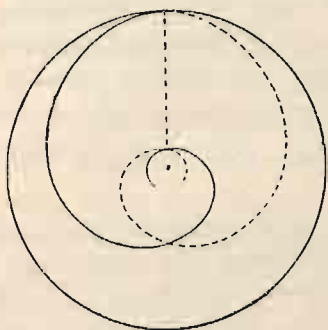
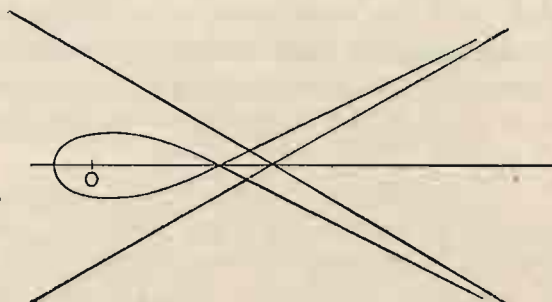


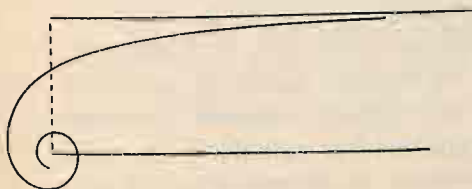
przy jakich warunkach ruchu początkowego zakreśla on każdy rodzaj z tych torów. (Rysunki te są wzięte z dzieła „Treatise on Dynamics by A. Gray and J. G. Gray“.—1911).



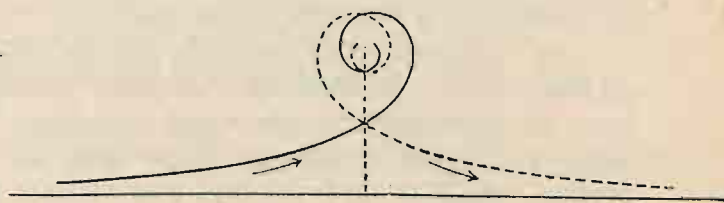
Rys. 23.



Rys. 25.



Rys. 24.



Rys. 26.

5. Ruch punktu nieswobodnego oraz ruch punktu z oporami.

A. Siły odporowe i siły oporowe.

39. Warunki fizyczne powstawania ruchu. Jeżeli punkt materalny pod działaniem sił danych wykonywa ruch nie zgodny z ruchem, wskazanym przez te siły, to po bliższem rozpatrzeniu warunków fizycznych, w jakich odbywa się taki ruch, zauważymy, że przyczyną tej niezgodności są ciała, z którymi styka się punkt ruchomy, i które zmieniają ruch, wyznaczony przez siły dane.

Jeżeli np. punkt materalny pod działaniem siły ciężenia, zsuwa się po płaszczyźnie pochyłej, to płaszczyzna dana przedstawia właśnie ten fizyczny warunek, który nie pozwala punktowi zakreślić toru pionowego ruchem, wyznaczonym siłą ciężenia, lecz zmusza go do wykonywania ruchu po płaszczyźnie. Bryłę, znajdującą się w takich warunkach, nazwaliśmy w § 137 tomu I-go bryłą nieswobodną.

W przykładzie zaś spadania brył w powietrzu lub w jakim innem środowisku fizycznym opór danego środowiska jest tym czynnikiem fizycznym, który

zmienia ruch punktu, wyznaczony siłami ciężenia; w danym razie mówimy, że punkt ruchomy doznaje oporu.

Ponieważ warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch, wpływają na zmianę danego ruchu, przypisujemy im przeto właściwości sił. Siły te obliczyć można ze zmian, jakie one wywołują w ruchu punktu, poddanego działaniu danych sił. Gdy więc rozpatrujemy ruch punktu nieswobodnego lub też ruch z oporami, to przyjmujemy, ażeby być w zgodzie z pojmowaniem i określeniem siły, że działają na niego oprócz sił zewnętrznych inne jeszcze siły, pochodzące od otaczających go ciał. Temi siłami bywają:

1) siły odporowe, inaczej zwane siły połączeń, które występują w miejscach zetknięcia się punktu lub bryły ruchomej z powierzchniami, otaczających ją ciał sztywnych. Siły, pochodzące od ciał sztywnych i gładkich, stykających się z punktem ruchomym, są normalne do powierzchni zetknięć, lub też do krzywych, po których punkt się porusza. Siły te odznaczają się tą właściwością, że ich praca, podczas przesunięcia przystosowanego, równa się zeru;

2) siły tarcia, które występują podczas ruchu punktu lub bryły po torze, lub po powierzchni. Wielkości tych sił zależą, jak doświadczenia uczą, przede wszystkim od współczynników, właściwych stykającym się bryłom; następnie zależą od wielkości ciśnienia normalnego tychże brył; nie bez wpływu przytem pozostaje prędkość względna obydwóch brył, oraz wielkość powierzchni zetknięcia się. Dla zwykłych warunków przyjmujemy, że siła tarcia równa się iloczynowi z siły normalnej, i współczynnika tarcia;

3) siły, powstające wskutek oporu środowiska, w którym porusza się dany punkt. Siły, występujące w tych warunkach, nazywamy siłami oporowymi danego środowiska; lub krótko nazywać będziemy je oporami. Wielkości tych sił zależą od geometrycznej postaci bryły ruchomej; od fizycznych właściwości danego środowiska; (np. od większej lub mniejszej gęstości); i od prędkości poruszającej się bryły względem środowiska. Dla większości przypadków przyjmujemy zgodnie z doświadczeniami i rozważaniami teoretycznymi, że siły te są proporcjonalne do pierwszej lub do drugiej potęgi z prędkości bryły ruchomej względem środowiska.

Siły te oraz siły tarcia mają tę wspólną właściwość, że kierunki ich działania zlewają się z kierunkami prędkości poruszającego się punktu, a zwroty ich są przeciwne zwrotowi tejże prędkości; wskutek czego praca przystosowana tych sił jest zawsze odjemną;

4) siły sprężystości brył lub też linii materyalnych, po których porusza się punkt dany lub też do których jest on przymocowany. Przykładem tego przypadku służyć może ciężar, przyczepiony do jednego końca nici sprężystej, gdy drugi koniec jest unieruchomiony w przestrzeni lub też gdy jest w pewnym określonym ruchu. Wielkości tych sił są w przybliżeniu, zależnie od fizycznych właściwości brył lub linii materyalnych, proporcjonalne do wielkości ich odkształceń; praca zaś ich może być tak odjemną, jak i dodatnią. Podczas odkształcenia bryły lub linii sprężystej, siły sprężystości wykonują pracę odjemną; podczas zaś powrotu tych ciał do stanu pierwotnego praca ich jest dodatnią; a suma algebraiczna obydwóch prac, jak doświadczenia uczą, jest zawsze odjemną, i wartość jej zależy

od fizycznych właściwości brył. W przypadkach, w których suma ta jest tak małą w porównaniu z innymi wielkościami danego zadania, że można jej wartość liczbową pominąć, przyjmujemy ją często dla uproszczenia rachunku równą zeru.

Zadaniem naszym obecnie jest wskazanie sposobów obliczenia ruchu punktu, odbywającego się w wyłuszczonych warunkach.

Pod względem kinematycznym zadania te podzielić można na dwie grupy:

- 1) zadania na ruch punktu **swobodnego**; (z oporami, lub bez nich); oraz
- 2) zadania na ruch punktu **nieswobodnego**, (z oporami lub bez nich).

Gdy punkt jest nieswobodny, ilość spółrzędnych, wyznaczających położenie punktu jest mniejszą od trzech, cośmy szczegółowo wyłożyli na str. 66 tomu I-ego. Do obliczenia przeto ruchu punktu nieswobodnego potrzeba jedno lub dwa równania algebraiczne zależnie od ilości stopni swobody, t. j. zależnie od tego, czy punkt porusza się po linii, czy też po powierzchni.

Ruch punktu swobodnego z oporami lub bez oporów posiada trzy stopnie swobody; do jego przeto obliczenia należy mieć trzy równania algebraiczne.

40. Rodzaje zadań. Zadania na obliczenie ruchu punktu wogóle, podzielimy przeto na następujące grupy:

I. Punkt jest swobodny, a ruch jest:

- 1) bez oporów lub też;
- 2) z oporami. W obydwu tych przypadkach punkt posiada trzy stopnie swobody.

II. Punkt jest nieswobodny:

- 1) a ruch jest bez oporów, lub też
- 2) z oporami. W obydwóch tych przypadkach punkt posiada jeden lub dwa stopnie swobody.

Do rozwiązania zadań obydwóch grup stosujemy zasady, wyłożone w rozdziałach poprzednich; i w tym celu wyobrazimy sobie, że na dany punkt oprócz sił zewnętrznych działają jeszcze siły odporowe łącznie z oporowemi i następnie zestawimy odnośne równanie dynamiczne, jak dla punktu swobodnego.

B. Ruch punktu swobodnego z oporami.

41. Przykład. Przykładem tego ruchu jest ruch punktu ciężkiego, wyrzuczonego w powietrzu. Szczególny przypadek tego ruchu rozpatrywaliśmy w § 17-ym, w którym nie uwzględnialiśmy oporu powietrza, w § 7-m zaś rozpatrywaliśmy ten ruch z uwzględnieniem oporu, gdy punkt nie posiadał prędkości początkowej; obecnie przyjmiemy, że punkt ma nadaną pewną początkową prędkość, której kierunek tworzy z poziomem kąt α . Na dany punkt w danym razie działa:

- 1) siła ciężkości $m\bar{g}$, oraz
- 2) siła oporu \bar{W} ; której kierunek zlewa się z kierunkiem chwilowej prędkości punktu; a zwrot jest jej przeciwny, rys. 27-my. Równanie dynamiczne ruchu punktu w środowisku z oporami jest przeto następujące:

$$m\bar{g} + \bar{W} = m \frac{d\bar{v}}{dt},$$

w którym są dwie zmienne v i t . Równania tego całkować nie możemy w ten sposób, jakieżś to wykonali na str. 45-ej; kierunek bowiem prędkości, a więc i siły \bar{W} jest zmienny. Zastosujemy przeto całkowanie algebraiczne, i w tym celu rzutujemy to równanie na dwie osi wzajemnie prostopadłe rys. 27-my, jakieżś to uczynili w § 17-ym. Równanie rzutów na oś x jest następujące:

$$-W_x = m \frac{dv_x}{dt};$$

równanie zaś rzutów na oś y :

$$mg + W_y = m \frac{dv_y}{dt}.$$

Przyjmijmy, że opór jest proporcjonalny do drugiej potęgi prędkości, t. j. $W = kv^2$; a więc:

$$W_x = kv^2 \cos \alpha; \text{ oraz } W_y = kv^2 \sin \alpha;$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia stycznej do toru, przeprowadzonej w miejscu rozpatrywanem. Jeżeli wprowadzimy jako zmienne rzuty prędkości na osi, to:

$$W_x = kvv_x; \quad W_y = kvv_y.$$

Podstawimy wartość W_x w pierwsze równanie, a obliczymy bezpośrednio jego całkę. W tym celu oddzielimy zmienne i otrzymamy następujące równanie:

$$-kvd t = m \frac{dv_x}{v_x};$$

a przyjąwszy warunki ruchu początkowego dla $s = 0$:

$$v_x = C_x, \quad v_y = C_y,$$

oraz podstawivszy: $v dt = ds$; otrzymamy bezpośrednio całkę:

$$-ks = m \lg \frac{v_x}{C_x};$$

skąd:

$$v_x = C_x e^{-\frac{ks}{m}}.$$

Równanie to daje związek pomiędzy rzutem v_x prędkości i drogą s ; znalezienie bowiem związku pomiędzy v_x i t , jakieżś to uczynili poprzednio, sprawia przy całkowaniu znaczne trudności. Z tej też przyczyny v_y trudno jest wyrazić funkcją t .

W przypadku takich trudności matematycznych staramy się obliczyć związki pomiędzy innemi zmiennymi, będącemi w pewnem ściśle określonym związku z ruchem danego punktu. W danym np. przypadku można wyrazić spórzędne punktu funkcją tangensa kąta, jaki tworzy styczna do toru z osią x . Obliczenie to prze-

prowadzono w mechanice Auteurietha, (w tłumaczeniu inż. St. Patschkego na str. 324-tej), do której zwracam czytelnika.

Postępowanie rachunkowe w rozwiązaniu zadania powyższego jest łatwiejsze, gdy przyjmimy, że opór środowiska jest proporcjonalny do pierwszej potęgi z prędkości. Wtedy mamy równanie dynamiczne:

$$m\bar{g} - k\bar{v} = m \frac{d\bar{v}}{dt},$$

którego rzut na oś x daje następujące równanie:

$$1) \quad -k v_x = m \frac{dv_x}{dt};$$

a na oś y :

$$2) \quad mg - kv_y = m \frac{dv_y}{dt}.$$

Całka pierwszego równania po przyjęciu dla: $t = 0$:

$$x = 0, y = 0, v_x = C_x \text{ i } v_y = C_y;$$

jest następująca:

$$t = -\frac{m}{k} \lg n \frac{v_x}{C_x};$$

skąd:

$$1) \quad v_x = C_x e^{-\frac{k}{m}t}.$$

W celu scałkowania równania drugiego, przekształcimy je na następujące:

$$(mg - kv_y) = -\frac{m}{k} \frac{d(mg - kv_y)}{dt};$$

z którego, po oddzieleniu zmiennych, napiszemy bezpośrednio jego całkę:

$$t = -\frac{m}{k} \lg n \frac{mg - kv_y}{mg - kC_y}; \text{ skąd:}$$

$$mg - kv_y = (mg - kC_y) e^{-\frac{k}{m}t}; \text{ i wreszcie:}$$

$$2) \quad v_y = \frac{m}{k} g - \left(\frac{m}{k} g - C_y \right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Obliczymy następnie właściwe równania ruchu, podstawivszy w równania powyższe:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \text{ oraz } v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Równania te po scałkowaniu są następujące:

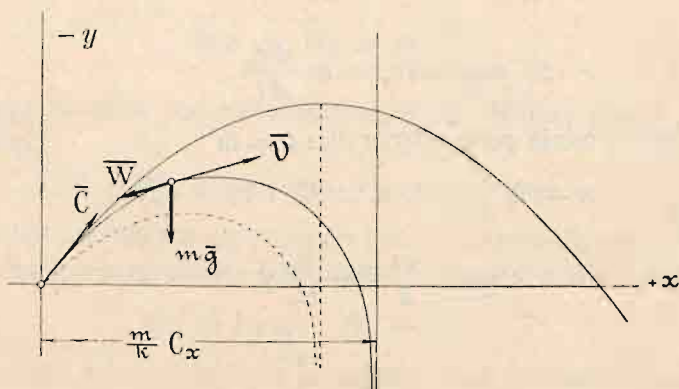
$$1) \quad x = \frac{m}{k} C_x \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right); \text{ oraz:}$$

$$2) \quad y = \frac{m}{k} g t - \frac{m}{k} \left(\frac{m}{k} g - C_y \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right).$$

Z równań tych wynika, że z powiększeniem czasu wartość wyrazu $e^{-\frac{k}{m} t}$ maleje, a spółrzędna x zbliża się do pewnej stałej wielkości, równej $\frac{m}{k} C_x$; y zaś wzrasta do nieskończoności.

Dla $t = \infty$, mamy:

$$x_m = \frac{m}{k} C_x; \text{ a } y = \infty; \text{ oraz } v_x = 0; v_y = \frac{m}{k} g.$$



Rys. 27.

Prosta przeto $x_m = \frac{m}{k} C_x$ jest asymptotą toru, rys. 27-my, a kierunek prędkości zbliża się do kierunku pionowego, wartość zaś jej zbliża się do pewnej stałej wartości; porów. wyniki obliczeń w § 7-ym.

Ruch tego punktu może być uważany za przybliżony obraz, w którym opór jest proporcjonalny do innej potęgi z prędkości.

Łatwo wywnioskować, że dla tych przypadków, przy jednakowych warunkach początkowych, asymptota toru będzie leżała bliżej miejsca wyjścia punktu, a wysokość wzniesienia będzie mniejszą; energia bowiem początkowa punktu pójdzie nie tylko na pracę podniesienia punktu, lecz i na pracę oporów, która powiększa się z powiększeniem się oporów.

42. Równania ogólne ruchu punktu swobodnego z oporami. Ogólne równanie dynamiczne punktu swobodnego, poruszającego się w środowisku z oporami jest następujące:

$$\bar{P} + \bar{W} = m \frac{d\bar{v}}{dt},$$

w którym \bar{P} oznacza siłę, przyłożoną do punktu; \bar{W} — siłę oporową, której kierunek zlewa się z kierunkiem prędkości chwilowej; zwrot zaś jest przeciwny zwrotowi tej prędkości, a wartość jest pewną daną funkcją tejże prędkości i zależy od

fizycznych właściwości środowiska. Równanie powyższe przekształcić można na równanie algebraiczne, rzutując je np. na osi współrzędnych, jakieśmy to w powyższym przykładzie wykonali.

