierzchnią wpływową).

Fig. 232 przedstawia linię wpływu oddziaływania A belki ciągłej. Jeżeli ciężar $P=1$ znajduje się np. w punkcie m , to oddziaływanie A wynosi $1 \cdot \eta_m$. Ta linia wpływowa ma swój punkt obojętny o rzędnej $\eta=0$ w C (gdy ciężar $P=1$ stanie w C , oddziaływanie $A=0$), oraz część dodatnią (między punktami A i C) i ujemną (między C i B , gdy ciężar $P=1$ stanie w n , oddziaływanie $A=-1$ — $\eta_n=-\eta_m$); (tj. na podporze A występuje wtedy oddziaływanie, skierowane ku górze i starające się belkę na tej podporze podnieść).

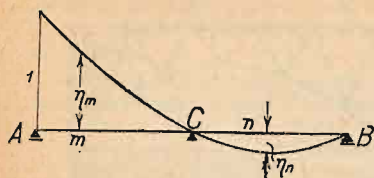


Fig. 232.

Dla ciężaru P oddziaływanie $A = P\eta_m$, względnie $A = P\eta_n$. Gdy na belce jest kilka ciężarów, to:

$$A = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \dots = \sum P \eta.$$

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego między m a n :

$$A = \int_m^n p \eta dx = p \int_m^n \eta dx = p F_{mn},$$

gdzie $F_{mn} = \int_m^n \eta dx$ przedstawia algebraiczną powierzchnię wpływową, zamkniętą między rzędnymi η_m a η_n .

Zazwyczaj mamy do czynienia z ciężarem własnym g , rozłożonym na całej długości belki, oraz z obciążeniem ruchomem (ciężary skupione P)

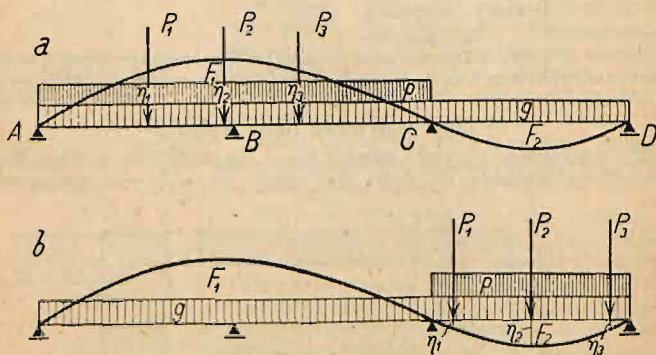


Fig. 233.

lub obciążenie jednostajnie rozłożone p), które należy rozmieścić tak, aby uzyskać obciążenie najniekorzystniejsze celem bezpiecznego obliczenia belki. Wtedy:

$$\text{najw. } + B = g(F_1 - F_2) + p F_1 + \sum P \eta \quad (\text{fig. 233 a}),$$

$$\text{najw. } - B = g(F_1 - F_2) - p F_2 - \sum P \eta \quad (\text{fig. 233 b}).$$

Ciężary P rozmieszczamy tak, aby $\sum F \eta$ było największe. Jeżeli największa rzędna występuje wybitnie (fig. 235 a), umieszczamy w niej największy ciężar.

Obciążenie pośrednie zachodzi, gdy ciężary przenoszą się na belkę pośrednio, przez poprzecznicę; wtedy ciężar P rozdziela się na $P_1 = P \frac{a-m}{a}$

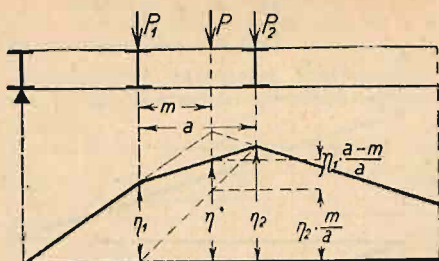


Fig. 234.

i $P_2 = P \frac{m}{a}$, których wpływ jest równy wpływowi siły P . Zatem:

$$P\eta = P_1\eta_1 + P_2\eta_2, \quad \text{czyli} \quad \eta = \frac{a-m}{a}\eta_1 + \frac{m}{a}\eta_2.$$

Linja wpływowa pomiędzy poprzecznicami jest zatem prostą (fig. 234).

c) Belka wolno podparta.

Oddziaływania (fig. 235 b). Dla $P=1$ w odstępzie a od podpory A otrzymujemy:

$$A = P \frac{l-a}{l} = 1 \cdot \frac{l-a}{l}, \quad B = P \frac{a}{l} = 1 \cdot \frac{a}{l}.$$

Linje wpływu mają kształt linii prostych, a mianowicie:

dla $\frac{a}{l}$	A	B
0	1	0
1	0	1

Siła poprzeczna w punkcie m równa się sumie wszystkich sił działających po lewej stronie punktu m . Siły poprzeczne T wynoszą więc

$$\begin{array}{ll} \text{dla } P \text{ między } m \text{ a } B & T = +A \\ \text{" " " " } A \text{ a } m & T = A - P = -B. \end{array}$$

Na podporze lewej odcinamy rzędną $(+1)$, na prawej (-1) , i łączymy prostymi wedle fig. 235 c. Ważne są części zakreskowane, grubo wyciągnięte.

Momenty zginające (fig. 235 d).

$$\text{Dla } P=1 \text{ między } A \text{ a } m: M = B(l-x) = P \frac{a}{l}(l-x) = 1 \frac{a}{l}(l-x).$$

$$\text{Dla } P=1 \text{ między } m \text{ a } B: M' = Ax = P \frac{l-a}{l} \cdot x = 1 \frac{l-a}{l} x.$$

Otrzymujemy zatem dwie linje proste:

dla $\frac{a}{l}$	M	M'
0	0	1. x
1	1 $(l-x)$	0
x	1 $\frac{x(l-x)}{l}$	1. $\frac{x(l-x)}{l}$

Linje wpływowe momentów można wykreślić, odcinając na pionowej przez A długość x i łącząc A' z B , oraz analogicznie odcinając w B długość $(l-x)$ i łącząc B' z A . Wygodniej jest obliczyć w m rzędną

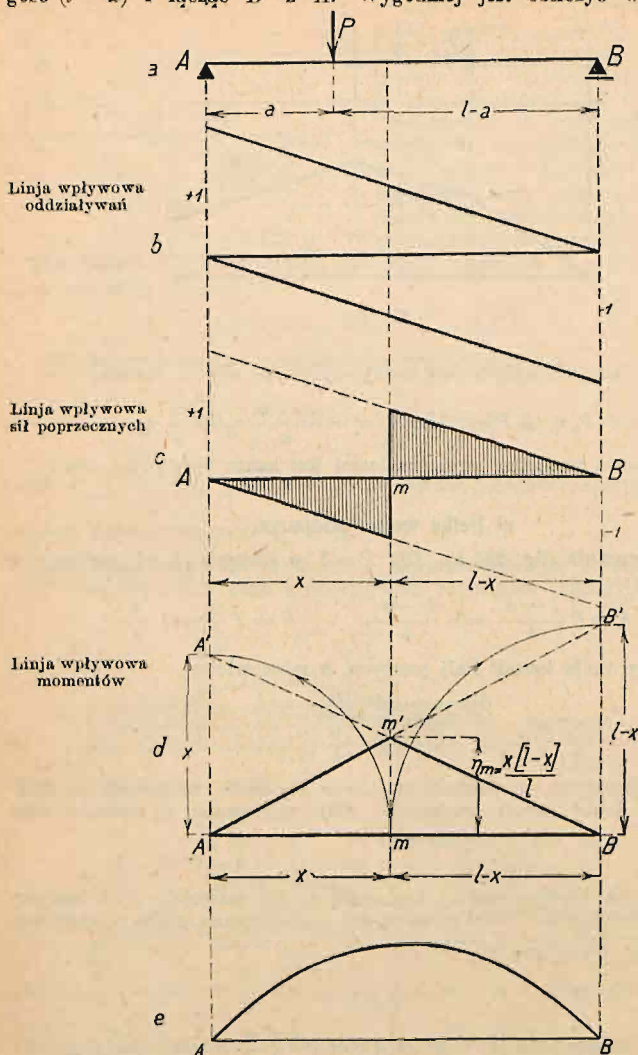


Fig. 235.

