MECHANIKA TEORETYCZNA.

WYDANO STARANIEM
KOMITETU WYDAWNICZEGO NA UPAMIĘTNIENIE DZIESIĘCIOLECIA
STOWARZYSZENIA TECHNIKÓW W WARSZAWIE.

MECHANIKA
TEORETYCZNA

DLA

INŻYNIERÓW, TECHNIKÓW I UCZĄCYCH SIĘ.

INŻ. H. CZOPOWSKIEGO.

TOM II.

CZĘŚĆ 1.

DYNAMIKA PUNKTU MATERYALNEGO.

WARSZAWA — 1913.

SKŁADY GŁÓWNE:

GEBETHNER i WOLFF W WARSZAWIE.

GEBETHNER i SPÓŁKA W KRAKOWIE.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

SPIS RZECZY CZĘŚCI 1ej TOMU IIgo.

KURS SKRÓCONY.

Dynamika punktu.

§§ 1 do 10 włącznie; § 13-ty; §§ 15 do 18-go włącznie; od § 20 do 31-go włącznie; § 39, § 40, od § 43 do § 47-go włącznie; §§ 51, 52, 54, 56, 59.

SPROSTOWANIA.

Str.	*Wiersz lub wzór*	*Zamiast*	*Powinno być*
12	wzór 15-ty	$x = \frac{m\,v^2}{2\,g} - \frac{m\,v_0^2}{2\,g}$	$x = \frac{v^2}{2\,g} - \frac{v_0^2}{2\,g}$
30	wiersz od góry 10-ty	$\sqrt{\frac{c}{4\,m^2} - \frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{c^2}{4\,m^2} - \frac{k}{m}}$
"	" " " 4-ty	4. Zasady szczególne dynamiki.	4. Zasady szczególne dynamiki punktu materyalnego.
107	" " " 7-my	obrotowej	walca
121	" " " 10-ty	138	139
"	" " " 14-ty	138	139
104	" " " 19-ty	$N = \sqrt{N_n + N_n}$	$N = \sqrt{N_n + N_b}$

IV. Dynamika punktu.

1. Prawa zasadnicze.

1. Prawo bezwładności i równanie dynamiczne ruchu. Podstawą okreslenia siły jest prawo bezwładności, które głosi; (porów. § 96 tomu I-go):

każde ciało, pozostawione samo sobie, trwa w stanie spoczynku, lub w stanie ruchu jednostajnego prostolinijnego tak długo, dopóki jakieś czynniki zewnętrzne, pochodzące od innych ciał, nie zmienią tego stanu.

Prawo to jest wyrazem faktu, doświadczalnie stwierdzonego, że w otoczeniu każdego ciała (inaczej punktu materyalnego), wykonywującego ruch nie prostolinijny, lub nie jednostajny, odkryć zawsze można jakieś inne ciało lub układ ciał, (w stanie stałym, płynnym, lub gazowym), których obecność wywołuje zboczenie punktu, poruszającego się, z toru prostolinijnego, lub wogóle zmienia jego prędkość; i że, po usunięciu tych ciał, ruch jego staje się prostolinijny i jednostajny, lub też staje się zbliżony do takiego ruchu, o ile częściowo tylko usuniemy te ciała. W powyższem przeto wysłowieniu prawa bezwładności wyrażenie: „ciało, pozostawione samo sobie", należy rozumieć w ten sposób, że w otoczeniu jego niema żadnych innych brył materyalnych. Chociaż warunek ten fizycznie jest niewykonalny, prawo jednakże bezwładności, w powyższy sposób wygłoszone, nie traci na swej mocy, i jest podstawą rozpatrywań ruchów, zachodzących w otaczającym nas świecie fizycznym. Wszelką zatem zmianę prędkości punktu materyalnego, czy to jej kierunku, czy też jej wartości, przypisujemy wpływowi otaczających go czynników fizycznych, które w języku potocznym nazywamy przyczynami danego ruchu, lub ściślej „przyczynami zmiany danego ruchu". Czynnikami, zmieniającymi prędkość punktu danego, mogą być nietylko układy fizyczne w ścisłym znaczeniu tego słowa (np. sprężyna, prężność pary, magnes i t. p.), lecz i organizmy żyjące; a wszczególności muskuły nasze; w tym szczególnym przypadku mówimy, że na dany punkt wywieramy pewną siłę, przez co wywołujemy zmianę prędkości punktu, czy też bryły. Siła, jako nazwa czynnika, zmieniającego ruch, została uogólniona, i stosuje się również do czynników fizycznych; mówimy przeto we wszystkich przypadkach, w których następuje zmiana prędkości punktu, że na dany punkt działa pewna siła. Siłą zatem nazywamy właściwość pewnych ciał, ujawniającą się przez zmianę prędkości punktu materyalnego.

Stwierdziwszy istnienie układów fizycznych, które zmieniają ruchy, otaczających je punktów materyalnych, wyraźmy obecnie tę właściwość pewną wielkością, którąby była jej miarą; i zapomocą której moglibyśmy obliczyć ruch, wywołany danym układem. Działanie każdego takiego układu ujawnia się przedewszystkiem przyśpieszeniem punktu, na który on działa; do wyrazu zatem szukanej miary powinna wejść wielkość przyśpieszenia punktu w wektorowej postaci. Podane bowiem w kinematyce określenie przyśpieszenia (§ 44-ty tomu I-ego), wyraża zmianę prędkości danego punktu tak co do kierunku i wartości, jak i co do zwrotu. Działanie zatem takiego układu fizycznego na dany punkt materyalny wyraża się wektorem przyśpieszenia tego punktu. Lecz przyśpieszenie to nie wystarcza dla jednoznacznego określenia szukanej miary; gdy bowiem poddamy działaniu **tegoż układu inny punkt** materyalny, wtedy zobaczymy, że przyśpieszenie jego posiada wogóle kierunek i zwrot przyśpieszenia punktu poprzedniego, lecz wartość jego jest różną od poprzedniej. Przyśpieszenie przeto, wywołane pewnym układem fizycznym, zależy nietylko od właściwości danego układu lecz i od właściwości punktu, poruszającego się. Gdy literami $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ i t. d. oznaczymy przyśpieszenia **różnych punktów,** poddanych działaniu **jednego i tego samego układu,** to dostrzeżone zjawiska ruchu wyrazimy równaniami:

$$m_1 \bar{p}_1 = m_2 \bar{p}_2 = m_3 \bar{p}_3 = , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

w których m_1, m_2 i t. d. są wielkościami dotąd nieznanemi. Wielkości te można obliczyć z tych równań po wyznaczeniu (zapomocą pomiarów i obliczeń) przyśpieszeń każdego z punktów i po przyjęciu dla jednej z nich pewnej dowolnej liczby. W ten sposób otrzymamy dla każdego punktu pewną właściwą jemu liczbę.

Liczby te, obliczone w ten sposób, mają na razie bardzo ciasny zakres zastosowania; odnoszą się one bowiem nietylko do danego punktu, lecz i do danego układu fizycznego, wywołującego ruch punktu. Liczby te jednakże otrzymują szeroki zakres zastosowań, gdy weźmiemy pod uwagę prawo fizyczne, które stwierdzić można w każdem zjawisku ruchu; a mianowicie, że liczby te nie zależą od właściwości układu fizycznego, wywołującego ruch, lecz zależą jedynie **od punktu materyalnego** tak, iż każda z tych liczb jest jakoby cechą niezmienną ruchu danego punktu. Prawo to unaocznimy sobie w sposób następujący. Weźmy kilka punktów materyalnych (np. w postaci kulek) i poddajmy je kolejno działaniu jednego i tego samego układu fizycznego (np. działaniu danej sprężyny, lub magnesu); gdy kulki są żelazne a wyznaczywszy z pomiarów ruchu przyśpieszenia, jakie im udziela dany układ, obliczymy z równań 1-szych wszystkie liczby

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

przyjąwszy uprzednio dla jednej z nich liczbę dowolną. Poddajmy następnie **te same punkty** działaniu **innego układu** fizycznego (działaniu np. innej sprężyny mocniejszej lub słabszej od poprzedniej) wyznaczmy ich przyśpieszenia, i obliczmy, jakieśmy to uczynili poprzednio, — spółczynniki

$$m_1', m_2', m_3', \ldots,$$

które odróżnimy od poprzednich kreskami, a przekonamy się, po przyjęciu np. $m_1 = m_1'$, że:

$$m_2' = m_2; \quad m_3' = m_3 \quad \text{i t. d.}$$

i gdybyśmy to doświadczenie wykonali z całym szeregiem różnych układów, to dla jednego i tego samego punktu otrzymalibyśmy za każdym razem jedną i tę samą liczbę. W stwierdzeniu tego faktu leży treść danego prawa.

Liczby tego rodzaju nazywamy wogóle spółczynnikami pewnej właściwości fizycznej danego ciała; np. rozszerzalności, sprężystości, wytrzymałości i t. p.; w danym zaś razie nazwać je można spółczynnikami bezwładności danego punktu materyalnego. Ze względu jednakże na inne właściwości fizyczne, jakie są związane z tymi spółczynnikami, nazwano je masami danych punktów. Prawo to nazwać można prawem niezmienności masy danego punktu materyalnego (lub też danej bryły).

Jeżeli przeto obliczymy spółczynnik bezwładności, czyli masę pewnego punktu materyalnego z jednego jego ruchu, który jest znany, to spółczynnik ten mamy prawo stosować do wszelkich ruchów **tegoż** punktu, wywołanych **najróżnorodniejszymi czynnikami.** W tem ogólnem zastosowaniu spółczynnika bezwładności leży cała praktyczna doniosłość prawa niezmienności masy punktu.

W zadaniach przeto dynamiki przyjmujemy zwykle, że masy, poruszających się punktów, są już obliczone z poprzednio dokonanych pomiarów, t. j. przyjmujemy po większej części, że masy punktów są dane.

Z prawa niezmienności spółczynnika bezwładności, t. j. masy każdego punktu i z właściwości danego układu fizycznego wywoływania w różnych punktach przyśpieszeń, zgodnych między sobą co do kierunku i zwrotu, — wynika, że iloczyn z masy każdego punktu i z jego przyśpieszenia, jakie on otrzymuje, wskutek działania danego układu, jest stały, — jest jego niezmiennikiem. Iloczyn ten przeto raz ustalony dla danego układu uważać można za miarę jego działania; — za miarę jego siły. Na tej podstawie w § 97-ym tomu I-go, określiliśmy siłę jako działanie, powodujące zmianę prędkości punktu danego; a za miarę tego działania przyjęliśmy m-krotny wektor przyśpieszenia poruszającego się punktu. Jeżeli przeto drogą doświadczeń wyznaczymy ten wektor, t. j. wyznaczymy siłę danego układu, to z wielkości jego wyznaczyć już możemy przyśpieszenie **każdego innego** punktu materyalnego o znanej masie, jakie wywoła dany układ.

Jeżeli ten wektor oznaczymy literą $\overline{P}$, to zgodnie z równaniami 1-szymi napiszemy równanie:

$$\overline{P} = m\overline{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

w którem m oznacza masę punktu ruchomego, a $\overline{p}$ jego przyśpieszenie.

2. Zadania dynamiki. Równanie 2-gie, nazwane **równaniem dynamicznem ruchu**, pozwala rozwiązać wszelkie zadania z dynamiki punktu.

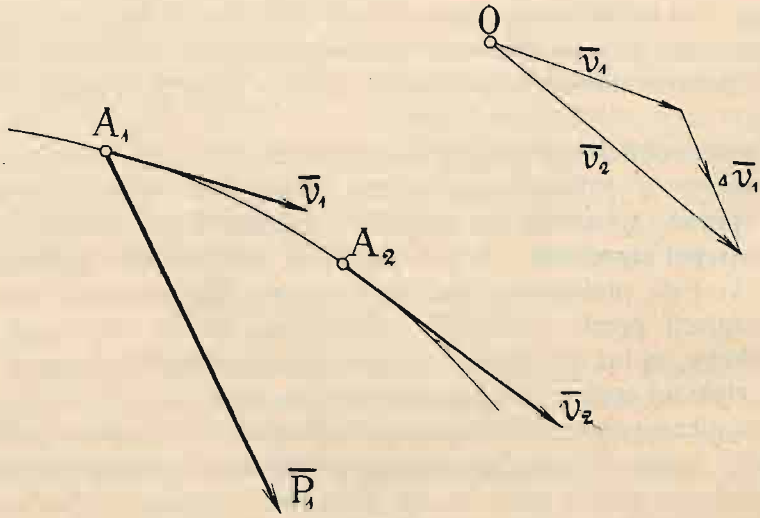
Zadania te podzielić można na trzy zasadnicze grupy.

Do pierwszej grupy zaliczymy zadania, w których dany jest ruch, a należy wyznaczyć siły, wywołujące ten ruch.

Jeżeli np. punkt materyalny przechodzi ruchem, określonym np. równaniem $s = f(t)$, z miejsca A_1 do miejsca A_2, nieskończenie blizkiego, rys. 1, to w celu wyznaczenia przyśpieszenia, zestawimy trójkąt podług wzoru wektorowego:

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \triangle \bar{v}_1\,;$$

w którym $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ są wektory prędkości punktu w miejscach A_1 i A_2; i z tego trójkąta wyznaczymy wektor $\triangle \bar{v}_1$, który jest miarą przyrostu prędkości, i wskazuje kierunek i zwrot siły, działającej na punkt ruchomy w danem miejscu, czynnik bowiem m nie zmienia ani kierunku, ani zwrotu tego przyrostu. Wielkość zaś



Rys. 1.

tej siły obliczymy, stosownie do danych określeń, dzieląc przyrost ten przez wartość $\triangle t$ i mnożąc go przez m, t. j. przez wartość masy tego punktu. Z określenia siły wynika przeto, że kierunek i zwrot jej jest wyznaczony w każdem miejscu toru przez przyrost wektora prędkości w temże miejscu.

