

ROZDZIAŁ I.

Ogólne zasady statyki i ruchu ciała plastycznego.

2. Przedstawienie wykreślne warunków plastyczności. Punktem wyjścia dla matematycznej teorii plastyczności jest ustalenie warunku plastyczności w przypadkach złożonego układu naprężeń. Warunek ten powinien odpowiadać granicy plastyczności dla rozciągania lub ściskania, którą wyznaczamy doświadczalnie dla danego materiału. Gdy mamy do czynienia z układem dwuwymiarowym, a zwłaszcza trójwymiarowym, nie jest rzeczą łatwą ustalić prawa wytrzymałości, polegające na tem, że wytrzymałość przy złożonym układzie naprężeń uzależniamy w sposób mniej lub więcej przybliżony od tych współczynników, jakie nam dają zasadnicze próby na rozciąganie lub ściskanie. Nie mniejsze trudności nastroczą sprawdzenie doświadczalne różnych hipotez roboczych.

Dopóki dorobek doświadczalny, dotyczący złożonego układu naprężeń był nikły, powszechnie uznawano teorię największego naprężenia rozciągającego, sięgającą jeszcze epoki Galileusza. Później przekonano się, że pomiędzy odkształceniami, wywołanymi przez złożony układ naprężeń, a pomiędzy odkształceniami, odpowiadającymi naprężeniu jednokierunkowemu, zachodzi wielka różnica. Przyjęto wówczas hipotezę największego wydłużenia właściwego, wprowadzoną przez St. Venant'a, która cieszyła się trwałym powodzeniem. Duży wpływ na zagadnienie plastyczności metali wywarły badania, przeprowadzone głównie we Francji, gdy spożytkowano odkrycia metalograficzne; rzuciły one światło na me-

chanizm pękania ¹⁶⁾ ¹⁷⁾ w ciałach kruchych i plastycznych. Bezpośrednie znaczenie dla omawianego zagadnienia miały doświadczenia angielskie, przeprowadzone przez J. Guest'a ¹⁸⁾, a kontynuowane przez badaczy angielskich i amerykańskich ¹⁹⁾ ²⁰⁾ ²¹⁾. W Niemczech O. Mohr ²²⁾ przeprowadził analizę teorii wytrzymałościowych, posiłkując się zobrazowaniem stanów naprężeń zapomocą oryginalnych i przejrzystych metod wykreślnych. Niektóre poglądy Mohr'a znalazły potwierdzenie w doświadczeniach Th. v. Kármán'a ²³⁾, wykonanych w Getyndze, która wkrótce stała się ośrodkiem badań nad plastycznością metali ²⁴⁾.

Inne założenia stały się podstawą teorii, określającej warunek plastyczności w postaci wartości krytycznej energii właściwej odkształcenia postaciowego, jako miary wyężenia materiału. Warunek ten, sformułowany w r. 1904 przez M. T. Hubera ²⁵⁾, znalazł uzasadnienie teoretyczne i doświadczalne, i stał się punktem wyjścia doniosłych teorii.

Przystępując do omówienia warunków plastyczności, proponowanych przez różnych autorów, musimy ustalić wytyczne, jakim powinny one czynić zadość, jako prawa o charakterze nawpół empirycznym. A więc ze względu na zastosowania, jest rzeczą pożądaną stawiać hipotezy najprostsze, któreby sprawdzały jednak dane doświadczalne z dostatecznem przybliżeniem. Dla jas-

¹⁶⁾ H. Tresca. Memoire sur l'écoulement des corps solides (Extrait du tome XVIII et XX des memoires presentées par divers savants a l'Institut Imperial de France. Paryż. 1868—1871). Większość poglądów S. Venant'a jest związanych z pracami Tresca. ¹⁷⁾ Contribution a l'étude de la fragilité dans les fers et les aciers. Paryż 1904. Zawiera prace Le Chatelier'a, Considère'a, Fremon't'a, Osmond'a, Charpy'ego i inn.

¹⁸⁾ J. Guest. Phil. Mag. 1900. ¹⁹⁾ A. J. Becker. The Strength and Stiffness of Steel under Biaxial Loading. Univ. of Illinois Bull. 13, 1916.

²⁰⁾ H. M. Westergaard. On the Resistance of Ductile Materials to combined Stresses in two or three directions perpendicular to one another. Journal of the Franklin Inst. 189, 627, 1920. ²¹⁾ B. P. Haigh. Reports on the Stress Distributions in Engineering Materials. Brit. Ass. 1919—1923

²²⁾ O. Mohr. Abhandlungen auf dem Gebiete der Technischen Mechanik. 192—235, 1914. ²³⁾ Th. v. Kármán. Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. VDI. 1749, 1911. ²⁴⁾ G. Tammann. Lehrbuch der Metallographie. Lipsk 1921. Th. v. Kármán. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre. Enz. d. Math. Wiss. IV, 4, art. 31, 695—770.

²⁵⁾ M. T. Huber. O podstawach teorii wytrzymałości. Prace Matem.-Fiz. 15, 47. 1904.

nego i przejrzystego orientowania się w hipotezach roboczych, posługujemy się wykreślnem przedstawieniem układów naprężeń krytycznych.

Niech w trójwymiarowym układzie naprężeń σ_1 , σ_2 i σ_3 oznaczają naprężenia główne. Uszeregujmy je, poczynając od największego naprężenia rozciągającego (dodatniego), a kończąc na największym ściskającym (ujemnym). W przypadku, gdy $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, największe naprężenie styczne zachodzi w płaszczyznach, tworzących kąt $\frac{\pi}{4}$ z kierunkiem pierwszego i trzeciego naprężenia głównego, stanowiąc połowę różnicy pomiędzy temi naprężeniami

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2,1)$$

Układ naprężeń w danym punkcie ciała jest w zupełności określony przez kierunki i wartości naprężeń głównych. Odształcenie plastyczne nastąpi, gdy kompleks wartości naprężeń głównych osiągnie wartości krytyczne (σ_1^k , σ_2^k , σ_3^k). Wartościom tym odpowiadać będzie pewien punkt w przestrzeni trójwymiarowej. Warunkowi plastyczności, czyli tej czy innej hipotezie roboczej odpowiadać będzie powierzchnia zamknięta. Jeśli punkt (σ_1 , σ_2 , σ_3) znajduje się wewnątrz tej powierzchni, mamy do czynienia z odkształceniem sprężystym. Tym sposobem zagadnienie wytrzymałości przy złożonym układzie naprężeń sprowadza się do wyznaczenia powierzchni, ograniczającej pewien określony obszar.

Zagadnienie upraszcza się bardzo, gdy mamy do czynienia z dwuwymiarowym układem naprężeń. Krytyczne naprężenia główne tworzą wówczas pewien obwód zamknięty.

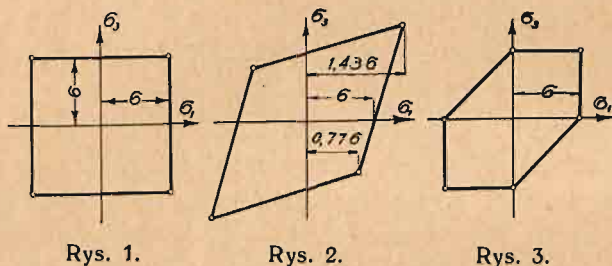
W myśl tych założeń nie jest rzeczą trudną ustalić obwody, charakteryzujące poszczególne hipotezy wytrzymałościowe w układzie dwuwymiarowym. Jeśli przyjmiemy hipotezę największego naprężenia rozciągającego lub ściskającego, pole naprężeń sprężystych będzie ograniczone przez wartości $\sigma_1 = \pm \sigma$ i $\sigma_3 = \pm \sigma$, tworząc kwadrat (rys. 1). Jeśli przejdziemy do hipotezy St. Venant'a', że o wytrzymałości wielu ciał decyduje wydłużenie właściwe materiału, określone wzorem $\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_3)$, gdzie E jest modułem Young'a, zaś ν współczynnikiem Poisson'a, to miarą wytężenia materiału będzie wielkość $E\epsilon_1 = \sigma_1 - \nu \sigma_3$. Jeśli więc $\pm \sigma$

jest granicą plastyczności przy jednokierunkowym rozciąganiu lub ściskaniu, to naprężenia krańcowe znajdziemy z wzorów:

$$\sigma_1 - \nu \sigma_3 = \pm \sigma \quad \text{oraz} \quad \sigma_3 - \nu \sigma_1 = \pm \sigma \quad (2,2)$$

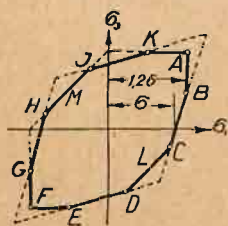
Przy $\nu = 0,3$ dla wierzchołków romba mamy bądź $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma / (1 - \nu) = 1,43 \sigma$, bądź też $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma / (1 + \nu) = 0,77 \sigma$.

