

## ROZDZIAŁ II.

### Dwuwymiarowe zagadnienie plastyczności.

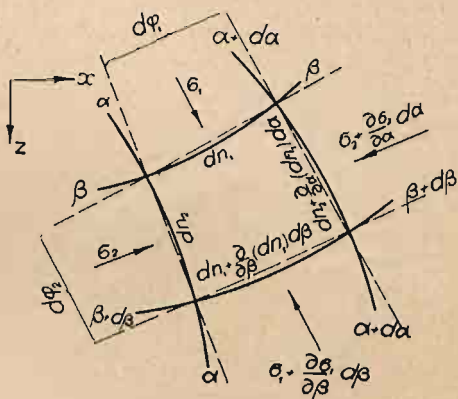
7. Trajektorie izostatyczne Boussinesq'a przy dwuwymiarowym układzie naprężeń, dla ciała szczególnie plastycznego. Na podstawie określonego warunku plastyczności, można teraz przystąpić do ustalenia trajektorji naprężeń głównych, zarówno normalnych jak i stycznych. Boussinesq, jeszcze w r. 1871,<sup>48)</sup><sup>49)</sup> ustalił równania różniczkowe linii izostatycznych, czyli trajektorji głównych naprężeń normalnych, dla ciała szczególnie plastycznego, odpowiadającego warunkowi Tresca:  $\tau_{max} = k$ , przy dwuwymiarowym układzie naprężeń.

Zagadnienie dwuwymiarowe jest o wiele łatwiejsze z punktu widzenia odnośnych metod matematycznych, a zarazem ważne,

jako nadające się do sprawdzenia doświadczalnego. Rys. 14 przedstawia układ sił, działających na pewien nieskończenie mały element powierzchni, ograniczony przez krzywe, należące do ortogonalnego układu krzywych  $(\alpha, \beta)$ .

Wprowadźmy dwie funkcje współrzędnych punktu  $(\alpha, \beta)$ , określone w sposób następujący:

$$\begin{aligned} h_\alpha &= |\text{grad } \alpha| = \frac{d\alpha}{dn_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} \\ h_\beta &= |\text{grad } \beta| = \frac{d\beta}{dn_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (7,1)$$



Rys. 14.

<sup>48)</sup> Boussinesq. C. R. 74, 242, 1872. <sup>49)</sup> M. Levy. C. R. 73, 1098, 1871. Należy zauważyć, że w rozprawach akademii paryskiej z tych czasów stale figuruje dział plastykostatyki i plastykodynamiki.

Oznaczmy teraz kąty  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$  w zależności od funkcji  $h_\alpha$  i  $h_\beta$ . Mamy mianowicie, odrzucając wyższe potęgi małych wielkości:

$$d\varphi_1 = \frac{\partial n_1}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dn_2} = h_\beta \frac{\partial n_1}{\partial \beta} = h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) d\alpha \quad (7,2)$$

$$d\varphi_2 = \frac{\partial n_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn_1} = h_\alpha \frac{\partial n_2}{\partial \alpha} = h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) d\beta$$

Równania równowagi ustalamy na podstawie rys. 14, gdzie główne naprężenia normalne są oznaczone przez  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Materiał plastyczny czyni zadość warunkowi Tresca:  $\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = k$ .

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_2 dn_2) d\alpha + \sigma_1 dn_1 d\varphi_2 = 0 \quad (7,3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma_1 dn_1) d\beta + \sigma_2 dn_2 d\varphi_1 = 0 \quad (7,4)$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymamy:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\sigma_2}{h_\beta} \right) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) = 0 \quad (7,5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\sigma_1}{h_\alpha} \right) + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = 0 \quad (7,6)$$

Różniczkując wyrażenia, zawarte w nawiasach, i łącząc wyrazy podobne, otrzymamy:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) = 2k \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} \quad (7,7)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = 2k \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = -\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \quad (7,8)$$

skąd znowu

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} = -2k \frac{\partial \log h_\beta}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} = 2k \frac{\partial \log h_\alpha}{\partial \beta} \quad (7,9)$$

Równania powyższe całkujemy:

$$\sigma_1 = 2k \log \frac{h_\alpha}{\gamma_1(\alpha)} + C_1 \quad (7,10)$$

$$\sigma_2 = 2k \log \frac{h_\beta}{\gamma_2(\beta)} + C_2 \quad (7,11)$$

Z warunku  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$  otrzymujemy

$$2k = 2k \log \frac{h_\alpha h_\beta}{\gamma_1(\alpha) \gamma_2(\beta)} + C_1 - C_2 \quad (7,12)$$

skąd znowu mamy, że

$$\frac{h_\alpha}{\gamma_1(\alpha)} \cdot \frac{h_\beta}{\gamma_2(\beta)} = C \quad (7,13)$$

Biorąc zamiast dowolnych odstępów  $da$  i  $d\beta$  odstęp  $\frac{1}{\sqrt{C}} \gamma_1(\alpha) da$  i  $\frac{1}{\sqrt{C}} \gamma_2(\beta) d\beta$  normujemy warunek (7,13), sprowadzając go do ostatecznej postaci:

$$h_\alpha h_\beta = 1 \quad (7,14)$$

W dalszym ciągu będziemy mieli do czynienia wyłącznie z funkcjami znormalizowanymi  $h_\alpha$  i  $h_\beta$ , przyczem dla uproszczenia pozostawiamy te same litery dla ich oznaczenia.

Funkcje  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  możemy przedstawić w zmienionej nieco postaci, a mianowicie wprowadzając pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = p_1; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = q_1; \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = p_2; \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = q_2$$

Warunek  $h_\alpha^2 h_\beta^2 = 1$  przekształcimy, posługując się tożsamością Lagrange'a:

$$h_\alpha^2 h_\beta^2 = (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) = (p_1 p_2 + q_1 q_2)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2 = 1 \quad (7,15)$$

Z ortogonalności krzywych  $\alpha$  i  $\beta$  wynika, że  $p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$ , skąd

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1 \quad (7,16)$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy:

$$p_2 = -\frac{q_1}{p_1^2 + q_1^2}; \quad q_2 = +\frac{p_1}{p_1^2 + q_1^2} \quad (7,17)$$

Warunek  $\frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial y}$  da nam po podstawieniu wartości z (7,17) równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_1}{p_1^2 + q_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q_1}{p_1^2 + q_1^2} \right) = 0 \quad (7,18)$$

Dodatkowe sprawdzenie wykazuje, że takie same równanie różniczkowe otrzymamy dla  $p_2$  i  $q_2$ . Upoważnia nas to do usunięcia wskaźników dolnych przy  $p$  i  $q$ , lub, co na jedno wychodzi, zastąpienia obu funkcji  $\alpha$  i  $\beta$  przez jedną np.  $z(x, y)$ . Uskuteczniając różniczkowania i wprowadzając zwykle stosowane znakowania pochodnych drugiego rzędu  $r$ ,  $s$  i  $t$ , otrzymamy ostatecznie równanie Boussinesq'a, wyznaczające trajektorje izostatyczne, w postaci

$$(p^2 - q^2)(r - t) + 4pq s = 0 \quad (7,19)$$

Spółczynniki tego równania różniczkowego drugiego rzędu zależą wyłącznie od  $p$  i  $q$ . Umożliwia to znalezienie charakterystyk<sup>50)</sup> oraz całek pośrednich. Mianowicie wzdłuż charakterystyk mamy do czynienia z zależnością

$$(p^2 - q^2) dp^2 + 4pq dp dq - (p^2 - q^2) dq^2 = 0,$$

skąd otrzymujemy wyrażenia całkowne dla obu układów charakterystyk, a mianowicie

$$\frac{p dp + q dq}{p^2 + q^2} \pm \frac{p dq - q dp}{p^2 + q^2} = 0 \quad (7,20)$$

Otrzymujemy tym sposobem dwa równania o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\log \sqrt{p^2 + q^2} \pm \operatorname{arctg} \frac{p}{q} = C_1 \quad (7,21)$$

Odnośne powierzchnie całkowite są rozwijalne.

