z którego wynika, że siła $c\frac{dx}{dt}$ podczas ruchu punktu zmienia swój zwrot ze zmianą zwrotu prędkości. Jeżeli $c > 0$, to siła $c\frac{dx}{dt}$ wstrzymuje jego ruch; ruch przeto punktu będzie ciągle tą siłą przytłumiany; lecz punkt pomimo tego nie zatrzyma się, gdyż wtedy siła $c\frac{dx}{dt}$ byłaby $= 0$; a siła kx wywołałaby ruch; może więc tylko następować, asymptotyczne wygasanie prędkości i siły kx.

Jeżeli zaś $c < 0$, to zwrot siły $c\frac{dx}{dt}$ jest zgodny ze zwrotem prędkości, punkt przeto pod działaniem tej siły, jest ciągle przyśpieszony. Algebraiczna analiza równ. 38'-tego, podana w § 11-tym tego tomu, doprowadziła nas do wniosku, że o ile pierwiastki równania:

$$m\rho^1 + c\rho + k = 0; \; \rho = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - k},$$

są urojone, to ruch jest harmoniczny. Przypadek ten wcale nie zachodzi, jeżeli $k < 0$, t. j. jeżeli siła odpycha dany punkt od środka, jeżeli zaś $k > 0$, to może nastąpić ruch harmoniczny przy pewnym stosunku wartości c i k. Jeżeli ten przypadek zachodzi i przytem c jest dodatne, to ruch jest harmoniczny przytłumiony, porów. równ. 43-cie; jeżeli zaś wartość c jest odjemną, to łatwo odczytać z równ. 43-go, że ruch jest harmoniczny wymuszony. Jeżeli zaś pierwiastki równania powyższego są rzeczywiste, to ruch jest nieokresowy. Przypadek ten następuje zawsze, gdy $k < 0$; a dla pewnych tylko stosunków wartości c i k; gdy $k > 0$.

Z wniosków tych korzystać będziemy przy badaniu właściwości ruchu na podstawie równania dynamicznego.

---

6. Kinetyczny układ odniesienia i kinetyczna miara czasu.

64. Kinetyczny układ odniesienia. Jeżeli mówimy o zmianie miejsca punktu ruchomego w przestrzeni, to zawsze mamy na myśli pewien określony układ punktów, względem którego ta zmiana następuje; układ ten nazwiemy układem odniesienia ruchu danego punktu. Położenie punktu określamy zwykle odległościami jego od danego układu odniesienia; ruch zaś jego zmianami tych odległości w czasie, t. j., wyrażamy t. zw. równaniami ruchu.

Lecz sposób ten określania ruchu, chociaż jest zupełnie ścisły, w każdej bowiem chwili pozwala wyznaczyć położenie punktu ruchomego względem obranego układu odniesienia, pozostawia jednakże pod względem **fizycznym** pewną wątpliwość; z tych bowiem odległości czy też z równań ruchu nie dowiemy się, czy punkt dany jest w ruchu, czy też układ porusza się.

Pod względem też **geometrycznym** obojętnem jest np. czy ziemia obraca się około słońca, w myśl teoryi Kopernika, czy też słońce z całym układem gwiazd obraca się około ziemi, w myśl teoryi Ptolomeusza, wzajemne bowiem odległości tych brył i zmiany tych odległości pozostają w obydwóch przypadkach te same; nie znamy przeto możności rozstrzygnięcia tej wątpliwości drogą pomiarów.

Z tego też powodu, oddalając się np. statkiem od brzegu, wydaje się nam chwilami, że brzeg oddala się od statku. Przyczyną tego złudzenia jest właśnie ta okoliczność, że obserwując dane zjawisko, bierzemy pod uwagę odległości statku od brzegu, które się zmieniają, a które nie orzekają, co się w danym razie porusza. Jeżeli zaś statek i my wraz z nim doznajemy pewnych wstrząśnień; t. j. pewnych raptownych przyśpieszeń, wtedy powiemy, że to statek się porusza. Dla rozstrzygnięcia przeto tej wątpliwości, korzystamy w danym razie z pewnej **fizycznej** właściwości, poruszających się brył materyalnych i ta właściwość dopiero rozstrzyga, która z nich się porusza.

Właściwością tą jest w zjawiskach ruchu brył materyalnych bezwładność materyi; jeżeli ją uwzględnimy, to otrzymamy ściśle określony w przestrzeni układ, do którego będziemy zmuszeni odnosić wszelkie ruchy brył materyalnych; układ ten nazywają niektórzy autorzy **układem kinetycznym** [1]); inni zaś, dają mu miano układu bezwzględnego; miano, które zresztą nic nie wyraża; pojęcie bowiem „bezwzględności“ jest słowem pustem — bez treści, któremu możemy nadać dowolne znaczenie.

Prawo bezwładności, które jest stwierdzone doświadczeniami, głosi, że punkt, pozostawiony sam sobie, trwa w stanie ruchu jednostajnego lub w stanie „spoczynku“ i t. d.; gdybyśmy przeto mogli ustalić w przestrzeni położenie np. trzech punktów materyalnych, niepodlegających działaniu żadnych czynników zewnętrznych, otrzymalibyśmy układ odniesienia, posiadający tę właściwość, że każdy inny punkt materyalny pozostawać będzie, bez udziału czynników zewnętrznych, względem tych punktów w spoczynku lub w ruchu prostolinijnym jednostajnym. Zrozumiałem jest, że nie idzie w danym razie o układ odniesienia, złożony z trzech punktów; lecz mowa jest o jakimkolwiek układzie punktów, osi lub powierzchni, byle można było jednoznacznie określić względem nich położenie punktu w przestrzeni.

Oparłszy się przeto na prawie bezwładności, przyznać musimy możność wyznaczenia w przestrzeni pewnego układu odniesienia, względem którego punkt materyalny, posiadający w danej chwili pewną prędkość, zakreśli bez udziału czynników zewnętrznych ruchem jednostajnym tor prostolinijny; — lub pozostawać będzie w spoczynku, gdy nie posiadał prędkości początkowej względem tych punktów.

---

[1]) Dział mechaniki, w którym rozpatrujemy związki pomiędzy położeniami punktu i czasem, nazywamy kinematyką; dział zaś, w którym ustalamy związki pomiędzy masą punktu, jego położeniem i czasem nazywamy kinetyką. Greckie *κινημα* wyraża ruch jako stan poruszającej się bryły; a *κινησις* wyraża—wywoływanie ruchu. Kinematyka stosuje do swych rozpatrywań długość i czas, t. j. stosuje wielkości L i T; kinetyka zaś oprócz tych wielkości stosuje jeszcze masę, t. j. stosuje wielkości M, L i T. Prędkości przyśpieszenia są np. wielkościami kinematycznemi, lecz energia jest wielkością kinetyczną.

Wyznaczenie położenia tego układu w przestrzeni jest celem naszych rozpatrywań i może być on osiągnięty tylko drogą spostrzeżeń i doświadczeń. Szukając tego układu w przestrzeni nasuwa się przedewszystkiem pytanie, dlaczego np. nie ma być nim układ, sztywno związany z bryłą ziemską? Odpowiedź na to dają doświadczenia; pomiary bowiem np. ruchu punktu materyalnego, wyrzuconego z pewną prędkością lub upuszczonego bez prędkości z powierzchni ziemi, wykazują, że nie zakreśla on względem ziemi toru parabolicznego, jakiby powinien zakreślić zgodnie z rachunkiem, opartym na prawie bezwładności, odniesionem do układu związanego z bryłą ziemską; a zakreśli on parabolę, lecz w innym układzie odniesienia; w układzie, który w przybliżeniu uważać można za związany z tak zwanemi gwiazdami stałemi.

Jeżeli przeto przyjmiemy tytułem próby, że punkt ten zakreśla tor paraboliczny względem układu, związanego z gwiazdami stałemi, i jeżeli przyjmiemy, jak nam dyktuje teorya Kopernika, że ziemia jest w ruchu względem tego układu, to możemy obliczyć sposobami, wskazanymi w rozdziale o ruchu względnym, w jakiem np. miejscu upadnie ten punkt na jej powierzchnię; a w razie zgodności wyników tego rachunku z pomiarami przyjdziemy do wniosku, że nasze założenie, co do ruchu ziemi względem gwiazd stałych, jest słuszne i, że punkt materyalny, pozostawiony sam sobie z pewną prędkością początkową, zakreśliłby tor, który byłby prostolinijny względem układu sztywno związanego z tak zwanemi gwiazdami stałemi. Można przeto na razie przyjąć, że układ kinetyczny jest sztywno związany ze stałemi gwiazdami.

Należy mieć jednakże na uwadze, że wniosek ten oparty jest na pomiarach, które z natury swojej nie są ścisłe; położenie więc tego układu, jako niezmiennego układu względem gwiazd stałych, należy uważać za zbliżone tylko do układu kinetycznego, o który nam chodzi.

Układ przeto odniesienia, sztywno związany z gwiazdami, z dostateczną tylko dokładnością dla zjawisk ziemskich uważać można za układ kinetyczny; t. j. za układ, względem którego punkt materyalny, pozostawiony sam sobie, zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym, lub pozostawać będzie w spoczynku. Ruchy zaś ciał niebieskich, obliczone na podstawie prawa bezwładności, nie mogą być odniesione do tego układu; a muszą być odniesione do układu, jaki w rzeczywistości wyznacza bezwładność materyi.

Przy rozpatrywaniu przeto ruchu punktu, jako zjawiska **geometrycznego**, obojętnem jest, w jakim stanie ruchu znajduje się układ odniesienia, gdyż w danym razie idzie nam tylko o ruch punktu względem tego układu. Jeżeli zaś rozpatrujemy ruch punktu **materyalnego**, uwzględnić musimy jego bezwładność; a wtedy ruch tego punktu należy odnieść do jednego jedynego układu; t. j. do układu, w którym zachowane jest prawo bezwładności; w tym bowiem tylko razie wyniki obliczeń będą zgodne z rzeczywistym przebiegiem zjawiska.

W szczególnych jednakże dziedzinach zjawisk ruchu, gdy ruch odbywa się na niewielkim obszarze, możemy przyjąc z pewnem przybliżeniem, że układ kinetyczny jest sztywno związany z bryłą ziemską. W jakich przypadkach można to przyjąć, sądzić będziemy mogli z przykładów, które przytoczymy w tym jeszcze dziale, jak również w dziale dynamiki brył, traktującym o giroskopach; zaznaczamy w tem miejscu, że w technice, chociaż zjawiska ruchu odbywają się względnie na niewielkim obszarze, stosowanie jednakże układu kinetycznego staje się w wielu przypadkach niezbędnem.

W celu uzupełnienia podstaw, na których rozpatrujemy ruchy punktów lub brył materyalnych, damy jeszcze określenie miary czasu.

65. Kinetyczna miara czasu. Do „pojęcia“ czasu dochodzimy drogą porównania, zachodzących w naszych oczach zjawisk z podobnemi zjawiskami, poprzednio spostrzeganemi, a których wrażenia pozostały w naszej pamięci; inaczej mówiąc, pojęcie czasu powstaje w naszym umyśle, gdy spostrzegamy „następstwo“ zjawisk.

„Miarą“ czasu może być przeto każda dostrzegalna zmiana, zachodząca w świecie fizycznym; i żadna z tych zmian nie ma w tym względzie pierwszeństwa przed inną zmianą Dla badań ruchu brył **materyalnych** przyjmiemy jako miarę czasu zmianę ich położeń w przestrzeni; gdy, po nadaniu im pewnej prędkości, „pozostawimy je samym sobie“; t. j. za miarę czasu przyjmiemy długość drogi, jaką zakreśli np. punkt materyalny, pozostawiony sam sobie, i przyjmiemy, że równym odcinkom tej drogi odpowiadają równe odstępy czasu. Taką miarę czasu nazwiemy miarą kinetyczną czasu, lub krótko - **czasem kinetycznym**, podobnie do nazwy układu kinetycznego, i do tak pojmowanego czasu będziemy odnosili trwanie ruchów wszystkich brył materyalnych. Na podstawie takiego określenia miary czasu i układu odniesienia możemy mówić np. o nierównomierności obrotu ziemi około własnej osi; a nawet możemy mówić o ruchu t. zw. gwiazd stałych.

Z podanego określenia „układu odniesienia i miary czasu“ wynika, że nie są to określania tak zwane bezwzględne; lecz są to określenia względne, — oparte na właściwościach zjawisk ruchu **brył materyalnych**; są to przeto określenia zgodne ze stanowiskiem, jakie zajmujemy we wszystkich działach wiedzy naszej i ze stanowiskiem, jakie wyznaczają nam nasze zdolności poznawcze.

Z tych określeń wynika, że inne zjawiska fizyczne mogą wymagać innego układu odniesienia oraz innej miary czasu; a gdy ta potrzeba zajdzie, wtedy utworzymy inny układ odniesienia oraz inną miarę czasu w ten sposób, ażeby dana grupa zjawisk mogła być dokładnie odwzorowana w tym układzie i jej przebieg— wyrażony obraną miarą czasu.

Taką grupę zjawisk stanowią zjawiska elektromagnetyczne, które przynajmniej dotychczas niemożemy podciągnąć pod prawa Newtonowskie; dla tych przeto zjawisk wypadnie utworzyć inny układ odniesienia, — inną miarę czasu. Określenia przeto układu i miary czasu, tutaj podane, niewykluczają możności w razie potrzeby naukowej stawiania innych określeń tego rodzaju.