$\eta_m = \frac{x(l-x)}{l}$, odcinąć $m m' = \eta_m$ i połączyć m' z A i B , zwłaszcza, że wtedy możemy przyjąć najwygodniejszą podziałkę. Wierzchołki m' dla poszczególnych punktów leżą na paraboli (fig. 235 e) o równaniu:

$$\eta = \frac{x(l-x)}{l}.$$

Obciążenie pośrednie. Linia wpływowa sił poprzecznych otrzymuje kształt wedle fig. 236 a, por. fig. 234 i jest ważna dla całego przedziału $m n$. Zatem i siła poprzeczna dla każdego punktu danego przedziału jest ta sama.

Linia wpływowa momentów przyjmuje kształt fig. 236 b. Rysuje się najpierw linię wpływu bez uwzględnienia poprzecznic, a następnie wstawia prostą $m n$ na długości danego przedziału.

Obciążenie jednostajnie rozłożone. Przyjmujemy, że ciężar g jest rozłożony jednostajnie na całej belce, zaś ciężar ruchomy p umieszczony jest najniekorzystniej.

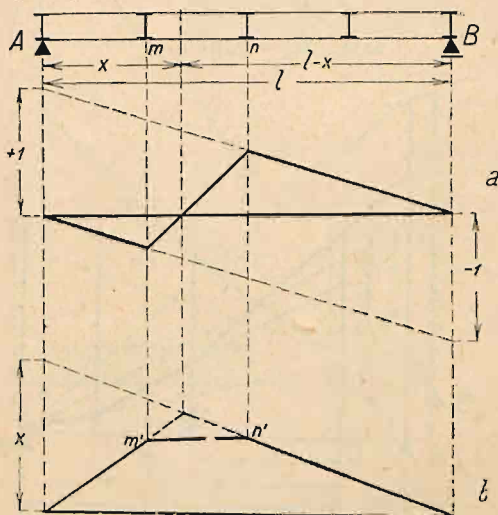


Fig. 236.

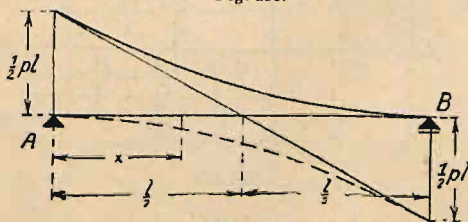


Fig. 237.

Oddziaływanie (najniekorzystniejsze jest całkowite obciążenie):

$$A_g = \frac{1}{2} g l = B_g$$

$$\text{najw. } A_p = \frac{1}{2} p l = \text{najw. } B_p.$$

Siły poprzeczne (w odległości x od lewej podpory):

$$T_g = \frac{1}{2} g (l - 2x).$$

Siły poprzeczne dla ciężaru stałego zmieniają się podług linii prostej.

Dla otrzymania najw. T obciążamy belkę na długości $(l - x)$; dla otrzymania najmn. T , na długości x (por. fig. 235 c). Wtedy:

$$\text{najw. } T_p = \frac{1}{2} p \frac{(l - x)^2}{l}; \quad \text{najmn. } T_p = -\frac{p x^2}{2 l}.$$

Największe siły poprzeczne dla ciężaru ruchomego zmieniają się według paraboli, której największa rzędna na podporze wynosi: $\frac{1}{2} p l$, rzędne w środku belki $\frac{1}{8} p l$. Konstrukcja jej podana jest na fig. 237.

Momenty zginające (najniekorzystniejsze obciążenie całkowite):

$$M_g = \frac{1}{2} g x (l - x); \quad \text{najw. } M_p = \frac{1}{2} p x (l - x).$$

Największy moment występuje w środku belki i wynosi:

$$M_g = \frac{1}{8} g l^2,$$

$$\text{najw. } M_p = \frac{1}{8} p l^2.$$

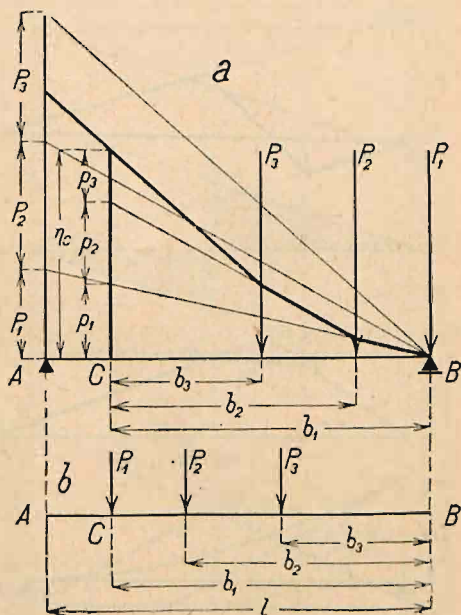


Fig. 238.

Wielobok oddziaływań. Obciążenie bezpośrednie. Ustawmy na belce AB szereg ciężarów P_1, P_2, P_3 (np. pociąg) tak, aby pierwszy ciężar P_1 stanął na podporze B (fig. 238 a), odetnijmy ciężary P_1, P_2, P_3 na pionowej przez A , wykreślmy promienie sznurowe dla bieguna, przyjętego w B , a wreszcie narysujmy wielobok sznurowy, poczynając od B . Wtedy rzędna η_c w punkcie C określi wielkość oddziaływania A , dla położenia pociągu według fig. 238 b, tj., gdy P_1 stoi w C . Jeżeli bowiem przedłużymy promień wieloboku sznurowego, znajdujące się na prawo od rzędnej η_c , aż do przecięcia się z tą rzędną, to odetną one na niej odcinki p_1, p_2, p_3 , przyczem według rys. a) jest $p_1 : b_1 = P_1 : l$, $p_2 : b_2 = P_2 : l$ itd., zatem:

$$\eta_c = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} + P_3 \frac{b_3}{l} + \dots = A.$$

Siła poprzeczna w przekroju C jest z reguły największa wtedy, gdy na nim stoi pierwszy ciężar (fig. 238 b), zatem wykres oddziaływań jest zarazem wykresem największych sił poprzecznych.

Jeżeli pierwszy ciężar jest stosunkowo mały i bardzo oddalony od drugiego, to największa siła poprzeczna może wystąpić dla drugiego ciężaru

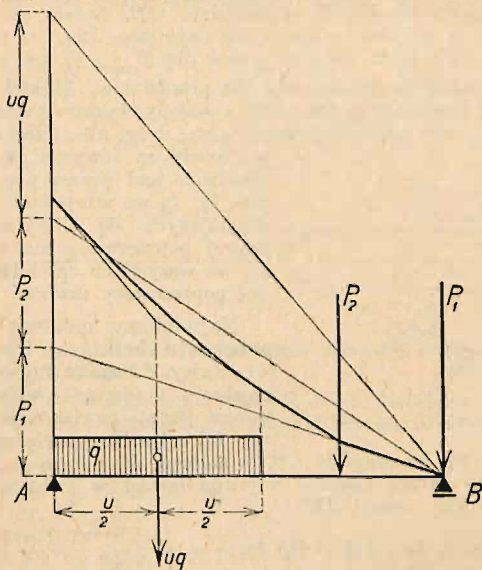


Fig. 239.