Przez zastosowanie przekształcenia Legendre'a, tak często stosowanego w zagadnieniach fizyki matematycznej, sprowadzamy równanie Boussinesq'a do postaci  $(x^2 - y^2)(r - t) - 4xys = 0$ , zaś przez wprowadzenie zmiennych

$$x' = \frac{1}{2} \log \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{1}{2} \log \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

sprowadzamy ostatnie równanie do kształtu:  $s - p - q = 0$ . Ten

<sup>50)</sup> E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome III, str. 72. Paryż 1915.



sam wynik otrzymamy bezpośrednio wprowadzając przekształcenie stycznościowe

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{2} \log \sqrt{p^2 + q^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{q} \\y' &= \frac{1}{2} \log \sqrt{p^2 + q^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{q}\end{aligned}$$

Dalsze uproszczenie równania otrzymujemy, wprowadzając zmienną  $u$ , określoną przez zależność  $z = ue^{x+y}$ . Równanie  $s - p - q = 0$ , sprowadzi się wówczas do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = 0 \quad (7,22)$$

Równanie powyższe jest po równaniu elementarnym  $s = 0$ , najprostszym równaniem typu hyperbolicznego, do którego można zastosować metody całkowania Riemann'a.<sup>51)</sup> Załóżmy naprzód, że  $v = (x - \xi)(y - \eta)$  i szukajmy całki szczególnej równania (7,24), która zależałaby jedynie od  $v$ , a więc  $u = \varphi(v)$ . Otrzymamy tym sposobem równanie Bessela

$$v\varphi''(v) + \varphi'(v) - \varphi(v) = 0 \quad (7,23)$$

Równanie powyższe posiada całkę w postaci funkcji całkowitej zmiennej  $v$ , która dla  $v = 0$ , przyjmuje wartość  $= 1$ . Całkę powyższą przedstawiamy w postaci szeregu

$$J(v) = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{(2!)^2} + \frac{v^3}{(3!)^2} + \dots \quad (7,24)$$

Teoria Riemann'a wskazuje, że zakładając: bądź wartości funkcji  $u$  oraz pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial u}{\partial x}$  i  $\frac{\partial u}{\partial y}$  w każdym punkcie pewnej dowolnej krzywej, bądź też wartości funkcji  $u$  wzdłuż dwóch krzywych dowolnych, określamy tym sposobem w zupełności całkę równania (7,22).

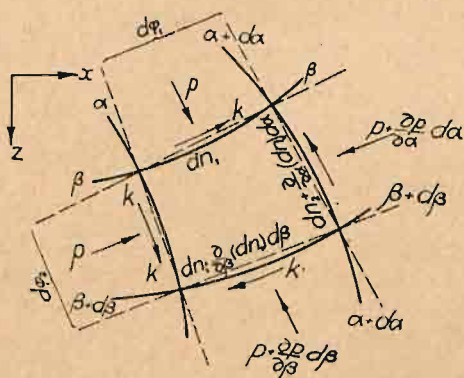
**8. Układ krzywych poślizgowych Hencky'ego w zagadnieniu dwuwymiarowym.** W rozprawie, dotyczącej geometryczno-różniczkowych własności krzywych poślizgowych dla

<sup>51)</sup> p. uwaga 50, str. 152.

ciała szczególnie plastycznego, Hencky<sup>32)</sup> rozwiązał zagadnienie zbliżone do tego, jakie rozważaliśmy w rozdziale poprzednim.

Punktem wyjścia rozumowań Hencky'ego jest pogląd, że najwłaściwszym układem współrzędnych, dopasowanym najlepiej do zagadnienia, jest układ krzywych poślizgowych. Układ ten można otrzymać z układu trajektorji izostatycznych Boussinesq'a: tworzą go mianowicie krzywe, przecinające izogonalnie pod kątem  $45^\circ$  trajektorje Boussinesq'a. Własności ortogonalnego układu krzywych poślizgowych Hencky otrzymał bezpośrednio na podstawie warunków równowagi elementu powierzchniowego, ograniczonego krzywymi poślizgowymi (rys. 15).

O ile poprzednio mieliśmy do czynienia tylko z głównymi naprężeniami normalnymi, o tyle obecnie obok naprężeń normalnych,



Rys. 15.

które sprowadzają się do ciśnienia hydrostatycznego  $p$  (nie obawiamy się tu użycia tego samego oznaczenia, co i dla pochodnej cząstkowej  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ),

występują naprężenia styczne, które dla ciała szczególnie plastycznego posiadają wartość stałą  $k$ .

Przy układaniu równań równowagi należy ba-

czyć na to, że każdemu naprężeniu stycznemu odpowiadają dwie składowe: jedna z powodu zmiany kierunku, druga zaś z powodu zmiany długości elementu krzywoliniowego.

W kierunku wzrastających  $x$  mamy:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(p dn_2) dx + p dn_1 d\varphi_2 - k dn_2 d\varphi_1 - k \frac{\partial}{\partial \beta}(dn_1) d\beta = 0 \quad (8,1)$$

Po wprowadzeniu wartości  $dn_1$ ,  $dn_2$ ,  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$  z równań (7,1–2) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{h_\beta} \right) - p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) + 2k \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = 0 \quad (8,2)$$

<sup>32)</sup> H. Hencky. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, 3, 241, 1923.

Podobne równanie otrzymujemy i dla kierunku wzrastających  $\beta$ .  
Po wykonaniu różniczkowań wzory upraszczają się i mamy:

$$\text{dla kierunku } dn_1 \quad \dots \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} + 2k h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) = 0 \quad (8,3)$$

$$\text{„ „ } dn_2 \quad \dots \quad \frac{\partial p}{\partial \beta} + 2k h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) = 0 \quad (8,4)$$

Po pomnożeniu pierwszego równania przez  $d\alpha$ , drugiego przez  $d\beta$  i zcałkowaniu wzdłuż krzywych  $\beta$  i  $\alpha$  otrzymamy:

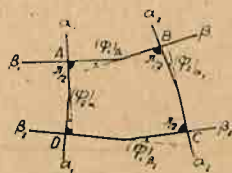
$$p_{\alpha_2} - p_{\alpha_1} = -2k [\varphi_1]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (8,5)$$

$$p_{\beta_2} - p_{\beta_1} = -2k [\varphi_2]_{\beta_1}^{\beta_2} \quad (8,6)$$

Wynika stąd, że przy posuwaniu się wzdłuż jednej z krzywych poślizgowych średnie ciśnienie hydrostatyczne wzrasta o wartość, równą iloczynowi  $2k$  przez kąt, wyrażony w mierze teoretycznej, na jaki obróci się styczna do krzywej poślizgowej, wzdłuż której posuwamy się.

Inny wynik otrzymujemy z warunku ortogonalności krzywych poślizgowych. Sformułował go Hencky na drodze czysto geometrycznej, rozpatrując ośmiokąt (rys. 16), utworzony przez styczne do krzywych poślizgowych w punktach  $ABCD$ . Na mocy znanych twierdzeń z geometrii elementarnej mamy:

$[\varphi_2]_{\alpha_1}^{\alpha_2} + [\varphi_1]_{\beta_1}^{\beta_2} = 0$ , zaś po przejściu do nieskończenia małych



Rys. 16.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta = 0 \quad (8,7)$$

Po wprowadzeniu wartości  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$  z wzorów (7,2) i (8; 3—4)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (d\varphi_2) d\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ h_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \right) \right] d\alpha = \frac{\partial}{\partial \beta} (d\varphi_1) d\beta = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ h_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \right) \right] d\beta = 0$$

skąd wynika, po zcałkowaniu:

$$[\varphi_2]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0; \quad [\varphi_1]_{\beta_1}^{\beta_2} = 0 \quad (8,8)$$



Układ krzywych poślizgowych  $\alpha$  i  $\beta$  posiada tę własność, że kąt pomiędzy stycznymi (lub normalami) do dwóch dowolnych krzywych tego samego pęku w punktach przecięcia ich przez krzywą, należącą do drugiego pęku, nie zmienia się. Własność powyższa jest niezależna od odstępów pomiędzy krzywymi poślizgowymi.