Może nam się wydać, że określenia układu kinetycznego i miary czasu tworzą z treścią prawa bezwładności błędne koło rozumowania; prawo to bowiem głosi, że punkt materyalny, pozostawiony „sam sobie“, zakreśla tor prostolinijny ruchem jednostajnym; gdy tymczasem określenie ruchu prostolinijnego, jak również określenie ruchu jednostajnego (które wymaga miary równych odstępów czasu), opieramy na bezwładności materyi; lecz tej sprzeczności niema, dla utworzenia bowiem miary czasu wystarcza ruch jednego tylko punktu materyalnego, do tego bowiem ruchu odnieść można ruchy wszystkich innych punktów materyalnych.

Prawo przeto bezwładności należy pojmować w następujący sposób: punkty materyalne, wyrzucone w przestrzeni, z której usunięto wszystkie czynniki zewnętrzne, zakreślają tory prostolinijne ruchem takim, że równym odcinkom, zakreślonym przez **jeden** punkt materyalny, odpowiadają jednocześnie równe między sobą odcinki torów, jakie zakreśla **każdy** inny punkt materyalny, wyrzucony w tejże przestrzeni. Doniosłość przeto prawa bezwładności polega właśnie na takiem uogólnieniu danego zjawiska fizycznego. Zwrócić należy naszą uwagę, że na takiem samem uogólnieniu opiera się określenie miary siły i miary masy; porów. str. 3-cią tego tomu.

Dla utworzenia miary czasu wystarcza ruch jednego punktu materyalnego, wyrzuconego w przestrzeń; dla wyznaczenia zaś układu odniesienia, względem którego każdy inny punkt materyalny zakreśli tor prosrolinijny, należy wyrzucić w przestrzeń dwa takie punkty, jeżeli kierunki ich się mijają; lub — trzy, gdy kierunki ich się przecinają; te trzy kierunki mogą być uważane za zwykłe osi spółrzędnych ukośnokątnych lub prostokątnych.

Trudności jednakże fizycznej natury, jakie spotykamy przy urzeczywistnieniu warunków, w jakich znajdować się mają punkty materyalne, wyznaczające układ odniesienia i czas, są nieprzezwyciężone; nie możemy bowiem usunąć ze świata fizycznego czynników, oddziaływających ne ruch punktów materyalnych; możemy jednakże postawić te czynniki w takiem wzajemnem uwarunkowaniu, że działania ich będą się znosić; lub też uwzględnimy te działania, wprowadziwszy je do obliczeń ruchu punktu; a wtedy, wyraziwszy ruch równaniem np. postaci $s = f(t)$, będziemy mogli obliczyć położenia punktu, w jakich on się znajduje w równych odstępach czasu, t. j. w takich odstępach, w jakich każdy inny punkt materyalny zakreśliłby równe między sobą odcinki drogi, gdyby był pozostawiony „sam sobie".

Szczególnem zastosowaniem tej metody mierzenia czasu jest np.: mierzenie za pomocą wahadła pospolitego. Podstawą bowiem obliczenia tego ruchu jest prawo bezwładności, które uwzględniamy, wprowadzając do rachunku siłę odporową. Wynikiem tego rachunku jest np., że okresy wahnięć są wzajemnie równe; miarą przeto równych odstępów czasu będzie czas, jaki upływa np. pomiędzy dwoma krańcowemi położeniami wahadła; tym samym bowiem odstępom czasu odpowiadałyby równe między sobą odcinki drogi, jakieby zakreślił każdy inny punkt materyalny; gdyby był „pozostawiony sam sobie".

Porównania prędkości obrotu kuli ziemskiej, zdobyte drogą ścisłych pomiarów, z czasem kinetycznym, wykazują, że prędkości te bardzo mało różnią się między sobą, t. j., że równym odstępom czasu kinetycznego odpowiadają chociaż niezupełnie równe lecz prawie równe kąty obrotu ziemi; i że różnice te są tak niewielkie, że w naszych ziemskich doświadczeniach mogą być nie uwzględnione; w astronomicznych jednakże obserwacyach nie mogą być pominięte. Praktyczną przeto jednostką czasu może pozostać dla naszych rozpatrywań sekunda; jako pewna część obrotu kuli ziemskiej.

7. Ruch złożony punktu materyalnego.

A. Układ odniesienia złożonego ruchu punktu materyalnego.

66. Kinematyka ruchu złożonego. W rozdziałach poprzednich rozpatrywaliśmy ruch punktu po krzywych lub powierzchniach, pozostających w spoczynku. W otaczających nas jednakże zjawiskach fizycznych jak i w technice spotykamy się z ruchem punktów materyalnych (w ogóle brył) po krzywych, które są w ruchu. W tych rozpatrywaniach stosować będziemy wielkości, określone w § 75-tym tomu I-ego, oraz — równania 60-te i 71-sze, dające związki pomiędzy temi wielkościami[1]); równania te są nast.:

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u; \text{ oraz} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (148)$$

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u + 2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w\overline{\varphi}; \quad \ldots \ldots \quad (149)$$

które przekształca się w przypadku postępowego ruchu toru ($\varphi = 0$) na:

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (150)$$

Nasuwa się pytanie czy wzory te odnoszą się do układu, pozostającego w spoczynku czy też w ruchu. Z rozpatrywań § 75-go tomu I-go wynika, że wzory te pozostają w swej mocy w obydwóch przypadkach; na zasadzie bowiem prawa superpozycyi możemy wielkości kinematyczne dodawać; aby tylko dany punkt i dany tor, po którym on się porusza, wykonywał ruch razem z tym układem. Jeżeli przeto idzie tylko o geometryczne pojęcie ruchu, to jest obojętnem, czy dany układ odniesienia jest w spoczynku czy też w ruchu, abyśmy tylko stan jego ruchu ściśle określili; jeżeli zaś weźmiemy pod uwagę bezwładność materyi, to położenie tego układu jest już ściśle w przestrzeni określone. Układem tym jest układ kinetyczny, w rozdziale poprzednim określony i względem niego obliczać będziemy wszelkie ruchy punktów materyalnych; jak i ruchy torów poruszających się.

Powstanie wypadkowego przyśpieszenia punktu, jakiego on doznaje w ruchu złożonym, przedstawimy sobie bezpośrednio, gdy zważymy, że przyrost

[1]) W § 76-tym tomu I-go podaliśmy obliczenie prędkości wypadkowej dla przypadku, gdy tor był w ruchu postępowym; do obliczenia zaś tej prędkości dla przypadku, gdy tor jest w ruchu dowolnym daliśmy tylko wskazówki. Ażeby jednakże nie pozostawiać luki w wykładzie, omówimy szczegółowiej sposób tego obliczenia. Jeżeli tor ruchomy x przechodzi z pewnego położenia x_1 do innego dowolnego położenia x_2, to można go zawsze przeprowadzić z jednego położenia do drugiego ruchem obrotowym oraz postępowym. Można przeto sobie wyobrazić na zasadzie prawa superpozycyi, że ruch wypadkowy tego punktu składa się z tych kolejnych ruchów: z ruchu wzdłuż toru i z ruchu unoszącego razem z torem; ruch unoszący można przyjąć, że składa się z ruchu po kole podczas obrotu toru i z ruchu postępowego wraz z torem. Ponieważ przesunięcie po kole jest wielkością nieskończenie małą rzędu drugiego w porównaniu z wielkościami pozostałych przesunięć; jest ono bowiem równe iloczynowi z nieskończenie małego przesunięcia wzdłuż toru, jako promienia koła, oraz z nieskończenie małego kąta obrotu, możemy przeto wyraz tego ruchu, przy przejściu do granic, opuścić, a otrzymamy wzór, wyrażający sumę przesunięć, t. j. sumę prędkości względnej i unoszącej.

prędkości punktu, będącego w ruchu złożonym, można uważać na zasadzie prawa superpozycyi za złożony:

a) z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas ruchu punktu po torze nieruchomym, t. j. z wielkości $d\overline{v}_w$;

b) z przyrostu prędkości, jaki powstaje wskutek ruchu punktu razem z torem; gdy wyobrazimy sobie punkt umocowanym do toru; przyrost ten oznaczyliśmy wyrazem $d\overline{v}_u$; i

z przyrostu prędkości, jaki powstaje podczas obrotu toru, gdy wyobrazimy sobie, że wektor prędkości danego punktu obraca się razem z torem, jak gdyby był do niego przymocowany. Przyrost ten składa się z dwóch przyrostów:

c) z przyrostu wektora prędkości $\overline{v}_w$, jaki powstaje wskutek obrotu jednej cząstki toru, wzdłuż której punkt się posuwa; przyrost ten wyrazimy wzorem; porów. rys. 118-ty tomu I-ego:

$$\mathrm{V}\,\overline{v}_w \,.\, \overline{\varphi} \,.\, dt;$$

gdzie $\overline{\varphi}\,.\,dt$ wyraża nieskończenie mały obrót toru; oraz

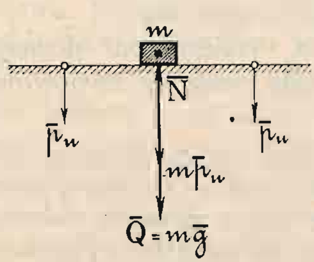
d) z przyrostu, jakiego doznaje wektor prędkości wskutek obrotu następnej cząstki toru, po której punkt przebiega z prędkością $(\overline{v} + d\overline{v})$; przyrost ten wyrazimy wzorem:

$$\mathrm{V}\,(\overline{v}_w + \triangle\,\overline{v}_w) \,.\, (\overline{\varphi} + \triangle\,\overline{\varphi}) \,.\, dt;$$

a suma tych czterech przyrostów, rozdzielona przez dt, da wyraz wypadkowego przyśpieszenia punktu.

B. Ruch punktu po torze, będącym w ruchu postępowym.

67. Przykład. Na podstawie poziomej spoczywa bryła materyalna o ciężarze mg; (którą wyobrażamy sobie w postaci punktu). Ciężar tej bryły wywołuje w podstawie siłę odporową N. Przyjmijmy, że podstawa ta posuwa się pionowo ku dołowi z przyśpieszeniem stałem $\overline{p}_u$. Obliczyć ruch tej bryły względem podstawy i siłę odporową N.



Rys. 46

Na punkt dany działa w tych warunkach siła $(\overline{Q} + \overline{N})$; a punkt posiada przyśpieszeniu $\overline{p}_w$ i $\overline{p}_u$. Wobec małego obszaru przestrzeni, w jakim zachodzi dane zjawisko ruchu, przyjmiemy, że układ kinetyczny jest sztywno związany z ziemią. Pionowy przeto kierunek przyjąć można za oś nieruchomą, względem której odbywa się ruch bryły i podstawy. W odniesieniu przeto do tego układu równanie dynamiczne jest nast.:

$$(\overline{Q} + \overline{N}) = m\,(\overline{p}_w + \overline{p}_u).$$

Zastąpimy to równanie wektorowe równaniem algebraicznem, gdy zrzutujemy wielobok wektorów, przedstawiony przez nie, na prostopadłą do podstawy; równanie to jest nast.:

$$1)\quad Q - N = mp_u;$$

przyspieszenie bowiem $\overline{p}_w$, zgodnie z warunkami zadania, może posiadać tylko kierunek wzdłuż podstawy, rzut przeto jego na oś prostopadłą do niej $= 0$. Ażeby zaś je obliczyć, zrzutujmy równanie powyższe na kierunek podstawy, a otrzymamy równanie:

$$2) \quad 0 = p_w.$$

Punkt przeto w tych warunkach pozostaje na podstawie w spoczynku; co wysłowimy, że jest on w równowadze względnej.

Jeżeli daną jest siła Q oraz przyśpieszenie podstawy p_u, to obliczymy z równ. 1-ego:

$$N = Q - mp_u; \text{ lub inaczej } N = m(g - p_u).$$

Siła zatem odporowa podstawy, na której spoczywa punkt, jest wielkością zależną od przyśpieszenia tejże podstawy.

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$, wtedy

$$N = mg;$$

t. j. gdy podstawa jest w spoczynku, wtedy siła odporowa równa się ciężarowi punktu; co jest zrozumiałe bezpośrednio; zachodzi bowiem w danym przypadku zwykły stan równowagi;

2) gdy $p_u = g$; wtedy siłą odporowa:

$$N = 0;$$

i rzeczywiście, podstawa i punkt materyalny posiadają w tym razie ruch o jednakowem przyśpieszeniu; biegną więc do sobie równolegle, nie wywierając na siebie ani ciągnienia ani ciśnienia;

3) gdy $p_u > g$; otrzymamy siłę odporową:

$$N < 0;$$

t. j. siłę, posiadającą w tym razie znak przeciwny, przyjętemu za dodatny. Należy zatem punkt dany przymocować do podstawy, jeżeli ma on na niej pozostawać;

4) gdy $p_u < 0$, t. j. gdy przyśpieszenie podstawy zwrócone jest ku górze, wtedy siła odporowa jest zawsze skierowaną ku górze i posiada większe wartości, niż w przypadku, w którym przyśpieszenie p_u było zwrócone zgodnie ze zwrotem przyśpieszenia g. Zjawiska tego ruchu spostrzegać można, będąc np. w windzie w chwili, gdy winda rozpoczyna swój ruch lub też w chwili, gdy zatrzymuje się; w tych bowiem chwilach ruch jest przyśpieszony lub zwolniony. Podczas np. zatrzymywania się windy przyśpieszenie jej zwrócone jest ku górze; t. j. $p_u = -p'_u$, a więc:

$$N = m(g + p'_u);$$

spostrzeżemy też w danym razie silne ugięcie sprężyn krzesła, na którym siedzimy w windzie; co jest wynikiem powiększenia się siły odporowej sprężyn. Podczas jednostajnego ruchu windy nieodczuwamy żadnych zmian w siłach odporowych, w tym bowiem ruchu $p_u = 0$.