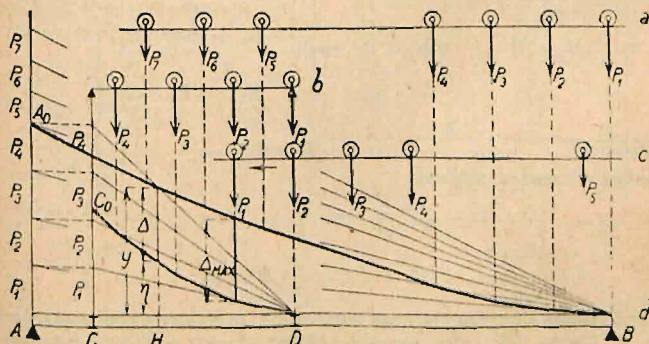


Fig. 240.

znajdującego się w danym przekroju. Jeżeli między ciężarami skupionymi są też ciężary ciągłe, jednostajnie rozłożone na pewnych długościach, to należy je zamienić na ciężary skupione, zaczepiające w środkach tych długości, a w wielobok tak otrzymany wkreślić parabole na długości obciążenia jednostajnego, por. fig. 239.

Obciążenie pośrednie. Dla danego szeregu ciężarów (fig. 240 a) wykreślić wielobok oddziaływań BA_0 dla belki AB i także wielobok DC_0

dla belki (podłużnicy) CD przy pomocy bieguna D i sił P_1, P_2, P_3 , odciętych na pionowej punktu C , a ustawionych wedle fig. b). Jeżeli pierwszy ciężar pociągu, jadącego w lewo, stoi w dowolnym punkcie H przedziału CD , to rzędna y w tymże punkcie wieloboku BA_0 przedstawia oddziaływanie A , rzędna η wieloboku DC_0 działanie poprzecznic C , zatem różnica $y - \eta = \Delta$ przedstawia siłę poprzeczną T w przedziale CD . Będzie ona największa, gdy P_1 stanie w miejscu, gdzie Δ jest największe (fig. 240 c i d). Wtedy $T_{\max} = \Delta_{\max}$. W pobliżu podpory prawej dla T_{\max} , P_1 ma stać na prawej poprzecznic (położenie zasadnicze). Dla przedziałów, bliskich podpory A , zwłaszcza, gdy przedziały są dość duże, a odstęp ciężarów znacznie mniejsze, może dla T_{\max} nad prawą poprzeczną stać drugi albo trzeci ciężar. Jeżeli

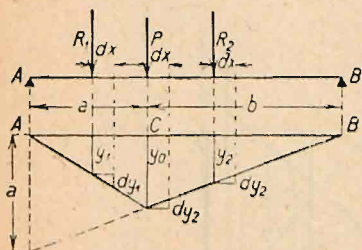


Fig. 241.

przedziały są równe, i gdy w pewnym przedziale nad prawą poprzeczną ma stać P_2 , to we wszystkich przedziałach znajdujących się bliżej podpory B na prawej poprzecznic ma stać P_1 albo P_2 , we wszystkich zaś bliżej A , na prawej poprzecznic ma stać P_2 albo P_3 .

Największy moment w pewnym przekroju belki. a) Sposób analityczny. Z kształtu linii wpływowej dla przekroju C (fig. 241) widać, że należy na nim ustawić pewien ciężar P . Nazwijmy R_1 wypadkową ciężarów na długości AC , zaś R_2 , na długości CB , to moment $M = R_1 y_1 + P y_0 + R_2 y_2$. Przez posunięcie układu ciężarów w prawo (ewent. w lewo) o dx zwiększy się moment o dM_p (ewent. dM_l):

$$dM_p = R_1 dy_1 - (P + R_2) dy_2 = y_0 dx \left[\frac{R_1}{a} - \frac{P + R_2}{b} \right].$$

Analogicznie będzie $dM_l = y_0 dx \left[-\frac{R_1 + P}{a} + \frac{R_2}{b} \right]$. Jeżeli P ma stać

$$\left. \begin{aligned} \text{w } C, \text{ to } dM_p < 0 \quad \text{ i } \quad dM_l < 0, \text{ czyli } \frac{R_1 + P}{a} > \frac{R_2}{b} \\ \text{ i } \quad \frac{R_1}{a} < \frac{R_2 + P}{b} \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)$$

Nazwijmy

$$R_1 + P + R_2 = R,$$

to zamiast a) można napisać:

$$\frac{R_1 + P}{a} > \frac{R}{l} > \frac{R_1}{a} \dots \dots \dots (b)$$

albo:

$$(R_1 + P) > \frac{a}{l} R > R_1 \dots \dots \dots (c)$$

Jeżeli spełnia się tylko pierwsza nierówność, to należy układ ciężarów przesunąć w prawo tak, aby sąsiedni ciężar stanął w C i zastosować dla nowego położenia ciężarów kryterjum powyższe.

Sposób wykreślny. Wykreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy dla danego szeregu ciężarów. Ustawmy belkę AB tak, aby przekrój badany C znalazł się na kierunku pewnej siły, np. P_3 (fig. 242). Pionowe przez A i B wyznaczają na wieloboku sznurowym punkty zamykającej $A' B'$. Odcinek η_c (w skali długości), pomnożony przez biegunową H (w skali sił), przedstawia M_c , gdy P_3 stoi w C . Jeżeli przekrój C wpadnie w kierunek siły innej, to w powyższy sposób otrzymamy inną wartość η_c . Przesuwając więc belkę,

znajdziemy łatwo najw. η_c ; wtedy najw. $M_c = \text{najw. } \eta_c \cdot H$. Podobnie znajdziemy najw. η_d dla przekroju D belki. Jeżeli jeden ciężar jest wybitnie większy od innych, to zwykle on właśnie stanąć winien na badanym przekroju. Sposobu tego używa się, gdy mamy znaleźć najw. M w pewnej liczbie przekrojów, np. pod każdą poprzecznicą. Często jednak, zwłaszcza dla

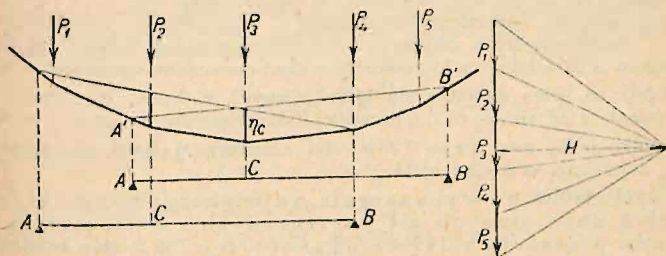


Fig. 242.

mniejszych belek, potrzeba dla wyznaczenia przekroju wyznaczyć bezwzględnie największy moment.

Bezwzględnie największy moment. Jest to największy z pośród największych momentów poszczególnych wszystkich przekrojów belki. Występuje on w pewnym przekroju belki (przekrój niebezpieczny), gdy na nim stanie jeden z ciężarów układu np. P (fig. 243). Jeżeli $R =$ wypadkowa ciężarów, znajdujących się na belce, $Q =$ wypadkowa ciężarów, znajdujących się na belce na lewo od P , to z równowagi względem B wynika:

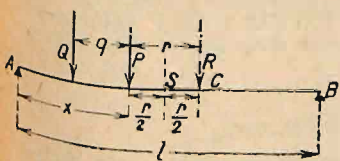


Fig. 243.

