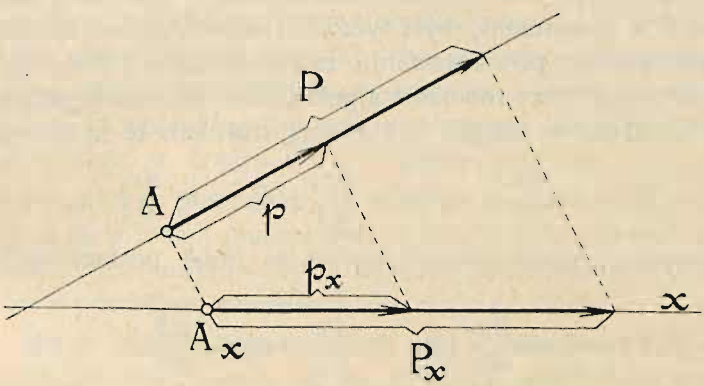
i prędkością w miejscu, wskazanem przez te spółrzędne. Całką tą jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. O tej całce mówiliśmy już w § poprzednim.

2. Równanie dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi osiowemi.

15. Rzuty sił i przyśpieszeń. Ażeby wogóle obliczyć równania ruchu, gdy dane są siły; lub ażeby obliczyć siły, gdy dany jest ruch punktu, należy równanie dynamiczne:

$$\bar{P} = m\bar{p},$$

które jest wektorowe, wyrazić równaniami algebraicznemi; wtedy bowiem będzie możliwem stosowanie do obliczeń działań zwykłej algebry. W tym celu zrzutujmy promieniami równoległymi wektor siły, określony powyższym wzorem, na dowol-



Rys. 12.

nie obraną w przestrzeni oś x, a otrzymamy rzut p_x przyśpieszenia punktu i rzut P_x danej siły. Wzajemną zależność tych dwóch rzutów odczytamy z rys. 12-tego, i wyrazimy ją nast. równaniami:

$$\frac{P}{p} = \frac{P_x}{p_x} = m; \text{ skąd } P_x = mp_x.$$

Takiż stosunek pozostanie w mocy, gdy wektor ten zrzutujemy na dowolnie obraną płaszczyznę.

Jeżeli literą v_x oznaczymy rzut prędkości punktu właściwego na pewną oś, względnie na płaszczyznę, to stosunek powyższy wyrazimy równaniem:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt}; \text{ lub } P_x = m\frac{d^2x}{dt^2};$$

w którem x jest spółrzędną punktu ruchomego, mierzoną wzdłuż obranej osi od pewnego stałego punktu, na niej obranego.

Równania te wypowiemy w sposób następujący:

rzut równoległy siły na dowolną oś, lub płaszczyznę, równa się iloczynowi z masy punktu, na który ta siła działa i z rzutu przyśpieszenia tego punktu.

Dla rzutu siły i rzutu przyśpieszenia znajdziemy pewne znaczenia dynamiczne. Z kinematyki bowiem wiadomo (tom I-y str. 60), że rzut przyśpieszenia punktu ruchomego jest przyśpieszeniem jego rzutu; wielkość zatem p_x może być uważana za przyśpieszenie punktu A_x, który jest rzutem na oś x punktu właściwego A; rys. 12-ty. Twierdzenie to pozwala obliczyć ruch rzutu punktu właściwego na dowolnie obraną oś, lub też na płaszczyznę. Każde zatem z równań rzutów, uważać można za równanie dynamiczne ruchu rzutu punktu na odpowiednią oś lub na odpowiednią płaszczyznę.

Co do kierunku rzutowania nie robiliśmy żadnych zastrzeżeń, należy zatem rozumieć je tak prostokątne, jak i ukośnokątne, byleby były równoległe. W obliczeniach następnych rozumieć jednakże będziemy przez rzutowanie tylko rzutowanie prostokątne; gdy zaś stosować będziemy ukośnokątne, wtedy zaznaczymy to wyraźnie.

Każdy wektor w przestrzeni jest ściśle określony przez trzy rzuty na trzy osi, dowolnie obrane w przestrzeni, byle tylko nie równoległe ani do siebie, ani do jakiejkolwiek płaszczyzny; po zrzutowaniu zatem wektora danej siły na takie osi, otrzymamy następujące trzy równania algebraiczne, które zastępują jedno równanie dynamiczne, wyrażone w postaci wektorowej; równania te są następujące:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt};\ P_z = m\frac{dv_z}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Równania powyższe przedstawimy jeszcze w innej postaci, gdy podstawimy w nie:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt};$$

równania te są następujące:

$$P_x = m\frac{d^2x}{dt^2};\ P_y = m\frac{d^2y}{dt^2};\ P_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Za pomocą równań 57-ych lub 58-ych można rozwiązać drogą rachunkową wszystkie zadania z dynamiki punktu.

Gdy np. dane są równania ruchu punktu w postaci:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t);$$

wtedy obliczymy z nich drogą różniczkowania wartości $\frac{dx}{dt}$ i t. d.; następnie $\frac{dv_x}{dt}$ i t. d., a następnie, znając masę punktu ruchomego, obliczymy rzuty siły; a z nich siłę właściwą, wywołującą dany ruch punktu.

Można również za pomocą powyższych równań dynamicznych rozwiązać zadania odwrotne. Gdy np. daną jest siła przez swe rzuty na trzy osi, wyrażone funkcyami spółrzędnych; wtedy całknjąc równania dynamiezne obliczymy równania ruchu punktu danego.

Jeżeli na pewien punkt działa wiele sił, to siłę $\overline{P}$ uważać można za ich wypadkową; a sumę algebraiczną ich rzutów za rzut siły wypadkowej. W tenże sposób postąpimy, jeżeli zamiast jednego wektora przyśpieszenia, właściwego ruchomemu punktowi, wprowadzimy na skutek pewnych warunków zadania jego składowe.

Jeżeli ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie, to osi spółrzędnych obierzemy w tejże płaszczyźnie; i zastosujemy do rachunku tylko dwa z powyższych równań.