Hypotezę największego naprężenia stycznego, zwaną w literaturze angielskiej prawem Guest'a, przedstawia rys. 3. Należy tu odróżnić dwa przypadki: 1. Oba naprężenia główne są tego samego znaku, 2. jedno z naprężeń głównych jest dodatnie, zaś



drugie ujemne. W pierwszym przypadku naprężenia styczne są mniejsze, w drugim większe. Pole odkształceń podkrytycznych jest ograniczone w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych przez proste $\sigma_1 = \pm \sigma$ i $\sigma_3 = \pm \sigma$, zaś w drugiej i czwartej przez $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma$.

Z omawianych hipotez ostatnia najlepiej ujmuje własności wytrzymałościowe metali plastycznych. Nowsze doświadczenia



Rys. 4.

wykazały jednak, że wartości krytyczne naprężenia stycznego, określone na podstawie rys. 3, są zbyt małe, gdy tymczasem z rys. 2 otrzymujemy je zbyt duże. Na tej podstawie A. J. Becker dał wykres (rys. 4), oparty na założeniu, że dla metali plastycznych, jak miękka stal, krytyczne naprężenie styczne wynosi w przybliżeniu $\tau_{\max} = 0,6 \sigma$. Pole naprężeń sprężystych jest ograniczone przez następujące proste:

$$\frac{1}{2} \sigma_1 = \pm 0,6 \sigma; \quad \frac{1}{2} \sigma_2 = \pm 0,6 \sigma; \quad \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \pm 0,6 \sigma$$

oraz

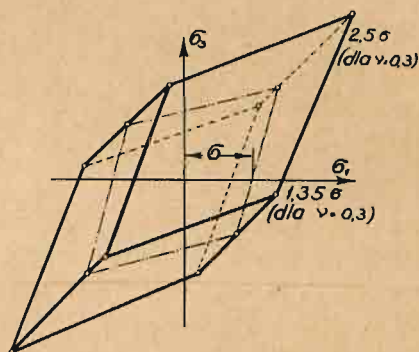
$$\sigma_1 - \nu \sigma_2 = \pm \sigma; \quad \sigma_2 - \nu \sigma_1 = \pm \sigma. \quad (2,3)$$

Dziesięciobok $ABCDEFGHJK$ można otrzymać, nakładając wykres (rys. 2) na rys. 3, przyczem ten ostatni odpowiada powiększeniu w stosunku $0,5\sigma$ do $0,6\sigma$. W wykresie, którego interpretacja nie nastręcza żadnych trudności wobec tego, że jest on skojarzeniem rys. 2 z rys. 3, punktom L i M , odpowiadają największe naprężenia styczne.

Przejdźmy obecnie do trójwymiarowego układu naprężeń. Obszar naprężeń podkrytycznych, odpowiadający hipotezie największych naprężeń normalnych, przedstawić można w postaci sześcianu, na podstawie analogii z rys. 1. Obszar, odpowiadający hipotezie największych wydłużeń właściwych, ograniczają płaszczyzny, określone przez równania:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) &= \pm \sigma; & \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) &= \pm \sigma; \\ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) &= \pm \sigma.\end{aligned}\quad (2,4)$$

Owe sześć płaszczyzn ograniczają skośny równoległoscian (rys. 5), którego najdłuższa przekątna tworzy jednakowe kąty z osiami 1, 2, 3. Przekrój równoległoscianu w płaszczyźnie 1, 3 daje romb, przedstawiony na rys. 2. Przy wartości $\nu = 0,3$ mamy dla wierzchołka A współrzędne $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2,5\sigma$. Rys. 5 przedstawia rzut krawędzi równoległoscianu na płaszczyznę 1, 3.



Rys. 5.

Tak samo możemy przedstawić wykreślnie hipotezę największego naprężenia stycznego.

Mianowicie obszar naprężeń podkrytycznych, odpowiadający hipotezie największego naprężenia stycznego, jest ograniczony płaszczyznami:

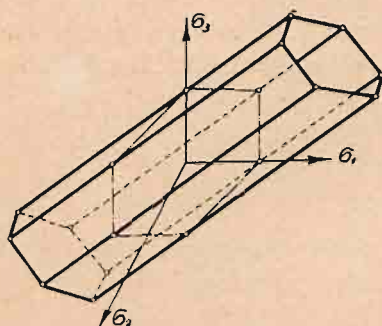
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma; \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma; \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma.$$

Każda z tych sześciu płaszczyzn przecina pod kątem 45° dwie osie współrzędnych i jest równoległa do trzeciej. Otrzymujemy tym sposobem prawidłowy sześciokątny pryzmat (rys. 6), którego oś tworzy równe kąty z trzema osiami współrzędnych. Pryzmat ten jest nieskończenie długi, co odpowiada faktowi, że napręże-

nie styczne jest małe, gdy trzy główne naprężenia mało się różnią wzajemnie. Jak to później szczegółowo omówimy, fakt ten dobrze zgadza się z doświadczeniem.

Rys. 6 jest rzutem pryzmatu na płaszczyznę 1, 2. Przekrój pryzmatu w płaszczyźnie 1, 2 jest taki sam, jak na rys. 3. W podobny sposób można zilustrować i hipotezę Becker'a²⁰⁾.

W celu przedstawienia tej czy innej hipotezy wytrzymałościowej użyliśmy wyłącznie naprężeń głównych. Jeśli przy inter-



Rys. 6.

pretacji poszczególnych wykresów mogliśmy mówić o największych naprężeniach stycznych, to dlatego, że mieliśmy zanotowaną w pamięci zależność (2,1). Przy omawianej metodzie wykreślnej przedstawienie układu naprężeń w jakimkolwiek przekroju, tworzącym pewien dowolny kąt względem kierunków głównych, nastęrcza trudności. O. Mohr²²⁾ dał sposób wykreśl-

nego przedstawienia hipotez wytrzymałościowych, oparty na równoczesnem zobrazowaniu układu naprężeń w danym punkcie. Dytyczy on jednak zagadnienia dwuwymiarowego.

3. Energetyczny warunek plastyczności. Zdając sobie sprawę z roli potencjału sił sprężystych w zastosowaniach teorii sprężystości, Eug. Beltrami²⁶⁾, pierwszy wpadł na myśl (1885), że o wytrzymałości ciała stałego decyduje praca odkształcenia. Najzupełniej niezależnie od tej próby M. T. Huber²⁵⁾, zastanawiając się nad ogólnymi warunkami pęknięcia materiału w danym punkcie, doszedł do wniosku (1903), że wyężenie materiału określają wartości trzech właściwych wydłużeń głównych ϵ_1 , ϵ_2 i ϵ_3 . Miarą wyężenia jest przeto funkcja tych trzech głównych wydłu-

²⁰⁾ E. Beltrami. Sulla condizioni di resistenza dei corpi elastici. Rend. Ist. Lomb. II, 18, 1885. Beltrami za miarę wyężenia materiału przyjął całkowitą właściwą pracę odkształcenia, a nie część jej, odpowiadającą pracy odkształcenia postaciowego. Ten sam błąd popełnił w r. 1919 P. B. Haigh w pracy: The Strain-energy Function and the Elastic-limit. (British Association for the Advancement of Science. 487, 1919). Por. E. Schleicher. Der Spannungszustand an der Fließgrenze. ZAMM, 6, 199, 1926.

