Jeżeliby torem punktu były szyny, to siła dośrodkowa zostałaby udzielona danemu punktowi za pośrednictwem szyn; wtedy parcie szyn na punkt materyalny jest siłą, która nadaje mu ruch krzywolinijny.

4. Zasady szczególne dynamiki.

22. **Cel tych zasad.** Przytoczone na początku poprzedniego rozdziału dwa prawa zasadnicze: prawo bezwładności i prawo superpozycyi wystarczają zupełnie do określania właściwości ruchu punktu; a równanie dynamiczne, będące wyrazem tych praw, daje możność ujęcia tych właściwości w matematyczną formę. Dla ułatwienia jednakże określenia właściwości ruchu, jak również dla ułatwienia obliczeń, wyprowadzono z tych praw, inne prawa, zwane zasadami, które obejmują całe grupy zjawisk ruchu, i wyjaśniają ich przebieg. Zasady te wyrażają się pewnemi równaniami, wyprowadzonemi drogą przekształceń algebraicznych z przytoczonego równania dynamicznego; i wyrażającemi jedynie w sposób więcej poglądowy związki pomiędzy parametrami ruchu.

Zasady zatem, które tu wyłożymy nie wnoszą do naszych rozpatrywań żadnych nowych praw fizycznych, ani też nie dają równań algebraicznych, niezależnych od równania dynamicznego, a są tylko wyrazem w innej postaci tego równania.

Zasadami temi są:

zasada równowartości pracy sił i energii kinetycznej; oraz

zasada momentu ilości ruchu.

A. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej.

23. **Rozwinięcie tej zasady.** W tomie I-ym na str. 240-ej wyprowadziliśmy równanie 141-sze, wykazujące równowartość pracy siły, przyłożonej do punktu materyalnego, i przyrostu energii kinetycznej, jakiego ten punkt doznał podczas nieskończenie małego przesunięcia. Równanie to ma następującą postać:

$$P_t \, . \, ds = d\left(\tfrac{1}{2}\, m v^2\right);$$

P_t oznacza rzut siły na kierunek przesunięcia ds.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym punkt ruchomy, pod działaniem danych sił, zakreśli tor o skończonej długości. W tym celu dzielimy tor, jaki zakreśla punkt ruchomy, na cząstki ds, które uważać będziemy za cząstki prostolinijne; a pracę siły P_k wzdłuż k — tej cząstki toru wyrazimy, na zasadzie określeń, podanych w § 176-tym tomu I-ego, wzorem:

$$P_k \, . \, ds_k \, . \cos\,(P_k,\, ds_k);$$

sumę zaś tych prac, gdy punkt ruchomy przejdzie po pewnym torze ciągłym, z miejsca A do miejsca B, wyrazimy wzorem:

$$\int_A^B P_k \, . \, ds_k \cos(P_k, ds_k) ;$$

i wartość jej oznaczymy literą L_A^B.

Oznaczmy następnie prędkość punktu na początku k-tej cząstki toru przez v_{k-1}, a na jej końcu przez v_k, a wyrazimy przyrost energii kinetycznej wzdłuż tej cząstki wzorem:

$$\tfrac{1}{2} m v_k^2 - \tfrac{1}{2} m v_{k-1}^2 ;$$

przyrost zaś wzdłuż następnej $(k+1)$-ej cząstki wzorem:

$$\tfrac{1}{2} m v_{k+1}^2 - \tfrac{1}{2} m v_k^2 .$$

Gdy następnie dodamy wszystkie, w ten sposób utworzone, przyrosty energii kinetycznej, i gdy zważymy, że wartości energii kinetycznych w miejscach zetknięć się cząstek toru są wzajemnie równe, wtedy otrzymamy jako sumę tych przyrostów różnicę wartości energii kinetycznej punktu w końcowem i w początkowem jego położeniu; t. j. otrzymamy równanie:

$$L_A^B = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 , \qquad \qquad (72)$$

w którem v_B i v_A oznaczają prędkości w końcowem i początkowem położeniu punktu ruchomego. Równanie to jest jednakowe z rów. 142-ym tomu I-go; wyprowadziliśmy je tylko w tem miejscu drogą szczególnych rozważań, która nas objaśnia, dla czego wartości energii kinetycznej w pośrednich położeniach punktu nie wchodzą do tej sumy. Treść równania 72-ego wypowiedzieliśmy już w tomie I-ym, którą tu powtarzamy:

praca siły wzdłuż pewnej drogi równa się przyrostowi energii kinetycznej punktu, jakiego on doznał przy przejściu tej drogi.

Pracę sił wzdłuż pewnego toru, obliczymy wogóle, gdy znany będzie tor, jaki zakreśli dany punkt, oraz siły, występujące wzdłuż tego toru. Obliczenie zatem pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, podczas jego przejścia z jednego miejsca do drugiego, jest wogóle niemożliwe bez wskazania toru, po którym punkt przebiega.

W szczególnych jednakże przypadkach, które omówiliśmy w § 198-ym tomu I-go, a które spotykają się w wielu zjawiskach świata fizycznego, wartość pracy sił, przyłożonych do punktu ruchomego, zależy tylko od miejsca, w jakiem znajduje się punkt ruchomy i wyraża się funkcyą jego spółrzędnych; wartość ta jest zatem niezależną od postaci toru, po jakim przebiegł dany punkt pomiędzy dwoma położeniami, a zależy tylko od spółrzędnych krańcowych miejsc. W tych szczególnych przypadkach zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje bezpośredni związek pomiędzy prędkością punktu, a jego spółrzędnemi; t. j. daje pierwszą całkę równania dynamicznego, co również stwierdziliśmy, przy badaniu ruchu prostolinijnego. Obierzmy jako spółrzędne danego punktu np. spółrzędne prostokątne (x, y, z), to pracę cząstkową siły P w miejscu (x, y, z), podczas nieskończenie małego przesunięcia punktu, wyrazimy wzorem:

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz,$$

jeżeli zatem

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz = dU,$$

gdzie U jest funkcyą spółrzędnych, nie zawierającą czasu wyraźnie; wtedy otrzymamy równanie:

$$dU = d(\tfrac{1}{2} m v^2); \text{ lub jego całkę:}$$

$$U_B - U_A = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (73)$$

Funkcya U, którą nazwaliśmy w § 198-ym tomu I-go funkcyą sił, a odjemną jej wartość w § 200-ym — potencyałem sił, jest funkcyą spółrzędnych punktu ruchomego. Jeżeli daną jest np. funkcya $U(x, y, z)$, to dla każdego położenia (x_B, y_B, z_B) punktu ruchomego obliczymy wartość powyższej funkcyi, i tę wartość oznaczyliśmy literą U_B; a po podstawieniu tej wartości w równanie 73-cie obliczymy energię kinetyczną, jaką posiada dany punkt w tem miejscu. Lecz tę samą energię kinetyczną posiada punkt nietylko w miejscu (x^B, y^B, z_B), lecz we wszystkich miejscach przestrzeni, których spółrzędne czynią zadość równaniu:

$$U(x, y, z) = U_B.$$

Geometryczne miejsce tych punktów jest przeto powierzchnią, wyrażoną tem równaniem. Jeżeli funkcya sił jest jednowartościowa, to punkt ruchomy przebija tę powierzchnię w jakiemkolwiek jej miejscu z jedną i tą samą energię kinetyczną; a więc również z jedną i tą samą prędkością. Jest to wynik, któryśmy tutaj zdobyli drogą analizy algebraicznej, a do którego doszliśmy również w § 201 tomu I-go, drogą rozpatrywań właściwości powierzchni równych potencyałów.

Chociaż sposób wyprowadzenia równania równowartości pracy i energii kinetycznej, jaki stosowaliśmy w tomie I-ym, polega jedynie na przekształceniach algebraicznych, dowiedziemy jednakże w więcej krótki sposób, że równanie to może być wyprowadzone bezpośrednio z równania dynamicznego ruchu, bez żadnych dodatkowych określeń, drogą tylko przekształceń algebraicznych. W tym celu weźmiemy za podstawę naszych rozpatrywań równanie dynamiczne w postaci wektorowej:

$$\overline{P} = m \frac{d\overline{v}}{dt};$$

a po zrzutowaniu jego na styczną do toru, otrzymamy:

$$P_t = m \frac{dv}{dt}.$$

Można było również wziąć bezpośrednio to równanie: za podstawę naszych rozpatrywań, jest ono bowiem równaniem dynamicznem sił stycznych do toru.