Zwrócić jednakże należy uwagę, że w przykładzie tym punkt ruchomy znajduje się w równowadze względnej; gdyż niewykonywa on ruchu względem toru, na którym spoczywa; nie jest on jednakże w równowadze bezwzględnej, posiada bowiem pewne przyśpieszenie p_b.

Rozpatrzmy następnie ruch punktu ciężkiego, gdy tor prosty jest nachylony pod kątem α względem poziomu i jest w ruchu postępowym o przyśpieszeniu stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Punkt dany znajduje się w danym razie, pod działaniem siły ciążenia $\overline{Q}$ i siły odporowej $\overline{N}$ normalnej do toru poruszającego się; równanie przeto dynamiczne jest następ.:

$$\overline{Q} + \overline{N} = m\overline{p_w} + m\overline{p_u} \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

W celu obliczenia przyśpieszenia p_w, zrzutujemy to równanie na kierunek toru; ażeby zaś obliczyć przyśpieszenie p_u zrzutujemy je na normalną do niego; rzutowania te dają dwa równania algebraiczne:

1) $Q \sin\alpha = mp_w + mp_u \sin\alpha$; oraz

2) $Q \cos\alpha - N = mp_u \cos\alpha$.

Gdy wielkość Q, p_u oraz α są dane, wtedy obliczymy dwie niewiadome p_w i N.

Z pierwszego przeto równania:

$$p_w = (g - p_u) \sin\alpha;$$

z drugiego zaś:

$$N = m(g - p_u) \cos\alpha.$$

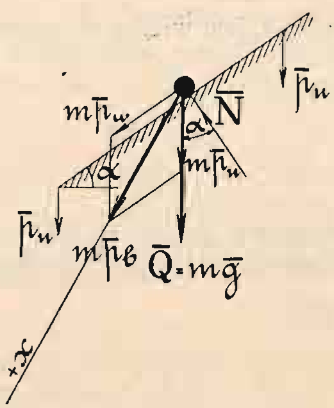


Fig. 47.

Szczególne przypadki:

1) gdy $p_u = 0$; wtedy:

$$p_w = g \sin\alpha, \text{ a } N = Q \cos\alpha.$$

Jest to zwykły przypadek ruchu punktu ciężkiego po prostej pochyłej, pozostającej w spoczynku; porów. § 46-ty;

2) gdy $p_u = g$; wtedy $N = 0$; oraz $p_w = 0$ niezależnie od kąta α; punkt przeto wykonywa w tym razie ruch, jak gdyby był swobodny;

3) gdy $p_u > g$; t j., gdy przyśpieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi i jest większe od g; wtedy:

$$N = -m(p_u - g) \cos\alpha;$$

t. j. siła normalna do toru jest odjemna; punkt zatem ruchomy ma dążność oderwania się od toru. Przyśpieszenie względne w danym razie:

$$p_w = -(p_u - g) \sin\alpha;$$

t. j. punkt ruchomy porusza się po torze ku górze;

4) gdy $p_u < 0$ t. j., gdy przyspieszenie unoszące zwrócone jest ku górze; wtedy po podstawieniu $p_u = -p_u'$ otrzymamy:

$$N = m(g + p'_u) \cos \alpha; \text{ oraz}$$
$$p_w = (p_u' + g) \sin \alpha.$$

Siła normalna jest w tym przypadku zawsze dodatną, jak również przyśpieszenie wzdłuż toru; ruch zatem względny zawsze jest zwrócony ku dołowi.

Siłę względną t. j. siłę, która jest wstanie wywołać taki sam ruch punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki on posiada podczas ruchu toru, obliczymy ze wzoru:

$$P_w = mp_w = m(g - p_u) \cos \alpha.$$

Siła ta może być dodatną lub odjemną; zależnie od tego czy $g \gtrless p_u$.

W celu obliczenia toru bezwzględnego punktu ruchomego, t. j. toru, jaki dany punkt zakreśla w przestrzeni nieruchomej (do której odnosimy siły Q i N); napiszemy bezpośrednio na zasadzie prawa superpozycyi:

$$\overline{p_b} = \overline{p_w} + \overline{p_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (152)$$

Ponieważ tor w danym przykładzie jest w ruchu postępowym ze stałem przyśpieszeniem i jest on prostolinijny; przyśpieszenie przeto względne ma stały kierunek w przestrzeni, równoległy do toru; jeżeli następnie przyjmiemy, że przyśpieszenie ruchu unoszącego jest także niezmienne; to przyśpieszenie bezwzględne posiada stały kierunek i stałą wartość, którą obliczymy z powyższego równania. Ruch zatem bezwzględny punktu ruchomego, przy omówionych warunkach, będzie się odbywał w ten sposób, jak gdyby na niego działała jedna tylko siła stała $m\overline{p_b}$. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy w § 17-ym i dowiedliśmy tam, że tor jego jest prostolinijny, gdy punkt nie posiada prędkości początkowej lub gdy ją posiada w kierunku przyśpieszenia. Gdy więc punkt dany posiada w początku ruchu bezwzględną prędkość równą zeru, torem jego jest prosta linia, której kierunek wyznaczymy z powyższego równania; jeżeli zaś będzie temu punktowi nadana w początku jego ruchu pewna prędkość bezwzględna $\overline{v_{b,0}}$, która może być wynikiem dwóch prędkości $(\overline{v_{w,0}} + \overline{v_{u,0}})$; to torem jego jest parabola; a kierunki wektorów $\overline{p_b}$ i $\overline{v_{b,0}}$ są kierunkami jej osi sprzężonych; porów. § 17-ty.

Jeżeli tor ruchomy posiada przyśpieszenie stałe, lecz dowolnie skierowane w przestrzeni, to sposób wyznaczenia ruchu punktu jest jednakowy z poprzednim. Niech np. na rys. 48-ym m oznacza położenie początkowe punktu na torze unoszącym; p_u przyśpieszenie toru, to czworobok A, B, C, D jest geometrycznym wyrazem równania 151-ego; i jest on zestawiony ze znanych boków $\overline{Q}$ i $m\overline{p_u}$ oraz ze znanych kierunków $m\overline{p_w}$ i $\overline{N}$.

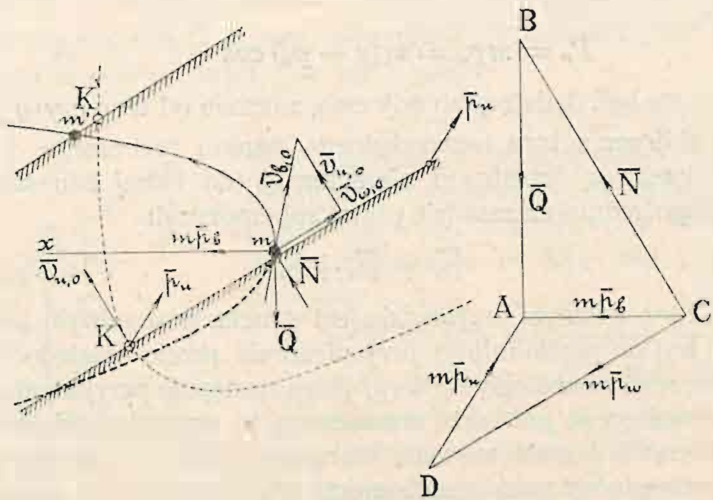
Jeżeli punkt nie posiadał początkowej prędkości względnej, i tor nieposiadał prędkości bezwzględnej, to kierunek odcinka:

$$\overline{CA} = m\overline{p_w} + m\overline{p_u},$$

wyznacza kierunek bezwzględnego toru, jaki punkt ruchomy zakreśla, a prosta $mx \parallel CA$ jest tym torem. Gdy zaś punkt otrzymał prędkość początkową $\overline{v_{w,0}}$, i tor— prędkość $\overline{v_{u,0}}$, wtedy torem bezwzględnym jest parabola.

Na rys. 48-ym parabola (mm') jest torem bezwzględnym danego punktu; parabola zaś (KK') jest torem, jaki zakreśla pewien punkt K toru ruchomego.

Zadanie. Jaki będzie ruch punktu, znajdującego się w powyższych warunkach, gdy nieuwzględnimy ciężaru bryły tylko jej masę. Przypadek ten zachodzi, gdy np. tor porusza się w płaszczyźnie poziomej, a ciężar punktu jest zrównoważony siłą odporową tej płaszczyzny.



Rys. 48.

68. Przykład. Przyjmijmy, że tor unoszący nie jest prosty lecz kołowy i porusza się w płaszczyźnie pionowej ruchem postępowym z przyśpieszeniem $\bar{p}_u$ stałem, zwróconem np. pionowo ku dołowi. Obliczyć ruch bezwzględny tego punktu, t. j. ruch jego po kole.

Fizycznie możemy przedstawić sobie ten przykład w postaci wahadła płaskiego z nicią sztywną, którego płaszczyzna wraz z punktem zawieszenia opuszcza się pionowo ze stałem przyśpieszeniem p_u.

Równanie dynamiczne tego ruchu jest nast.:

$$\bar{Q} + \bar{N} = m\bar{p}_w + m\bar{p}_u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

Ażeby wyrugować z rachunku nieznaną siłę N, zrzutujmy to równanie na styczną do toru, przeprowadzoną w dowolnem położeniu punktu, określonem kątem σ, jaki tworzy z pionem promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła do danego położenia punktu; a otrzymamy równanie:

$$Q \sin\sigma = mp_{w,t} + mp_u \,.\, \sin\sigma;$$

w którem $p_{w,t}$ oznacza rzut przyśpieszenia względnego na styczną do toru; po podstawieniu w to równanie:

$$Q = mg, \text{ oraz } p_{w,t} = -l\frac{d^2\sigma}{dt^2};$$

otrzymamy równanie ruchu w postaci:

$$-l\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (g - p_u)\sin\sigma.$$

Równanie to jest jednakowe z równaniem 103-ciem, wyrażającem ruch punktu po nieruchomym torze kołowym, gdy zamiast g podstawimy w nie $(g - p_u)$. Całka zatem powyższego równania jest ta sama, jakąśmy znaleźli przy obliczeniu wahadła w § 47-ym; należy tylko zastąpić w tamtych wzorach g wyrazem $(g - p_u)$.

Na zasadzie tego porównania, okres np. podwójnego wahnięcia wahadła z małem odchyleniem początkowem σ_0, opuszczającego się pionowo z przyśpieszeniem p_u; obliczymy ze wzoru 109-ego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - p_u}}.$$

Analiza tego równania da nam dosyć orginalny obraz ruchu tego wahadła. Jeżeli np. $p_u = 0$; to otrzymamy, że okres ten jest równy okresowi wahadła zwykłego i wzór powyższy przyjmie postać wzoru 109-ego.

Jeżeli p_u jest dodatne t. j. jeżeli przyspieszenie unoszące zwrócone jest ku dołowi, ten bowiem zwrot przyjęliśmy za dodatny, to wahadło dane będzie miało dłuższe okresy wahnięć niż wahadło, pozostające w spoczynku; i zegar np. wahadłowy, opuszczany z takiem przyśpieszeniem, będzie się w tych warunkach opóźniał. W chwili zaś zwalniania ruchu unoszącego, przyśpieszenie unoszące jest odjemne, a okresy wahnięć zegara będą krótsze, zegar będzie się śpieszył.

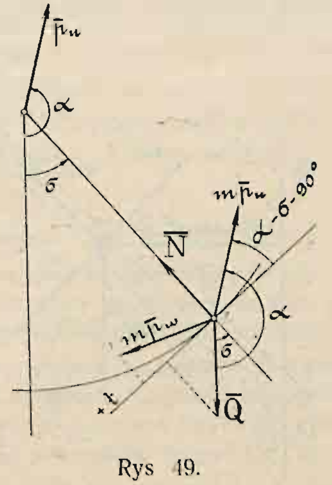
Jeżeli $p_u > g$, to czas wahnięcia jest urojony; przyjmijmy jednakże dla l znak odjemny, a otrzymamy wartości okresów wahnięć rzeczywiste. Przypadek ten zachodzi, gdy wahadło ma symetryczne położenie względem poprzedniego; i przypadek ten przedstawia wahadło, którego punkt zawieszenia jest niżej punktu ruchomego. Jeżeli przedstawimy sobie ruch tego punktu po kole; to w tym przypadku punkt ruchomy wahać się będzie około wierzchołka koła.

Uogólnijmy to zadanie w ten sposób, że nadajmy wahadłu w jego płaszczyźnie ruch postępowy z przyśpieszeniem stałem, którego kierunek tworzy z pionem kąt α. Równanie dynamiczne tego ruchu posiada postać równania 153-ego; rzut zaś jego na styczną do toru będzie miał nieco zmienioną postać; a mianowicie, porów. rys. 49-ty:

$$Q\sin\sigma = mp_{w,t} - mp_u\sin(\alpha - \sigma).$$

W celu porównania tego wzoru z poprzednim, przyjmijmy, że przyśpieszenie unoszące jest zgodne z kierunkiem siły Q; a otrzymamy z niego równ., wyżej napisane.