Stosowanie zasady pracy lub też zasady momentów w przypadkach ruchu z oporami nie daje tych dogodności rachunkowych, jakie dają te zasady w przypadku np. sił środkowych i zachowawczych. Praca bowiem sił oporowych zależy w danym razie od drogi, po jakiej przebywa punkt ruchomy. Do równania zaś momentu sił wejdzie moment sił oporowych; wskutek czego równania te są dosyć zawiłe pod względem matematycznym i nie dają się łatwo całkować.

Dla przybliżonych rozpatrywań tych ruchów może być stosowane z pewnem powodzeniem równanie dynamiczne siły normalnej i stycznej. Z równania siły normalnej obliczymy: $\rho = m \frac{v^2}{P_n}$ i drogą wykreślną wskazaną w § 21-szym, kolejno znajdować będziemy położenia punktu ruchomego; a zważywszy że:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}_t - \bar{W},$$

otrzymamy:

$$\Delta \bar{v} = \frac{1}{m} (\bar{P}_t - \bar{W}) \cdot \Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Z równania tego wynika, że prędkość ruchu z oporami w miejscu np. 2-em jest mniejszą niż prędkość w temże miejscu tegoż punktu, poruszającego bez oporu; a ponieważ wartości P_n są te same dla obydwóch ruchów (bez oporów i z oporami), przeto promień krzywości toru w miejscu wyjścia punktu, poruszającego się z oporami, jest mniejszy niż takiż promień toru punktu, poruszającego się w temże polu sił, lecz bez oporów. Z czego wynika, że punkt poruszający się w środowisku z oporami, przy wyjściu z początkowego położenia, zakreśla tor o większej krzywości, niżby go zakreślił, gdyby oporów nie istniało; co też stwierdza przykład poprzedni.

C. Ruch punktu bez oporów po danym torze.

45. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po krzywej w płaszczyźnie poziomej. Na drut, zwinięty w postaci koła o promieniu r , nawleczona jest bryła materyjalna o ciężarze Q , której nadano, np. uderzeniem, pewną prędkość początkową v_0 , stycznie do obwodu koła. Obliczyć ruch bryty, gdy koło znajduje się w płaszczyźnie poziomej i gdy nie uwzględnimy tarcia pomiędzy bryłą a drutem.

Na bryłę działa siła ciężenia Q i siła odporu N , która sprowadza daną bryłę z toru prostoliniowego, jakiby wykonała pod działaniem siły ciężenia, na tor kołowy. Siła odporowa wobec nieuwzględnienia tarcia leży w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którym badamy ruch bryły; położenie zaś jej w tej płaszczyźnie jest nam nieznane, jak również i jej wielkość. Rys. 28-my

przedstawia płaszczyznę normalną do koła. Równanie dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące:

$$\bar{Q} + \bar{N} = m\bar{p};$$

Rzut tego równania na styczną do toru daje równanie:

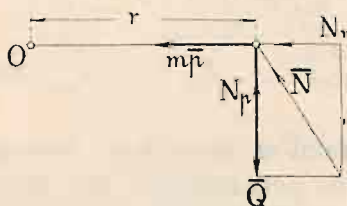
$$0 = mp_t;$$

z którego wynika, że ruch po torze odbywa się jednostajnie z prędkością stałą v_0 , równą prędkości początkowej danego punktu. Do tegoż wniosku dojdziemy zastosowawszy, zamiast równania rzutów na styczną do toru, zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej, która daje pierwszą całkę równania siły stycznej.

Praca bowiem sił w danym razie $= 0$; z czego wynika, że energia kinetyczna punktu, t. j. prędkość punktu pozostaje podczas ruchu niezmienną.

Ponieważ ruch jest jednostajny po kole, przeto przyspieszenie jego:

$$p_n = \frac{v_0^2}{r}; \quad p_t = 0.$$



Rys. 28.

W celu obliczenia siły normalnej zrzućmy powyższe równanie dynamiczne na promień koła, a otrzymamy:

$$N_r = m \frac{v_0^2}{r};$$

gdzie N_r oznacza rzut siły odporowej N na kierunku promienia, ze zwrotem dodatnim ku środkowi koła. Ażeby obliczyć drugi rzut siły N , zrzućmy

równanie dynamiczne na oś pionową, a otrzymamy:

$$Q - N_p = 0;$$

rzut bowiem przyspieszenia na pionową $= 0$. Siła przeto odporowa:

$$\bar{N} = \bar{N}_p + \bar{N}_r;$$

i można ją uważać za złożoną z dwóch sił: z siły pionowej równoważącej ciężar punktu, i z siły, wywołującej przyspieszenie p .

$$\text{Okres } T \text{ obiegu punktu: } T = \frac{2\pi r}{v_0}.$$

Pozostawia się czytelnikowi zastosowanie tych rozpatrywań do przypadku, w którym drut ma postać krzywej dowolnej, leżącej w płaszczyźnie poziomej.

44. Wahadło matematyczne stożkowe. Do jednego końca nici nierozciągliwej przymocowany jest punkt materialny o ciężarze mg ; drugi zaś jej koniec jest umocowany nieruchomo w przestrzeni rys. 29-ty. Obliczyć prędkość v_0 , jaką należy nadać temu punktowi, ażeby zakreślił on koło poziome o promieniu r , którego środek znajduje się na pionowej, przeprowadzonej przez punkt umocowania nici. Długość nici oznaczmy literą l , a jej naprężenie literą S .

Z równania tego wynika, że dla $r = 0$: $\alpha = 0$, a $\varphi = \sqrt{\frac{0}{0}}$; t. j. φ otrzymuje w tym przypadku wartość nieoznaczoną. Ażeby ją obliczyć wyrazimy zmienne α i r wspólną zmienną, w tym celu podstawimy: $r = h \operatorname{tg} \alpha$; i otrzymamy:

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Dla $\alpha = 0$, $h = h_{\max.} = l$; a $\varphi = \varphi_{\min.}$, czyli:

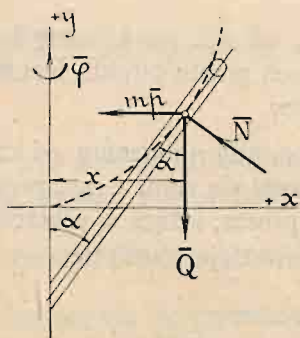
$$\varphi_{\min.} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Prędkość przeto obrotowa powinna mieć co najmniej wartość, wskazaną tym wzorem, jeżeli ma powstać odchylenie wahadła. Jeżeli zaś prędkość obrotowa φ jest mniejszą, to wahadło pozostanie w spoczynku. Powiększając przeto prędkość obrotową od zera do $\varphi_{\min.}$, wahadło nie doznaje żadnych odchyleń.

Czas obiegu T obliczymy z właściwości ruchu, że jest on jednostajny,—mamy przeto $2\pi r = v_0 T$, a po podstawieniu odpowiedniej wartości dla v_0 , mamy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}}.$$

45. Przykład. W rurce, obracającej się około osi pionowej, z prędkością stałą φ ; rys. 30-ty; której wewnętrzne ścianki są zupełnie gładkie, umieszczono



Rys. 30.

punkt materialny o ciężarze $m\bar{g}$ (np. w postaci kulki); znaleźć miejsce w tej rurce, w którem kulka ta, podczas obrotu rurki, pozostawać będzie w spoczynku względem rurki. Kąt, jaki tworzy oś rurki z osią obrotu, oznaczono literą α .

Na daną kulkę działa siła ciężkości i siła normalna; siły te wywołują przyspieszenie punktu, które jest skierowane po promieniu x koła, jakie on ma zakreślić i równa się $m \frac{v^2}{x}$; lub inaczej, ponieważ $v = x\varphi$, $p = x\varphi^2$; promień x wyznacza szukane położenie punktu. Równanie dynamiczne tego ruchu jest przeto następujące:

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}. \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Zrzutujmy to równanie na oś rurki; rzut bowiem siły odporowej równa się w tym razie zeru; a otrzymamy równanie:

$$mg \cos \alpha = mx\varphi^2 \sin \alpha;$$

z którego obliczymy położenie punktu ruchomego, odpowiadające postawionym warunkom:

$$x = \frac{g}{\varphi^2} \cotg \alpha \dots \dots \dots (99)$$

Z równania tego wynika, że przy stałych wielkościach g i φ , x zależy od kąta α . Zmieniając przeto kąt α , rurka będzie zmieniać swe położenia, a oś jej będzie styczną do pewnej krzywej. Krzywa ta będzie miała taką właściwość, że punkt ruchomy w każdym jej miejscu będzie pozostawał w spoczynku lub w ruchu jednostajnym podczas jej obrotu ze stałą prędkością φ .

W celu obliczenia równania tej krzywej przeprowadzimy osi x i y , rys. 30-ty, a zważywszy, że oś rurki jest styczną do szukanej krzywej, napiszemy:

$\frac{dy}{dx} = \cotg \alpha$; a po podstawieniu tej wartości w równ. 99-te; otrzymamy:

$$x = \frac{g}{\varphi^2} \frac{dy}{dx};$$

skąd po oddzieleniu zmiennych i po scałkowaniu, otrzymamy równanie szukanej krzywej:

$$x^2 = \left(\frac{2g}{\varphi^2} \right) y + C.$$

Jest to równanie paraboli, a C jest stałą, zależną od wyboru położenia początku osi współrzędnych.

Zadanie to odmieńmy następnie w ten sposób, że punkt dany umieścimy w dowolnym miejscu rurki, które określimy odległością a od osi obrotu; i obliczymy siłę S , działającą wzdłuż osi rurki, jaką trzeba przyłożyć do niego, ażeby utrzymać go w spoczynku w danym miejscu rurki.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{S} + m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

Zrzutujemy to równanie na oś rurki (dla czego na tę oś?); a otrzymamy:

$$S + mg \cos \alpha = ma \varphi^2 \sin \alpha;$$

skąd:

$$S = m(a \varphi^2 \sin \alpha - g \cos \alpha).$$

Pozostawia się czytelnikowi zbadać, dla jakich wartości a , przy stałych φ i α , wartość S jest dodatnią, równą zeru, lub ujemną.

46. Ruch bez oporów punktu ciężkiego po prostej pochyłej Na punkt, zsuwający się bez tarcia po prostej, nachylonej względem poziomu, rys. 31-szy działa ciężar $m\overline{g}$ oraz siła odporowa toru \overline{N} ; siły te wywołują przyspieszenie \overline{p} punktu, które jest skierowane wzdłuż toru, (normalne bowiem przyspieszenie = 0), ze zwrotem dodatnim ku dołowi. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu w postaci wektorowej jest następujące:

$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p} \dots \dots \dots (100)$$

scałkujemy je od 0 do s i od 0 do v , a otrzymamy równanie ruchu w postaci:

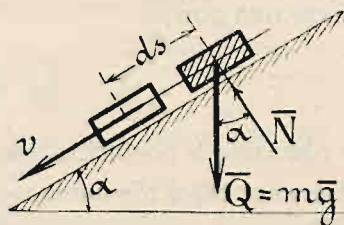
$$g \sin \alpha \cdot s = \frac{1}{2} v^2,$$

wykazujące zależność pomiędzy położeniem punktu na torze i jego prędkością.

Związek pomiędzy czasem i drogą, lub prędkością i czasem znajdziemy z równania dynamicznego, jakieśmy to uczynili poprzednio; lub też obliczymy go

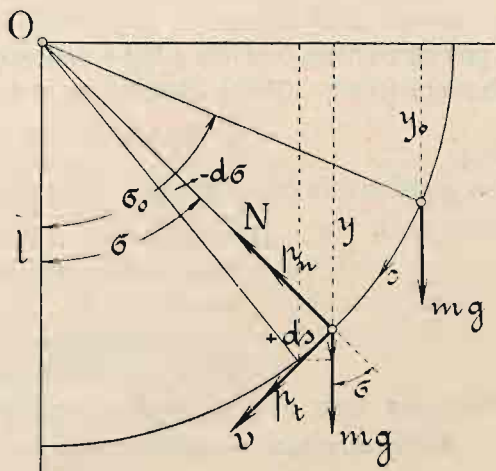
z równania pracy; gdy podstawimy w nie v lub ds z równania: $v = \frac{ds}{dt}$.

47. Wahadło matematyczne płaskie. Punkt materialny pod działaniem swego ciężaru ślizga się bez oporów po obwodzie koła, umieszczonego w płaszczyźnie pionowej. Obliczyć równania ruchu tego punktu i zbadać jego właściwości.



Rys. 32.

Ruch ten wywołać można jeszcze w inny sposób. Można np. punkt materialny przyczepić do jednego końca nici nierozciągliwej, której ciężaru i masy nie uwzględniamy, a drugi jej koniec unieruchomić w przestrzeni; odchyliwszy wtedy dany punkt od położenia pionowego i puściwszy go swobodnie, (lub nadawszy mu początkową prędkość w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia), otrzymamy ruch punktu po kole. Możemy również wyobrazić sobie tor w postaci koła materialnego, po którym ślizga się punkt ruchomy pod działaniem swego ciężaru. W tych obydwóch przypadkach punkt materialny, wyprowadzony z położenia równowagi, powracać będzie do tegoż położenia z pewną prędkością, która uniesie go, zgodnie z prawem bezwładności, na przeciwną stronę tego położenia; i w ten sposób powstanie ruch punktu, zwany wahadłowym. Położenie punktu na kole określimy kątem σ , jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła, z kierunkiem pionowym, rys. 33-ci.



Rys. 33.

Na punkt dany działa przeto siła ciężenia oraz siła odporowa N , jak w poprzednim przykładzie; siły te wywołują przyspieszenie p .

Równanie zatem dynamiczne danego ruchu jest następujące:

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}.$$

W celu obliczenia równań ruchu zrzućmy to równanie na styczną do toru, siła bowiem normalna, która jest nieznaną, zrzućmy się wtedy jako zero, a otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy przyspieszeniem stycznym p_t i współrzędną τ ; równanie to jest następujące:

$$mg \sin \tau = mp_t; \text{ lub inaczej: } g \sin \tau = \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Gdy podstawimy w to równanie:

$$v = \frac{ds}{dt} = -l \frac{d\tau}{dt}; \text{ oraz } \frac{dv}{dt} = -l \frac{d^2\tau}{dt^2};$$

przybierze ono postać:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) \cdot \sin \tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Jest to równanie w postaci różniczkowej ruchu danego punktu.

Pierwszą całkę równania ruchu można otrzymać z równania powyższego drogą odpowiednich przekształceń algebraicznych; lecz można je również otrzymać, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. W tym celu nadajmy danemu punktowi przesunięcie przystosowane ds , rys. 33-ci; a napiszemy równanie pracy:

$$mg \sin \tau \cdot ds = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

z przyjętego na rys. 33-cim sposobu liczenia kąta τ wynika, że:

$$ds = -l d\sigma;$$

(z powiększeniem bowiem s kąt σ maleje); a po podstawieniu tej wartości w równanie pracy (równ. 104-te), otrzymamy je w postaci:

$$-mgl \sin \tau \cdot d\sigma = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

a po scałkowaniu od σ_0 (miejsce puszczenia punktu) do σ i od 0 do v , otrzymamy:

$$mgl \left| \cos \sigma \right|_{\sigma_0}^{\sigma} = \left| \frac{1}{2}mv^2 \right|_0^v; \text{ skąd:}$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos \sigma - \cos \sigma_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Z równania tego obliczyć można prędkość punktu w każdym jego położeniu τ .

Ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci, podstawimy w równ.