Równania 57-me służą zatem do obliczenia ruchu krzywolinijnego.

A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu krzywolinijnego.

16. Warunki powstawania ruchu krzywolinijnego. Ruch krzywolinijny punktu swobodnego powstaje, gdy kierunek siły, działającej na niego, mija się z kierunkiem prędkości, jaką on posiada w chwili działania siły; lub też, gdy siła zmienia swój kierunek. Wnioski te oparte są bezpośrednio na pojmowaniu i określeniu siły. Z równania bowiem dynamicznego siły wynika, że przyrost $d\overline{v}$ prędkości jest równoległy do kierunku siły; gdy więc siła posiada kierunek, różny od kierunku prędkości chwilowej danego punktu, wtedy i kierunek prędkości po upływie czasu dt zmieni się; posiada on bowiem kierunek trzeciego boku trójkąta, zbudowanego z boków $\overline{v}$ i $d\overline{v}$; porów. rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym kierunek siły, działającej na dany punkt, leży stale w jednej płaszczyźnie, w której leży również kierunek początkowej prędkości, ruch punktu odbywa się w tej płaszczyźnie; w przeciwnym razie zakreśli on tor o podwójnej krzywości.

17. Ruch punktu swobodnego pod działaniem siły stałej. Na punkt materyalny działa siła $\overline{P}$, stała co do kierunku, wielkości i zwrotu; w początku ruchu punkt dany posiada prędkość $\overline{C}$, której kierunek mija się z kierunkiem siły; obliczyć równanie ruchu.

Ponieważ w danym przykładzie ruch będzie płaski, — w płaszczyźnie, przechodzącej przez kierunek prędkości początkowej i kierunek siły; obierzemy przeto w tej płaszczyźnie, dla ułatwienia rachunku, osi x i y. Osi te obrać można prostokątne lub ukośnokątne; obierzemy je prostokątnemi i w ten sposób, że osi y nadamy kierunek i zwrot siły; oś zaś x przeprowadzimy przez początkowe położenie punktu, prostopadle do y, ze zwrotem dodatnym, zgodnym ze zwrotem rzutu C_x prędkości początkowej, rys. 13-ty.

Wybór osi w przestrzeni jest wogóle zupełnie dowolny i nie wpływa na wynik rachunku; wybór zaś szczególnego położenia ma jedynie na celu możliwe uproszczenie rachunku.

Warunki początkowe ruchu przyjmiemy w danym przykładzie w ten sposób, że czas zaczniemy liczyć od chwili wyjścia punktu ruchomego z początku układu, w którym też punkt dany posiada prędkość $\overline{C}$. Warunki te wyrazimy algebraicznie w sposób następujący:

dla:
$$x = 0;\ y = 0;\ t = 0;$$
oraz dla:
$$x = 0;\ y = 0;\ v_x = C_x;\ v_y = C_y.$$

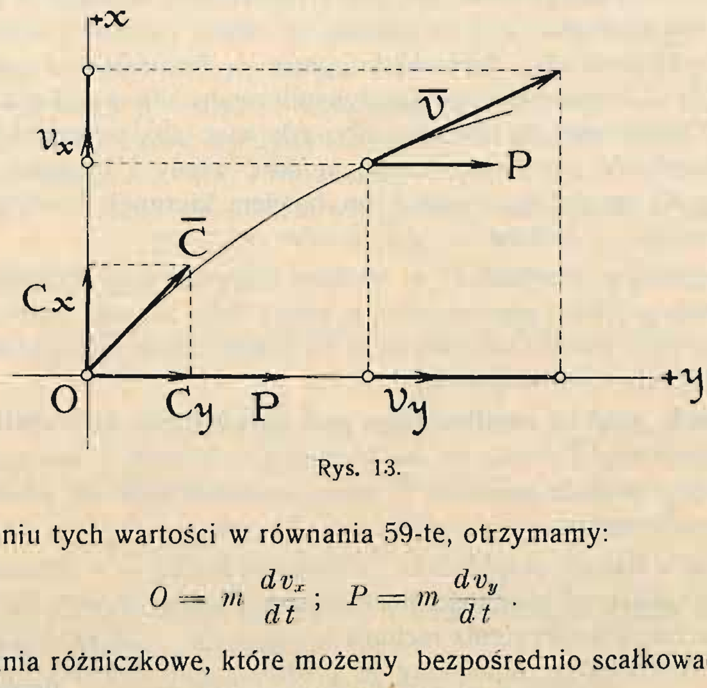
Obrawszy już osi spółrzędnych i warunki początkowe ruchu, przystąpimy do właściwego rachunku. W tym celu zastosujemy równania dynamiczne rzutów punktu na obrane osi, i w równania ogólne:

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\ P_y = m\frac{dv_y}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (59)$$

podstawimy odpowiednie wartości.

W danem zadaniu siła jest znaną, obliczymy zatem jej rzuty na obrane osi; rzuty te są następujące:

$$P_x = 0;\ P_y = P.$$



Rys. 13.

Po podstawieniu tych wartości w równania 59-te, otrzymamy:

$$0 = m\frac{dv_x}{dt};\quad P = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Są to równania różniczkowe, które możemy bezpośrednio scałkować; po scałkowaniu otrzymamy:

$$m v_x = K_1;\ m v_y = Pt + K_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (60)$$

Ażeby obliczyć stałe, pochodzące z całkowania, skorzystamy z początkowych warunków ruchu, poprzednio obranych; i podstawimy:

$$t = 0;\ v_x = C_x;\ v_y = C_y;$$

a otrzymamy wartości stałych:

$$m C_x = K_1;\quad m C_y = K_2;$$

i następnie:

$$m v_x = m C_x; \quad m v_y = P t + m C_y.$$

Pierwsze równanie wskazuje, że $v_x = C_x$, t. j. rzut prędkości punktu ruchomego na oś x jest stały we wszystkich jego położeniach; co można sobie wytłomaczyć w ten sposób, że rzut siły na oś równa się zeru, przeto rzut punktu na tę oś pozostaje w ruchu jednostajnym z prędkością równą rzutowi początkowej prędkości.