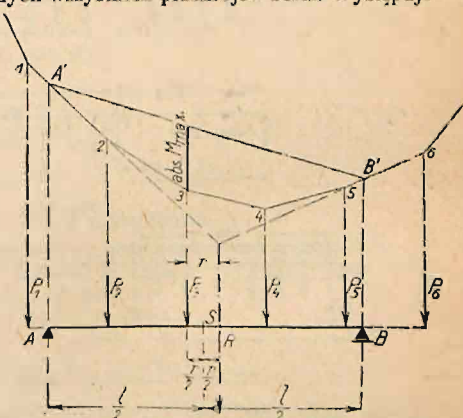


Fig. 244.

$$Al = R(l - x - r) \quad \dots \quad (a)$$

stad

$$\frac{dA}{dx} \cdot l = -R \quad \dots \quad (b)$$

Moment w C

$$M_x = Ax - Q \cdot q.$$

Z równania:

$$l \frac{dM_x}{dx} = \left(A + x \frac{dA}{dx} \right) \cdot l = 0$$

otrzymamy po wstawieniu $a)$ i $b)$ oddalenie przekroju niebezpiecz. od podpory A

$$x = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} (l - r).$$

Zatem środek belki S położy odstęp r wypadkowej R od niebezpiecznego przekroju. W powyższem wyprowadzeniu przyjęto, że R , Q , r i q są niezależne od x , czyli, że przy podporach niema obciążeń ciągłych. W przeciwnym wypadku wzory stają się bardziej zawile (por. wzory dla obciążenia zasadniczego mostów drogowych str. 757). Zwykle na przekroju niebezpiecznym ma stać ciężar najbliższy wypadkowej. Jeżeli np. na belce zmieszczą się ciężary P_2, P_3, P_4 i P_5 (fig. 244), to przedłużając boki 1—2 i 5—6 aż do przecięcia się, znajdziemy wypadkową R tych ciężarów. Najbliższą siłą jest P_3 . Jeżeli w połowie między P_3 i R umieścimy środek S belki AB , to zamykająca $A'B'$ odcina na kierunku P_3 w skali momentów wartość abs M_{\max} .

Jeżeli na belce znajduje się kilka równych ciężarów w równych odległościach a od siebie, to dla parzystej ilości ciężarów odległość abs M_{\max} od środka belki $e = \frac{1}{2} r = 0,25 a$; dla nieparzystej ilości ciężarów abs M_{\max} występuje w środku belki.

Użycie tablic do wyznaczenia największych oddziaływań tudzież największych sił poprzecznych i momentów w dowolnym przekroju belki wolno podpartej: Dla mostów kolejowych

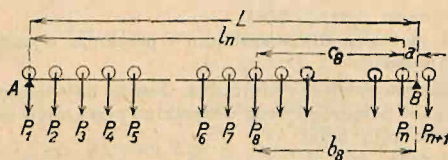


Fig. 245.

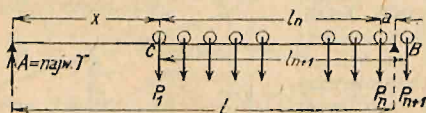


Fig. 246.

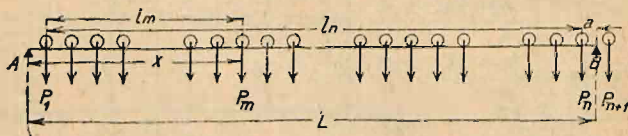


Fig. 247.

ułożono tablice (str. 768—771), które dla danych norm i schematów obciążenia (por. fig. 14, str. 764, i fig. 15, str. 766) podają l = odstęp dowolnej osi n od osi pierwszej danego schematu, następnie $\sum_1^n P$ = sumę nacisków osi od 1 do n , wreszcie M_n = moment sił $\sum_1^n P$ ze względu na oś n .

Jeżeli L = rozpiętość belki AB , a pierwsza oś schematu III stoi w A (fig. 246), to największe oddziaływanie A znajdziemy z równania:

$$A L = \sum_1^n P b = \sum_1^n P c + a \sum_1^n F$$

czyli

$$A L = M_n + a \sum_1^n P,$$

gdzie

$$a = L - l_n$$

przyczem

$$l_n < L < l_n + 1.$$

Jeżeli pierwsza oś schematu I stoi w C (fig. 246), to w przekroju C

$$\text{najw. } T = A, \quad A \cdot L = M_n + a \sum_1^n P,$$

$$\text{gdzie} \quad a = L - x - l_n,$$

$$\text{przyczem} \quad l_n < L - x < l_{n+1}.$$

Jeżeli chodzi o najw. M w dowolnym przekroju x (fig. 247), to ustawiamy na tymże przekroju m -tą oś P_m schematu II , która wedle c) str. 1196 czyni zadość nierównościom:

$$\sum_1^m P > \frac{x}{L} \sum_1^n P > \sum_1^{m-1} P. \quad \dots \quad (c)$$

przyczem dla n mamy warunek:

$$l_n < L - x + l_m < l_{n+1} \quad \dots \quad (d)$$

$$\text{Wtedy najw. } M_x = A x - M_m,$$

$$\text{przyczem} \quad A L = M_n + a \sum_1^n P \text{ j. w.,}$$

$$\text{zaś} \quad a = L - x - (l_n - l_m).$$

Ponieważ w miejscu x ma stać jako P_m oś parowozu, przeto schemat II jest nieważny, jeżeli $m < 5$ (t. zn. gdy x jest małe).

Przykłady na str. 766, 767 i 772. W przykładzie na str. 767 jest dla normy $A x = 20 m$, $L = 40 m$, $m = 10$, $n = 20$, gdyż spełnia się nierówność c), tj. $214 > \frac{20}{40} \cdot 402 = 201 > 189$, tudzież nierówność d) $37 < 40 - 20 + 18,5 < 40$.

Podobnie dla $x = 15$ jest $m = 8$, $n = 20$, gdyż

$$\text{wedle } (c): \quad 164 > \frac{15}{40} \cdot 402 = 151 > 13,9,$$

$$\text{tudzież wedle } (d): \quad 37 < 40 - 15 + 13 = 38 < 40.$$

d) Belka ciągła przegubowa.

Dla belki o n przesłach czyli $(n+1)$ podporach mamy n tarcz i $(n-1)$ przegubów, w tem s stałych, r ruchomych. Wedle równania 1 (str. 1187) ilość prętów łożyskowych powinna wynosić:

$$p_l = 3n - 2s - r.$$

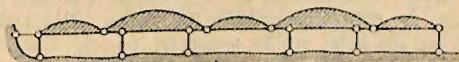


Fig. 248.

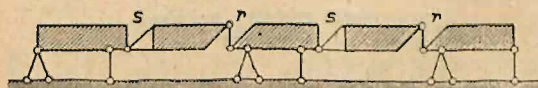


Fig. 249.

Jeżeli wszystkie przeguby są stałe, to

$$p_l = 3n - 2(n-1) = n + 2,$$

czyli tylko jedno łożysko stałe np. $n = 5$, $p_l = 5 + 2 = 7$, por. fig. 248.

Najczęściej $s = r$, wtedy $p_l = 3n - 3s = 3(n-s)$, np. dla $n = 5$, $s = r = 2$, $p_l = 3(5-2) = 9$, por. fig. 249.

W jednym przęśle mogą być najwyżej dwa przeguby (w belkach ciągłych łukowych mogą być 3 przeguby). Zwykle wykonywamy belki ciągle przegubowe, dając: w przęśtach skrajnych po jednym przegubie, w następnych zaś co drugie przęśło dwa przeguby; w przęśtach skrajnych nie dajemy przegubów, w następnych zaś co drugie przęśło po 2 przeguby.

W ten sposób rozkładamy belkę ciągłą przegubową na belki wspornikowe i na wolno podparte, wiszące na wspornikach.

Dla obciążenia stałego obliczamy najpierw belki zawieszone, względnie ich oddziaływania, które są siłami zewnętrznymi dla belki wspornikowej, a następnie belkę wspornikową.