106-te: $v = -l \frac{d\tau}{dt}$; a po rozwiązaniu jego względem dt , otrzymamy:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \sigma_0}};$$

skąd wreszcie:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \tau - \cos \sigma_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Pozostaje obecnie wykonać wskazane w tem równaniu całkowanie. Lecz całka wyrazu po prawej stronie nie daje się wyrazić zwykłemi funkcjami algebraicznemi; stanowi ona bowiem funkcję t. zw. eliptyczną, której wartość obliczyć można za pomocą rozwinięcia jej w szeregi, lub ze specyalnie, na podstawie tych szeregów, zestawionych tablic w tenże sposób, w jaki znajdujemy wartości funkcji logarytmicznych lub trygonometrycznych. Całkowanie przeto wzoru powyższego wykonamy z pewnem przybliżeniem; w tym celu przekształcimy daną funkcję w szereg, i zadowolimy się tylko pierwszymi wyrazami tego szeregu; przyjmiemy przeto:

$$\cos \sigma_0 = 1 - \frac{1}{2} \sigma_0^2; \quad \text{oraz} \quad \cos \sigma = 1 - \frac{1}{2} \sigma^2;$$

a po podstawieniu tych wartości w powyższe równanie, otrzymamy:

$$\int_0^t dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}};$$

a po scałkowaniu podług wzoru 32-go, podanego w „Techniku“ na str. 77-ej:

$$t = - \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arcsin \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right]_{\sigma_0}^{\sigma} \dots \dots \dots (108)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem t i położeniem punktu, wyznaczonem przez kąt σ ; i jest równaniem ruchu w skończonej postaci, gdy kąt odchylenia jest mały:

Jeżeli oznaczymy literą T okres podwójnego wahnięcia, to czas, potrzebny do przejścia punktu od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$, jest ćwiercią tego okresu; przeto obliczymy z powyższego wzoru:

$$\frac{1}{4} T = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\arcsin \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right]_{+\sigma_0}^0;$$

a po wykonaniu działań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (109)$$

48. Przypadek szczególny ruchu wahadłowego. W szczególnym przypadku całka równania 107-ego daje się wyrazić znanemi funkcjami; ten szczególny przypadek następuje, gdy $\sigma_0 = 180^\circ$, t. j. gdy dany punkt puszczony jest z najwyższego miejsca na kole t. j. z jego wierzchołka; po podstawieniu bowiem w równ. 107-me wartości: $\sigma_0 = 180^\circ$, przekształci się ono w nast.:

$$t = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \cos \sigma}} + C;$$

a po podstawieniu $1 + \cos \sigma = 2 \cos^2 \frac{\sigma}{2}$, otrzymamy wyraz, którego całkę podaje wzór 62-gi, zamieszczony w „Techniku“ na str. 79. Całka ta jest nast.:

$$t = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int \frac{d\frac{\sigma}{2}}{\cos \frac{\sigma}{2}} = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4} \right) + C.$$

Czas w danym razie zaczniemy liczyć od chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w miejscu najniższym na kole; a więc gdy $\sigma = 0$; wtedy $t = 0$; a po przedstawieniu tych wartości w równanie powyższe, otrzymamy:

$$0 = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \lg \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C; \text{ skąd } C = 0; \text{ a więc:}$$

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{4} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Ażeby obliczyć np. okres czasu, w jakim punkt dany podniesie się z miejsca najniższego na kole do jego wierzchołka, należy podstawić w równ. powyższe: $\sigma = -\pi$; gdyż w myśl przyjętego w tem rozpatrywaniu zwrotu ruchu, należy wyobrazić sobie, że punkt przebiega po kole ze zwrotem, zgodnym z obrotem wskazówki zegara. Po tem podstawieniu otrzymamy:

$$t = \infty.$$

Wynik ten wytłumaczmy sobie fizycznie w następujący sposób. Punkt dany dobiega do wierzchołka koła z prędkością, zbliżającą się do zera; dla przejścia przeto cząstek łuku koła, znajdujących się w bliskości wierzchołka koła, wymaga bezmiernie długiego okresu czasu, zbliżającego się do ∞ . I rzeczywiście np. dla $\sigma = -179^\circ$; $t \cong 1,8 \sqrt{l}$, t. j. posiada jeszcze skończoną wartość.

Wynik równ. 110-go nie jest w zgodzie z równ. 108-em, co jest zupełnie słuszne, gdyż równ. 108-mewyprowadziliśmy, czyniąc założenie, że kąt odchylenia jest bardzo mały, nie może być przeto stosowany do tego wręcz przeciwnego przypadku.

49. Dokładność wzoru przybliżonego. Jaką dokładność posiada wzór przybliżony, nie możebnem jest powiedzieć, dopóki nie znamy wzoru ścisłego; dla praktycznych jednakże celów, należy choć ocenić, w jakich granicach wzór przybliżony wyraża rzeczywistą zależność zmiennych. Ocenę tę uskutecznimy w powyższym przypadku drogą dynamicznych rozważań. W tym celu weźmy pod uwagę równanie pracy, równ. 104-te, które wzięliśmy za podstawę do naszych obliczeń. Wyraz

$$-mgl \sin \sigma \cdot d\sigma,$$

przedstawia pracę cząstkową siły ciężenia wzdłuż przesunięcia $-l \cdot d\sigma$; lecz zamiast tego wyrazu ścisłego przyjęliśmy do rachunku wyraz przybliżony:

$$-mgl\sigma \cdot d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

zastąpiliśmy bowiem w równ. 107-em $\cos \sigma$ wartością $(1 - \frac{1}{2}\sigma^2)$, co jest równoważne z przyrównaniem $\sin \sigma$ do długości łuku σ . Porównywując te dwa wzory pracy cząstkowej dokładny 105-ty i przybliżony 111-ty, zauważymy, żeśmy zamiast właściwej wartości:

$$mg \sin \sigma,$$

siły, przyspieszającej dany punkt, przyjęli do rachunku wartość przybliżoną:

$$mg\sigma,$$

która jest większą od poprzedniej; gdyż $\sigma > \sin \sigma$.

Większa siła wywołuje większe przyspieszenie punktu, lub też inaczej się wyrażając, większa siła podczas przesunięcia punktu materialnego sprawia większy przyrost jego energii kinetycznej, niż siła mniejsza, podczas tego samego przesunięcia. Prędkości zatem, obliczone z równania, opartego na wartości siły $mg\sigma$, są większe niż w rzeczywistości występują; a różnica ich jest tem większa, o ile σ różni się od $\sin \sigma$. Zbliżając np. wartości σ do zera, różnica ta zbliża się również do zera; a dla $\sigma = \frac{\pi}{2} = 1.57$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, różnica ta jest bardzo znaczna; a więc i okresy wahań, obliczone ze wzoru przybliżonego, o wiele różnić się będą od okresów rzeczywistych. Dla $\sigma > \frac{\pi}{2}$, wartość σ rośnie, wartości zaś $\sin \sigma$ maleją, a więc, gdy $\sigma > \frac{\pi}{2}$, zachodzi rozbieżność pomiędzy zmiennością tych wartości, przyjmujemy bowiem w rachunku przybliżonym, że siła przyspieszająca wzrasta proporcjonalnie do kąta odchylenia, a w rzeczywistości, blisko kąta $\sigma = \frac{\pi}{2}$, pozostaje ona prawie stałą; a dla, $\sigma > \frac{\pi}{2}$ maleje. Największa różnica zachodzi dla $\sigma = \pi$; wtedy bowiem $\sin \sigma = \sin \pi = 0$, a $\sigma = 3,14$. Dla odchyleni zatem $\sigma > \frac{\pi}{2}$ wzór przybliżony zupełnie się nie nadaje.

Potwierdzenie, wypowiedzianych wniosków, znajdziemy w następującym zestawieniu liczb, w którym σ_0 oznacza kąt początkowego odchylenia wahadła; F zaś współczynnik wzoru: $T = F\sqrt{\frac{l}{g}}$, odpowiadający rzeczywistemu wahnięciu wahadła i obliczony ze wzorów ścisłych; a więc dla:

$\sigma_0 =$	0°	5°	10°	20°	40°	60°	90°	120°	150°	180°
$F =$	6,2832	6,2860	6,2952	6,3212	6,4800	6,7432	7,4164	8,6260	11,0724	∞

gdy tymczasem we wzorze przybliżonym:

$$F = 2\pi = 6,2832,$$

dla wszystkich kątów odchylenia. Widzimy z tego zestawienia, że różnica okresów wahań np. dla $\sigma_0 = 40^\circ$, stanowi 3%; dla 90° około 20%, a dla większych kątów odchylenia znacznie rośnie.

50. Dokładniejszy sposób obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżenie, z jakim chcemy obliczyć szukane wartości, może być dowolne; gdyż zależy ono od ilości wyrazów, jakie weźmiemy do rachunku, przy rozwinięciu funkcji trygonometrycznej w szereg.

W celu uniknięcia długich szeregów możliwem jest również stosowanie innych skrótów, które prędzej prowadzą do wzorów dosyć dokładnych. Zastosujemy

np. skrócenia następujące, z których częściowo korzystaliśmy już w przykładach § 258 i następnych tomu I-go, a mianowicie, gdy ξ jest wielkością mniejszą od jedności, to mamy:

$$(1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \xi^2.$$

Ażeby wyraz pod pierwiastkiem rów. 107-ego sprowadzić do tej postaci, podstawimy w niego $\cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2}$; oraz $\cos \sigma_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma_0}{2}$; a otrzymamy:

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{\cos \sigma - \cos \sigma_0}} = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\sigma_0}{2} - \sin^2 \frac{\sigma}{2} \right)}} = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{2} \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\sigma}{2}}{\sin^2 \frac{\sigma_0}{2}}}}.$$

Wprowadzimy następnie nową zmienną ψ , określoną równaniem:

$$\frac{\sin \left(\frac{\sigma}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\sigma_0}{2} \right)} = \sin \psi,$$

i wyrazimy tę całkę funkcją tej zmiennej. Ażeby wyrazić $d\sigma$ zmienną ψ , zróżniczkujemy powyższe równanie i otrzymamy:

$$\cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot d \left(\frac{\sigma}{2} \right) = \cos \psi \cdot \sin \left(\frac{\sigma_0}{2} \right) \cdot d\psi; \text{ skąd:}$$

$$d\sigma = \frac{2 \cos \psi \cdot \sin \frac{\sigma_0}{2}}{\cos \frac{\sigma}{2}} d\psi;$$

podstawiając w nie

$$\cos \frac{\sigma}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2 \psi};$$

otrzymamy:

$$d\sigma = \frac{2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \frac{\sigma_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Po podstawieniu tych wartości, otrzymamy całkę poprzednią w nast. postaci:

$$\int \frac{2 \cos \psi \cdot \sin \frac{\sigma_0}{2} \cdot d\psi}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2 \psi}}.$$

Po skróceniu i podstawieniu w równanie 107-me otrzymamy:

$$t = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2 \psi}} \dots \dots \dots (112)$$

Granica $\psi = \frac{\pi}{2}$ odpowiada granicy $\sigma = \sigma_0$; drugą zaś granicą ψ obliczymy z σ , za pośrednictwem równania, określającego zmienną ψ .

Scałkujemy teraz powyższy wyraz sposobem skróconym, stosując wyżej przytoczony wzór, w który podstawimy:

$$\xi^2 = \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin^2 \psi;$$

i otrzymamy:

$$t = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \psi \cdot d\psi \right) \dots \dots (113)$$

Całkowanie tego wyrazu może być wykonane podług wzoru 53-go, znajdującego się na str. 79-ej „Technika”. W celu obliczenia np. okresu podwójnego wahnięcia scałkujemy je dla ćwierci podwójnego wahnięcia; dla którego granice całkowania są od $\frac{\pi}{2}$ do 0; wartości te bowiem odpowiadają granicom od $\sigma = \sigma_0$ do $\sigma = 0$. Całka wyrazu:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \psi d\psi = \left| -\frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{1}{2} \psi \right|_{\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4},$$

a po podstawieniu jej w równ. 113-te mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T &= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \right); \text{ skąd:} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\sigma_0}{2} \right) \dots \dots \dots (114) \end{aligned}$$

Z tego wzoru wynika, że okres wahań zależy od amplitudy σ_0 . Dokładność tego wzoru dalej sięga, niż wzoru poprzedniego; nie jest ona jednakże zupełną i np. dla $\sigma_0 = \pi$, wzór ten nie da wartości $T = \infty$; jaką powinien dać wzór dokładny.

Gdy podstawimy jeszcze dla uproszczenia rachunku $\sin \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$; wtedy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{16} \right) \dots \dots \dots (115)$$

Wartość okresu, obliczona z tego wzoru, jest większą, niż otrzymana ze wzoru 109-ego, co było już przez nas przewidziane.

51. Obliczenia siły odporowej wahadła. W celu obliczenia siły odporowej toru, gdy wyobrażamy sobie ruch punktu po kole materialnym; lub jak w przykładzie z wahadłem, — naprężenia nici, należy rzutować równanie dynamiczne tego ruchu możliwie w ten sposób, ażeby dało bezpośrednio związek pomiędzy siłą odporową N i prędkością punktu; — przyjmujemy bowiem, że prędkość ta jest już obliczona z równania pracy. Równanie to otrzymamy, rzutując równanie dynamiczne tego ruchu na normalną do toru, a zważywszy, że

$p_n = \frac{v^2}{l}$ otrzymamy:

$$N - mg \cos \sigma = m \frac{v^2}{l}; \text{ skąd:}$$

$$N = mg \cos \sigma + m \frac{v^2}{l} \dots \dots \dots (116)$$

Podstawmy w nie z równania pracy:

$$v^2 = 2gl (\cos \sigma - \cos \sigma_0),$$

a otrzymamy:

$$N = mg (3 \cos \sigma - 2 \cos \sigma_0) \dots \dots \dots (117)$$

Równanie to daje zależność siły odporowej od położenia wahadła. Szczególne przypadki:

1) Gdy $\sigma_0 = 0$, oraz $\sigma = 0$, t. j. gdy punkt jest zawieszony pionowo, wtedy $N = mg$; naprężenie nici w danym przypadku równa się ciężarowi punktu, jest to przypadek równowagi.

2) Dla $\sigma = \sigma_0$; $N = mg \cos \sigma$; t. j. naprężenie nici w początkowym jego położeniu równa się rzutowi ciężaru punktu na kierunek promienia, co wypada również ze statycznych rozpatrywań.

3) W najwyższym początkowym położeniu punktu t. j. dla $\sigma_0 = 180^\circ$ i dla $\sigma = 180^\circ$; $N = -mg$; co się znaczy, że do punktu, znajdującego się na wierzchołku koła, należy przyłożyć siłę, skierowaną po promieniu na zewnątrz koła; dodatny bowiem zwrot siły N przyjęliśmy w danym rachunku ku środkowi koła. W modelu więc fizycznym, przedstawiającym ten ruch, zamiast nici powinniśmy w danym razie zastosować pręt sztywny; siła ciśnienia pręta równa się w tym przypadku ciężarowi danego punktu. Przytoczone trzy przypadki są zgodne z twierdzeniami statyki.

4) N będzie największe dla danego odchylenia σ_0 , gdy $\cos \sigma$ będzie największe, co nastąpi dla $\sigma = 0$; t. j. największe naprężenie dodatne, przy dowolnym pierwotnym odchyleniu, następuje zawsze w najniższym położeniu punktu.

5) Bezwzględnie największą dodatnią wartość otrzyma N , gdy $\cos \sigma = +\max$; a $\cos \sigma_0 = -\max$. Przypadek ten nastąpi, gdy $\sigma = 0$; a $\sigma_0 = 180$; t. j. bezwzględnie największe naprężenie nici następuje w położeniu pionowym, gdy punkt

rozpoczął swój ruch z wierzchołka koła. Wartość ta równa się $5 \cdot mg$; naprężenie więc nici w tych warunkach jest pięć razy większe od ciężaru punktu.

6) Ponieważ naprężenie wahadła, gdy punkt znajduje się na wierzchołku koła, jest ujemne, gdy zaś spadnie na spód koła jest dodatne; przeto istnieć powinno miejsce, w którym $N=0$. Oznaczmy to miejsce literą σ' ; a obliczymy je z równ. 117-tego, gdy podstawimy w nie $N=0$ oraz $\sigma_0 = 180^\circ$; a zatem mamy:

$$3 \cos \sigma' + 2 = 0; \text{ skąd: } \cos \sigma' = -\frac{2}{3}; \text{ a } \sigma' \cong 180^\circ - 48^\circ \cong 132^\circ.$$

Punkt więc, spadający z wierzchołka koła, wywołuje w położeniu $\sigma < 132^\circ$ siłę odporową, zwróconą ku środkowi koła; powyżej zaś tego miejsca wywołuje siłę odporową, zwróconą na zewnątrz koła.

52. Bezpośredni sposób przybliżonego obliczenia ruchu wahadłowego. Przybliżone obliczenie ruchu wahadłowego, przeprowadzone w § 47-ym, może być bezpośrednio zastosowane przy zestawieniu równania dynamicznego.

