$$N_b = 2\, m v_w \varphi_0 \, . \sin\, (v_w, \varphi_0) = 2\, m v_w \varphi_0 \, . \sin \alpha;$$

i zwróconą ku wschodowi; (porówn. rys. 119 str. 129 tomu I-ego, oraz treść § 66-tego tego tomu). A zatem, ażeby punkt materyalny mógł poruszać się z pewną prędkością na półkuli północnej wzdłuż południka od bieguna ku równikowi należy przyłożyć do niego oprócz sił, leżących w płaszczyźnie biegunowej, siłę prostopadłą do niej, zwróconą ku wschodowi. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rzekę płynącą na półkuli północnej wzdłuż południka, to wobec powyższych wyników prawy jej brzeg powinien być szczególniej wzmocniony, gdyż siła odporowa tego brzegu wywołuje przyśpieszenie; w przeciwnym bowiem razie rzeka podmyje ten brzeg i koryto przesunie się ze wschodu ku zachodowi. Niektórzy technicy uważają, że w pociągach biegnących w opisanym kierunku prawe szyny więcej się zużywają, niż lewe; chociaż bowiem siła N_b, jak łatwo obliczyć, posiada bardzo małą wartość, jednakże z biegiem czasu może znacznie zmienić warunki fizyczne, w jakich odbywa się ruch.

Łatwo spostrzedz z powyższego wzoru, że największą wartość posiada ta siła przy biegunie; przy zbliżaniu się zaś punktu ruchomego ku równikowi maleje, a na równiku $= 0$.

Zgodność wyników tego rachunku ze zjawiskami fizycznemi, stwierdza słuszność naszych założeń; na jakich oparliśmy dany rachunek;—t. j. stwierdza, że punkt materyalny pozostawiony sam sobie zakreśli tor prostolinijny ruchem jednostajnym względem układu sztywno związanego z gwiazdami stałemi.

8. Metoda d'Alembert'a.

75. Określenie i rozwinięcie tej metody. Metoda ta ma na celu uproszczenie rozpatrywania ruchu punktów czy też brył materyalnych, i polega na tem, że iloczyn:

$$(-m\bar{p});$$

t. j. że iloczyn z masy poruszającego się punktu i jego przyśpieszenia w danej chwili z przeciwnym zwrotem uważać będziemy za siłę. Siłę tę wprowadzamy do naszych rozumowań w celu zastąpienia pojęcia kinetycznego, iloczynu z masy i przyśpieszenia, pojęciem statycznem. Siłę, określoną w ten sposób, nazwiemy siłą bezwładności danego punktu; siłę tę oznaczać będziemy literą $\bar{B}$; a geometrycznie wyrazimy ją wektorem $m\bar{p}$ z odwróconą strzałką.

Jeżeli przeto wyobrazimy sobie, że siłę:

$$\bar{B} = -m\bar{p},$$

przyłożymy do punktu ruchomego, posiadającego masę m i przyśpieszenie $\bar{p}$, to punkt dany będzie pozbawiony tego przyśpieszenia i pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym; inaczej mówiąc, siły zewnętrzne, wywołujące dane przyśpieszenie, **i siła bezwładności $\overline{B}$ są w każdej chwili w równowadze.** Gdy warunek tej równowagi wyrazimy, zgodnie z § 104-tym tomu I-go, równaniem:

$$\overline{P} + \overline{B} = 0, \quad \text{lub inaczej} \quad \overline{P} + (-m\overline{p}) = 0,$$

wtedy pod względem formalnym równania te różnią się od równania dynamicznego:

$$\overline{P} = m\overline{p},$$

tylko przeniesieniem wyrazu $m\overline{p}$; a pod względem ich znaczenia fizycznego różnią się sposobem pojmowania tych wyrazów.

Gdy wprowadzimy do rozpatrywań ruchu punktu materyalnego pojęcie siły bezwładności, wtedy możemy otrzymać równanie ruchu punktu z równania równowagi, po przyłożeniu do danego punktu siły bezwładności.

Na str. 143-ej tomu I dowiedliśmy np., że gdy siły, działające na punkt, są w równowadze, wtedy suma ich momentów równa się zeru; zastosujemy przeto to twierdzenie do punktu, będącego w ruchu, wywołanym siłą $\overline{P}$. W tym celu przyłożymy do niego siłę $\overline{B} = (-m\overline{p})$ i przyrównamy sumę momentów tych sił, wziętych względem dowolnie obranego bieguna, do zera; a otrzymamy równanie:

$$\overline{M}_P + \overline{M}_B = 0.$$

Moment $\overline{M}_B$ siły bezwładności $\overline{B}$ wyrazimy wzorem wektorowym:

$$-\mathrm{V}\,\frac{d(m\overline{v})}{dt}\,.\,\overline{r},$$

który na zasadzie rozważań, przytoczonych na str. 62-ej, zastąpimy następującym:

$$-\frac{d\overline{M}_v}{dt};$$

a po podstawieniu go w równanie poprzednie, otrzymamy równ. 76-te, wyrażające zasadę momentów. Warunek równowagi sił, wyrażony równaniem ich momentów $\Sigma\overline{M}_k = 0$, oraz równanie momentów w dynamice, równ. 76-te, mają również tę wspólną właściwość, że równanie momentów w obydwóch przypadkach nie określa jednoznacznie ani równowagi sił, ani też ruchu punktu; a wyraża tylko pewne właściwości, jak równowagi tak i ruchu, cośmy już wypowiedzieli w § 29-tym.