Aby zapoznać się bliżej z charakterem krzywych poślizgowych, wprowadźmy do wzorów promienie krzywizny. Oznaczmy przez  $R_\alpha$  i  $R_\beta$  promienie krzywizny krzywych  $\alpha$  i  $\beta$ . Mamy

$$d\varphi_1 = \frac{dn_1}{R_\beta} = \frac{d\alpha}{h_\alpha R_\beta}; \quad d\varphi_2 = \frac{dn_2}{R_\alpha} = \frac{d\beta}{h_\beta R_\alpha}$$

Ponieważ  $\frac{\partial}{\partial \alpha}(d\varphi_2) = 0$  i  $\frac{\partial}{\partial \beta}(d\varphi_1) = 0$  przeto mamy

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta R_\alpha} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha R_\beta} \right) = 0$$

Po wykonaniu różniczkowań i podstawieniu we wzory wyrażen (7,2) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{1}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \frac{d\varphi_2}{dn_2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial n_2} \left( \frac{1}{R_\beta} \right) + \frac{1}{R_\beta} \frac{d\varphi_1}{dn_1} = 0$$

skąd wreszcie

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial n_2} = 1; \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial n_1} = 1$$

Wzory powyższe zyskują na jasności, jeśli zastąpić  $dn_1$  przez  $ds_\beta$ , zaś  $dn_2$  przez  $ds_\alpha$ . Otrzymamy w ostatecznym wyniku wzory Hencky'ego

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = 1; \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = 1 \quad (8,9)$$

Po zcałkowaniu tych wzorów otrzymujemy

$$R_\alpha = s_\beta + f_1(\beta); \quad R_\beta = s_\alpha + f_2(\alpha) \quad (8,10)$$

Zanim omówimy szereg przykładów praktycznych, w których wzory Hencky'ego znalazły zastosowanie, powróćmy jeszcze do stosunku pomiędzy układem trajektorji izostatycznych Boussinesq'a, a układem krzywych poślizgowych Hencky'ego. Nakreślmy sieć krzywych izostatycznych Boussinesq'a dla unormowanych



przyrostów i przeprowadźmy następnie krzywe według elementarnych prostokątów krzywoliniowych. O tem, że nowy układ nie będzie niczem innym, jak układem krzywych poślizgowych Hencky'ego, łatwo się przekonać bezpośrednio. W tym celu przekształćmy wyrażenie

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ h_{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_{\alpha}} \right) \right] = 0$$

przez zastąpienie parametrów różniczkowych  $h_{\alpha}$  i  $h_{\beta}$  przez  $h_{\alpha} = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$  i  $h_{\beta} = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}$  i wykonanie różniczkowań. Po dokonaniu przeróbek, których nie podajemy dla braku miejsca, otrzymujemy równanie krzywych poślizgowych w postaci:

$$-q \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{pq(r-t) - (p^2 - q^2)s}{(p^2 + q^2)^2} \right] + p \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{pq(r-t) - (p^2 - q^2)s}{(p^2 + q^2)^2} \right] \quad (8,11)$$

Jak przejść od równania Boussinesq'a do równania krzywych poślizgowych. Oznaczmy w równaniu Boussinesq'a pochodne cząstkowe dużymi literami, dla odróżnienia od równania (8,11), mamy:  $(P^2 - Q^2)(R - T) + 4PQS = 0$ . Ponieważ trajektorie głównych naprężeń przecinają krzywe poślizgowe pod kątem  $45^\circ$ , przeto pomiędzy  $p$  i  $q$  z jednej strony, a  $P$  i  $Q$  z drugiej, zachodzą zależności

$$\vartheta = \arctg \frac{q}{p}; \quad \Theta = \arctg \frac{Q}{P}; \quad \text{tang}(\vartheta - \Theta) = 1$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{Q}{P} = \frac{p - q}{p + q} \quad (8,12)$$

Jeśli w równaniu (8,11) zastąpić  $p, q, r, s, t$  przez  $P, Q, R, S, T$ , to otrzymamy równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu. To samo równanie otrzymamy z równania Boussinesq'a, różniczkując go względem  $x$ :

$$2(PR - QS)(R - T) + (P^2 - Q^2)(P_{30} - P_{12}) + 4QRS + 4PS^2 + 4PQP_{21} = 0$$

przyczem przez  $P_{ij}$  oznaczmy pochodne cząstkowe  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^i \partial y^j}$ , gdzie

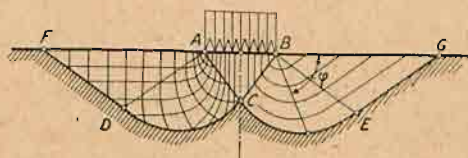
$i+j=3$ ; następnie różniczkując go względem  $y$ :

$$2(PS-QT)(R-T) + (P^2-Q^2)(P_{21}-P_{03}) + 4QS^2 + 4PST + 4QP_{12} = 0$$

wreszcie mnożąc pierwsze wyrażenie przez  $+Q^2P$ , drugie zaś przez  $-P^2Q$  i dodając otrzymane wyniki.

**9. Wytrzymałość (twardość) przy wciskaniu płaskiego stempla w materiał plastyczny.** Hencky z wzorów (8,10) wyprowadził wniosek, że krzywe poślizgowe dla ciała szczególnie plastycznego są zawsze liniami prostymi, tworzącymi układ prostokątny lub promieniowy. Tak jednak nie jest, na co zwrócił uwagę Prandtl, wykazując różnorodność układów krzywych poślizgowych. Układy prostoliniowe stanowią zasadnicze rozwiązanie równań (8,10) i właśnie Prandtl<sup>53)</sup> w r. 1920, a więc na kilka lat przed Hencky'm, postawił hipotezę, że przy wciskaniu płaskiego stempla w półpłaszczyznę obszar odkształceń plastycznych charakteryzuje promieniowy (prostoliniowy) układ krytycznych naprężeń stycznych.<sup>54)</sup> Na ten przykład Prandtla zwrócimy specjalną uwagę, gdyż był on ważnym krokiem naprzód w nowszej teorii plastyczności i pobudził do badań doświadczalnych w tej dziedzinie.

Niech  $AB$  oznacza odcinek półpłaszczyzny, obciążony równomiernie stemplem, który stopniowo włączamy w materiał



Rys. 17.

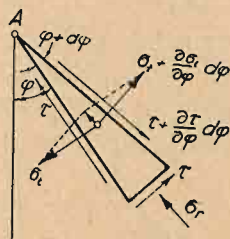
plastyczny. Mamy tu więc do czynienia z zagadnieniem dwuwymiarowym. Pod ciśnieniem stempla materiał jest spychany na boki, przyczem następuje zgniot w sektorach  $ACD$  i  $BCE$ . W trójkątach  $ADF$  i  $BEG$  materiał jest wypychany ku górze. Według schematu przyjętego przez Prandtla, linie prądu można przedstawić tak, jak po prawej stronie, zaś trajektorie naprężeń głównych jak po lewej stronie rys. 17.

Obwiedni Mohr'a charakteryzującej dany materiał plastyczny, odpowiada zależność  $\tau_n = f(\sigma_n)$ . Można ją w przybliżeniu zastą-

<sup>53)</sup> L. Prandtl. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit der Schneiden. ZAMM, 1, 15, 1921. <sup>54)</sup> A. Nádaí. Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flusseisen. ZAMM, 1, 21, 1921.

pić przez dwie proste, nachylone pod kątem  $2\alpha$  względem osi  $\sigma$  (rys. 11).