Przyjawszy bowiem, że długość l jest dosyć wielką w porównaniu z kątem odchylenia σ_0 , przyjąć możemy z pewnem przybliżeniem, że cząstka łuku, jaką zakresła punkt, zlewa się ze styczną do tego łuku; t. j., przyjmiemy, że punkt przebiega po prostej x , rys. 33-ci. Siła przyspieszająca punkt jest $Q \sin \sigma$; lub inaczej,

po podstawieniu $\sin \sigma = \frac{x}{l}$, siła przyspieszająca $= Q \frac{x}{l}$; równanie przeto dynamiczne ruchu jest nast:

$$-Q \frac{x}{l} = m \frac{dv}{dt},$$

z którego, po podstawieniu $Q = mg$; i po skróceniu przez m , otrzymamy:

$$-x = \frac{l}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \dots \quad (118)$$

Równanie to pod względem algebraicznym jest jednakowe z równ. 21-em:

$$-x = \frac{m}{k} \frac{dv}{dt},$$

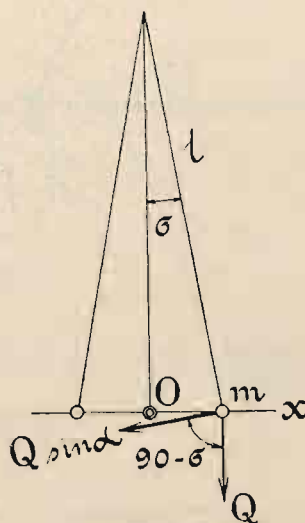
wyprowadzonym w § 8-ym, gdy podstawimy w nie

$$\frac{m}{k} = \frac{l}{g}.$$

Możemy przeto uniknąć całkowania

tego równania, skorzystawszy bezpośrednio z wyników, poprzednio otrzymanych. Wzór np. podwójnego wahnięcia danego wahadła obliczymy z równ. 28-go:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Rys. 33.

53. Ruch punktu po cykloidzie pospolitej. W ruchu wahadłowym, któryśmy opisali w poprzednim przykładzie, punkt materalny zmuszony był przebiegać po kole, lecz może on również poruszać się po dowolnej krzywej; a metoda wyżej stosowana da się również zastosować do wszelkich przypadków ruchu po torze.

Przyjmijmy, że tor, po którym porusza się punkt materalny pod działaniem siły ciężenia, jest cykloidą pospolitą, rys. 34-ty, i zestawmy równania ruchu tego punktu.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy równanie pracy i napiszemy bezpośrednio:

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)};$$

przyjmując, że punkt przesuwa się z miejsca, wyznaczonego przez spółrzedną y_0 , do położenia y ; rys. 34-ty.

Znajdźmy teraz równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy położeniem punktu a czasem; w tym celu

podstawimy $v = -\frac{ds}{dt}$; a ponie-

waż z geometrycznych właściwości cykloidy wynika, że:

$$ds = \sqrt{\frac{2r}{y}} \cdot dy;$$

przeto po podstawieniu tej wartości w równanie prędkości, otrzymamy:

$$-\frac{dy}{dt} \cdot \sqrt{\frac{2r}{y}} = \sqrt{2g(y_0 - y)}, \text{ skąd:}$$

$$-\int_0^t dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{y_0 y - y^2}}.$$

Przyjmując, dla $t = 0$, $y = y_0$ i całkując (Techn. tom I, str. 77, wzór 34), otrzymamy:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[\arcsin \left(\frac{y_0 - 2y}{y_0} \right) \right]_{y_0}^y \dots \dots \dots (119)$$

Jeżeli literą T oznaczmy okres podwójnego wahnięcia, to okres przejścia punktu z $y = y_0$, do $y = 0$, jest $\frac{1}{4} T$; a więc:

$$\frac{1}{4} T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arcsin \frac{y_0 - 2y}{y_0} \right]_{y_0}^0;$$

a po podstawieniu:

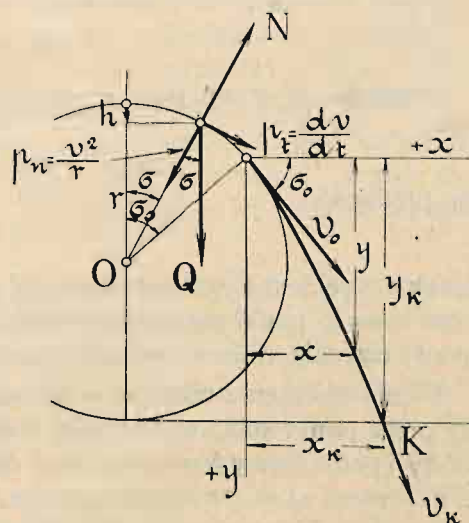
$$\frac{1}{4} T = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

i wreszcie:

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}; \text{ lub inaczej: } T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}} \dots \dots \dots (120)$$

Ze wzoru tego wynika, że okres wachnięcia nie zależy od y_0 , t. j. nie zależy od początkowego położenia punktu materialnego. Gdy więc puścimy punkt materialny z jakiegobądź miejsca cykloidy, okresy jego wachnięć będą jednakowe; ruch przeto wahadła cykloidalnego jest izochroniczny. Wynik ten możemy sobie w następujący sposób wytłumaczyć fizycznie. Gdy punkt dany opuścimy z wyższego miejsca cykloidy, wtedy spada on po torze więcej spadzistym, wskutek czego nabiera od razu znacznej prędkości; gdy tymczasem puszczony z miejsca niżej położonego, w którym nachylenie toru jest więcej zbliżone do poziomu, poruszać się będzie wolniej. Punkt dany przebywa przeto dłuższą drogę z większą prędkością, drogę zaś krótszą z mniejszą prędkością w ten sposób, że okresy czasu, w jakich on przebywa te drogi, są wzajemnie równe. Izochronizm w danym razie jest przeto wynikiem postaci danego toru. Chcąc wyrazić tę właściwość, nazwano cykloidę tautochroną czyli krzywą jednakowych okresów czasu.

54. Spadanie punktu ciężkiego po kole. Na wierzchołku obwodu koła o promieniu r , ustawionego pionowo, rys. 35-ty, umieszczono punkt materialny o ciężarze Q , który pod działaniem swego ciężaru zsuwa się bez tarcia po obwodzie tego koła. Wyznaczyć miejsce, w którym dany punkt opuści obwód koła; i wyznaczyć miejsce, w którym spadnie on na poziom, na którym stoi koło; oraz obliczyć prędkość, jaką on posiada w tem miejscu.



Rys. 35.

Przyjmujemy, że dany punkt wprowadzony jest przez małe odchylenie ze stanu równowagi niestałej, w jakiej się znajduje na wierzchołku koła; po tem odchyleniu następuje ruch, wywołany siłą ciężenia. Punkt dany opuści obwód koła w tem miejscu, w którym siła odporowa równa się zeru i zmienia swój znak. Określmy dowolne położenie punktu na kole przez kąt środkowy σ , rys. 35-ty, i oznaczmy literą N siłę odporową, skierowaną na zewnątrz koła; w miejscu zatem, w którym punkt ruchomy opuści obwód koła, siła ta będzie: $N = 0$, a przy dalszym ruchu zmieni swój znak. Zadanie więc polega na wyrażeniu siły N funkcją spółrzednej σ ; a po przyrównaniu tej wartości do zera, otrzymamy równanie, z którego obliczymy szukany kąt, t. j., obliczymy spółrzedną σ_0 położenia, w którym punkt opuści obwód koła.

Na punkt dany działają siły \vec{N} i \vec{Q} , które wywołują przyspieszenie \vec{p} , mamy zatem równanie dynamiczne:

$$\vec{N} + \vec{Q} = m\vec{p}.$$

Równanie szukane otrzymamy, rzutując to równanie na promień koła, zatem:

$$N - Q \cos \tau = m \frac{v^2}{r}.$$

W równaniu tem prędkość należy wyrazić spółrzedną σ i w tym celu zrzutujemy równanie dynamiczne na styczną, a otrzymamy szukany związek pomiędzy v i τ ; lub zamiast tego równania napiszemy odrazu jego całką w postaci równania pracy.

$$Qh = \frac{1}{2} m v^2.$$

Podstawivszy w nie:

$$h = r(1 - \cos \tau); \quad Q = mg,$$

otrzymamy:

$$v^2 = 2gr(1 - \cos \tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$N = Q(3 \cos \sigma - 2).$$

Kąt σ_0 , przy którym $N = 0$, obliczymy z nast. równ.:

$$\cos \tau_0 = \frac{2}{3}.$$

Prędkość v_0 w miejscu σ_0 obliczymy z równania 121-ego, podstawivszy w nie:

$$\cos \sigma = \cos \sigma_0 = \frac{2}{3};$$

zatem prędkość:

$$v_0^2 = \frac{2}{3} gr;$$

kierunek zaś jej jest styczny do koła. W miejscu, wyznaczonem kątem τ_0 , z równania: $\cos \tau_0 = \frac{2}{3}$, punkt staje się swobodny, posiada prędkość v_0 i podlega działaniu tylko siły ciężenia, o ile nie uwzględnimy oporu powietrza.

W celu obliczenia miejsca, w którym punkt upadnie na poziom, przeprowadzimy przez punkt koła, wyznaczony kątem σ_0 , dwie wzajemnie prostopadłe osi, rys. 35-ty, i podstawimy w równanie toru danego punktu, wyprowadzone na str. 44-tej, $y_k = r + r \cos \sigma_0 = \frac{5}{3} r$; a otrzymamy:

$$x_k = (10 - \sqrt{10}) \frac{2}{27} r \sqrt{2} \cong 0,716 r.$$

Wartość prędkości w miejscu K obliczymy z równania pracy podstawivszy, $h = 2r$:

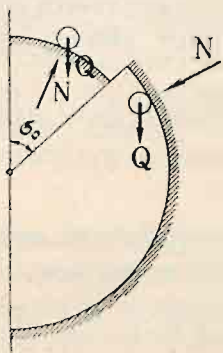
$$v_k = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}.$$

Jeżeli zaś punkt ma nie spaść z obwodu koła, należy zbudować je w sposób, wskazany na rys. 36-ym.

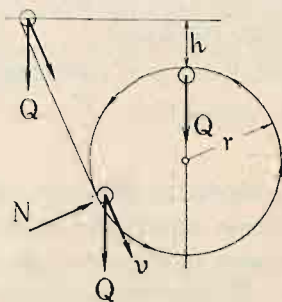
55. Zadanie. Punkt materyalny pod działaniem siły ciężenia spada z pewnej wysokości po torze prostym, do którego przytyka się koło w ten sposób,

że tworzy ono przedłużenie tego toru, rys. 37-my. Obliczyć wzniesienie h ponad wierzchołkiem koła, z którego puszczonego punktu nie spadnie z koła; nie uwzględniając tarcia i innych oporów, jakie powstają podczas ruchu.

W celu rozwiązania tego zadania postępujemy w tym przypadku, jak poprzednio; obliczymy siłę odporową N ; wyznaczmy następnie miejsce na torze, w którym $N = 0$; i z tego równania obliczymy niewiadomą h . Odpowiedź: $h = \frac{1}{2} r$.



Rys. 36.



Rys. 37.

56. Ogólne rozpatrywanie ruchu punktu, będącego pod działaniem sił zewnętrznych, po danym torze krzywoliniowym w przestrzeni bez uwzględnienia sił oporowych. Przypadki szczególne tego ruchu rozpatrywaliśmy już w §§ poprzednich, badając ruch punktu, będącego pod działaniem siły ciężkości, po prostej, po kole i po cykloidzie; obecnie weźmiemy ogólny przypadek, gdy tor jest krzywy w przestrzeni, a siła, działająca na punkt, jest zmienna.

Ruch punktu po danym torze możemy fizycznie wywołać, gdy na tor, w postaci np. drutu bardzo gładkiego, nawleczonej bryłki materialnej. Bryłka ta bowiem, pod działaniem przyłożonych do niej sił, będzie się wogóle ślizgać po drucie.

Jeżeli dany tor jest płaski, to można również wywołać ruch punktu po danym torze, gdy umocujemy ten punkt do końca nici zupełnie giętkiej, lecz nierozciągliwej i nią nawiniemy na ewolutę danej krzywej; podczas bowiem rozwijania się nici punkt zakreśli dany tor. Przykładem tego sposobu jest wahadło pospolite, którego ewolutą jest punkt; lub wahadło cykloidalne, którego ewolutą jest również cykloida. Jeżeli zaś tor jest krzywoliniowy w przestrzeni, to, chociaż można wywołać ruch punktu po tym torze również za pomocą odwijania nici, sposób ten jednakże jest złożony. Zresztą, sposobów fizycznych, wywołujących ruch punktu po danym torze, może być bardzo wiele. Wogóle zaś uwidocznimy sobie ruch punktu po danym torze, ślizganiem się bryłki materialnej, nawleczonej na odpowiednio wygięty drut.

Pod względem kinematycznym, ruch punktu po danym torze, posiada jeden stopień swobody; porów.: tom I-y § 58 i § 226; z trzech bowiem stopni swobody, jakie posiada każdy punkt swobodny, odejmujemy mu, dając tor, po którym on ma się poruszać,—dwa stopnie swobody. Jedna przeto spółrzędna t. j. jedna niez-

leżna zmienna wyznacza położenie punktu na torze; a zatem droga, prędkość i przyspieszenie danego punktu, oraz siła odporowa toru są funkcjami jednej tylko niezależnej zmiennej. Jaką wielkość obierzemy za tę niezależną zmienną, zależy od zadania i wybór ten jest w zasadzie obojętnym; udatny jednakże jej wybór wpływa znacznie na uproszczenie i przejrzystość rachunku; na co należy zwrócić uwagę.

Jeżeli mamy w zadaniu wyznaczyć tylko ruch punktu, t. j. np. mamy obliczyć prędkość w funkcji spółrzędnej, to do obliczenia tego ruchu wystarcza jedno tylko równanie; a tym równaniem może być równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej; gdyż wartości sił odporowych, których nie znamy, nie wchodzi do tego równania.

Na punkt, który jest zmuszony poruszać się po danym torze, działa:

1) siła zewnętrzna \vec{P} , która może być uważaną za wypadkową wielu sił: $\vec{P} = \Sigma \vec{P}_k$.

2) siła odporowa \vec{N} toru. Siła ta, o ile nie uwzględniamy tarcia, znajduje się w płaszczyźnie normalnej do toru, przeprowadzonej w miejscu, w którym badamy ruch danego punktu; lecz nie znamy ani jej położenia (w tej płaszczyźnie), ani jej wielkości. W celu wyznaczenia położenia i wielkości tej siły, należy obliczyć np. dwa jej rzuty na osi spółrzędnych; które obierzemy w płaszczyźnie normalnej. W układzie zatem równań algebraicznych siła ta wyraża się dwiema niewiadomymi wielkościami. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{p} \dots \dots \dots (122)$$

Równanie to wektorowe, przekształcimy na algebraiczne, gdy zrzutujemy je na trzy dowolne osi; otrzymamy wtedy trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można trzy niewiadome: prędkość i dwa rzuty siły odporowej; wyraziwszy je funkcją obranej spółrzędnej niezależnej. Osi te, dla uproszczenia rachunku, obierzemy w sposób następujący:

jedną obierzemy po stycznej do toru, ze zwrotem dodatnim, zgodnym z ruchem punktu; oś tę oznaczmy literą t ;

drugą, — którą oznaczmy literą n , obierzemy po głównej normalnej do toru z dodatnim zwrotem ku środkowi koła krzywości; i

trzecią b (binormalną) obierzemy prostopadłe do płaszczyzny dwóch poprzednich osi, t. j. prostopadłe do płaszczyzny ściśle stycznej, w której leżą poprzednie dwie osi. Rzuty wektorów powyższego równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania:

1) równanie rzutów sił na styczną:

$$P_t = m \frac{dv}{dt}.$$

Równanie to zastąpić można pierwszą jego całką, wyrażającą równowartość pracy i energii kinetycznej; a zatem zastąpimy je równaniem:

$$P_t \cdot ds = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right),$$

w którym ds oznacza cząstkę toru. Równanie to, gdy siły posiadają funkcję sił, scałkujemy i wyrazimy prędkość funkcją obranej współrzędnej.

2) Równanie rzutów na normalną główną n , ma postać:

$$P_n + N_n = m p_n;$$

w równaniu tem zgodnie ze wzorem 34-tym tomu I-go: $p_n = \frac{v^2}{\rho}$; a ponieważ prędkość v

obliczyliśmy już z poprzedniego równania, zaś ρ jest promieniem krzywosci, który może być obliczony z równania danego toru, przeto w równaniu tem jest tylko jedna niewiadoma N_n , t. j. rzut siły odporowej na główną normalną do toru.