Linje wpływowe. Dla oddziaływania A (fig. 250) rzedna linii wpływowej w punkcie A $AA' = 1$, rzedna w punkcie B równa się 0. Prostą $A'B$ przedłużamy nazewnątrz aż do przecięcia się z pionowymi przez przeguby E i F . Punkty E' i F' łączy się ze skrajną podporą C , względnie z przegubem D (fig. 250 a). Dla siły poprzecznej (fig. 250 b) i momentu (fig. 250 c) w punkcie m linja wpływowa na dłu-

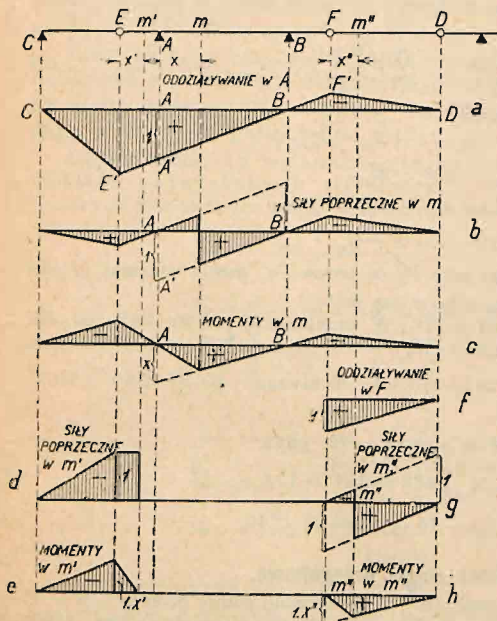


Fig. 250.

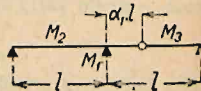


Fig. 251.

gości AB , jak dla belki wolno podpartej; proste zewnętrzne przedłużamy nazewnątrz jak wyżej. Dla punktu m' wspornika AE linja wpływowa sił poprzecznych por. fig. 250 d, momentów fig. 250 e. Dla belki zawieszonoj linje wpływowe jak dla belki wolno podpartej (por. fig. 250 f oddziaływanie w F , fig. 250 g siły poprzeczne i fig. 250 h momenty).

Szczególne przypadki. Przęśła równe. Obciążenie jednostajnie rozłożone¹⁾.

Oznaczenia: g = ciężar własny w kg/m b.,
 p = „ użytkowy „
 $q = g + p$.

1. Dwa przęśła (fig. 251).

Najkorzystniejszy odstęp przegubu od podpory środkowej $x = \alpha_1 l$, przyczem

$$\alpha_1 = \left[\frac{q}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{g}{q}} \right) \right]^2.$$

Wtedy:

$$M_1 = M_2 = \frac{\alpha_1}{2} q l^2, \quad M_3 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_1)^2.$$

¹⁾ Wzory poniżej podane mają najczęściej zastosowanie przy płatwiach dachowych przegubowych.

Jeżeli uwzględnimy tylko ciężar stały q , to dla $\alpha_1 = 0,172$:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,0858 q l^2.$$

2. Trzy przęsła.

Układ a (fig. 252).

Dla:
$$\alpha_2 = 0,5 (1 - \sqrt{1 - 4\alpha_1}) = \frac{x}{l}$$

jest:
$$M_1 = M_2 = \frac{\alpha_1}{2} q l^2, \quad M_3 = \frac{q l^2}{8} (1 - 2\alpha_2)^2.$$

Gdy tylko ciężar stały q :

$$\alpha_2 = 0,22, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = 0,0392 q l^2.$$

Układ b (fig. 253).

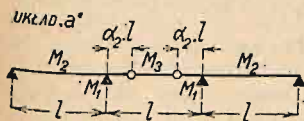


Fig. 252.

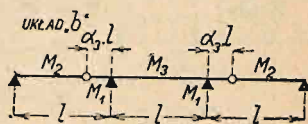


Fig. 253.

Dla:
$$\alpha_3 = \frac{q}{4(q + g)}$$

jest:
$$M_1 = M_3 = \frac{q l^2}{2} \alpha_3, \quad M_2 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_3)^2.$$

Dla samego tylko ciężaru stałego q :

$$\alpha_3 = 0,125, \quad M_1 = M_3 = 0,0625 q l^2, \quad M_2 = 0,0957 q l^2.$$

Dla $\alpha_3 = 0,172, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = \frac{q l^2}{8} \left(\frac{q}{g} - 4\alpha_3 \right).$

Dla samego tylko ciężaru stałego q :

$$\alpha_3 = 0,172, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 q l^2, \quad M_3 = 0,0392 q l^2.$$

3. Więcej niż 3 przęsła.

4. Ilość przęseł nieparzysta.

Układ a (fig. 254).

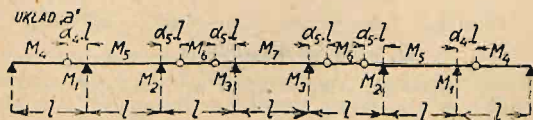


Fig. 254.

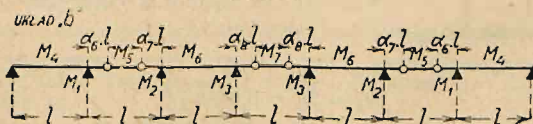


Fig. 255.

Jeżeli:
$$\alpha_4 = \frac{q}{4(q + g)}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{g}{g + q}} \right).$$

to:
$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = 0,5 \alpha_4 q l^2,$$

$$M_4 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_4)^2, \quad M_8 = \frac{q l^2}{8} (1 - 2 \alpha_5)^2.$$

Dla samego tylko ciężaru q :

$$\alpha_4 = 0,125, \quad \alpha_5 = 0,1465,$$

$$M_1 = M_5 = M_2 = M_7 = M_3 = M_6 = 0,0625 q l^2, \quad M_4 = 0,0957 q l^2.$$

Układ b (fig. 255).

$$\alpha_6 = 0,5 [1 - \alpha_4 + \alpha_1 - \sqrt{(1 - \alpha_4 + \alpha_1)^2 - 4 \alpha_1}],$$

$$\alpha_7 = \frac{\alpha_4}{1 - \alpha_6}, \quad \alpha_8 = \alpha_5.$$

Wtedy:

$$M_4 = M_1 = 0,5 q l^2 \alpha_6 (1 - \alpha_7),$$

$$M_2 = M_6 = M_3 = 0,5 q l^2 \alpha_8 (1 - \alpha_8),$$

$$M_5 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_6 - \alpha_7),$$

$$M_7 = \frac{q l^2}{8} (1 - 2 \alpha_8)^2.$$

Dla całkowitego obciążenia:

$$\alpha_6 = 0,2035, \quad \alpha_7 = 0,157, \quad \alpha_8 = 0,1465,$$

$$M_4 = M_1 = 0,0858 q l^2, \quad M_2 = M_3 = M_6 = 0,0625 q l^2,$$

$$M_5 = 0,0511 q l^2, \quad M_7 = 0,0625 q l^2.$$

B. Ilość przęseł parzysta (fig. 256).

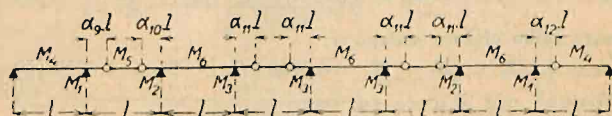


Fig. 256.

Zróbmy: $\alpha_9 = \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_7, \quad \alpha_{11} = \alpha_5, \quad \alpha_{12} = \alpha_4,$

to:

$$M_4 = M_1 = 0,5 q l^2 \alpha_9 (1 - \alpha_{10}),$$

$$M_2 = M_6 = M_3 = 0,5 q l^2 \alpha_{11} (1 - \alpha_{11}),$$

$$M_5 = \frac{q l^2}{8} (1 - \alpha_9 - \alpha_{10})^2, \quad M_7 = \frac{q l^2}{8} (1 - 2 \alpha_{11})^2.$$

Dla ciężaru całkowitego:

$$\alpha_9 = \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_7, \quad \alpha_{11} = \alpha_8, \quad \alpha_{12} = \alpha_4,$$

$$M_4 = M_1 = 0,0858 q l^2,$$

$$M_2 = M_3 = M_6 = M_7 = 0,0625 q l^2,$$

$$M_5 = 0,0511 q l^2.$$

Dla płatwi dachowych, obciążonych stałymi i równymi sobie ciężarami w równych odstępach „a” korzystne są poniższe wzory a), b), c). We wzorach tych $P = a b q$, gdzie a jest odstępem krokwi, b odstępem płatwi, zaś q obciążeniem na $1 m^2$. M_s = moment w środku przęsła.