W sektorach  $ACD$  i  $BCE$  panuje specjalny układ naprężeń. Weźmy pod uwagę wycinek, ograniczony (rys. 18) dwoma promieniami, wychodzącymi z punktu  $A$  i tworzącymi kąt  $\varphi$  i  $\varphi + d\varphi$  z pewnym stałym kierunkiem, przyjętym za podstawę biegunowego układu współrzędnych. Przyjmijmy, że naprężenia  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  i  $\tau$  zależą wyłącznie od kąta  $\varphi$  i nie zależą od promienia  $r$ . Rzuty wszystkich sił działających w kierunku promienia, dają nam pierwszy warunek równowagi:



Rys. 18.

$$r \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} d\varphi + r d\varphi \cdot \sigma_r - r \sigma_t d\varphi = 0 \quad (9,1)$$

zaś przyrównanie do zera momentu wszystkich sił względem początku osi współrzędnych  $A$  daje nam drugie równanie:

$$r \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \frac{r}{2} + r d\varphi \tau \cdot r = 0 \quad (9,2)$$

Oba równania możemy przedstawić w nowej postaci

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \sigma_t - \sigma_r; \quad \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} = -2\tau \quad (9,3)$$

Dzieląc pierwszą zależność przez drugą, otrzymamy

$$\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2\tau} \quad (9,4)$$

Wzór ostatni można interpretować geometrycznie zapomocą koła Mohr'a. Oznacza on poprostu, że w danym punkcie panuje jednorodny układ naprężeń. Do rozwiązania właściwego, nie banalnego, dochodzimy, gdy zamiast brać pod uwagę koło Mohr'a, zaczynamy się poruszać po obwiedni, czyli przechodzić przez szereg sąsiadujących ze sobą jednorodnych układów naprężeń. Na podstawie drugiego z równań (9,3) i zależności  $\tau = \pm f(\sigma_t)$  znajdujemy linijowe równanie różniczkowe

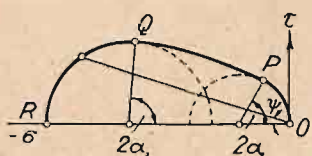
$$d\sigma_t = \mp 2f(\sigma_t) d\varphi \quad (9,5)$$

dające się z łatwością zcałkować.



Układy naprężeń, panujących w poszczególnych wycinkach promieniowych, ograniczonych przez kąty  $\varphi$  i  $\varphi, d\varphi$  są teraz w zupełności określone.

Zwróćmy się jeszcze raz do rys. 18. W pobliżu punktu  $A$  spotykają się trzy obszary: sprężysty w trójkącie  $ADF$ , plastyczny w sektorze  $ACD$  i sprężysty w klinie  $ABC$ . Na granicy poszczególnych obszarów muszą panować wspólne układy naprężeń, którym odpowiadają wspólne koła Mohr'a. Bezpośrednie otoczenie punktu  $A$  charakteryzuje obwiednia Mohr'a (rys. 19), na którą składają się trzy odcinki:

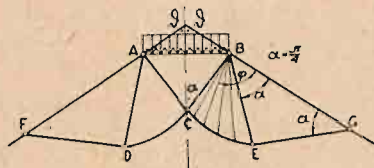


Rys. 19.

$OP$  odpowiada obszarowi sprężystemu  $ADF$   
 $PQ$  „ „ plastycznemu  $ADC$   
 $QR$  „ „ sprężystemu  $ACB$

Krzywą  $PQ$  zastępujemy zwykle dla ułatwienia całkowania prostą linią.

Omawiane zagadnienie dwuwymiarowe Prandtl uogólnił, zastępując prostą, odpowiadającą półpłaszczyźnie, profilem łamanym, składającym się z odcinka prostej  $AB$  i dwóch nieograniczonej



Rys. 20.

długości boków  $AF \infty$  i  $BG \infty$ . Przy odkształceniu trwałem otrzymujemy, podobnie jak poprzednio obszary plastyczne  $ACD$  i  $BCE$ . Półkąat wierzchołkowy tego profilu oznaczmy przez  $\varphi$ . Trójkąty  $BEG$  i  $ADF$  są spychane na bok w kierunku

wskazanych przez proste  $EG$  i  $FD$ , przyczem panują w nich ciśnienia, odpowiadające wytrzymałości na ściskanie. W sektorach ciśnienia zmieniają się linjowo względem kąta  $\varphi$ . W trójkącie  $ABC$  panuje ciśnienie największe, odpowiadające wytrzymałości na zgniecenie danego profilu.

Obliczenia, mające na celu określenie układu naprężeń, przeprowadzimy naprzód dla ciała szczególnie plastycznego, gdy  $\tau_{max} = k$ . Mamy wówczas na podstawie równania (9,3) oraz (4,3):

$$\sigma_t = \sigma_r = -2k\varphi + c \quad (9,6)$$

$$\sigma_2 = -2k\varphi + c \pm k \quad (9,7)$$



Kąt poślizgowy jest stały  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ ; zaś wytrzymałość na ściskanie  $\sigma_c = 2k$ . Trajektorie naprężeń głównych są przytem równoległe lub prostopadłe do boków  $AF$  i  $BG$ . Z warunku brzegowego wzdłuż prostej  $BE$  lub  $AD$ , gdzie panuje naprężenie normalne  $2k$  lub  $O$  wynika, że

$$|\sigma_1|_{\varphi=\alpha} = -2k\alpha + c + k = 2k; \text{ lub } |\sigma_2|_{\varphi=\alpha} = -2k\alpha + c - k = 0$$

skąd otrzymujemy  $c = k + 2k\alpha = k(1 + 2\alpha)$  i wreszcie

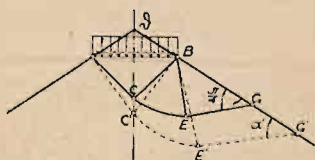
$$\sigma_1 = -2k[1 + (\varphi - \alpha)]; \quad \sigma_2 = -2k(\varphi - \alpha) \quad (9,8)$$

Dla  $\varphi = \alpha + \vartheta$ , czyli dla prostych  $AC$  i  $BC$  otrzymujemy

$$\sigma_1 = -2k(1 + \vartheta); \quad \sigma_2 = -2k\vartheta \quad (9,9)$$

Aby więc otrzymać zgniot według schematu, zaproponowanego przez Prandtla, ciśnienie wywarte na odcinek  $AB$  musi wynosić  $\sigma = 2k(1 + \vartheta)$ . Dla półpłaszczyzny  $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$  ciśnienie powyższe wynosi odpowiednio  $\sigma = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Układ krzywych poślizgowych składa się w tym wypadku z promieni, ograniczających wycinki w sektorach, oraz z przecinających je pod stałym kątem spirali logarytmicznych. Układ ten jest ortogonalnym tylko dla ciała szczególnie plastycznego, przy czem spirale logarytmiczne przechodzą wówczas w łuki kół. Rys. 21 zapoznaje nas ze zmianą układu krzywych poślizgowych przy przejściu od materiału szczególnie plastycznego do innego, określonego przez prostolinjowe obwiednie Mohr'a. Mianowicie sektory  $BCE$  i  $BEG$  przechodzą odpowiednio w sektory  $BC'E'$  i  $BE'G'$ .



Rys. 21.