Ażeby wytworzyć sobie dokładny obraz ruchu tego wahadła, znajdźmy położenie jego



Rys 49.

równowagi względnej, które określimy kątem σ', jaki tworzy z kierunkiem pionowym promień, przeprowadzony do tego położenia. W tym celu podstawimy w równanie powyższe $p_{w,t} = 0$, a otrzymamy po skróceniu przez m:

$$g \sin \sigma' = -p_u \cdot \sin (\alpha - \sigma') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

z którego obliczymy kąt σ'; lub znajdziemy go wykreślając z trójkąta, zestawionego ze znanych wektorów $\overline{g}$ i $\overline{p}_u$.

C. Ruch punktu materyalnego po torze, będącym w ruchu obrotowym.

69. Równanie dynamiczne tego ruchu. W § 93-cim tomu I-go wykazaliśmy, że przyśpieszenie wypadkowe $\overline{p}_b$ punktu, poruszającego się po torze, będącym w ruchu obrotowym, równa się sumie z przyśpieszenia względnego $\overline{p}_w$, z przyśpieszenia $\overline{p}_u$ unoszącego, i z przyśpieszenia złożonego, określonego wzorem wektorowym $2\, \mathrm{V} \overline{v}_w \cdot \overline{\varphi}$; a wynikającego ze zmiany położeń wektorów prędkości punktu, zachodzącej podczas obrotu toru; a zatem mamy równanie kinematyczne:

$$\overline{p}_b = \overline{p}_w + \overline{p}_u + 2\, \mathrm{V} \overline{v}_w \cdot \overline{\varphi};$$

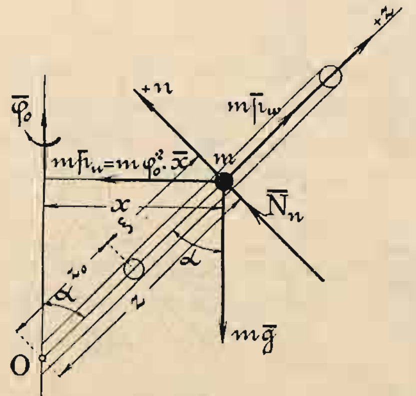
z którego otrzymamy dynamiczne, gdy przemnożymy je przez m, i zamiast iloczynu $m\overline{p}_b$ podstawimy siły zewnętrzne, działającą na dany punkt; a zatem mamy:

$$\overline{P} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u + 2\, m\, \mathrm{V} \overline{v}_w \cdot \overline{\varphi}.$$

Jeżeli chcemy obliczyć ruch względny lub siłę względną, t. j. siłę która by wywoływała taki sam ruch danego punktu po torze, pozostającym w spoczynku, jaki ten punkt posiadał podczas ruchu toru, to napiszemy z tego równania:

$$m\overline{p}_w = \overline{P} - (m\overline{p}_u + 2\, m\, \mathrm{V} \overline{v}_w \overline{\varphi}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

70. Przykład. Torem unoszącym jest rurka prosta wewnątrz doskonale gładka, nachylona względem osi pionowej pod kątem α; rurka ta obraca się około tej osi z prędkością stałą $\overline{\varphi}_0$, rys. 50-ty; w rurce umieszczony jest punkt materyalny ciężki; mogący poruszać się w niej bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu, jego tor bezwzględny oraz siłę odporową; gdy oś rurki przecina oś obrotu.



Rys. 50.

Na dany punkt działają przeto siły:

$$m\overline{g} \text{ oraz } \overline{N};$$

i wywołują przyśpieszenie, złożone z trzech wyżej określonych poszczególnych przyśpieszeń; równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest nast.:

$$m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u + 2m\, \mathrm{V} \overline{v}_w \cdot \overline{\varphi}_0 \quad (156)$$

Przyśpieszenie unoszące $\overline{p_u}$ jest w danym razie wynikiem ruchu punktu po kole poziomem o promieniu x, na którem w danej chwili znajduje się punkt ruchomy, jest zwrócone ku osi i równa się:

$$\overline{p_u} = \varphi^2 . \overline{x} .$$

Przyśpieszenie zaś $2 \mathbf{V} \overline{v_w} . \overline{\varphi_0}$, w myśl danego określenia, jest prostopadłe do kierunku prędkości względnej i do kierunku osi obrotu, czyli jest prostopadłe do płaszczyzny, przechodzącej przez chwilowe położenie rurki i jest zwrócone zgodnie ze zwrotem obrotu; ponieważ rys. 50-ty przedstawia tę płaszczyznę, a więc przyśpieszenie to jest prostopadłe do tej płaszczyzny i jest zwrócone ku czytelnikowi [1]); a wartość jego równa się:

$$2\, v_w \varphi_0 \sin \alpha .$$

Z tego wynika, że wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, nie leży w jednej płaszczyźnie; bo chociaż wektory

$$m\overline{g} \text{ i } m\overline{p_u} \text{ oraz } m\overline{p_u}$$

leżą w płaszczyźnie biegunowej, lecz wektor przyśpieszenia złożonego, a więc i wektor siły odporowej, wielobok bowiem musi być zamknięty, wychodzą z tej płaszczyzny.

Równanie powyższe, jako równanie wektorowe, może być zastąpione w ogóle przez trzy równania algebraiczne, w których mogą być trzy algebraiczne niewiadome. Jedną niewiadomą jest przyśpieszenie p_w, które, ze względu na to, że znamy jego kierunek, przedstawia jedną niewiadomę algebraiczną. Nieznana zaś prędkość v_w pozostaje w związku kinematycznym z przyśpieszeniem $\overline{p_w}$, nie przedstawia zatem nowej niewiadomej; natomiast jest jeszcze nieznany wektor siły $\overline{N}$, który przedstawia w danym razie dwie tylko niewiadome algebraiczne; położenie bowiem płaszczyzny, w której on się znajduje, jest nam znane z warunku gładkości toru; a dla wyznaczenia jego położenia w danej płaszczyźnie, wystarcza znajomość dwóch algebraicznych wielkości, wyrażających np. rzuty tej siły na dwie obrane osi. Siły zewnętrzne oraz wielkości, wyznaczające ruch toru, przyjęliśmy za znane; mamy zatem w powyższem równaniu wektorowem trzy niewiadome algebraiczne, które obliczymy z rzutów tego równania na trzy osi spółrzędnych. Osi te obierzmy w ten sposób, ażeby w każde z otrzymanych równań algebraicznych wchodziła możliwie jedna tylko niewiadoma. Ażeby obliczyć np.

---

[1]) Powstanie i zwrót przyśpieszenia tego można bezpośrednio unaocznić wyobraziwszy sobie, że wektor $\overline{v_w}$ jest sztywno związany z torem ruchomym, a zwrot przesunięcia końca tego wektora, jakiego on dozna podczas obrotu wraz z torem, jest zwrotem przyśpieszenia złożonego; przesunięcie to bowiem jest w geometrycznej zależności od przyrostów prędkości, wynikających z obrotu toru. W przykładzie przeto powyższym, rys. 50, koniec wektora $\overline{v_w}$, sztywno związanego z torem ruchomym, zakreśli, podczas cząstkowego obrotu rurki, odcinek ze zwrotem prostopadłym do płaszczyzny biegunowej; dla wywołania przeto tego przyrostu powinna być pewna siła; siłą tą jest, w danym przypadku składową, w kierunku prostopadłym do płaszczyzny biegunowej, siły odporowej rurki.

przyśpieszenie względne, zrzutujmy powyższe równanie na kierunek toru; przyśpieszenie bowiem $\overline{p}_w$ zrzutuje się w rzeczywistej wielkości, a wektor siły normalnej jak również wektor przyśpieszenia złożonego, zrzutuje się jako zero; mamy przeto równanie algebraiczne, porów. rys. 50-ty:

$$-mg\cos\alpha = mp_w - m\varphi^2_0 \,.\, x \,.\, \sin\alpha;$$

z którego:

$$p_w = \varphi^2_0 \,.\, x \,.\, \sin\alpha - g \,.\, \cos\alpha.$$

Oznaczmy literą z odległość punktu ruchomego od miejsca przecięcia się osi rurki z osią obrotu; a równanie powyższe, po podstawieniu w nie:

$$x = z \,.\, \sin\alpha,$$

przedstawi się w postaci:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = m \,.\, \varphi^2_0 \,.\, z\sin^2\alpha - m \,.\, g \,.\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

Równanie to można przedstawić sobie fizycznie, w ten sposób, że ruch punktu po danym torze odbywa się tak, jakgdyby tor pozostawał w spoczynku, a punkt był pod działaniem jednej siły stałej:

$$mg\cos\alpha,$$

ze zwrotem odjemnym; i drugiej siły z kierunkiem dodatnym:

$$m \,.\, \varphi^2_0 \,.\, z \,.\, \sin^2\alpha,$$

proporcyonalnej do odległości punktu od obranego początku. Z powyższego równania wynika, że przyśpieszenie względne może być dodatne lub odjemne, zależnie od wielkości siły zmiennej, t. j. zależnie od położenia punktu na torze.

Szczególnem miejscem na torze jest miejsce, w którem punkt ruchomy posiada przyśpieszenie $\overline{p}_w = 0$. Oznaczmy odległość tego miejsca od początku układu przez z_0, a obliczymy ją z równania poprzedniego, po podstawieniu: $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$;

a zatem:

$$0 = \varphi^2_0 \,.\, z_0 \,.\, \sin^2\alpha - g \,.\cos\alpha;$$

skąd:

$$z_0 = \frac{g}{\varphi^2_0} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Jeśli np. punkt ruchomy umieścimy w miejscu z_0 i nie nadamy mu prędkości względnej, lecz nadamy mu prędkość unoszącą, to pozostawać on będzie podczas obrotu toru w spoczynku. Obierzmy to miejsce za początek drogi, i określmy każde inne położenie tego punktu przez odległość ξ od tego początku; to równanie ruchu uprości się o tyle, że niebędzie w niem wyrazu stałego; po podstawieniu bowiem $\xi = 0$, przybrać ono powinno postać:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0;$$

co też otrzymamy, gdy podstawimy: $z = z_0 + \xi$, oraz wartości z_0 z równ. 158-ego. Równanie te jest następujące:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varphi^2_0 \,.\, \sin^2\alpha \,.\, \xi \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (159)$$

Równanie to można uważać za równanie ruchu punktu, odpychanego od środka, siłą proporcyonalną do odległości; położenie zaś środka odpychania wyznacza wielkość z_0. Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 10-ym; napiszemy przeto szukane rownanie ruchu względnego, utożsamiając równanie 159-te z równaniem 31-em; i podstawiwszy np. w równ. 35-te:

$$\frac{k}{m} = \varphi^2_0 \sin^2\alpha;$$

otrzymamy równanie ruchu względnego, dla takich samych warunków początkowych, dla jakich zestawione jest to równanie t. j. dla:

$$\xi = 0; \quad v_w = v_{w,0}, \quad t = 0;$$

równanie to jest nast.:

$$\xi = \tfrac{1}{2} v_{w,0} \,.\, \frac{1}{\varphi_0 \,.\, \sin\alpha} \left(e^{t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha} - e^{-t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha}\right) \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (160)$$

Z równania tego obliczymy prędkość względną v_w, różniczkując je względem t; a zatem:

$$v_w = \tfrac{1}{2} v_{w,0} \left(e^{t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha} + e^{-t \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha}\right) \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (161)$$

Z równania tego wynika, że zwrot ruchu punktu po torze jest zgodny ze zwrotem prędkości, jaką on posiada w miejscu równowagi względnej; i że wartość prędkości bardzo szybko rośnie z biegiem czasu; zmienna bowiem t jest w wykładniku.

Tor bezwzględny wyznaczyć możemy bezpośrednio na powierzchni stożka, zakreślonego przez oś obracającą się. W tym celu powierzchnię stożka, o otworze 2α, rozwiniemy na płaszczyznę rysunku i z jego wierzchołka wyprowadzimy dla różnych wartości t pęk promieni, odpowiadających położeniom osi ruchomej, mając przytem na uwadze, że obrót osi, zgodnie z warunkami zadania, jest jednostajny; i następnie na tych promieniach odetniemy długości $z_0 + \xi$, obliczone z powyższych równań; a końce ich wyznaczą pewną krzywę płaską; która, po nawinięciu jej na stożek obrotowy, przedstawi w przestrzeni tor bezwzględny danego punktu ruchomego.

W celu unaocznienia sobie postaci toru bezwzględnego, można obliczyć również rzut jego na płaszczyznę poziomą. Najprostszą postać równania, przedstawiającego tę krzywę, otrzymamy, stosując spółrzędne biegunowe; i w tym celu oznaczymy promień wodzący literą r,—kąt biegunowy literą σ; promień przeto r jest rzutem odległości $(z_0 + \xi)$ na tę płaszczyznę; a $\sigma = \varphi_0 \,.\, t$. Z tych dwóch równań wyrugujemy zmienną t i otrzymamy w spółrzędnych biegunowych równanie rzutu toru właściwego na płaszczyznę poziomą; z tego rzutu sądzić można o właściwościach samego toru i ruchu po nim.