żeń właściwych. Analizując charakter tej funkcji wypowiedział on pogląd, że funkcja powyższa posiada ten sam kształt, co i właściwa praca odkształcenia postaciowego. Na tej podstawie wyraził on przypuszczenie, że wyężenie materiału mierzy się właściwą pracą odkształcenia postaciowego. Posługując się tą zasadą, można wyężenie, wywołane przez złożony układ naprężeń porównać z wyężeniem, zachodzącym przy jednokierunkowym rozciąganiu lub ściskaniu i ustalić warunek plastyczności.

Układ naprężeń w danym punkcie ciała w spólrzędnych prostokątnych (x, y, z) określają naprężenia normalne σ_x, σ_y i σ_z oraz styczne $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$. Podobnież układ odkształceń określają wydłużenia właściwe $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ i przesunięcia kątowe $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$. Układy powyższe przedstawiamy w postaci schematów:

σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	ϵ_x	γ_{xy}	γ_{xz}
τ_{xy}	σ_y	τ_{yz}	γ_{xy}	ϵ_y	γ_{yz}
τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z	γ_{xz}	γ_{yz}	ϵ_z

zwanych tablicami składowych tensora naprężeń i odkształceń.

Oznaczmy przez Λ właściwą energię potencjalną odkształcenia nieskończenie małego równoległościanu prostokątnego $dx dy dz$. Pracę jaką musimy wykonać, przechodząc od stanu naturalnego do stanu, odpowiadającego podanemu wyżej układowi naprężeń, a która ujawni się w postaci wzrostu energii potencjalnej, oznaczmy przez $d\Lambda$. Aby ją obliczyć, musimy uważać naprężenia za siły zewnętrzne, działające na ścianki równoległościanu $dx dy dz$. Otrzymujemy tym sposobem²⁷⁾:

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (3,1).$$

Wprowadzając znane zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

²⁷⁾ Timoszenko—Huber. Kurs wytrzymałości materiałów. 1922.



otrzymujemy energję właściwą (w odniesieniu do jednostki objętości) bądź w funkcji naprężeń

$$\Lambda = \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{2(1+\nu)} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \right] \quad (3,3)$$

bądź w funkcji odkształceń

$$\Lambda = G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] \quad (3,4)$$

Niech $p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ oznacza t. zw. hydrostatyczne średnie naprężenie, zaś $e = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ średnie wydłużenie właściwe.

Stosując przekształcenia

$$9p^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \quad (3,5)$$

$$9e^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 = 3(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \quad (3,6)$$

możemy energję właściwą odkształcenia wyrazić w postaci:

$$\Lambda = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)} 9p^2 + \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \right] \right\} \quad (3,7)$$

Tym sposobem energia właściwa odkształcenia składa się z dwóch części, a mianowicie z energii właściwej, odpowiadającej pracy ciśnienia hydrostatycznego

$$\Lambda_h = \frac{3(2-\nu)p^2}{2\nu E} \quad (3,8)$$

oraz z energii właściwej odkształcenia postaciowego:

$$\Lambda_p = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \right\} \quad (3,9)$$

Jeśli za osie współrzędnych wybierzemy główne osie naprężeń normalnych, to, obchodząc nas bliżej, energję właściwą odkształcenia postaciowego przedstawi wzór:

$$\Lambda_p = \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (3,10)$$

Obliczmy na podstawie ostatniego wzoru Λ_p w wypadku jednokierunkowego rozciągania lub ściskania, czyli dla naprężenia

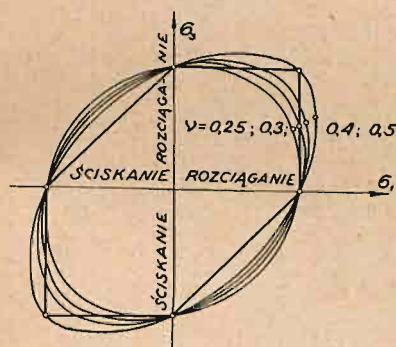
krytycznego $\sigma_1 = 2k$, przy równoczesnym $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Mamy wówczas:

$$\left| \Lambda_p \right|_{\sigma_1=2k; \sigma_2=\sigma_3=0} = \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} \quad (3,11)$$

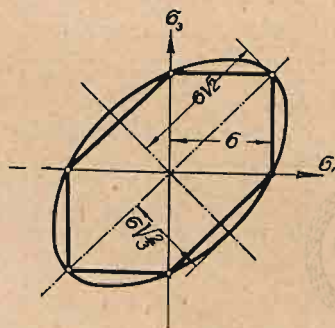
przyczem k jest stałą, charakterystyczną dla danego materiału plastycznego. Przez porównanie otrzymanej wielkości z wzorem (3,10), otrzymamy energetyczny warunek plastyczności

$$\Phi \equiv \Lambda_p - \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} = 0 \quad (3,12)$$

Dla przedstawienia energetycznego warunku plastyczności użyjmy metody wykreślnej, stosowanej poprzednio. Zajmijmy się naprzód



Rys 7.



Rys 8.

warunkiem plastyczności, zaproponowanym przez Beltrami'ego i Haigh'a. W dwuwymiarowym układzie naprężeń dla $\sigma_2 = 0$ warunkowi temu odpowiadać będzie rodzina elips (rys. 7), stosownie do różnych wartości ν . W trójwymiarowym układzie otrzymamy rodzinę elipsoid.

Zupełnie inaczej przedstawi się energetyczny warunek plastyczności w postaci podanej przez Hubera. W dwuwymiarowym układzie naprężeń dla $\sigma_2 = 0$ otrzymamy coprawda znowu elipsę (rys. 8), której osi tworzą kąty $\pi/4$ i $3\pi/4$ z osiami współrzędnych. Elipsa powyższa jest opisana około sześcioboku, znanego nam już z rys. 3. W trójwymiarowym układzie naprężeń otrzymamy zamiast elipsoidy walec o przekroju kołowym, którego oś przechodzi przez początek osi współrzędnych i jest względem nich jednakowo pochylona. Walec powyższy jest przeto opisany około sześciobocznego pryzmatu, przedstawionego na rys. 6. Przekrój

walca w płaszczyźnie 1,3 jest elipsą z rys. 8. Porównanie rys. 4 z rys. 8 przekonywa nas, że, praktycznie biorąc, hipoteza Becker'a mało się różni od hipotezy Hubera.

Dotychczas porównywaliśmy energetyczne warunki plastyczności ze stanowiska czysto formalnego, pomijając motywy, usprawiedliwiające wybór tej czy innej hipotezy. Założyliśmy ogólnie, że potencjał sił sprężystych jest decydującym czynnikiem wytrzymałości danego ciała i że przy obliczaniu tego potencjału należy oddzielnie traktować pracę, odpowiadającą ciśnieniu hydrostatycznemu, i pracę odkształcenia postaciowego. Obecnie należy zastanowić się nad przesłankami natury teoretycznej i doświadczalnej, które skłoniły twórców energetycznej hipotezy wytrzymałości do powzięcia omawianych wniosków.

Przekonanie, że nawet przy nieograniczonym wzroście równomiernego, wszechstronnego ciśnienia nie można oczekiwać zniszczenia struktury wewnętrznej jednorodnego materiału, odpowiada naszym wyobrażeniom intuicyjnym na tę sprawę. Nasza współczesna wiedza o budowie materji nie nastrocza pod tym względem żadnych wątpliwości. Obserwacje geologiczne i różnorodne doświadczenia laboratoryjne przekonywują nas o słuszności tego zapatrywania intuicyjnego. Stąd też hipoteza pracy odkształcenia postaciowego, od której niewiele różni się hipoteza największego naprężenia stycznego, jak o tem przekonać się łatwo z rys. 6 i 8, interpretuje dobrze zachowanie się ciał plastycznych wobec wielkich ciśnień wszechstronnych. Usunięcie przez Hubera z potencjału sił sprężystych wyrazu, odpowiadającego pracy ciśnienia hydrostatycznego, było krokiem naprzód w kierunku nowego ujęcia trudnego zagadnienia wytrzymałości ciała plastycznego.