Dla

$$M_A = M_S$$

$$M_A = M_S = \frac{Pl}{4} = 0,25 Pl = 0,25 a b q l \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$x = 0,167 l \text{ (fig. 257).}$$

$$M_A = M_S = 0,3 Pl = 0,3 a b q l \quad \dots \dots (b)$$

$$x = 0,15 l \text{ (fig. 258).}$$

$$M_A = M_S = 0,375 Pl = 0,375 a b q l \quad \dots (c)$$

$$x = 0,15 l \text{ (fig. 259).}$$

e) Łuk trójpřzegubowy.

Statyczna wyznaczalność. Łuk trójpřzegubowy składa się z dwu tarcz, zatem przy ilości prętów przegubowych i łożyskowych $3t = 6$ jest statycznie wyznaczalny. Może to być zatem łuk trójpřzegubowy (dwa przeguby podporowe, jeden środkowy), łuk trójpřzegubowy wystający, wreszcie łuk trójpřzegubowy ze ścięgiem o jednym łożysku stałym, a drugim ruchomym. Ten ostatni nie należy właściwie do łuków ze względu na swoje podparcie; z drugiej strony uważać jednak można, że poziomy pręt podporowy łożyska B jest wykonany jako ścięgno i przechodzi od B do A (fig. 260 i 261).

Dla wykreślenia oddziaływań wyznaczamy wypadkowe R_1 i R_2 sił działających na lewą, względnie na prawą część łuku. Jeżeli na łuk działa tylko R_1

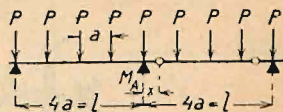


Fig. 257.

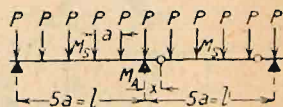


Fig. 258.

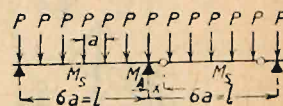


Fig. 259.

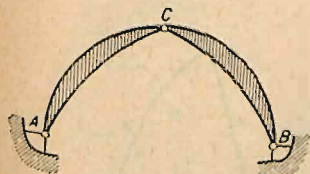


Fig. 260.

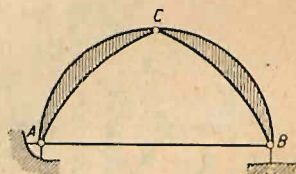


Fig. 261.

(fig. 262 a), to oddziaływanie B_1 przechodzi przez B i C, gdyż prawa część jest nieobciążona. Kierunek oddziaływania A_1 znajdziemy przedłużając BC do przecięcia z R_1 w punkcie m i łącząc punkt A z m. Ciśnienie w przegubie C jest równe i wprost przeciwne oddziaływowaniu B_1 (fig. 262 c). Wielkość oddziaływań znajdziemy z trójkąta sił (fig. 262 b).

Analogicznie dla prawej części obciążonej znajdziemy oddziaływania A_2 i B_2 .

Przy równoczesnem obciążeniu obu części wyznaczmy osobno A_1 , B_1 i A_2 , B_2 (fig. 263 a). Oddziaływanie A jest wypadkową A_1 i A_2 , B zaś wypadkową B_1 i B_2 .

Aby znaleźć A i B kreśli się trójkąty sił $A_1 B_1 R_1$ i $A_2 B_2 R_2$, a prowadząc $A_2' \parallel A_2$ i $B_1' \parallel B_1$, znajduje ostatecznie A, B i C dla całkowitego obciążenia.

Dodając geometrycznie do oddziaływania A kolejno siły $P_1 P_2 P_3$ (fig. 264 b) otrzymamy wielobok sił, któremu odpowiadający wielobok sznurowy (fig. 264 a) jest t. zw. linią ciśnienia (linią naporową). Przechodzi ona przez wszystkie przeguby i w dowolnym przekroju przedstawia położenie i kierunek wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych na lewo od przekroju, a tem samem wypadkowej

ciśnieniu. Wielkość tej wypadkowej określa odpowiedni promień w wieloboku sił (fig. 264 b).

Obliczenie przekroju. Moment osiowy w dowolnym punkcie m łuku wynosi (fig. 265 a):

$$M_x = A \cdot a - P_1 \cdot b = C \cdot c,$$

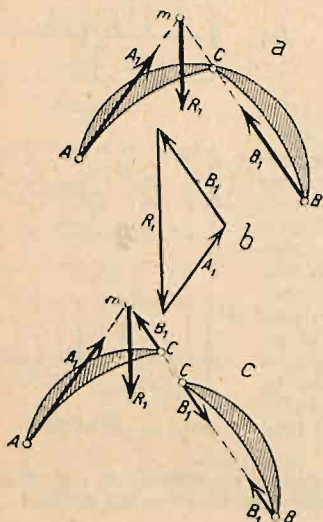


Fig. 262.

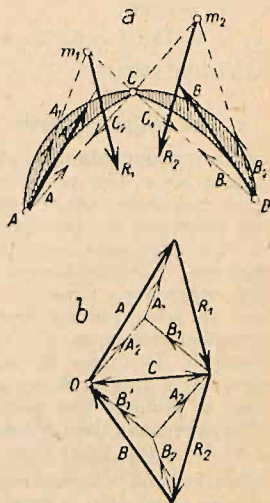


Fig. 263.

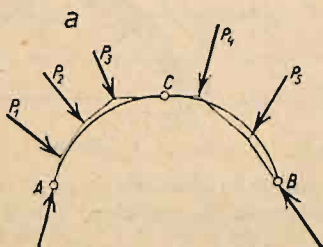
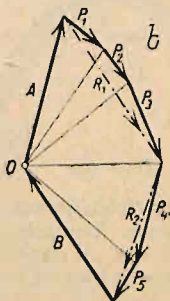


Fig. 264.



gdzie A jest oddziaływaniem, a i b odległościami prostokątami odpowiednich sił; równy jest więc iloczynowi wypadkowej ciśnieniu przez odstęp linii naporowej od środka ciężkości przekroju.

Siłą osiową (normalną) N w danym punkcie nazywamy sumę składowych równoległych do osi w danym punkcie wszystkich sił działających po lewej stronie przekroju. Siłą poprzeczną T nazywamy sumę składowych prostokątnych do osi (równoległych do przekroju) tychże sił; wywołuje ona naprężenia ścinające (fig. 265 b).

Ponieważ na przekrój działa równocześnie M i N , przeto naprężenie w skrajnej warstwie górnej:

$$\tau_g = \frac{N}{F'} + \frac{M}{J} a_g \dots \dots \dots (a)$$

Jeżeli mimośród jest e (fig. 266), to $M = Ne$. Moment bezwładności przekroju $I = F' \cdot i^2 = F' a_g \cdot c_d$, jeżeli c_d jest dolnym promieniem rdzennym.