W tenże sposób warunek równowagi, wyrażony zasadą pracy wyobrażalnej, porów. § 213 tomu I-go, może być zastosowany do zestawienia równania dynamicznego ruchu. W tym celu przyrównamy do zera sumę wyobrażalnych prac sił zewnętrznych i siły bezwładności i napiszemy równanie:

$$dL_P + dL_B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

Pracę dL_B siły bezwładności wyrazimy zgodnie z danemi określeniami wzorem:

$$(-mp_t)\,.\,ds,$$

lub inaczej wzorem:

$$-m\frac{dv}{dt}\,.\,ds.$$

który, po podstawieniu $\frac{ds}{dt}=v$, przekształcimy na następujący:

$$-d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right).$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie, otrzymamy równanie, wyrażające zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Z tych przykładów wynika, że moment siły bezwładności wyraża się pochodną względem czasu momentu ilości ruchu z odwrotnym znakiem; a praca wyobrażalna siły bezwładności—przyrostem energii kinetycznej danego punktu ze znakiem odjemnym; obydwa te wnioski wyrazimy wzorami:

$$\overline{M}_B=-\frac{d}{dt}\,V m\overline{v}\,.\,\overline{r}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

oraz

$$dL_B=-d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

Jeżeli punkt jest nieswobodny, to dla siły bezwładności znajdziemy pewne fizyczne znaczenie; a mianowicie rzut jej na główną normalną do toru, lub do powierzchni, po której punkt się porusza, wyraża siłę parcia, jaką wywiera punkt ruchomy na dany tor czy też na daną powierzchnię; siłę tę, jako szczególny przypadek siły bezwładności, nazywają siłą odśrodkową.

Jeżeli np. punkt materyalny porusza się po danem kole ze stałą prędkością, to siła odporowa koła:

$$\overline{N}=m\overline{p},\ \text{a}\ \overline{B}=(-m\overline{p});\ \text{a więc:}\ \overline{B}=-\overline{N};$$

czyli siła odśrodkowa $\overline{B}$ jest siłą parcia, jaką wywiera punkt ruchomy na tor, po którym się porusza. Z tego widzimy, że siły bezwładności punktu nieswobodnego, będącego w ruchu, są miarą statycznego działania tego punktu na tor lub na powierzchnię, po której punkt się porusza.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu materyalnego, poruszającego się po kole pod działaniem siły ciążenia, gdy koło jest w ruchu postępowym w swej płaszczyźnie. Równanie statyczne ruchu tego punktu wyrazimy wzorem:

$$\overline{Q}+\overline{N}+\overline{B}=0;\ \text{w którym}\ \overline{B}=(-m\overline{p});$$

Równanie to wypowiemy: siła ciążenia punktu siła odporowa toru i siła bezwładności punktu są w równowadze w każdem miejscu toru; gdy punkt wyobrazimy sobie w spoczynku w danem miejscu koła.

Dla wyrażenia równowagi tych sił możemy stosować wszystkie sposoby, wyłożone w statyce. Wyraźmy np. warunek tej równowagi zasadą momentów sił; porów. § 107-my tomu I-go, a napiszemy:

$$M_Q+M_N+M_B=0.$$

Obierzmy biegun momentów w środku koła, a po podstawieniu odpowiednich wartości, porów. rys. 33-ci str. 89 oraz wzór 179-ty; otrzymamy równanie:

$$Ql \sin \sigma + \left[- \frac{d}{dt} (mvl) \right] = 0;$$

które po przekształceniu da równ. 103-cie.

Można również wyrazić warunek równowagi zasadą pracy przystosowanej, porów. § 116-ty oraz wzór 193-ci tomu I-go; a napiszemy wtedy.

$$d L_Q + d L_N + d L_B = 0;$$

po podstawieniu zaś odpowiednich wartości mamy:

$$Q d y - d (\tfrac{1}{2} m v^2) = 0;$$

i wreszcie po scałkowaniu od y_0 do y, lub od σ_0 do σ, i od 0 do v, otrzymamy wzór 106-ty.

Przykłady te mają na celu wykazać różnorodność sposobów rozumowania, doprowadzających do równań ruchu.

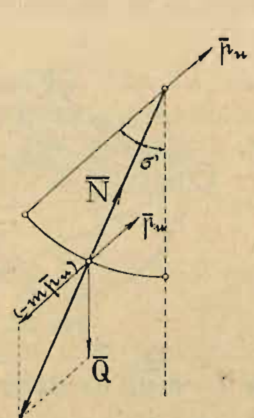
Jeżeli punkt jest w ruchu złożonym, to można przyjąć, że jego przyśpieszenie właściwe jest złożone z kilku przyśpieszeń; jeżeli przeto przyłożymy do tego punktu siły bezwładności, równe iloczynom z masy punktu i odwróconych przyśpieszeń, wynikających z pewnego rodzaju ruchu, to możemy uważać, że dany punkt jest pozbawiony tego rodzaju ruchu; lecz wykonywa on pozostałe ruchy, wskazane warunkami danego zadania. W ten sposób metoda d'Alembert'a daje sposób rozpatrywania właściwości **poszczególnych ruchów**, z jakich złożony jest ruch danego punktu.

Rozpatrzmy dla przykładu ruch punktu ciężkiego po kole, będącym w ruchu postępowym jednostajnie przyśpieszonym we własnej płaszczyźnie; ruch ten rozpatrywaliśmy już metodą dynamiczną w § 68-ym; ażeby zaś zastosować do tych rozpatrywań metodę d'Alembert'a, wyobraźmy sobie iloczyn $(-m\overline{p}_u)$ jako siłę i przyłóżmy ją do punktu ruchomego, a tor uważajmy za pozostający w spoczynku; wtedy napiszemy równanie:

$$[\overline{Q} + (-m\overline{p}_u)] + \overline{N} = m\overline{p}_w;$$

które przedstawia ruch wahadła zwykłego, poddanego stałej sile:

$$[\overline{Q} + (-m\overline{p}_u)] \quad \ldots\ldots \quad (181)$$



Rys. 55.

Kierunek przeto tej siły jest kierunkiem równowagi względnej danego wahadła. Łatwo spostrzedz, że wzór powyższy, z którego mamy wyznaczyć kierunek szukanej równowagi względnej, jest wyrazem wektorowym równania algebraicznego 154-ego. Ruch przeto względny wahadła, będącego w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, jest ruchem wahadłowym około położenia równowagi, którego kierunek jest równoległy do kierunku wektora $(\overline{Q} - m\overline{p}_u)$.