Przy wszechstronnem rozciąganiu, jak to znów intuicyjnie wyczuwamy, struktura materiału musi ulegć zniszczeniu wskutek pęknięć wewnętrznych. Możemy wszakże zwęzić zakres teorii plastyczności do rozpatrywania odkształceń ciągłych i wykluczyć z niej całkowicie rozważania, dotyczące zjawisk pękania. Takie formalne założenia nie są przykładem odosobnionym, jak o tem świadczy teoria sprężystości, w której są one stosowane z powodzeniem. W danym wypadku, jak to wyjaśnił Hencky,²⁸⁾

²⁸⁾ H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen. Proc. of the First Intern. Congress for Applied Mechanics, Delft. 312, 1925.

założenie formalne rozpatrywania odkształceń ciągłych ciała plastycznego, przy pominięciu zjawisk pękania, jest równoznaczne z przyjęciem nieograniczonej wytrzymałości przy równomiernym wszechstronnym rozciąganiu. Przybliżony charakter tego założenia rzuca się w oczy nawet wówczas, jeśli przyjmiemy, że t. zw. wytrzymałość fizyczna przewyższa wielokrotnie wytrzymałość techniczną. Należy dodać, że doświadczalne sprawdzenie tego układu naprężeń natrafia na wielkie przeszkody natury technicznej.

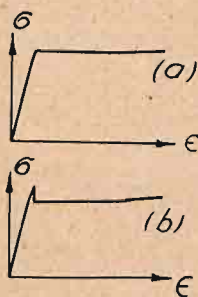
Nie należy o tem zapominać, że hipoteza pracy odkształcenia postaciowego, jakkolwiek lepiej wyjaśnia od innych hipotez zachowanie się materiału wobec różnych układów naprężeń, wywołujących zgniot, musi być uważana jedynie za przybliżone sformułowanie warunku plastyczności. Mikrostruktura większości metali zwykłych jest bardzo złożona. Rozkład energii sprężystej pomiędzy poszczególnymi krystalitami, lub nawet w indywidualnych krystalitach, jest prawdopodobnie bardzo nieregularny. Świadczy o tem powstawanie drobnych wewnętrznych pęknięć wzdłuż płaszczyzn poślizgowych, jakie są dobrze znane z badań nad znużeniem metali. Fluktuacje naprężeń specjalnie dotyczą miękkiej stali, głównego materiału doświadczalnego, a to ze względu na zupełnie różne współczynniki sprężystościowe składników jak ferryt i cementyt. W metalach czystych i roztworach stałych mamy do czynienia z wybitną anizotropowością krystalitów, co wywołuje ze swej strony bardzo nierównomierny rozkład naprężeń. W poszczególnych krystalitach mogą zachodzić przytem trwałe odkształcenia, wcześniej niż w sąsiednich. Byłoby rzeczą niezmiernie ciekawą ustalić wielkość fluktuacji naprężeń lokalnych względem ogólnych średnich. Może na tej drodze udałoby się ustalić wzajemny stosunek granicy sprężystości, proporcjonalności i plastyczności.

Mechanika ciał plastycznych, mająca na widoku cele praktyczne, techniczne, poprzestaje na jak najprostszym sformułowaniu warunku plastyczności, byleby sprawdzał on dane doświadczalne z dostatecznem przybliżeniem.

Właściwa praca odkształcenia postaciowego jest miarą wyteżenia materiału. Ale powstaje pytanie, czy za porównawczą dla różnych układów naprężeń, krytyczną wartość tego wyteżenia należy uznać granicę sprężystości, czy proporcjonalności, czy może plastyczności. B. P. Haigh,²¹⁾ który się nad powyższą sprawą

specjalnie zastanawiał, opiera porównywanie wytrzymałości materiału przy różnych układach naprężeń, na podstawie przekraczania granicy sprężystości. W terminologii angielskiej szkoły doświadczalnej¹⁾ granica sprężystości odpowiada tej charakterystycznej chwili, gdy atomy zgrupowane według określonego układu krystalicznego, zaczynają przechodzić do skupień szklistych. Granica plastyczności odpowiada chwili, gdy, po dokonaniu przesunięć lokalnych, średnie wartości naprężeń zaczynają osiągać wartości naprężeń lokalnych, zjawiających się po przekroczeniu granicy sprężystości.

Teoria plastyczności, obejmująca różnorodne, niekiedy bardzo złożone układy naprężeń, nie może się obyć bez wprowadzenia zasadniczych uproszczeń. Do takich uproszczeń należy zaliczyć zastąpienie ciała rzeczywistego przez ciało idealnie plastyczne²⁹⁾,



Rys. 9.

a mianowicie takie, które przed dojściem do pewnej określonej granicy plastyczności zachowują się wzorowo sprężyste, zaś po jej przekroczeniu jest trwale odkształcane przy niezmiennem obciążeniu. Tym sposobem identyfikujemy granicę sprężystości, proporcjonalności i plastyczności i zarazem rezygnujemy świadomie z uwzględnienia zjawiska stwardniania. Wykres rozciągania ciała idealnie plastycznego przedstawiałby (rys. 9a) dwie proste, a więc jedną przechodzącą przez początek osi współ-

rzędnych, odpowiadającą obszarowi odkształceń sprężystych, zaś drugą poziomą, odpowiadającą obszarowi plastycznemu. W myśl propozycji Prandtl'a należałoby może ten wykres przedstawić w kształcie (b).

4. O hipotezie Mohr'a. Dotychczas porównywaliśmy różne hipotezy wytrzymałościowe, posilkując się układem współrzędnych σ_1 , σ_2 i σ_3 . Obecnie przejdziemy do metody wykreślnej, wprowadzonej przez O. Mohr'a, która również przedstawia krytyczne układy naprężeń. Mohr nie tylko przyczynił się do wyświetlenia i spopularyzowania teorii wytrzymałościowych, lecz ponadto wygłosił hipotezę, na podstawie której każde trójwymiarowe zagadnienie wytrzymałościowe można z pewnem przybliżeniem traktować, jako dwuwymiarowe.

²⁹⁾ B. St. Venant. J. de Math. 308, 373, 1871. Również C. R. 1868—1875.

$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, zaś promień koła $= \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$. Aby znaleźć

σ_n i τ_n przeprowadźmy przez środek koła normalę n , prostopadłą do ścianki AB i tworzącą kąt α z osią odciętych, odpowiadającą w danym wypadku kierunkowi jednego z naprężeń głównych. Na rys. 10 zaznaczone jest położenie ścianki AB . Jeśli teraz odłożymy od normali n w kierunku trygonometrycznym jeszcze raz kąt α , to otrzymamy punkt M , którego współrzędne przedstawiają naprężenia normalne i styczne w przekroju AB .

Wzory (4,1 i 2) uproszczą się, jeśli za osi współrzędnych przyjąć kierunki głównych naprężeń. Przepada wówczas naprężenie styczne τ . Mamy wówczas

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha \quad (4,6)$$

$$\tau_n = + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha \quad (4,7)$$

Jeśli będziemy pokręcali normalę n w kierunku trygonometrycznym z określoną prędkością kątową, to punkt M (σ_n , τ_n) będzie się poruszał w tym samym kierunku, lecz z podwójną prędkością kątową.

W dwuwymiarowym układzie naprężeń koło Mohr'a określa nie tylko dany układ jako taki, lecz ponadto daje możliwość znalezienia naprężeń (σ_n , τ_n) w każdym poszczególnym przekroju. Przypomnijmy sobie, że przy przedstawianiu wykreslnem różnych hipotez wytrzymałościowych posilkowaliśmy się układem współrzędnych (σ_1 , σ_3). Otóż każdy punkt (σ_1^k , σ_3^k) wyznacza jednoznacznie koło Mohr'a. Obwodowi krytycznych wartości naprężeń odpowiada kompleks kół Mohr'a.

Rys. 11—13 przedstawiają takie właśnie kompleksy kół Mohr'a dla hipotezy St. Venant'a, Guest'a i Hubera. Dają one charakterystyczne obwiednie, będące istotną cechą wykreslnej metody Mohr'a.

W stosunku do swych poprzedników Mohr sformułował o wiele ostrożniej swe poglądy na wytrzymałość różnych materiałów. Poszczególnym hipotezom wytrzymałościowym wyznaczył on określony zakres stosowalności. Tak hipoteza największego wydłużenia właściwego (rys. 2) dotyczy według Mohr'a wytrzymałości ciał kruchych. Własnościom metali plastycznych odpowiada lepiej hipoteza największego naprężenia stycznego.