Zatem:
$$\sigma_g = \frac{N}{F'} \left(1 + \frac{e}{c_d} \right) \left| \dots \dots \dots (b) \right.$$

Podobnie:
$$\sigma_d = \frac{N}{F'} \left(1 - \frac{e}{c_g} \right) \left| \dots \dots \dots (b) \right.$$

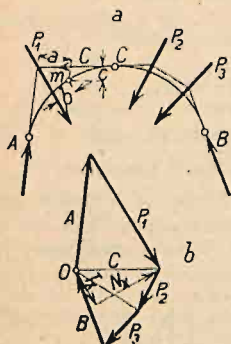


Fig. 265.

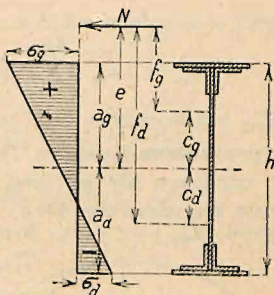


Fig. 266.

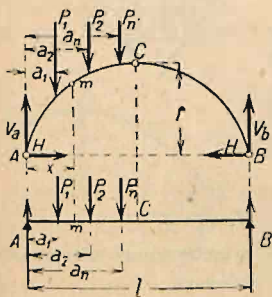


Fig. 267.

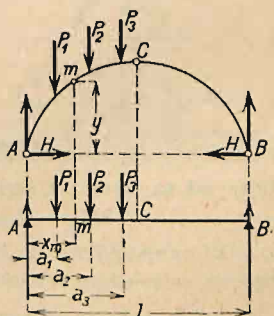


Fig. 268.

Stąd widać, że, aby σ_d było ściskaniem, musi być $e < c_g$, t. zn. linja ciśnienia musi pozostać w obrębie rdzenia przekroju. Moment siły N względem punktu rdzennego dolnego:

$$M_d = N(c_d + e) = N \cdot f_d.$$

Moment statyczny powierzchni F względem tegoż punktu $W_d = F' \cdot c_d$.

Zatem:
$$\tau_g = \frac{M_d}{W_d}; \quad \text{podobnie } \sigma_d = \frac{M_g}{W_g} \dots \dots \dots (e)$$

Obciążenie pionowe (łuk symetryczny; fig. 267). Rozłóżmy oba oddziaływania na składowe poziome H i składowe pionowe V_a i V_b , to z równania

momentów względem B wynika, że $V_a =$ lewemu oddziaływaniu belki wolno podpartej AB (fig. 267) przy tem samym obciążeniu; zatem $V_a = A$; podobnie $V_b = B$.

Dla znalezienia H wyznaczmy moment zgięcia względem przegubu C , gdzie $M = 0$. Moment sił pionowych $V_a, P_1, P_2 \dots P_n$ po lewej stronie przekroju wynosi: $V_a \frac{l}{2} - \sum_1^n P b$ i jest równy momentowi M_{oc} belki prostej o długości l ze względu na punkt C (leżący w środku belki). Dla równowagi musi być $M_{oc} - H \cdot f = 0$; stąd $H = \frac{M_{oc}}{f}$.

Moment w dowolnym punkcie m wynosi (por. fig. 268):

$$M_m = A x_m - \sum_0^{x_m} P(x_m - a) - H y = M_{om} - H \cdot y,$$

gdzie M_{om} jest momentem belki prostej ze względu na punkt m .

Siła poprzeczna i osiowa. Celem obliczenia siły poprzecznej T_m i osiowej N_m rzutujemy siły po lewej stronie przekroju na kierunek stycznej i promienia krzywizny (fig. 269 a). Dla belki prostej odpowiednia siła poprzeczna wynosi: $T_{om} = A - P_1$. Rzutując T_{om} i H na ρ , otrzymamy:

$$T_m = T_{om} \cos \alpha - H \sin \alpha \dots [a]$$

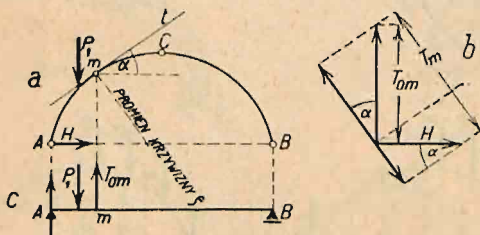


Fig. 269.

Rzutując zaś na styczną t , otrzymamy:

$$N_m = T_{om} \sin \alpha + H \cos \alpha \dots [b]$$

Wypadki szczególne: 1. Dla łuku symetrycznego otrzymamy:
Dla obciążenia całkowitego jednostajnie rozłożonego:

$$A = B = \frac{1}{2} p l; \quad H = \frac{M_{oc}}{f} = \frac{p l^2}{8 f};$$

dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na lewej połowie:

$$A = \frac{3}{8} p l; \quad B = \frac{1}{8} p l; \quad H = \frac{p l^2}{16 f};$$

dla siły skupionej P w środku:

$$A = B = \frac{1}{2} P; \quad H = \frac{P l}{4 f};$$

dla P w $\frac{1}{4}$ rozpiętości:

$$A = \frac{3}{4} P; \quad B = \frac{P}{4}; \quad H = \frac{P l}{8 f}.$$

2. Dla łuku parabolicznego o równaniu osi:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \text{ (fig. 270)}$$

otrzymujemy dla obciążenia całkowitego jednostajnie rozłożonego w przegubie środkowym:

$$N_c = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4f} + f \right); \quad M_c = 0;$$

dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na połowie:

$$N_c = \frac{p}{4} \left(\frac{l^2}{4f} + f \right); \quad M_m = + \frac{p l^2}{64}; \quad M_n = - \frac{p l^2}{64}.$$

Dla siły skupionej P w środku:

$$N_c = P \left(\frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right); \quad M_m = M_n = - \frac{Pl}{16}.$$

Dla siły skupionej P w punkcie m (fig. 11):

$$N_c = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{4f} + \frac{3f}{l} \right); \quad M_m = + \frac{3}{32} Pl.$$

$$N_m = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right); \quad M_n = + \frac{1}{32} Pl.$$

Linje wpływowe. a) Składowe pionowe oddziaływań, jak dla belki wolno podpartej (por. str. 1192, fig. 235 b).

b) Linja wpływowa parcia poziomego H ma kształt linji wpływowej momentu dla belki prostej ze względu na punkt c ze spół-

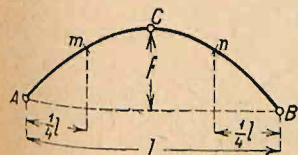


Fig. 270.

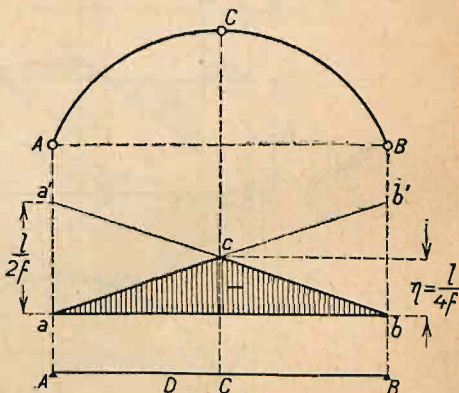


Fig. 271.

czynnikiem $\frac{1}{f}$ (fig. 271). Dla łuku symetrycznego ma linja wpływowa kształt trójkąta równoramiennego o największej rzędnej w środku, wynoszącej $\eta = \frac{l}{4f}$. Proste ac i bc odcinają na pionowych podporowych długości $aa' = bb' = \frac{l}{2f}$.

c) Siła poprzeczna wynosi:

$$T_m = T_{om} \cos \alpha - H \sin \alpha = T_{om} \cos \alpha - \frac{M_{oc}}{f} \sin \alpha,$$

gdzie T_{om} oznacza siłę poprzeczną w punkcie m dla belki prostej. Linja wpływowa jest różnicą rzędnych linji wpływowej T_{om} ze współczynnikiem

$\cos \alpha$ i linii wpływowej H ze współczynnikiem $\sin \alpha$ (względnie linii wpływowej M_{oc} ze współczynnikami $\frac{\sin \alpha}{f}$) (fig. 272).