W celu obliczenia siły odporowej N, weźmy pod uwagę, że siła ta, wskutek zupełnej gładkości toru, działa w płaszczyźnie normalnej do toru, nie znane przeto jest położenie w tej płaszczyźnie, i jej wartość. Niewiadome te wyrazimy rzutami jej na osi, przeprowadzone w płaszczyźnie normalnej do toru, przechodzącej przez miejsce, w którem chcemy obliczyć siłę odporową; jedną z tych osi obierzemy prostopadle do płaszczyzny biegunowej, i oznaczymy literą b (binormalna); drugą—w płaszczyźnie biegunowej, prostopadle do osi obracającego się toru; oś tę oznaczymy literą n; zrzutujmy następnie na te osi wielobok, przedstawiony równaniem 156-em; a otrzymamy jej rzuty. Rzut na normalną b daje równanie:

$$1) \quad N_b = 2m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0 \,.\, \sin\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \quad (162)$$

Rzut zaś na normalną n da równanie:

$$-mg \sin\alpha + N_n = m\varphi_0^2 \,.\, x \,.\, \cos\alpha;$$

z którego po podstawieniu $x = z \sin\alpha$, otrzymamy:

$$2) \quad N_n = m\varphi_0^2 \,.\, z \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + mg \sin\alpha \quad .\,.\,.\,.\,.\, \quad (163)$$

Z tych dwóch równań obliczymy siłę odporową toru, oraz jej położenie w płaszczyźnie normalnej.

W szczególnym przypadku, gdy punkt ruchomy znajduje się w miejscu równowagi względnej; t. j. gdy znajduje się w miejscu z_0, obliczymy te wielkości, gdy podstawimy w powyższe równania wartości z_0, oraz $v_w = 0$; a otrzymamy następujące wzory rzutów siły odporowej w tem miejscu:

$$N_b' = 0; \; N_n' = mg\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + mg \sin\alpha = \frac{mg}{\sin\alpha},$$

z których wynika, że siła odporowa toru w miejscu równowagi punktu, leży w płaszczyźnie biegunowej i jest większą od ciężaru punktu. Wynik ten zdaje się być w sprzeczności z zasadami statyki; w statycznych bowiem pojęciach odpór ten posiada wartość $mg \sin\alpha$; sprzeczność tę wytłumaczymy sobie bezwładnością punktu materyalnego; podczas bowiem jego obrotu działa na niego siła dośrodkowa, której składową w kierunku osi n przedstawia wyraz $mg\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$; a ta dopiero łącznie ze statyczną składową $mg \sin\alpha$, daje siłę odporową N_n.

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = 90^0$ t. j.; gdy tor obraca się w płaszczyźnie poziomej około jednego ze swych punktów: a punkt materyalny może się poruszać tylko po tej prostej; wtedy otrzymamy ze wzoru powyższego $z_0 = 0$; t. j. położenie równowagi punktu jest wtedy w miejscu przecięcia się toru z osią obrotu, co jest fizycznie łatwem do zrozumienia. Równanie toru bezwzględnego można w tym razie bezpośrednio wykreślić lub obliczyć z wyprowadzonych wyżej wzorów. Siła odporowa w tym przypadku, posiada następujące dwa rzuty:

$$N_b = 2m \,.\, v_w \,.\, \varphi_0; \text{ oraz } N_n = mg.$$

Z których N_n jest wynikiem tylko statycznego działania ciężaru; a N_b wyraża wpływ obrotu toru na zmianę prędkości względnej.

71. Przykład. Przyjmijmy teraz, że prędkość obrowa φ jest zmienną; lecz o kierunku stałym. W celu zestawienia równań ruchu tego punktu zauważymy, że w równaniu dynamicznem przykładu poprzedniego zmieni się tylko przyśpieszenie unoszące; do poprzednich bowiem wielkości dojdzie przyśpieszenie styczne do równoleżnika, na którym chwilowo znajduje się punkt ruchomy; wartość tego przyśpieszenia jest:

$$\frac{dv_u}{dt} \text{ inaczej } x.\frac{d\varphi}{dt};$$

pozostałe zaś wyrazy poprzedniego równania dynamicznego nie zmienią się. W celu np. obliczenia ruchu względnego tego punktu, zrzutujmy na kierunek osi rurki równanie dynamiczne, jakieśmy to uczynili poprzednio, a zważywszy, że rzut tego nowego przyśpieszenia na tor obracający się równa się zeru, otrzymamy te same równania różniczkowe ruchu względnego, jakie mieliśmy w poprzednim przykładzie.

Ruch przeto względny punktu ruchomego w przypadku zmiennej prędkości obrotowej jest ten sam, jaki był podczas odrotu jednostajnego. Siła natomiast odporowa podczas obrotu niejednostajnego się zmieni; a mianowicie zmieni się jej składowa $\overline{N}_b$; przybędzie bowiem do poprzedniej wartości przyśpieszenie styczne·

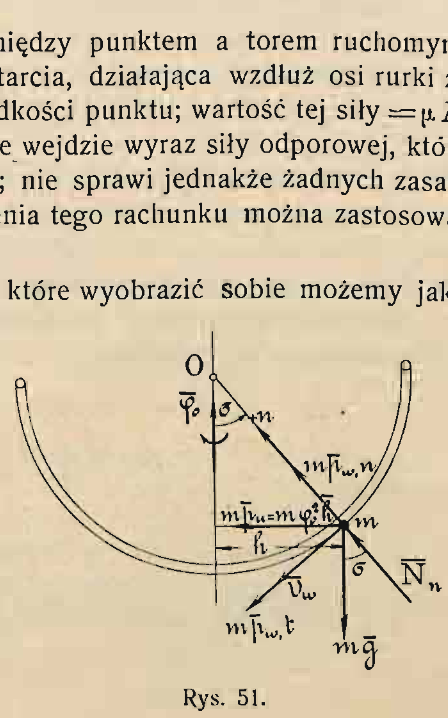
$$m\frac{d\varphi}{dt}z\,.\sin\alpha.$$

Również ruch bezwzględny jest w tym razie inny; bo chociaż prędkości względne w obydwóch przypadkach ruchu są dla jednakowych wartości z jednakowe, lecz położenia toru unoszącego dla tych samych wartości t są różne; bezwzględny przeto tor będzie także inny niż był poprzednio. Tor ten można wykreślić lub obliczyć w sposób wyżej wskazany.

W razie uwzględnienia siły tarcia, pomiędzy punktem a torem ruchomym, przybędzie do równania dynamicznego siła tarcia, działająca wzdłuż osi rurki ze zwrotem przeciwnym zwrotowi względnej prędkości punktu; wartość tej siły $=\mu N$. W równanie ruchu względnego w danym razie wejdzie wyraz siły odporowej, który do pewnego stopnia utrudni nieco rachunek; nie sprawi jednakże żadnych zasadniczych trudności. W celu zresztą uproszczenia tego rachunku można zastosować wzory przybliżone, wskazane w § 57-ym.

72. Przykład. Koło o promieniu r, które wyobrazić sobie możemy jako oś rurki, obraca się ruchem jednostajnym około swej średnicy, pionowo ustawionej; na obwodzie tego koła (lub wewnątrz rurki) znajduje się punkt materyalny o ciężarze mg, mogący się po nim suwać bez tarcia. Obliczyć ruch względny tego punktu.

Punkt ruchomy znajduje się w danym razie pod działaniem siły ciążenia i siły odporowej, leżącej w płaszczyźnie normalnej do toru poruszającego się; przyśpieszenie zaś tego punktu jest złożone, rys. 51-szy: 1) z przyśpieszenia, wywołanego względnym ruchem



Rys. 51.

punktu po kole. Przyśpieszenie to wyobrazimy sobie złożonem z przyśpieszenia normalnego $\overline{p}_{w,n}$ po promieniu koła ze zwrotem ku środkowi koła; a którego wartość równa się:

$$\frac{v^2_w}{r},$$

i z przyśpieszenia $\overline{p}_{w,t}$, stycznego do toru, i zwróconego zgodnie ze zwrotem ruchu punktu po torze, a którego wartość równa się

$$\frac{d\,v_w}{d\,t}.$$

2) z przyśpieszenia unoszącego, złożonego z przyśpieszenia wzdłuż promienia h równoleżnika, na którym leży chwilowo dany punkt; wartość tego przyśpieszenia wyraża wzór:

$$\overline{p}_u = \varphi^2 . \overline{h};$$

3) z przyśpieszenia, którego wartość wyrażamy wzorem:

$$2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w . \overline{\varphi},$$

i które powstaje wskutek ruchu punktu po obracającym się torze. Równanie zatem dynamiczne tego ruchu jest nast:

$$m\overline{g} + (\overline{N}_n + \overline{N}_b) = (m\overline{p}_{w,n} + m\overline{p}_{w,t}) + (m\overline{p}_u + 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0).$$

Równanie to przedstawia wielobok wektorowy, którego boki, oprócz boków $\overline{N}_b$ i $2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0$, leżą w płaszczyźnie biegunowej, t. j w płaszczyźnie koła obracającego się. Rys. 51-szy przedstawia płaszczyznę biegunową ze znajdującymi się na niej wektorami; wektory zaś:

$$\overline{N}_b \text{ i } 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v}_w\,\overline{\varphi}_0 .$$

nie są naniesione na ten rysunek, gdyż są prostopadłe do jego płaszczyzny.

Ażeby obliczyć ruch względny punktu, obliczymy przyśpieszenie styczne do koła i w tym celu zrzutujemy wszystkie wektory, przedstawione przez powyższe równanie, na styczną do toru, a otrzymamy jedno równanie z jedną niewiadomą $p_{w,t}$; gdyż rzuty pozostałych nieznanych wielkości będą równe zeru; a zatem otrzymamy równanie algebraiczne:

$$mg \sin\sigma = m\varphi_0{}^2 r . \sin\sigma . \cos\sigma + m p_{w,t}; \text{ z którego:}$$

$$p_{w,t} = g \sin\sigma - \varphi_0{}^2 r . \sin\sigma \cos\sigma; \quad \ldots\ldots \quad (164)$$

a ponieważ

$$p_{w,t} = \frac{d\,v_w}{d\,t} = -r\frac{d^2\sigma}{d\,t^2};$$

przeto, po podstawieniu tej wartości, otrzymamy równanie ruchu względnego:

$$-r\frac{d^2\sigma}{d\,t^2} = g \sin\sigma - \varphi_0{}^2 r . \sin\sigma . \cos\sigma \quad \ldots\ldots \quad (165)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, które po scałkowaniu da związek pomiędzy σ i t, t. j. da równanie ruchu względnego. Porównywując powyższe równanie z takimże równaniem ruchu wahadła w płaszczyźnie nieruchomej, zauważymy, że przybył obecnie nowy wyraz:

$$\varphi_0^2 r \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\,.\,\sigma,$$

wynikający z obrotu toru. W szczególnym przypadku, gdy $\varphi_0 = 0$, wtedy otrzymamy równanie ruchu wahadła płaskiego. Z powyższego równania, po jego scałkowaniu, obliczymy prędkość względną:

$$v_w = -l\frac{d\sigma}{dt},$$

a z tej wartości obliczymy:

$$p_{w,n} = \frac{v^2_w}{r};$$

t. j. przyśpieszenie normalne ruchu względnego; a wreszcie z tych dwóch przyśpieszeń $p_{w,t}$ i $p_{w,n}$ — przyśpieszenie całkowite ruchu względnego.

Z rzutu równania dynamicznego na promień wodzący r obliczymy rzut N_n siły odporowej; a z rzutu jej na normalną b obliczymy składową N_b; z tych wreszcie dwóch rzutów obliczymy wartość i położenie siły odporowej.

Nie wszystkie jednakże wskazane rachunki mogą być wykonane zwykłymi sposobami matematycznymi. Całka np. równania ruchu względnego jest funkcyą eliptyczną i może być obliczoną tylko z pewnem przybliżeniem w ten sposób, w jaki wykonaliśmy obliczenie ruchu wahadła pospolitego.

Ażeby otrzymać choć przybliżony obraz tego ruchu, zastosujemy uwagi, wyłożone w § 63-cim, odnoszące się do równania ruchu w postaci różniczkowej; napiszemy przeto równanie danego ruchu w postaci:

$$r\frac{d^2\sigma}{dt^2} + (g - \varphi^2_0 \,.\, r \,.\, \cos\sigma)\sin\sigma = 0;$$

i zważywszy, że wartość $\sin\sigma$ dla wszystkich kątów σ nie zmienia postaci tego równania; gdyż dla $0 < \sigma < \pi$ $\sin\sigma$ jest dodatny; a dla $\sigma < 0$ wszystkie wyrazy tego równania zmieniają swój znak, wywnioskujemy, że o rodzaju ruchu rozstrzyga znak wyrazu w nawiasach; i jeżeli:

$$g - \varphi_0^2 \,.\, r \,.\, \cos\sigma > 0; \text{ t. j. jeżeli } \varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r\cos\sigma}}; \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

to ruch będzie wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem $\sigma = 0$. Ruch ten jednakże nie będzie, ściśle biorąc, jednakowy z ruchem wahadłowym, opisanym w § 47-ym; równania bowiem tych dwóch ruchów są nie jednakowe; a zresztą rozpatrując ten ruch ze stanowiska fizycznego, zauważymy, że i siły działające na punkt ruchomy są różne; lecz ruch ten może być nazwany ruchem wahadłowym w ogólniejszem znaczeniu. Zauważyć następnie należy, ze zmiana znaku wartości kąta σ nie wpływa na warunek, wyrażony wzorem 165-tym; punkt przeto, puszczony ze wszystkich miejsc toru, wykona w tych warunkach ruch wahadłowy.

Jeżeli zaś $g - \varphi_0^2 r < 0$; to wyraz $(g - \varphi_0^2 r \cos\sigma)$ może być $\gtreqless 0$, zależnie od wartości $\cos\sigma$. Jeżeli np. dla pewnych wartości kąta σ wyraz ten jest odjemny, to dla innych wartości σ może być dodatny; z czego wynika, że punkt ruchomy w różnych swych położeniach na kole jest odpychany lub też przyciągany do położenia pionowego; tylko dla $\pi > \sigma > \frac{\pi}{2}$ wyraz ten będzie zawsze dodatny, t. j. punkt ruchomy będzie w tej ćwiartce koła posiadał zawsze ruch skierowany ku położeniu pionowemu.