Z drugiego równania odczytamy, że rzut prędkości na oś y, zależy od czasu. Ażeby obliczyć równania wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu (x, y) i czasem t, podstawimy w równania powyższe:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt};$$

i otrzymamy:

$$m \frac{dx}{dt} = m C_x; \quad m \frac{dy}{dt} = P t + m C_y.$$

Równania te możemy bezpośrednio scałkować, a po scałkowaniu otrzymamy szukane zależności w postaci skończonej:

$$m x = m C_x t + K'; \quad m y = \tfrac{1}{2} P t^2 + m C_y t + K'';$$

stałe tych równań obliczymy z warunków początkowych; któreśmy już przyjęli. W tym celu podstawimy:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad \text{oraz } y = 0;$$

i otrzymamy:

$$K' = 0; \quad K'' = 0;$$

wskutek czego równania ruchu przedstawią się w następującej postaci:

$$m x = m C_x t; \quad m y = \tfrac{1}{2} P t^2 + m C_y t \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

Z tych równań obliczyć można miejsce (x, y), w jakiem punkt się znajduje w czasie t; lub też odwrotnie, obliczyć można czas, jaki upłynął od chwili wyjścia punktu z położenia początkowego do chwili przybycia do miejsca (x, y).

W celu obliczenia równania toru należy wyrugować t z powyższych równań ruchu; wtedy bowiem otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu ruchomego. Wyrugujmy zatem np. t z pierwszego równania i podstawmy je w drugie, a otrzymamy szukane równanie toru:

$$m y = \tfrac{1}{2} \frac{P}{C_x^2} \cdot x^2 + m \frac{C_y}{C_x} \cdot x.$$

Jestto równanie paraboli; tor więc, jaki zakreśli punkt materyalny z początkową prędkością $\overline{C}$ pod działaniem siły stałej, jest parabolą, której główna oś posiada kierunek siły.

W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na punkt ruchomy, jest siłą ciążenia ziemskiego; obliczymy równania ruchu po podstawieniu w równanie powyższe $P = mg$; oś y będzie wtedy pionowo skierowana ku dołowi; a po skróceniu przez m, otrzymamy równania ruchu:

$$x = C_x t;\ y = \tfrac{1}{2} g t^2 + C_y t.$$

Równanie zaś toru, jaki zakreśla w polu ciążenia punkt materyalny, wyrzucony z prędkością $\overline{C}$, jest następujące:

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{g}{C_x^2} x^2 + \frac{C_y}{C_x} x.$$

Sprawdzimy teraz wymiary tego równania i w tym celu podstawimy:

$$x = L;\quad y = L;\quad g = LT^{-2};\quad C = LT^{-1};$$

trygonometryczna bowiem funkcya ma wymiar zera; a otrzymamy równanie jednorodne.

Zbadajmy obecnie ruch punktu materyalnego, wyrzuconego ku górze pod danym kątem α względem poziomu. Ażeby do obliczeń tego ruchu zastosować powyższe równania, należy wyobrazić sobie oś y pionowo ku dołowi, rys. 14; oś x poziomo; i należy podstawić w równania powyższe:

$$C_x = C \cos \alpha;\quad C_y = - C \sin \alpha.$$

Równanie zatem toru tego punktu jest następujące:

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

W celu zbadania właściwości tego ruchu, obliczmy pochodną $\frac{dy}{dx}$, która równa się:

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

Gdy przyjmiemy, że $90^0 > \alpha > 0$, to pochodna ta dla pewnych wartości x jest odjemną, co wyraża, że dla tych wartości punkt ruchomy, wychodząc z miejsca O, podnosi się, jak wskazuje rys. 14-ty.

Spółrzędną x_0 miejsca największego wzniesienia punktu ruchomego obliczymy z równania:

$$\frac{dy}{dx} = 0;\ \text{t. j. z równania:}$$

$$x_0 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 0;\ \text{z którego}$$

$$x_0 = C^2 \frac{\sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g},\ \text{lub inaczej } x_0 = \frac{C^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie toru, otrzymamy spółrzędną y_0 tegoż miejsca:

$$y_0 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{C^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2 \cdot \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - \frac{C^2 \,.\, \sin 2\alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha}{2g};$$

lub inaczej po przekształceniu tego wzoru:

$$y_0 = -\frac{1}{2g} C^2 \sin^2 \alpha.$$

Po przejściu punktu ruchomego przez najwyższe miejsce (x_0, y_0) toru, zacznie on spadać, gdyż $\frac{dy}{dx}$ przybierze wartości dodatne; a punkt przetnie oś x w odległości l od początku spółrzędnych. Odległość tę, zwaną przelotem rzutu, obliczymy z równania toru, po podstawieniu w nie $y = 0$; zatem mamy:

$$O = \tfrac{1}{2} l^2 \frac{g}{C^2 \cos^2 \alpha} - l \operatorname{tg} \alpha;$$

skąd otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$l_1 = 0; \text{ oraz } l_2 = \frac{2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{g} C^2 = \frac{C^2}{g} \sin 2\alpha;$$

$$\text{lub inaczej } l_2 = 2 x_0 .$$

Obliczymy obecnie kąt α, przy którym przelot l będzie największy; gdy daną jest tylko algebraiczna wartość początkowej prędkości. W danym razie l ma być maximum przy zmiennej α; a więc powinno być $\sin 2\alpha = \max$; co nastąpi, gdy $\sin 2\alpha = 1$; $2\alpha = 90^0$, a więc gdy: $\alpha = 45^0$.