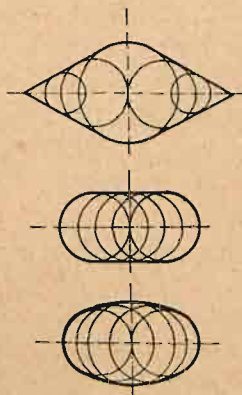
Dla wypadku, gdy pękanie ciała następuje wskutek poślizgów wzdłuż pewnych płaszczyzn, a więc jak przy zgnioście w metalach, Mohr zaproponował własną hipotezę, będącą zmodyfikowaniem poglądów St. Venant'a. Mianowicie wyszedł on z założenia, że powstawanie pęknięcia lub poślizgu jest uzależnione od wzajemnego ustosunkowania się naprężeń: normalnego σ_n i stycznego τ_n , jakie panują w danej płaszczyźnie. Przesunięciu względnemu dwóch części danego ciała przeciwdziała tarcie, zależne znowu od ciśnienia. Jest to nawrót do dawniejszych teorii Coulomb'a o tarcie wewnętrznym w ciałach stałych.

Swą hipotezę Mohr wypowiada w następujących słowach: granica sprężystości i pękanie danego materiału jest określone przez naprężenia w płaszczyznach poślizgów i pęknięć. Tylko w szczególnym przypadku mogą one zależeć wyłącznie od wielkości naprężeń stycznych. Ponadto wypowiada on przypuszczenie, że płaszczyzna poślizgowa przechodzi zawsze przez kierunek średniego naprężenia głównego σ_2 . Jeśli przyjąć, że powstawanie poślizgów zależy wyłącznie od σ_n i τ_n , to przekroczenie granicy sprężystości lub plastyczności byłoby zupełnie niezależne od naprężenia średniego σ_2 .

Jest to przypuszczenie śmiałe, sprowadzające wszystkie zagadnienia trójwymiarowe do dwuwymiarowych. Nowsze badania podają w wątpliwość poglądy Mohr'a.

Z rys. 11—13 widzimy, że obwiednia Mohr'a jest zawsze symetryczna względem osi odciętych. Każde koło naprężeń krytycznych jest styczne do obwiedni w dwóch punktach M_1 (σ_n , τ_n) i M_2 (σ_n , $-\tau_n$), którym odpowiadają dwie płaszczyzny poślizgowe. Stąd wniosek: w każdym punkcie ciała, w którym przekroczona jest granica plastyczności, tworzą się dwie płaszczyzny poślizgowe. Przecinają się one wzdłuż osi średniego naprężenia głównego σ_2 i tworzą jednakowe kąty z kierunkami głównych naprężeń σ_1 i σ_3 .

W teorii Mohr'a zasadniczą rolę odgrywa kształt obwiedni kół naprężeń, która jest geometrycznym przedstawieniem zależności $\tau_n = f(\sigma_n)$. Przyjmując za zmienne naprężenia główne



Rys. 11, 12, 13.

σ_2 i σ_3 , możemy od tej zależności przejść do nowej w postaci $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \varphi(p)$, gdzie $p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$. Dla wielu ciał, jak np. dla metali przy odpowiedniej temperaturze, można przyjąć, że $\tau_{max} = \text{const.}$ Ciała takie, czyniące zadość t. zw. warunkowi Tresca — St. Venant'a nazywał Prandtl *szczególnie plastycznymi*. Często ostatnia zależność daje się przedstawić linjowo $\tau_{max} = k - \frac{1}{2}p$.

Hypoteza Mohr'a stała się popularną w Niemczech i wiele rozważań teoretycznych i badań doświadczalnych jest z nią związanych. Osią tych badań jest w wypadku wpływ zmiany średniego naprężenia głównego na wytrzymałość metali plastycznych.

Warunek plastyczności może być przedstawiony wykreślnie zapomocą głównych naprężeń stycznych τ_1, τ_2, τ_3 . Tak np. hipotezę największego naprężenia stycznego

$$|\tau_1| \leq k; \quad |\tau_2| \leq k; \quad |\tau_3| \leq k \quad (4,8)$$

możemy w tych spółrzędnych przedstawić w postaci sześcianu. Stosując te same spółrzędne, możemy, idąc za radą Mises'a³¹⁾, przedstawić warunek plastyczności w postaci kuli $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2k^2$. Tak sformułowany warunek różni się niewiele od wzoru (3,10).

5. Tensorowe przedstawienie warunków plastyczności. Dla przejrzystego przedstawienia praw i zależności fizycznych jest rzeczą niezmiernie ważną wyrazić je w kształcie niezależnym od tego czy innego typu spółrzędnych. Przykładem najdalej w tym kierunku posuniętej próby było zastosowanie w teorii grawitacyjnej Einsteina metod bezwzględnego rachunku różniczkowego, który obecnie zaczyna być stosowany z powodzeniem i w innych dziedzinach fizyki teoretycznej. Coraz częściej spotykamy się też z pracami, mającemi na celu wyrazić w formie tensorowej równania teorii sprężystości. Idea powyższa nie jest nowa, jak o tem świadczy sama nazwa „tensor”, zapożyczona z określenia odkształcenia sprężystego. Myśl uogólnienia i uproszczenia formy, w jakiej wypowiedane są prawa sprężystości, tkwiła już zasadniczo w pracach Lamé'go nad spółrzędnymi krzywoliniowymi. Dla celów mechaniki ciał plastycznych, która powstała drogą wyodrębnienia pewnych zagadnień z teorii sprężystości i hydromechaniki cieczy lepkiej, tensorowe sformułowanie warunków plastyczności i ruchu ciała plastycznego, posiada duże znaczenie.

³¹⁾ R. v. Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Göttingen Nachr. 583, 1913.

Oznaczmy tensor naprężeń przez $\bar{\sigma}$, tensor odkształceń właściwych przez $\bar{\varepsilon}$ i tensor prędkości odkształcenia właściwego przez $\dot{\bar{\varepsilon}}$. Odpowiednie tablice składowych tych tensorów przedstawia się w sposób następujący:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} & \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} & \dot{\varepsilon}_x & \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} & \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\gamma}_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z & \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_z \end{array} \quad (5,1)$$

Jeśli przez ξ , η , ζ oznaczmy nieskończenie małe, sprężyste przesunięcia punktu, to wydłużenia właściwe i przesunięcia kątowe przedstawia się nam w postaci:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \text{ i t. d.} \quad (5,2)$$

Jeśli znowu zamiast tych przesunięć, weźmiemy pod uwagę prędkości odkształcania w danym punkcie $u = \dot{\xi}$, $v = \dot{\eta}$, $w = \dot{\zeta}$, to otrzymamy prędkości wydłużania właściwego i przesuwania kątowego:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ i t. d.} \quad (5,3)$$

Po tych wyjaśnieniach, dotyczących wielkości, z którymi będziemy mieli do czynienia, zajmijmy się bliżej tensorem $\bar{\sigma}$. Wielkości (skalarne) z pierwszej kolumny tego tensora σ_x , τ_{xy} i τ_{xz} są składowymi wektora naprężeń $\bar{\sigma}_x$, odpowiadającego elementowi powierzchni, którego normala zewnętrzna posiada dodatni kierunek osi x . Podobnie na element powierzchni prostopadły do osi y działa wektor naprężeń $\bar{\sigma}_y$, którego składowe znajdujemy w drugiej kolumnie tablicy. Wielkościom z trzeciej kolumny odpowiada wektor $\bar{\sigma}_z$. W oznaczeniach tych wielkości wektorowe w odróżnieniu od skalarnych są zaznaczone kreską, zaś tensorowe dwoma kreskami górnymi.