Ponieważ punkt dany, znajdując się w pierwszej ćwiartce koła, $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, w różnych jego miejscach, posiada prędkości różnie skierowane; przeto powstaje pytanie, czy nie waha się on około pewnego położenia równowagi względnej, które jest nam dotychczas nieznane.

Miejsca, w których następuje równowaga względna, odznaczają się tem, że punkt ruchomy przechodzi przez nie z przyśpieszeniem względnem $= 0$. Jeżeli miejsca to określimy kątem σ', licząc go od położenia pionowego, to z równania ruchu napiszemy równanie:

$$(g - \varphi_0^2 \,.\, r \,.\, \cos\sigma') \,.\, \sin\sigma' = 0;$$

z którego:

$$\sin\sigma' = 0; \text{ lub } \cos\sigma' = \frac{g}{\varphi^2 r};$$

a z nich otrzymamy cztery wartości dla σ':

$$\sigma_1' = 0; \ \sigma_2' = 180^0, \text{ oraz}$$

$$\sigma'_{3,4} = \pm \arc\cos\left(\frac{g}{\varphi^2 r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

Posiadamy przeto w tych warunkach ruchu cztery położenia względnej równowagi punktu na kole; dwa z nich leżą na końcach średnicy pionowo przeprowadzonej, drugie zaś dwa leżą symetrycznie względem tejże średnicy; i te dwa położenia występują dopiero przy warunku $g < \varphi_0^2 r$; lub inaczej, gdy $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie zaś równowagi, znajdujące się na końcach średnicy pionowej, występują przy wszelkich wartościach prędkości obrotowej koła.

Cztery te miejsca równowagi względnej mają przeto tę wspólną właściwość, że punkt ruchomy, umieszczony w nich bez prędkości względnej, lecz z prędkością unoszącą, pozostanie w spoczynku podczas obrotu koła. Porównywując ten przykład z przykładem, przytoczonym w § 70-tym, gdy torem ruchomym była prosta obracająca się, zauważymy, że w przykładzie z prostą mieliśmy jedno tylko położenie równowagi względnej; w danym zaś przykładzie mamy ich cztery.

W celu otrzymania pewnych ilościowych stosunków danego ruchu, weźmy pod uwagę, że siła styczna, której wyrazem jest prawa strona równ. 165-tego, jest mniejsza, niż takaż siła wahadła, którego płaszczyzna pozostaje w spoczynku, ruch przeto względny danego wahadła będzie wolniejszy. Z pewnem przybliżeniem obliczymy ruch względny tego wahadła, gdy przyjmiemy, że kąt początkowego odchylenia jest dostatecznie mały; wtedy bowiem:

$$\sin \sigma = \sigma; \ \cos \sigma = 1;$$

i otrzymamy równanie:

$$-r\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (g - \varphi^2{}_0 r)\,.\,\sigma \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

które jest jednakowe z równ. 103-ciem, gdy zastąpimy wielkość g wielkością $(g - \varphi_0{}^2 r)$. Okres np. podwójnego wahnięcia tego ruchu otrzymamy, po podstawieniu tych wartości do równ. 109-tego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g - \varphi_0{}^2 r}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (169)$$

Równaniu temu można nadać pewne dynamiczne znaczenie; dla małych np. kątów odchylenia można uważać kierunek przyśpieszenia dośrodkowego $\varphi_0{}^2 r$ za zlewający się z kierunkiem pionowym; a wtedy na punkt dany działa siła $m\,(g - \varphi_0{}^2 r)$ w kierunku pionowym, porówn. § 68-my; której rzut na styczną jest:

$$m\,(g - \varphi_0{}^2 r) \sin \sigma;$$

lub w skróceniu:

$$m(g - \varphi_0{}^2 r)\,.\,\sigma.$$

W przypadku

$$g = \varphi_0{}^2 r;$$

otrzymamy siłę styczną $= 0$, a to znaczy, że w tym przypadku punkt, odchylony z położenia równowagi, pozostanie w spoczynku na kole lub też—w ruchu jednostajnym.

Jeżeli zaś:

$$g < \varphi_0{}^2 r,$$

to równ. 168-me przedstawia ruch punktu, odpychanego od położenia równowagi siłą proporcyonalną do odchylenia σ; punkt przeto w tych warunkach wykona znaczne odchylenia; a do zbadania tego ruchu, nie może być stosowane uproszczone równ. 168-me, a tylko równanie dokładne, t. j. równ. 165-te. Jeżeli przeto $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$, to położenie pionowe wahadła jest położeniem równowagi nietrwałej, punkt bowiem odchylony z tego położenia będzie się od niego oddalał.

W tenże sposób obliczymy ruch punktu, gdy wyprowadzimy go z położenia równowagi względnej, wyznaczonej kątem σ_3 lub σ_4. W tym celu podstawmy w równanie 165-te, jako w równanie ogólne danego ruchu:

$$\sigma = \sigma' + \triangle \sigma',$$

gdzie kąt $\triangle \sigma'$ oznacza odchylenie punktu od położenia równowagi, określonego kątem σ', a otrzymamy równanie:

$$-r \frac{d^2(\sigma' + \triangle \sigma')}{dt^2} = g \sin(\sigma' + \triangle \sigma') - \varphi_0^2 r . \sin(\sigma' + \triangle \sigma') . \cos(\sigma' + \triangle \sigma').$$

Nawiasy tego równania możemy rozwiązać, a przyrównawszy, wobec małych kątów $\triangle \sigma'$:

$$\sin \triangle \sigma' = \triangle \sigma'; \text{ oraz } \cos \triangle \sigma' = 1;$$

i usunąwszy wartości nieskończenie małe drugiego rzędu, otrzymamy związek pomiędzy położeniem punktu, określonem kątem zmiennym $\triangle \sigma'$, a przyśpieszeniem jego. Przekształcenie to prędzej jednakże wykonamy, gdy odejmiemy od tego równania równanie 165-te; wtedy bowiem otrzymamy zupełną różniczkę równ. 165-tego względem zmiennej σ'; w ten sposób otrzymamy bezpośrednio szukane równanie. Zróżniczkujmy przeto równanie 165-te; a otrzymamy:

$$-r \frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} = g \cos \sigma' . \triangle \sigma' - \varphi_0^2 r . \cos 2\sigma' . \triangle \sigma';$$

a po podstawieniu:

$$g = \varphi_0^2 . r . \cos \sigma'; \text{ mamy:}$$

$$-r \frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} = (\cos^2 \sigma' - \cos 2\sigma') . \varphi_0^2 r . \triangle \sigma';$$

i wreszcie po przekształceniu otrzymamy równanie ruchu punktu, względem jego położenia równowagi:

$$\frac{d^2(\triangle \sigma')}{dt^2} + \sin^2 \sigma' . \varphi_0^2 . \triangle \sigma' = 0.$$

W równaniu tem spółczynnik przy zmiennej $\triangle \sigma'$ jest zawsze dodatny, równanie to, porówn. § 63-ci, wyraża przeto zawsze ruch wahadłowy około położenia równowagi, wyznaczonego kątem σ'. Okres np. podwójnego wahnięcia danego ruchu obliczymy ze wzoru np. 28-go, po podstawieniu w niego:

$$\frac{k}{m} = \sin^2 \sigma' . \varphi_0^2,$$

lub ze wzoru 109-tego po podstawieniu $\left(\frac{g}{r}\right) = \sin^2 \sigma . \varphi_0^2$; i otrzymamy dla małych odchyleń:

$$T_{3,4} = \frac{2\pi}{\sin \sigma' . \varphi_0}.$$

Przedstawmy sobie obecnie całokształt ruchu danego punktu, przy różnych wartościach prędkości obrotowej φ_0:

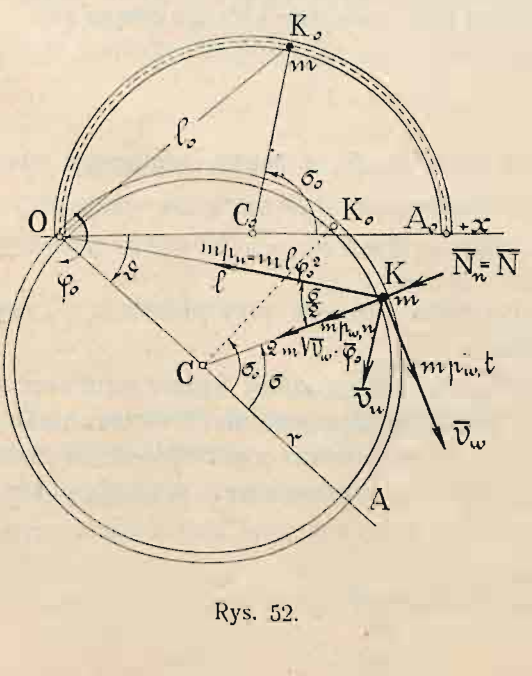
1) jeżeli $\varphi_0 < \sqrt{\frac{g}{r}}$, to punkt ruchomy, odchylony z położenia pionowego, będzie się około tego położenia wahał; i np. okres jego podwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy z równ. 169-ego. Położenie pionowe wahadła jest w danym przypadku położeniem równowagi trwałej. Przy tych warunkach ruchu obrotowego niema innych położeń równowagi.

2) jeżeli $\varphi_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$; położenie pionowe staje się położeniem równowagi obojętnej, dla małych odchyleń punkt będzie pozostawał na kole w spoczynku.

3) jeżeli wreszcie $\varphi_0 > \sqrt{\frac{g}{r}}$; to położenie pionowe jest położeniem równowagi nie trwałej i powstają wtedy dwa inne położenia równowagi, które są położeniami równowagi trwałej; położenia te wyznaczone są kątami $\sigma_{3,4}$, które obliczyć można z równ. 167-ego, a których wielkości rosną z powiększeniem prędkości obrotowej. Punkt wyprowadzony nieco z jednego z tych położeń równowagi, będzie się wahał około tych położeń; a np. okres podwójnego wahnięcia dla małych odchyleń obliczymy ze wzoru $T_{3,\,4}$.

Czytelnik zechce rozpatrzeć drogą rozumową właściwości siły odporowej w miejscach równowagi punktu; a następnie ją obliczyć.

73. Przykład. Punkt materyalny ślizga się wewnątrz rurki gładkiej, wygiętej w postaci koła o promieniu r. Rurka ta obraca się w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością kątową φ_0 około nieruchomego bieguna O, obranego na obwodzie koła rys. 52-gi. Obliczyć ruch względny, i ruch bezwzględny punktu, oraz siłę odporową rurki.



Rys. 52.

Położenie koła na płaszczyźnie nieruchomej określimy kątem ϑ, jaki tworzy jego średnica OA z osią x, nieruchomo obraną na tej płaszczyźnie; położenie zaś punktu ruchomego na kole określimy kątem σ, jaki tworzy promień wodzący, wyprowadzony ze środka koła z obracającą się razem z kołem średnicą OA. Przyjmiemy następnie, że w początkowem położeniu koła:

$$t = 0;\ \vartheta = 0;\ \sigma = \sigma_0;$$

a po upływie czasu t średnica OA_0 przyjmie położenie OA i utworzy z osią nieruchomą x kąt ϑ; punkt zaś ruchomy podczas tego obrotu, przesunie się po kole z miejsca K_0 do miejsca K, wyznaczonego kątem środkowym σ. Jeżeli znane są ϑ i σ w chwili t, to położenie punktu ruchomego jest wyznaczone jak na kole tak i na płaszczyźnie nieruchomej.

Przyjąć można, że na punkt ruchomy w tym przykładzie nie działa żadna siła zewnętrzna; ciężar bowiem punktu, jest zrównoważony siłą odporową płaszczyzny poziomej, po której porusza się rurka: lub też jest zrównoważony siłami odporowemi osi obrotu, jeżeli rurka przymocowaną jest do osi pionowej. Podczas jednakże obrotu rurki około bieguna O wywołana zostaje bezwładnością punktu siła odporowa N, normalna do koła. Przyśpieszenia zaś, jakie otrzymuje punkt ruchomy, podczas obrotu rurki, są nast.:

1) przyśpieszenie względne $\overline{p}_w$, które wyobrazimy sobie, w celu ułatwienia rozpatrywań, w postaci dwóch składowych: normalnej $\overline{p}_{w,n}$, oraz stycznej $\overline{p}_{w,t}$, wartości tych składowych są następujące:

$$p_{w,n} = \frac{v^2_w}{r} = r\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2; \text{ oraz } p_{w,t} = \frac{dv_w}{dt} = -r\frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad . \quad . \quad (170)$$

2) przyśpieszenie unoszące $\overline{p}_u$, które jest zwrócone w tym przykładzie po promieniu wodzącym l, wyprowadzonym z bieguna nieruchomego O do danego punktu; wartość tego przyśpieszenia:

$$p_u = \frac{v_u^2}{l}\text{ ; lub inaczej } p_u = l\varphi_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

3) z przyśpieszenia ruchu złożonego, wyrażonego wektorem $2\,\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi}_0$; a które jest zwrócone po promieniu do środka koła i wartość którego równa się:

$$2\,v_w\,.\,\varphi_0\,;$$

kąt bowiem $(\overline{v}_w, \overline{\varphi}_0) = 90^0$.