Obliczenie wektorowe. Rozwiążemy zadanie powyższe sposobem wektorowym. W tym celu przyjmijmy, że punkt materyalny zostaje wyrzucony z miejsca O z prędkością początkową $\overline{C}$, rys. 14-ty i że siła, działająca na punkt podczas jego ruchu, jest $m\overline{g}$. Położenie punktu wyznaczymy promieniem wodzącym $\overline{r}$; wyprowadzonym z O. Równanie dynamiczne, wyrazimy wektorowo:

$$\overline{P} = m \frac{d\overline{v}}{dt};$$

po podstawieniu w nie zamiast siły $\overline{P}$ wielkość $m\overline{g}$ i po skróceniu przez m, otrzymamy:

$$\overline{g} = \frac{d\overline{v}}{dt}; \text{ inaczej } \overline{g}\, dt = d\overline{v}.$$

Całka tego równania od 0 do t i od $\overline{C}$ do $\overline{v}$, wobec niezmienności wektoru $\overline{g}$, ma następującą postać:

$$\overline{g} t = \overline{v} - \overline{C}; \text{ skąd}$$

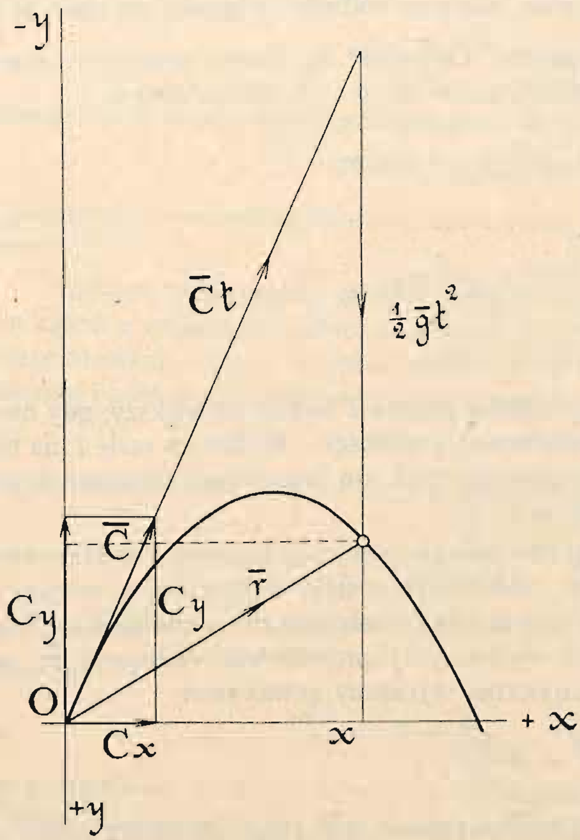
$$\overline{v} = \overline{C} + \overline{g} t \quad \dots\dots\dots\dots \quad (62)$$

Z równania tego odczytamy, że prędkość punktu w chwili t przedstawia trzeci bok trójkąta, zestawionego z boków $\overline{C}$ i $\overline{g} t$. Podstawmy następnie w to równanie $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$, gdzie $d\overline{r}$ jest cząstką toru, a otrzymamy

$$d\overline{r} = \overline{C} \,.\, dt + \overline{g} t \,.\, dt;$$

po scałkowaniu pomiędzy granicami od O do $\overline{r}$, i od O do t, zważywszy przedtem, że wektory $\overline{C}$ i $\overline{g}$ są stałe i że suma wektorów $d\overline{r}$ jest promieniem wodzącym punktu ruchomego, otrzymamy:

$$\overline{r} = \overline{C}t + \tfrac{1}{2}\overline{g}t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$



Rys. 14.

Równanie to jest przedstawione geometrycznie na rys. 14-tym; w którym $\overline{r}$ jest bokiem zamykającym trójkąta, zestawionego z wektorów $\overline{C}t$, oraz $\frac{1}{2}\overline{g}t^2$.

Równanie powyższe wyrazimy spółrzędnemi prostokątnemi (x, y) punktu ruchomego, gdy trójkąt, przedstawiony przez nie, zrzutujemy na osi x i y; a zważywszy, że rzuty wektora $\overline{r}$ są spółrzędnemi punktu ruchomego, otrzymamy równania poprzednie.

18. Ruch swobodnego punktu materyalnego w polu sił środkowych. Określenie pól sił wogóle i sił środkowych w szczególe daliśmy w § 194-ym tomu I-ego; obecnie rozpatrzymy ruch swobodnego punktu materyalnego, rzuconego z pewną prędkością w polu tych sił. Szczególne przypadki tego ruchu rozpatrywaliśmy już w przykładach ruchu prostolinijnego; w których prędkość początkowa równała się zeru; obecnie rozpatrzymy przypadki ogólniejsze, w których prędkość początkowa posiada pewną wielkość, a kierunek jej nie zlewa się z kierunkiem siły.

Co do zmienności sił, uczynimy różne założenia, odpowiadające pewnym przypadkom, spotykanym w technice, lub w zjawiskach ruchu ciał niebieskich; ogólne bowiem rozpatrywania ruchu w polu sił, wyrażonych funkcyami spółrzędnych, przedstawia dosyć znaczne trudności rachunkowe.

19. Ruch punktu materyalnego swobodnego, pod działaniem sił środkowych, przyciągających proporcyonalnie do odległości. Gdy punkt materyalny znajduje się w polu sił środkowych, przyciągających go proporcyonalnie do jego odległości od środka przyciągania i gdy kierunek początkowej prędkości $\overline{v}_0$ nie zlewa się z kierunkiem siły przyciągającej, wtedy punkt dany zakreśli w przestrzeni pewien tor krzywolinijny. W celu obliczenia równania tego toru oraz ruchu po nim, zbadamy najpierw, czy tor jest płaski, czy też przestrzenny.

