

ślizgowe) tworzą twardy szkielet, pozostający po usunięciu materiału miękkiego.



Rys. 39.

4. Metoda rekrytalizacji, znana oddawna, pozwala dość dokładnie oznaczyć obszar zgniotu. Rys. 38 przedstawia otrzymany przez Sachs'a obszar zgniotu dla przypadku wtlaczania stempla wg. schematu z rys. 21. Rys. 39 przedstawia obszar zgniotu, uwidoczniiony przez rekrytalizację, odpowiadający schematowi z rys. 37.

ROZDZIAŁ III.

Zagadnienie skręcania prętów pryzmatycznych przy uwzględnieniu odkształceń plastycznych.

14. Skręcanie pręta o przekroju kołowym z materiału plastycznego. Zagadnienie powyższe było poraz pierwszy podjęte w r. 1848 przez prof. James Thomsona. Lord Kelvin, brat przedwcześnie zmarłego uczonego, zamieścił rozwiązanie w jednej ze swych prac⁶⁴⁾. To samo zagadnienie podjął znacznie później St. Venant⁶⁵⁾. Podajemy je poniżej z uzupełnieniami M. Brillouin'a⁶⁶⁾.

Wprowadźmy współrzędne walcowe r, φ, z . Mamy do czynienia z następującym układem odkształceń:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = 0; \quad \gamma_r = \Theta r; \quad \gamma_\varphi = \gamma_z = 0 \quad (14,1)$$

We wzorach powyższych Θ jest stałą, określającą kąt skręcania pręta na jednostkę jego długości. W pobliżu osi przesunięcie kątowe jest zawsze bardzo małe i mamy do czynienia jedynie z układem sił sprężystych. Naprężenie styczne określa wzór $\tau_{\varphi z} = G \Theta r$. Załóżmy, że promień walca jest r , zaś odkształce-

⁶⁴⁾ W. Thomson. Elasticity (Encycl. Brit.); również Math. Papers, III.10.

⁶⁵⁾ J. Liouv, 378, 1872. ⁶⁶⁾ M. Brillouin. Ann. de Phys. 14, 96, 1920.

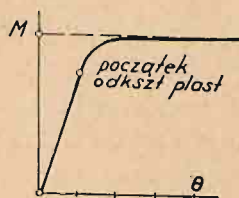
nie plastyczne pojawia się na pewnym promieniu, który oznaczmy przez r_0 . Mamy wówczas $G\theta r_0 = k$. Moment skręcenia daje wzór:

$$M = \int_0^{r_0} G\theta r \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr + \int_{r_0}^r k r \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi G\theta \frac{r_0^4}{4} + 2\pi k \frac{r^3 - r_0^3}{3} \quad (14,2)$$

Z wzoru powyższego możemy wyrugować r_0 , posilkując się wzorem $r_0 = k/G\theta$. Mamy wówczas:

$$M = -\frac{2\pi}{12} \cdot \frac{k^4}{\gamma^3 \theta^3} + \frac{2\pi}{3} k r^3 \quad \text{dla } \theta > \frac{k}{Gr} \quad (14,3)$$

Moment M można uważać za funkcję kąta θ . Początkowo jest on proporcjonalny do kąta θ , jak to wynika ze wzoru (14,2) dla $r_0 = r$, z chwilą zaś, gdy zaczyna się odkształcanie plastyczne owa proporcjonalność zanika. Zależność pomiędzy M a θ w wypadku skręcania pręta ołowianego przedstawia wykres, przedstawiony na rys. 40, przyjmujemy przytem $G = 7 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $k = 200 \text{ kg/cm}^2$; łatwo sprawdzić, że krzywa nie posiada załamania w punkcie, odpowiadającym początkowi odkształcenia plastycznego. Można się o tem



Rys. 40.

przekonać, szukając pochodnych $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_{\text{spręż.}}$ i $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_{\text{plast.}}$. Otrzymuje się przytem wyrażenia identyczne.

15. Charakter odkształcenia plastycznego w skręcanym pręcie o przekroju kołowym. Zajmijmy się pewnym układem naprężeń, wyrażonym w spólrzędnych walcowych r, φ, z . Niech dany tensor naprężeń będzie niezależny od azymutu φ i wysokości z . Równania równowagi sił sprężystych⁶⁷⁾ przedstawia się wówczas w następującej postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (15,1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) = 0 \quad (15,2)$$

⁶⁷⁾ A. E. H. Love. Elasticity (Prz. niemiecki), 151.

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0 \quad (15,3)$$

Prędkość w kierunku promienia, niezależną od wysokości z , oznaczmy przez u . Prędkość obwodowa jest niezależna od azymutu φ , oznaczmy ją przez v . Wreszcie prędkość w w kierunku osi z przyjmijmy równą zeru. Jeśli przejdziemy teraz do składowych prędkości odkształcenia, to otrzymamy odpowiednio:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{u}{r}; \quad \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (15,4)$$

$$\dot{\gamma}_r = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \dot{\gamma}_\varphi = 0; \quad \dot{\gamma}_z = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (15,5)$$

Warunek nieściśliwości $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0$ daje nam po zcałkowaniu zależność $ur = \text{const}$. Ponieważ u nie może w sąsiedztwie osi pręta przybierać wartości nieskończenie wielkich, przeto stała wartość iloczynu może być tylko zerem. Stąd wniosek, że $u = 0$. Średnicę pręta uważamy za stałą.