Jeśli zamiast ciała szczególnie plastycznego, weźmiemy materiał plastyczny, któremu odpowiada obwiednia Mohr'a, składająca się z dwóch prostych, pochylonych pod kątem  $\vartheta$  względem osi naprężeń normalnych, czyli gdy  $\tau = \pm(k - \sigma \operatorname{tg} \vartheta)$ , to z równań (9; 3 i 5) otrzymamy  $\varphi = \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \log \operatorname{nat} \tau + c'$ , skąd znowu:

$$\tau = c \cdot \exp(\pm 2\varphi \operatorname{tg} \vartheta) \quad (9,10)$$

Z wzoru (9,3) po dokonaniu zcałkowania i uwzględnieniu zależności pomiędzy  $\tau$  i  $\sigma_t$ , wynikającej z obwiedni Mohr'a, otrzymamy:

$$\sigma_t = -c \cdot \operatorname{ctg} \delta \cdot \exp(\pm 2\varphi \operatorname{tg} \delta) + k \operatorname{ctg} \delta \quad (9,11)$$

skąd możemy określić naprężenia główne w sposób analogiczny jak dla ciała szczególnie plastycznego. Otrzymujemy mianowicie:

$$\sigma_2 = \operatorname{ctg} \delta \left[ k - c \frac{1 \pm \sin \delta}{\cos^2 \delta} \exp(\pm 2\varphi \operatorname{tg} \delta) \right] \quad (9,12)$$

Dla  $\varphi = \alpha$  jedno z naprężeń głównych ma być równem zeru, zaś drugie wytrzymałości na ciśnienie  $\sigma_c$ . Na podstawie tego warunku brzegowego rugujemy nieoznaczony współczynnik  $c$ . Otrzymujemy mianowicie:

$$\sigma_1 = k \operatorname{ctg} \delta \{1 - \exp[2(\varphi - \alpha) \operatorname{tg} \delta]\} \quad (9,131)$$

$$\sigma_2 = -\frac{k \operatorname{ctg} \delta}{1 - \sin \delta} \{(1 + \sin \delta) \exp[2(\varphi - \alpha) \operatorname{tg} \delta] - (1 - \sin \delta)\} \quad (9,132)$$

Podstawiając  $\varphi = \alpha + \vartheta$  otrzymamy z ostatniego równania obciążenie  $\sigma_s$  stempla, niezbędne dla wywołania zgniotu

$$\sigma_s = -\frac{k \operatorname{ctg} \delta}{1 - \sin \delta} [(1 + \sin \delta) \exp(2\vartheta \operatorname{tg} \delta) - (1 - \sin \delta)]$$

Dla  $\varphi = \alpha$  równanie (9,132) daje nam

$$\sigma_c = -\frac{2k \operatorname{ctg} \delta}{1 - \sin \delta} \cdot \sin \delta = -\frac{2k \cos \delta}{1 - \sin \delta}$$

Daje nam to możliwość przedstawienia  $\sigma_s$  w nowej postaci:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_c}{2 \sin \delta} [(1 + \sin \delta) \exp(2\vartheta \operatorname{tg} \delta) - (1 - \sin \delta)] \quad (9,14)$$

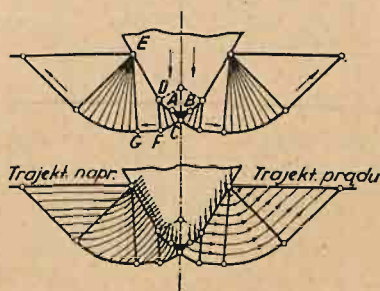
Powróćmy do rys. 18, określającego jednorodny układ naprężeń w elementarnym wycinku, ograniczonym kątami  $\varphi$  i  $\varphi + d\varphi$ . Na podstawie równań (9; 1 i 2) wyznaczyliśmy krzywe poślizgowe w całym sektorze  $ACD$  (rys. 17). Tak samo możemy wyznaczyć i trajektorje naprężeń głównych. Ale możemy na drodze pewnego rozumowania zbudować nowe możliwe układy naprężeń. Miano-

wicie dwa sąsiednie wycinki elementarne możemy przesunąć wzdłuż promienia i równowaga nie będzie przytem naruszona, gdyż w każdym z wycinków panuje jednorodny układ naprężeń. Powtórzenie wielokrotne omawianej operacji daje możność otrzymywania coraz to nowych prostolinjowych układów poślizgowych. I w tym wypadku naprężenie jest funkcją kąta  $\varphi$ , jaki tworzą proste układu z określonym stałym kierunkiem w płaszczyźnie. Należy przytem pamiętać o zasadzie St. Venant'a, według której tensor naprężeń jest proporcjonalny do tensora prędkości odkształcenia.

Ciekawym przykładem zastosowania tej zasady jest ustalenie układu naprężeń i linii prądu materiału plastycznego przy wciskaniu stempla o dowolnym profilu w materiał szczególnie plastyczny. Zagadnienie, podobnie jak i w poprzednich przypadkach, jest dwuwymiarowe; Prandtl uwzględnia przytem tarcie stempla o materiał<sup>55)</sup>. Odcinek *ABC* (rys. 22) przesuwają się bez tarcia. Wzdłuż *ADE* mamy do czynienia z poślizgiem, wskutek czego kierunek ciśnienia jest pochylony o kąt tarcia  $\psi$  względem normali. Przy materiale szczególnie plastycznym proste poślizgowe tworzą z normalami kąty  $\frac{\pi}{4} + \varphi$ .

Rys. 23 zapoznaje nas z podanym przez Prandtla układem trajektorii naprężeń głównych (lewa strona) i trajektorii prądu (prawa strona) materiału plastycznego. Ze względu na bardziej przejrzyste przedstawienie układu naprężeń, podane zostały jedynie trajektorie, odpowiadające większemu naprężeniu głównemu (ciśnieniu).

**10. Rozwinięcie przez Prandtla teorii krzywych poślizgowych.** Zadziwiająco proste własności geometryczno-różniczkowe układów krzywych poślizgowych, znalezione przez Hencky'ego, pobudziły Prandtla do naszkicowania pewnej liczby rozwiązań,



Rys. 22—23.

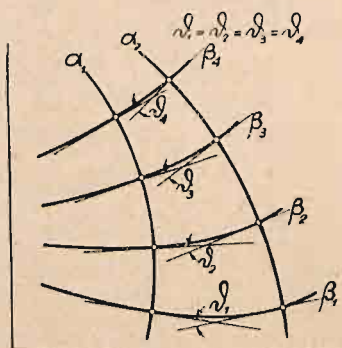
<sup>55)</sup> Prandtl. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. Congr. Applied Mech. Delft. 1925.



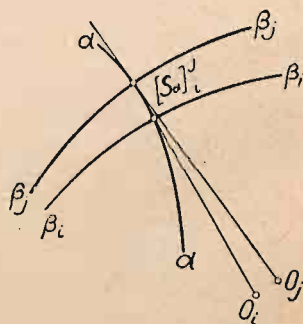
dotyczących dwuwymiarowych zagadnień przy różnorodnych warunkach brzegowych.

Uprzytomnijmy sobie czysto geometryczną treść geometryczno-różniczkowych wzorów Hencky'ego. A więc: styczne do krzywych, należących do jednego pęku ( $\beta$ ), w punktach przecięcia się ich z dwoma dowolnymi krzywymi, należącymi do drugiego pęku ( $\alpha$ ), wykazują stałą zmianę kierunku. Rys. 24 nie wymaga dodatkowych wyjaśnień.

Promień krzywizny (rys. 25) krzywych, należących do jednego z pęków ( $\beta$ ), w punktach przecięcia się ich z dowolną krzywą, należącą do drugiego pęku ( $\alpha$ ), zwiększa się przy poruszaniu się po ostatniej krzywej ( $\alpha$ ) o długość przebieganego łuku krzywej  $[s_\alpha]_j$ . Łatwo zdać sobie sprawę z tego, że środki krzywizny



Rys. 24.



Rys. 25.

$O_i$ ,  $O_j$  i t. d. będą tworzyły rozwiniętą krzywej  $\alpha$ . Podane własności geometryczne dają możliwość stopniowego kreślenia układu krzywych poślizgowych z chwilą, gdy znamy jedną z krzywych np.  $\alpha$  i promień krzywizny  $R_\beta$  w jednym z punktów krzywej  $\alpha$ .

Układ krzywych poślizgowych, powstających przy wciskaniu cylindrycznego trzpienia w grubościenny pierścień z miękkiego żelaza (rys. 26) składa się, jak to wyjaśnił Prandtl, ze spirali logarytmicznych, tworzących kąty  $\pm \pi/4$  z promieniami. Krzywe izostatyczne tworzą w tym wypadku układ promieniowy. Jak to łatwo sprawdzić, oba założenia Hencky'ego są tu spełnione, gdyż w spirali logarytmicznej promień krzywizny równa się długości łuku, odmierzanego od środka. Przy sposobności należy zauważyć, że tym samym założeniom odpowiadają układy cykloid.