Siłę tę można sobie uwidocznić, jako siłę np. ciągnącą dany punkt, zgodnie z kierunkiem i zwrotem wektora $\triangle \bar{v}_1$ rys. 1-szy.

W szczególnym przypadku, w którym obydwa wektory $\bar{v}_2$ i $\bar{v}_1$ są równe (wektorowo); przyrost $\triangle \bar{v}$ równa się zeru, a zatem i siła w danym razie równa sie zeru; — jest to zgodne z prawem bezwładności, na którem oparliśmy określenie siły.

Wyznaczenie zatem sił, jakie wywiera dany układ fizyczny na otaczające go bryły materyalne, może nastąpić tylko drogą doświadczalną. Nic bowiem nie wiemy np. o sile przyciągania ziemskiego, o sile elektrycznej, magnetycznej, o sile sprężyny napiętej, o sile prężności pary i wogóle nic nie wiemy o wielkościach sił, dopóki nie zbadamy ruchów, jakie te czynniki wywołują w otaczających je bryłach.

Przytoczony tutaj sposób mierzenia sił, może być nazwany **kinetycznym**, gdyż oparty jest na bezpośredniej znajomości ruchu i masy punktu. Lecz posiadamy jeszcze inny sposób mierzenia sił, — sposób **statyczny**, który polega na tem, że punkt ruchomy, będący pod działaniem pewnej siły, doprowadzamy zapomocą innej siły do stanu równowagi, i **przyjmujemy** siłę, wywołującą ruch punktu, równą co do kierunku i wartości sile równoważącej, lecz co do zwrotu jej przeciwną.

Prężność np. pary, zawartej w cylindrze silnika parowego, jest w stanie wywołać ruch, czyli jest w stanie nadać przyśpieszenia bryłom, odpowiednio połączonym z ruchomym tłokiem tego cylindra. Z przyśpieszeń zatem tych brył możemy obliczyć siłę, jaką wywiera prężność pary; — jest to sposób kinetyczny mierzenia sił. Sposobem zaś statycznym zmierzymy tę siłę, jeżeli np. zapomocą obciążenia tłoka cylindra nie damy mu się poruszyć; obciążenie to, wyrażone np w *kg*, jest w danym razie miarą siły prężności pary. W tenże sposób możemy zmierzyć np. siłę sprężyny, wyznaczywszy przyśpieszenie punktu, na który ona działa; lub też zrównoważywszy jej działanie siłą inną. W celu np. obliczenia sił międzyplanetarnych, korzystamy ze sposobu kinetycznego obliczania sił; w technice zaś stosujemy obydwa te sposoby.

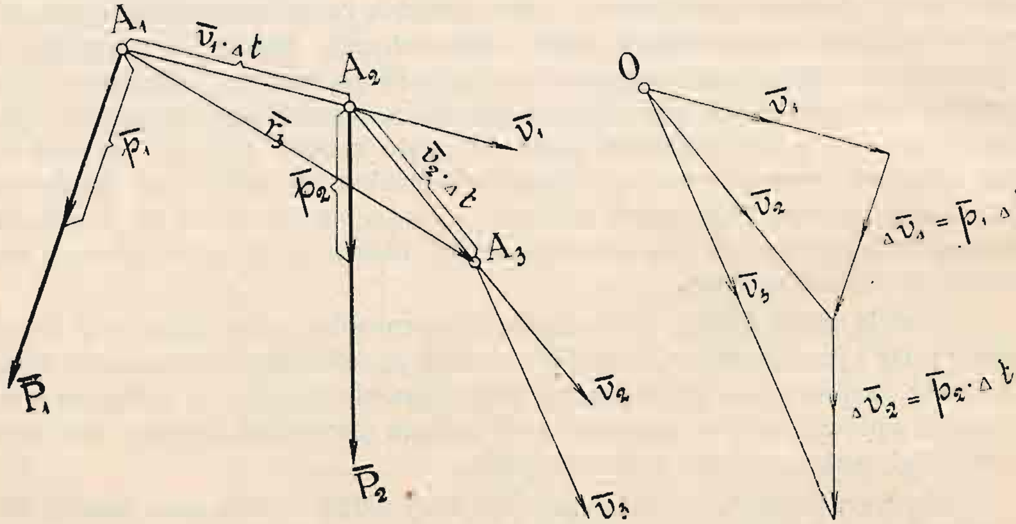
Zwrócić należy uwagę, że w obydwu tych sposobach, wyrażamy siły iloczynem z masy i przyśpieszenia, z tą tylko różnicą, że w kinetycznym sposobie wprowadzamy bezpośrednio do rachunku przyśpieszenie punktu, w statycznym zaś sposobie wprowadzamy je pośrednio — w pojęciu równowagi (porówn. określenie równowagi, podane w § 104-tym tomu I-ego).

Gdy wyznaczymy siły, jakie wywołuje dany układ na otaczające punkty, możemy mówić o znanych siłach, i możemy pytać się o ruch, wywołany temi siłami. Zadania tej grupy są odwrotne do poprzednich i stanowią drugą grupę zadań dynamiki, w których wiadome są siły i masa punktu, a należy wyznaczyć ruch punktu danego.

Ponieważ wyznaczenie siły danych czynników fizycznych może być dokonane tylko drogą doświadczalną (na co już zwracaliśmy uwagę), przeto zadania tej grupy polegają właściwie na obliczeniu przyśpieszenia punktu danego, znajdującego się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, — z przyśpieszenia i masy innego punktu, poddanego działaniu tychże czynników; — lub też poddanego działaniu innych czynników, lecz im statycznie równowartych. Jeżeli bowiem mówimy, że na punkt materyalny (czy też bryłę) działa siła, określona danym wektorem, to zgodnie z powyższemi określeniami, wyrażenie to rozumiemy w ten sposób; że dany punkt znajduje się pod działaniem pewnych czynników fizycznych, zresztą nam nieznanych, które wywołują taką zmianę jego ruchu, że iloczyn z masy i z przyśpieszenia tego punktu równa się wektorowo iloczynowi z masy i przyśpieszenia innego punktu.

Powstawanie ruchu punktu, gdy dana jest siła, nań działająca, należy wyobrazić sobie w następujący sposób. Niech np. punkt ruchomy o masie danej m znajduje się w pewnej chwili t w miejscu A_1, rys. 2-gi, i posiada prędkość $\overline{v}_1$, i niech na niego działa siła, określona wektorem $\overline{P}_1$, to wyznaczymy przyśpieszenie punktu, jakie ona wywoła, gdy weźmiemy m-tą część wektora tej siły; a nowy ten wektor $\overline{p}_1$ jest wektorem szukanego przyśpieszenia.

Wyznaczenie toru i ruchu po nim z tego przyśpieszenia jest czynnością rachunkową, którą można w rozmaity sposób wykonać. Ażeby unaocznić działanie siły na dany punkt, zastosujemy w danym razie do wyznaczenia toru i ruchu po nim sposób wykreślny. Przyjmijmy np., że punkt ten znajduje się w chwili t, w miejscu A_1, rys. 2-gi, posiada prędkość $\overline{v}_1$ i poddany jest działaniu siły $\overline{P}_1$. a zadanie polega na wyznaczeniu położenia i prędkości punktu po upływie czasu $\triangle t$;



Rys. 2.

Prędkość $\overline{v}_1$ punktu, będącego pod działaniem siły $\overline{P}_1$, dozna pewnego przyrostu; ażeby wyznaczyć ten przyrost, przyjmiemy, z pewnem przybliżeniem, że przyśpieszenie $\overline{p}_1$ jest stałe w okresie czasu $\triangle t$, wobec tego przyrost prędkości wyrazimy równaniem:

$$\triangle \overline{v}_1 = \overline{p}_1 \cdot \triangle t, \quad \text{w którem} \quad \overline{p}_1 = \frac{\overline{P}_1}{m}.$$

Prędkość $\overline{v}_2$ punktu w miejscu, w którem znajdzie się on w chwili $(t + \triangle t)$, wyznaczymy z trójkąta wektorowego, zestawionego podług następującego równania:

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 + \overline{p}_1 \cdot \triangle t;$$

trójkąt ten przedstawiliśmy na rys. 2-gim.

Położenie punktu w chwili $(t + \triangle t)$ jest jeszcze nieznane; w celu jego wyznaczenia przyjmiemy znów z pewnem przybliżeniem, że punkt dany przechodzi z jednego położenia do drugiego w okresie czasu $\triangle t$ ruchem jednostajnym z prędkością $\overline{v}_1$; t. j. przyjmiemy, iż punkt ruchomy, po upływie czasu $\triangle t$ od wyjścia z A_1, przejdzie drogę $\overline{v}_1 . \triangle t$ w kierunku prędkości chwilowej i znajdzie się w miejscu A_2, w którem posiada prędkość $\overline{v}_2$.

Gdy znamy siłę $\overline{P}_2$ w miejscu A_2, wtedy znajdziemy w sposób powyższy prędkość $\overline{v}_3$, oraz położenie A_3 punktu ruchomego; a linia łamana A_1, A_2, A_3 i t. d. przedstawi tor punktu ruchomego, prędkości zaś punktu danego odczytamy z wieloboku wektorowego. Postępując w ten sposób wyrazimy prędkość w $n+1$-szem miejscu toru, po upływie $n \,.\, \triangle t$ sekund, następującem równaniem wektorowem:

$$\overline{v}_n = \overline{v}_1 + \Sigma \overline{p}_k \,.\, \triangle t \qquad (3)$$

Położenie zaś punktu po upływie tegoż okresu czasu wyznaczymy promieniem wodzącym, wyprowadzonym np. z początkowego położenia A_1 punktu ruchomego, a zatem:

$$\overline{r}_n = \Sigma \overline{v}_k \,.\, \triangle t \qquad (4)$$

w równaniach tych $k = 1, 2, \ldots n$.

Zrozumiałem jest, że wyniki postępowania tego o tyle będą zgodne z ruchem rzeczywistym, o ile okresy czasu $\triangle t$ będą małe; a jeżeli wyobrazimy je sobie nieskończenie małymi, to zamiast linii łamanej, mającej przedstawiać tor, otrzymamy linię ciągłą, przedstawiającą tor właściwy punktu danego.

Wielkości nieskończenie małe nie dają się jednakże wyrażać wykreślnie; jedynym zatem sposobem ścisłym wyrażenia ruchu jest sposób rachunkowy, jaki dają prawidła algebry zwykłej, lub wektorowej. Sposób obliczenia tego przedstawimy w następnych rozdziałach. Ze sposobu jednakże wektorowego, tutaj przedstawionego, po odpowiedniem dobraniu skali i przystosowaniu go do danych zadań, korzystać można w celu otrzymania przybliżonego obrazu ruchu.

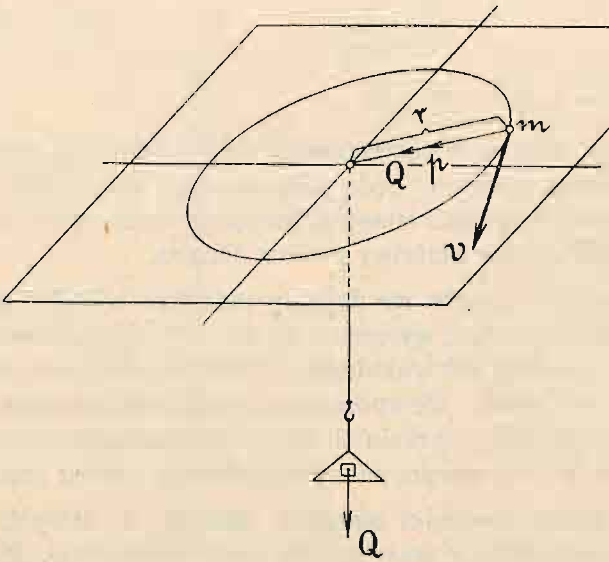
Trzecią grupę zadań dynamiki stanowią zadania, w których dane są siły i przyśpieszenia, a należy obliczyć masę punktu poruszającego się. Rozwiązanie tego rodzaju zadań sprowadza się do znalezienia ilorazu dwóch znanych i wzajemnie równoległych wektorów, — wektora siły i wektora przyśpieszenia. W celu zatem obliczenia masy danego punktu materyalnego, poddamy go działaniu znanej siły, wyznaczymy zapomocą pomiarów przyśpieszenie, jakie on otrzyma, a iloraz tych wielkości jest spółczynnikiem bezwładności;—jest wartością jego masy.

Poddajmy np. dany punkt materyalny działaniu pewnej siły; zbadajmy ruch, jaki ta siła wywoła; obliczmy przyśpieszenie tego punktu; a iloraz z tej siły i przyśpieszenia da wartość jego masy.