W klasycznej teorii skręcania v jest proporcjonalne do iloczynu zr i $\dot{\gamma}_z = 0$. Oznacza to, że dowolny promień po skręceniu pozostaje w dalszym ciągu prostą linią. Zadajemy sobie teraz pytanie, co stanie się z promieniem po odkształceniu plastycznym. Załóżmy w tym celu: $v = zrR$, gdzie R jest funkcją wyłącznie zmiennej r . Jaki będzie charakter owej funkcji R ?

Po uwzględnieniu warunku nieściśliwości, równania (15,4-5) przedstawiają się w nowej postaci:

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_z = 0; \quad \dot{\gamma}_r = rR; \quad \dot{\gamma}_\varphi = 0; \quad \dot{\gamma}_z = zrR' \quad (15,6)$$

Aby określić składowe tensora plastycznego, zauważmy na przód, że dewiator naprężeń $\bar{\sigma}$ jest proporcjonalny do dewiatora prędkości odkształceń $\bar{\dot{\epsilon}}$. Mamy więc $\bar{\sigma} = \kappa \bar{\dot{\epsilon}}$, gdzie κ oznacza współczynnik lepkości. Ponieważ składowe normalne $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_z = 0$, przeto składowe normalne pełnego tensora σ sprowadzają się jedynie do ciśnienia hydrostatycznego p

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = p \quad (15,7)$$

składowe styczne będą równe

$$\tau_{z\varphi} = \kappa rR; \quad \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{r\varphi} = \kappa zrR' \quad (15,8)$$

Spółczynnik lepkości κ jest najmniejszym pierwiastkiem równania (5,14), które wobec tego, że trzeci niezmiennik skalarny $I_3 = 0$, przedstawia się w postaci

$$(k^2 + \rho'^2 I_2) (4k^2 + \rho'^2 I_2)^2 = 0 \quad (15,9)$$

Drugi niezmiennik skalarny $I_2 = -r^2 (R^2 + z^2 R'^2)$. Łatwo się przekonać, że najmniejszym pierwiastkiem jest

$$\kappa = \rho'_{min} = \frac{k}{r \sqrt{R^2 + z^2 R'^2}} \quad (15,10)$$

skąd mamy

$$\tau_{\varphi z} = k R : \sqrt{R^2 + z^2 R'^2}; \quad \tau_{r\varphi} = k z R' : \sqrt{R^2 + z^2 R'^2} \quad (15,11)$$

Ze względu na to, że w równaniach równowagi (15; 1, 2, 3) $\tau_{\varphi z}$ nie występuje wcale, obchodzi nas jedynie równanie (15,2) w postaci

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k z r^2 R'}{\sqrt{R^2 + z^2 R'^2}} \right] = 0.$$

Wyprowadzamy stąd wniosek, że $z r^2 R' : \sqrt{R^2 + z^2 R'^2}$ jest funkcją niezależną od zmiennej r . Dwa inne równania (15; 1, 3) stają się tożsamościami. Ostatecznie wnioskujemy, że $R' = 0$, zaś $R = \text{const}$. Promienie pozostają prostymi po odkształceniu plastycznym tak samo, jak i przy odkształceniu sprężystym. Zgadza się to z doświadczeniami Bouasse'a⁶³⁾ nad skręcaniem prętów ołowianych, w których przewiercone zostały wzdłuż promieni włoskowate otworki.

16. Układ przesunięć kątowych i naprężeń w skręconym walcu o przekroju kołowym. W celu przedstawienia układu powyższego użyjemy metody wykreślnej. Niech wałek o przekroju kołowym o promieniu r_1 będzie skręcony na kąt $(\Theta)_{max} = \Theta_m$. Skok zewnętrznej linii śrubowej będzie wynosił $2\pi/\Theta_m$. Moment skręcający jest dostateczny, by poczynając od promienia $r_0 = K/G\Theta_m$ otrzymywać odkształcenia plastyczne. Przesunięcia całkowite otrzymujemy proporcjonalne do promienia r tak w obszarze sprężystym, jak i plastycznym. Co stanie się, jeśli zmniejszymy nieco moment skręcający. Przy zachowa-

⁶³⁾ Por. uw. 66 str. 101.

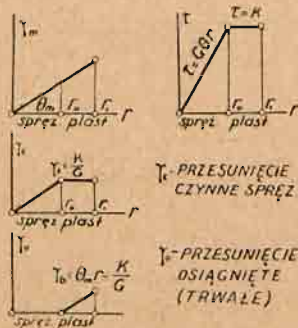
niu niezmiennego warunku plastyczności w sformułowaniu Tresca-St. Venant'a, zmiana kierunku wymagałaby zmiany znaku tensora plastycznego na $\tau = -k$ w pierścieniu plastycznym, czyli dla $r_0 \rightarrow r \rightarrow r_1$. Jest to wszakże rzeczą niemożliwą, gdyż moment skręcający uległby wówczas raptownej zmianie i na granicy dwóch obszarów nie byłby zachowany warunek ciągłości układów naprężeń. Aby wyjść ze sprzeczności przyjmujemy, że odkształcony plastycznie materiał wykazuje oddziaływanie sprężyste. Innymi słowy w danym momencie materiał w pierścieniu $r_0 r_1$ pozostaje w stanie odkształcenia plastyczno-sprężystego.