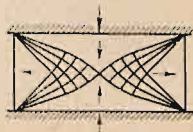
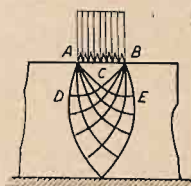
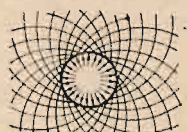
Jednym z możliwych rozwiązań może być też układ, przedstawiony na rys. 27, a dotyczący wtlaczania płaskiego stempla w płytę niezbyt grubą w stosunku do szerokości stempla. Prandtl przypuszcza mianowicie, że przez analogję z przykładem podanym poprzednio (rys. 17), zgniot zachodzi w sektorach  $ACD$  i  $BCE$ , w których mamy do czynienia z promieniowym układem krzywych poślizgowych. Możemy przypuszczać, że wobec niewielkiej grubości płyty zgniot posuwa się ku dołowi, przy czem odnośny układ krzywych otrzymujemy zapomocą omawianej poprzednio metody wykreślniej. W pewnej chwili zgniot dochodzi do spodu płyty, która zaczyna być rozpychana na dwie strony.

Przy ściskaniu klocka z materiału plastycznego pomiędzy dwoma sztywnymi płytami jest prawdopodobnem powstanie układu krzywych poślizgowych według rys. 28. Jeśli klocek jest szeroki w porównaniu z wysokością, a powierzchnie płyt są szorstkie tak, że poślizgi zachodzą jedynie w materiale plastycznym, przypuszczalny układ będzie jak na rys. 29. Taki układ można sobie wyobrazić, według Prandtla, w ołowianej płycie, ściskanej pomiędzy dwoma płaskimi blokami kamiennymi o szorstkich powierzchniach oporowych.

**11. Badania Nádaí'a nad układem krzywych poślizgowych.** Nádaí<sup>56)</sup> w swych badaniach teoretycznych za punkt wyjścia przyjął równania St. Venant'a, oparte na warunku plastyczności Tresca.<sup>57)</sup> Zakładamy mianowicie istnienie funkcji naprężeń  $F$  (Airy), czyniącej zadość równaniu biharmonicznemu  $\Delta\Delta F = 0$ , przyczem składowe naprężeń będą odpowiednio:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (11,1)$$

<sup>56)</sup> A. Nádaí. Über die Gleit- und Verzweigungsflächen enniger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körpern. Z. f. Phys. 30, 106, 1924. <sup>57)</sup> T. v. Kármán. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre. Enz. Math. Wiss. IV, 4, 744.



Rys. 26, 27, 28 i 29.

Łatwo sprawdzić, że te składowe naprężeń czynią zadość równaniom równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (11,2)$$

Warunek plastyczności  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2$  przedstawi się w postaci

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4k^2 \quad (11,3)$$

Otrzymaliśmy tym sposobem równanie różniczkowe, które posiada szereg znanych rozwiązań. Jakkolwiek równanie (11,3) nie jest całką pośrednią równania biharmonicznego, to jednak jego kształt jest taki, że wiele funkcji biharmonicznych czyni mu zadość, jak np.  $F = kr^2 \log r$ ; lub  $F = kr^2 \varphi/2$ .

Modyfikując nieco metodę Prandtla,<sup>58)</sup> Nádai otrzymał równanie różniczkowe, określające układy naprężeń dla ciała szczególnie plastycznego, które znalazło szersze zastosowanie. Zauważył on mianowicie, że warunkowi plastyczności  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2$  odpowiada rozwiązanie:

$$\tau = k \sin \psi; \quad \sigma_x - \sigma_y = 2k \cos \psi \quad (11,4)$$

gdzie  $\psi$  jest funkcją współrzędnych. Jeśli oznaczymy przez  $\alpha$  podwójną wartość kąta, jaki czyni jedno z naprężeń głównych z osią  $x$ , to mamy  $\tan 2\alpha = 2\tau/(\sigma_x - \sigma_y) = \pm \tan \psi$ , skąd otrzymujemy  $\alpha = \frac{1}{2}\psi$  lub  $\alpha = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\pi$ . Teraz możemy ustalić bezpośrednio równanie różniczkowe trajektorji naprężeń głównych dla ciała szczególnie plastycznego, a mianowicie

$$\frac{dy}{dx} = \pm \tan \frac{\psi}{2} \text{ lub } \frac{dy}{dx} = \pm \tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2} \right) \quad (11,5)$$

Krzywe poślizgowe, które przecinają trajektorje izostatyczne pod kątem  $45^\circ$  są określone przez równania:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \text{ lub } \frac{dy}{dx} = \pm \tan \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \quad (11,6)$$

<sup>58)</sup> L. Prandtl. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. ZAMM, 3, 401, 1923.

Z równań (11,2) otrzymujemy bezpośrednio:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \quad (11,7)$$

lub po wprowadzeniu wartości  $\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{k^2 - \tau^2}$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \quad (11,8)$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (11,7) po dokonaniu właściwych podstawień, przechodzi w równanie Boussinesq'a (7,20) lub Hencky'ego (8,11). Dla przykładu weźmy równanie Hencky'ego. Zauważmy naprzód, że

$$\frac{pq(r-t) - (p^2 - q^2)s}{(p^2 + q^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{p^2 + q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{p^2 + q^2} \right)$$

skąd równanie Hencky'ego przybiera kształt

$$\begin{aligned} & -q \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{p^2 + q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{p^2 + q^2} \right) \right] + \\ & + p \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q}{p^2 + q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{p^2 + q^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (11,9)$$

Przez  $p$  i  $q$  oznaczamy przytem pochodne cząstkowe  $p = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ;  $q = \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ . Z równań (11,6) otrzymujemy następującą zależność pomiędzy funkcją  $\psi$  a pochodnymi  $p$  i  $q$ , przyczem bierzemy kąt  $\left( \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$  ze znakiem ujemnym

$$-\left( \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \arctg \frac{p}{q} = 0 \quad (11,10)$$

Znając  $\psi$  jako funkcję  $p$  i  $q$ , określamy na podstawie równań (11,4) wartości  $\sigma_x - \sigma_y$  oraz  $\tau$  w zależności od  $p$  i  $q$ . Po podstawieniu otrzymanych wartości w równaniu (11,8) i po wykonaniu różniczkowań w równaniu (11,9) przekonywamy się o identyczności wyników. Mianowicie mamy wówczas:

$$\sin \psi = \frac{q^2 - p^2}{p^2 + q^2}; \quad \cos \psi = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

zaś równanie Hencky'ego przedstawi się w postaci

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{4pq}{p^2 + q^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{qs - pt}{p^2 + q^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{qr - ps}{p^2 + q^2} \right) = 0$$

Ponieważ dwa wyrazy ostatnie znoszą się, jak to łatwo sprawdzić bezpośrednio, przeto pozostają trzy wyrazy pierwsze, które pokrywają się tożsamościowo z równaniem (11,7).