Uwiążmy np. bryłę daną na sznurku i obracajmy ją w ten sposób, ażeby zakreślała ona wraz ze sznurkiem koło poziome ruchem jednostajnym, rys. 3-ci. Ruch ten odbywa się pod działaniem siły, występującej w sznurku; ażeby tę siłę zmierzyć, przeciągnijmy sznurek przez bloczek, umieszczony w środku koła i przyczepmy do zwieszonego końca ciężar, równoważący napięcie sznurka, jakie powstaje podczas ruchu punktu; ciężar ten, równy np. $Q kg$, jest miarą siły, działającej na dany punkt. Przyśpieszenie tej bryły, obliczymy z równ. 32-ego, podanego w tomie I-ym, — z prędkości v, z jaką on przebiega po kole, i z promienia r tegoż koła; któreto wielkości można bezpośrednio zmierzyć; przyśpieszenie zatem danej bryły: $p = \frac{v^2}{r}$, i jest skierowane po promieniu ku środkowi, w którym też kierunku i z tymże zwrotem działa siła Q; a zatem:

$$m = Q : \frac{v^2}{r}.$$

Obliczenie mas różnych brył można wykonać jeszcze tymże przyrządem w następujący sposób. Do dodanego sznurka, obciążonego jednym i tym samym ciężarem, przyczepiajmy kolejno różne bryły materyalne, których masy chcemy obliczyć,



Rys. 3.

i nadajmy im takie prędkości po kole, któreby wywołały naprężenie nici, równe danemu ciężarowi, a po zmierzeniu wielkości v_1, v_2, v_3, i t. d. oraz r_1, r_2, r_3 i t. d., o ile są różne, napiszemy równania:

$$m_1 . \frac{v_1^2}{r_1} = m_2 . \frac{v_2^2}{r_2} = m_3 . \frac{v_3^2}{r_3} =, \dots \dots \quad (5)$$

z których obliczymy stosunki mas lub wartości ich, gdy przyjmiemy dowolną wartość liczbową dla jednej z nich. Można wreszcie uniknąć zupełnie korzystania z siły ciążenia; w tym celu należy sznurek przywiązać do sprężyny i uważać, ażeby podczas ruchu punktów sprężyna doznawała jednakowych odkształceń.

Gdy bryła dana, której masę mamy obliczyć, znajduje się w polu ciążenia ziemskiego, wtedy zrównoważymy jej ciężar inną bryłą o przyjętym ciężarze Q, masę jej obliczymy ze stosunku $\frac{Q}{g}$; jakieśmy to omówili w § 99-tym tomu I-go. Masy zaś brył, ktorych nie możemy zrównoważyć, znanym ciężarem, jak np. masy planet, możemy obliczyć tylko z ich ruchów, np. zapomocą równań 5-tych, o czem narazie mówić nie będziemy. Są jeszcze inne sposoby obliczenia mas danych punktów, które są oparte na trzeciem prawie zasadniczem, na prawie wzajemnego działania ciał, lecz o tym sposobie pomówimy w dynamice układu punktów.

Dostrzeganie powstawania ruchów doprowadza nas do wniosku, że każdy ruch może być wywołany różnymi pod względem fizycznym czynnikami. Ruch np. wozu może być wywołany siłą organizmu żyjącego, siłą prężności pary, siłą wzbuchu gazów, siłą sprężyn napiętych i t. p. Chociaż czynniki te są pod względem fizycznym różne, posiadają jednakże wspólną miarę działania; — miarę zmiany ruchu danego wozu, czy też wogóle danego punktu materyalnego. Jakie to są czynniki, mechanika teoretyczna nie bierze pod uwagę, a bada jedynie zmiany ruchu danych punktów materyalnych, wywołane tymi czynnikami i bierze następnie te zmiany za podstawę do obliczeń ruchów innych punktów.

3. Inne sposoby wektorowe wyrażania równania dynamicznego. Równanie dynamiczne, równ. 2-gie, które jest podstawą rachunkową całej dynamiki, przedstawimy jeszcze w innej postaci, również wektorowej, a mianowicie: podstawimy w nie, zgodnie z określeniem przyśpieszenia (tom I-szy § 44-ty):

$$\overline{p} = \frac{d\overline{v}}{dt};$$

i otrzymamy równanie:

$$\overline{P} = m\frac{d\overline{v}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Lub też, gdy wyznaczymy położenie punktu w przestrzeni wektorem wodzącym $\overline{r}$, wyprowadzonym z dowolnie obranego bieguna w przestrzeni; wtedy zgodnie § 57-ym T. I-go, mamy:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}; \qquad \text{a zatem} \quad \overline{p} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2};$$

a po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy je w następującej postaci:

$$\overline{P} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

4. Prawo superpozycyi. O prawie tem wspominaliśmy już w § 78-ym tomu I-ego; wyłożymy je jednakże tutaj więcej szczegółowo. Jeżeli dany punkt materyalny o masie m pod działaniem pewnego układu czynników fizycznych, doznaje przyśpieszenia $\overline{p}_1$, a pod działaniem innego układu po usunięciu pierwszego, doznaje przyśpieszenia $\overline{p}_2$, to pod działaniem jednoczesnem obydwóch układów, otrzyma on inne przyspieszenie, różne od poprzednich, które oznaczymy literą $\overline{p}$. W pewnych szczególnych zjawiskach, których czynniki układów podczas jednoczesnego ich działania nie oddziaływają na siebie, przyśpieszenie $\overline{p}$, jak doświadczenia wskazują, równa się sumie wektorowej przyśpieszeń składowych, t. j.

$$\overline{p} = \overline{p}_1 + \overline{p}_2.$$

Gdy większa ilość układów działa na dany punkt, i każdy z nich oddzielnie wywołuje przyśpieszenie $\overline{p}_k$, wtedy działanie ich jednocześne wywoła przyśpieszenie:

$$\overline{p} = \Sigma \overline{p}_k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Prawo to jest stwierdzone doświadczalnie i jest jednem z praw zasadniczych mechaniki, — zwane prawem niezależności działania, lub inaczej prawem niezależności ruchów. Ponieważ przyśpieszenia w danym przykładzie odnoszą się do jednego i tego samego punktu o masie m, po przemnożeniu zatem równania 8-go przez m, otrzymamy równanie:

$$\overline{P} = \Sigma \overline{P}_k, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

w którem $\overline{P}$ jest siłą, jaką wywierają wszystkie układy łącznie; $\overline{P}_k$ zaś są to siły, jakie wywiera każdy układ oddzielnie. Siłę $\overline{P}$ nazwaliśmy już w statyce siłą wypadkową sił składowych $\overline{P}_k$.

Gdy zatem wiele sił działa na dany punkt o masie m, wtedy mamy równanie dynamiczne:

$$\Sigma \overline{P} = m\overline{p};$$

w którem $\overline{p}$ oznacza przyśpieszenie, jakiego punkt dany dozna pod działaniem danych sił. W szczególnym przypadku, gdy przyśpieszenie $\overline{p}$ punktu ruchomego równa się zeru, t. j. gdy siły są w równowadze, otrzymamy warunek równowagi sił:

$$\Sigma \overline{P}_k = 0.$$

W innym szczególnym przypadku, gdy siły działają wzdłuż jednej prostej, t. j. posiadają wspólny kierunek, wtedy ich wypadkowa równa się sumie algebraicznej sił składowych. Jeżeli zatem pewna siła P_1 wywołuje przyśpieszenie p_1, to n takich sił łącznie, działających wzdłuż jednej prostej, wywołają przyśpieszenie np_1; proporcyonalność zatem przyśpieszenia do siły, przyjęta do określenia siły, jest wyrazem niezależności działania sił.

A. Zastosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu prostolinijnego.

5. Warunki powstawania ruchu prostolinijnego. Szczególnym przypadkiem ruchu punktu jest ruch prostolinijny. Ruch ten powstaje wtedy, gdy przyśpieszenie punktu ruchomego posiada kierunek niezmienny, i gdy kierunek początkowej jego prędkości, o ile on ją posiada, zlewa się z kierunkiem przyśpieszenia; inaczej mówiąc, ruch prostolinijny powstaje, gdy siła wywołująca go posiada stały kierunek, zlewający się z kierunkiem początkowej prędkości; wartość przytem siły może się zmieniać.

6. Ruch punktu pod działaniem siły stałej. Rozpatrzmy ruch punktu materyalnego, na który działa siła stała $\overline{P}$ i którego prędkość początkowa posiada kierunek, zlewający się z kierunkiem siły. Równanie dynamiczne ruchu tego napiszemy w postaci algebraicznej ze względu na to, że wektory tego równania leżą na jednej prostej, wszelkie zatem działania matematyczne z temi wielkościami podlegają odnośnym prawidłom algebry; napiszemy zatem równanie to w postaci:

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \text{lub inaczej:} \quad P = m\frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

W równaniach tych x oznacza drogę punktu ruchu; a v jego prędkość.

Ponieważ przyjęliśmy w tym pzykładzie, że siła przyśpieszająca P jest stałą wielkością, przeto równanie to można bezpośrednio scałkować i otrzymamy:

$$Pt = mv + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy początkowe warunki ruchu, dla

$$t = 0; \quad x = 0; \quad v = v_0;$$

a po podstawienie tych wartości, otrzymamy: $C = -mv_0$; a zatem:

$$Pt = mv - mv_0;$$

lub:

$$v = v_0 + \frac{P}{m}t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Jest to równanie, wykazujące związek pomiędzy czasem i prędkością danego punktu. Ażeby zaś znaleźć związek pomiędzy czasem i drogą, podstawimy w równ. 12-te:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

i otrzymamy po scałkowaniu:

$$\tfrac{1}{2}Pt^2 = mx - mv_0t + C'.$$

Uwzględniając przyjęte warunki początkowego ruchu: $x = 0$; $t = 0$, otrzymamy $C' = 0$; a więc:

$$x = v_0t + \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}.t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Jest to równanie ruchu punktu materyalnego, będącego pod działaniem siły stałej, wyrażające związek pomiędzy spółrzędną x i czasem.

Jeżeli zechcemy znaleźć związek pomiędzy drogą i prędkością, to możemy z równ. 12-go obliczyć czas t, a po podstawieniu jego wartości w równanie 13-te, otrzymamy szukany związek:

$$x = v_0\frac{mv - mv_0}{P} + \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}\left(\frac{mv - mv_0}{P}\right)^2,$$

a po uproszczeniu:

$$x = \tfrac{1}{2}m\frac{v^2 - v_0^2}{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Równanie to możemy otrzymać bezpośrednio z równania dynamicznego siły, z równ. 10-tego; podstawiając w nie:

$$dt = \frac{dx}{v};$$

wtedy bowiem:

$$P = m\,dv\,\frac{v}{dx}\,; \quad \text{lub inaczej:} \quad P.dx = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right);$$

a po scałkowaniu pomiędzy granicami dla x od zera do x, oraz dla prędkości od v_0 do v, otrzymamy równanie szukane, t. j. równanie 14-te.

Rachunek powyższy ma na celu przedstawienie na najprostszym przykładzie sposobu stosowania równania dynamicznego do obliczenia ruchu. Z rachunku tego widzimy, że równanie dynamiczne siły daje związek, w postaci równania różniczkowego, pomiędzy trzema wielkościami: siłą, przyśpieszeniem i czasem; jeżeli jedna z tych wielkości jest znana, np. w powyższym przykładzie siła P, to obliczyć można równanie ruchu w postaci skończonej, które wyraża związek pomiędzy dwiema pozostałemi wielkościami; w przykładzie powyższym jest nim równ. 12-te, wykazujące związek pomiędzy v i t. Związek pomiędzy x i v lub pomiędzy x i t, obliczymy, stosując do tego równanie kinematyczne $v = \frac{dx}{dt}$, z którego oznaczymy dt i podstawimy w równanie, wykazujące związek pomiędzy prędkością i czasem, lub w równanie dynamiczne, a po odpowiedniem scałkowaniu, znajdziemy szukane związki. Wybór jednakże zmiennych, pomiędzy któremi chcemy znaleźć związki, zależy w wielu przypadkach od możności wyrażenia całek danych wzorów funkcyami znanemi; zdarzają się bowiem wzory, których całki nie dają się wyrazić temi funkcyami.

W szczególnym przypadku powyższego przykładu, gdy siłą przyśpieszającą jest przyciąganie kuli ziemskiej, które w pewnych niewielkich przestrzeniach można uważać za stałe, wtedy siłę tę, zwaną ciężarem danego punktu materyalnego, wyrazić można równaniem:

$$P = mg;$$

w którem g jest przyśpieszeniem w danem miejscu kuli ziemskiej; po podstawieniu tej wartości w równ.: 12-te, 13-te i 14-te; otrzymamy równanie ruchu punktu materyalnego, spadającego w próżni pod działaniem siły ciążenia, równania te są następujące:

$$1)\quad v = v_0 + gt;$$

$$2)\quad x = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2;$$

lub:

$$x = \frac{mv^2}{2g} - \frac{mv_0^2}{2g} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (15)$$

Pierwsze z tych równań wyraża związek w skończonej postaci, pomiędzy prędkością i czasem; — drugie pomiędzy drogą i czasem; — a trzecie pomiędzy drogą i prędkością.

7. Spadanie pionowe bryły materyalnej z uwzględnieniem oporu powietrza. Na bryłę spadającą działają w danym przypadku dwie siły: siła ciążenia bryły, działająca z góry na dół, i siła parcia powietrza, jaka powstaje podczas ruchu bryły. Przyjmujemy w tem zadaniu, że ciężar bryły jest nam dany, i że parcie powietrza na poruszającą się bryłę, na podstawie doświadczeń, jest proporcyonalne do wielkości pola F, utworzonego przez rzut bryły na płaszczyznę prostopadłą do kierunku jej ruchu; oraz proporcyonalne do prędkości w drugiej potędze. Siłę zatem parcia, którą oznaczymy literą A, wyrazimy wzorem:

$$A = kFv^2;$$

i nadamy jej zwrot przeciwny zwrotowi prędkości bryły.

We wzorze tym k jest spółczynnikiem empirycznym; F oznacza wielkość pola rzutu bryły na płaszczyznę, prostopadłą do kierunku ruchu, wyrażoną w m^2; v m/sek. oznacza prędkość uderzającego powietrza w bryłę; wartość tej prędkości przyjmiemy w danem zadaniu równą wartości prędkości spadającej bryły. Wzór ten, jako empiryczny, stosowany być może tylko do przypadków, które są zbliżone do przypadków objętych danemi doświadczeniami.