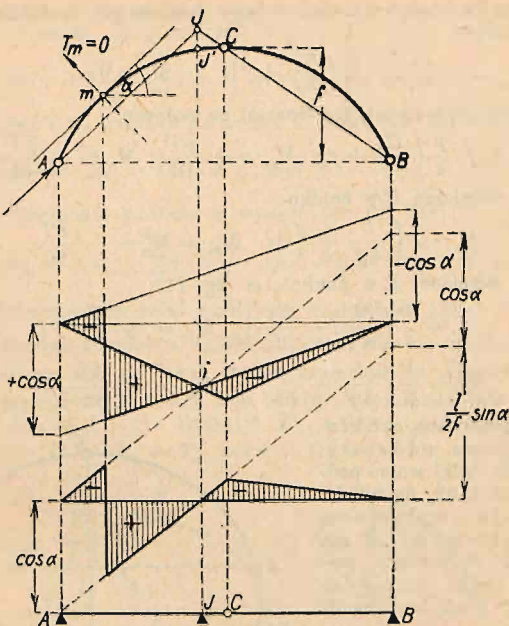


Fig. 272.

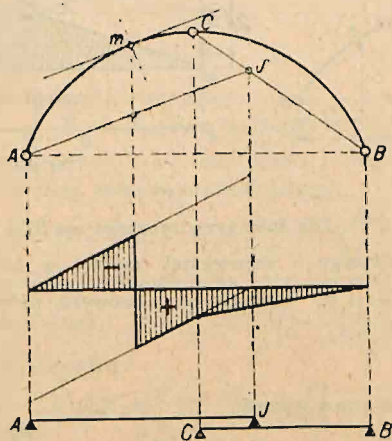


Fig. 273.

Punkt obojętny i znajdziemy, prowadząc z podpory A równoległą do stycznej do łuku w punkcie m aż do przecięcia z linią BC w punkcie J ; ciężar stojący bowiem w punkcie J daje siłę poprzeczną $T_m = 0$ (gdyż rzut

powstającego wtedy oddziaływania A na kierunku T_m jest równy zeru). Znalazłszy punkt J , możemy wyznaczyć linię wpływową siły T_m (ze współczynnikiem $\cos \alpha$), jak dla belki prostej t. zw. zastępczej wystającej

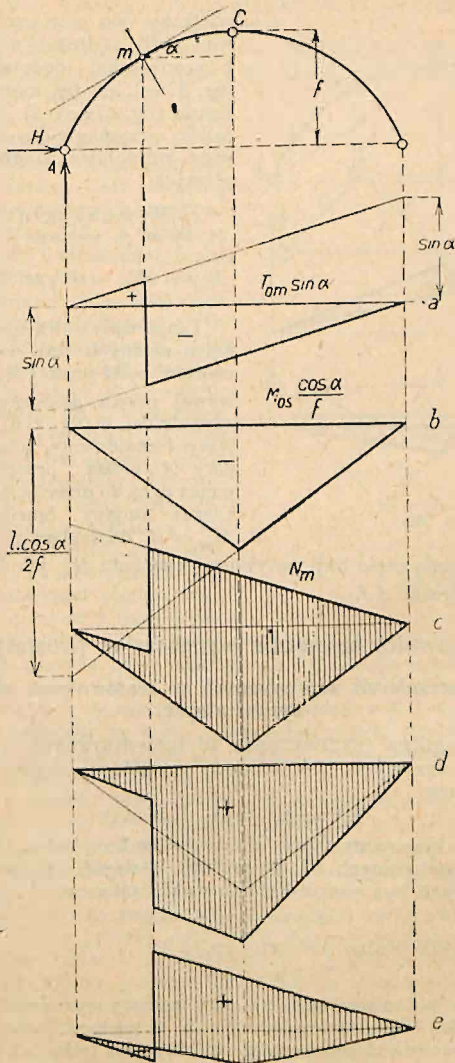


Fig. 274.

AJC (fig. 272) z zawieszoną w punkcie C belką CB . Punkt J może wypaść też między C i B , a wtedy linja wpływowa nie ma punktu obojętnego (zwykle dla przekrojów bliżej środka i łuków płaskich; fig. 273).

d) Siła podłużna. Wedle równania (b) linia wpływowa siły podłużnej (fig. 274) jest sumą powierzchni wpływowej T'_{om} ze współczynnikiem $\sin \varphi$ i powierzchni wpływowej M_{os} ze współczynnikiem $\frac{\cos \alpha}{f}$. Zależnie od

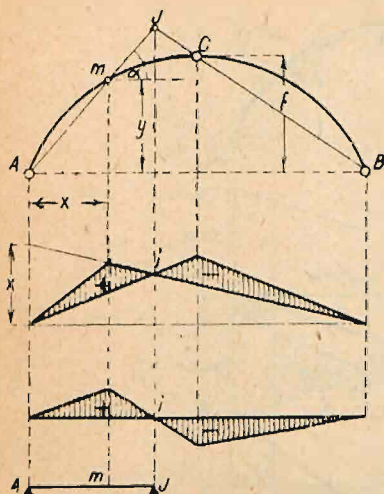


Fig. 275.

wyznaczyć dodatnią część linii wpływowej momentu M_m jak dla belki prostej zastępczej o długości AJ .

wielkości obu powierzchni linia wpływowa siły podłużnej może się składać z powierzchni dodatniej i ujemnej (fig. 274 e) lub też może być cała dodatnia (fig. 274 c i d). Ten ostatni wypadek otrzymamy dla dużego $\cotg \varphi$, więc w pobliżu środka i dla łuków płaskich.

e) Moment zginający. Moment osiowy w m wynosi:

$$M_m = M_{om} - Hy = M_{om} - M_{os} \cdot \frac{y}{f}.$$

Linia wpływowa momentu jest różnicą rzędnych linii wpływowej momentów belki prostej M_{om} i linii wpływowej partia poziomego H ze współczynnikiem y (fig. 275). Punkt obojętny J znajdziemy, prowadząc z podpory A prostą, przechodzącą przez punkt m aż do przecięcia się z linią BC . Ciężar stojący bowiem w J daje $M'_m = 0$. Znalazłszy punkt J , możemy

II. Kratownice statycznie wyznaczalne (izostatyczne).

a) Wyznaczanie sił wewnętrznych w kratownicach statycznie wyznaczalnych.

1. Metoda ogólna wyznaczania sił wewnętrznych w kratownicach statycznie wyznaczalnych. Dla każdego (wyciętego) węzła dadzą ustawić się dwa równania:

$$\sum V = 0, \text{ oraz } \sum H = 0$$

(por. str. 1053). Otrzymamy zatem dla w węzłów $2w$ równań równowagi; dla wyznaczenia niewiadomych sił (w prętach istotnych i łożyskowych) musi ilość niewiadomych być równa ilości równań, zatem musi być:

$$2w = p_i + p_l = p,$$

względnie dla belki wolno podpartej ($p_l = 3$):

$$2w - 3 = p_i.$$

Równania te można rozwiązać np. przy pomocy wyznaczników, przyczem niewiadome dadzą się ostatecznie wyrazić w postaci ilorazu dwu wyznaczników; wyznacznik Δ mianownika zależny jest tylko od kształtu kratownicy, zaś wyznacznik licznika Δ_1 także od obciążenia. Jeżeli kształt belki jest taki, że $\Delta = 0$, to siły wewnętrzne będą nieskończenie wielkie, jeżeli $\Delta_1 \geq 0$, zaś nieokreślone, jeżeli $\Delta_1 = 0$. Wtedy zachodzi wypadek omówiony też na str. 1187.

Tego sposobu obliczenia sił wewnętrznych używa się tylko wyjątkowo, jednak jest on punktem wyjścia dla innych sposobów.