Równanie (11,8) pozwala określić układ naprężeń w materiale plastycznym, ściskanym za pośrednictwem dwóch płyt równoległych o szorstkich powierzchniach. W tym wypadku, jak to zauważył Prandtl, naprężenie styczne  $\tau$  można uważać za funkcję jednej tylko współrzędnej  $y$ . Równanie (11,8) daje wówczas  $\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0$ , skąd  $\tau = c_1 + c_2 y$ . Jeśli przyjąć, że  $c_1 = 0$  i że dla dwóch prostych ograniczających dane ciało  $y = \pm h$  naprężenie styczne osiąga swe maximum  $k$ , to otrzymamy  $c_2 = k/h$  oraz  $\tau = ky/h$ . Z równań (11,2) otrzymamy oba naprężenia główne:

$$\sigma_x = -k \frac{x}{h} + c \pm 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}; \quad \sigma_y = -k \frac{x}{h} + c \quad (11,11)$$

Możemy też określić kształt krzywych, posługując się funkcją pomocniczą  $\psi$ . Mianowicie mamy na podstawie równań (11,4) i (11,5)

$$\frac{dy}{dx} = \pm \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) = \pm \frac{1 + \sin \psi}{\cos \psi}$$

bądź

$$\frac{dy}{dx} = \pm \tan \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) = \mp \frac{1 - \sin \psi}{\cos \psi}$$

skąd otrzymujemy dwa układy krzywych poślizgowych:

$$\text{I.} \quad x = \pm h (\psi + \cos \psi) + \text{const}; \quad y = h \sin \psi \quad (11,12)$$

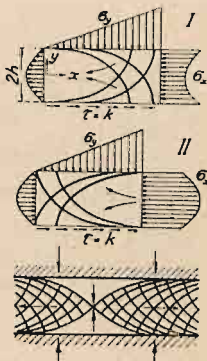
$$\text{II.} \quad x = \mp h (\psi - \cos \psi) + \text{const}; \quad y = h \sin \psi \quad (11,13)$$

Otrzymane układy przedstawione są na rys. 30 i 31. Składają się nań półcykloidy. Układ I (rys. 30) odpowiada ściskaniu górnej i dolnej płyty i wyciskaniu materiału w kierunku osi  $x$ . Układ II



(rys. 31) odpowiada ścisaniu materiału wzdłuż osi  $x$  przy stopniowym rozsuwaniu obu płyt.

Jeśli zaczniemy ścisnąć materiał plastyczny w rodzaju ołowiu za pośrednictwem kamiennych płyt o szorstkiej powierzchni, to przebieg zjawiska, według Prandtl'a, przedstawia się jak na rys. 32. Mianowicie pośrodku utworzą się kliny z nieruchomego materiału, pozostającego w dziedzinie sprężystej. Po obu stronach mamy do czynienia z cykloidalnymi układami krzywych poślizgowych, zaś przy swobodnych bokach z układami promieniowymi (rys. 29).



Rys. 30, 31 i 32.

**12. Przykłady płaskich układów krzywych poślizgowych.** Stosując w dalszym ciągu warunek plastyczności Tresca - St. Venant'a, Nádai otrzymał nowe wyniki dla układu promieniowego i dla układu klinowego. Równania, określające płaski układ naprężeń w spólrzędnych biegunowych są następujące:

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_t + \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = 0; \quad \frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} + \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + \tau = 0; \quad (12,1)$$

łącznie z warunkiem plastyczności  $(\sigma_r - \sigma_t)^2 + 4\tau^2 = 4k^2$  dają one możliwość wyrugowania  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  i znalezienia równania różniczkowego, określającego naprężenie styczne w postaci:

$$2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r \sqrt{k^2 - \tau^2}) = r^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial \varphi^2} \quad (12,2)$$

Równania (12,1) różnią się tem zasadniczo od równań (9; 1,2), że składowe naprężeń są funkcjami nie tylko kąta  $\varphi$ , lecz i promienia  $r$ .

Równania ostatnie, zastosowane względem rury grubościowej z materiału szczególnie plastycznego, dają rozwiązania omawiane już poprzednio, a polegające na tem, że krzywe poślizgowe tworzą dwa ortogonalne układy spirali logarytmicznych:

$$\sigma_r = \pm 2k \lognat \frac{a}{r}; \quad \sigma_t = \pm 2k \left( -1 + \lognat \frac{a}{r} \right); \quad \tau = 0 \quad (12,2)$$

Podobne układy otrzymał Nádai, wtlaczając stempel cylindryczny

w klocek z miękkiego żelaza. Na powierzchni otrzymujemy przytem bruzdki poślizgowe (rys. 33) w postaci spirali logarytmicznych, których zasięg można określić promieniem  $r=a$ .

Jeśli naprężenie styczne  $\tau$  zależy jedynie od współrzędnej kątowej  $\varphi$ , równanie (12,2) sprowadza się do znacznie prostszej postaci. Po zcałkowaniu otrzymujemy:



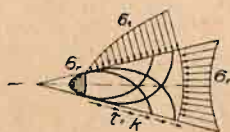
Rys. 33.

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \mp 2\sqrt{k^2 - \tau^2} + \text{const} \quad (12,4)$$

Jeśli stała całkowania jest zerem, mamy  $\tau = \mp k \sin(c_1 \pm 2\varphi)$ . Jeśli ta stała nie jest zerem i równa się np.  $2kc$ , zcałkowanie równania (12,4) daje wynik

$$2\varphi + c_1 = \int \frac{d\tau}{kc \mp \sqrt{k^2 - \tau^2}} \quad (12,5)$$

I w tym przypadku wprowadzenie funkcji pomocniczej  $\psi$  okazuje się rzeczą pożyteczną. Rozwiązaniem powyższego zagadnienia dla warstwy klinowej (rys. 34) zajął się Nádaí,<sup>56)</sup> wyznaczając układy naprężeń, trajektorje izostatyczne i krzywe poślizgowe. Z ostatnimi zapoznaje nas właśnie rys. 34. Punktem wyjścia obliczeń Nádaí'a było równanie (12,2), określające naprężenia styczne w współrzędnych biegunowych.



Rys. 34.

Znanem powszechnie zagadnieniem jest pękanie poślizgowe w pobliżu krawędzi ciała poddanego ścisłaniu. Na podstawie badań doświadczalnych i rozważań teoretycznych, Nádaí doszedł do wniosku, że w pobliżu tej krawędzi mamy do czynienia z promieniowym układem naprężeń (rys. 35).

Zauważmy naprzód, że równanie St. Vénant'a (11,3) ma niektóre wspólne rozwiązania z równaniem  $\Delta\Delta F = 0$ . Tak np. równaniu St. Vénant'a czynią zadość następujące funkcje Airy'ego:  $r^2\varphi$ ;  $r^2\cos 2\varphi$ ;  $r^2\sin 2\varphi$ ;  $r^2$ , jak również wszelkie linjowe wyrażenia tych funkcji. Możemy zastosować zasadę superpozycji naprężeń, otrzymując te czy inne warunki brzegowe. Opierając się na czysto empirycznej metodzie kojarzenia funkcji biharmonicznych. Nádaí otrzymał wzory, określające naprężenia w współrzędnych biegunowych, odpowiadających układowi przedstawionemu na rys. 35.

Niech

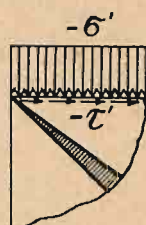
$$F = -\left(\frac{\sigma'}{4} - \frac{\pi}{8} \tau'\right) - \left(\frac{\sigma'}{4} - \frac{\pi}{8} \tau'\right) r^2 \cos 2\varphi + \frac{\tau'}{4} r^2 \sin 2\varphi + \frac{\tau'}{2} r^2 \varphi \quad (12,6)$$

Jeśli równanie biharmoniczne wyrazimy w współrzędnych biegunowych<sup>59)</sup>, to naprężenia przedstawimy w postaci wzorów:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right]$$

skąd, po podstawieniu w nie danej funkcji  $F$ , otrzymamy dla kątów  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  następujące wartości brzegowe

	$\sigma_r$	$\sigma_t$	$\tau$
$\varphi = 0$	$-\frac{\pi}{2} \tau'$	$-\sigma'$	$-\tau'$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$-\sigma' + \frac{\pi}{2} \tau'$	0	0



Rys. 35.

tak, jak na rys. 35.