Równanie to pomnożymy przez wartość ds i podstawimy w prawej stronie równania $\frac{ds}{dt} = v$, a otrzymamy szukane równanie:

$$P_t \cdot ds = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right).$$

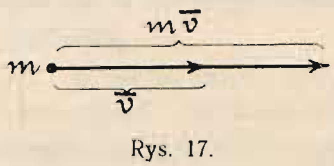
Równanie przeto równowartości pracy i energii kinetycznej punktu jest wynikiem równania dynamicznego ruchu; jest ono przeto szczególnym wyrazem prawa bezwładności. I rzeczywiście, gdy na punkt dany nie działają siły, praca ich równa się zeru, i energia kinetyczna punktu nie doznaje przyrostu podczas ruchu; z czego wynika, że punkt porusza się ze stałą prędkością, lub też pozostaje w spoczynku. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, która wykonuje pracę, wtedy energia kinetyczna punktu, o tyle się zmienia, o ile praca tej siły się zmienia.

Zasada jednakże równowartości pracy i energii kinetycznej jest tylko pewnym szczególnym wyrazem prawa bezwładności, gdyż wyraża ona, wrazie np. gdy siły na punkt nie działają, niezmienność prędkości tylko pod względem algebraicznym, a nie wskazują tej niezmienności pod względem wektorowym, jak to daje równanie dynamiczne. Równanie przeto 72-gie, lub 73-cie nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu swobodnego. I rzeczywiście; w celu obliczenie ruchu punktu swobodnego należy mieć trzy równania algebraiczne. W szczególnych jednakże przypadkach, w których punkt ruchomy posiada jeden tylko stopień swobody, a siły nań działające posiadają funkcyę sił, równ. 73-cie wystarcza do obliczenia ruchu takiego punktu. Wogóle zaś jest ono jedno z trzech równań, potrzebnych do obliczenia ruchu punktu; dwa zaś brakujące mogą być np. równaniami rzutów siły na dwie osi, lub też równaniami, które wyprowadzimy w następującym paragrafie, a które wyrażają t. zw. zasadę momentu ilości ruchu.

B. Zasada momentu ilości ruchu.

24. Ilość ruchu. Określenie: wektor prędkości punktu materyalnego, pomnożony przez wartość masy tegoż punktu, nazywamy ilością jego ruchu. W oznaczeniach wektorowych określenie to wyrazimy iloczynem;

$$m\bar{v};$$



Rys. 17.

i wysłowimy je krótko: **ilością ruchu danego punktu nazywamy m-krotny wektor jego prędkości.**

Z określenia tego wynika, że ilość ruchu posiada wymiar:

$$MLT^{-1}.$$

Znaczenie fizyczne ilości ruchu przedstawić sobie można w sposób następujący. Gdy punkt materyalny o masie m posiada pewną prędkość i gdy siły na ten punkt nie działają, wtedy wektor $m\bar{v}$, podczas ruchu tego punktu, nie zmienia się, ani co do długości, ani co do kierunku, ani też co do zwrotu; i odwrotnie, jeżeli dany punkt posiada podczas ruchu stałą ilość ruchu

$m\overline{v}$, to powiadamy, że siły na niego nie działają. Niezmienność zatem wektora ilości ruchu jest ścisłym wyrazem prawa bezwładności.

Poprzednio wyrażaliśmy prawo bezwładności niezmiennością wektora prędkości, lecz w zjawiskach ruchu, w których bierzemy pod uwagę czynniki fizyczne, wywołujące dany ruch, wielkości kinematyczne t. j. spółrzędne i czas nie wystarczają do wyrażenia zachodzących ruchów: wzór zatem $m\overline{v}$ = stałej; jest wyrazem ogólniejszym prawa bezwładności, niż wyraz samej prędkości.

Przyjąwszy niezmienność ilości ruchu za wyraz matematyczny bezwładności, określimy siłę jako stosunek przyrostu ilości ruchu do czasu, w jakim ten przyrost powstał; a zatem siłę wyrazimy wzorem:

$$\overline{P} = \frac{d(m\overline{v})}{dt}, \qquad \qquad (74)$$

który jest jednakowy ze wzorem 6-tym, w przypadku gdy masa m posiada stałą wartość.

Przyjmijmy następnie, że dana siła jest np. stała i działa na dany punkt materyalny, nie posiadający początkowej prędkości, w przeciągu pewnego czasu t;

to z równania $\overline{P} = \dfrac{d(m\overline{v})}{dt}$ napiszemy:

$$\int_0^t \overline{P}\,dt = \int_0^{\overline{v}} d(m\overline{v}); \text{ a po zcałkowaniu } \overline{P}t = m\overline{v}.$$

Równanie to wyraża, że iloczyn z siły stałej, działającej na punkt materyalny i z czasu t, w przeciągu którego ona działała, równa się ilości ruchu $m\overline{v}$. Ilość zatem ruchu punktu danego jest miarą działania siły na dany punkt materyalny w przeciągu pewnego okresu czasu.

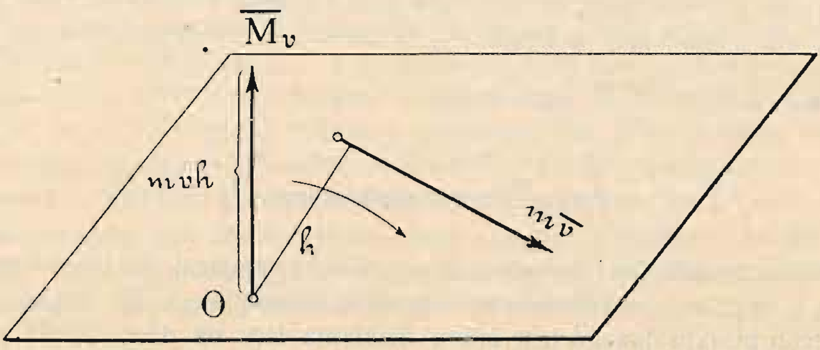
Zauważyć należy, że wartość ilości ruchu nie daje wielkości siły, ani też wielkości okresu czasu jej działania; a daje ona tylko wartość iloczynu z siły i czasu, gdy siła jest stała; lub też daje wartość całki $\int_0^t \overline{P}\,dt$, gdy siła jest zmienną. Ta sama zatem ilość ruchu może być wywołaną np. wielkiemi siłami, działającemi w krótkich okresach czasu; lub też odwrotnie może być wywołananą—małemi siłami, działającemi w długim okresie czasu.

25. Siły chwilowe. Ilość ruchu może być uważaną za miarę tak zwanych sił chwilowych. Siłą chwilową nazywamy siłę, która w przeciągu bardzo krótkiego okresu czasu jest w stanie wywołać stosunkowo znaczne zmiany ilości ruchu danego punktu. Siły te powstają np. podczas uderzenia, podczas wybuchu i t. p. Gdy np. bryłę daną, będącą w danej chwili w spoczynku, uderzymy, to nabędzie ona odrazu znacznej prędkości,—t. j. nabędzie w jednej chwili znacznego przyrostu ilości ruchu. W tym przykładzie siła przyśpieszająca, pochodząca od ciała uderzającego, działa na daną bryłę bardzo krótko, a wywołuje znaczny przyrost ilości ruchu. Przyrost ten przyjmujemy przeto za miarę siły uderzenia. Niewchodząc więc w fizyczną stronę pochodzenia sił chwilowych, przyjmujemy za ich miarę przyrost ilości ruchu, jakiego doznaje dany punkt pod ich działaniem. Ze stanowiska fizycznego należy przeto rozróżniać dwojakiego rodzaju siły: siły ciągłe i siły chwilowe. Miarą sił ciągłych jest iloczyn z masy i przyśpieszenia punktu;—miarą zaś sił chwilowych jest przyrost ilości ruchu.

Powstawanie zatem każdego ruchu można sobie wyobrazić w dwojaki sposób: powstawanie w sposób ciągły, lub też w sposób przerywany.

Przytoczyliśmy tych kilka ogólnych przykładów w celu unaocznienia fizycznego wielkości, nazwanej ilością ruchu; zastosowania zaś tego pojęcia do różnych przykładów podamy w innych rozdziałach.