W tym celu przeprowadzimy płaszczyznę przez środek przyciągania, i przez kierunek początkowej prędkości; i zauważymy, że niema sił, któreby wyprowadziły punkt ruchomy z tej płaszczyzny; ruch zatem danego punktu jest płaski. Obierzmy układ osi ukośnokątnych w płaszczyźnie ruchu, w ten sposób, ażeby oś x zlewała się z prostą, łączącą środek przyciągania z początkowem położeniem r_0 punktu, rys. 15-ty, a oś y ażeby była równoległa do $\overline{v}_0$. Niech A oznacza na rys. 15-tym, położenie punktu ruchomego w chwili dowolnej t, r jego promień wodzący; to wartość siły przyciągającej w tem położeniu punktu wyrazimy wzorem wektorowym $\overline{P} = k\overline{r}$. Równanie dynamiczne przeto jest:

$$-\overline{P} = m\frac{d\overline{v}}{dt};$$

a rzut jego na oś x:

$$-P_x = m\frac{dv_x}{dt}.$$

Rzut P_x (ukośny) obliczymy ze stosunku geometrycznego:

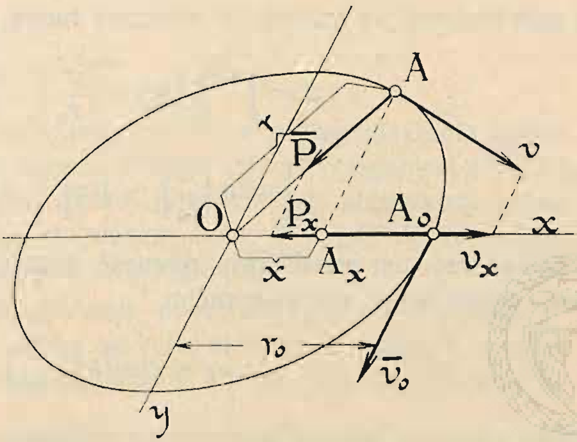
$$P_x = P\cdot\frac{x}{r} = kx;$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy równanie:

$$-kx = m\frac{dv_x}{dt};$$

lub w innej postaci:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad . \quad . \quad (64)$$



Rys. 15.

z którego, po podstawieniu $dt = \frac{dx}{v}$ i po jego scałkowaniu, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i spółrzędną punktu; równanie to jest następujące:

$$-\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + K_1.$$

W celu obliczenia wartości K_1 skorzystamy z warunków początkowych danego ruchu, które przyjmiemy dla:

$$t = 0;\ x = r_0;\ y = 0;\ \text{oraz}\ v_x = 0;\ \text{i}\ v_y = v_0;$$

a po podstawieniu tych wartości:

$$K_1 = -\tfrac{1}{2}kr_0^2;$$

a więc:

$$mv_x^2 = k(r_0^2 - x^2).$$

Następnie, podstawiwszy w to równanie: $v_x = \frac{dx}{dt}$, otrzymamy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{r_0^2 - x^2},$$

które po scałkowaniu daje jedno z równań ruchu:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) + K_2.$$

Podstawiwszy w nie:

$$x = r_0; \quad t = 0;$$

obliczymy:

$$K_2 = -\sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, \operatorname{arsin}(1) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, \frac{1}{2}\,\pi.$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie ruchu, mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\,\pi\right]; \text{ lub:}$$

$$\left[\operatorname{arsin}\left(\frac{x}{r_0}\right) - \tfrac{1}{2}\,\pi\right] = t\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Ponieważ wzór ten przedstawia równość kątów, przeto i dostawy ich są równe; mamy zatem jedno równanie ruchu:

$$x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Drugie równanie ruchu otrzymamy po zrzutowaniu danej siły na oś y; równanie to jest następujące:

$$-ky = m\,\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

Po scałkowaniu jego i wprowadzeniu przyjętych poprzednio warunków ruchu początkowego, otrzymamy równanie:

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

które łącznie z poprzedniem wyraża ruch danego punktu.

Równanie toru tego ruchu obliczymy, po wyrugowaniu z równań powyższych zmiennej t; równanie to jest następujące:

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\left(v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

i przedstawia elipsę, zbudowaną na osiach sprzężonych, przechodzących przez środek przyciągania i równoległych do $\overline{v}_0$, oraz do promienia wodzącego $\overline{r}_0$ punktu w początkowem jego położeniu.

W szczególnym przypadku elipsa ta może przybrać postać koła o promieniu r_0; przypadek ten nastąpi, gdy osi elipsy staną się równemi, t. j. gdy

$$r_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}};$$

lub inaczej, gdy początkowa prędkość:

$$v_0 = r_0 \sqrt{\frac{k}{m}},$$

i kierunek jej jest prostopadły do promienia.

Znaczenie dynamiczne tego warunku znajdziemy, gdy przedstawimy to równanie w następującej postaci:

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = r_0 k.$$

Lewa bowiem strona tego równania jest iloczynem z przyśpieszenia dośrodkowego i z masy punktu; prawa zaś wyraża wartość siły przyciągającej w danem położeniu punktu; a zatem ruch punktu będzie kołowym, gdy początkowe warunki ruchu odpowiadają warunkom ruchu po danem kole; t. j., gdy iloczyn z masy punktu i przyśpieszenia jego równa się sile przyciągającej.

W szczególnym przypadku, gdy kierunek początkowej prędkości zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, wtedy osi x i y zlewają się z sobą i ruch będzie prostolinijny taki sam, jaki przedstawiliśmy w § 8-ym, a jego równanie jest następujące:

$$x = r_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Równanie to ma jednakże nieco inną postać, niż rów. 26-te, lecz to pochodzi z odmiennych warunków początkowego ruchu. Poprzednio bowiem przyjęliśmy dla $x = 0$; $t = 0$; obecnie zaś przyjęliśmy dla $x = r_0$; $t = 0$.

Okres, który nazwaliśmy w ruchu prostolinijnym harmonicznym, okresem podwójnego wahnięcia, a który obecnie jest okresem całkowitego obiegu, obliczymy, gdy znajdziemy okres czasu T, w którym punkt przybywa do tego samego miejsca na torze. Okres ten obliczymy z równania ruchu 65-go, gdy podstawimy w nie:

$$x = r_0;\ t = T;\ \text{wtedy}\ T\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi;\ \text{skąd}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Z równania tego odczytamy, że okres obiegu nie zależy od początkowego położenia punktu ani też od początkowej prędkości. Wyjaśnienie fizyczne tej właściwości jest takie same, jakie daliśmy przy rozpatrywaniu ruchu harmonicznego prostolinijnego.