Oznaczywszy ciężar spadającej bryły przez Q kg, wyrazimy siłę, działającą na nią, wzorem: $(Q - kFv^2)$; siła ta wywołuje przyśpieszenie $\frac{dv}{dt}$; a więc napiszemy równanie dynamiczne:

$$(Q - kFv^2) = m\frac{dv}{dt}, \qquad (16)$$

w którem:

$$m = \frac{Q}{g}.$$

Równanie to jest równaniem różniczkowem ruchu, które należy scałkować, ażeby otrzymać równanie ruchu w skończonej postaci; jakieśmy to czynili w przykładzie poprzednim. W celu scałkowania oddzielmy zmienne, i otrzymamy:

$$dt = m\frac{dv}{Q - kFv^2}.$$

Przyjąwszy początkowe warunki ruchu:

$$x = 0; \quad t = 0; \quad v = 0;$$

po scałkowaniu tego równania podług wzoru 19-go, zamieszczonego w „Techniku“ t. I str. 75, otrzymamy:

$$t = m\frac{1}{2\sqrt{QkF}} \operatorname{lgn} \frac{\sqrt{QkF} + kFv}{\sqrt{QkF} - kFv} \qquad (17)$$

Równanie to pozwala obliczyć czas, po którego upływie, spadająca bryła posiada daną prędkość v. W celu zaś obliczenia prędkości, jaką bryła posiada po upływie danego czasu, rozwiążemy to równanie względem v; a skróciwszy przedtem ułamek przez wartość $\sqrt{kF}$, otrzymamy:

$$e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} = \frac{\sqrt{Q} + v\sqrt{kF}}{\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}};$$

skąd:

$$e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} \cdot (\sqrt{Q} - v\sqrt{kF}) = (\sqrt{Q} + v\sqrt{kF});$$

i wreszcie:

$$v = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot \frac{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} - 1}{e^{t\frac{2\sqrt{QkF}}{m}} + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Sprawdzimy przedewszystkiem wymiary tego wzoru, i w tym celu wyliczymy najpierw wymiar spółczynika k. Wymiar ten otrzymamy ze wzoru: $P = kFv^2$, gdy podstawimy w niego wymiary siły, pola i prędkości; a zatem po podstawieniu mamy:

$$MLT^{-2} = kL^2(LT^{-1})^2; \quad \text{skąd:} \quad k = ML^{-3}.$$

Po podstawieniu następnie wymiarów wielkości wyrazu $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$, otrzymamy jego wymiar:

$$\sqrt{\frac{Q}{kF}} = (MLT^{-2}\,.\,M^{-1}L^3L^{-2})^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2} = LT^{-1};$$

jest to wymiar prędkości; a ponieważ i po lewej stronie jest prędkość, przeto ułamek w wykładniku powinien mieć wymiar zero. Sprawdzimy jeszcze jego wymiar, t. j. wymiar wyrazu $t.\frac{2\sqrt{QkF}}{m}$; wymiar ten jest następujący:

$$TM^{-1}(MLT^{-2}\,ML^{-3}\,L^2)^{1/2} = T^0M^0L^0 = \text{wymiar } 0.$$

A więc obydwie strony równania 18-tego posiadają wymiar prędkości LT^{-1}. Wzór 18-ty można jeszcze sprawdzić, zakładając: $k = 0$; lub $F = 0$; wtedy bowiem powinniśmy otrzymać równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego: $v = gt$.

W celu unaocznienia zależności v od t obliczymy następujący przykład liczbowy i zestawimy wartości v dla różnych wartości t. Do obliczenia przyjmiemy $F = 1\,m^2$; $Q = mg = 24\,kg$, oraz $k = 0{,}12$[1]. Z tych danych obliczymy $m = \frac{24}{9{,}81} = 2{,}45$, a po podstawieniu tych wartości w równanie 18-te, otrzymamy:

$$v = 13{,}9\,\frac{e^{1{,}4t} - 1}{e^{1{,}4t} + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Na podstawie tego wzoru obliczyliśmy wartości v dla różnych t i zestawiliśmy je w następującej tablicy, w której podaliśmy również wartości v_b ze wzoru $v = gt$ dla przypadku, w którym nie uwzględniamy oporu powietrza.

t sek.	0	0,1	1	2	3	4	5	. . . .	∞
v m/sek. . . .	0	0,97	8,5	12,4	13,5	13,9	13,9	. . . .	13,9
v_b bez oporu .	0	0,98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	. . . .	∞

[1]) G. Eiffel, w pracy „Recherches expérimentales sur la resistance de l'air" 1907 — podaje różne spółczynniki oporu dla różnych powierzchni.

Ażeby określić związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w równ. 18-te, $v = \frac{dx}{dt}$, gdzie x oznacza odległość punktu od miejsca wyjścia, i otrzymujemy z niego, po przemnożeniu licznika i mianownika przez wartość $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, równanie następujące:

$$dx = \sqrt{\frac{Q}{kF}}\,\frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} - e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}\,dt;$$

$$dx = \sqrt{\frac{Q}{kF}}\,\frac{\frac{m}{\sqrt{QkF}}\,d\left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right)}{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}.$$

Równanie to możemy bezpośrednio scałkować i otrzymamy:

$$x = \frac{m}{kF}\,\lg n\left(e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right) + K.$$

Wartość K obliczymy z warunków, że dla $x = 0$, $t = 0$; a po podstawie tych wartości, otrzymamy:

$$x = \frac{m}{kF}\,\lg n\,\frac{e^{t\frac{\sqrt{QkF}}{m}} + e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}}{2}.$$

Ze wzoru tego obliczyć można długości drogi, jaką zakreśli punkt materyalny w różnych okresach czasu. Zestawienie wartości drogi i czasu dla tego przykładu podajemy w poniższej tablicy, w której dopisaliśmy szereg wartości x_b, obliczonych ze wzoru $x_b = \frac{1}{2}gt^2$; i przedstawiających drogę, którą przebyłby punkt bez oporu powietrza:

t sek. . .	0	1	2	3	4	5
x m. . .	0	4,5	15,0	27,5	41,3	55,1
x_b m. . .	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,6

Tablica ta poucza, że ze wzrostem czasu, przyrosty drogi stają się prawie równe; np. pomiędzy sekundą 2-gą i 3-cią przybyło drogi 12,5 m, pomiędzy 3-cią i 4-tą przybyło 13,8 m, pomiędzy 4-tą i 5-tą przybyło również 13,8 m; czyli z powiększeniem czasu ruch punktu zbliża się do ruchu jednostajnego; a prędkość jego zbliża się do wartości 13,9 m; wykazanej w poprzedniej już tablicy.

We wzorze drogi wartość wyrazu $e^{-t\frac{\sqrt{QkF}}{m}}$, z powiększaniem się t, nadzwyczaj prędko maleje, — tak, iż przy znacznych wartościach czasu możemy ten wyraz odrzucić; a wtedy otrzymamy wzór przybliżony dla dużych wartości t:

$$x = \frac{m}{kF} \lg n \left(\tfrac{1}{2} e^{t \frac{\sqrt{QkF}}{m}}\right);$$

lub inaczej:

$$x = \frac{m}{kF} \left(t \frac{\sqrt{QkF}}{m} - \lg n\, 2\right);$$

odrzucając jeszczee lgn 2 jako wartość małą, w porównaniu z wartością wyrazu, zawierającego czas, otrzymamy po skróceniu wzór przybliżony:

$$x = \sqrt{\frac{Q}{kF}} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Dla ruchu jednostajnego mamy wogóle wzór drogi: $x = ct$; wyraz zatem $\sqrt{\frac{Q}{kF}}$ wzoru powyższego wyraża prędkość stałą, do której zbliża się z biegiem czasu prędkość punktu spadającego. Jest to ta samą wartość, którą otrzymamy, gdy w równ. 18-em lub 19-em odrzucimy jednostki, znajdujące się w liczniku i mianowniku, jako wartości bardzo małe w stosunku do wartości wyrazu poprzedzającego.

Przykład powyższy poucza, że ruch punktu materyalnego, poruszającego się pod działaniem siły ciążenia w środowisku, sprawiającem opór, proporcyonalny do kwadratu prędkości, charakteryzuje się tem, że po upływie pewnego czasu, (jak w przykładzie powyższym po upływie 4-ch sekund), prędkość staje się, praktycznie biorąc, prawie niezmienną, t. j. ruch staje się prawie jednostajny[1]).

Wynik ten wytłomaczymy sobie fizycznie, gdy zwrócimy uwagę na stosunek siły ciążenia do siły oporu. Siła ciążenia w danym przykładzie jest stałą, siła zaś oporu wzrasta ze wzrastającą prędkością; z biegiem zatem czasu siła oporu dąży do zrównania się z siłą ciążenia; wskutek czego ruch punktu spadającego zbliża się do ruchu jednostajnego. Rozpatrując z teoretycznego stanowiska ten przebieg, zrównanie się tych sił następuje asymptotycznie do czasu; lecz biorąc go z praktycznego stanowiska, zrównanie się tych sił może nastąpić dosyć szybko; różnice ich bowiem po upływie krótkiego czasu stają się niedostrzegalne. Z tej właściwości danego ruchu korzystamy w przypadkach, w których działa na daną bryłę siła przyśpieszająca, a chcemy otrzymać ruch tej bryły jednostajny; lub ściślej mówiąc prawie jednostajny. Gdy np. na powierzchnię wała, prostopadle do jego osi, działa siła stała Q, wtedy, jak łatwo to fizycznie pojąć, wał dozna obrotu jednostajnie przyśpieszonego; chcąc jednakże otrzymać ruch jednostajny, przytwierdzamy do wała łopatki z płaszczyznami prostopadłemi do kierunku ruchu, a podczas obrotu wała łopatki te wywołują opór, którego wynikiem jest ruch jednostajny przyrządu. Przyrząd, w ten sposób zbudowany, bywa stosowany jako regulator (miarkownik) w małych mechanizmach, poruszanych siłami stałemi; bywa również stosowany do regulowania ruchu silników[2]).

[1]) Doświadczenia, wykonane przez G. Eiffel'a, potwierdzają z całą ścisłością te teoretyczne wyniki.

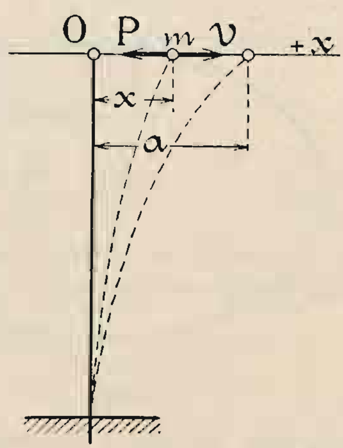
[2]) Ztft. d. V. d. Ing. 1892. str. 184.

8. **Ruch drgający.** Punkt materyalny o masie m poddany jest działaniu siły, przyciągającej do pewnego środka; obliczyć równanie ruchu. Jeżeli punkt dany umieścimy w środku przyciągania, nie nadając mu prędkości, to pozostanie on w spoczynku; lecz gdy umieścimy go zewnątrz tego środka i puścimy np. swobodnie, wtedy siła przyciągania nada mu pewien ruch w kierunku tego środka. W tych warunkach punkt dany nie zatrzyma się w środku przyciągania, lecz, zgodnie z prawem bezwładności, wskutek nabytej prędkości, przeleci przez środek przyciągania, i przesunąłby się do nieskończoności z tą prędkością, gdyby siła przyciągania nie wstrzymywała go w tym ruchu; a wreszcie nie zawróciła go znowuż do tego środka. Punkt zatem materyalny, wyprowadzony w tych warunkach z położenia równowagi, będzie się wahał około środka przyciągania. Ruch taki nazywamy wogóle ruchem wahadłowym, lub ruchem drgającym. Szczegółowe właściwości tego ruchu zależą od zmienności siły przyciągania; a zmienność ta może być rozmaita.

Przyjmijmy w danym przykładzie, że siła przyciągająca jest **proporcyonalną do odległości** punktu od środka przyciągania; jeżeli odległość tę oznaczymy przez x, to siłę przyciągającą P wyrazimy wzorem:

$$P = -kx,$$

w którym k oznacza spółczynnik proporcyonalności działania siły; znak zaś odjemny wskazuje, że siła P posiada zwrot przeciwny zwrotowi dodatnemu osi x. Ruch w ten sposób określony nazwano, ze względu na znaczenie, jakie posiada w akustyce, ruchem **harmonicznym**.



Rys. 4.

Ruch ten unaocznić sobie możemy zapomocą następującego modelu fizycznego. Umocujmy pionowo jeden koniec pręta sprężystego, a do drugiego przyczepmy bryłę materyalną o masie m; odchylmy następnie pręt od położenia pionowego i puśćmy go, a otrzymamy wahania się przyczepionej bryły; rys. 4-ty. W razie gdy pręt jest zupełnie sprężysty, siła sprężystości pręta jest, jak doświadczenia uczą, proporcyonalna do wielkości odchylenia; zatem odpowiada ona sile, przyjętej w danym przykładzie. Model ten jednakże jest niezupełnie zgodny z postawionem zadaniem; w przytoczonem bowiem zadaniu punkt przebiega po prostej linii; koniec zaś pręta zakreśla pewien łuk. Gdy jednakże przyjmiemy, że pręt jest dosyć długi, a odchylenie jego od położenia równowagi jest niewielkie, wtedy łuk, jaki zakreśla przyczepiona bryła, przyjąć można za jego cięciwę; a z tem zastrzeżeniem opisany model odpowiada warunkom, postawionym w danem zadaniu, i może służyć do jego unaocznienia.

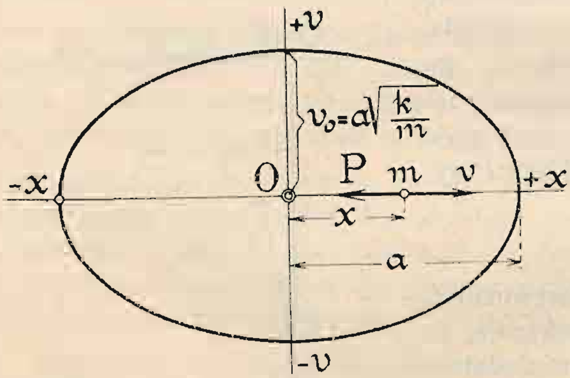
W celu zestawienia równania dynamicznego ruchu danego punktu podstawmy w ogólny wzór równania dynamicznego: $P = m\dfrac{dv}{dt}$, wartość siły $P = -kx$, a otrzymamy równanie:

$$-kx = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Pomiędzy zmiennemi tego równania zachodzi związek, wynikający z określenia prędkości: $v = \frac{dx}{dt}$.