26. Moment ilości ruchu punktu materyalnego względem bieguna lub osi. Określenie: **Momentem ilości ruchu, względem dowolnie obranego w przestrzeni bieguna, nazywamy wektor, wystawiony w obranym biegunie prostopadle do płaszczyzny, przechodzącej przez ten biegun i przez wektor ilości ruchu, którego długość równa się iloczynowi z ilości ruchu i z odległości bieguna od kierunku wektora** $\overline{mv}$; **a zwrót jest skierowany ku patrzącemu**, gdy przypuszczalny obrót płaszczyzny, wskazany przez



Rys. 18.

zwrót wektora ilości ruchu, jest zgodny z obrotem strzałki zegara, rys. 18-ty. Płaszczyznę, przechodzącą przez biegun i przez wektor ilości ruchu nazwiemy płaszczyzną momentu. Określenie to wyrazimy następującym wzorem wektorowym:

$$\overline{M}_v = \mathrm{V}\, m\overline{v}\,\overline{h}, \qquad (75)$$

w którym $\overline{M}_v$ oznacza określony wyżej wektor momentu ilości ruchu; a litera V objaśnia, że iloczyn $m\overline{v}\,\overline{h}$ należy przyjmować jako wektor.

Stosując określenie iloczynu wektorowego, podane w § 109-tym tomu I-ego, napiszemy wzór 75-ty w następującej postaci:

$$\overline{M}_v = \mathrm{V}\, m\overline{v}\,\overline{r};$$

gdzie $\overline{r}$ oznacza wektor wodzący danego punktu.

Określenie momentu ilości ruchu co do swej formy geometrycznej jest jednakowe z określeniem momentu siły, jakieśmy dali w § 106-tym tomu I-ego, gdy wektor siły przyjmiemy za wektor ilości ruchu. W tenże sposób, zgodnie z określeniem momentu siły względem osi, podanem w § 126-tym tomu I-go, damy również określenie momentu ilości ruchu względem osi, gdy zamiast wektora siły zastosujemy wektor ilości ruchu; a zatem:

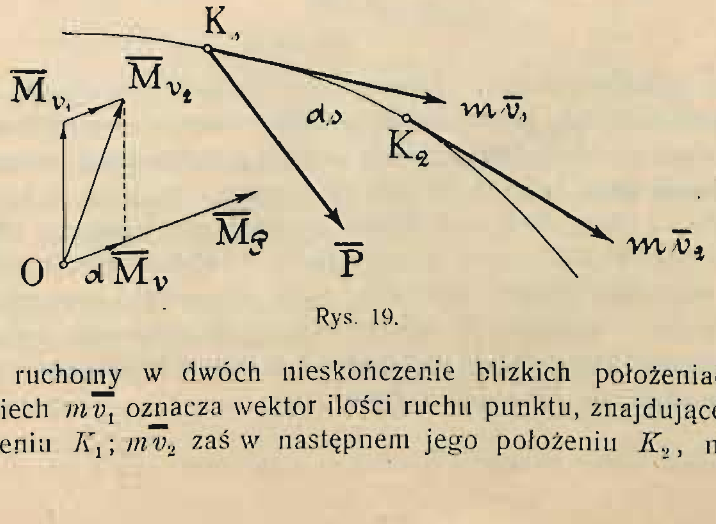
momentem ilości ruchu względem osi nazwiemy moment rzutu wektora ilości ruchu na płaszczyznę prostopadłą do osi, względem punktu przecięcia się jej z tą płaszczyzną.

Momentowi ilości ruchu możemy nadać następujące znaczenie fizyczne. Jeżeli przyjmiemy ilość ruchu za miarę siły chwilowej np. — siły uderzenia, to moment ilości ruchu należy uważać za miarę chwilowego obrotu, t. j. za miarę uderzenia, nadającego danemu punktowi obrót około pewnego bieguna; gdy wyobrazimy sobie dany punkt sztywno związanym z tym biegunem.

Przytoczymy obecnie pewne właściwości kinetyczne momentu ilości ruchu, wynikające bezpośrednio z jego określenia; jeżeli np. na dany punkt materyalny nie działa żadna siła, lub też działają siły, będące w równowadze, to na zasadzie prawa bezwładności punkt ten zakreśli ruchem jednostajnym tor prostolinijny; moment przeto ilości ruchu tego punktu względem dowolnie obranego bieguna w przestrzeni, jest wektorem stałym i niezmiennym; nietylko bowiem wartość iloczynu mv jest w danym przypadku stałą, lecz i ramię momentu jest niezmienne; a zatem i wektor $\overline{M}_v$ posiada niezmienne położenie w przestrzeni i niezmienną długość. Gdy zaś na dany punkt działa pewna siła, wtedy wektor momentu ilości ruchu zmienia wogóle swój kierunek i swą wartość. W szczególnym przypadku, w którym siła, działająca na dany punkt, znajduje się ciągle w płaszczyźnie, wyznaczonej przez jego początkową ilość ruchu, wtedy tor punktu leży w tej płaszczyźnie; a kierunek wektora $\overline{M}_v$ jest stały; lecz długość jego wogóle zmienia się, zależnie od wartości iloczynu z ilości ruchu i z długości ramienia.

Wogóle można powiedzieć, że wektor momentu ilości ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem pewnej siły, zmienia kierunek długość i zwrot, a w następnym paragrafie wykażemy, w jaki sposób zmiana ta następuje, t. j. wykażemy związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu, a wektorem momentu siły, działającej na dany punkt.

27. Związek pomiędzy przyrostem wektora momentu ilości ruchu a wektorem momentu siły. W celu znalezienia tego związku weźmy pod

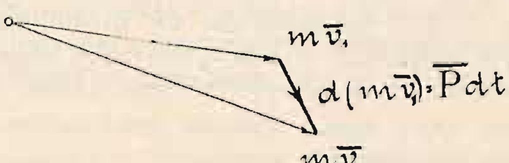


Rys. 19.

uwagę punkt ruchomy w dwóch nieskończenie blizkich położeniach K_1 i K_2, rys. 19-ty. Niech $m\overline{v}_1$ oznacza wektor ilości ruchu punktu, znajdującego się chwilowo w położeniu K_1; $m\overline{v}_2$ zaś w następnem jego położeniu K_2, nieskończenie blizkiem do poprzedniego; to różnica tych wektorów ($m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1$) jest przyrostem ilości ruchu, jaki powstał pod działaniem siły $\overline{P}$, przyłożonej do danego punktu. Stosownie do określenia siły, napiszemy równanie:

$$\overline{P}dt = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1,$$

które wyraża, że wektor $\overline{P}dt$ równa się różnicy dwóch wektorów $m\overline{v}_2$ oraz $m\overline{v}_1$, rys. 20-ty. Ponieważ kierunki tych wektorów, oraz wektora siły, rys. 19-ty, przecinają się w jednym punkcie[1], przeto możemy do tych wektorów zastosować twierdzenie o momentach (§ 108-my, tomu I-go), które głosi, że wektor momentu siły wypadkowej równa się sumie wektorowej momentów sił składowych, przyłożonych do jednego punktu. Twierdzenie to stosuje się nietylko do sił, lecz wogóle do wielkości wektorowych, których kierunki zbiegają się w jednym punkcie.



Rys. 20.

W danym przeto razie powiemy, że moment wektora $\overline{P}dt$ równa się różnicy wektorowej momentów ilości ruchu danego punktu w dwóch jego sąsiednich położeniach. Ażeby te stosunki unaocznić sobie geometrycznie, obierzmy w przestrzeni dowolny biegun O, rys. 19-ty, i wystawmy w niem, zgodnie z określeniem momentów, trzy wektory $\overline{M}_{v,1}$, $\overline{M}_{v,2}$, oraz $\overline{M}_P$, a zważywszy, że moment wektora $\overline{P}.dt$ równa się momentowi siły $\overline{P}$ pomnożonemu przez dt, wyrazimy powyższe twierdzenie o momencie wypadkowym następującem równaniem wektorowem:

$$\overline{M}_P \,.\, dt = \overline{M}_{v,2} - \overline{M}_{v,1}\,.$$

Z równania tego odczytamy przedewszystkiem, że pod działaniem danej siły moment ilości ruchu doznaje pewnego przyrostu, który jest równoległy do wektora momentu tejże siły. Oznaczywszy ten przyrost przez $d\overline{M}_v$ i rozdzieliwszy powyższe równanie przez wielkość dt, otrzymamy równanie wektorowe:

$$\overline{M}_P = \frac{d\overline{M}_v}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

które wyraża szukany związek. Równanie to wysłowimy w sposób następujący:

wektor momentu siły, przyłożonej do punktu ruchomego, względem dowolnie obranego bieguna, równa się stosunkowi przyrostu wektora momentu ilości ruchu względem tegoż bieguna do okresu czasu, w jakim ten przyrost powstał. Twierdzenie to nazwano zasadą momentów; a równ. 76-te, równaniem dynamicznem momentu siły.

Twierdzenie to jest przeto bezpośrednim wynikiem określenia siły i twierdzenia o momencie sumy wektorów: siła wywołuje przyrost ilości ruchu danego punktu; a moment jej wywołuje przyrost momentu ilości ruchu tegoż punktu. Dla tego też równanie momentu 76-te ma podobną postać matematyczną, jaką posiada równanie siły,—równ. 74-te.