Dochodzimy stąd do ważnego wniosku, że układ naprężeń sprężystych w pobliżu zgniatanej krawędzi, wg. schematu podanego na rys. 35, jest tak samo promieniowy, jak i przy zgniocie plastycznym. Najbardziej zaciekawia nas położenie elementarnego nieskończonego cienkiego wycinka, w którym następuje najpierw zgniot i powstaje pierwsza płaszczyzna poślizgowa, określona przez pewien kąt  $\varphi = \varphi_0$ . Można go bez trudności obliczyć, zarówno dla ciała szczególnie plastycznego, jak i podlegającego stwardnianiu. Naprzód określamy:  $\tau_{\max} = \frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_t)^2 + \tau^2$ , a następnie szukamy największych wartości  $\tau_{\max}$  w zależności od kąta  $\varphi$ , przyrównując pierwszą pochodną do zera:  $\frac{d\tau_{\max}}{d\varphi} = 0$ . Należy

przytem zauważyć, że, zamiast dwóch stałych  $\sigma'$  i  $\tau'$ , w odnośnych wzorach mamy do czynienia właściwie z ich stosunkiem  $\tau'/\sigma' = \mu$ , który możemy uważać za współczynnik tarcia w chwili, gdy pod działaniem obciążeń normalnych i stycznych materiał zgniatanej próbki zaczyna się przesuwać wzdłuż płasz-

<sup>59)</sup> A. i L. Föppl. Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. I tom, 2-ie wydanie, str. 303.



czyzny poślizgu. Nádaí obliczył kąty  $\varphi_p$  dla różnych wartości  $\mu$  i otrzymał

$\mu =$	0	0,1	0,2
$\varphi_p =$	45°	41° 57'	36° 52'

Podane rozważania teoretyczne znalazły częściowe potwierdzenie doświadczalne.

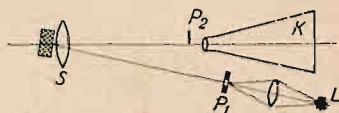
**13. Metody doświadczalne.** Badania doświadczalne polegają przedewszystkiem na obserwowaniu powstawania bruzdek poślizgowych na powierzchni odkształcanych próbek. Badania w tym kierunku znane są od dawna: pierwsze obserwacje zawdzięczamy Lüders'owi<sup>60)</sup>, systematyczne badania L. Hartmann'owi<sup>61)</sup>. W ostatnich latach dawniejsze metody uzupełniono kilkoma nowymi sposobami wykrywania odkształceń trwałych i obserwacji bruzdek poślizgowych w pierwszej fazie ich powstawania. Obecnie stosujemy metody następujące:

1. Metoda L. Hartmann'a polega na obserwowaniu układów bruzdek, występujących na gładko odpolerowanej i zlekka utlenionej powierzchni próbki, podanej określonemu odkształceniu. Początkowe cząsteczki tlenku metalicznego podnoszą się w poszczególnych punktach, tworząc czworokątne piramidy, których podstawy zajmują określone położenie względem kierunków izostatycznych. W miarę wzrostu obciążenia piramidy lokalne łączą się w ugrupowania w postaci linii. Doświadczenie wykazuje, że otrzymany układ linii jest niczem innem, jak układem krzywych poślizgowych. W swej pracy Hartmann podaje różnorodne przykłady tych układów dla poszczególnych kształtów próbek i różnych metali.

2. Bezpośrednia obserwacja odpolerowanej powierzchni próbki daje dobre wyniki, gdyż bruzdki poślizgowe wyraźnie się zaznaczają na tle błyszczącym. Fotografia natomiast nie oddaje należycie wypukłości i bruzdek poślizgowych. Jedynie zdjęcia stereoskopowe uwydatniają należycie nierówności powierzchni. Nádaí, rozwijając pewne metody Prandtl'a, zastosował z powo-

<sup>60)</sup> J. Todhunter and K. Pearson. A history of the theory of elasticity and the strength of materials. 3 tom. Cambridge 1886—1893. <sup>61)</sup> L. Hartmann. Distribution des deformations dans les métaux soumis à des efforts. Paryż 1896. Tenże: Sur le mécanisme de la déformation permanente dans les métaux soumis à l'extension. C. R. 152, 1911, 1005, 1084, 1233.

dzeniem do zdjęć fotograficznych specjalne oświetlenie próbki, polegające na wywoływaniu jaskrawych kontrastów<sup>62)</sup>). Jest to t. zw. metoda Töppler'a: odnośny schemat oświetlenia przedstawia rys. 36. Układ optyczny stanowi źródło światła  $L$  w postaci małej lampki łukowej, przeponka  $P_1$  umieszczona w ognisku soczewki skupiającej, następnie duża soczewka  $S$ , o dużej odległości ogniskowej, wreszcie przeponka  $P_2$  umieszczona w ognisku tak soczewki  $S$ , jak i soczewki kamery fotograficznej  $K$ . Jeśli powierzchnia próbki jest płaska i gładka, na matówce otrzymujemy małą jasną plamkę światła. Jeśli wszakże na próbce są bruzdki i wypukłości, to manipulując odpowiednio przeponkami, można otrzymać obrazy kontrastowe powierzchni próbki.



Rys. 36.



Rys. 37.



Rys. 38.

Należy zaznaczyć, że materiał doświadczalny, zebrany przez Nádaí'a potwierdza słuszność teorii Hencky'ego i Prandtl'a. W szczególności schematy podane na rys. 24—28 zostały uwidocznione doświadczalnie w sposób niewątpliwy.

3. Metoda Fry<sup>63)</sup> polega na zastosowaniu specjalnego wytrawiania odkształconych próbek, przyczem linie zgniotu (po-

<sup>62)</sup> A. Nádaí. Beobachtungen der Gleitflächenbildung an plastischen Steffen. Proc. of the First Intern. Congress for Applied Mechanics. Delft. 1925. Tenże: Schweizerische Bauzeitung. 157. 1924.

<sup>63)</sup> A. Fry. Kraftwirkungsfiguren in Flusseisen, dargestellt durch ein neues Ätzverfahren. Kruppsche Monatshefte. Essen. 2, 117, 1921. Również G. Sachs. Beitrag zum Härteproblem. Z. f. Techn. Ph. 8, 132, 1927.

ślizgowe) tworzą twardy szkielet, pozostający po usunięciu materiału miękkiego.



Rys. 39.

4. Metoda rekrytalizacji, znana oddawna, pozwala dość dokładnie oznaczyć obszar zgniotu. Rys. 38 przedstawia otrzymany przez Sachs'a obszar zgniotu dla przypadku wtlaczania stempla wg. schematu z rys. 21. Rys. 39 przedstawia obszar zgniotu, uwidoczniiony przez rekrytalizację, odpowiadający schematowi z rys. 37.

### ROZDZIAŁ III.

## Zagadnienie skręcania prętów przyzmatycznych przy uwzględnieniu odkształceń plastycznych.

**14. Skręcanie pręta o przekroju kołowym z materiału plastycznego.** Zagadnienie powyższe było poraz pierwszy podjęte w r. 1848 przez prof. James Thomsona. Lord Kelvin, brat przedwcześnie zmarłego uczonego, zamieścił rozwiązanie w jednej ze swych prac<sup>64)</sup>. To samo zagadnienie podjął znacznie później St. Venant<sup>65)</sup>. Podajemy je poniżej z uzupełnieniami M. Brillouin'a<sup>66)</sup>.

Wprowadźmy współrzędne walcowe  $r, \varphi, z$ . Mamy do czynienia z następującym układem odkształceń:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = 0; \quad \gamma_r = \Theta r; \quad \gamma_\varphi = \gamma_z = 0 \quad (14,1)$$

We wzorach powyższych  $\Theta$  jest stałą, określającą kąt skręcania pręta na jednostkę jego długości. W pobliżu osi przesunięcie kątowe jest zawsze bardzo małe i mamy do czynienia jedynie z układem sił sprężystych. Naprężenie styczne określa wzór  $\tau_{\varphi z} = G \Theta r$ . Załóżmy, że promień walca jest  $r$ , zaś odkształce-

<sup>64)</sup> W. Thomson. Elasticity (Encycl. Brit.); również Math. Papers, III.10.

<sup>65)</sup> J. Liouv, 378, 1872. <sup>66)</sup> M. Brillouin. Ann. de Phys. 14, 96, 1920.