3) Równanie rzutów na oś b jest następujące:

$$P_b + N_b = 0;$$

z równania tego obliczymy rzut siły odporowej na tę oś; rzut bowiem P_b jest znany. Z dwóch zatem ostatnich równań obliczymy siłę odporową:

$$\bar{N} = \bar{N}_n + \bar{N}_b; \text{ lub inaczej: } N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}; \text{ i t. d.}$$

W szczególnym przypadku, jeżeli tor jest płaski i siły leżą w jego płaszczyźnie, jak to było w przykładach np. z wahadłem kołowym i cykloidalnem, $P_b = 0$, a więc i $N_b = 0$; a siła odporowa, którą oznaczyliśmy, w tym przypadku, literą N :

$$N = m \frac{v^2}{\rho} - P_n.$$

57. Ruch punktu po danym torze z tarcie. Wielkość siły tarcia w następujących rachunkach przyjmujemy równą iloczynowi z siły normalnej do toru i współczynnika tarcia, właściwego trącym się ciałom. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{W} = m \bar{p},$$

w którym siła $W = \mu N$; a μ oznacza współczynniki tarcia; siła ta jest styczną do toru ze zwrotem przeciwnym zwrotowi prędkości punktu poruszającego się. Zrzućmy to równanie wektorowe na oś, przyjęte w § poprzednim, a otrzymamy równania:

$$1) \quad P_t - \mu N = m \frac{dv}{dt}; \text{ lub w postaci równania pracy:}$$

$$(P_t - \mu N) ds = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right); \text{ następnie:}$$

$$2) \quad P_n + N_n = m \frac{v^2}{\rho};$$

$$3) \quad P_b + N_b = 0.$$

Przy obliczeniu tarcia należy wziąć pod uwagę, że: $N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$.

Równania te różnią się od poprzednich tem, że w równanie pracy, któreśmy napisali zamiast rzutów sił na styczną, wchodzi obecnie wielkość siły odporowej.

Ogólna jednakże ilość równań oraz niewiadomych nie zmieniła się; jedynie rachunek nie jest tak prosty, jak poprzednio, wskutek tego, że wielkości rzutów niewiadomej siły N wchodzą we wszystkie trzy równania.

Dla wahadła naprz. płaskiego, dla którego $N_b = P_b = 0$, otrzymamy następujące równania dynamiczne:

$$1) \quad -mgl \sin \sigma d\sigma - \mu N l d\sigma = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right); \text{ oraz:}$$

$$2) \quad N - mg \cos \sigma = \frac{mv^2}{l}.$$

Są to dwa równania z dwiema niewiadomymi N i v ; które wyrazić można funkcją spółrzednej σ . Po wyrugowaniu np. wartości N z drugiego równania i po podstawieniu jej do pierwszego, otrzymamy równanie:

$$-mgl \sin \sigma \cdot d\sigma - \mu \left(\frac{mv^2}{l} + mg \cos \sigma \right) l d\sigma = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right);$$

a po jego scałkowaniu otrzymamy szukaną zależność pomiędzy v i σ . Całkowanie tego równania można wykonać; po zastosowaniu pewnych podstawień. Przeprowadzenie tego rachunku, które tu pominię, znajdzie czytelnik między innymi w „Mechanice“ Autenritt'a¹⁾.

Jeżeli siła P nie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru, jak w powyższym przykładzie; to składowa N_b posiada pewną skończoną wartość; a siła odporowa

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}.$$

Wyraz ten wchodzi do równania dynamicznego i doprowadza wogóle całą jego do funkcji eliptycznej, której analiza jest nadzwyczaj zawiłą i przytem mało znaną.

Wobec tego uprościmy równanie różniczkowe, gdy zastąpimy wyraz

$$\sqrt{N_n^2 + N_b^2} \text{ wyrazem } \alpha N_n + \beta N_b,$$

którego liczbowa wartość niewiele różni się od wartości wyrazu ściśłego. Można dowieść, lub sprawdzić drogą prób, że jeżeli:

$$\alpha = 0,961, \text{ oraz } \beta = 0,398;$$

to największa różnica pomiędzy wartością ścisłą a przybliżoną nieprzekracza 4%; a zważywszy jeszcze, że wartość ta w równaniu dynamicznym jest pomnożoną przez współczynnik tarcia, który w ogóle jest < 1 , a w mechanizmach udoskonalonych bywa doprowadzony do bardzo małego ułamka, możemy stosować wyraz przybliżony bez obawy uczynienia jakiejś dostrzegalnej niedokładności.

Przybliżone wzory tego rodzaju podaje „Technik“ na str. 45-tej pod № 16 17, 18-tym, z których można korzystać i w innych tego rodzaju przypadkach.

¹⁾ W polskim tłumaczeniu inż. St. Patschkego, str. 324.

W razie ruchu punktu po torze z oporem, proporcjonalnym do wartości pewnej funkcji z prędkości, postępowanie rachunkowe, wyżej wyłożone, się nie zmieni, przybędzie tylko w równaniu pracy cząstkowej jeden wyraz siły, przedstawiony funkcją prędkości; lecz to nie zmieni ogólnej postaci równania różniczkowego; zmieni tylko sposób jego całkowania.

D. Ruch punktu materalnego po danej powierzchni.

58. Ruch punktu po powierzchni bez oporów. Punkt materalny, poruszający się po danej powierzchni, posiada dwa stopnie swobody; dwiema zatem spólrzędnymi niezależnymi wyrazimy ruch punktu oraz siły odporowe powierzchni. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} = m\overline{p}.$$

Siła odporowa N , wobec gładkości powierzchni, jest normalną do niej; kierunek jej jest więc znany; nieznaną jest tylko jej wielkość; siła ta przedstawia przeto jedną algebraiczną niewiadomą. Ponieważ tor, jest nieznaną co do swej postaci, przeto i przyspieszenie punktu podczas ruchu jest nam nieznaną ani co do kierunku, ani co do wielkości. Przyspieszenie to przedstawia jednakże tylko pozornie trzy algebraiczne niewiadome; jest ono bowiem uwarunkowane postacią powierzchni, po której punkt się porusza; a warunek ten wyrazimy równaniem powierzchni. Mamy przeto w danym zadaniu cztery niewiadome, a dla ich wyliczenia jedno równanie dynamiczne w postaci wektorowej, oraz jedno równanie algebraiczne, określające daną powierzchnię. W celu obliczenia tych niewiadomych, stosujemy wogóle metodę rzutów na trzy osi prostokątne x, y, z ; dowolnie obrane w przestrzeni. Rzuty wektorów równania dynamicznego na te osi dają następujące trzy równania:

$$1) \quad P_x + N_x = m \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$2) \quad P_y + N_y = m \frac{d^2 y}{dt^2};$$

$$3) \quad P_z + N_z = m \frac{d^2 z}{dt^2};$$

Równanie zaś powierzchni jest następujące:

$$4) \quad f(x, y, z) = 0.$$

Są to cztery wyżej omówione równania. Ponieważ jednakże jedną niewiadomą N wyraziliśmy, ze względów rachunkowych, trzema jej rzutami, przeto należy jeszcze wprowadzić do rachunku warunek, że siła N jest prostopadłą do powierzchni; warunek ten wyrazimy dwoma następującymi równaniami:

$$5) \quad N_x : N_y = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy};$$

$$6) \quad N_y : N_z = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}.$$

Mamy zatem sześć równań, z których obliczymy sześć niewiadomych: x, y, z, N_x, N_y, N_z w funkcji czasu t ;—jest to ogólne postępowanie.

Lecz takie postępowanie rachunkowe, aczkolwiek zupełnie ściśle, prowadzi do wzorów dosyć zawiłych i daje najczęściej wyniki mało przejrzyste; w celu zatem ułatwienia rozpatrywań tego ruchu, należy korzystać ze szczególnych właściwości danych powierzchni w ten sposób, ażeby mózż bezpośrednio zastosować twierdzenie pracy, oraz momentów ilości ruchu, które są pierwszemi całkami powyższych równań dynamicznych; postępowanie takie w wielu szczególnych przypadkach prowadzi wprost do celu.

Równanie pracy daje bezpośrednio zależność pomiędzy spółrzednemi punktu ruchomego i jego prędkością. Równanie to łącznie z równaniem momentu ilości ruchu pozwala w wielu przypadkach obliczyć tor i ruch po nim. Lecz wogóle w równanie momentów ilości ruchu wchodzi wielkość siły odporowej, która jest nieznaną; równanie to nie wystarcza przeto do obliczenia ruchu i należy zastosować jeszcze inne równania dynamiczne.

Dla pewnych jednakże szczególnych powierzchni moment sił odporowych, czy to względem odpowiednio obranego bieguna, czy też względem takiejże osi równa się zeru; a wtedy równanie momentu ilości ruchu będzie drugim równaniem, wykazującym zależność pomiędzy spółrzednemi punktu i prędkością jego, lub inaczej się wyrażając, pomiędzy spółrzednemi i czasem. Takimi powierzchniami są powierzchnie obrotowe; ich bowiem normalne przecinają oś obrotu; momenty przeto sił odporowych względem tej osi równają się zeru.

59. Ruch punktu materalnego po powierzchni walca prostego o podstawie kołowej. Weźmy naprzód przypadek, w którym na dany punkt, posiadający początkową prędkość \underline{v}_0 , styczną do powierzchni walca, nie działa żadna siła zewnętrzna (a więc również i siła ciężenia). Jeśliby punkt był swobodny, poruszałby się po linii prostej ruchem jednostajnym; w danym zaś przypadku, wskutek sił odporowych walca, zakreśli on z pewną prędkością pewien tor, leżący na powierzchni walca. Postać tego toru, oraz prędkości punktu odczytamy, z równania pracy i momentu ilości ruchu. Na dany punkt działa przeto tylko siła odporowa, której praca podczas przystosowanego przesunięcia punktu, $= 0$, a zatem równanie pracy jest następujące:

$$1) \quad 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

z którego wynika, że $v = v_0$ t. j., że punkt ruchomy przebiega po danym walcu z prędkością stałą pod względem algebraicznym, i równą prędkości początkowej.

Równania momentu ilości ruchu zestawimy względem osi walca; momenty bowiem sił odporowych, względem tej osi, równają się zeru. W tym celu, zgodnie z określeniem momentu względem osi, rzutujemy siły i prędkości na płaszczyznę prostopadłą do osi; a odznaczwszy te rzuty kreskami, otrzymamy równanie:

$$2) \quad 0 = \frac{dM_{v,r}}{dt}; \text{ lub inaczej: } m v' r - m v_0' r = 0,$$

z którego wynika, że rzuty właściwych prędkości na płaszczyznę, prostopadłą do osi, są stałe. Z tych właściwości wynika, że tor jest linią śrubową o stałym podniesieniu.

Przyjmijmy następnie, że na punkt, któremu udzielono prędkości początkowej v_0 , działa siła ciężenia $m\vec{g}$, a walec jest ustawiony pionowo.

W celu zestawienia równania pracy, oznaczmy odległość pionową punktu ruchomego od położenia początkowego przez z , a napiszemy to równanie w następującej postaci:

$$1) \quad m g z = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Równanie zaś momentu ilości ruchu względem osi obrotowej jest następujące:

$$2) \quad O = m v' r - m v_0' r = 0, \text{ skąd: } v' = v_0'.$$

Z równania tego wynika, że rzuty prędkości właściwej na płaszczyznę poziomą są niezmiennie (jak poprzednio); lecz z równania pracy odczytamy, że prędkość właściwa jest zmienną i powiększa się z rosnącą wartością współrzędnej z ; z tych właściwości wynika, że kierunek prędkości punktu po powierzchni walca z biegiem czasu zbliża się do kierunku pionowego.

W celu wyznaczenia toru tego ruchu, rozwińmy powierzchnię walca na płaszczyznę, a wektory wszystkich prędkości znajdą się na tej płaszczyźnie i będą stycznymi do krzywej, powstałej z rozwiniętego toru. Z powyższego stosunku rzutu prędkości do prędkości właściwej obliczyć można, że rozwinięcie toru jest parabolą. Parabola zatem z osią pionową, której płaszczyznę nawiniemy na walec, przedstawia tor punktu materialnego, posuwającego się z prędkością początkową pod działaniem siły ciężenia po powierzchni gładkiej walca pionowego o podstawie kołowej.

60. Ruch punktu po powierzchni kuli. Ruch punktu po powierzchni kuli wywołać można, puściwszy punkt materialny z pewną prędkością zewnątrz względnie wewnątrz powierzchni kuli; punkt ten zakreśli na tej powierzchni pewien tor. Ruch taki wywołać również można, nadawszy punktowi materialnemu wahadła pospolitego, § 47-my, pewną dowolnie skierowaną w przestrzeni prędkość; a punkt ten zakreśli w przestrzeni tor, który leży na powierzchni kuli o promieniu równym długości nici; w ten sposób puszczone wahadło nazywają wahadłem kulistym.

Zadanie polega na wyznaczeniu toru, ruchu po nim i wielkości siły odporowej, jaką on wywoła podczas tego ruchu. Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy punkt ruchomy o masie m porusza się po powierzchni danej kuli **bez działania sił zewnętrznych**, a więc również bez udziału siły ciężenia; i porusza się jedynie skutkiem nadanej mu prędkości początkowej. Gdyby ten punkt był swobodny, zakreśliłby on ruchem jednostajnym tor prostoliniowy. W danym zaś razie skutek sił odporowych wykona on inny ruch, który obliczymy z równań dynamicznych.

Praca sił podczas przesunięcia cząstkowego punktu po powierzchni kuli, równa się w danym razie zeru. Energia kinetyczna punktu pozostaje zatem podczas tego ruchu niezmienną, t. j. punkt ruchomy zakreśla ruchem jednostajnym na powierzchni kuli pewien tor dotychczas nieznany.

W celu wyznaczenia postaci toru zastosujemy zasadę momentu ilości ruchu, i otrzymamy drugie równanie dynamiczne ruchu. Siłą działającą na punkt ruchomy jest wobec założeń powyższych tylko siła odporowa powierzchni kuli; a ponieważ moment jej względem środka kuli równa się zeru, przeto mamy równanie momentu ilości ruchu względem bieguna obranego w środku kuli:

$$\frac{d\vec{M}_r}{dt} = 0,$$

t. j. wektor momentu ilości ruchu jest stały co do kierunku, wielkości i zwrotu; z czego wynika, że ruch punktu po kuli, bez udziału sił zewnętrznych, odbywa się w płaszczyźnie nieruchomej, wyznaczonej przez kierunek prędkości początkowej punktu i przez środek kuli; ruch zatem danego punktu w tych warunkach jest ruchem jednostajnym po wielkiem kole, wyznaczonem przez początkowe położenie punktu i przez kierunek początkowej jego prędkości.

Ponieważ promień krzywosci tego toru jest stały równa się bowiem promieniowi kuli r , przeto siła odporowa N , jako siła dośrodkowa:

$$N = m \frac{v^2}{r};$$

jest jednakową we wszystkich położeniach punktu. Rozwiązanie przeto danego zadania jest skończone.

Rozpatrzmy teraz ruch rzutu tego punktu na jakąkolwiek płaszczyznę. Oznaczmy w tym celu literą N' rzut siły odporowej na tę płaszczyznę; literą h odległość punktu od średnicy prostopadłej do płaszczyzny rzutów; a napiszemy związek:

$$N' = N \frac{h}{r},$$

w którym tylko wielkość h jest zmienną.

Ponieważ rzut siły jest siłą, wywołującą ruch punktu A' , będącego rzutem punktu właściwego, przeto wyobrazić sobie możemy, że punkt A' wykonywa ruch pod działaniem sił N' , zbiegających się w jednym środku, który jest rzutem środka kuli na obraną płaszczyznę, — i zwróconych ku temu środkowi. Siły te są proporcjonalne do odległości h od tego środka, mogą być więc uważane jako siły, przyciągające proporcjonalnie do odległości od danego środka. Tor punktu A' jest rzutem toru właściwego punktu; a więc jest elipsą; z tego wnioskujemy, że torem punktu, będącego pod działaniem sił środkowych, przyciągających proporcjonalnie do odległości, jest wogóle elipsa; cośmy już obliczyli bezpośrednio w § 19-tym.

Inny, rozumie się, będzie ruch punktu po kuli, gdy działać będzie na niego pewna siła zewnętrzna; taką siłą w następnych rozpatrywaniach niech będzie siła ciężkości punktu.

Ruch, jaki wykonywa punkt ciężki na kuli, można również wywołać za pomocą wahadła, złożonego z pręta sztywnego, którego masy nie uwzględniamy, a na którego końcu przyczepimy punkt ciężki; po nadaniu bowiem temu punktowi pew-

nej prędkości początkowej, wykona on ruch, jakiby wykonał przy tych samych warunkach początkowych na powierzchni kuli.

Jako współrzędne punktu ruchomego, wyznaczające jego położenie na kuli, obierzemy: 1) odległość z , rys. 38-my, równoleżnika, na którym punkt dany chwilowo się znajduje, licząc dodatnie odległości od środka kuli po osi pionowej ku dołowi;

2) oraz kąt θ , jaki tworzy płaszczyzna biegunowa, przechodząca przez punkt ruchomy z inną płaszczyzną biegunową nieruchomo obraną w przestrzeni. Na rys. 38-ym, na którym O oznacza środek kuli, naniesiono współrzędne z i θ . Współrzędne początkowe położenia punktu oznaczmy literami z_0 i θ_0 , a prędkość początkową literą v_0 .