[1]) Kierunek bowiem wektora $m\overline{v}_2$ zlewa się z kierunkiem cząstki toru ds, rys. 19.

28. Zasada pól. W szczególnym przypadku, w którym moment sił, działających na dany punkt, względem pewnego bieguna, równa się zeru t. j. gdy $\overline{M}_P = 0$, wtedy przyrost $d\overline{M}_v = 0$; a wektor $\overline{M}_v$ pozostaje niezmienny podczas ruchu punktu i równa się wektorowi momentu początkowej ilości ruchu tegoż punktu. Z niezmienności wektora momentu ilości ruchu, jaka zachodzi w tym przypadku, wyprowadzimy następujące wnioski, tyczące się ruchu punktu:

1) ruch odnośnego punktu odbywa się stale w płaszczyźnie prostopadłej do tego wektora, t. j. do wektora $\overline{M}_v$; a płaszczyzna ta przechodzi przez biegun, względem którego $\overline{M}_P = 0$, i przez wektor początkowej ilości ruchu.

2) wartość momentu ilości ruchu, t. j. wartość iloczynu mvh podczas ruchu punktu pozostaje niezmieniona i równa iloczynowi mv_0h_0; t. j. zachodzi w danym razie równanie:

$$mvh = mv_0h_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

w którem v_0 oznacza wartość prędkości początkowej; zaś h_0 ramię wektora tej prędkości względem obranego bieguna, rys. 21-szy.

Z równania tego obliczyć można prędkość v punktu w każdem miejscu toru, gdy znaną jest odległość h bieguna od stycznej, przeprowadzonej w danem miejscu. Wogóle zaś powiemy, że prędkość punktu w tym przypadku zwiększa się, gdy długość ramienia się zmniejsza.

Wynik ten, że iloczyn mvh w danym przypadku jest stałą wielkością, możemy przedstawić geometrycznie w następujący sposób. Podstawmy w równ. 77-me wartość $v = \dfrac{ds}{dt}$, a po jego przekształceniu, napiszemy:

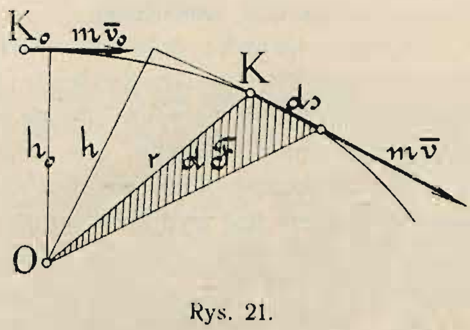
$$ds \,.\, h = (v_0h_0) \,.\, dt.$$

Iloczyn $ds \,.\, h$ wyraża podwójną wielkość pola trójkąta, którego podstawą jest cząstka ds toru punktu, a wierzchołek jego leży w biegunie; h bowiem jest wysokością tego trójkąta; rys. 21-szy. Oznaczmy wielkość pola tego trójkąta przez dF, a równanie powyższe napiszemy w postaci:

$$dF = (\tfrac{1}{2}\, v_0h_0) \,.\, dt;$$

a po scałkowaniu tego równania, otrzymamy, przyjąwszy dla $t = 0$; $F = 0$;

$$F = (\tfrac{1}{2}\, v_0 \,.\, h_0) \,.\, t \,.\, . \quad (78)$$



Rys. 21.

F w danym razie wyraża wielkość pola, jakie zakreśla promień wodzący, wyprowadzony z danego bieguna do punktu ruchomego.

Równananie 78-me wysłowimy w sposób następujący: jeżeli moment sił, działających na punkt ruchomy względem pewnego bieguna, równa się ciągle zeru, to ruch punktu jest płaski i odbywa się w płaszczyźnie, przechodzącej przez dany biegun i przez kierunek początkowej prędkości tego punktu; a promień wodzący, wyprowadzony z bieguna do danego punktu, zakreśla pole proporcyonalne do czasu. Twierdzenie to, będące szczególnym przypadkiem zasady momentu (równ. 76-tego), nazwano **zasadą pól**.

29. Ile równań algebraicznych daje zasada momentu ilości ruchu? Równanie dynamiczne ruchu punktu w postaci wektorowej daje trzy równania algebraiczne, z których obliczyć można ruch punktu swobodnego, gdy dane są warunki ruchu początkowego. Możliwość obliczenia ruchu punktu z równania dynamicznego jest wyrazem tej fizycznej właściwości ruchu, że punkt każdy przy danej prędkości początkowej i pod działaniem pewnej siły wykonywa ściśle określony ruch.

Nasuwa się teraz pytanie, czy zasada momentów, wyrażona równ. 76-tem, daje możność obliczenia ruchu ze znajomości momentów sił, działających na dany punkt; a jeżeli ta zasada nie wystarcza, to ile daje ona równań niezależnych.

W celu dania odpowiedzi rozpatrzmy najpierw równanie momentów ze stanowiska kinetycznego. W tym celu równanie 76-te przedstawmy w postaci następującej:

$$\overline{M}_v = \int \overline{M}_p \, dt,$$

z którego można wyznaczyć wektor $\overline{M}_v$ momentu ilości ruchu danego punktu w każdej chwili jego ruchu, gdy dany jest wektor momentu siły w funkcyi czasu. Kierunek wektora $\overline{M}_v$ wyznacza płaszczyznę, w której chwilowo odbywa się ruch. Znajomość więc tego kierunku zastępuje jedno równanie algebraiczne, płaszczyzna bowiem wyraża się jednem równaniem algebraicznem. Znajomość następnie wartości wektora $\overline{M}_v$ w danej chwili ruchu pozwala zestawić jedno równanie algebraiczne ruchu, a mianowicie:

$$m v h = M_{v,0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Kierunek więc wektora ilości ruchu daje jedno równanie algebraiczne; długość jego daje drugie równanie, — rów. 79-te; i więcej równań ze znajomości tego wektora nie otrzymamy; zwrót bowiem jego daje tylko zwrót prędkości, jaką punkt ruchomy w danej chwili posiada. Zasada przeto momentów daje wogóle tylko dwa równania algebraiczne ruchu punktu; nie wystarcza zatem do obliczenia ruchu punktu **swobodnego**.

Do tegoż wniosku dojdziemy rozpatrując zasadę momentów ze stanowiska dynamicznego. Ruch punktu jest ściśle określony przez siłę, działającą na niego; a ponieważ ze znajomości momentu siły nie można sądzić o samej sile; moment przeto siły działający na punkt ruchomy, nie może wystarczyć do obliczenia ruchu punktu. Dla tej też przyczyny stałość wektora ilości ruchu nie wyraża prawa bezwładności;— stałość ta bowiem jest wynikiem tej okoliczności, że $M_p = 0$; a moment siły równa się zeru nie tylko wtedy, gdy siła równa się zeru, lecz i wtedy, gdy siła posiada skończoną wartość, lecz jej kierunek przecina biegun.

30. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi biegunowemi. Zadanie to polega na wyrażeniu momentu ilości ruchu wielkością promienia wodzącego r, wyprowadzonego z bieguna O, rys. 22-gi i wielkością kąta σ (lub jego różniczki), jaki tworzy promień wodzący z dowolnie lecz stale dla danego zadania obraną osią biegunową. Niech dany punkt w pewnej chwili posiada ilość ruchu $m\overline{v}$, to wartość momentu tej ilości w myśl danego określenia $M_v = mvh$; lub też inaczej, zgodnie z równaniem 79-em, podanem w § 105 tomu I-go:

$$M_v = mv_x r,$$

w którem v_x jest rzutem wektora v na oś x, prostopadłą do promienia wodzącego r. Rzut ten wyrazimy następującym wzorem:

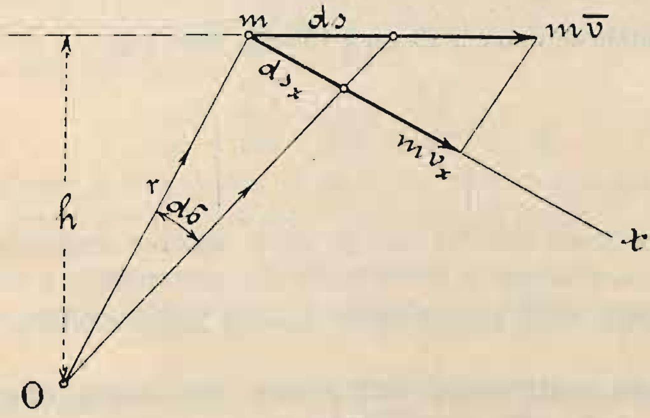
$$v_x = \frac{ds_x}{dt};$$

gdzie ds_x jest rzutem cząstki ds na oś x. Cząstka ds_x może być uważana, podczas nieskończenie małego przesunięcia, za cząstkę $r d\sigma$ łuku, jaki zakreśla koniec promienia wodzącego r; przeto podstawimy:

$$v_x = r\frac{d\sigma}{dt},$$

i otrzymamy wyraz szukany:

$$M_v = mr^2 . \frac{d\sigma}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$



Rys. 22.