Jeżeli tor jest w ruchu obrotowym; to w celu obliczenia względnego ruchu danego punktu materyalnego; należy przyłożyć do niego siłę:

$$\overline{B}_u = (- m\overline{p}_u); \text{ oraz siłę: } \overline{B}_c = (- 2m\,\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi});$$

a tor należy wyobrazić sobie pozostającym w spoczynku. Siły bezwładności łącznie z siłą ciężkości punktu oraz z siłą odporową toru, wywołują ten sam ruch punktu po danym torze, będącym w spoczynku, jaki wywołują siły zewnętrzne (bez sił bezwładności) po torze, obracającym się. Ażeby przeto obliczyć ruch względny punktu, pozostającego na torze ruchomym, należy do sił zewnętrznych oraz do sił odporowych dołączyć siły bezwładności $\overline{B}_u$ i $\overline{B}_c$ i obliczyć ruch punktu, będącego pod ich działaniem, po torze nieruchomym; do czego stosować można każde z twierdzeń, wyłożonych w rozdziałach poprzednich.

Ażeby np. unaocznić sobie ruch względny, opisany w przykładzie § 73-ciego, wyobraźmy sobie, że koło pozostaje w spoczynku, a do punktu ruchomego przyłożoną jest siła:

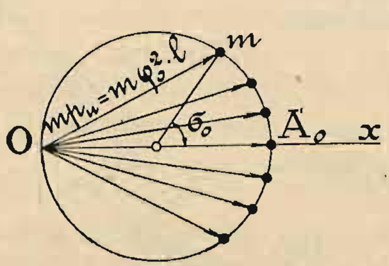
$$(- m\overline{p}_u), \text{ oraz siła } (- 2m\,\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi}_0);$$

a wtedy napiszemy równanie dynamiczne ruchu względnego:

$$\overline{N} + (- m\overline{p}_u) + (- 2m\,\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi}_0) = m\overline{p}_w;$$

które jest jednakowe z równ. 172-em; otrzymujemy przeto drogą tego rozumowania te same równanie, jakie otrzymaliśmy poprzednio; nadając inne znaczenie jego wyrazom.

Ruch punktu po kole tego przykładu wywołany jest siłami, posiadającemi składowe w kierunku stycznej do toru; siła przeto $\overline{N}$ i siła $(- 2m\,\mathrm{V}\overline{v}_w . \overline{\varphi}_0)$, rys. 52-gi, nie wpływają na ruch punktu po kole; a jedynie siła $(- m\overline{p}_u)$; po przyłożeniu przeto do punktu danego siły $(- m\overline{p}_u)$ uważać będziemy, że punkt znajduje się na kole nieruchomem i że działają na niego siły środkowe, wychodzące ze środka, znajdującego się w biegunie obrotu; siły te odpychają dany punkt siłą $m\varphi_0^2 l$; t. j. siłą proporcyonalną do odległości od tegoż bieguna, rys. 56-ty. Ruch przeto jaki wykonywa dany punkt pod działaniem tych sił po kole nieruchomem, będzie jednakowy z ruchem, jaki on wykona podczas obrotu koła. Równanie tego ruchu otrzymamy z rzutu siły $(- m\overline{p}_u)$ na styczną do koła; równanie to jest następujące:



Rys. 56.

$$(- m\overline{p}_u)_t = m p_{w,t};$$

z którego, po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy rów. 174-te.

Mając na uwadze działanie tych sił wytłomaczymy sobie statycznie dla czego np. w tym przykładzie punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości względnej na końcu średnicy, przechodzącej przez biegun, nieporuszy się; siła bowiem $(-m\overline{p_u})$ jest w tem miejscu toru prostopadłą do toru i nie jest w stanie wywołać ruchu. Jest to wynik, do którego doszliśmy poprzednio drogą analizy równania ruchu.

76. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej złożonego ruchu punktu materyalnego. W obliczeniach ruchu punktu po torze nieruchomym korzystaliśmy z zasady równowartości pracy sił i energii kinetycznej tego punktu; zasada ta dawała bezpośrednio związek pomiędzy prędkością punktu i położeniem jego na torze. Wskażemy obecnie sposób stosowania tej zasady do ruchu punktu po torze poruszającym się.

W tym celu wyobraźmy sobie dany tor (który jest w ruchu) pozostającym w spoczynku; a wzamian tego, w myśl metody d'Alembert'a, przyłóżmy do danego punktu siły:

$$\overline{B_u} = (-m\overline{p_u}); \text{ oraz } \overline{B_C} = (-2m\,\mathrm{V}\,\overline{v_w}\,\overline{\varphi});$$

w ten sposób sprowadzimy zadanie ruchu po torze, poruszającym się, do zadania ruchu punktu po torze nieruchomym, co da możność zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Przyrównamy przeto pracę tych sił, jaką one wykonują podczas cząstkowego przesunięcia punktu po tym torze, do wartości przyrostu energii kinetycznej ruchu względnego; którą określimy wzorem:

$$\tfrac{1}{2}\, m v^2_w,$$

i nazwiemy energią kinetyczną ruchu względnego.

Pracę cząstkową dL_P siły zewnętrznej (P) obliczymy z iloczynu rzutu tej siły na styczną do toru w danem jego miejscu i z cząstki tego toru; t. j. obliczymy ją ze wzoru wektorowego:

$$dL_P = \overline{P} \,.\, d\overline{s_w}.$$

w którym $d\overline{s_w}$ oznacza przesunięcie punktu po torze względnym; lub też obliczymy ją ze wzoru rzutów siły i przesunięciu na osi prostokątne ξ, η, ζ, sztywno związane z torem poruszającym się (porów. wzór 144-ty lub 158-my tomu I-ego; wzór ten jest nast.:

$$dL_P = P_\xi \,.\, d\xi + P_\eta \,.\, d\eta + P_\zeta \,.\, d\zeta.$$

Praca cząstkowa siły odporowej podczas przesunięcia punktu po torze względnym, o ile nie uwzględniamy tarcia, równa się zeru.

Pracę siły odśrodkowej $\overline{B_u}$ obliczymy w każdem miejscu toru, jeżeli znany jest ruch tego toru; pracę te oznaczymy literą L_u.