Przyśpieszenia te są wywołane jedną siłą N; a zatem napiszemy równanie dynamiczne:

$$\overline{N} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u + 2m\mathrm{V}\overline{v}_w\,.\,\overline{\varphi}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

w którem niewiadome są N i v_w: nieznane bowiem przyśpieszenie p_w wyrazić można zmienną v_w; lub też i odwrotnie.

Ażeby obliczyć prędkość względną v_w, najdogodniej będzie zrzutować wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie dynamiczne, na kierunek tejże prędkości v_w; niewiadoma bowiem N oraz wyraz z przyśpieszenia złożonego nie wejdzie do równania rzutów; a zatem, po zrzutowaniu, otrzymamy równanie algebraiczne; porów. rys. 52-gi:

$$mp_{w,t} - mp_u\,.\,\sin\frac{\sigma}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Wyraźmy następnie przyśpieszenie względne spółrzędną σ; w tym celu podstawimy w powyższe równanie:

$$p_u = l\varphi_0{}^2;$$

a ponieważ z rys. 52-go odczytamy:

$$l = 2\,r\cos\frac{\sigma}{2}\,;\ \text{przeto:}$$

$$p_u = 2\,r\varphi^2{}_0\,.\cos\frac{\sigma}{2}\,;\ \text{i}\ p_{w,\,t} = \frac{d\,v_w}{dt} = -\,r\frac{d^2\sigma}{dt^2}\,;$$

a po podstawieniu tych wielkości w równ. 173-cie i po skróceniu przez r i przez m, otrzymamy:

$$-\frac{d^2\sigma}{d\,t^2} = \varphi_0{}^2\sin\sigma \qquad \text{(174)}$$

Równanie to wyraża ruch wahadłowy, jest ono bowiem jednakowe z równaniem 103-ciem, gdy podstawimy w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0{}^2$. Ruch zatem punktu materyalnego po kole, obracającem się z jednostajną prędkością w płaszczyźnie poziomej około jednego z punktów swego obwodu, jest ruchem jednakowym z ruchem wahadła o długości $l = \frac{g}{\varphi_0{}^2}$ i o początkowem odchyleniu σ_0; a którego położenie równowagi jest wyznaczone średnicą OA, sztywno związaną z kołem. Ruch ten unaocznić sobie można w następujący sposób: wyobraźmy sobie żeśmy umieścili się w płaszczyźnie koła i obracamy się razem z tą płaszczyzną; a wtedy ruch punktu wyda nam się jako zwykły ruch wahadłowy.

Okres T' podwójnego wahnięcia (dla małych odchyleń σ_0), obliczymy ze wzoru 109-go wahadła pospolitego; gdy podstawimy w niego: $\frac{g}{l} = \varphi^2{}_0$, a zatem:

$$T' = \frac{2\pi}{\varphi_0}\,.$$

Oznaczmy okres czasu, w którym koło ruchome wykona pełny obrót literą T, a napiszemy równanie:

$$\varphi_0\,T = 2\pi;\ \text{z którego:}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\varphi_0}\,.$$

Okres zatem T' podwójnego wahnięcia punktu po kole, przy małem σ_0, równa się okresowi T całkowitego obrotu koła.

Siłę normalną N obliczymy, gdy zrzutujemy powyższe równanie dynamiczne na kierunek promienia koła; równanie to jest nast.:

$$N_n = mp_{w,\,n} + mp_u\cos\frac{\sigma}{2} + 2\,mv_w\varphi_0;$$

podstawimy w nie odpowiednie wartości i otrzymamy:

$$N_n = mr\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + 2mr\varphi^2_0 . \cos^2\frac{\sigma}{2} - 2mr\varphi_0\left(\frac{d\sigma}{dt}\right).$$

Ponieważ rzut równania dynamicznego na oś, prostopadłą do płaszczyzny koła, daje równanie:

$$N_b = 0; \text{ zatem } N = N_n.$$

W celu obliczenia siły N w miejscu σ, należy $\frac{d\sigma}{dt}$ wyrazić funkcyą kąta σ; a w tym celu należy scałkować równanie ruchu względnego, t. j. równ. 174-te. Całkę tę obliczyliśmy już w § 47-ym; napiszemy ją przeto bezpośrednio z równ. 106-tego, po podstawieniu w nie $\frac{g}{l} = \varphi_0^2$; oraz $v = -r\frac{d\sigma}{dt}$; a zatem mamy:

$$-\frac{d\sigma}{dt} = \pm\varphi_0\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (175)$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu wyrazu:

$$\cos^2\frac{\sigma}{2} \text{ wyrazem } \frac{1+\cos\sigma}{2};$$

otrzymamy po uporządkowaniu:

$$N = mr\varphi_0^2\left(3\cos\sigma + 1 - 2\cos\sigma_0 \pm 2\sqrt{2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)}\right).$$

Wybór znaku pierwiastka zależy od zwrotu prędkości v_w; jeżeli punkt przebiega ze zwrotem, wskazanym na rys. 52-gim, to zwrót przyśpieszenia $2\,\mathbf{V}\overline{v_w}\,\overline{\varphi}$ ruchu złożonego, skierowany jest w myśl danego określenia po promieniu ku środkowi koła; należy zatem przyjąć znak dodatny, jeżeli zaś punkt ruchomy zmieni zwrot swej prędkości, co nastąpi podczas powrotu punktu ruchomego do położenia początkowego, wtedy przyśpieszenie to jest zwrócone na zewnątrz koła, i należy wtedy wziąć znak odjemny; porów. prawidło, podane w § 66-tym. Nierówność wartości tego odporu dla tych samych położeń σ punktu ruchomego na kole wynika z niesymetryczności jego ruchu; punkt bowiem posiada jeden ruch symetryczny względem OA dający jednakowe wartości dla tych samych położeń punktu; oraz posiada jednocześnie ruch niesymetryczny—jednozwrotny, wynikający z obrotu koła.

Szczególne przypadki:

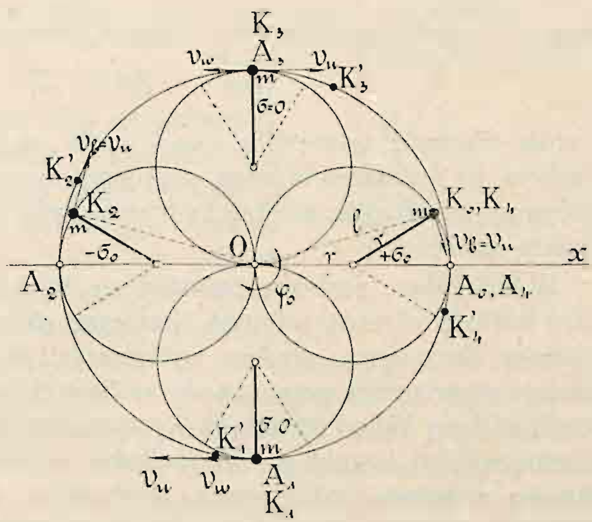
1) jeżeli przyjmiemy $\varphi_0 = 0$; to $N = 0$. Wynik ten jest zrozumiały bezpośrednio; koło bowiem się nie obraca, siły zewnętrzne nie działają na dany punkt, przeto niepowstają i siły odporowe;

2) gdy $\sigma_0 = 0$, wtedy N może mieć wartości rzeczywiste tylko dla $\sigma = 0$; i w tym razie $N = 2mr\varphi_0^2$. Wynik ten wypowiemy: gdy punkt ruchomy umieścimy bez prędkości względnej, lecz z prędkością, unoszącą, na końcu średnicy,

przechodzącej przez biegun obrotu; to pozostanie on w tem miejscu bez ruchu względem koła; a siła odporowa koła równa się sile dośrodkowej.

3) Jeżeli $\sigma_0 = \pi$; to dla $\sigma = 0$; $N = N_{max} = mr\varphi_0^2\,(6 \pm 4)$; t. j. gdy punkt ruchomy rozpoczyna ruch z bieguna obrotu zgodnie ze zwrotem obrotu koła; wtedy po dojściu do miejsca, wyznaczonego przez koniec średnicy koła OA, wywołuje on siłę odporową $10\,mr\varphi^2$, gdy zaś następnie, przy dalszym obrocie koła, powróci do tegoż miejsca, to wywoła siłę odporową $2\,mr\varphi_0^2$.

Określmy obecnie choć w przybliżeniu tor bezwzględny i prędkość punktu ruchomego po nim. Jeżeli przyjmiemy, że odchylenie początkowe wahadła σ_0 jest dosyć małe, to, np. po zrobieniu przez koło ćwierci obrotu, wahadło zrobi ćwierć podwójnego wahnięcia i punkt ruchomy po przejściu koła z położenia OA_0 do OA_1 przejdzie z miejsca K_0 do miejsca K_1, pokrywającego się z końcem A_1 średnicy koła; okresy bowiem ćwierci wahnięcia wahadła równają się w przybliżeniu okresowi ćwierci obrotu koła. Następnie, gdy średnica koła obróci się o 180^0, to punkt zrobi połowę podwójnego wahnięcia, t. j. znajdzie się w położeniu K_2; w tenże sposób rozumując, dojdziemy do wniosku, że K_3 pokryje się z A_3 i t. d. Krzywa ciągła, łącząca punkty K_0, K_1, K_2, K_3, jest torem bezwzględnym danego punktu, przy warunku, że kąt σ_0 jest dostatecznie mały. Styczne do tego toru wyznaczymy wogóle z równania:



Rys. 53.

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u.$$

W miejscu np. K_0:

$$\overline{v}_w = 0, \text{ przeto } \overline{v}_b = \overline{v}_u, \text{ a } \overline{v}_u = V\overline{l}\,\overline{\varphi},$$

i jest prostopadła do promienia wodzącego l, wyprowadzonego z bieguna obrotu; a zwrot jej jest zgodny ze zwrotem obrotu φ_0. Prostopadła przeto do OK_0 jest styczną do toru bezwzględnego w miejscu K_0;—tak samo będzie w miejscu K_2 toru. W miejscach zaś K_1 i K_3 kierunki prędkości unoszącej i względnej zlewają się, są więc styczne do średnicy $2\,r$; prędkość np. w K_1:

$$v_{b,1} = 2\,r\,\varphi_0 + v_w,$$

a w K_3:

$$v_{b,3} = 2\,r\,\varphi_0 - v_w.$$

Z tych rozpatrywań wynika, że tor nie jest symetryczny względem osi x; co wynika z niesymetryczności ruchu względem tejże osi.

Następnie zwrócimy uwagę, że w pewnych miejscach toru bezwzględnego prędkość punktu składa się z różnicy dwóch prędkości; nasuwa się przeto pytanie, czy nie nastąpi taki przypadek, w którym $v_b \leqq 0$; t. j. w którym punkt zatrzyma się lub cofać się będzie po torze.

Prędkość względna jest największa dla $\sigma = 0$; przeto v_b może równać się zeru tylko w miejscu K_3. Prędkość ta zależy od początkowego odchylenia σ_0 wahadła, i rośnie razem z tym kątem. Obliczymy przeto kąt σ_0 ze wzoru 175-ego dla przypadku, w którym:

$$2\,r\,\varphi_0 = v_w;$$

i napiszemy ze wzoru 175-ego:

$$2\,r\,\varphi_0 = r\,\varphi_0\,\sqrt{2\,(\cos\sigma - \cos\sigma_0)}\,;$$

ażeby zatem ten przypadek mógł nastąpić, powinno być:

$$(\cos\sigma - \text{ces}\,\sigma_0) = 2;$$

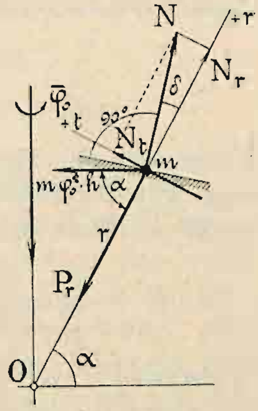
co może nastąpić tylko; dla $\sigma = 0$ i dla $\sigma_0 = 180$. Lecz wzór podwójnego wahnięcia, na podstawie którego oparliśmy te rozwiązania, nie stosuje się do tego krańcowego przypadku; należałoby przeto zbadać równanie dokładne; badania tego jednakże zaniechamy.