Z tych dwóch równań możemy jedną zmienną wyrugować, a otrzymamy jedno równanie, wyrażające związek pomiędzy dwiema zmiennemi. Równań takich napisać możemy wogóle trzy: (x, v); (x, t), oraz (v, t). Zwrócić jednakże należy uwagę, że te trzy równania są zależne od siebie.

W celu znalezienia związku, pomiędzy x i v, podstawimy w powyższe równanie dynamiczne $dt = \frac{dx}{v}$, a otrzymamy, po scałkowaniu, równanie, wykazujące



Rys. 5.

szukany związek. Równanie to jest następujące:

$$-\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Stałą C obliczymy, przyjąwszy np. dla wartości: $x = a$,

$$v = 0;$$

t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy, po odchyleniu go na odległość a od środka przyciągania, puścimy swobodnie bez prędkości. Po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe otrzymamy:

$$-\frac{ka^2}{2} = C;$$

a następnie:

$$-\frac{kx^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - \frac{ka^2}{2};$$

skąd wreszcie:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Z równania tego obliczyć można prędkości punktu ruchomego w każdem miejscu x toru; znak dodatny należy brać w tym przypadku, gdy spółrzędna x rośnie podczas ruchu punktu; gdy zaś ona maleje, należy brać znak odjemny.

Wykres (x, v) tego ruchu przedstawiony jest na rys. 5-tym. Z równania 22-ego wynika, że dla ruchu rzeczywistego powinno być $x < a$, i że największe oddalenie punktu ruchomego od O jest $x = a$; poza tą bowiem wartością dla x, v otrzymuje wartości urojone. Odległość tę nazwano największem odchyleniem, inaczej amplitudą. W miejscu, dla którego $x = a$, jest, zgodnie z założeniem, $v = 0$; czyniąc następnie $x < a$, v powiększa się. i dla: $x = 0$.

$$v = v_{\text{maxim}} = \pm a \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Największą zatem prędkość posiada punkt podczas przejścia przez środek przyciągania; oznaczywszy tę prędkość przez v_m, napiszemy:

$$v_m = \pm a \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Gdy daną jest prędkość v_m, wtedy największe odchylenie:

$$a = \pm v_m \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Jeśli uczynimy $x < 0$, to wartości v będą się powtarzały, albowiem $(\pm x)^2$ zawsze daje tę samą wartość.

Postać wykresu (x, v) unaocznimy sobie dokładniej, gdy równanie 22-gie przekształcimy na następujące:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{\left(a\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} = 1,$$

które jest równaniem elipsy; wykres więc (x, v) danego ruchu jest elipsą.

W celu znalezienia związku pomiędzy czasem i drogą podstawimy w równanie dynamiczne: równ. 21-sze, $v = \frac{dx}{dt}$; i otrzymamy:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Pierwszą jego całkę otrzymamy, po podstawieniu w nie $\frac{dx}{dt} = v$, oraz $dt = \frac{dx}{v}$. Pierwszą jego całką jest równanie ze zmiennemi x i v; a ponieważ równanie to jużeśmy obliczyli, przeto w równ. 22-gie podstawimy bezpośrednio $v = \frac{dx}{dt}$ i otrzymamy szukany związek, lecz w postaci różniczkowej:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}\,.$$

W celu przekształcenia go na postać skończoną, oddzielimy zmienne i napiszemy:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}}\,;$$

a po scałkowaniu mamy:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\,.\,\text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right) + C_1\,;$$

stałą C_1 obliczymy, przyjąwszy dla: $x = 0$;

$t = 0$;

t. j. przyjąwszy, że czas zaczynamy liczyć, od chwili, w której punkt ruchomy przechodzi przez środek O; a podstawiwszy te wartości, otrzymamy $C_1 = O$; a następnie:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ arc sin} \left(\frac{x}{a}\right);$$

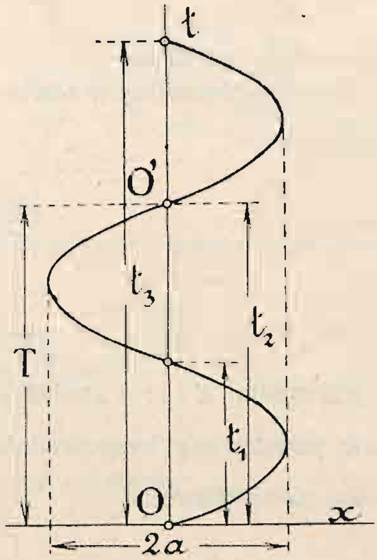
lub:

$$t\sqrt{\frac{k}{m}} = \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right);$$

skąd:

$$x = a \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Równanie to jest zatem całką równania różniczkowego drugiego rzędu, przedstawionego pod Nr 25-ym. Wykres (x, t) danego ruchu przedstawiliśmy na rys. 6-tym.



Rys. 6.

Znajdźmy jeszcze związek pomiędzy prędkością i czasem, i w tym celu różniczkując równ. 26-te względem czasu t, otrzymamy:

$$v = \pm\, a\sqrt{\frac{k}{m}} \,.\, \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) . \quad . \quad (27)$$

Równanie to pozwala obliczyć prędkość punktu w każdej chwili t.

Z równ. 26-ego wynika, że dla: $x = 0$;

$$\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = 0;$$

skąd:

$$t = n\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

gdzie n może być dowolną całą cyfrą: 0, 1, 2, 3,...; a więc punkt ruchomy przechodzi przez miejsce, $x = 0$, w równych odstępach czasu. Prędkości, z jaką on przechodzi to miejsce, obliczymy z równ. 27-ego, po podstawieniu w nie odpowiednich wartości czasu, a zatem prędkości te w czasie:

$$t_0 = 0; \qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad t_3 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

są następujące:

$$v_0 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_1 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_2 = a\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v_3 = -a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Z zestawienia tych wartości widzimy, że punkt ruchomy przechodzi przez środek przyciągania z prędkościami o jednakowych bezwzględnych wartościach, lecz o zwrotach różnych, co fizycznie wytłómaczymy sobie w ten sposób, że gdy punkt przechodzi w danej chwili z dodatną prędkością, to następnie przejść on musi z odjemną prędkością.

Dla czasu t_2, dla którego $n=2$, punkt ruchomy zaczyna na nowo ruch z prędkością, jaką posiadał w czasie $t=0$. Okres czasu, po upływie którego punkt ruchomy, po wyjściu z pewnego miejsca toru, powróci do niego **z tą samą prędkością**, nazwano okresem **podwójnego wahnięcia.** Okres ten oznaczymy literą T; i obliczymy go dla danego przykładu z następującego równania:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

ze wzoru tego odczytamy, że okres T nie zależy od wielkości odchylenia a, t. j. nie zależy od amplitudy.

Jeżeli ruch dany unaocznimy sobie zapomocą ruchu punktu materyalnego, umieszczonego na końcu pręta sprężystego, którego drugi koniec jest sztywno umocowany, jakieśmy to już wyżej mówili, to równ. 28-me wyraża, że okres podwójnego wahnięcia nie zależy od wielkości początkowego odchylenia pręta, a zależy tylko od wielkości masy i od wielkości spółczynnika sprężystości. Wziąwszy następnie pod uwagę związek pomiędzy a i v_m, wyrażony równaniem 24-tem, wypowiemy ten wniosek: okres podwójnego wahnięcia nie zależy od prędkości jaką nadamy punktowi w środku przyciągania.

Wzór 28-my wytłómaczymy sobie fizycznie w następujący sposób. Z powiększeniem masy poruszającej się, okres wahnięcia się powinien się powiększać; większa bowiem masa pod działaniem takiejże samej siły, porusza się wolniej, niż masa mniejsza; okres zatem wahnięcia tej samej sprężyny rośnie z powiększeniem masy ruchomej. Ze zwiększeniem natomiast siły przyśpieszającej, której wielkość dla tych samych odległości punktu wyraża spółczynnik k, okres wahnięć się zmniejsza; dany bowiem punkt prędzej przebiega po torze. Z tego wynika, że okres podwójnego wahnięcia powiększa się z powiększeniem się masy, poruszającego się punktu, i zmniejsza się z powiększeniem spółczynnika k, co jest zgodne z powyższym wzorem. Jeżelibyśmy przyjęli w myśl tych rozumowań, że okres T jest wprost proporcyonalny do masy i odwrotnie proporcyonalny do spółczynnika k, to wymiar wzoru takiego nie przedstawiałby wymiaru czasu; wymiar bowiem wielkości k, (który otrzymamy z określenia: $kx =$ sile, t. j. $kL = MLT^{-2}$), jest MT^{-2}, wyraz zatem $\frac{m}{k}$ ma wymiar T^2. Ażeby zaś otrzymać wymiar czasu, należy wziąć pierwiastek drugi z wyrazu $\frac{m}{k}$; a w ten sposób dojdziemy do powyższego wzoru; liczbę zaś π można uważać jako cechę okresowości danego ruchu

Ruch okresowy punktu materyalnego, którego okresy nie zależą od odchyleń, nazwano ruchem **izochronicznym.** Izochronizm w powyższym przykładzie wytłómaczymy sobie fizycznie w ten sposób, iż z powiększeniem odchylenia pręta, t. j. amplitudy, wywolujemy jednocześnie większą siłę, przyciągającą punkt materyalny do położenia równowagi; wskutek czego punkt dany otrzymuje większe przyśpieszenie tak, iż w tych samych okresach czasu przejść on może drogi o różnych długościach. W powyższych rozpatrywaniach ruch dany wyraziliśmy wielkością odchylenia i stosunkiem $\frac{k}{m}$; możemy jednakże wyrazić go innemi wielkościami, np. wielkością a i T; w tym celu należy z równ. 28-ego podstawić w równ. 26-te wartość:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi \frac{1}{T};$$

a otrzymamy:

$$x = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Równanie w tej postaci bywa często stosowane do badań fizycznych, gdyż wyraża ono ruch wielkościami a i T, które można bezpośrednio wymierzyć z danego zjawiska.

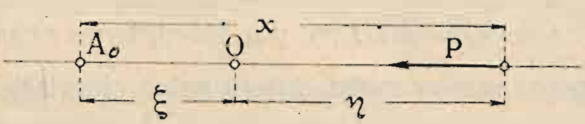
Jeżeli następnie zechcemy wyrazić równanie ruchu prędkością punktu w chwili, gdy znajduje się on w środku przyciągania, i stosunkiem $\frac{k}{m}$, to podstawimy w równanie powyższe: $a = v_m\sqrt{\frac{m}{k}}$; i otrzymamy równanie:

$$x = v_m\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \qquad (29)$$

w którem v_m oznacza prędkość punktu w chwili przejścia przez środek przyciągania.

Ze wzoru 28-ego skorzystać możemy w celu obliczenia stosunku mas różnych brył. W tym celu umieszczać będziemy kolejno na końcu jednego i tego samego prętu sprężystego, umocowanego pionowo, różne bryły, których masy mamy obliczyć, a wyznaczywszy doświadczalnie okresy wahnięć każdej z brył, co nietrudno jest wykonać, ze względu na izochronizm ich ruchów; — obliczymy stosunek wartości tych mas ze stosunku wartości okresów w drugiej potędze.

9. **Ruch punktu, gdy środek przyciągający jest w ruchu.** Przyjmijmy, że środek przyciągający O, rys 7-my, znajduje się w ruchu np. prostolinijnym jednostajnym, i że przyciąganie odpowiada warunkowi wyżej postawionemu. Równanie ruchu tego punktu przedstawi się zatem w postaci następującej:



Rys. 7.

$$-k(x-\xi) = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

w którem x oznacza odległość poruszającego się punktu od początku drogi A_0; m jego masę; ξ odległość środka przyciągającego od tegoż początku. Wielkość ξ można wyrazić wogóle funkcyą czasu; w danym przykładzie: $\xi = ct$; po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy równanie:

$$-k(x-ct)=m\frac{d^2x}{dt^2};$$

lub inaczej:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=ckt.$$

W tym przykładzie siła przyciągająca $P=-k(x-ct)$ zależy od położenia punktu ruchomego i od czasu.

Równanie powyższe należy do grupy t. zw. równań różniczkowych z funkcyą wikłającą; całkowanie jego wykonać można w sposób następujący: podstawimy w nie nową zmienną: $\eta=x-ct$, a otrzymamy:

$$-k\eta=m\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Jest to równanie co do swej postaci jednakowe z równ. 25-em i wskutek tego, przyjąwszy warunki początkowe ruchu, któreśmy przyjęli w przykładzie poprzednim, t. j.:

$$\text{dla}\quad t=0;\quad \eta=a;\quad \text{oraz}\quad \frac{d\eta}{dt}=0;$$

otrzymamy równanie ruchu względem środka przyciągania:

$$\eta=a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right),$$

a względem początku spółrzędnych A_0:

$$x=ct+a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

Wykres (x, t) tego ruchu otrzymamy, gdy spółrzędne prostej: $x=ct$, dodamy do spółrzędnych sinusoidy: $\eta=a\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

10. Ruch, gdy środek dany odpycha punkt proporcyonalnie do odległości. Rozpatrzmy przypadek, gdy środek dany odpycha punkt materyalny siłą proporcyonalną do odległości. Równanie dynamiczne tego ruchu jest następujące:

$$kx=m\frac{d^2x}{dt^2};\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(31)$$

lub:

$$kx=m\frac{dv}{dt}.$$

W celu scałkowania tego równania podstawimy w nie:

$$dt=\frac{dx}{v},\qquad(\text{z równ. } v=\frac{dx}{dt}),$$

i otrzymamy:

$$kx\,dx=mv\,dv,$$

a po scałkowaniu:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Przyjmijmy warunki początkowe:

$$x = 0; \quad v = v_0; \quad t = 0,$$

a otrzymamy:

$$0 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + K; \qquad \text{skąd:} \qquad K = -\tfrac{1}{2} m v_0^2,$$

a po podstawieniu tych wartości, napiszemy równanie:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2;$$

skąd:

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Z równania tego obliczymy v w każdem miejscu x toru, jeżeli daną jest prędkość v_0 w środku odpychania.