Na punkt dany działa siła jego ciężkości $m\bar{g}$ i siła odporową \bar{N} powierzchni kuli, (czy też naprężenia wahadła); równanie przeto dynamiczne ruchu tego punktu jest następujące:

$$\bar{N} + m\bar{g} = m\bar{p}.$$

W celu rozwiązania zadania tego możemy zastosować bezpośrednio zasadę pracy i zasadę momentów. Praca bowiem siły odporowej N , podczas przesunięcia punktu po kuli, równa się zero, i moment jej względem bieguna, obranego w środku kuli, równa się także zero.

Równanie przeto pracy podczas cząstkowego przesunięcia punktu po powierzchni kuli jest nast.::

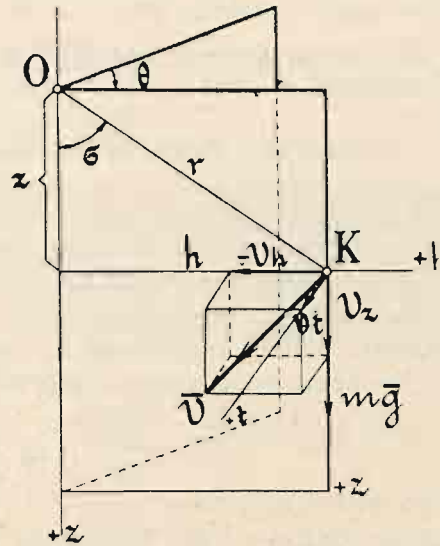
$$mg dz = d(\tfrac{1}{2} m v^2),$$

z którego po scałkowaniu od z_0 do z ; i od v_0 do v , otrzymamy następujące równanie:

$$1) \quad mg(z - z_0) = \tfrac{1}{2} m v^2 - m v_0^2 (123)$$

Moment sił odporowych względem środka kuli równa się zero; a więc i względem każdej osi, przechodzącej przez ten biegun, równa się zero. Zestawimy przeto równanie momentu ilości ruchu względem osi pionowej z , gdyż wtedy i moment siły ciężkości równa się zero; okoliczność ta chociaż nie jest potrzebną dla naszego rachunku, upraszcza go jednakże, pozbywamy się bowiem momentu siły ciężkości:

a zatem napiszemy: $\frac{dM_{v,z}}{dt} = 0$; a więc:



Rys. 38

$M_{v,z}$ = stałej; lub inaczej, zgodnie z równ. 80-tem:

$$2) \quad mh^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

gdzie M_0 oznacza moment, względem osi z , ilości ruchu punktu w początkowym jego położeniu; h — promień równoleżnika, na którym znajduje się chwilowo,

a $\frac{d\theta}{dt}$ jest prędkością obrotową płaszczyzny biegunowej punktu ruchomego.

W celu wyrażenia prędkości obranemi współrzędnymi, rzutujemy ją na trzy następujące wzajemnie prostopadłe osi, rys. 38-my: na oś t , styczną do równoleżnika, na którym znajduje się w danej chwili punkt ruchomy; na oś h , będącą przedłużeniem promienia tegoż równoleżnika, i na oś z pionową; a zważywszy, że rzuty prędkości punktu ruchomego są prędkościami jego rzutów, str. 59-ta tomu I-ego, i że obrane osi są wzajemnie prostopadłe, mamy:

$$v^2 = \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left(h \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wielkość bowiem $h = \sqrt{r^2 - z^2}$; a $dh = \frac{-z dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$.

Po podstawieniu tych wartości w równania 123-cie i 124-te; otrzymamy:

$$1) \quad 2g(z - z_0) = \left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left(h \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - v_0^2; \text{ oraz}$$

$$2) \quad mh^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

W tych równaniach mamy trzy zmienne z , θ , oraz czas t ; można więc z nich wytworzyć związki pomiędzy każdą ze współrzędnych i czasem, lub pomiędzy samymi współrzędnymi.

W celu znalezienia związku pomiędzy z i t , obliczymy z drugiego równania $\frac{d\theta}{dt}$, i podstawimy w pierwsze, oraz podstawimy wartość dh , a otrzymamy:

$$2g(z - z_0) = \left[\left(\frac{-z}{h} \cdot \frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(h \cdot \frac{M_0}{mh^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - v_0^2;$$

po uporządkowaniu zaś:

$$2g(z - z_0) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{z^2}{h^2} + 1\right) + \left(\frac{M_0}{mh}\right)^2 - v_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

skąd, po podstawieniu: $h^2 = r^2 - z^2$ i rozwiązaniu względem $\frac{dz}{dt}$, otrzymamy:

$$r \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{f(z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

w którym przyjęto:

$$f(z) = (r^2 - z^2) [2g(z - z_0) + v_0^2] - \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

W podobny sposób, rugując z powyższych równań zmienną z , obliczyć można związek pomiędzy spółrzednemi θ i t .

Wyrugowawszy następnie z równania 1-go i 2-go zmienną t , która występuje w postaci różniczki dt , otrzymamy równanie, które łącznie z równaniem kuli określa postać toru; równanie to jest następujące:

$$\frac{d\theta}{dz} = r \frac{M_0}{m} \cdot \frac{1}{(r^2 - z^2) \sqrt{f(z)}} \dots \dots \dots (129)$$

Całki powyższych wzorów są funkcjami eliptycznemi, nie dają się przeto wyrazić zwykłemi funkcjami. Można jednakże drogą analizy równań różniczkowych wywnioskować o pewnych właściwościach danego ruchu i otrzymać jego obraz; analizę tę przeprowadzimy w paragrafie następnym; a obecnie obliczymy siłę odporową powierzchni kuli. W tym celu rzutujemy równanie dynamiczne:

$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{p}.$$

na normalną do powierzchni kuli t. j. na jej promień¹⁾, przechodzący przez dany punkt.

Siła N rzutuje się w rzeczywistej swej wielkości; i jeżeli przyjmiemy zwrot dodatni ku środkowi kuli, to rzut siły ciężkości równa się ($-mg \cos \sigma$); gdzie σ oznacza kąt, zawarty pomiędzy kierunkiem promienia i kierunkiem pionowym, a $\cos \sigma = \frac{z}{r}$, rys. 38-my.

Rzut przyspieszenia \bar{p} na kierunek normalnej do powierzchni obliczymy w następujący sposób. Zastąpmy przyspieszenie \bar{p} sumą dwóch przyspieszeń ($\bar{p}_n + \bar{p}_t$), w której $p_n = \frac{v^2}{\rho}$, jest rzutem przyspieszenia na główną normalną do toru, a $p_t = \frac{dv}{dt}$ na styczną; i rzutujemy ją na obrane osi. Rzut p_n na normalną do powierzchni wyrazimy wzorem:

$$\frac{v^2}{\rho} \cdot \cos(\rho, N),$$

rzut zaś p_t równa się zeru.

Zważywszy następnie, że, stosownie do twierdzeń geometrii analitycznej:

$$\rho = r \cdot \cos(\rho, N)^2), \dots \dots \dots (130)$$

¹⁾ Uprzytomnić sobie należy, że główna normalna do krzywej, zakreślonej na pewnej powierzchni, nie zlewa się wogóle z normalną tej powierzchni; lecz tworzy z nią pewien kąt, który w szczególnym tylko przypadku może równać się zeru.

²⁾ Związek ten dla krzywej na kuli wynika bezpośrednio z następujących rozważań. Płaszczyzna ściśle styczna w pewnym punkcie każdej krzywej, zakreślonej na dowolnej powierzchni, przechodzi przez dwie sąsiednie cząstki łuku; koło przechodzące przez te dwie cząstki jest kołem krzywości. Gdy zaś krzywa leży na powierzchni kuli, to płaszczyzna ściśle do niej styczna w pewnym jej punkcie, przecina powierzchnię kuli po kole, które jest kołem jej krzywości, a promień jego jest jej promieniem krzywości; z czego wynika związek pomiędzy promieniem krzywości krzywej, zakreślonej na kuli a promieniem kuli.

otrzymamy, po skróceniu przez ρ , równanie rzutów na normalną:

$$-mg \frac{z}{r} + N = \frac{mv^2}{r},$$

z którego, po podstawieniu wartości v^2 z równania pracy, obliczymy:

$$N = \frac{m}{r} [g(3z - 2z_0) + v_0^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Jest to szukane równanie, z którego obliczyć można np. położenie równoleżnika, na którym punkt ruchomy opuści powierzchnię kuli.

61. Analiza równań ruchu punktu ciężkiego po powierzchni kuli.

Zestawienie równania dynamicznego w zadaniu powyższem nie przedstawiało żadnych trudności; scałkowanie jego jednakże i uwidocznienie sobie ruchu, wyrażonego otrzymanymi równaniami, przedstawia znaczne trudności rachunkowe. W takich przypadkach staramy się wogóle odczytać właściwości ruchu bezpośrednio z równań różniczkowych oraz z geometrycznych stosunków, które zachodzą w każdym poszczególnem zadaniu. W celu zastosowania tego sposobu do obliczenia ruchu punktu po kuli, weźmiemy pod uwagę jego równania dynamiczne i zbadamy ich właściwości.

Z niezmienności znaku wartości $\frac{d\theta}{dt}$, obliczonej z równania momentu ilości ruchu:

$$m h^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0,$$

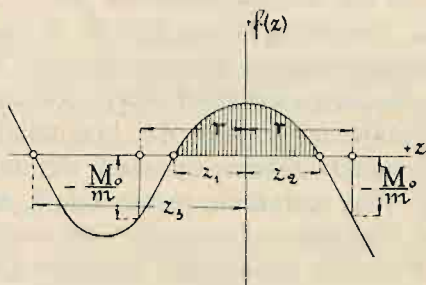
wynika, że rzut punktu na płaszczyznę poziomą krąży około osi pionowej z jednym i tym samym zwrotem, o ile $M_0 \gtrless 0$. W przypadku zaś, w którym $M_0 = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, kąt przeto θ jest stały, a ruch punktu jest ruchem zwykłego wahadła płaskiego.

Podczas ruchu punktu na powierzchni kuli, rzut jego na oś pionową wykonywa również pewien ruch. Równaniem ruchu tego rzutu jest równanie 127-me; a wartości dla z , które czynią: $\frac{dz}{dt} = 0$; t. j. pierwiastki równania $f(z) = 0$; wskazują miejsca na osi pionowej, w których rzut punktu posiada prędkość zero i jednocześnie wskazują największe oddalenia tego rzutu od środka kuli. Pierwiastki przeto równania:

$$(r^2 - z^2) [2g(z - z_0) + v_0^2] - \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

wyznaczają miejsca na osi, w których rzut punktu na tę oś posiada prędkość zero. Równanie to jest względem niewiadomej z stopnia 3-go; posiada przeto trzy pierwiastki. Dla naszych rozpatrywań tylko te pierwiastki mają znaczenie fizyczne, które leżą pomiędzy wartościami $(-r)$ i $(+r)$; i które czynią $f(z) > 0$; w razie bowiem ujemnej wartości tej funkcji wartości prędkości stają się urojonemi, nie mają

a więc fizycznego znaczenia. Wartości przeto $z = \pm r$ o ile $M_0 \geq 0$) nie mogą być pierwiastkami danego równania, gdyż czynią wartość $f(z) < 0$; z czego wynika, że punkt ruchomy nie przechodzi przez wierzchołki kuli. Ponieważ ruch danego punktu odbywa się wogóle przy wszelkich warunkach początkowych, przeto dla zmiennej z jest szereg wartości, które czynią $f(z) > 0$, i szereg ten powinien znajdować się pomiędzy $z = \pm r$; a ponieważ dla $z = \pm r$, $f(z) < 0$; przeto wartość jej zmienia dla dwóch wartości z , leżących pomiędzy $\pm r$, dwa razy swój znak; a zatem dwa pierwiastki danego równania leżeć muszą pomiędzy $\pm r$; pierwiastki te oznaczmy literami z_1 i z_2 ; wartość zaś trzeciego leżeć będzie pomiędzy wartościami $(-r)$ i $(-\infty)$ t. j. będzie ujemną; podstawivszy bowiem $z = -r$, otrzymamy $f(z) < 0$; podstawivszy zaś $z = -\infty$, $f(z) > 0$. Wykres przeto wartości $f(z)$, który w przybliżeniu przedstawiliśmy na rys. 39-tym, dla różnych wartości zmiennej z , przecina trzy razy oś współrzędnych; dwa razy w miejscach, leżących pomiędzy $z = \pm r$ i po raz trzeci w miejscu pomiędzy $-\infty$ i $-r$. Rozumie się, że współrzędne miejsc tych można obliczyć bezpośrednio z równ. 132-ego, jeżeli weźmiemy do rachunku wartości liczbowe.

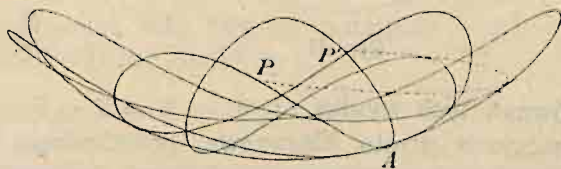


Rys. 39.

Rozpatrzmy jednakże ogólne właściwości tych pierwiastków, ażeby na ich podstawie wytworzyć sobie choć przybliżony obraz ruchu. Pierwiastki z_1 i z_2 wyznaczają położenie dwóch równoleżników na kuli, pomiędzy którymi punkt ruchomy zakreśla tor; a ponieważ $\frac{d\theta}{dt} \geq 0$, (jeżeli $M_0 \geq 0$), przeto punkt ruchomy na poziomie tych równoleżników posiada prędkości poziomo skierowane, których wartości można obliczyć z rów. 125-tego, po podstawieniu w nie:

$$h = h_1 = \sqrt{r^2 - z_1^2}; \text{ oraz } h = h_2 = \sqrt{r^2 - z_2^2}.$$

Ruch punktu danego możemy przeto unaocznić sobie np. w ten sposób. Punkt otrzymawszy pewną prędkość początkową, opuszcza się po powierzchni kuli i, dosięgnawszy równoleżnika na poziomie z_2 , dotknie się jego, aby następnie dzięki posiadanej energii (inaczej, wskutek bezwładności) podnieść się do równoleżnika z_1 ; i następnie po zetknięciu się z nim opuści się znów do równoleżnika z_2 i t. d. Obraz ten nasuwa przypuszczenie, że tor punktu jest symetryczny względem płaszczyzny bieguno-



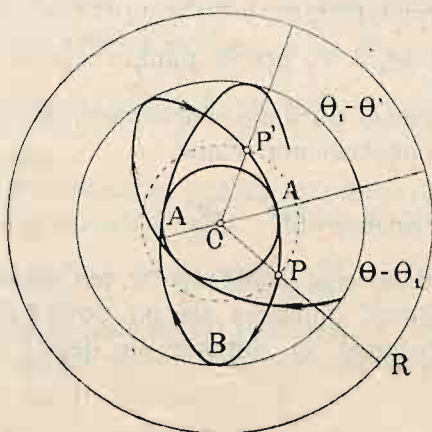
Rys. 40.

wej, przechodzącej przez punkty zetknięcia się toru z ograniczającym go równoleżnikiem (dolnym lub górnym). Ażeby to zbadać, weźmy pod uwagę dwa miejsca na dowolnym równoleżniku, wyznaczonym współrzędną z_1 , w których tor punktu przecina go, i wyobraźmy sobie, że punkt ruchomy, przechodząc przez miejsce P' , rys. 40-ty, równoleżnika tego, opuszcza się do miejsca A , leżącego na dolnym równoleżniku z_2 ; a w miejscu P przecina on podczas podnoszenia się równoleżnik z_0 ; na rys. 40-tym pokazany jest tor punktu, oraz równoleżnik, oznaczony punktami. Położenia miejsc P' i P , w których punkt ruchomy, przecina równoleżnik z_0 , określimy kątami biegunowymi θ' i θ , rys. 41-szy; położenie zaś miejsca zetknięcia się toru z równoleżnikiem dolnym określimy kątem θ_1 . W równaniu 129-tem, wyrażającym przyrost $d\theta$, brać należy znak $+$, gdy przyrost dz jest dodatni, t. j. gdy punkt ruchomy opuszcza się; należy zaś brać go ujemnym, gdy punkt podnosi się. Przy wyrażeniu przeto kąta θ_1 zmienną z należy wziąć pod uwagę, że funkcja pod znakiem całki zmienia swój znak przy przejściu przez wartość θ_1 ; kąt przeto, jaki zatacza płaszczyzna biegunowa, gdy punkt ruchomy przejdzie od P' do A , rys. 41-szy, obliczymy z następującego równania:

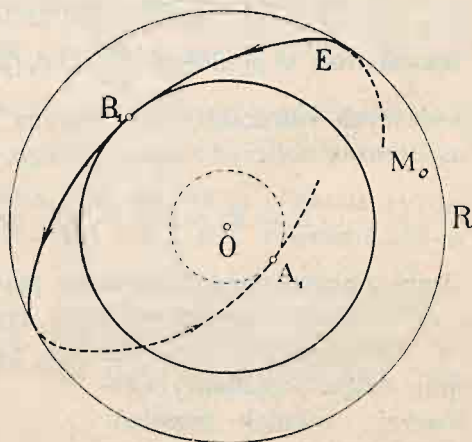
$$\theta_1 - \theta' = \int_{\theta'}^{\theta_1} d\theta = -r \frac{M_0}{m} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{(r^2 - z^2) \sqrt{f(z)}} = -[F(z_1) - F(z_0)];$$

a kąt:

$$\theta - \theta_1 = \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta = r \frac{M_0}{m} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{(z^2 - r^2) \sqrt{f(z)}} = [F(z_0) - F(z_1)],$$



Rys. 41.