31. Wzór momentu ilości ruchu, wyrażony spółrzędnemi prostokątnemi. Zadanie dane polega na obliczeniu wektora momentu ilości ruchu pewnego punktu z rzutów ilości ruchu na osi spółrzędnych prostokątnych i ze spółrzędnych tego punktu. W tym celu zastosujemy twierdzenie, wyłożone o momencie sił w § 128-ym tomu I-go, w którem zastąpimy wektor siły wektorem ilości ruchu i wygłosimy twierdzenie: że rzut na pewną oś wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego na tejże osi, równa się momentowi ilości ruchu względem tejże osi, a suma wektorowa tych rzutów na trzy osi (nierównoległe do jednej płaszczyzny, nie równoległe też między sobą) wyznacza właściwy wektor momentu ilości ruchu.

W § 132-im tomu I-go obliczyliśmy moment wektora siły; w tenże sposób obliczyć można moment wektora ilości ruchu; należy tylko podstawić we wzory

94 i 95-ty, na str. 169-tej tomu I-go, zamiast rzutów siły rzuty ilości ruchu; a z tych równań napiszemy bezpośrednio równania rzutów momentu ilości ruchu na osi wzajemnie prostopadłe, przeprowadzone przez obrany biegun; a więc:

$$M_{v,x} = mv_y z - mv_z y;$$

$$M_{v,y} = mv_z x - mv_x z;$$

$$M_{v,z} = mv_x y - mv_y x \quad \text{. . . . .} \quad (81)$$

We wzorach tych M_v oraz v, zaopatrzone wskaźnikami x, y, z, oznaczają rzuty tych wektorów na osi spółrzędnych prostokątnych. Na podstawie powyższych wzorów napiszemy następujące równanie wektorowe:

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{v,x} + \overline{M}_{v,y} + \overline{M}_{v,z} \quad \text{. . . . .} \quad (82)$$

lub też równania algebraiczne:

$$M_v = \pm \sqrt{M^2_{v,x} + M^2_{v,y} + M^2_{v,z}} \quad \text{. . . . . . .} \quad (83)$$

$$\cos(M_v, x) = \frac{M_{v,x}}{M}; \text{ i t. d.}$$

lub wreszcie zgodnie ze wzorem 99-ym § 133-ego tomu I-go:

$$M_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ mv_x & mv_y & mv_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{. . . . .} \quad (84)$$

Z równań zatem 81-ch obliczyć można rzuty wektora momentu ilości ruchu względem bieguna, obranego w początku układu spółrzędnych, z rzutów prędkości punktu na osi tegoż układu a następnie z tych; rzutów wektor momentu ilości ruchu.

32. Sposób analityczno-wektorowy obliczenia równania dynamicznego momentu siły. Z równania:

$$\overline{P} = \frac{d(m\overline{v})}{dt},$$

otrzymamy, po jego przemnożeniu wektorowem przez promień wodzący $\overline{r}$ danego punktu, równanie następujące:

$$\mathrm{V}\,\overline{P}\,\overline{r} = \mathrm{V}\,\frac{d(m\overline{v})}{dt}\,.\,\overline{r}.$$

Dowiedziemy teraz, że wyraz

$$\mathrm{V}\,\frac{d(m\overline{v})}{dt}\,.\,\overline{r} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{V}\,(m\overline{v})\,.\,\overline{r}.$$

W tym celu obliczymy pochodną momentu ilości ruchu względem czasu podług prawidła, wyłożonego w § 111-ym tomu I-ego, a więc:

$$\frac{d}{dt} \mathrm{V}(m\bar{v}) \, . \, \bar{r} = \mathrm{V} \frac{d(m\bar{v})}{dt} \, . \, \bar{r} + \mathrm{V}(m\bar{v}) \, . \, \frac{d\bar{r}}{dt};$$

ponieważ zaś $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$, wyraz przeto:

$$\mathrm{V} m\bar{v} \frac{d\bar{r}}{dt} = \mathrm{V} m\bar{v}\bar{v} = 0;$$

wobec czego otrzymujemy równanie:

$$\mathrm{V} \bar{P}\bar{r} = \frac{d}{dt} (\mathrm{V}(m\bar{v})\bar{r}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

które jest jednakowe z równaniem 76-tem.

Równanie to jest tylko przekształceniem równania dynamicznego siły; nie wnosi przeto do rozpatrywań ruchu żadnych nowych zasad, a jest tylko szczególnym wyrazem równania dynamicznego siły.

W szczególnym przypadku, który już rozpatrywaliśmy w inny sposób, gdy momenty sił zewnętrznych, względem pewnego bieguna, równe są zeru, otrzymamy z powyższego wzoru, równanie:

$$\mathrm{V}(m\bar{v}) \, . \, \bar{r} = \mathrm{V}(m\bar{v}_0) \, . \, \bar{r}_0,$$

które wyraża związek w skończonej postaci pomiędzy prędkością punktu i jego położeniem t. j. jest,—pierwszą całką równania dynamicznego.

C. Zastosowania zasad szczególnych dynamiki.

33. Ruch punktu w polu sił Newtonowskich. Punkt materyalny o masie m, posiadający w chwili $t = 0$ prędkość $\bar{v}_0$, jest przyciągany do pewnego środka, nieruchomego w przestrzeni, siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi z jego odległości od tegoż środka, t. j., jest on przyciągany siłą, odpowiadającą prawu, postawionemu przez Newtona dla ruchu planet. Obliczyć równanie toru tego punktu.

Ponieważ moment sił, działających na dany punkt, względem bieguna obranego w środku przyciągania, równa się zeru; przeto wektor momentu ilości ruchu $\bar{M}_v$ punktu względem tego bieguna, pozostaje podczas ruchu punktu wektorem niezmiennym, tak co do kierunku, jak też co do długości; z czego znów wynika, że tor punktu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek przyciągania i przez kierunek prędkości początkowej $\bar{v}_0$. Właściwość tę danego ruchu można również sobie wytłumaczyć drogą rozważań właściwości sił; jak to czyniliśmy poprzednio.

Ruch przeto tego punktu wyrazimy dwiema spółrzędnemi, obranemi w płaszczyźnie jego ruchu. Układ spółrzędnych obierzmy biegunowy ze spółrzędnemi r i σ i z biegunem w środku przyciągania; w tym bowiem układzie siły środkowe dają się wyrazić funkcyą jednej tylko zmiennej: promienia wodzącego; co stanowi ważne udogodnienie rachunkowe.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy zasadę pracy, oraz zasadę momentu ilości ruchu; w równania te wejdą spółrzędne punktu r, σ, oraz czas t, jaki upłynął od wyjścia jego z początkowego położenia; a po wyrugowaniu z tych dwóch równań zmiennej t, otrzymamy związek pomiędzy r i σ, t. j. otrzymamy równanie toru, wyrażone spółrzędnemi biegunowemi.

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie:

$$1)\quad -\frac{k}{r^2}\,dr = d(\tfrac{1}{2}mv^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Zasada zaś momentu ilości ruchu względem środka przyciągania, daje równanie:

$$2)\quad \frac{dM_v}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Ażeby otrzymać równanie toru, wyrażone spółrzędnemi r i σ, należy wielkości v i M_v wyrazić temi spółrzędnemi. W tym celu prędkość v zrzutujemy na promień wodzący punktu i na prostopadłą do niego i napiszemy równanie:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Wartość zaś momentu ilości ruchu weźmiemy z równ. 117-tego:

$$M_v = mr^2\frac{d\sigma}{dt}.$$

Po podstawieniu tych wartości w równania poprzednie, — scałkujemy je; a przyjąwszy, dla $t = 0$:

$$r = r_0;\ \sigma = 0;\ v = v_0;\ M_v = M_0;$$

otrzymamy całki ich w następującej postaci:

$$1)\quad \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} = \tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2}mv_0^2, \text{ oraz,}$$

$$2)\quad mr^2\frac{d\sigma}{dt} = M_0.$$

Z równań tych wyrugujemy dt, i otrzymamy równanie w postaci różniczkowej, wykazujące związek pomiędzy spółrzędnemi punktu; a po jego scałkowaniu otrzymamy równanie toru w skończonej postaci, wyrażone obranemi spółrzędnemi.