W innej nieco postaci przedstawi się tor tego punktu jeżeli zastosujemy dokładne wartości okresów wahnięć. Ponieważ okresy te są większe od obliczonych ze wzoru skróconego (cośmy wytłomaczyli w § 49-tym na podstawie dynamicznego pojęcia siły), przeto, podczas ćwierci wahnięcia wahadła, średnica koła zakreśli większy kąt od 90^0 tak, iż K_1 wahadła odsunie się od A_1 zgodnie ze zwrotem obrotu koła. Punkt przeto ruchomy zakreśla z miejsca K_0 pewien tor, który styka się z kołem, zakreślonem promieniem $2\,r$, w miejscu K'_1; następnie w miejscu K_3' i t. d.; linia przeto łącząca punkty K_0, K_1', K_3', i t. d. przedstawia bezwzględny tor danego punktu. Widzimy z tego, że dany punkt zakreśla tor bezwzględny wogóle niezamknięty, a zamknięty tylko przy szczególnych odchyleniach, dla których okresy wahnięć są współmiernie z wielkością $\frac{2\,\pi\,r}{\varphi_0}$. Z powiększeniem odchylenia σ_0, okresy wahnięć się powiększają; a w blizkości $\sigma_0 = 180^0$ okres połowy wahnięcia zbliża się do ∞, § 48-my; punkt przeto zakreśla w tym razie spiralę, biorącą początek w biegunie obrotu koła, a kończącą się na obwodzie koła zakreślonego z bieguna O promieniem $2\,r$. Ilość zwojów tej spirali ze zbliżaniem odchylenia σ_0 do 180^0, nadzwyczaj prędko się zwiększa, t. j. ze zbliżeniem początkowego położenia punktu ruchomego do bieguna obrotu; a prędkość bezwzględna punktu zbliża się od bardzo małej prędkości $(l_0\,\varphi_0)$, (l_0 bowiem jest bardzo małe); do prędkości:

$$\text{lim.}\ v_b = 2\,r\,\varphi_0 + r\,\varphi_0 + r\,\varphi_0\,\sqrt{2\,(\cos 0^0 - \cos 180^0} = 2\,r\,\varphi_0 + 2\,r\,\varphi_0 = 4\,r\,\varphi_0\,.$$

74. Wpływ dziennego obrotu ziemi na kształt jej powierzchni i na ciężar brył materyalnych, znajdujących się na niej. Wszystkie bryły materyalne, znajdujące się w spoczynku na powierzchni ziemi, są w stanie równowagi względnej;—zestawmy warunki tej równowagi. Na każdą taką bryłę działa siła przyciągania ziemskiego, której kierunek zlewa się z promieniem wodzącym danej bryły, wyprowadzonym ze środka przyciągania; siłę tę oznaczymy literą P_r, rys. 54-ty, oraz siła odporowa N powierzchni, na której bryła dana spoczywa. Bryła, pozostająca w spoczynku względem ziemi posiada tylko przyśpieszenie unoszące, które wyrazimy wzorem:

$$\overline{p}_u = \varphi_0^2 \overline{h};$$



Rys. 54.

w którym h jest promieniem równoleżnika, na którym bryła w danej chwili się znajduje, φ_0 — prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi. Równanie równowagi względnej jest w tym razie następujące:

$$\overline{P}_r + \overline{N} = m\varphi_0^2 \overline{h}.$$

z którego wynika, że kierunek siły odporowej $\overline{N}$, nie zlewa się z kierunkiem promienia wodzącego, lecz tworzy z nim pewien kąt; z czego znów wynika, że powierzchnia bryły ziemskiej, utworzona np. przez powierzchnię wody spokojnej, nie może być kulistą; wszystkie bowiem jej cząstki są prostopadłe do kierunku, nie zlewającego się z kierunkiem promienia. Kierunek siły odporowej N jest kierunkiem t. zw. pionowym, t. j. kierunkiem, jaki przybierze nić zawieszona spokojnie z przymocowanym do jej końca ciężarem; kierunek zatem t. zw. pionowy nie przechodzi przez środek przyciągania ziemi, lecz go mija. Siła N jest również tą siłą, która uzewnętrznia się przy ważeniu brył materyalnych; bryły bowiem, które ważymy, są w równowadze względnej; ciężar przeto bryły równa się iloczynowi mg_α, w którem g_α oznacza przyśpieszenie ziemskie na szerokości geograficznej α.

W celu obliczenia siły N oraz kąta δ, o jaki odchyla się pion od promienia wodzącego; zrzutujmy na kierunek tego promienia wodzącego wielobok wektorowy, przedstawiony przez powyższe równanie; oraz na prostopadłą do tego promienia, a otrzymamy równania, rys. 54-ty:

$$-P_r + N_r = -m\varphi_0^2 r \cos^2\alpha, \text{ oraz } N_t = m\varphi^2_0 r \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha;$$

w których h zastąpiono wyrazem $r\cos\alpha$. Z tych równań obliczymy:

$$N_r = P_r - m\varphi_0^2 r \,.\, \cos^2\alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi_0^2 r \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (175)$$

Zmierzenie wielkości siły P_r przyciągania ziemskiego nie jest bezpośrednio możliwem; dla pomiarów bowiem są tylko przystępne wielkości siły odporowej N; gdy jednakże dla jednego miejsca powierzchni ziemi określimy siłę odporową N, wtedy obliczymy za pomocą powyższych równań siłę P_r, która jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi. Z ruchu wahadła obliczono, że na równiku przyśpieszenie $g_e = 9{,}780$ m./sek². (e-ekwator); a zatem $N_e = mg_e$; ażeby z tej wielkości obliczyć siłę P_r, podstawimy w równ. 175-te:

$$N_r = mg_e; \text{ oraz } N_t = 0;$$

a otrzymamy:

$$mg_e = P_r - m\varphi^2_0 \, . \, r; \text{ skąd: } P_r = mg_e + m\varphi^2_0 \, . \, r,$$

a po podstawieniu tej wartości w równ. 175-te i po uproszczeniu, otrzymamy:

$$N_r = mg_e + m\varphi^2_0 r \, . \, \sin^2 \alpha; \text{ oraz}$$

$$N_t = m\varphi^2_0 r \, . \, \cos \alpha \, . \, \sin \alpha.$$

Z równań tych obliczymy odchylenie δ kierunku t. zw. **pionowego** od **promienia wodzącego**, gdy przyjmiemy, stosownie do pomiarów, średnią długość promienia $r = 6{,}37 \times 10^6\, m$; oraz czas obrotu dziennego $= 23\, h\ 56\, m\ 4\, s = 86\,164$; skąd:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}73 \times 10^{-4}; \text{ oraz } \varphi_0{}^2 r = 0{,}034. \quad . \; . \; . \; (176)$$

Po podstawieniu tych wartości w równania powyższe, obliczymy kąt δ z następującego wzoru; rys. 54-ty:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{N_t}{N_r} = \frac{0{,}034 \, . \, \cos \alpha \, . \, \sin \alpha}{9{,}780 + 0{,}034 \, . \, \sin \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (177)$$

Ze wzoru tego wynika, że δ zależy tylko od szerokości geograficznej, o ile przyjmiemy, że długość promienia jest stałą wielkością dla wszystkich miejsc powierzchni ziemi.

Największą wartość δ obliczymy ze wzoru powyższego drogą, wskazaną odnośnym rachunkiem różniczkowym, i otrzymamy, że

$$\delta_{\text{max.}} \text{ jest dla: } \alpha = 44^0\, 52';$$

podstawiwszy nasrępnie wartość tego kąta we wzór powyższy, obliczymy wartość $\delta_{\text{max.}}$. Obliczeuie to wykonamy z przybliżeniem, nieprzekraczającem jednakże granic dokładności, posiadanych pomiarów; i w tym celu przyjmiemy $\alpha = 45^0$, a drugi dodajnik w mianowniku równ. 177-ego, przyjmiemy równy zeru; przyjmiemy również, że $9{,}78 \cong 10$; wtedy:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{max.}} = \delta_{\text{max.}} = \frac{0{,}034 \times 0{,}5}{10} = 0{,}0017 \text{ sek.}$$

Z tego wynika, że odchylenie to jest tak małe, iż dla celów praktycznych przyjąć można: $\delta = 0$, a $N_r \cong N$; t. j. przyjąć można: $\varphi_0{}^2 r = 0$.

Ponieważ N wyraża ciężar bryły materyalnej w danem miejscu powierzchni; przeto $N = mg_\alpha$, a po podstawieniu tej wartości w powyższe równanie dla siły

N_r, otrzymamy związek pomiędzy wartościami przyśpieszenia ziemskiego w różnych miejscach powierzchni ziemi; — związek ten jest wyrażony następującem równaniem:

$$g_\alpha = g_e + \varphi_0^2 r \,.\, \sin^2 \alpha.$$

Równanie to pozwala obliczyć przyśpieszenie na danej szerokości geograficznej α, ze znanego przyśpieszenia na równiku. Największa wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 90^0$ t. j. znajduje się ona na biegunie; zaś najmniejsza wartość g_α zachodzi dla $\alpha = 0$; t. j. na równiku.

Z tych wyników obliczymy obecnie stosunek ciężarów jednej i tej samej bryły materyalnej, gdy ją umieścimy raz na biegunie i drugi raz na równiku; stosunek ten jest nast.:

$$\frac{g_{\text{max.}}}{g_{\text{min.}}} = \frac{g_e + \varphi_0^2 r}{g_e} = 1 + \frac{\varphi^2 r}{g_e} = 1 + \frac{0{,}034}{\sim 10} = 1{,}003;$$

t. j. bryła, która waży na równiku np. 1000 *kg*, waży na biegunie 1003 *kg*.

W rachunku powyższym przyjęliśmy, że promień r jest stały dla wszystkich miejsc powierzchni bryły ziemskiej; gdy tymczasem dowiedliśmy poprzednio, że powierzchnia ziemi nie może być kulistą, a więc długość promienia nie jest stałą; do wyników więc powyższych należałoby wnieść odnośną poprawkę. Nieprzeprowadzając szczegółowych rachunków ocenimy tę poprawkę w sposób następujący: ponieważ, w myśl poprzednich rozważań należy przyjąć, że długość promienia r jest mniejszą w biegunach, przeto siła przyciągania, stosownie do Newtonowskiego prawa, jest większą na biegunach, niż na równiku, a więc przyśpieszenie w biegunach jest nieco większe, niż obliczone wyżej; co też stwierdziły odnośne pomiary za pomocą wahadła.

W przykładzie powyższym przyjęliśmy, że bryła materyalna pozostaje w spoczynku na powierzchni ziemi, jest to zatem przykład równowagi względnej; weźmy teraz pod uwagę przypadek, w którym bryła dana porusza się po powierzchni ziemi; i obliczmy siły względne, działające na nią. Ograniczmy na razie nasze rozpatrywanie do przypadku, w którym bryła porusza się wzdłuż południka na półkuli północnej ze zwrotem od bieguna północnego ku równikowi. Przykładem tego ruchu jest bieg rzeki płynącej lub też—pociągu, biegnącego w tymże kierunku. W danym przykładzie należy wprowadzić do równania dynamicznego przyśpieszenie względne i prędkość względną. Zatrzymując oznaczenia, które przyjęliśmy w przykładzie poprzednim, równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$\overline{P} + \overline{N} = m\overline{p}_w + m\overline{p}_u + 2\,m\,\mathrm{V}\,\overline{v}_u\,\overline{\varphi}_0.$$

Wektory $\overline{P}$, $m\overline{p}_w$ i $m\overline{p}_u$ leżą w płaszczyźnie biegunowej, a dwa pozostałe wektory tego równania wychodzą z tej płaszczyzny. Obliczymy przedewszystkiem siłę prostopadłą do płaszczyzny biegunowej; i w tym celu zrzutujemy powyższe równanie na oś b, przeprowadzoną prostopadle do płaszczyzny biegunowej w miejscu chwilowego przebywania punktu ruchomego; a otrzymamy siłę:

$$N_b = 2\,m v_w \varphi_0 \cdot \sin(v_w, \varphi_0) = 2\,m v_w \varphi_0 \cdot \sin\alpha;$$

i zwróconą ku wschodowi; (porówn. rys. 119 str. 129 tomu I-ego, oraz treść § 66-tego tego tomu). A zatem, ażeby punkt materyalny mógł poruszać się z pewną prędkością na półkuli północnej wzdłuż południka od bieguna ku równikowi należy przyłożyć do niego oprócz sił, leżących w płaszczyźnie biegunowej, siłę prostopadłą do niej, zwróconą ku wschodowi. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rzekę płynącą na półkuli północnej wzdłuż południka, to wobec powyższych wyników prawy jej brzeg powinien być szczególniej wzmocniony, gdyż siła odporowa tego brzegu wywołuje przyśpieszenie; w przeciwnym bowiem razie rzeka podmyje ten brzeg i koryto przesunie się ze wschodu ku zachodowi. Niektórzy technicy uważają, że w pociągach biegnących w opisanym kierunku prawe szyny więcej się zużywają, niż lewe; chociaż bowiem siła N_b, jak łatwo obliczyć, posiada bardzo małą wartość, jednakże z biegiem czasu może znacznie zmienić warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch.

Łatwo spostrzedz z powyższego wzoru, że największą wartość posiada ta siła przy biegunie; przy zbliżaniu się zaś punktu ruchomego ku równikowi maleje, a na równiku $= 0$.

Zgodność wyników tego rachunku ze zjawiskami fizycznemi, stwierdza słuszność naszych założeń; na jakich oparliśmy dany rachunek;—t. j. stwierdza, że punkt materyalny pozostawiony sam sobie zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym względem układu sztywno związanego z gwiazdami stałemi.

8. Metoda d'Alembert'a.

75. Określenie i rozwinięcie tej metody. Metoda ta ma na celu uproszczenie rozpatrywania ruchu punktów czy też brył materyalnych, i polega na tem, że iloczyn:

$$(-m\overline{p});$$

t. j. że iloczyn z masy poruszającego się punktu i jego przyśpieszenia w danej chwili z przeciwnym zwrotem uważać będziemy za siłę. Siłę tę wprowadzamy do naszych rozumowań w celu zastąpienia pojęcia kinetycznego, iloczynu z masy i przyśpieszenia, pojęciem statycznem. Siłę, określoną w ten sposób, nazwiemy siłą bezwładności danego punktu; siłę tę oznaczać będziemy literą $\overline{B}$; a geometrycznie wyrazimy ją wektorem $m\overline{p}$ z odwróconą strzałką.

Jeżeli przeto wyobrazimy sobie, że siłę:

$$\overline{B} = -m\overline{p},$$

przyłożymy do punktu ruchomego, posiadającego masę m i przyśpieszenie $\overline{p}$, to punkt dany będzie pozbawiony tego przyśpieszenia i pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym; inaczej mówiąc, siły zewnętrzne, wywołujące dane przyśpie-