Z powyższych równań można skorzystać w celu obliczenia równań ruchu dla przypadku, w którym siła środkowa odpycha punkt materyalny proporcyonalnie do odległości. W danym razie równanie dynamiczne ma postać:

$$kx = m\,\frac{dv_x}{dt}\,.$$

Z równań zatem ruchu punktu przyciąganego otrzymamy równania ruchu punktu odpychanego, przy zresztą jednakowych warunkach początkowych; gdy zamiast k podstawimy $(-k)$, równania te będą następujące:

$$x = r_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right); \text{ oraz}$$

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,\frac{1}{i}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\,.\,i\right);$$

w których $i = \sqrt{-1}$.

W celu przekształcenia tych równań urojonych na równania rzeczywiste, skorzystamy ze wzorów 5-go i 6-go, przytoczonych w „Techniku" na str. 68-ej, i otrzymamy:

$$x = \tfrac{1}{2} r_0\left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} + e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right); \text{ oraz}$$

$$y = \tfrac{1}{2} v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right).$$

Równania te wskazują, że z rosnącym czasem spółrzędne punktu ruchomego również rosną, punkt zatem stale oddala się od miejsc wyjścia. Równanie toru otrzymamy, rugując z tych dwóch równań t; co można uskutecznić, przeniósłszy stałe wyrazy, stojące przed nawiasami prawej strony równania, do mianownika lewej strony i następnie podniósłszy obydwie strony tych równań do potęgi drugiej; a po ich odjęciu otrzymamy szukane równanie toru.

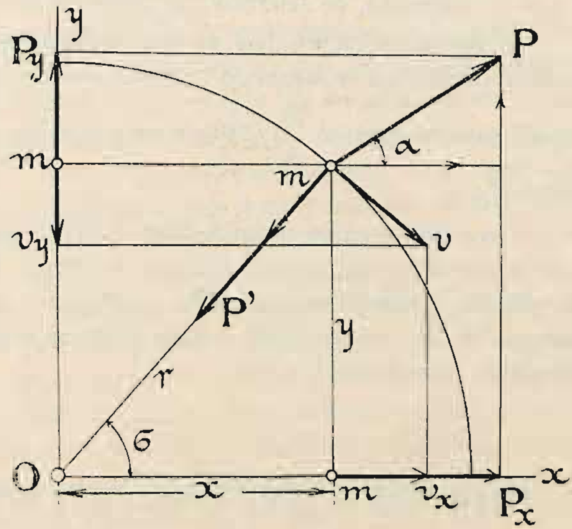
Można również napisać bezpośrednio równanie toru z równ. 67-go; po podstawieniu w nie $k = -k$; równanie to otrzyma postać:

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{\left(v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (68)$$

Tor zatem punktu materyalnego, odpychanego przez pewien środek siłą, proporcyonalną do odległości, jest hyperbolą, której średnice sprzężone przechodzą przez środek odpychania i jedna z nich jest równoległa do promienia wodzącego punktu w początkowem jego położeniu; druga zaś jest równoległa do kierunku początkowej prędkości; wartości tych średnic odczytać można z równania toru.

20. Przykład obliczenia sił, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim. Punkt o masie m posuwa się po torze kołowym o promieniu r ze stałą prędkością v; wyznaczyć siłę, która wywołuje ten ruch. W przykładzie tym dany jest ruch punktu t. j. tor i prędkości po nim, a należy obliczyć siłę, wywołującą ruch.

Gdy punkt materyalny posiada pewną prędkość, a siły na niego nie działają, wtedy wykona on ruch, zgodnie z prawem bezwładności, po torze prostolinijnym ze stałą prędkością. Gdy zaś punkt materyalny zakreśla tor krzywolinijny, wtedy działają na niego siły, które sprowadzają go z toru prostego, wyznaczonego kierunkiem prędkości początkowej. Ażeby obliczyć tę siłę, zastosujmy równania dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi prostokątnemi i w tym celu wyobraźmy sobie dowolną siłę P, przyczepioną do danego punktu, rys. 16-ty, i przeprowadźmy przez środek koła dwie wzajemnie prostopadłe osi x i y; a napiszemy wtedy równania dynamiczne:



Rys. 16.

$$P_x = m\frac{dv_x}{dt};\; P_y = m\frac{dv_y}{dt};$$

w których P_x i P_y są niewiadomemi. Z tegoż rys. 16-tego mamy związki:

$$v_x = v\sin\sigma = v\frac{y}{r};\quad v_y = -v\cos\sigma = -v\frac{x}{r};$$

po ich zróżniczkowaniu, zważywszy przedtem, że v i r są wielkości stałe, napiszemy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{v}{r}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{v}{r}v_y;\quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{v}{r}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{r}v_x;$$

a po podstawieniu wartości v_x i v_y z równań poprzednich, otrzymamy:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{x}{r};\ \text{oraz}\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{y}{r};\ \text{a następnie:}$$

$$P_x = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{x}{r};\ \text{oraz}\ P_y = -\frac{v^2}{r}\cdot\frac{y}{r};\ \text{skąd}$$

$$P = \pm\sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \pm\frac{mv^2}{r}.$$

Z równania tego obliczymy wartość szukanej siły; a kąt kierunkowy α tej siły względem osi x, obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-y}{-x} = \operatorname{tg}\sigma,$$

z którego wynika, że:

$$\alpha = \sigma; \text{ lub: } \alpha = \pi + \sigma.$$

Odjemne wartości rzutów siły na osi spółrzędnych wskazują, iż z tych dwóch odpowiedzi należy wybrać: $\alpha = \pi + \sigma$; zresztą znaki odjemne we wzorze $\operatorname{tg}\alpha$ przy y i przy x wskazują, że szukany kąt leżeć może tylko w trzeciej ćwiartce koła.

Z równań tych wynika, że siła, wywołująca ruch jednostajny po kole, działa wzdłuż promienia wodzącego ze zwrotem ku środkowi koła, a wartość jej równa się wartości wyrazu $m\frac{v^2}{r}$. Właściwe położenie tej siły jest oznaczone na rys. 16-tym, literą P'.