Praca wreszcie siły $\overline{B_C}$ (Coriolisa) równa się w danym razie zeru; kierunek jej bowiem jest prostopadły do kierunku prędkości względnej, a więc jest prostopadły do przesunięcia punktu po torze poruszającym się.

Zasadę przeto równowartości pracy i energii kinetycznej ruchu względnego wyrazimy następującem równaniem:

$$dL_p + dL_u = d(\tfrac{1}{2}\,mv^2_w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (182)$$

które napiszemy po dodaniu wszystkich tych prac cząstkowych, porów. § 23, w postaci podobnej do postaci równ. 72-ego tego tomu:

$$L_{pA}^{B} + L_{uA}^{B} = \tfrac{1}{2}\,mv^2_{w,B} - \tfrac{1}{2}\,mv^2_{w,A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

Równanie to wypowiemy w następujący sposób: praca sił zewnętrznych i praca sił odśrodkowych, podczas przesunięcia punktu po torze, będącym w ruchu, równa się przyrostowi energii kinetycznej względnego ruchu punktu, poruszającego się z miejsca A do miejsca B danego toru.

W szczególnym przypadku; jeżeli ruch toru jest obrotowy o niezmiennej prędkości $\overline{\varphi}_0$; to siła:

$$\overline{B}_u = m\overline{h}\varphi_0^2;$$

gdzie h oznacza odległość punktu od osi obrotu ze zwrotem dodatnym, zgodnym z powiększającą się wartością tej odległości. Siła ta, zwana siłą odśrodkową normalną (często—wprost siłą odśr.), posiada funkcyę sił, i praca jej powstaje tylko wtedy, gdy punkt oddala się od osi obrotu lub zbliża się do niej; praca przeto tej siły:

$$L_{u,A}^{B} = \int_{h_A}^{h_B} mh\varphi^2_0\,.\,dh = \tfrac{1}{2}\,m\varphi^2_0(h_B^2 - h_A^2);$$

gdzie litery h_A i h_B oznaczają odległości punktu ruchomego od osi obrotu.

Jeżeli przytem siły zewnętrzne, działające na dany punkt, posiadają funkcyę sił, wyrażoną spółrzędnemi, określającemi położenie punktu względem danego toru; —t. j. spółrzędnemi względnemi (np. ξ, η, ζ), to napiszemy równanie pracy w postaci:

$$(U_B - U_A) + \tfrac{1}{2}\,m\varphi_0^2\,(h_B^2 - h_A^2) = \tfrac{1}{2}\,mv^2_{w,B} - \tfrac{1}{2}\,mv^2_{w,A} \quad \ldots\ldots \quad (184)$$

Jeżeli przeto mamy obliczyć prędkość względną punktu w danem miejscu toru ruchomego, to równanie powyższe daje bezpośrednio możność tego obliczenia.

Obliczymy np. prędkość punktu ciężkiego, poruszającego się w rurce, doskonale wewnątrz gładkiej, obracającej się około osi pionowej; jakieśmy opisali w przykładzie na str. 138-ej, i przedstawili na rys. 50-tym. Przyjmijmy np., że punkt ruchomy otrzymał w miejscu z_1 danej osi prędkość $v_{w,1}$, to, po przejściu do miejsca z, dozna on odpowiedniego przyrostu energii kinetycznej, a zasada pracy da równanie:

$$-\,mg\,(z - z_1)\,.\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\,m\varphi_0^2\,(x^2 - x^3_1) = \tfrac{1}{2}\,mv^2_w - \tfrac{1}{2}\,mv^2_{w,1},$$

i po podstawieniu:

$$x = z\sin\alpha, \text{ oraz } x_1 = z_1\sin\alpha,$$

otrzymamy równanie, z którego obliczyc można v_w w każdem miejscu z toru ruchomego.

Z równania przeto 184-tego wynika: gdy siły zewnętrzne posiadają funkcyę sił (w spółrzędnych względnych) i gdy tor jest w ruchu obrotowym jednostajnym, to prędkość względna punktu ruchomego zależy tylko od jego położenia względem ruchomego układu odniesienia, a nie zależy od postaci toru po jakim on przebył z jednego położenia do drugiego.

W przypadku, gdy tor ruchomy jest płaski i obraca się w płaszczyźnie poziomej około bieguna, obranego na tejże płaszczyźnie, to praca siły ciążenia punktu podczas jego ruchu równa się zeru; przyrost więc jego energii kinetycznej zależy tylko od początkowej jej wartości i od odległości punktu od bieguna; a nie zależy od postaci toru, po jakim on przebył z początkowego położenia do położenia, w którem chcemy obliczyć jego prędkość; a więc nie zależy również od postaci geometrycznej obracającego się toru.

9. Ruch względny punktu materyalnego.

A. Kinematyka względnego ruchu punktu.

77. Określenia i twierdzenia. W celu unaocznienia ruchu względnego wyobraźmy sobie całą przestrzeń wypełnioną punktami matematycznymi, których wzajemne odległości niezmieniają się podczas naszych rozpatrywań. Przyjmijmy następnie, że zbiór tych punktów może przenikać bez oporów inne takież zbiory punktów; jak również każdy oddzielny punkt, nie należący do takiego zbioru, może również przenikać taki zbiór.

Jeżeli w takim zbiorze pewien punkt, nie należący do tego zbioru, zmienia swe położenie, to pokrywać się on będzie kolejno z różnymi jego punktami; geometryczne miejsce tych punktów nazwaliśmy już w kinematyce torem, a cały zbiór, w którym punkt dany wyznacza ten tor, nazwaliśmy **układem odniesienia** ruchu danego punktu.

Ze zmiany położenia punktu w danym układzie odniesienia nie jest możliwem sądzić o tem, czy punkt się porusza, — czy też układ; ażeby zaś o tem módz sądzić, należy odnieść tak ruch punktu jak i ruch danego układu do innego układu odniesienia.

Układy odniesienia bogą być w spoczynku, lub też w ruchu względem innego układu, który, dla uproszczenia rozpatrywań, przyjąć można za nieruchomy; choć zresztą i ten układ może być w ruchu względem innego—trzeciego układu i t. d.