Rys. 42.

z równań tych wynika, że $\theta_1 - \theta' = \theta - \theta_1$; co stwierdza nasze przypuszczenie. Płaszczyzna przeto biegunowa, przechodząca przez punkt zetknięcia się toru z równoleżnikiem górnym lub dolnym, jest płaszczyzną symetrii toru.

Jeżeli następnie rzutujemy tor punktu na płaszczyznę poziomą, to otrzymamy krzywą, która leży pomiędzy dwoma kołami o promieniach h_1 i h_2 , dotyka je

odległości od środka kuli > 0 ; — z czego wynika, że nie mogą leżeć na półkuli górnej; jak również że punkt materyalny, puszczonej na górnej półkuli, zejdzie zawsze na półkulę dolną.

Jeżeli równoleżniki te leżą na różnych półkulach, to odległość dolnego równoleżnika od środka kuli musi być większa od takiejże odległości górnego równoleżnika. Jeżeli zatem punkt ruchomy wskutek nadanego mu ruchu podniesie się na górną półkulę do pewnego poziomu, to opuści się on następnie na dolną półkulę o tyle, że suma odległości ograniczających równoleżników od środka kuli zawsze jest dodatnią. Promień przeto dolnego równoleżnika jest zawsze mniejszy od promienia górnego równoleżnika. Rys. 41-szy i 42-gi przedstawiają rzuty toru na płaszczyznę poziomą. Rys. 41-szy przedstawia ruch punktu po jednej półkuli; rys. zaś 42-gi, gdy ruch ten odbywa się po obydwóch półkulach, a w tym razie A_1 i B_1 są miejscami zetknięć się punktu ruchomego z kołami ograniczającymi; koło zaś R jest rzutem równika.

W szczególnym przypadku, gdy pierwiastki są wzajemnie równe, t. j. gdy $z_1 = z_2$, wtedy punkt ruchomy zakreśli koło, które wobec powyższego wniosku może leżeć tylko na półkuli dolnej. Ponieważ w tym przypadku siła ciężenia punktu ruchomego wykonuje pracę zero, a siła odporowa powierzchni gładkiej wykonywa zawsze pracę zero, przeto punkt dany podczas ruchu nie doznaje zmiany energii kinetycznej, t. j. zakreśla on koło ze stałą początkowo nadaną prędkością.

Powróćmy jeszcze do równań 134-tego i 135-tego, a z porównania wyrazów stałych otrzymamy związek:

$$\frac{E_0}{mg} r^2 - \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = z_1 z_2 z_3;$$

a ponieważ pierwiastek z_3 jest zawsze ujemny, przeto znak wyrazu, znajdującego się po lewej stronie równania, którego wartość można obliczyć z początkowych warunków ruchu, rozstrzyga o tem, czy ruch punktu odbywa się po jednej półkuli, czy też po obydwóch. Jeżeli np.

$$E_0 r^2 - \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{m} < 0; \text{ to } z_1 z_2 > 0, \quad (136)$$

czyli punkt przebiega po jednej tylko półkuli.

Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne tych warunków; w tym celu podzielimy wzór 136-ty przez r^2 i napiszemy go w postaci:

$$E_0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{mr^2} (137)$$

W szczególnym przypadku, gdy $M_0 = 0$, t. j. gdy ruch odbywa się w płaszczyźnie biegunowej, warunek podniesienia się punktu ponad równik, t. j. ponad średnicę poziomą, wyrazi się wzorem:

$$E_0 > 0.$$

Wartość wyrazu E_0 zgodnie z jego określeniem, podanem w równ. 133-ciem, wyraża przewyżkę energii kinetycznej $\frac{1}{2} m v_0^2$, udzielonej punktowi, ponad wartość pracy mgz_0 , jaką siła ciężenia punktu wykona podczas podniesienia jego do poziomu równika. W tym więc szczególnym przypadku ruchu punktu, warunek, $E_0 > 0$, podniesienia się punktu ponad równik, lub dojścia do niego, jest wyrazem zasady zachowania energii.

Warunki ruchu po kuli można wyprowadzić również z zasady zachowania energii, gdy zważymy, że ruch punktu w płaszczyźnie biegunowej, (t. j., gdy $M_0 = 0$), i ruch dowolny po powierzchni kuli, różnią się tem, że punkt, poruszający się tylko w płaszczyźnie biegunowej, przybywa do równika z prędkością zero; w ogólnym zaś ruchu (gdy $M_0 \geq 0$), punkt ruchomy dochodzi do równika z pewną prędkością poziomą skierowaną; posiada więc on w tem miejscu pewną energię kinetyczną. Punkt zatem ruchomy, ażeby doszedł do równika, powinien mieć wogóle nadane tyle energii ($\frac{1}{2} m v_0^2$), ażeby po wykonaniu pracy podniesienia mgz_0 posiadał w poziomie równika jeszcze energię $\frac{1}{2} m v_r^2$; gdy literą v_r oznaczmy prędkość na równiku. Obliczmy tę prędkość. Rzut poziomy prędkości w każdym miejscu punktu $= h \frac{d\theta}{dt}$; na równiku przeto

$$v_r = r \frac{d\theta}{dt};$$

wyraz $\frac{d\theta}{dt}$ obliczymy z równania 125-tego, po podstawieniu w nie $h = r$; zatem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_0}{m r^2};$$

wartość przeto energii punktu na poziomie równika:

$$\frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2} m \left(r \frac{M_0}{m r^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2}{m r^2}.$$

Ażeby więc punkt ruchomy doszedł do równika powinna być mu nadana w początku jego ruchu energia kinetyczna:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgz_0 + \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{m r^2};$$

a jeżeli energia ta jest większą od wskazanej przez to równanie, to ciężar punktu może wykonać jeszcze pracę podniesienia się wyżej równika. Co też wyraża warunek przedstawiony wzorem 137-em, wyprowadzonym drogą analizy algebraicznej. Rozpatrzmy jeszcze ruch rzutu punktu, poruszającego się po kuli, na płaszczyznę poziomą, z tego bowiem ruchu będziemy również mogli sądzić o ruchu punktu właściwego. W tym celu rzutujemy na płaszczyznę poziomą punkt ruchomy i siły nań działające, t. j. siłę normalną i siłę jego ciężkości, a zauważymy, że kierunki rzutów siły normalnej zbiegają się w rzucie środka kuli; rzut zaś siły ciężenia

równa się zeru. Rzut przeto punktu ruchomego znajduje się tylko pod działaniem siły środkowej, równej rzutowi siły odporowej. Oznaczmy ten rzut literą N' , a napiszemy:

$$N' = N \cdot \sin \sigma; \text{ lub inaczej } N' = N \frac{h}{r};$$

gdzie h jest promieniem wodzącym rzutu punktu właściwego. Ażeby zatem wyznaczyć ruch rzutu punktu danego, należy wyznaczyć ruch punktu, będącego w polu sił środkowych, określonych równaniem $N' = N \frac{h}{r}$. Wyznaczenie tego ruchu nie

przedstawia trudności w przypadku, gdy N jest stałą wielkością; wtedy bowiem wielkość siły środkowej będzie proporcjonalną do długości promienia wodzącego; tor przeto tego ruchu stosownie do § 19-tego będzie elipsą, lub kołem. Szczególny ten przypadek nastąpi, gdy kąt odchylenia wahadła jest bardzo mały. Przyjawszy np. że kąt odchylenia zbliża się do zera, siła N' zbliżać się będzie do wartości stałej; a rzut punktu właściwego zakreśli na płaszczyźnie poziomej, zgodnie z § 19-tym, krzywą zbliżoną do elipsy, której środek znajduje się w środku przyciągania; a jedna z osi sprzężonych posiada kierunek rzutu promienia wodzącego w początkowym położeniu punktu właściwego; druga zaś — kierunek rzutu prędkości początkowej. Dla małych zatem odchyień wahadła, tor właściwy, jaki zakreśla punkt na kuli, otrzymamy jako przecięcie się walca prostego o podstawie eliptycznej z powierzchnią kuli. Prędkości rzutu punktu właściwego po elipsie są rzutami prędkości punktu właściwego; z rzutów tych można zatem wyznaczyć wektory prędkości właściwych. Inny przypadek, w którym $N = \text{stała}$, następuje, gdy $z = \text{stała}$, tor jest w tym razie kołowy. W przypadkach ogólnych możemy również sądzić, chociaż w przybliżeniu, o postaci toru, gdy zamiast wyrazu ścisłego:

$$N = mg (3 \cos \sigma - 2 \cos \sigma_0) + \frac{mv_0^2}{r},$$

zastosujemy przybliżoną jego wartość, którą otrzymamy po podstawieniu:

$$\cos \sigma = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2;$$

a zatem:

$$N \cong mg \left[3 - \frac{3}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right] + \left(\frac{mv_0^2}{r} - 2 mg \cos \sigma_0 \right);$$

skąd:

$$N \cong C - \frac{3}{2} mg \left(\frac{h}{r}\right)^2;$$

gdzie:

$$C = 3 mg + \frac{mv_0^2}{r} - 2 mg \cos \sigma_0;$$

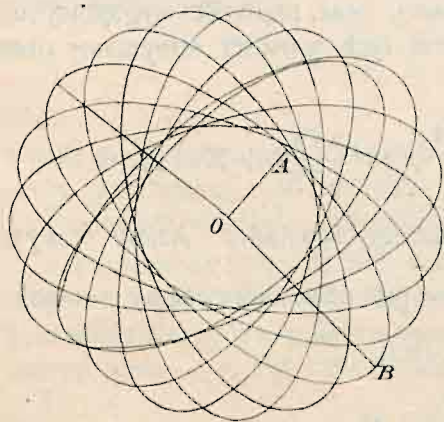
i jest wielkością niezmienną dla danego zadania; po podstawieniu tych wzorów:

$$N' \cong N \frac{h}{r} = C \cdot \frac{h}{r} - \frac{3}{2} mg \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^3 \dots \dots \dots (138)$$

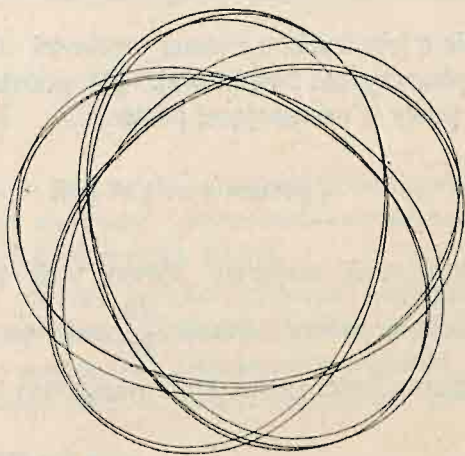
Z tego wzoru wynika, że siłę środkową N' , można uważać z pewnem przybliżeniem, za złożoną z dwóch sił: z siły przyciągającej proporcjonalnie do odległości od środka i z siły odpychającej proporcjonalnie do trzeciej potęgi tejże odległości.

Łatwo odczytać z tego równania, że jeżeli wartość $\left(\frac{h}{r}\right)$ maleje, to wartość $\left(\frac{h}{r}\right)^3$

jeszcze prędzej maleje tak, iż wpływ siły odpychającej na ruch punktu staje się coraz mniejszy, a tor zbliża się do elipsy, cośmy już wyżej przewidzieli. Ze wzrostem wartości h wpływ siły odpychającej wzrasta i ruch należy już uważać za złożony, z ruchu po elipsie i z ruchu, powstałego z siły odpychającej; ruch taki wyobrazić sobie można jako ruch po elipsie, gdy jednocześnie elipsa jest w ruchu. Rys. 43-ci i 44-ty są rzutami toru punktu wahadła kulistego na płaszczyznę poziomą, a powstanie tego toru można sobie wyobrazić w ten sposób, że punkt ruchomy, (t. j. rzut punktu właściwego), zakresła elipsę, która obraca się około swego środka.



Rys. 43.



Rys. 44.

Szczegółowsze badanie tego ruchu wykazują, że punkt styka się z tem samem kołem, ograniczającym jego ruch w równych odstępach. Jeżeli zatem stosunek wielkości takiego odstępu do obwodu tegoż koła jest wymierny, to punkt po przejściu pewnej ilości razy około środka, powróci do miejsca wyjścia; gdy zaś stosunek ten jest niewymierny, wtedy punkt ruchomy nigdy nie wróci do swego pierwotnego położenia; a tor będzie w tym razie krzywą niezamkniętą, która po upływie nieskończenie długiego czasu, wypełni swemi punktami całe pole pomiędzy kołami, ograniczającemi tor. Rys. 40-ty przedstawia tor punktu ruchomego w wi-

doku. Rysunki zaś 43-ci i 44-ty są odbitkami zdjęć fotograficznych ruchu, odbywającego się w rzeczywistości ¹⁾.

62. Właściwość ruchu wahadła kulistego, zbliżonego do wahadła stożkowego. Znajomość ruchu wahadła kulistego potrzebną nam jest przy badaniu ruchu regulatorów; rozpatrzmy przeto jeszcze pewne jego właściwości. Rozpatrywania, które mamy teraz przedsięwziąć różnią się pod względem teoretycznym od poprzednich tem, że obecnie za podstawę weźmiemy szczególny ruch po kole w płaszczyźnie poziomej, ruch, którego powstanie warunkuje równ. 97-me; Zbadamy ten ruch w tym przypadku, gdy jego początkowa prędkość niezupełnie odpowiada warunkom ruchu po kole, wskazanym przez równ. 97-me. Ruch taki wywołamy, gdy wahadło, poruszające się po kole poziomem, odchyliny nieco, np. słabem uderzeniem, z położenia, w którym się znajduje chwilowo; wtedy wahadło dane zejdzie z toru kołowego i zakreśli jakiś inny tor, przypuszczalnie zbliżony do koła, lecz dotychczas nam nieznany. Wyznaczenie tego toru, oraz ruchu po nim jest obecnie naszym zadaniem. Do tych badań zastosujemy spólrzędną σ punktu ruchomego i w celu napisania równania ruchu, wyrażonego tą spólrzędną i czasem, podstawimy w równanie pracy, równ. 123-cie:

$$z = r \cos \sigma; \text{ oraz } v^2 = \left(r \sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\sigma}{dt} \right)^2;$$

gdzie v jest wyrażone sumą prędkości unoszącej, oraz prędkości względnej ruchu na płaszczyźnie biegunowej. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy równanie pracy w następującej postaci:

$$gr \cos \sigma = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin \sigma \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + K,$$

w którym K zastępuje wyrazy stałe powyższego równania. Ażeby σ wyrazić funkcją t , należy wyrazić $\frac{d\theta}{dt}$ zmienną σ ; a w tym celu skorzystamy z równania momentu ilości ruchu, które napiszemy w postaci:

$$m (r \sin \sigma)^2 \frac{d\theta}{dt} = M_0,$$

obliczymy z niego $\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_0}{m r^2 \sin^2 \sigma}$ i podstawimy w powyższe równanie pracy; a otrzymamy je w postaci:

$$gr \cos \sigma = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{M_0}{m r^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + K.$$

¹⁾ Rys. 40, 43 i 44 są wzięte z dzieła: „The Dynamics, by Arthur Gordon Webster. 1912“.