Do tegoż wyniku moglibyśmy dojść bezpośrednio na podstawie twierdzenia o przyśpieszeniu punktu, będącego w ruchu krzywolinijnym, oraz na podstawie określenia dynamicznego siły; wyznaczywszy bowiem wektor przyśpieszenia danego ruchu, wektor siły będzie jego m-krotną wielkością, co się zgadza z poprzednim wynikiem.

3. Równanie dynamiczne, wyrażone siłą normalną i styczną.

21. Siła dośrodkowa i styczna. Za pomocą przytoczonych trzech równań dynamicznych możemy rozwiązać wszelkie zadania z dynamiki punktu. Często jednakże, jak to było w ostatnim przykładzie, zadanie to można rozwiązać prościej, gdy warunki jego pozwalają na wyznaczenia wektora przyśpieszenia; wtedy bowiem szukaną siłę wyznaczymy bezpośrednio: — jako m-krotny wektor przyśpieszenia. Gdy w zadaniu dany jest tor, oraz równanie ruchu po tym torze w postaci np. $s = f(t)$, wtedy wyznaczyć można przyśpieszenie z dwóch jego rzutów na główną normalną do toru i na styczną do niego; jakieśmy to pokazali w § 47-ym tomu I-ego. Rzuty te są równe (równ. 33-te, str. 50, tomu I-ego):

$$p_n = \frac{v^2}{\rho}\,;\; p_t = \frac{dv}{dt}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

a właściwe przyśpieszenie:

$$\overline{p} = \overline{p_n} + \overline{p_t}\,.$$

Zrzutujmy następnie siłę $\overline{P}$, działającą na dany punkt w pewnem miejscu jego toru, na te same osi, na które zrzutowaliśmy przyśpieszenie t. j. na następujące trzy osi: na główną normalną do toru (na której leży promień krzywości); na styczną do niego i prostopadłą do tych dwóch osi (t. j. na binormalną); a zgodnie z twierdzeniem o rzutach sił na osi (§ 15-ty) i mając na uwadze rów. 69-te, napiszemy:

$$P_n = m\frac{v^2}{\rho}\ ;\ P_t = m\frac{dv}{dt}\ ;\ \text{oraz}\ P_b = 0\ \ldots\ldots \quad (70)$$

$P_b = 0$, wskutek tego, że wektor przyśpieszenia punktu leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, (w której leżą też osi n i t), a zatem rzut jego, a więc i rzut siły na binormalną równają się zeru. Na podstawie tych równań mamy:

$$\overline{P} = \overline{P}_n + \overline{P}_t\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Z równania 70-go i 71-go obliczyć można siłę, wywołującą ruch, gdy dany jest tor i ruch punktu po nim; lecz można również wyznaczyć tor i ruch punktu, gdy dane są siły. W tym celu wyobrazimy sobie, mając na uwadze prawo superpozycyi, że ruch punktu w danem polu sił wywołany jest dwiema siłami, jednocześnie działającemi: siłą normalną do toru, która utrzymuje punkt na okręgu koła w ruchu jednostajnym i siłą styczną, udzielającą mu przyśpieszenia wzdłuż tego okręgu. Niech będzie np. dane położenie początkowe punktu w przestrzeni, masa, jego prędkość v_1 w tem położeniu i siła $\overline{P}_1$, która w tem miejscu na niego działa, to znajdziemy następne położenie tego punktu, jakie on zajmie po upływie czasu $\triangle t$, oraz jego prędkość w tem położeniu, gdy w płaszczyźnie $(\overline{v}_1, \overline{P}_1)$ przeprowadzimy normalną do kierunku danej prędkości; zrzutujemy na nią daną siłę i odłożymy długość ρ_1, obliczoną z równ. 70-ego; a koło, zakreślone tym promieniem, jest kołem krzywości szukanego toru. W celu wyznaczenia położenia punktu, po upływie czasu $\triangle t$, przyjmiemy z pewnem przybliżeniem, że punkt dany przebiega po tym kole ze stałą prędkością v_1; znajdzie się on zatem, po upływie czasu $\triangle t$, w miejscu $A_1A_2 = v_1 \,.\, \triangle t$. Jeśliby na dany punkt działała tylko siła $P_{1,n}$, to przybyłby on do A_2 z prędkością v_1; ponieważ zaś działa na niego jeszcze siła styczna, prędkość ta będzie inną. W celu jej obliczenia, skorzystamy z równania $P_{1,t} = m\frac{dv}{dt}$, z którego obliczymy $\triangle v_1 = \frac{P_{1,t}}{m} \,.\, \triangle t$; $P_{1,t}$ jest bowiem znane jako rzut siły P_1 na kierunek v_1. Prędkość zatem w miejscu A_2 jest styczną do koła, zakreślonego promieniem ρ_1; a wartość jej $v_2 = v_1 + \triangle v_1$.

Znając następnie siłę P_2 w miejscu A_2, obliczymy ρ_2, zakreślimy koło tym promieniem i obliczymy w powyższy sposób położenie A_3 punktu ruchomego, oraz jego prędkość w tem miejscu. Postępując w ten sposób, otrzymamy tor punktu, złożony z cząstek kół, zakreślonych z różnych środków, różnymi promieniami.

Zauważymy, że tor punktu, wykreślony sposobem wskazanym na str. 6, składa się z odcinków prostych; wykreślony zaś sposobem teraz wyłożonym składa się z odcinków kołowych.

W szczególnych przypadkach:

1) gdy $P_n = 0$, oraz $P_t = 0$; wtedy ruch punktu jest prostolinijny i jednostajny; z powyższych bowiem równań otrzymamy $\rho = \infty$; i prędkość stałą;

2) gdy $P_n = 0$; a $P_t \gtrless 0$, wtedy powstaje ruch zmienny prostolinijny; gdyż $\rho = \infty$, a prędkość jest zmienną;
3) gdy zaś $P_n \gtrless 0$, a $P_t = 0$; wtedy otrzymamy ruch krzywolinijny jednostajny;
4) gdy wreszcie $P_n \gtrless 0$, oraz $P_t \gtrless 0$, wtedy otrzymujemy ruch krzywolinijny zmienny.