Układ, który przyjmiemy za nieruchomy, nazywać będziemy **bezwzględnym**; a prędkości i przyśpieszenia z jakiemi punkt dany porusza się w takim układzie— **bezwzględnemi**; wielkości te oznaczymy litetami $\overline{v_b}$ i $\overline{p_b}$. Dotychczas mieliśmy tylko z temi wielkościami do czynienia, gdyż przyjmowaliśmy układ odniesienia za nieruchomy.

Przypomnieć należy, że chwilowy ruch układu odniesienia, jako ruch nieograniczonej bryły sztywnej, jest ściśle określony, porów. § 73-ci tomu I-ego, wektorem chwilowej prędkości kątowej $\overline{\varphi}$ oraz wektorem prędkości postępowej $\overline{v}$, i że te wektory należy wyobrazić sobie sztywno związanymi z układem, przyjętym za nieruchomy.

Jeżeli pewien punkt zakreśla tor w układzie odniesienia, będącym w ruchu względem innego układu, to nazwiemy go torem względnym; a stosunek długości cząstki łuku, łączącego dwa nieskończenie blizkie położenia tego punktu, do czasu w jakim on przebył tę cząstkę, nazwiemy prędkością względną; i w ten że sposób wprowadzimy pojęcie przyśpieszenia względnego: wielkości te oznaczymy literami $\overline{v}_w$ i $\overline{p}_w$.

Z tych rozpatrywań wynika, że może zajść taki szczególny przypadek, w którym dany punkt pozostaje w spoczynku względem tak zwanego układu bezwzględnego; a względem innego układu będzie w ruchu; przypadek ten nastąpi, gdy ten drugi układ będzie w ruchu względem układu bezwzględnego; przypadek ten wyrazimy nast. wzorami:

$$\overline{v}_b = 0; \text{ a } \overline{v}_w \gtrless 0.$$

Przez ruch przeto punktu w pewnym układzie odniesienia, rozumieć należy wogóle zmianę jego położenia w tym układzie, nie wchodząc w to, czy punkt jest w ruchu, a układ w spoczynku, czy też punkt jest w spoczynku, a układ w ruchu; czy też wreszcie punkt i układ są jednocześnie w ruchu. Stan ruchu tak punktu jak i układu w tych przypadkach odnosimy do innego układu, który w danej chwili przyjmujemy za nieruchomy,—za t. zw. bezwzględny.

Tory zatem i wogóle ruchy, jakie zakreśla dany punkt w pewnym układzie, zależą od ruchu tego punktu i od ruchu układu odniesienia względem układu nieruchomego. W szczególnym przypadku, gdy układ ruchomy pozostaje w spoczynku względem innego, przyjętego za nieruchomy — za bezwzględny; wtedy tor bezwzględny i względny tego punktu wzajemnie się zlewają; a prędkości i przyśpieszenia tego punktu są w każdej chwili jednakowe w obydwóch układach.

Z tych określeń wyprowadzić można dwa następujące bardzo ważne dla naszych rozpatrywań twierdzenia:

1) ruch punktu względem układu, będącego w ruchu, nie zmieni się, jeżeli udzielimy jednocześnie układowi oraz punktowi pewnego wspólnego przesunięcia. W celu unaocznienia sobie tego wniosku, wyobraźmy sobie, że zatrzymujemy chwilowo ruch układu odniesienia oraz ruch punktu, i nadajemy układowi pewnego dowolnego przesunięcia, niemającego nic wspólnego z ruchem układu i punktu; wskutek czego miejsce układu, w którym znajdował się w danej chwili punkt ruchomy, oddali się od tego punktu; ażeby zaś zatrzymać punkt ruchomy w tem samem miejscu danego układu, w którem znajdował się przed jego przesunięciem, nadajmy również temu punktowi takie same przesunięcie, jakiego doznało odnośne miejsce układu wskutek jego przesunięcia. Jeżeli np. miejsce układu, w którem znajduje się w danej chwili punkt ruchomy, wskutek pewnego przesunięcia całego układu, dozna przesunięcia $\triangle\overline{s}$; to należy punktowi ruchomemu, ażeby pozostawał on w temże miejscu układu odniesienia, nadać również takie same przesu-

nięcie $\Delta \bar{s}$. Jeżeli np. obrócimy dany układ o pewien dowolny kąt około dowolnie obranej osi, to i punkt ruchomy, ażeby pozostał on w tem samem miejscu danego układu, obrócić należy około tejże osi o tenże kąt. Przez takie jednoczesne przesunięcie układu i punktu ruchomego zmieniamy co prawda położenie punktu i układu względem innego układu,—bezwzględnego; t. j. wogóle zmieniamy łącznie ruch układu i punktu, lecz nie zmieniamy położenia danego punktu względem układu ruchomego.

2) ruch punktu względem poruszającego się układu niezmieni się, jeżeli wyobrazimy sobie układ ten w spoczynku, a punktowi nadamy w tejże chwili ruch odwrotny, jaki posiadało **miejsce**, w którem on się znajdował. Ażeby tego dowieść, wybierzmy z pomiędzy dowolnych przesunięć, jakie możemy nadać jednocześnie ruchomemu układowi odniesienia i punktowi danemu, przesunięcie, które jest równe, lecz przeciwne co do zwrotu, przesunięciu, jakie posiadał w danej chwili układ ruchomy; przez taki ruch układ ruchomy pozostanie w spoczynku; a punkt ruchomy będzie posiadał dwa ruchy: ruch, który już posiadał, t. j. — ruch bezwzględny; oraz ruch, jaki posiadało w danej chwili miejsce, w którem się on znajdował, lecz z przeciwnym zwrotem. Ażeby punktowi danemu udzielić tego ruchu, wyobrazimy sobie, że jest on sztywno połączony z układem bezwzględnym, i temu układowi razem z tym punktem nadamy ruch przeciwny ruchowi układu ruchomego.