Wyraz:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}, \text{ który oznaczamy literą } E_0;$$

jest wielkością, charakteryzującą warunki początkowe ruchu; a po obliczeniu z równania momentów:

$$dt = \frac{m r^2 d\sigma}{M_0},$$

i po podstawieniu tej wartości w równanie pracy, otrzymamy równanie:

$$\frac{k}{r} = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{m r^2}\right)^2 + \left(r \frac{M_0}{m r^2}\right)^2\right] - E_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

W równaniu tem można oddzielić zmienne i następnie szukać jego całki. Lecz całkowanie to uprości się po wprowadzeniu nowej niezależnie zmiennej w, określonej równaniem:

$$w = \frac{1}{r}; \text{ skąd } r = \frac{1}{w}; \text{ oraz } dr = -\frac{1}{w^2} dw,$$

lub inaczej $dr = - r^2 dw$.

Po podstawieniu tych wartości w równanie poprzednie otrzymamy:

$$kw = \frac{1}{2} m \left[\left(-\frac{dw}{d\sigma} \cdot \frac{M_0}{m}\right)^2 + \left(w \frac{M_0}{m}\right)^2\right] - E_0; \text{ skąd}$$

$$d\sigma = \frac{-dw}{\sqrt{\frac{2E_0 m}{M_0^2} + \frac{2km}{M_0^2} w - w^2}}.$$

Na mocy wzoru 34-tego, podanego w „Techniku" na str. 77-ej, napiszemy całkę tego równania:

$$\sigma = \text{arsin} \frac{\frac{km}{M_0^2} - w}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2E_0 m}{M_0^2}}} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Jest to równanie toru, jaki zakreśla punkt materyalny w danem polu sił. Ażeby odczytać z tego równania właściwości geometryczne tego toru, należy przedewszystkiem obliczyć stałą C, przyjąwszy pewne wartości spółrzędnych początkowego położenia punktu. W celu jednakże uproszczenia rachunku przyjmiemy pewne szczególne wartości w_1 i σ_1 zmiennych w i σ; któreby znajdowały się w pewnej zależności od samej krzywej. Przyjmijmy np. że w_1 ma odpowiadać najmniejszej wartości r, którą oznaczymy przez r_1; a kąt biegunowy, odpowiadający temu promieniowi, oznaczymy literą σ_1.

Jeżeli zmienna r ma posiadać wartość najmniejszą, to zmienna w posiadać powinna wartość największą; przeto wartość ułamka, wchodzącego do równania 89-go, powinna przybrać wartość największą odjemną. Wartości jednakże tego ułamka przy zmiennej w posiadają granicę od $+1$ do -1; ułamek ten bowiem wyraża sinus pewnego kąta; dla największej zatem wartości w ułamek ten przybrać może tylko wartość (— 1).

Po podstawieniu zatem w równ. 89-te:

$$w = w_1, \text{ oraz } \sigma = \sigma_1;$$

których wartości na razie nie obliczamy; otrzymamy równanie:

$$\sigma_1 = \text{arsin}\,(-1) + C;$$

z którego obliczymy:

$$C = \sigma_1 + \frac{\pi}{2};$$

Po podstawieniu tej wartości, oraz wartości $w = \frac{1}{r}$ w równ. 2-gie, otrzymamy równanie toru w postaci następującej:

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{\pi}{2} + \text{arsin}\,\frac{\frac{km}{M^2_0} - \frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2\,E_0 m}{M_0^2}}} \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Oznaczmy kąt $(\sigma - \sigma_1)$ literą ψ i weźmy cosinus obydwóch stron tego równania, a zważywszy, że wogóle $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, otrzymamy, po odpowiedniem przekształceniu:

$$\cos\psi = \frac{\frac{1}{r} - \frac{km}{M_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{km}{M_0^2}\right)^2 + \frac{2\,E_0 m}{M_0^2}}}; \text{ skąd:}$$

$$r = \frac{\frac{M_0^2}{km}}{1 + \cos\psi\sqrt{1 + \frac{2\,E_0 M^2_0}{k^2 m}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Jest to równanie biegunowe krzywej stożkowej, w której ognisku leży biegun spółrzędnych. Postać ogólna tej krzywej jest następująca:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\psi\,.\,e}.$$

Równanie przeto 91-sze przedstawia stożkową, której parametr wyraża licznik tego równania, a wartość pierwiastka jej jest mimośrodem.

Z geometryi analitycznej jest wiadomem:

gdy $e < 1$; t. j. gdy $E_0 < 0$, wtedy równanie powyższe przedstawia elipsę;
„ $e = 1$; t. j. „ $E_0 = 0$, „ „ „ „ parabolę;
„ $e > 1$; t. j. „ $E_0 > 0$, „ „ „ „ hyperbolę.

Znak wartości E_0 rozstrzyga przeto o rodzaju stożkowej; a pozostałe wartości równania 91-ego nie wpływają na jej rodzaj; nie zmieniają one bowiem znaku wartości pierwiastka.

Zatem zależnie od tego, czy:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \lesseqgtr \frac{k}{r_0};$$

tor będzie elipsą, parabolą lub hyperbolą.

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: rodzaj stożkowej, jaką zakreśla punkt materyalny w polu sił Newtonowskich, zależy od początkowej jego odległości r_0, i od wartości prędkości v_0; lecz nie zależy od jej kierunku w przestrzeni. Ponieważ przytem wartość M_0 wchodzi w równanie toru w drugiej potędze, przeto postać toru nie zależy od zwrotu prędkości początkowej.

34. Analiza warunków, określających rodzaj stożkowej. Znajdźmy obecnie znaczenie dynamiczne, wyprowadzonych drogą analityczną warunków, określających rodzaj stożkowej. Wyraz $\frac{1}{2} m v_0^2$ wyraża wartość energii kinetycznej punktu ruchomego w jego położeniu początkowem; zaś wyraz $\frac{k}{r_0}$ — wartość pracy, jakąby siła przyciągania wykonała, podczas przeprowadzenia punktu ruchomego z ∞ do położenia początkowego r_0.

Siła przyciągająca punkt, który oddala się od środka, wykonywa pracę odjemną, (gdyż zwrot tego przesunięcia jest niezgodny ze zwrotem siły), energia zatem kinetyczna tego punktu zmniejsza się podczas oddalania się punktu od środka przyciągania; jeżeli zatem punkt ruchomy ma przesunąć się do ∞, to jego energia kinetyczna $\frac{1}{2} m v_0^2$, powinna być przynajmniej równą wartości pracy $\frac{k}{r_0}$; jeżeli zaś jest ona mniejszą, to punkt ruchomy, nie mając takiego zasobu energii, ażeby wykonał pracę $= \frac{k}{r_0}$, będzie pozostawał w skończoności. Jeżeli zaś energia początkowa $\frac{1}{2} m v_0^2 > \frac{k}{r_0}$, to punkt dany przybędzie do ∞ z pewnym zapasem energii, króra nie pozwoli mu zawrócić z drogi, lecz, przeprowadziwszy go przez nieskończoność, wprowadzi go do skończoności w innem miejscu przestrzeni.

Jeżeli wiemy, że torem punktu w danem polu sił jest jedna z krzywych stożkowych, można na podstawie tych wniosków orzec, w jakim przypadku będzie nią elipsa, parabola lub hyperbola.