Obserwując np. siły, wywołujące bieg ostatniego wagonu pociągu, który przebiega po łuku, zauważymy, że siły, występujące w ciągnących go łańcuchach, są siłami stycznemi do toru; nadają więc one ruch przyśpieszony wzdłuż toru; siły zaś odporowe szyn, występujące w płaszczyźnie poziomej, są siłami dośrodkowemi normalnemi do toru.

Równania zatem 70 i 71-sze są równaniami dynamicznemi w postaci algebraicznej i różnią się tylko od takichże równań, wyrażonych spółrzędnemi osiowemi, szczególnym wyborem osi rzutów. Równania zatem 70 i 71-sze stosować można do rozwiązywania wszelkich zadań z dynamiki punktu; a przedewszystkiem, do obliczenia sił, wywołujących dany ruch punktu po danym torze. Gdy bowiem dany jest tor i ruch punktu po nim, wtedy obliczymy metodą analityczną z równań toru promień krzywości w danym miejscu toru, lub wyznaczymy go wykreślnie, gdy dana jest postać toru (porów. § 42-gi tomu I-go); a z równań 70-ych obliczymy rzut P_n; z przyśpieszenia zaś punktu po torze, t. j. z wartości $\frac{dv}{dt}$ obliczymy siłę P_t; a z równania 71-ego wyznaczymy siłę, działającą w danej chwili na punkt ruchomy i wywołującą dany ruch. Możnaby również rozwiązać za pomocą tych równań zadanie odwrotne t. j. z danych sił obliczyć tor, lecz sposób ten jest dosyć zawiły pod względem rachunkowym.

Przykład. Punkt materyalny o ciężarze $Q = 10\ kg$, zakreśla w płaszczyźnie poziomej ruchem jednostajnym, o prędkości: $v = 3\ m$/sek., koło o promieniu $r = 1\ m$. Obliczyć siłę, wywołującą ten ruch.

Siła styczna w danym razie $P_t = m \frac{dv}{dt} = 0$, gdyż prędkość v, stosownie do warunków zadania, jest stałą. Siła zaś normalna $P_n = m \frac{v^2}{r} = \frac{10}{g} \cdot \frac{3^2}{1} \simeq 9\,kg$. Ponieważ tor jest kołem, przeto normalne we wszystkich punktach koła, przecinają się w jego środku; siła P_n jest przeto skierowaną ku środkowi koła i posiada wartość stałą. Ażeby więc punkt materyalny o ciężarze 10 kg zakreślił tor kołowy ruchem jednostajnym z prędkością 3 m/sek., należy do tego punktu przyłożyć siłę niezmienną pod względem algebraicznym $P = 9\ kg$, skierowaną ku środkowi koła. Siłę dośrodkową dostarcza w tym razie naprężenie nici, które jest równe 9 kg. Wynik ten pozwoli obliczyć wielkość przekroju nici; ażeby pod działaniem siły ciągnienia nie zerwała się, jeżeli np. obierzemy tę nić w postaci drutu żelaznego, którego wytrzymałość przyjmiemy: $\sigma = 1000\ kg/cm^2$, to przekrój f tego drutu obliczymy z równania: $f \cdot 1000 = 9\ kg$; skąd $f = \frac{9}{1000} \cdot 100 = 0{,}9\ mm^2$; a zatem średnica drutu $d = 1{,}08\ mm$.

Jeżeliby torem punktu były szyny, to siła dośrodkowa zostałaby udzielona danemu punktowi za pośrednictwem szyn; wtedy parcie szyn na punkt materyalny jest siłą, która nadaje mu ruch krzywolinijny.

4. Zasady szczególne dynamiki.

22. Cel tych zasad. Przytoczone na początku poprzedniego rozdziału dwa prawa zasadnicze: prawo bezwładności i prawo superpozycyi wystarczają zupełnie do określania właściwości ruchu punktu; a równanie dynamiczne, będące wyrazem tych praw, daje możność ujęcia tych właściwości w matematyczną formę. Dla ułatwienia jednakże określenia właściwości ruchu, jak również dla ułatwienia obliczeń, wyprowadzono z tych praw, inne prawa, zwane zasadami, które obejmują całe grupy zjawisk ruchu, i wyjaśniają ich przebieg. Zasady te wyrażają się pewnemi równaniami, wyprowadzonemi drogą przekształceń algebraicznych z przytoczonego równania dynamicznego; i wyrażającemi jedynie w sposób więcej poglądowy związki pomiędzy parametrami ruchu.

Zasady zatem, które tu wyłożymy nie wnoszą do naszych rozpatrywań żadnych nowych praw fizycznych, ani też nie dają równań algebraicznych, niezależnych od równania dynamicznego, a są tylko wyrazem w innej postaci tego równania.

Zasadami temi są:

zasada równowartości pracy sił i energii kinetycznej; oraz

zasada momentu ilości ruchu.

A. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej.

23. Rozwinięcie tej zasady. W tomie I-ym na str. 240-ej wyprowadziliśmy równanie 141-sze, wykazujące równowartość pracy siły, przyłożonej do punktu materyalnego, i przyrostu energii kinetycznej, jakiego ten punkt doznał podczas nieskończenie małego przesunięcia. Równanie to ma następującą postać:

$$P_t \,.\, ds = d\left(\tfrac{1}{2}\, m v^2\right);$$

P_t oznacza rzut siły na kierunek przesunięcia ds.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym punkt ruchomy, pod działaniem danych sił, zakreśli tor o skończonej długości. W tym celu dzielimy tor, jaki zakreśla punkt ruchomy, na cząstki ds, które uważać będziemy za cząstki prostolinijne; a pracę siły P_k wzdłuż k — tej cząstki toru wyrazimy, na zasadzie określeń, podanych w § 176-tym tomu I-ego, wzorem:

$$P_k \,.\, ds_k \,.\, \cos\,(P_k,\, ds_k);$$