Składowe tensora zmieniają się wraz z przekształceniem osi współrzędnych. Możemy zawsze znaleźć taki prostokątny układ współrzędnych, że w tablicy tensora otrzymamy wzdłuż przekątnej naprężenia główne σ_1 , σ_2 , σ_3 , zaś naprężenia styczne będą równe zeru. Te naprężenia główne można określić na podstawie niezmienników, lub t. zw. skalarów, których tensor naprężeń posiada trzy:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (5,4)$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (5,5)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (5,6)$$

Od tensora można zawsze odjąć część skalarną³²⁾, odpowiadającą wszechstronnemu ciśnieniu i wyrażoną przez układ:

$$\begin{matrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{matrix} \quad (5,7)$$

Otrzymamy nowy układ z niezmiennymi naprężeniami stycznymi:

$$\begin{matrix} \sigma'_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{matrix} \quad \text{gdzie} \quad \begin{matrix} \sigma'_x = \sigma_x - p \\ \sigma'_y = \sigma_y - p \\ \sigma'_z = \sigma_z - p \end{matrix} \quad (5,8)$$

który oznaczamy przez $\bar{\sigma}$ i nazywamy dewiatorem naprężeń. Pojęcie powyższe wprowadził J. A. Schouten: dewiatorowi odpowiada takie przekształcenie punktów przestrzeni, że właściwy układ prostokątny spółrzędnych przechodzi w ukośnokątny, bez obrotu, czyli bez części wektorowej, jak również bez rozszerzenia przestrzennego, czyli bez części skalarnej. Solenoidalne pole wektorowe po zastosowaniu operatora Hamiltona ∇ (nabla), daje pole dewiacyjne, lub pole ścinania. Dewiator można sprowadzić do trzech głównych naprężeń stycznych.

W podobny sposób możemy określić dewiator odkształceń. Na podstawie zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami łatwo przekonać się, że dewiator naprężeń jest proporcjonalny do dewiatora odkształceń właściwych, co wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= \frac{1}{2G} \sigma'_{xx}; & \frac{1}{2} \gamma'_{xy} &= \frac{1}{2G} \tau_{xy} \\ \varepsilon'_{yy} &= \frac{1}{2G} \sigma'_{yy}; & \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= \frac{1}{2G} \tau_{yz} \\ \varepsilon'_{zz} &= \frac{1}{2G} \sigma'_{zz}; & \frac{1}{2} \gamma_{zz} &= \frac{1}{2G} \tau_{zz} \end{aligned} \quad (5,9)$$

³²⁾ J. A. Schouten. Grundlagen der Vektor — und Affinoranalysis. Teubner 69, 1914.

Rozłożenia tensora naprężeń dokonał Stokes jeszcze w r. 1845. W postaci zbliżonej do wektorowej ujął powyższą zależność we wzory Maxwell ³³⁾.

Proporcjonalność dewiatora naprężeń i odkształceń dotyczy obszaru niewielkich wartości odkształceń sprężystych. Co będzie jednak, jeśli przekroczymy granicę plastyczności. Uciekamy się wówczas do nowej hipotezy, a mianowicie, że poza granicą plastyczności ciało stałe zachowuje się jak ciecz lepka, prawie zupełnie nieściśliwa. Do tego wniosku doszedł jeszcze St. Venant, interpretując doświadczenia nad przebijaniem, przeprowadzone przez Tresca ¹⁶⁾ ²⁹⁾ ³⁴⁾. Zależności pomiędzy naprężeniami a prędkościami cieczy lepkiej ustala hydromechanika cieczy lepkiej w postaci t. zw. równań Stokes'a ³⁵⁾. Warunek nieściśliwości cieczy wyraża się przytem w postaci $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0$. Jeśli przyjmiemy założenie St. Venant'a, rozwinięte przez Bousinesq'a ³⁵⁾ ³⁶⁾, to dewiator prędkości odkształcania jest proporcjonalny do dewiatora naprężeń $\bar{\sigma}' = \kappa \bar{\epsilon}'$, czyli w rozwinięciu:

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \kappa \dot{\epsilon}_x; & \tau_{xy} &= \kappa \dot{\gamma}_{xy} \\ \sigma'_{yy} &= \kappa \dot{\epsilon}_y; & \tau_{yz} &= \kappa \dot{\gamma}_{yz} \\ \sigma'_{zz} &= \kappa \dot{\epsilon}_z; & \tau_{zx} &= \kappa \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \quad (5,10)$$

Ruch plastyczny ciała stałego wymaga jeszcze dodatkowego omówienia ze względu na wartość pracy wydatkowanej na pokonanie tarcia wewnętrznego. Przyjmujemy mianowicie, w myśl propozycji Mises'a, że, jeśli powiększymy prędkości ruchu ciała plastycznego, pozostawiając bez zmiany wszystkie inne warunki, to praca przekształcenia przy założeniu identycznych układów: początkowego i końcowego, będzie ta sama. Zasadę powyższą należy uważać, jako pierwsze przybliżenie teorii, opartej na dotychczasowym materiale doświadczalnym. Dodajmy, że w technice dość często stosujemy wzory, w których praca wydatkowana jest niezależna od prędkości; tak np. współczynniki tarcia ślizgowego ciał stałych można uważać w pewnych warunkach za stałe.

³³⁾ Enz. Math. Wiss. Tom IV. 4, 29.

³⁴⁾ M. Brillouin. La theorie Tresca — St. Venant. Praca powyższa krytycznie omawia rozwój poglądów St. Venant'a, P. Levy'ego i Boussinesq'a na zagadnienia plastyczności. Annales de Physique, 14, 5—75. 1920.

³⁵⁾ A. T. Troskołański. Hydromechanika. Lwów, 105, 1925. ³⁶⁾ M. J. Boussinesq. Mécanique des semifluides. Ann. de l'Éc. Norm. Super. 82. 1918.

Jeśli przyjmiemy ową zasadę, to praca wydatkowana na odkształcenie plastyczne w jednostkę czasu i objętości, wyniesie:

$$\begin{aligned} \sigma'_x \dot{\epsilon}_x + \sigma'_y \dot{\epsilon}_y + \sigma'_z \dot{\epsilon}_z + 2\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + 2\tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + 2\tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} = \\ = \kappa (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2 + 2\dot{\gamma}_{yz}^2 + 2\dot{\gamma}_{zx}^2). \end{aligned} \quad (5,11)$$

Jeśli wszystkie prędkości pomnożymy przez czynnik c , to wyrażenie powyższe zwiększy się proporcjonalnie do c^2 . Równocześnie czas przebiegu odkształcenia skraca się w stosunku $1:c$. Wynika z tego, że wprowadzony współczynnik proporcjonalności musi być odwrotnie proporcjonalny względem prędkości. Innymi słowy dewiator naprężeń pozostaje ten sam, o ile wszystkie składowe tensora prędkości zmieniają się w tym samym stosunku.

Zastanówmy się bliżej nad współczynnikiem w funkcji dyssypacyjnej $D = \kappa (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2 + 2\dot{\gamma}_{yz}^2 + 2\dot{\gamma}_{zx}^2)$. W tym celu musimy uprzednio znaleźć τ_{max} dla trójwymiarowego układu naprężeń, co jest rzeczą znacznie trudniejszą, niż dla układu płaskiego. Zagadnienie powyższe rozwiązał M. Levy³⁷⁾ w następujący sposób:

Główne naprężenia normalne określamy ze składowych tensora naprężeń (5,1) na podstawie równania charakterystycznego:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5,12)$$

Jest to równanie algebraiczne trzeciego stopnia względem nieznanej λ . Trzy pierwiastki tego równania są to: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (5,4). Teoria równań algebraicznych poucza nas, że, znając niezmienniki J_1, J_2 i J_3 , możemy zestawić nowe równanie algebraiczne, którego pierwiastkami będą różnice naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2; \sigma_2 - \sigma_3; \sigma_3 - \sigma_1$. Zakładając dodatkowo, że $J_1 = 0$ ze względu na nieściśliwość cieczy, możemy zestawić t. zw. równanie charakterystyczne M. Levy'ego trzeciego stopnia, którego pierwiastki ρ^2 odpowiadają największym naprężeniom stycznym:

$$4(\rho^2 + J_2)(4\rho^2 + J_2)^2 + 27J_3^2 = 0 \quad (5,13)$$

Największy z trzech pierwiastków, których równanie powyższe posiada trzy, wszystkie rzeczywiste i dodatnie, przyrównujemy do pewnej wielkości stałej $|\rho^2|_{max} = k^2$, jeśli dane ciało jest szczególnie plastycznym (warunek Tresca-St. Venant).

³⁷⁾ M. Levy. J. Liouville. 369, 1871.