Jeżeli np. układ ruchomy jest chwilowo w ruchu postępowym o prędkości $\bar{v}$, a punkt posiada pewien ruch, określony względem układu bezwzględnego; to wyobraźmy sobie poruszający się układ w spoczynku, a układ bezwzględny razem z punktem w ruchu postępowym o prędkości $(-\bar{v})$. Jeżeli zaś układ ruchomy ma chwilową prędkość obrotową $\bar{\varphi}$, to, po jednoczesnem nadaniu układowi bezwzględnemu, a więc i punktowi prędkości $(-\bar{\varphi})$, układ ruchomy pozostanie w spoczynku, a punkt nie zmieni swego ruchu **względem tego układu**. Gdy przeto nadamy układowi bezwzględnemu, z którym związany jest tor bezwzględny, ruch odwrotny ruchowi, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy; wtedy ruch punktu będzie ruchem wypadkowym: z ruchu punktu po torze bezwzględnym i z ruchu, jaki posiada w danej chwili układ ruchomy, lecz z przeciwnym zwrotem. Tę właściwość ruchów nazwać można „przemiennością ruchów"; (Dualismus, Reciprocität).

Prawo przeto przemienności ruchów pozwala sprowadzić zadanie obliczenia ruchu danego punktu względem poruszającego się układu odniesienia do obliczenia ruchu złożonego tegoż punktu. Ruch przeto, jaki zakreśli dany punkt w ruchomym układzie odniesienia, może być uważany za ruch złożony; który rozpatrywaliśmy w § 92 i 93-cim tomu I-go.

Wzory przeto ruchu punktu w układzie, będącym w ruchu, wyprowadzimy bezpośrednio ze wzoru 71-ego i 72-ego tomu I-ego jako ze wzorów, wyrażających ruch wypadkowy, gdy zważymy, że tor ruchomy ruchu złożonego, nazwany tam względnym w rozpatrywaniach tego działu, jest bezwzględnym; jest on bowiem właściwie nieruchomym, a wyobrażamy go sobie tylko na zasadzie prawa przemienności ruchów — ruchomym; a ruch, który w ruchu złożonym nazwaliśmy bezwzględnym inaczej wypadkowym, jest w tych rozpatrywaniach ruchem względnym; ruch wreszcie, któryśmy w tamtych rozpatrywaniach nazywali unoszącym, w tych rozpatrywaniach jest odwrotnym ruchem układu ruchomego.

Po zastąpieniu przeto w równaniach tomu I-ego, wielkości:

$$\overline{v}_b \text{ przez } \overline{v}_w,\ \overline{v}_w \text{ przez } \overline{v}_b,\ \overline{v}_u \text{ przez} (-\overline{v}_u), \text{ oraz}$$

$$\overline{p}_b \quad " \quad \overline{p}_w,\ \overline{p}_w \quad " \quad \overline{p}_b,\ \overline{p}_u \quad " \quad \pm \overline{p}_u,\ \overline{\varphi} \text{ przez } (-\overline{\varphi}),$$

otrzymamy szukane wzory ruchu wzgędnego:

$$\overline{v}_w = \overline{v}_b - \overline{v}_u, \qquad (185)$$

$$\overline{p}_w = \overline{p}_b \mp \overline{p}_u - 2\,\mathrm{V}\overline{v}_b\overline{\varphi}. \qquad (186)$$

Dwoisty znak przyśpieszenia unoszącego ($\mp \overline{p}_u$) oznacza, że zwrot przyśpieszenia nie zawsze się zmienia, gdy odwraca się zwrot ruchu układu. Jeżeli np. układ poruszający się jest w ruchu postępowym; to ze zmianą zwrotu ruchu następuje zmiana zwrotu przyśpieszenia, i w tym razie bierzemy ($-\overline{p}_u$); jeżeli zaś układ poruszający się był w ruchu obrotowym; to zmiana zwrotu obrotu niewpływa na znak przyśpieszenia; w danym bowiem razie przyśpieszenie jest zawsze dośrodkowe niezależnie od zwrotu obrotu.

Przyjmijmy np. że układ nieruchomy jast sztywno związany z gwiazdami stałemi; wtedy ruch bezwzględny każdej gwiazdy stałej wyrazi się wzorem:

$$\overline{v}_b = 0; \text{ a więc i } \overline{p}_b = 0;$$

a ruch jej w układzie, obracającym się np. z ziemią, wyrazimy wzorami:

$$\overline{v}_w = -\overline{v}_u; \quad \overline{p}_w = +\overline{p}_u.$$

A ponieważ przyśpieszenie unoszące jest zwrócone ku osi obrotu i $= h\varphi^2$; przeto każda gwiazda stała zakreśla w przestrzeni, związanej z ziemią, koło ruchem odwrotnym ruchowi unoszącemu. Zrozumiałem jest, że do tegoż wniosku dojść można bezpośrednio, stosując zasadę przemienności ruchów.

Równ. 186-te można jeszcze przekształcić na następujące. Podstawmy w równanie, odnoszące się do ruchu obrotowego układu, rów. 186-te z ($+\overline{p}_u$):

$$\overline{v}_b = \overline{v}_w + \overline{v}_u,$$

a otrzymamy, po rozwiązaniu nawias, równ. nast.:

$$\overline{p}_w = \overline{p}_b + \overline{p}_u - 2\,\mathrm{V}\overline{v}_w\overline{\varphi} - 2\,\mathrm{V}\overline{v}_u\overline{\varphi};$$

a ponieważ:

$$\mathrm{V}\overline{v}_u\overline{\varphi} = \overline{p}_u;$$

przeto mamy:

$$\overline{p}_w = \overline{p}_b - \overline{p}_u - 2\,V\,\overline{v}_w\overline{\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (187)$$

Jest to równanie, które stosować można tak do postępowego, jak i do obrotowego ruchu układu; przedstawia ono jednakże tę niedogodność rachunkową, że po obydwóch stronach są niewiadome w postaci przyśpieszenia i prędkości ruchu względnego.

78. Przykład. Punkt materyalny jest swobodnie wyrzucony z powierzchni ziemi z prędkością $\overline{v}_{b,0}$; wyznaczyć tor, jaki on nakreśli na płaszczyźnie, poruszającej się w płaszczyźnie jego toru bezwzględnego ruchem postępowym z prędkością stałą $\overline{c}$; nie uwzględniając oporu powietrza, jakiego doznaje punkt podczas swego ruchu.