W szczególnym przypadku elipsa może przybrać postać koła, przypadek ten nastąpi gdy $e = 0$, t. j. gdy:

$$1 + \frac{2 E_0 M_0^2}{k^2 m} = 0.$$

Z równania tego obliczymy wartość prędkości v_0, jaką należy nadać punktowi ruchomemu w danem jego położeniu r_0, ażeby zakreślił on koło. W tym celu podstawiamy w powyższe równanie przyjętą wartość $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0}$; oraz wartość:

$$M_0 = m v_0 r_0 \sin \alpha_0 ;$$

gdzie α_0 oznacza $\sphericalangle (v_0, r_0)$;

a po przekształceniu jego, otrzymamy równanie:

$$m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 . v_0^4 - 2 k m r_0 \sin^2 \alpha_0 . v_0^2 + k^2 = 0,$$

z którego:

$$v_0^2 = \frac{2 k m r_0 \sin^2 \alpha_0 \pm \sqrt{4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^4 \alpha_0 - 4 k^2 m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}}{2 m^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0} ;$$

a następnie po wyniesieniu przed pierwiastek kwadratu wyrazu $2 k m r_0 \sin \alpha_0$, otrzymamy, po skróceniu licznika i mianownika przez $2 m r_0 \sin \alpha_0$:

$$v^2_0 = k \frac{\sin \alpha_0 \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_0 - 1}}{m r_0 \sin \alpha_0} .$$

Z wyrazu, znajdującego się pod pierwiastkiem, wnioskujemy, że v_0 może posiadać wartość rzeczywistą w jedynym tylko przypadku, gdy:

$$\sin^2 \alpha_0 - 1 = 0 ; \text{ t. j. gdy } \alpha_0 = \pm 90^0 .$$

Podstawiwszy zatem tę wartość w równanie prędkości, otrzymamy wartość szukanej prędkości:

$$v^2_0 = \frac{k}{m r_0} ; \text{ lub inaczej } \frac{m v^2_0}{r_0} = \frac{k}{r_0^2} .$$

Wyniki te wypowiemy w sposób następujący: ażeby w polu sił Newtonowskich wywołać ruch kołowy punktu materyalnego, należy nadać mu prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; t. j. $\alpha_0 = \pm 90^0$; oraz ażeby iloczyn z masy i przyśpieszenia dośrodkowego t. j. wartość $\frac{m v_0^2}{r_0}$ równała się sile przyciągania $\frac{k}{r_0^2}$; jak to wskazuje powyższe równanie.

Warunek powstawania ruchu kołowego obliczyć również można bezpośrednio; zważywszy, że siły, działające na punkt, poruszający się po kole w polu sił Newtonowskich, i wogóle w polu sił środkowych, zależnych tylko od odległości od środka przyciągania, nie wykonują żadnej pracy; energia kinetyczna przeto tego punktu, a więc i prędkość jego pozostaje niezmienioną (pod względem algebraicznym) i równą prędkości początkowej. Wiemy z kinematyki, że przyśpieszenie punktu, przebiegającego po kole z prędkością jednostajną v_0, skierowane jest po promieniu, zwrócone ku środkowi koła i równa się $p = \frac{v_0^2}{r_0}$; a ponieważ siła, wywołująca to przyśpieszenie w polu sił Newtonowskich, równa się $\frac{k}{r^2_0}$; przeto dla ruchu po kole powinien być zachowany warunek: $\frac{m v_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}$, poprzednio wyprowadzony.

Uwaga. Zechce czytelnik uogólnić wskazany sposób określenia warunków powstawania ruchu kołowego, stosując go do pól sił środkowych, w których siły podlegają innym prawom zmienności, niż przytoczonym w tym przykładzie, np. prawu przyciągania proporcyonalnego do odległości.

35. Prawo ciążenia powszechnego. Newton postawił hypotezę, opartą na licznych obserwacyach ruchu planet, że ruchy te odbywają się w ten sposób, jak gdyby planety przyciągały się wzajemnie siłą, odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi z ich wzajemnej odległości. Ponieważ wszystkie wnioski i rachunki, tyczące się ruchu ciał niebieskich, oparte na tej hypotezie, są zgodne z pomiarami ruchów zachodzących w rzeczywistości, właściwość zatem przyciągania się brył materyalnych odwrotnie proporcyonalnie do drugiej potęgi z ich odległości, przyjęto jako prawo ogólne przyrody i nazwano je prawem powszechnego ciążenia.

Jeżeli np. bryła materyalna, znajdująca się w polu sił ciążenia ziemskiego, otrzyma prędkość początkową, niezgodną z kierunkiem promienia kuli ziemskiej, to zakreśli ona tor w postaci krzywej stożkowej, zamkniętej w skończoności, lub też rozciągającej się do nieskończoności; zależnie od przytoczonych wyżej warunków ruchu początkowego.

Prędkości jednakże, nadane bryłom materyalnym, wyrzuconym z powierzchni ziemi, są zwykle tak małe, że $\frac{1}{2} m v_0^2 < \frac{k}{r_0}$; tory zatem, jakie one zakreślają są elipsami, w których ognisku znajduje się środek kuli ziemskiej; zauważymy następnie, że odległości, z jakiemi mamy do czynienia w doświadczeniach ziemskich, są tak małe w porównaniu z odległością środka tej elipsy, w której ognisku leży środek bryły ziemskiej, że część toru eliptycznego, przystępną dla naszych pomiarów, przyjąć możemy dla ułatwienia rozpatrywań ruchu za część paraboli, której oś główna zlewa się z osią pomienionej elipsy. Tor zatem paraboliczny punktu materyalnego, wyrzuconego w polu ciążenia ziemskiego jest torem przybliżonym. Do tychże wyników doszliśmy też w § 17-ym, przy rozpatrywaniu rzutu punktu materyalnego. W rozpatrywaniach tych przyjęliśmy, że siły, przyciągające punkt wyrzucony, są stałe we wszystkich miejscach toru, i że są wzajemnie równoległe; co jest tylko z pewnem przybliżeniem zgodne z rzeczywistością, błąd jednakże, stąd wynikający, jest w zwykłych warunkach niedostrzegalny.

Przyjąwszy zatem prawo powszechnego ciążenia za zgodne z przebiegiem zjawisk przyrody, wypowiemy na zasadzie wyników paragrafu poprzedniego, że ziemia np. zakreśla elipsę, w której ognisku leży słońce; że księżyc zakreśla również elipsę, w której ognisku znajduje się ziemia i t. p.

Badania ruchu komet wykazują, że ruch ich podlega również prawu ciążenia powszechnego; a tory ich nietylko eliptyczne, lecz i paraboliczne i hyperboliczne, w których ognisku znajduje się słońce, przewidziane są rachunkiem, przytoczonym w paragrafie poprzednim.

Przy obliczaniu ruchu punktu, wyrzuconego z powierzchni ziemi, należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w przypadku, gdy tor punktu przetnie powierzchnie kuli ziemskiej, wtedy równania powyższe nie odpowiadają warunkom ruchu wewnątrz ziemi np. w głębokim otworze; wielkość bowiem przyciągania we wnętrzu ziemi, pomijając wszelkie opory, jest inna, niż na jej powierzchni; a mianowicie: powiększa się ona proporcyonalnie do odległości od środka ziemi, co można dowieść, wychodząc z ogólnej zasady, że punkt ruchomy jest przyciągany przez wszystkie cząstki kuli ziemskiej, podług prawa Newtona; gdy więc znajduje się on w jej wnętrzu, wypadkowa tych przyciągań cząstkowych jest inną, niż w przypadku, gdy jest on zewnątrz kuli ziemskiej.

36. Granice ruchu punktu w polu sił środkowych. Sposób odnalezienia warunków, przy których punkt ruchomy zakreśli tor w skończoności, lub nieskończoności można uogólnić i zastosować go do obliczenia ruchu punktu w polu sił środkowych, które są funkcyami odległości od środka pola, i nie zależą od wielkości kąta biegunowego. Sposób ten pozwoli obliczyć wogóle granice, w jakich dany punkt zakreśla tor pod działaniem takich sił.

Wyraźmy prawo zmienności sił środkowych funkcyą ogólną $f(r)$ ze znakiem dodatnym, gdy siły odpychają punkt; to praca tych sił podczas przejścia punktu ruchomego z położenia początkowego r_0 do innego położenia r wyrazi się całką $\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr$, lub inaczej wzorem:

$$U(r) - U(r_0).$$

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej daje równanie:

$$U(r) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2;$$

Zasada zaś momentów daje równanie:

$$M_0 = m r^2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

W równaniach tych v oznacza prędkość punktu w miejscu r, v_0 — w miejscu r_0; a M_0 oznacza moment ilości ruchu w miejscu r_0.

W najodleglejszem i najbliższem miejscu toru punkt ruchomy posiada prędkość, której kierunek jest prostopadły do promienia wodzącego; przeto, oznaczywszy tę odległość literą r_m (maximum lub minimum) i prędkość w tych miejscach przez v_m, równanie momentu ilości ruchu jest nast:

$$m v_m r_m = M_0; \text{ skąd: } v_m = \frac{M_0}{m r_m}.$$

Podstawiwszy wartość v_m w równanie pracy dla położenia r_m punktu, otrzymamy równanie:

$$U(r_m) - U(r_0) = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 \frac{1}{r_m^2} - \tfrac{1}{2} m v_0^2,$$

z którego po przemnożeniu przez r_m^2, o ile r_m nie posiada wartości zera lub ∞, otrzymamy równanie:

$$r_m^2 \cdot U(r_m) + r_m^2 \left[\tfrac{1}{2} m v_0^2 - U(r_0)\right] - \tfrac{1}{2} m \left(\frac{M_0}{m}\right)^2 = 0,$$

z którego obliczymy długość promienia r_m.