Nieziemienniki skalarne J_2 i J_3 , będące funkcjami naprężeń, zastąpmy przez nowe nieziemienniki tensora prędkości odkształceń na podstawie zależności (5,10), wprowadzając na razie współczynnik lepkości w kształcie niewiadomej ρ' .

$$J_2 = \rho'^2 I_2; \quad J_3 = \rho'^3 I_3 \quad (5,13)$$

Podstawmy nowe wartości w równanie Levy'ego, w którym zamiast ρ mamy podstawioną uprzednio stałą Tresca. Otrzymujemy:

$$4(k^2 + \rho'^2 I_2)(4k^2 + \rho'^2 I_2)^2 + 27\rho'^6 I_3^2 = 0 \quad (5,14)$$

Równanie powyższe jest trzeciego stopnia względem nowej niewiadomej ρ'^2 . Rozwiążmy go względem niej i z trzech pierwiastków, które są rzeczywiste i dodatnie, wybierzmy najmniejszy, który będzie żądanym współczynnikiem lepkości η .

Z równania (5,14) widzimy, że współczynnik lepkości jest odwrotnie proporcjonalny względem pewnego wyrażenia jednorodnego pierwszego stopnia z prędkości odkształcania: I_2 jest bowiem wielomianem jednorodnym drugiego stopnia, zaś I_3 — trzeciego stopnia ze składowych prędkości odkształcania. Wynika stąd, że funkcja dyssypacyjna jest jednorodna i pierwszego stopnia względem składowych prędkości odkształcania. Tensor naprężeń jest zerowego stopnia względem składowych prędkości odkształcania.

Podane przez nas równanie charakterystyczne, określające współczynnik lepkości, zawdzięczamy M. Brillouin'owi³⁸⁾, który widzi jednak konieczność uzupełnienia funkcji dyssypacyjnej czynnikiem w postaci funkcji wykładniczej czasu odkształcania plastycznego. Podniętą dla takiego postawienia zagadnienia są dla Brillouin'a doświadczenia Bouasse'a nad skręcaniem drutów i badania występujących przytem zjawisk dziedziczności.³⁸⁾³⁹⁾⁴⁰⁾

Przy bezładnych przekształceniach ugrupowań atomowych, jakie zachodzą podczas zgniotu, czas trwania tych przekształceń odgrywa bezwątpienia poważną rolę. Na podstawie metod mechaniki statystycznej można wnioskować, że wprowadzenie do

³⁸⁾ M. Bouasse. Torsion des fils fins. Thèse 1896. Także Ann. de Phys. et Chimie. 1897. Pozatem liczne prace w Ann. de Toulouse. ³⁹⁾ N. S. Kurnakow i S. F. Zemczużnyj. Dawlenie istieczenia i twiordost' židkich tiel. Izv. Pieterb. Politechn. Inst. 1913. ⁴⁰⁾ Vito Volterra. Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der math. Physik. Przekład niem. przez Lamla. Lipsk 1914.

wyrażenia funkcji dyssypacyjnej czynnika, w postaci funkcji wykładniczej czasu trwania zgniotu, jest rzeczą usprawiedliwioną.

6. Równanie ruchu ciała plastycznego przy zastosowaniu symbolistyki bezwzględne rachunku różniczkowego. Sformułowanie warunku plastyczności i równań ruchu ciała plastycznego zyskuje wiele na jasności i pogładowości, jeśli zastosujemy symbolistykę bezwzględne rachunku różniczkowego, którego podstawy znajdujemy w badaniach Christoffel'a, zaś ogólne rozwinięcie teorii w pracach R. Ricci-Curbastro i Levi-Civita.⁴¹⁾ W kołach fizycznych teoria powyższa, znana pod nazwą ogólnego rachunku tensorowego, lub rachunku Ricci,⁴²⁾ stała się popularną od chwili, gdy, jak o tem wspominaliśmy poprzednio, Einstein użył jej jako zasadniczego środka pomocniczego do swych badań w dziedzinie teorii grawitacji.⁴³⁾ Pierwsze ujęcie teorii plastyczności w symbolistyce ogólnie tensorowej dał H. Hencky.⁴⁴⁾⁴⁵⁾ Oznaczmy przez $g_{\mu\nu}$ fundamentalny tensor metryczny. Przy ruchu nieutralizowanym fundamentalny tensor metryczny jest bliżej nieznaną nam funkcją czasu, którą dopiero w następstwie dałoby się określić.

Pełny tensor naprężeń składa się z dwóch części. Pierwsza z nich odpowiada wszechstronnemu ciśnieniu p , druga zaś de-wiatorowi. Przedstawmy pełny tensor w kształcie spółzmiennym:

$$P_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + \dot{p}_{\mu\nu} \quad (6,1)$$

Podobnie pełny tensor odkształceń przedstawimy w postaci:

$$S_{\mu\nu} = e g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \quad (6,2)$$

Plastyczne odkształcenie Hencky traktuje wyłącznie jako zmianę postaci ciała, odrzucając ciśnienie hydrostatyczne i zmiany obję-

⁴¹⁾ G. Ricci i Levi-Civita. Metody rachunku różniczkowego bezwzględnego i ich zastosowanie. Prace matem.-fiz. 12, 11-94, 1901. P. Appell. Traité de Mécanique Rationnelle. Éléments de calcul tensoriel. Paryż. 1926.

⁴²⁾ J. A. Schouten. Der Ricci-Kalkül. Berlin 1924. ⁴³⁾ A. S. Eddington. The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge Univ. Press. 1923, lub w przekładzie niemieckim: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. J. Springer 1925. Autor świetnie ujmuje z punktu widzenia fizycznego zasadnicze pojęcia z dziedziny rachunku ogólnotensorowego. ⁴⁴⁾ L. Brillouin. Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques. Ann. de Phys. 251-298, 1925. ⁴⁵⁾ H. Hencky. Die Bewegungsgleichungen beim nichtstationären Fließen plastischer Massen. ZAMM. 5. 144, 1925.

tościowe, na co wszakże niezawsze można się zgodzić wobec daleko posuniętych odkształceń trwałych. Obchodzą nas jedynie dewiatory, które, przez zmianę osi współrzędnych, dają się zawsze sprowadzić do trzech wzajemnie prostopadłych naprężeń stycznych. Prawo proporcjonalności dewiatora naprężeń i odkształceń daje nam wzór:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2G} p_{\mu\nu} \quad (6,3)$$

W zależności powyższej mamy do czynienia z jednym tylko współczynnikiem, a mianowicie modulem odkształcenia postaciowego. Nasuwa to na myśl, że po udzieleniu impulsu naprężeniowego, któremu odpowiada odkształcenie poza granicą plastyczności, dewiator odnośnych prędkości odkształcania będzie, podobnie jak dewiator odkształceń właściwych, proporcjonalny do dewiatora krańcowych naprężeń sprężystych. Z uwagi powyższej będziemy stale korzystać przy uzasadnianiu teorii ruchu ciała plastycznego.

Zajmijmy się na wstępie warunkiem plastyczności Hubera i w tym celu przyrównajmy do pewnej wielkości stałej pracę dewiatora odkształceń właściwych. Jeśli $2k$ stanowi granicę plastyczności przy jednokierunkowym układzie naprężeń, to pracę dewiatora otrzymamy, nasuwając przeciwny tensor naprężeń na spółzmienny tensor odkształceń:

$$\Lambda = \frac{1}{2} p_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{4G} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \frac{2k^2}{3G}; \quad (6,4)$$

warunek plastyczności wyrazi się wówczas w postaci niezmiennika:

$$p_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \frac{8}{3} k^2 \quad (6,5)$$

Wobec tego, że zjawiska fizyczno-mechaniczne, towarzyszące walcowaniu lub wytłaczaniu metali, są nader skomplikowane, jest rzeczą konieczną uprościć zasadnicze założenia i umożliwić tym sposobem zastosowanie metod matematycznych do rozwiązywania najważniejszych zagadnień. Tą drogą poszedł w swoim czasie St. Venant i Boussinesq, w ich ślady podążyli Mises i Hencky. Myślą przewodnią Hencky'ego stało się uwzględnienie dwoistej natury ciekącego materiału plastycznego: a więc jako ciała izotropowego sprężystego, posiadającego określoną granicę plastyczności, częściowo zaś znowu jako nieściśliwej cieczy lepkiej.

Otrzymuje się przytem stany równowagi statecznej, określające pewne układy równań różniczkowych. Innym założeniem Hencky'ego jest to, że odkształcenia plastyczne są powolne i przebieg ich jest izotermiczny, wskutek czego warunek plastyczności może być uważany za niezmienny.