Wobec tego, że zjawisko tego ruchu jest krótkotrwałe i odbywa się na niewielkim obszarze, przyjmiemy, że układ bezwzględny (kinetyczny) jest sztywno związany z bryłą ziemską; przyjmiemy przeto, że bezwzględny ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek początkowej prędkości $\overline{v}_{b,0}$ i że tor jego jest parabolą, której osi sprzężone posiadają kierunki, wyznaczone kierunkami wektorów $\overline{g}$ i $\overline{v}_{b,0}$. Inny jednakże jest tor, jaki zakreśli ten punkt na płaszczyźnie, poruszającej się. Ażeby go obliczyć zastosujemy wzór:

$$\overline{v}_w = \overline{v}_b - \overline{c};$$

skąd obliczymy prędkość względną w początku ruchu:

$$\overline{v}_{w,0} = \overline{v}_{b,0} - \overline{c}.$$

W tenże sposób, ponieważ $\overline{g}$ jest przyśpieszeniem bezwzględnem; i zgodnie z założeniem, co do ruchu układu odniesienia:

$$\overline{p}_u = 0; \text{ oraz } \varphi = 0; \text{ mamy:}$$

$$\overline{p}_w = \overline{g}.$$

Przyśpieszenie przeto ruchu względnego danego punktu jest równe przyśpieszeniu ziemskiemu; a więc jest ono stałe i pionowo skierowane; tor przeto względny, t. j. tor, jaki zakreśli punkt dany na płaszczyźnie poruszającej się, jest parabolą o kierunkach osi sprzężonych, wyznaczonych kierunkami wektora $\overline{g}$ i wektora $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})$. Pozostawia się czytelnikowi nakreślić tę parabolę.

W celu zestawienia równania ruchu względnego tego punktu, zastosujemy układ spółrzędnych wektorowych i w tym celu przeprowadzimy z miejsca wyjścia punktu promienie wodzące do kolejnych położeń punktu, a równanie różniczkowe ruchu przedstawi się w tych spółrzędnych:

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{g}.$$

Pierwsza całka tego równania (wobec niezmienności wektora $\overline{g}$) dla granic od $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})$ do $\frac{d\overline{r}}{dt}$ oraz od 0 do t jest nast.:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} - (\overline{v}_{b,0} - \overline{c}) = \overline{g}\,t,$$

druga zaś całka dla granic od 0 do $\overline{r}$ i od 0 do t:

$$\overline{r} = (\overline{v}_{b,0} - \overline{c})\,.\,t + \tfrac{1}{2}\,\overline{g}\,t^2.$$

Z równania tego wyznaczymy na płaszczyźnie, poruszającej się, w każdej chwili t położenie punktu, gdy w miejscu początkowego położenia punktu ruchomego wystawimy wektor $(\overline{v}_{b,0} - \overline{c})\,t$ i dodamy do niego wektor $\frac{1}{2}\,\overline{g}\,t^2$; można do tych rozpatrywań zastosować rys. 14-ty. Zrzutowawszy następnie powyższe równanie wektorowe np. na osi ukośnokątne, równolegle do kierunków $(\overline{v}_0 - \overline{c})$ i do $\overline{g}$, otrzymamy algebraiczne równanie ruchu, wyrażone obranemi spółrzędnemi.

79. Przykład. Rozpatrzmy obecnie ruch, bez uwzględnienia oporów, punktu materyalnego, upuszczonego np. z pewnej wysokości w polu sił ciążenia względem układu, sztywno związanego z bryłą ziemską; uwzględniwszy obrót ziemi tylko około własnej osi, z prędkością kątową $\overline{\varphi}$. Pominięcie w tem obliczeniu ruchu ziemi około słońca pozostaje w danym razie bez wpływu na wynik obliczenia; zjawisko bowiem spadania punktu jest zbyt krótkotrwałe w porównaniu z okresem rocznego obiegu ziemi.

Przyjmiemy w tych rozpatrywaniach, że kinetyczny układ odniesienia jest sztywno związany ze słońcem; punkt przeto materyalny, swobodnie puszczony bez prędkości **względem ziemi**, posiada w danej chwili prędkość bezwzględną $\overline{v}_{b,0}$, równą prędkości unoszącej miejsca, z którego został on upuszczony; t. j.

$$v_b = h\varphi;$$

i jest zwróconą ku wschodowi; litera h oznacza promień równoleżnika tego miejsca.

Gdyby na ten punkt nie działała siła ciążenia, wtedy punkt, będąc oswobodzony od połączeń z ziemią, zakreślił by w układzie kinetycznym, w myśl przyjętego prawa bezwładności, tor prostolinijny ruchem jednostajnym, którego kierunek byłby styczny do równoleżnika w miejscu, w którem znajdował się ten punkt w chwili upuszczenia. Ruch ten jednakże byłby inny w przestrzeni, obracającej się razem z ziemią. Ażeby ten ruch obliczyć, wyobraźmy sobie bryłę ziemską zatrzymaną w swym obrocie, natomiast prostę, po której punkt przebiega z prędkością v_b, obracającą się z prędkością $(-\overline{\varphi})$; tor wtedy, jakiby zakreślił dany punkt w tym układzie, i ruch, z jakimby on go przebiegł, byłby taki sam, jaki by wykonał, gdyby ziema obracała się względem układu kinetycznego, a punkt zakreślał tor prostolinijny w tymże układzie. Nietrudno przedstawić sobie, że tor ten jest pewną linią spiralną, leżącą w płaszczyźnie równoleżnika początkowego położenia punktu. Obliczenie tego ruchu jest zbliżone do obliczenia, przytoczonego w przykładzie na str. 125-ej tomu I-go; z tą tylko zmianą, że biegun obrotu O obrać należy nie na prostej, obracającej się, jak to uczyniono w tym przykładzie, lecz na odległości h od niej, t. j. na odległości promienia równoleżnika początkowego położenia punktu.