Zauważyć następnie należy, że tor punktu ruchomego dotyka kół, zakreślonych promieniami r_m; koła przeto, zakreślone temi promieniami, wyznaczają granice, pomiędzy któremi ruch punktu się odbywa.

W szczególnym przypadku, gdy $M_0 = 0$, t. j. gdy ruch jest prostolinijny; równanie to przekształci się na nast.:

$$U(r_m) + [\tfrac{1}{2} m v_0^2 - U(r_0)] = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (92)$$

$M_0 = 0$ następuje w dwóch przypadkach; w przypadku, gdy kierunek prędkości początkowej przechodzi przez środek sił, lub też w przypadku, gdy $v_0 = 0$.

W przypadku $v_0 = 0$, mamy:

$$U(r_m) = U(r_0).$$

37. Ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych. Obliczyć równanie ruchu punktu w polu sił środkowych, gdy siły te są pewną funkcyą, narazie nieokreśloną, promienia wodzącego; wyrażoną symbolem ogólnym $f(r)$.

Zadanie to jest uogólnieniem, wyżej rozpatrywanych przykładów; do rozwiązania jego zastosujemy przeto te same zasady; któreśmy stosowali do powyższych szczególnych przypadków. W celu uniknięcia powtarzania się, rozpatrzmy równ. 86 i 87 przykładu poprzedniego, a zauważymy, że tylko w pierwsze z nich wchodzi $f(r)$; lewa bowiem strona tego równania przedstawia iloczyn $f(r)\,dr$, wyrażający pracę cząstkową, prawa zaś strona pozostaje w tej samej postaci i dla tego ogólnego przypadku; drugie zaś z powyższych równań zupełnie nie zmienia się i dla danego przykładu. Całki więc tych równań są następujące:

$$1) \quad \int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2} m v_0^2; \text{ oraz}$$

$$2) \quad m r^2 \frac{d\sigma}{dt} = M_0 \, .$$

Oznaczymy $\int f(r)\,dr$ przez $U(r)$ i następnie, jak poprzednio: $\frac{1}{2} m v_0^2 - U(r_0)$ przez E_0; a po wyrugowaniu z tych równań dt, otrzymamy równanie analogiczne do równ. 88-ego:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 \cdot \frac{M_0^2}{m r^4} = U(r) - \tfrac{1}{2}\frac{M_0^2}{m r^2} + E_0 \, .$$

Podstawmy w nie, jak poprzednio: $r = \frac{1}{w}$, a otrzymamy równanie:

$$\tfrac{1}{2}\left(-\frac{dw}{d\sigma}\right)^2 \frac{M_0^2}{m} = U(r) - \tfrac{1}{2}\frac{M_0^2}{m} \cdot w^2 + E_0, \quad . \; . \; . \quad (93)$$

z którego można obliczyć $d\sigma$ i następnie, po scałkowaniu, σ wyrazić wielkością w, a więc również wielkością r. Funkcya $U(r)$ pozostaje naturalnie nieokreśloną, dopóki zadanie jej nam nie da.

Równanie 93-cie przekształcimy na inne, którego całka jest nam znaną; a mianowicie zróżniczkujemy je względem σ, mając na uwadze, że r i w są funkcyami σ; i otrzymamy:

$$\frac{dw}{d\sigma}\cdot\frac{d^2w}{d\sigma^2}\cdot\frac{M^2_0}{m}=\frac{d\,U(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dw}\cdot\frac{dw}{d\sigma}-\frac{M^2_0}{m}.w.\frac{dw}{d\sigma};$$

po skróceniu przez $\frac{dw}{d\sigma}$ i po podstawieniu:

$$\frac{d(Ur)}{dr}=f(r)=f\left(\frac{1}{w}\right);\ \text{oraz}\ \frac{dr}{dw}=-r^2=-\frac{1}{w^2},$$

otrzymamy:

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2}+w=-\frac{m}{M^2_0}\cdot\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(94)$$

Jest to ogólne równanie toru punktu w polu sił środkowych.

Sprawdźmy to równanie dla pola sił Newtonowskich. W tym celu podstawimy w nie:

$$f(r)=-\frac{k}{r^2}=-kw^2;$$

a otrzymamy:

$$\frac{d^2w}{d\sigma^2}+w=\frac{m}{M^2_0}k.$$

Jest to równanie różniczkowe linijne 2-go rzędu ze stałą wielkością wikłającą; w celu jego scałkowania, wprowadzimy do rachunku nową zmienną z, zależną od w w sposób następujący:

$$w=\frac{m}{M^2_0}k+z.$$

Po podstawieniu tej zmiennej; wielkość stała wypada z poprzedniego równania i otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2}+z=0,$$

którego całkę przedstawić można w postaci następującej:

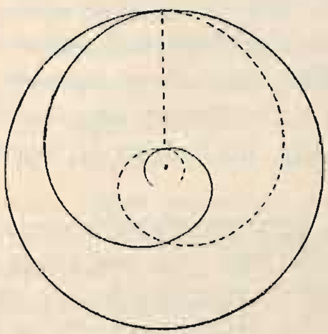
$$z=A\cos(\sigma-\beta);$$

gdzie A i β są stałe, wyznaczalne z początkowych warunków ruchu. Po podstawieniu tej wartości w równanie poprzednie i po zastąpieniu w wyrazem $\frac{1}{r}$, otrzymamy równanie toru tego ruchu:

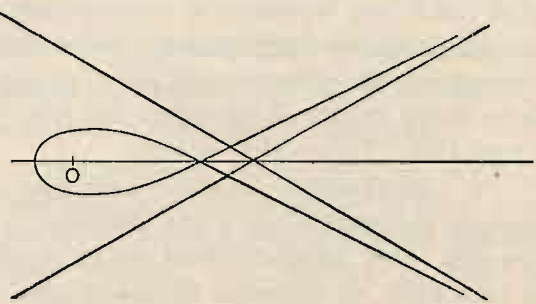
$$r=\frac{\frac{M^2}{mk}}{1+e\cos(\sigma-\beta)},$$

które jest jednakowe z równaniem 91-szem lub następnem.

38. Zadanie. Punkt materyalny, przyciągany do pewnego środka siłą, odwrotnie proporcyonalną do trzeciej potęgi z odległości, zakreśla przy różnych warunkach ruchu początkowego tory, wskazane na rys. 23, 24, 25 i 26-tym. Zbadać, przy jakich warunkach ruchu początkowego zakreśla on każdy rodzaj z tych torów. (Rysunki te są wzięte z dzieła „Treatise on Dynamics by A. Gray and J. G. Gray“.—1911).

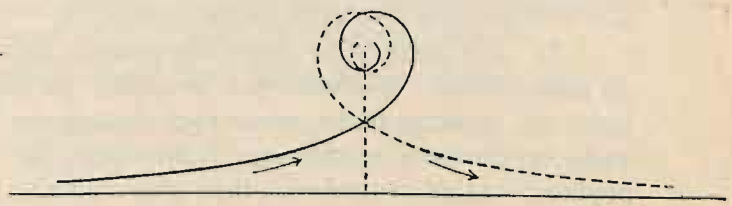


Rys. 23.



Rys. 25.

Rys. 24.



Rys. 26.

5. Ruch punktu nieswobodnego oraz ruch punktu z oporami.

A. Siły odporowe i siły oporowe.

39. Warunki fizyczne powstawania ruchu. Jeżeli punkt materyalny pod działaniem sił danych wykonywa ruch nie zgodny z ruchem, wskazanym przez te siły, to po bliższem rozpatrzeniu warunków fizycznych, w jakich odbywa się taki ruch, zauważymy, że przyczyną tej niezgodności są ciała, z któremi styka się punkt ruchomy, i które zmieniają ruch, wyznaczony przez siły dane.

Jeżeli np. punkt materyalny pod działaniem siły ciążenia, zsuwa się po płaszczyźnie pochyłej, to płaszczyzna dana przedstawia właśnie ten fizyczny warunek, który nie pozwala punktowi zakreślić toru pionowego ruchem, wyznaczonym siłą ciążenia, lecz zmusza go do wykonywania ruchu po płaszczyźnie. Bryłę, znajdującą się w takich warunkach, nazwaliśmy w § 137 tomu I-go bryłą nieswobodną.

W przykładzie zaś spadania brył w powietrzu lub w jakiem innem środowisku fizycznem opór danego środowiska jest tym czynnikiem fizycznym, który