Ponieważ wielkości x i v wchodzą w to równanie w drugiej potędze, przeto wartości v są jednakowe dla symetrycznych położeń punktu względem środka odpychania. Z równania tego widzimy również, że wartość v rośnie do ∞ z powiększeniem się wartości x do ∞.

Podstawmy następnie w równ. 33-cie: $v = \frac{dx}{dt}$, a otrzymamy równanie różniczkowe, wyrażające związek pomiędzy x i t:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2};$$

skąd:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} x^2 + v_0^2}}.$$

W celu scałkowania tego równania przekształcimy je w ten sposób, ażeby przy zmiennej x znajdował się spółczynnik jedność, gdyż przyjmujemy, że znaną jest nam całka wyrazu ogólnego:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \lg n\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C;$$

(zamieszczonego w Techniku na str. 77, pod Nr 33); na skutek tego równanie powyższe otrzyma postać:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right) v_0^2 + x^2}},$$

a po scałkowaniu:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \lg n\left(x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}\right) + C.$$

Podstawmy w nie: $t = 0$; $x = 0$, a otrzymamy:

$$C = -\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \lg n\left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\right);$$

i wreszcie:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \lg n \frac{x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}}{v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

W celu rozwiązania tego równania względem x, zastępujemy funkcyę logarytmiczną funkcyą wykładniczą, a więc:

$$e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{x + \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2}}{v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}};$$

równanie to możemy napisać w sposób nast.:

$$\sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x^2} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \, e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - x,$$

a po podniesieniu obydwóch stron do drugiej potęgi i po odpowiedniem skróceniu, otrzymamy:

$$\frac{m}{k} v_0^2 = \frac{m}{k} v_0^2 e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}} - 2 x v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}},$$

skąd wreszcie:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{\frac{k}{m}}} - 1}{2 e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}};$$

lub inaczej:

$$x = \tfrac{1}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \left(e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{-t\sqrt{\frac{k}{m}}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Jest to równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy drogą i czasem. Z równania tego wynika, że z rosnącą wartością t, wartość wyrazu $e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}$ nadzwyczaj prędko rośnie, natomiast drugi wyraz również prędko maleje; wobec tego dla $t = \infty$, otrzymamy $x = \infty$. Równanie to wskazuje również, że dla $x = 0$ $t = 0$.

W szczególnym przypadku, gdy $v_0 = 0$, wtedy $x = 0$, niezależnie od czasu, t. j. punkt ruchomy, umieszczony bez prędkości początkowej w środku przyciągania, pozostaje w spoczynku, co jest fizycznie zrozumiałem.

Porównywując równanie dynamiczne tego zadania (równ. 31-sze) z takimże równaniem zadania poprzedniego (równ. 25-go) zauważymy, że różnią się one tylko znakiem przy wielkości k. Całkę zatem równ. 31-ego otrzymamy z całki równ. 25-tego, gdy podstawimy w nie: $k = -k$, czyli $\sqrt{k} = i\sqrt{k}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$; tem równaniem jest nast.:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{i} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\, i\right).$$

W celu usunięcia z niego wielkości urojonych, skorzystamy z ogólnego wzoru:

$$\sin(i\alpha) = i\,\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2};$$

(„Technik" I str. 68, wzór 6-ty), i otrzymamy równ. 35-te.

Można również dojść do całki równania postaci ogólnej:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

podstawiając w nie:

$$x = A\cos(t\sqrt{q}) + B\sin(t\sqrt{q});$$

lub $$x = Ae^{t\sqrt{q}} + Be^{-t\sqrt{q}};$$

lub $$x = \alpha . \cos(t\sqrt{q} + \beta),$$

a po obliczeniu stałych A i B lub α i β z początkowych warunków zadania, otrzymamy powyższe całki.

11. Ruch harmoniczny przytłumiony. Z warunków podanego powyżej zadania wynika, że ruch harmoniczny, gdy został raz wywołany, powinien trwać do nieskończoności, gdyż dla każdej wartości t, otrzymamy zawsze z równania ruchu wartość skończoną zmiennej x. W rzeczywistości jednakże przypadek taki nie zachodzi, ruch bowiem np. pręta sprężystego, wprowadzonego w ruch okresowy, po upływie pewnego czasu zanika.

Wzór więc ruchu, wyżej wyprowadzony, nie jest zgodny z rzeczywistością, a przyczyną tego jest pominięcie, przy wyprowadzaniu tego wzoru, pewnych warunków fizycznych, w jakich odbywa się dany ruch. W przykładzie powyższym założyliśmy pewne warunki, na których podstawie obliczyliśmy równanie ruchu, i daje ono wyniki, zgodne z tymi warunkami. Stawiając sobie jednakże zadanie obliczenia ruchu punktu materyalnego, umocowanego na końcu sprężystego pręta, powinniśmy wniknąć w dany mechanizm, zbadać wszystkie czynniki fizyczne, jakie podczas ruchu występują, i ująć je w rachunek.

Doświadczenie nas uczy, że ciała fizyczne nie są zupełnie sprężyste, i że po odkształceniu niezupełnie powracają do stanu pierwotnego; warunek ten należy przeto ująć rachunkiem. Następnie należy wziąć pod uwagę, że ruch sprężyny odbywa się w powietrzu, które przedstawia pewien opór drgającemu prętowi i poruszającej się masie; wstrzymuje on zatem drgania sprężyny. W jaki sposób wprowadzić te opory do rachunku, zależy od wyników badań, które należy przeprowadzić. W tym rachunku przyjmiemy, że wszystkie opory łącznie, które przeciwdziałają ruchowi, są proporcyonalne do prędkości punktu ruchomego i że kierunek ich wypadkowej zlewa się z kierunkiem prędkości punktu ruchomego, zwrot zaś jej jest przeciwny zwrotowi prędkości. Siłę więc, przyśpieszającą dany punkt, wyrazimy wzorem:

$$-\left(kx + c\frac{dx}{dt}\right),$$

w którym c jest spółczynnikiem oporu środowiska, k — zaś, jak poprzednio, jest spółczynnikiem proporcyonalności siły przyciągającej.

Równanie dynamiczne danego ruchu jest zatem następujące:

$$-\left(kx + c\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

lub w innej postaci, którą otrzymamy po podstawieniu $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ i po uporządkowaniu wyrazów:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38')$$

Z równań 37-ego lub 38-ego, po ich scałkowaniu, można wysnuć, drogą analizy algebraicznej, właściwości danego ruchu; zanim jednakże do tego przystąpimy, zanalizujemy to równanie w postaci różniczkowej, przedstawionej równaniem 37-em. W celu unaocznienia sobie danego ruchu, przyjmijmy, że punkt ruchomy w chwili, gdy znajdował się w położeniu równowagi, otrzymał, za pomocą np. uderzenia, pewną prędkość v_0; wskutek czego, gdyby na niego nie działały żadne siły, poruszałby się on, zgodnie z prawem bezwładności, ruchem jednostajnym i prostolinijnym; ponieważ jednakże działają na niego siły kx i $c\frac{dx}{dt}$, obydwie zwrócone ku środkowi przyciągania, (gdy punkt oddala się od środka), to ruch tego punktu będzie zwolniony. Wynikiem tego działania mogą być dwa przypadki: punkt ten, oddalając się od środka, może zatrzymać się na pewnej skończonej odległości od środka przyciągania; lub też może on ruchem zwalniającym biedz do nieskończoności.

Ażeby rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi w naszym przykładzie, weźmy pod uwagę równ. 24-te, z którego odczytamy, że w przypadku ruchu punktu przyciąganego proporcyonalnie do odległości, lecz bez oporu środowiska, zatrzyma się on na pewnej skończonej odległości. W danym zatem przykładzie, w którym oprócz siły przyciągającej występuje jeszcze opór środowiska, siła, wstrzymująca punkt w ruchu, jest większą niż w przykładzie bez oporu; punkt zatem tembardziej zatrzyma się na pewnej odległości od środka. Gdy następnie punkt dany dosięgnie tego położenia, wtedy pod działaniem siły przyciągającej, zacznie się on wracać ku środkowi z przyśpieszeniem, jakie nadadzą mu siły nań działające. Sił tych jest dwie: siła przyciągająca ku środkowi i siła oporu środowiska, odwrócona od tego środka. W miarę zbliżania się punktu ku środkowi, siła przyciągająca, zgodnie z warunkami danego zadania, — maleje; siła zaś oporu wzrasta lub maleje, zależnie od tego czy prędkość punktu powiększa się, czy też się zmniejsza. Wskutek przewagi jednej z tych sił nad drugą mogą nastąpić dwa rodzaje ruchu punktu: albo punkt, doszedłszy do środka, posiada jeszcze nabytą prędkość i w takim razie przejdzie na drugą stronę środka, ażeby znów powrócić do niego; lub też siła oporu środowiska jest tak wielką, że mogłaby zatrzymać punkt dany w ruchu; gdyby nie działała na niego siła przyciągania, która, choć jest znikomo mała w bliżkości środka, nadaje jednakże punktowi ruch ku środkowi. W tym przypadku punkt posiadać zawsze będzie pewną prędkość, której wartość niewiele może różnić się od zera, czyli punkt zbliżać się będzie do środka nadzwyczaj wolno; co się wyrazi matematycznie nieskończenie długim okresem. Rodzaj zatem ruchu danego punktu zależy od wielkości siły przyciągającej, t. j. od spółczynnika k, od wielkości siły oporu, t. j. od spółczynnika c, i od masy m; od wielkości bowiem masy zależy wielkość prędkości, jakie wywołują jednakowe siły w jednakowych okresach czasu.

Ażeby ustalić ilościowo warunki, w jakich zachodzą te przypadki ruchu, znajdźmy całkę równania 38′-ego i zanalizujmy je.

Teorya równań różniczkowych daje sposoby całkowania, które, ściśle biorąc, polegają po większej części na odnalezieniu funkcyi niezależnie zmiennej jak w naszym przypadku: $x = f(t)$, któraby, podstawiona w równanie różniczkowe, zamieniła je identycznie w zero, t. j. zamieniła je w zero przy wszelkich wartościach tej zmiennej. W danym przeto razie x należy wyrazić taką funkcyą z t, której pochodne, oraz jej wartość, podstawiona w równanie różniczkowe 38′-me, zamieniłaby je w zero przy wszelkich wartościach zmiennej t. Przy wyborze tej funkcyi powodować się można charakterem ruchu, który w przybliżeniu określiliśmy już poprzednio. Na zasadzie tych rozpatrywań funkcya w równaniu $x=f(t)$, powinna mieć tę właściwość, ażeby wartość jej przy pewnych warunkach zadania dla $t=\infty$ zbliżała się do zera (przypadek 1-szy poprzednich rozpatrywań), przy innych zaś warunkach, żeby była okresową; (przypadek 2-gi). Funkcyą taką jest funkcya wykładnicza ogólnej postaci $\alpha e^{\rho t}$; dla rzeczywistej bowiem wartości spółczynników ρ i α, gdy przytem ρ jest odjemna, odpowiada ona warunkowi pierwszemu; dla urojonych zaś spółczynników α i ρ zamieni się ona na funkcyę okresową. Podstawmy zatem w równanie 38′-me

$$x = \alpha e^{\rho t},$$

gdzie α i ρ są jeszcze nieokreślone spółczynniki, i zbadajmy, przy jakich wartościach funkcya ta zamieni równ. 38′-me identycznie w zero. W tym celu podstawmy tę funkcyę, oraz jej pochodne w równanie 38′-me, a otrzymamy:

$$e^{\rho t}(m\rho^2 + c\rho + k) = 0.$$

Równanie to zamieni się w zero przy wszelkich wartościach dla t, jeżeli wyraz:

$$m\rho^2 + c\rho + k = 0;$$

ażeby to nastąpiło, powinno być:

$$\rho = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Przyjmując te dwie wartości dla ρ, otrzymamy dwie całki szczególne, wyrażające dwa szczególne ruchy danego punktu. Z wartości tych na zasadzie odnośnego twierdzenia z teoryi całek, napiszemy całkę zupełną równania 38-ego w następującej postaci:

$$x = Ae^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{c}{m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} \quad . \; . \; . \quad (39)$$

Wartości spółczynników A i B obliczymy z początkowych warunków zadania.

Równanie to przedstawia dwojakiego rodzaju ruch, jakieśmy to już przewidzieli, zależnie od tego, czy wartość pod pierwiastkiem jest rzeczywistą, czy też urojoną. Jeżeli jest ona rzeczywistą, to x zostaje wyrażone funcyą wykładniczą, której wykładnik jest proporcyonalny do t. Ażeby ten przypadek, nastąpił, powinno być:

$$\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0;$$

lub inaczej $$c^2 > 4mk.$$

Ażeby zbadać ten ruch, obliczymy stałe A i B i w tym celu przyjmiemy następujące warunki ruchu początkowego, dla:

$$t = 0; \qquad x = 0; \qquad v = v_0;$$

t. j. przyjmiemy początek liczenia czasu w chwili, w której punkt ruchomy znajduje się w środku przyciągania i posiada w tem miejscu prędkość v_0. Unaocznić sobie możemy te warunki w ten sposób, że punkt ruchomy, będący w położeniu równowagi, otrzymuje np. zapomocą uderzenia prędkość v_0.