Tak więc przy ruchu materiału plastycznego mamy do czynienia z dwoma dewiatorami naprężeń: statycznym, wynikającym z działania sił sprężystych $p_{\mu\nu}$ i dynamicznym, odpowiadającym siłom tarcia wewnętrznego $r_{\mu\nu}$. Oba powyższe dewiatory, w myśl poprzedniej uwagi Hencky'ego, możemy wyrazić w prędkościach odkształceń właściwych, które, ze względu na właściwości symbolistyki rachunku tensorowego, oznaczmy przez $e_{\mu\nu}$. Mianowicie mamy:

$$\text{dla naprężeń ciernych} \quad r_{\mu\nu} = 2\lambda e_{\mu\nu} \quad (6,61)$$

$$\text{dla naprężeń sprężystych} \quad p_{\mu\nu} = 2\lambda e_{\mu\nu} \quad (6,62)$$

Pomiędzy współczynnikami λ i λ istnieje zasadnicza różnica. Zdawałoby się, że współczynnik tarcia wewnętrznego λ może być określony na podstawie badań nad zanikaniem drgań w ciele sprężystym. Nie mamy wszakże pewności, czy jest on identyczny ze współczynnikiem lepkości materiału plastycznego. Pozostawiając na boku rozstrzygnięcie tej kwestji, możemy uważać współczynnik λ za wielkość stałą. Inaczej rzecz się ma ze współczynnikiem λ . Wzór (6,62) niema charakteru równania teorii sprężystości, a ujmuje jedynie mniej lub więcej uzasadnioną hipotezę, że po przekroczeniu granicy plastyczności układ naprężeń sprężystych jest określony przez prędkości ruchu plastycznego. Co najważniejsze, uważamy przytem, że warunek plastyczności obowiązuje i nadal bez zmiany. Współczynnik λ możemy też określić z warunku plastyczności: $4\lambda^2 e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 8/3 k^2$, skąd mamy:

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{e_{\mu\nu} e^{\mu\nu}}} = \frac{2k}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e_{\mu}^{\cdot\nu} e_{\nu}^{\cdot\mu}}} \quad (6,7)$$

Tak otrzymany współczynnik λ jest odwrotnie proporcjonalny do pewnej jednorodnej funkcji pierwszego stopnia z prędkości odkształcania.

Przy wyprowadzaniu równań, dotyczących równowagi elementu ciała plastycznego w ruchu, pominiemy siły bezwładności.

Przy większości procesów technologicznych odkształcanie plastyczne odbywa się powoli i przyspieszenia są znikome. Równanie równowagi określamy zazwyczaj w ten sposób, że div tensora naprężeń i siła wypadkowa działań masowych składa się wspólnie na wektor zerowy⁴⁶⁾. W symbolistycie bezwzględного rachunku różniczkowego znak ∇_ν oznacza różniczkowanie spółzmiennne, przy którym usunięty jest wpływ krzywizny układu spółrzędnych:

$$\nabla_\nu P^{\mu\nu} + \nabla_\nu r^{\mu\nu} + \rho X^{\mu} = 0$$

skąd po podstawieniu wzorów (6; 61 i 62) otrzymamy

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + 2\kappa \nabla_\nu e^{\mu\nu} + 2\nabla_\nu (\lambda e^{\mu\nu}) + \rho X^{\mu} = 0$$

Nasuńmy na lewą stronę tego równania spółzmienny tensor fundamentalny $g_{\mu\nu}$. Otrzymamy

$$\frac{\partial p}{\partial x^\sigma} + 2\kappa \nabla_\sigma e^{\cdot\nu}_\sigma + 2\nabla_\sigma (\lambda e^{\cdot\nu}_\sigma) + \rho X_\sigma = 0 \quad (6,8)$$

Warunek nieściśliwości materiału plastycznego wyrazi się w postaci

$$e^{\cdot\nu}_\nu = 0 \quad (6,9)$$

Jeśli we wzorze (6,8) pochodna spółzmienna $\nabla_\nu (\lambda e_{\mu\nu})$ jest równa zeru, mamy do czynienia z cieczą lepką, której spółczynnik lepkości może być bardzo duży, zaś prędkość płynięcia bardzo powolna. Zachowując jednak ten wyraz w równaniu (6,8), otrzymujemy ruch plastyczny, zasadniczo różny od ruchu cieczy plastycznej. W przypadku cieczy lepkiej funkcja dyssypacyjna przedstawi się w kształcie $D = 2\kappa e_{\mu\nu} e^{\mu\nu}$, zaś w przypadku ruchu materiału plastycznego, po uwzględnieniu zależności (6,7), w postaci:

$$D = (p^{\mu\nu} + r^{\mu\nu}) e_{\mu\nu} = 2(\kappa + \lambda) e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 2(\kappa + \lambda) (e_\mu^\nu)^2 = \frac{4k^2}{3\lambda^2} (\kappa + \lambda) \quad (6,10)$$

⁴⁶⁾ J. Spielrein. Lehrbuch der Vektorrechnung. Stuttgart. 307, 1916. Operator Hamiltona, zastosowany względem tensora drugiego stopnia, Jahnke nazywa traktorem: $\text{tr } \bar{\sigma} = i \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + j \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + k \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$. O wiele ogólniejsze i ściślejsze określenie rozbieżności tensora jest następujące: rozbieżnością (divergencją) tensora jest skrócona spółzmienna pochodna tensora. Por. A. S. Eddington: The Mathematical Theory of Relativity; przekład niemiecki: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, str. 163.

Jeśli dodamy, że κ jest wielkością stałą, zaś współczynnik λ jest odwrotnie proporcjonalny do funkcji jednorodnej pierwszego stopnia względem prędkości odkształcania, to dojdziemy do wniosku, że funkcja dyssypacyjna bynajmniej nie jest proporcjonalna do wyrażenia pierwszego stopnia ze składowych prędkości. Propozycja teoretyczna Hencky'ego odbiega więc znacznie od próby ustalenia charakteru funkcji dyssypacyjnej, jaką dał M. Brillouin. Najnowsze badania nad walcowaniem, podjęte przez G. Liss'a⁴⁷⁾, wskazują, że słuszność leży bez wątpienia po stronie Hencky'ego.

Weźmy pod uwagę utrwalony ruch materiału plastycznego. W równaniach (6, 7, 8, 9) mamy do czynienia z ośmiu niewiadomymi, a mianowicie z p , λ i sześciu składowymi symetrycznego tensora $e_{\mu\nu}$. Jeśli od kształtu tensorowego przejść do zwykłych wyrażeń analitycznych, to równań będzie pięć. Przy utrwalonym prądzie materiału plastycznego, składowe tensora $e_{\mu\nu}$ dadzą się wyrazić jednak w pochodnych cząstkowych prędkości ruchu u , v , w . Tak więc liczba zmiennych odpowiada liczbie równań i rozwiązanie układu otrzymanych równań różniczkowych jest w zasadzie możliwe. W przypadku utrwalonego przepływu materiału plastycznego fundamentalny tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ może być wybrany najzupełniej dowolnie.

O wiele trudniej rzecz się przedstawia w wypadku ruchu nieutrwalonego, gdy układ współrzędnych zwiążemy z poruszającym się elementem ciała plastycznego. W tym przypadku układ początkowo ortogonalny staje się wkrótce, ogólnie biorąc, ukośnokątnym. Powstaje zależność pomiędzy fundamentalnym tensorem metrycznym równoobjętościowego układu odniesienia, a składowymi tensora odkształceń. Główny warunek, określający fundamentalny tensor $g_{\mu\nu}$, polega na przyrównaniu do zera krzywiznowego tensora 4-go stopnia Riemanna i Christoffel'a, zawierającego pierwsze i drugie pochodne $g_{\mu\nu}$.

W rozdziale piątym omówimy niezgodność założeń teoretycznych, przyjętych przez Hencky'ego, z doświadczeniem. Charakter ruchu ciała plastycznego jest tak odrębny, że tylko w wyjątkowych razach można dostosowywać doń postulaty, zapożyczone z hydrodynamiki i teorii sprężystości.

⁴⁷⁾ G. Liss. Die Nutzarbeit des Walzvorgangs. Stahl und Eisen. 1922.