Rozpatrywania te jak i wyniki ich będą nieco odmienne, gdy przyjmiemy, że upuszczony punkt jest przyciągany, w myśl hypotezy Newtona, przez bryłę ziemską. Ażeby obliczyć ten ruch, przyjmiemy, że siły przyciągania zbiegają się w jednym punkcie, w tak zwanym środku ziemi; na punkt dany, posiadający prędkość początkową:

$$v_{b,0} = h\varphi,$$

działają przeto siły środkowe, odwrotnie proporcyonalnie do odległości punktu ruchomego od środka przyciągania.

Ruch takiego punktu rozpatrywaliśmy już w § 33-cim tego tomu i obliczyliśmy, że tor jego jest płaski i przedstawia jedną z krzywych stożkowych; w której ognisku leży środek przyciągania. W § 35-tym zwróciliśmy uwagę na tę okoliczność, że w badaniach ruchów ziemskich na niewielkich obszarach można przyjąć ten tor za parabolę, a siły przyciągające za stałe. Wobec tego przyjmiemy, że tor bezwzględny punktu materyalnego, swobodnie upuszczonego z pewnej wysokości powierzchni ziemi, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się w początkowem położeniu punktu, oś główna zlewa się z kierunkiem przyciągania ziemskiego, a płaszczyzna tej paraboli jest nieruchomą w przestrzeni kinetycznej t. j. w przestrzeni, sztywno związanej ze słońcem.

Ażeby następnie obliczyć tor i ruch po nim, jaki dany punkt wykona w przestrzeni, sztywno związanej z obracającą się bryłą ziemską, wyobraźmy sobie ziemię pozostającą w spoczynku, a punkt — w ruchu obrotowym $(-\overline{\varphi})$; punkt wtedy zakreśli w przestrzeni, sztywno związanej z ziemią, którą narazie wyobrażamy sobie nieruchomą, pewien tor i wykona ruch taki, jaki by wykonał w przestrzeni obracającej się. Ogólne równanie tego ruchu jest nast.:

$$\overline{p}_w = \overline{p}_b + \overline{p}_u - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_b\overline{\varphi};$$

które można uprościć, mając na uwadze, pewne liczbowe stosunki wartości, odnoszących się do obrotu ziemi. Mianowicie, wziąwszy pod uwagę, że największa wartość przyśpieszenia unoszącego równa się, por. wzór. 176-ty:

$$p_u = 0{,}034 \text{ m./sek}^2.,$$

pominiemy ją wobec wartości przyśpieszenia ziemskiego, i przyśpieszenie bezwzględne przyjmiemy:

$$\overline{p}_b \simeq \overline{g};$$

wobec czego otrzymamy równanie:

$$\overline{p}_w = \overline{g} - 2\,\mathrm{V}\,\overline{v}_b\overline{\varphi}.$$

Wielkości, stojące po prawej stronie tego równania, są znane; prędkość bowiem $\overline{v}_b$ możemy obliczyć z czasu t; zastąpiwszy przeto to równanie, równaniami algebraicznemi, otrzymamy po ich scałkowaniu szukane równania ruchu, jaki punkt dany wykona w przestrzeni obracającej wraz z ziemią.

Wartość prędkości bezwzględnej:

$$v_b = \sqrt{v^2_{b,0} + (g\,t)^2};$$

lecz już po upływie jednej sekundy wartość $v_{b,0}$ staje się bardzo małą w porównaniu z wartością $g\,t$; przyjmiemy przeto z pewnem przybliżeniem:

$$\overline{v}_b \cong \overline{g}\,t; \text{ a więc } v_b \cong g\,t;$$

a po podstawieniu w powyższe równanie otrzymamy:

$$\overline{p}_w = \overline{g} - 2\,t\,\mathrm{V}\,\overline{g}\,\overline{\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

Z równania tego wynika, że dwa wektory $\overline{g}$ i $2\,\mathrm{V}\,\overline{g}\,\overline{\varphi}$ leżą w jednej płaszczyźnie, — w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek bezwzględnej prędkości początkowej. Ruch przeto względny danego punktu, wobec postawionych założeń ($\overline{p}_u \cong 0$ oraz $\overline{v}_b \cong \overline{g}t$), jest płaski. W celu zastawieniu równań jego ruchu; przeprowadźmy w płaszczyźnie ruchu przez miejsce wyjścia danego punktu oś ξ z kierunkiem i zwrotem zgodnym z kierunkiem przyśpieszenia $\overline{g}$ i oś η – zgodnie z kierunkiem wektora $\overline{v}_{b,0}$.

Rzuty równania 188-ego na obrane osi dają następujące równania algebraiczne:

$$\frac{d^2\xi}{d\,t^2} = g; \quad \frac{d^2\eta}{d\,t^2} = -\,2\,g\,t\,\varphi\cos\lambda.$$

Wprowadziwszy początkowe warunki ruchu dla $t = 0$; $\xi = 0$; $\eta = 0$:

$$\frac{d\xi}{d\,t} = 0; \quad \frac{d\eta}{d\,t} = v_w = 0;$$

otrzymamy po scałkowaniu równania ruchu:

$$\xi = \frac{1}{2}\,g\,t^2; \ \eta = \frac{1}{3}\,g\cos\lambda\,.\,t^3;$$

i równanie toru:

$$\eta = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2g}}\cos\lambda\,.\,\varphi\,.\,\xi^{\frac{3}{2}}.$$

Swobodnie przeto z pewnej wysokości upuszczony ciężar zakreśli tor w układzie, obracającym się razem z ziemią, nie prostolinijny lecz krzywolinijny;

i upadnie na odległości η od miejsca, w jakim pion, przeprowadzony z miejsca wyjścia punktu, spotka odnośny poziom. Doświadczalnie znaleziono:

$$\text{dla } \xi = 158{,}5\ m;\ \eta = 28{,}4\ {}^{m}/_{m};$$

a ze wzoru powyższego wypada:

$$\eta = 27{,}5\ {}^{m}/_{m}.$$

Zgodność tych wyników stwierdza założenie, że układ kinetyczny można uważać z dostateczną dokładnością dla zjawisk ziemskich za połączony sztywno ze słońcem i gwiazdami stałemi.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ TOMU DRUGIEGO.

Część druga zawierać będzie dynamikę brył materyalnych.