Po podstawieniu w równanie 39-te wartości $t = 0$; $x = 0$, otrzymamy:

$$0 = A + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

W celu zaś podstawienia $t = 0$; $v = v_0$ obliczymy prędkość punktu, zróżniczkowawszy równ. 39-te względem t i następnie podstawiwszy w nie $t = 0$, oraz $v = v_0$; po wykonaniu tych działań otrzymamy:

$$v_0 = A\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right) + B\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right) \quad . \quad (41)$$

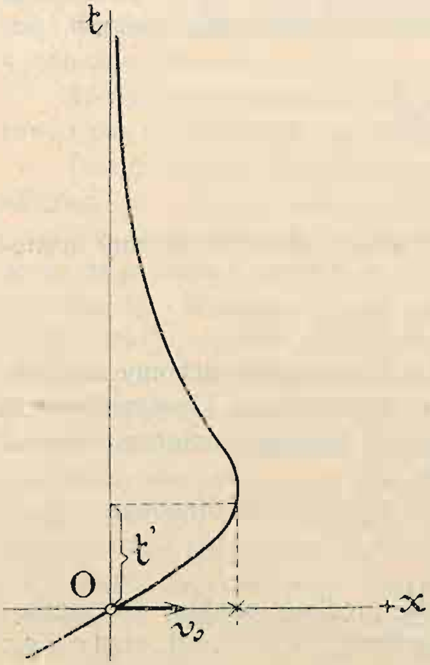
Z tych dwóch równań obliczymy spółczynniki A i B; i oznaczywszy dla skrócenia wartość wyrazu $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ literą γ, otrzymamy:

$$A = \frac{v_0}{2\gamma}; \quad \text{oraz} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma};$$

a następnie, po podstawieniu tych wartości w równ. 39-te, otrzymamy równanie ruchu, wykazujące związek pomiędzy położeniem punktu i czasem; równanie to jest następujące:

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{c}{2m}t} . (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Dla $t = 0$ otrzymamy $x = 0$; co jest zgodne z warunkami początkowego ruchu. Dla $t > 0$, x otrzymuje wartość dodatną, której znak nie zmienia się z rosnącem t, wartość bowiem wyrazu $e^{-\gamma t}$ dla $t > 0$ jest zawsze mniejszą od jedności, gdy tymczasem wartość wyrazu $e^{\gamma t}$ jest zawsze większą od jedności. Dla $t = \infty$ otrzymamy znów $x = 0$, albowiem $\frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{c}{4m^2} - \frac{k}{m}}$, t. j. $\frac{c}{2m} > \gamma$. Punkt zatem od $t = 0$ do chwili $t = \infty$, znajduje się po jednej stronie środka przyciągania; ruch jego jest zatem nieokresowy i punkt powraca asymptotycznie do położenia równowagi i z niego już nie wychodzi. Wykres (x, t) tego ruchu przedstawiony jest na rys. 8-ym.



Rys. 8.

Dla różnych wartości t pomiędzy 0 i ∞, x w równaniu 42-em przyjmuje różne wartości, co znaczy, że punkt zajmuje różne oddalenia od środka przyciągania. Pomiędzy temi oddaleniami są największe i najmniejsze, ażeby je obliczyć, zastosujemy prawidła do wyszukiwania największości i najmniejszości; i w tym celu pochodną x względem t przyrównamy do zera. Pochodna ta wyraża jednocześnie właściwość kinematyczną danego ruchu, t. j. że prędkość punktu w miejscu najmniejszego, lub największego oddalenia $= 0$. Z równania zatem, w ten sposób otrzymanego, obliczymy czas t, odpowiadający tym odchyleniom; a po podstawieniu tych wartości w równ. 42-gie, obliczymy szukane oddalenia. Po wykonaniu rachunku powinniśmy otrzymać dla x wartości: 0 oraz x_{max}.

Przypadek takiego ruchu unaocznimy sobie, przyjąwszy np., że punkt ruchomy, oraz środek przyciągający jest umieszczony w płynie bardzo gęstym, gdy bowiem w tych warunkach nadamy punktowi prędkość v_0, np. uderzeniem, wtedy wychyli się on na pewną odległość, następnie zacznie powracać do miejsca wyjścia, lecz znaczny opór środowiska, w którem się punkt porusza, a mianowicie:

$$c^2 > 4mk,$$

nie pozwoli mu powrócić do środka przyciągania w skończonym okresie czasu. Jeżeli opór środowiska o tyle zmniejszymy, że:

$$c^2 < 4\,m\,k,$$

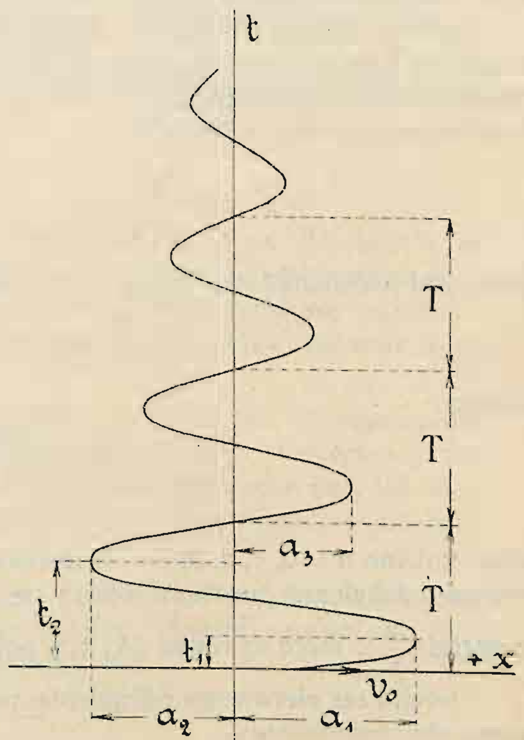
co można osiągnąć np. rozrzedzeniem środowiska, w którem porusza się punkt ruchomy, to otrzymamy wartość pod pierwiastkiem urojoną.

W celu zbadania tego ruchu, oznaczymy wartość pierwiastka $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ przez γ', t. j. podstawimy w powyższe wzory $\gamma = i\gamma'$, a po podstawieniu tej wartości w równ. 42-gie otrzymamy równanie:

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma' t} - e^{-i\gamma' t}}{2i}.$$

Wyraz urojony, na zasadzie odpowiednich przekształceń, wyłożonych w analizie matematycznej, zastąpimy wyrazem $\sin(\gamma' t)$, i otrzymamy równanie ruchu dla danego przypadku w następującej postaci:

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\gamma' t). \quad (43)$$



Rys 9.

W równaniu tem posiadamy dwa czynniki ze zmienną t: czynnik $e^{-\frac{c}{2m}t}$, który z powiększeniem t maleje, i czynnik $\sin(\gamma' t)$, który jest funkcyą okresową; iloczyn więc tych czynników przedstawia krzywą okresową (w danym razie sinusoidę), której spółrzędne x maleją ze wzrostem czasu. Ruch taki nazywamy ruchem harmonicznym przytłumionym. Wykres (x, t) tego ruchu jest przedstawiony na rys. 9-tym.

Zbadamy obecnie, czy ruch ten jest izochronicznym. W tym celu obliczymy okres podwójnego wahnięcia T. Wartość tego okresu otrzymamy z równ. 43-ego, po podstawieniu w nie $x = 0$, a zatem:

$$\sin(\gamma' T) = 0, \qquad \text{z którego} \qquad (\gamma' T) = n\pi.$$

Dla podwójnego wahnięcia $n = 2$, a zatem:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'},$$

lub też po podstawieniu wartości γ':

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Wartość ta nie zależy od odchylenia, a zależy tylko od spółczynników k i c; ruch zatem harmoniczny przytłumiony jest izochroniczny.

Łatwo sprawdzić, że dla $c = 0$, okres podwójnego wahnięcia przybierze wartość, wyrażoną równ. 28-em.

Z równania powyższego wynika, że okres podwójnego wahnięcia w środowisku z oporem jest większy, niż takiż okres ruchu bez oporu, co też zgodne jest z fizycznem pojmowaniem danego zjawiska.

Ażeby obliczyć największe odchylenie punktu, należy przyrównać pochodną x względem t do zera; a z tego równania obliczymy czas, w którym punkt dany doznaje największego odchylenia. Czas ten oznaczymy literą t_m; (m — max i min) i obliczymy je z nast. równania:

$$\frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{c}{2m} t_m} \left[\gamma' \cos(\gamma' t_m) - \frac{c}{2m} \sin(\gamma' t_m)\right] = 0;$$

które jest pochodną równ. 43-ego. Z równania tego mamy:

$$tg\,(\gamma' t_m) = \frac{2m\gamma'}{c}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

a więc:

$$t_m = \frac{ar\,tg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'} + \frac{n\pi}{\gamma'} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

gdzie kolejno $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Z równania tego wyprowadzamy wniosek, że największe odchylenie punktu powtarza się w odstępach czasu, równych liczbowo wartości $\frac{\pi}{\gamma'}$; które są równe $\frac{1}{2}T$, t. j. połowie podwójnego wahnięcia.

Jeżeli czas pierwszego odchylenia punktu oznaczymy literą t_1, to z powyższego równania mamy:

$$t_1 = \frac{ar\,tg\left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)}{\gamma'},$$

a czas następnych odchyleń:

$$t_m = t_1 + n.\tfrac{1}{2}T. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Ażeby obliczyć największe odchylenie, które oznaczymy literą a_m, podstawmy wartość t_m z równ. 45-ego w równ. 43-cie, a otrzymamy szukane odchylenie. W tym celu z równ. 45-ego obliczymy:

$$\sin(\gamma' t_m) = \frac{\frac{2m}{c}\gamma'}{\sqrt{1 + \left(\frac{2m}{c}\gamma'\right)^2}} = \frac{2m\gamma'}{\sqrt{c^2 + (2m\gamma')^2}},$$

a po podstawieniu tej wartości w rów. 43-cie, oraz po podstawieniu odnośnej wartości γ', otrzymamy:

$$a_m = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, e^{-\frac{c}{2m}(t_1 + n \,.\, \frac{1}{2} T)} \,.$$

Dla pierwszego odchylenia, które oznaczymy literą a_1; $n = 0$; a zatem:

$$a_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, e^{-\frac{c}{2m} t_1},$$

a następnie, odchylenie dowolne:

$$a_m = a_1 \,.\, e^{-\frac{c}{2m} \,.\, n \,.\, \frac{1}{2} T} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Z równania tego odczytamy, że wartości odchyleń danego punktu tworzą szereg geometryczny, którego wykładnikiem jest wyraz

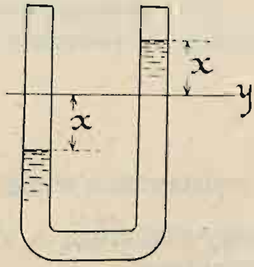
$$e^{-\frac{c}{2m} \,.\, \frac{1}{2} T} \,.$$

Z powiększeniem przeto ilości wahnięć odchylenia maleją w ten sposób, że dla $n = \infty$; $a_m = 0$; i maleją o tyle prędzej, o ile wartość c jest większą, t. j. o ile dane środowisko przedstawia większy opór poruszającemu się punktowi. Punkt ruchomy waha się więc w danych warunkach około środka i zakreśla coraz miejsze odchylenia.

Przyjąwszy $c = 0$ t. j. przyjąwszy, że punkt ruchomy nie doznaje oporu, otrzymamy równanie, któreśmy już poprzednio wyprowadzili. Uczyniwszy zaś $c = \infty$, powinniśmy dla x otrzymać wartość stałą i niezależną od t; przy tak wielkim bowiem oporze ruch nie następuje. Wykres (x, t), oraz wszystkie obliczone w tym przykładzie wielkości są przedstawione na rys. 9-tym.

12. Przykład ruchu harmonicznego. Każdy ruch wogóle a więc i ruch harmoniczny może być wywołany w rozmaity sposób. Przytoczymy jeden z tych przypadków i wskażemy w jaki sposób stosować do obliczeń wzory, wyprowadzone w poprzednim paragrafie.

W rurce o stałym przekroju, wygiętej w postaci litery U, znajduje się płyn, którego powierzchnia, w stanie spoczynku, tworzy poziom, oznaczony na rys. 10-ym literą y. Jeżeli w jednym końcu tej rurki płyn wepchniemy na głębokość x niżej tego poziomu, to w drugim jej końcu podniesie się on na wysokość x. W tem położeniu płynu powstaje siła P, która pcha całą masę m płynu do pierwotnego poziomu; siła ta równa się ciężarowi słupa płynu o wysokości $2\,x$.



Rys. 10.

Oznaczywszy literą f przekrój rurki; literą δ ciężar właściwy poruszającego się płynu, otrzymamy, że siła $P = 2\,x f \delta$ działa odwrotnie dodatnemu zwrotowi prędkości. Równanie zatem dynamiczne ruchu każdego punktu płynu jest następujące:

$$-2\,x f \delta = m \frac{dv}{dt} \,.$$

Jeżeli literą l oznaczymy długość rurki, napełnionej płynem, to masa poruszająca się: $m = \frac{l f \delta}{g}$; po podstawieniu tej wartości w równanie dynamiczne, otrzymamy:

$$-2 x f \delta = \frac{l f \delta}{g} \cdot \frac{dv}{dt};$$

a po skróceniu:

$$-x = \frac{l}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Jest to równanie jednakowe z równ. 21-em, gdy podstawimy w nie $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$. Wahanie się zatem słupa płynu jest harmoniczne, a więc i izochroniczne. Okres podwójnego wahnięcia T obliczymy, gdy podstawimy w równ. 21-sze iloraz $\frac{m}{k} = \frac{l}{2g}$. a zatem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sprawdźmy obecnie wymiar wzoru tego; w tym celu podstawimy:

$$l = L;\ g = LT^{-2};$$

a zatem wyraz

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = T = \text{(czasowi)};$$

co jest zgodne z wymiarem wielkości, znajdującej się po lewej stronie powyższego równania.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę opór, jakiego doznaje płyn podczas wahania się w rurze, i jeżeli ten opór przyjmiemy proporcyonalnym do pierwszej potęgi prędkości, to do obliczenia ruchu można zastosować wzory, wyprowadzone w § poprzednim dla ruchu harmonicznego przytłumionego.

13. Zastosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Z równania dynamicznego ruchu prostolinijnego:

$$P = m \frac{dv}{dt};$$

po podstawieniu w nie $dt = \frac{ds}{v}$, otrzymamy równanie, wykazujące związek pomiędzy siłą, drogą i wywołaną przez tę siłę prędkością; równanie to ma postać następującą:

$$P ds = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right);$$

i jest wyrazem równowartości pracy i energii kinetycznej; porówn. tom I-szy, § 184-ty, rów. 141-sze.

Równanie zatem równowartości pracy i energi kinetycznej jest pierwszą całką równania dynamicznego i wykazuje związek pomiędzy położeniem, t. j. pomiędzy spółrzędną punktu ruchomego i prędkością jego w miejscu, wskazanem przez tę spółrzędną. Zasada zatem równowartości pracy i energii kinetycznej w mechanice jest inną tylko postacią określenia dynamicznego siły. Siła wyraża zmianę prędkości punktu, na który działa; praca zaś wyraża zmianę wartości pewnej funkcyi tej prędkości, t. j. wyraża zmianę wartości $\frac{1}{2}mv^2$; pojęcia przeto siły i pracy wyrażają w innej tylko postaci matematycznej zmianę prędkości punktu, jaką on posiada w pewnej chwili swego ruchu. W następnych przykładach wskażemy sposoby stosowania zasady równowartości pracy i energii kinetycznej do obliczenia ruchu punktu.

Przykład. Przy spadaniu pionowem, bez uwzględnienia oporu powietrza, gdy przyjmiemy oś x skierowaną pionowo ku dołowi; napiszemy równanie pracy:

$$mgdx = d(\tfrac{1}{2}mv^2).$$

Gdy punkt ruchomy, w chwili rozpoczęcia mierzenia drogi x, posiada prędkość v_0, wtedy całka powyższego równania jest następująca:

$$mg\int_0^x dx = \tfrac{1}{2}m\int_{v_0}^{v} d(v^2);$$

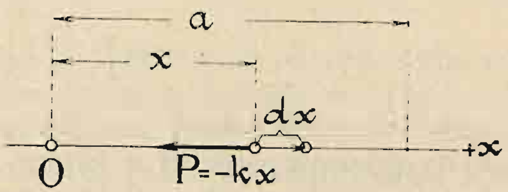
skąd po scałkowaniu:

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2_0}{2g};$$

jest to równanie jednakowe z rów. 15-tem.

Przykład. W razie ruchu harmonicznego, po wykonaniu nieskończenie małego przesunięcia dx, rys. 11-ty, wyrazimy zasadę pracy równaniem:

$$-kxdx = d(\tfrac{1}{2}mv^2).$$



Rys. 11.

Całkując je od x do a oraz od v do 0, napiszemy:

$$-\int_x^a kxdx = \int_v^0 d(\tfrac{1}{2}mv^2);$$

a po scałkowaniu:

$$-\tfrac{1}{2}ka^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2; \text{ skąd:}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}(a^2 - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

jest to równanie jednakowe z rów. 22-iem.

Jeżeli zaś mamy daną prędkość v_m w środku przyciągania, to granice całki obierzemy dla x od zero do x; dla prędkości zaś od v_m do v, a po scałkowaniu otrzymamy:

$$-\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_m{}^2, \text{ skąd}$$

$$v = \pm \sqrt{v_m^2 - \frac{k}{m} x^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

W celu obliczenia największego odchylenia a, podstawimy w równ. poprzednie $v = 0$, a otrzymamy: $a = v_m \sqrt{\frac{m}{k}}$; — jak poprzednio.

W przykładzie odpychania, rów. 32-gie wyraża równowartość pracy i energii kinetycznej i może być napisane bezpośrednio na podstawie tego twierdzenia.

Przykład. Punkt materyalny jest przyciągany przez pewien środek siłą odwrotnie proporcyonalną do drugiej potęgi odległości. Obliczyć na podstawie twierdzenia pracy, ruch punktu, gdy dane jest odchylenie początkowe a, i prędkość w niem $v = 0$. W celu zestawienia równania pracy, wyobraźmy sobie, iż punkt dany został przesunięty z miejsca x, wzdłuż cząstki drogi dx; a po przyrównaniu wartości pracy, powstałej wskutek tego, do przyrostu energii kinetycznej punktu, otrzymamy równanie:

$$-\frac{k}{x^2}\, dx = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right),$$

którego całka pomiędzy granicami od x do a, oraz od v do $v = 0$ jest następująca:

$$\frac{k}{a} - \frac{k}{x} = -\tfrac{1}{2} m v^2\text{: skąd:}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy prędkością i położeniem punktu; i służyć może do obliczenia prędkości w każdem miejscu toru. Ażeby znaleźć równanie ruchu, wyrażające związek pomiędzy drogą i czasem, podstawimy w to równanie $v = \frac{dx}{dt}$; a po oddzieleniu zmiennych i przyjęciu warunków początkowych: dla $x = a$, $t = 0$, napiszemy równanie:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \int_a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

W celu jego scałkowania, zastąpimy zmienną x nową zmienną ψ, określoną równaniem:

$$x = a \cos^2 \psi,$$

z którego wynika:

$$dx = -2a \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\psi \,.\, d\psi.$$

Granice całki nowej, odpowiadające granicom a i x, są 0 i ψ. Po wykonaniu tych podstawień w równ. 53-cie, otrzymamy:

$$t = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\, a^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\psi} \cos^2\psi \,.\, d\psi;$$

skąd, na zasadzie wzoru 53-go, podanego w „Techniku“ na str. 79-ej:

$$t = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, (2\psi + \sin 2\psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Z równania tego obliczyć można, za pośrednictwem wielkości ψ, czas, w jakim punkt ruchomy z wychylenia a przybędzie do miejsca x toru. Odwrotne jednakże obliczenie, mające na celu oznaczenie x, to jest, położenia punktu w danym czasie, wykonać można drogą prób, gdy dane są liczbowe wartości pozostałych zmiennych; nie można bowiem rozwiązać tego równania względem ψ.

Z równ. 52-ego odczytamy, że prędkość v posiada wartości rzeczywiste tylko dla $0 < x < a$, co znaczy, że punkt ruchomy znajduje się podczas ruchu tylko po jednej stronie środka przyciągania. Rozpoczyna on zatem swój ruch z odległości a z prędkością $v = 0$; i przybywa do środka przyciągania z prędkością $v = \infty$, i następnie z powiększeniem dodatnych wartość x zmniejsza znów swą prędkość; jest to zatem ruch okresowy. Z równ. 54-go obliczymy połowę okresu jego podwójnego wahnięcia, gdy podstawimy w nie $\psi = \frac{\pi}{2}$; wtedy bowiem $x = 0$. Oznaczywszy okres podwójnego wahnięcia literą T, otrzymamy jego wartość w postaci wzoru:

$$\tfrac{1}{2}\, T = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \,.\, \pi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

z którego odczytamy, że okresy wahnięć danego punktu zależą od wielkości początkowego wychylenia punktu i są dłuższe dla większych wychyleń; ruch więc w tym razie jest okresowy, lecz nie jest izochroniczny.

14. O całkach równań dynamicznych ruchu prostolinijnego. Równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego z dwiema zmiennemi x i t.

Ażeby otrzymać z niego związek pomiędzy temi zmiennemi w skończonej postaci, należy równanie dynamiczne scałkować. Sposoby całkowania są różne, zależą bowiem od rodzaju funkcyi, jakie wchodzą do danego równania.

Jedna strona równania dynamicznego wyraża siłę, która może być stałą, lub zmienną; w przypadku zmienności może ona zależeć od położenia, t. j. może być wyrażona funkcyą x, jakieśmy to mieli np. w ruchu punktu przyciąganego lub odpychanego; lub może zależeć od prędkości i wyrazi się wtedy funkcyą zmiennej $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, jak to było w przykładzie spadania brył materyalnych z uwzględnieniem oporu powietrza; i wreszcie może ona zależeć od czasu, gdy przyjmiemy np., że działanie danej siły z czasem się zmienia, lub też, gdy przyjmiemy np. że środek przyciągający porusza się i ruch ten wyrazimy funkcyą czasu. Siła może być wreszcie zależna od każdej z tych wielkości oddzielnie lub też w dowolnem ich połączeniu. Siłę więc wyrazić można wogóle funkcyą $f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$, a równanie dynamiczne ruchu prostolinijnego następującem równaniem:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Równanie to może posiadać tyle szczególnych przypadków, ile zestawić można kombinacyi z trzech wielkości x, $\frac{dx}{dt}$ i t, biorąc je pojedyńczo, lub też łącząc je po dwie, lub po trzy; lub też wreszcie gdy ta funkcya przedstawia wielkość stałą. Każdy z tych przypadków wymaga mniej lub więcej odmiennego sposobu całkowania.

Funkcya zatem może być:

1) stałą wielkością, jak w przykładzie spadania w polu sił ciążenia bez uwzględnienia oporów; lub też:
2) może być wyrażona tylko zmienną x; jak to było w przykładzie sił przyciągających;
3) tylko zmienną $\frac{dx}{dt}$; gdy np. bryła, na którą nie działają żadne siły, rzuconą jest w środowisku, przedstawiającem opory, zależne od prędkości, lub też może być wyrażoną;
4) tylko zmienną t. Następnie, może być wyrażoną jednocześnie:
5) zmiennemi x oraz $\frac{dx}{dt}$; jak to było w przykładzie ruchu harmonicznego przytłumionego, lub
6) zmiennemi x oraz t, jak w przykładzie z ruchomym środkiem przyciągania, lub
7) zmiennemi $\frac{dx}{dt}$ oraz t;
8) lub wreszcie, w najogólniejszym przypadku, może być wyrażoną funkcyą wszystkich trzech zmiennych x, $\frac{dx}{dt}$, t.

Całkowanie wzorów we wszystkich tych przypadkach da się sprowadzić, po większej części, do sposobów, wskazanych w przytoczonych przykładach. Ponieważ równanie dynamiczne siły jest równaniem różniczkowem rzędu drugiego, więc całka jego posiadać powinna dwie stałe, które wogóle mogą być obliczone z dwóch znanych par wartości zmiennych; podstawiwszy je bowiem w równanie ruchu, otrzymamy dwa równania z dwiema niewiadomemi, które obliczymy. Zwykle te stałe obliczamy z tak zwanych warunków początkowego ruchu, t. j. ze znanych wartości x i v w chwili t; gdyż po podstawieniu tych wartości w równania ruchu, otrzymamy dwa równania, w których niewiadomemi są wartości nieznanych stałych.

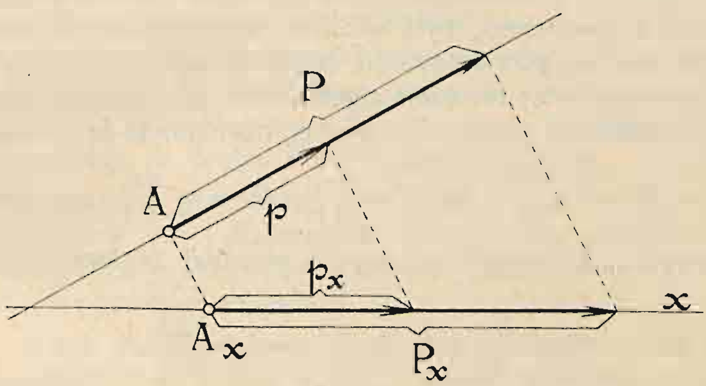
Wybitną rolę pomiędzy temi całkami zajmuje całka, zwana całką pierwszą równania dynamicznego, która wyraża związek pomiędzy spółrzędnemi punktu i prędkością w miejscu, wskazanem przez te spółrzędne. Całką tą jest równanie równowartości pracy i energii kinetycznej. O tej całce mówiliśmy już w § poprzednim.

2. Równanie dynamiczne, wyrażone spółrzędnemi osiowemi.

15. Rzuty sił i przyśpieszeń. Ażeby wogóle obliczyć równania ruchu, gdy dane są siły; lub ażeby obliczyć siły, gdy dany jest ruch punktu, należy równanie dynamiczne:

$$\overline{P} = m\overline{p},$$

które jest wektorowe, wyrazić równaniami algebraicznemi; wtedy bowiem będzie możliwem stosowanie do obliczeń działań zwykłej algebry. W tym celu zrzutujmy promieniami równoległymi wektor siły, określony powyższym wzorem, na dowol-



Rys. 12.

nie obraną w przestrzeni oś x, a otrzymamy rzut p_x przyśpieszenia punktu i rzut P_x danej siły. Wzajemną zależność tych dwóch rzutów odczytamy z rys. 12-tego, i wyrazimy ją nast. równaniami:

$$\frac{P}{p} = \frac{P_x}{p_x} = m; \text{ skąd } P_x = m p_x .$$

Takiż stosunek pozostanie w mocy, gdy wektor ten zrzutujemy na dowolnie obraną płaszczyznę.

Jeżeli literą v_x oznaczymy rzut prędkości punktu właściwego na pewną oś, względnie na płaszczyznę, to stosunek powyższy wyrazimy równaniem:

$$P_x = m \frac{d v_x}{d t}; \text{ lub } P_x = m \frac{d^2 x}{d t^2};$$