Zrózniczkujmy to równanie względem czasu, a po skróceniu przez wspólny czynnik $\frac{d\sigma}{dt}$, otrzymamy:

$$-gr \sin \sigma = -r^2 \left(\frac{M_0}{mr^2} \right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma} + r^2 \frac{d^2 \sigma}{dt^2};$$

skąd po uporządkowaniu:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \left[\frac{g}{r} \sin \sigma - \left(\frac{M_0}{mr^2} \right)^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma} \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Równanie to moglibyśmy również wyprowadzić z równania dynamicznego tego ruchu, zrutowawszy je na trzy osi: z , h i na oś prostopadłą do płaszczyzny biegunowej, a po wyrugowaniu z tych równań N i $\frac{dh}{dt}$ otrzymalibyśmy powyższe równanie ruchu.

Równanie 138-me jest jednym z równań ruchu wahadła kulistego. Zbadajmy obecnie, mając za podstawę to ogólne równanie, czy jest możliwem, ażeby powstał ruch kołowy punktu; a gdy okaże się to możliwem, znajdziemy warunki ruchu początkowego, przy których powstaje ten ruch. W przypadku ruchu kołowego kąt $\sigma = \sigma_e =$ stałej wielkości, a zatem po podstawieniu tej wartości w równ. 138-me, otrzymamy z niego:

$$M_0 = \pm m \sqrt{\frac{gr^3 \sin^4 \sigma_e}{\cos \sigma_e}} \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

a więc dla każdego kąta σ_e można obliczyć wartość M_0 momentu początkowej ilości ruchu, przy której ruch wahadła będzie stożkowy. Pozostawia się czytelnikowi uitożsamieć ten warunek z warunkiem, wyrażonym równ. 97-em

Przyjmijmy teraz, że ruch wahadła wskutek jakichś fizycznych warunków odbiega od ruchu kołowego i że ta różnica jest nieznaczna i obliczmy ten ruch. W tym celu oznaczmy różnicę kątów pomiędzy położeniem rzeczywistym wahadła, a stożkowym przez $\Delta \sigma$; kąt wahadła stożkowego przez σ_e ; to kąt właściwego ruchu:

$$\sigma = \sigma_e + \Delta \sigma;$$

zmienną wielkością, podczas tego ruchu jest $\Delta \sigma$, jeżeli zatem obliczymy związek pomiędzy $\Delta \sigma$ i czasem t , to będziemy mogli obliczyć również właściwe odchylenie σ w zależności od t . Ażeby obliczyć ten związek podstawmy w równanie ogólne ruchu kulistego, równ. 138-me, wartość $\sigma = \sigma_e + \Delta \sigma$; i przyjmijmy, że $\Delta \sigma$ jest wielkością tak małą w porównaniu z σ , że wyższe jej potęgi oprócz pierwszej, mogą być rachunkiem nie uwzględnione.

Równanie 139-te napiszemy w postaci ogólnej:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + F(\sigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

po podstawieniu w nie: $\sigma = \sigma_e + \Delta \sigma$, otrzymamy:

$$\frac{d^2(\sigma_e + \Delta \sigma)}{dt^2} + F(\sigma_e + \Delta \sigma) = 0.$$

Różniczkowanie, wskazane w tem równaniu, zastosujemy do oddzielnych składników sumy; a funkcję: $F(\sigma_e + \Delta \sigma)$ rozwinieemy w szereg Taylora:

$$F(\sigma_e + \Delta \sigma) = F(\sigma_e) + \Delta \sigma \cdot \frac{dF(\sigma_e)}{d\sigma_e}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

w którym uwzględnimy tylko wyraz pierwszej potęgi wielkości $\Delta \sigma$. Po podstawieniu tych wartości i uwzględnieniu; że:

$$\frac{d^2 \sigma_e}{dt^2} = 0; \text{ oraz } F(\sigma_e) = 0;$$

otrzymamy szukane równanie:

$$\frac{d^2(\Delta \sigma)}{dt^2} + \Delta \sigma \cdot \frac{dF(\sigma_e)}{d\sigma_e} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Zastosujmy ten wzór do naszego przykładu i podstawimy w nie, po utożsamieniu równ. 141-ego z 139-tem:

$$F(\sigma) = \frac{g}{r} \sin \sigma - \left(\frac{M_0}{m r^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \sigma}{\sin^3 \sigma};$$

skąd:

$$\left. \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_e} = \frac{g}{r} \cos \sigma_0 + \left(\frac{M_0}{m r^2} \right)^2 \cdot \frac{1 + 2 \cos^2 \sigma_e}{\sin^4 \sigma_e};$$

a otrzymamy po podstawieniu M_0 z równ. 140-ego, szukany związek:

$$\frac{d^2(\Delta \sigma)}{dt^2} + \Delta \sigma \cdot k = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

w którym:

$$k = \frac{g}{r} \cdot \frac{1}{\cos \sigma_e} (1 + 3 \cos^2 \sigma_e). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Jest to równanie różniczkowe, którego właściwości matematyczne zbadaliśmy w § 8-ym, oraz 52-gim. Równanie to przedstawiać może, zależnie od znaku wartości k , dwojakiego rodzaju ruch: ruch okresowy, gdy całka jego jest funkcją okresową (trygonometryczną), lub też ruch nieokresowy, gdy całka jest funkcją wykładniczą. Gdy $k > 0$; $\Delta \sigma$ waha się pomiędzy pewnemi stałemi wartościami $\pm \Delta \sigma'$; a przypadek ten wyraża, że tor, jaki zakreśla wahadło, wyprowadzone nieco z położenia σ_e , wije się około obwodu koła po obydwu jego stronach; gdy zaś $k < 0$ wartość

$\Delta \sigma$ z biegiem czasu stale się powiększa; punkt przeto, zeszedłszy z toru kołowego, nigdy na niego nie wróci.

Ze wzoru 145-go odczytamy, że wartość k nie może być dla wahadła kulistego ujemną, gdyż w myśl poprzednich badań tego ruchu musi być zawsze $\sigma_e < 90^\circ$; zmiany zatem wielkości $\Delta \sigma$ są w ruchu wahadła kulistego okresowe.

Ruch ten uwidocznimy sobie w sposób następujący. Umieścimy się w płaszczyźnie biegunowej wahadła i z nią razem obracajmy się około osi pionowej, a ruch danego punktu przedstawi się jako ruch wahadła płaskiego, którego położenie równowagi jest nachylone względem pionu pod kątem σ_e .

Z właściwości tych dwóch ruchów sądzić można o ruchu złożonym; a więc, oznaczwszy okres podwójnego wachnięcia w płaszczyźnie biegunowej literą T_w , napiszemy, po utożsamieniu równ. 143-ciego z równ. np. 21-szem, i na zasadzie wyprowadzonego już wzoru 28-go:

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{\cos \sigma_e}{1 + 3 \cos^2 \sigma_e}} \quad (146)$$

okres zaś T_0 pełnego obiegu wahadła stożkowego napiszemy z równ. § 44-tego:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\cos \sigma_e};$$

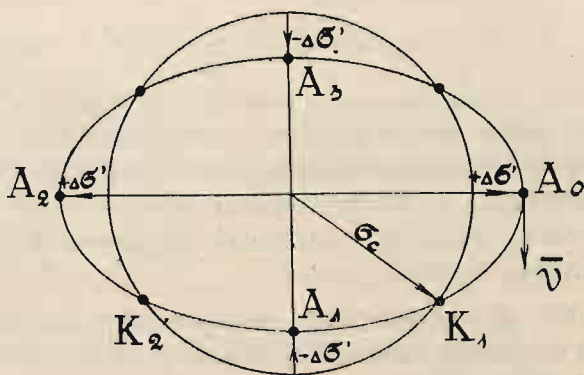
a zależność tych dwóch okresów wyrazimy wzorem:

$$T_w = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \sigma_e}}.$$

Jeżeli kąt σ_e jest bliski zera, to

$$T_w \cong \frac{1}{2} T_0;$$

a z tego stosunku wynika, że podczas np. połowy podwójnego wachnięcia punktu w płaszczyźnie biegunowej, płaszczyzna ta obróci się o ćwierć pełnego obrotu t. j. o 90° . W ten sposób wahadło podczas pełnego obrotu płaszczyzny biegunowej przetnie stożek w czterech symetrycznych miejscach. Rzut toru takiego punktu na płaszczyznę poziomą ma postać w przybliżeniu, wskazaną na rys. 45-tym; na któ-



Rys. 45.

rym nakreślone koło przedstawia rzut toru punktu podczas ruchu stożkowego; a literami $\triangle \sigma'$ oznaczono największe odchylenia wahadła od tego ruchu. Punkt A_0 oznacza rzut właściwego punktu w początkowym jego odchyleniu; A_1 — po zrobieniu połowy podwójnego wahnienia; A_2 zaś po zrobieniu pełnego podwójnego wahnienia. Punkty K_1 i K_2 są rzutami punktu, gdy wahadło przechodzi przez położenia równowagi.

Z powiększeniem jednakże kąta σ_c , okres podwójnego wahnienia punktu w płaszczyźnie biegunowej się powiększa; czyli punkt ruchomy przy większych kątach σ_c wolniej się waha, t. j. gdy punkt robi np. połowę podwójnego wahnienia, wtedy płaszczyzna biegunowa obróci się o kąt większy niż 90° ; wskutek czego miejsca K_1 i K_2 , rys. 45-ty, w których wahadło przecina stożek z powiększeniem kąta σ_c posuwają się po kole w kierunku zgodnym z obrotem płaszczyzny biegunowej; i w ten sposób otrzymamy postać toru, wskazaną np. na rys. 41-szym. Dla granicznej wartości $\sigma_c = 90^\circ$; $T_0 = T_w$.

Jeżeli stosunek $\frac{T_0}{T_w}$ jest współmierny, co następuje tylko przy szczególnych wartościach kąta odchylenia σ_c , to punkt ruchomy powróci po pewnym czasie do miejsca wyjścia, i ponowi tę samą drogę; w przeciwnym razie zakreślać on będzie ciągle nowe tory, którymi wypełni część powierzchni kuli, zawartą pomiędzy kołami, wyznaczonemi przez kąty środkowe $(\sigma_c + \triangle \sigma')$ i $(\sigma_c - \triangle \sigma')$.

W powyższym przybliżonym rachunku przyjęliśmy, że $\triangle \sigma$ jest małą wielkością w porównaniu z kątem σ_c ; dokładniejszego jednakże jej określenia nie daliśmy wskutek tego, że do tego należałoby przeprowadzić rachunek ścisły; gdyż wtedy dopiero, ze wzorów otrzymanych tą drogą, ustalibyśmy możliwy stopień dokładności; a tego staraliśmy się uniknąć, ze względu na trudności rachunkowe. Należy jednakże choć ogólnikowo ocenić, o ile postępowanie nasze rachunkowe zbliża się do dokładnych wartości. Dokładnie, np. $\sin 55^\circ = 0,81915$ (wzięte z tablic), a wzór przybliżony, który stosowaliśmy w powyższym rachunku, wzór 140-ty, da wartość po rozłożeniu np.:

$$\sin 55^\circ = \sin (50^\circ + 5^\circ) \cong \sin 50^\circ + (\text{tutaj } 5^\circ) \cdot \cos 50^\circ = 0,82216;$$

zachodzi przeto nieznaczna różnica $0,4\%$ pomiędzy wartością dokładną, a przybliżoną. Jeżeli przeto pomiędzy temi wartościami zachodzi tak mała różnica, to i wartości ich funkcji nie mogą stosunkowo wiele różnić się między sobą; równanie przeto 141-sze, i, na jego podstawie wyprowadzone, równ. 143-cie z dostateczną dokładnością wyrażają właściwości kinematyczne danego ruchu, co też zostało stwierdzone doświadczeniami.

63. Rodzaje ruchu, wyrażonego linijnem równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Spotykaliśmy się w rozpatrywaniach poprzednich z równaniem ruchu o postaci:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

Równanie te wyraża dwojakiego rodzaju ruch, zależnie od znaku współczynnika k .

1) w przypadku $k > 0$, równanie to wyraża ruch harmoniczny (okresowy) około pewnego środka; wyraz bowiem $\frac{d^2x}{dt^2}$ uważać można za iloczyn z masy (w danej postaci tego wyrazu $= 1$) i przyspieszenia punktu; a wyraz kx — za siłę, działającą na dany punkt; powyższe przeto równanie, napisane w postaci:

$$-kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

uważać można za równanie dynamiczne siły ($-kx$), zwróconej ciągle ku środkowi, tak dla dodatnich wartości x , jak i dla ujemnych; ruch przeto tego punktu będzie opóźniony, gdy punkt oddala się od środka przyciągania, a będzie przyspieszony, gdy zbliża się on do tego środka. Inny będzie ruch w przypadku:

2) gdy $k < 0$, wtedy bowiem zwrot siły (kx) i przyspieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$ posiadają zwroty zgodne, ruch przeto takiego punktu jest ciągle przyspieszony. W przypadku zaś:

3) gdy $k = 0$, siła działająca na punkt $= 0$; ruch zatem jest jednostajny.

Jeżeli więc w równaniu ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0;$$

$k > 0$, to ruch jest harmoniczny; jeżeli;

$k < 0$ „ „ „ ciągle przyspieszony i jednozrotny-nieokresowy, jeżeli zaś;

$k = 0$ „ „ „ jednostajnie przyspieszony.

Te same wnioski odnoszą się do przypadku, w którym wyraz kx zastąpimy wyrazem ogólniejszym $f(x)$. Wyraz ten możemy również uważać za wyraz siły, i powiemy: jeżeli w równaniu ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0,$$

dla wartości x , zawartych np. między granicami x_1 i x_2 , wartość $f(x) > 0$, to ruch w położeniach punktu, określonych temi granicami, jest opóźniony, gdy oddala się od środka; jeżeli zaś $f(x) < 0$, to jest on ciągle przyspieszony, w przypadku zaś, gdy $f(x) = 0$, to on jest jednostajny.

Jeżeli mamy równanie o postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

to, przyjąwszy dwa ostatnie wyrazy za wyrazy sił, napiszemy je w postaci:

$$-c \frac{dx}{dt} - kx = \frac{d^2x}{dt^2},$$

z którego wynika, że siła $c \frac{dx}{dt}$ podczas ruchu punktu zmienia swój zwrot ze zmianą zwrotu prędkości. Jeżeli $c > 0$, to siła $c \frac{dx}{dt}$ wstrzymuje jego ruch; ruch przeto punktu będzie ciągle tą siłą przytłumiany; lecz punkt pomimo tego nie zatrzyma się, gdyż wtedy siła $c \frac{dx}{dt}$ byłaby $= 0$; a siła kx wywołałaby ruch; może więc tylko następować, asymptotyczne wygasanie prędkości i siły kx .

Jeżeli zaś $c < 0$, to zwrot siły $c \frac{dx}{dt}$ jest zgodny ze zwrotem prędkości, punkt przeto pod działaniem tej siły, jest ciągle przyśpieszony. Algebraiczna analiza równ. 38'-tego, podana w § 11-tym tego tomu, doprowadziła nas do wniosku, że o ile pierwiastki równania:

$$m\rho^2 + c\rho + k = 0; \rho = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - k},$$

są urojone, to ruch jest harmoniczny. Przypadek ten wcale nie zachodzi, jeżeli $k < 0$, t. j. jeżeli siła odpycha dany punkt od środka, jeżeli zaś $k > 0$, to może nastąpić ruch harmoniczny przy pewnym stosunku wartości c i k . Jeżeli ten przypadek zachodzi i przytem c jest dodatne, to ruch jest harmoniczny przytłumiony, porów. równ. 43-cie; jeżeli zaś wartość c jest ujemną, to łatwo odczytać z równ. 43-go, że ruch jest harmoniczny wymuszony. Jeżeli zaś pierwiastki równania powyższego są rzeczywiste, to ruch jest nieokresowy. Przypadek ten następuje zawsze, gdy $k < 0$; a dla pewnych tylko stosunków wartości c i k ; gdy $k > 0$.

Z wniosków tych korzystać będziemy przy badaniu właściwości ruchu na podstawie równania dynamicznego.

6. Kinetyczny układ odniesienia i kinetyczna miara czasu.

64. Kinetyczny układ odniesienia. Jeżeli mówimy o zmianie miejsca punktu ruchomego w przestrzeni, to zawsze mamy na myśli pewien określony układ punktów, względem którego ta zmiana następuje; układ ten nazwiemy układem odniesienia ruchu danego punktu. Położenie punktu określamy zwykle odległościami jego od danego układu odniesienia; ruch zaś jego zmianami tych odległości w czasie, t. j., wyrażamy t. zw. równaniami ruchu.

Lecz sposób ten określania ruchu, chociaż jest zupełnie ścisły, w każdej bowiem chwili pozwala wyznaczyć położenie punktu ruchomego względem obranego układu odniesienia, pozostawia jednakże pod względem fizycznym pewną wątpliwość; z tych bowiem odległości czy też z równań ruchu nie dowiemy się, czy punkt dany jest w ruchu, czy też układ porusza się.