W myśl teorii przybliżonej przyjmujemy, że przesunięcie całkowite γ_m składa się z dwóch części: γ_c — przesunięcia czynnego sprężystości i γ_0 — przesunięcia trwałego, lub, według wyrażenia M. Brillouin'a, osiągniętego. Rozważania z § 14 możemy uzupełnić obecnie obliczeniem momentu w okresie odkręcania skręconego pręta, przyjmując przytem, że materiał wzdłuż promieni pozostaje w dalszym ciągu rozmieszczony prostoliniowo. Moment powyższy obliczymy w zależności od kąta $\theta < \theta_m$. W środkowej części pręta przesunięcie czynne jest w dalszym ciągu $\gamma_c = \theta r$. W części pierścieniowej jest ono zredukowane do

$$\bar{\gamma}_c = \bar{\theta} r - \gamma_0 = (\bar{\theta} - \theta_m) r + \frac{k}{G} \quad (16,1)$$

$$\text{zaś} \quad \tau = G(\bar{\theta} - \theta_m) r + k \quad (16,2)$$

$$\text{wreszcie } M = 2\pi G \int_0^{r_0} \bar{\theta} r^3 dr + 2\pi \int_{r_0}^{r_1} [G r^3 (\bar{\theta} - \theta_m) + k r^2] dr \quad (16,3)$$



Rys. 41.

Z ostatniego wzoru możemy obliczyć kąt θ_0 , odpowiadający momentowi zerowemu $M_0 = 0$. Aby doprowadzić wałek do kąta $\theta = 0$, należy zastosować względem niego ujemny moment skręcający, który możemy obliczyć z wzoru (16,3). Według podanej teorii możnaby przypuszczać, że po powrocie do kąta $\theta = 0$ pręt wróci do stanu pierwotnego. Tak jednak nie jest: doświadczenie stwierdza, że zmiany

dokonane w strukturze materiału w części pierścieniowej są trwałe. Teoria wymaga tu pogłębienia i wejrzenia bliższego w fizyczną stronę zagadnienia, na drodze badań doświadczalnych.

17. Teorje skrećania plastycznego. W r. 1923 A. Nádai i E. Trefftz podali jednocześnie rozwiązanie zagadnienia skrećania prętów pryzmatycznych o dowolnym przekroju z uwzględnieniem odkształcenia plastycznego.^{69) 70)}

Przyjmujemy dowolny przekrój pręta pryzmatycznego, nie ograniczając się do wałków o przekroju kołowym. Teoria sprężystości poucza nas, że w punkcie (x, y) przekroju pręta działa jedynie naprężenie styczne o składowych τ_x i τ_y . Równanie równowagi przedstawi się w postaci $\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0$, zaś warunek

plastyczności przyjmujemy w postaci $\tau_x^2 + \tau_y^2 = \text{const.}$

Jeśli dla zobrazowania układu naprężeń użyjemy funkcji naprężeń φ , to równaniu równowagi będą czynić zadość składowe naprężeń stycznych, wyrażone w funkcji naprężeń:

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (17,1)$$

W częściach przekroju, gdzie materiał uległ odkształceniu plastycznemu, panuje następujący układ naprężeń:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} = |\text{grad } \varphi| = \tau_0 = \text{const.} \quad (18,2)$$

Niech każdemu punktowi (x, y) przekroju odpowiada rzędna φ , określająca t. zw. powierzchnię naprężeń. Okaze się, że powierzchnia ta posiada nader proste własności geometryczne. Przeprowadźmy warstwicę równoległą do płaszczyzny przekroju: ich rzuty na powierzchnię przekroju wyznaczą rodzinę krzywych równoległych,⁷¹⁾ uzależnionych od charakteru danej części zewnętrznego profilu pręta. Powierzchnię φ uzmysławiamy sobie

⁶⁹⁾ A. Nádai. Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab. ZAMM, 3, 442, 1923. Referat powyższy był odczytany we wrześniu 1923 r. na zjeździe mechaniki stosowanej w Marburgu. Na tym samym zjeździe wygłosił Trefftz referat ogłoszony później. ⁷⁰⁾ E. Trefftz. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze. ZAMM. 5, 64, 1925. ⁷¹⁾ E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tom II, str. 640.

w kształcie zbocza dachu, jaki otrzymamy, przeprowadzając w poszczególnych punktach profilu w płaszczyznach do prostopadłych proste nachylone pod stałym kątem względem płaszczyzny przekroju pręta. Powierzchnię powyższą można otrzymać, nasypując mialki piasek na poziomo ustawiony przekrój pręta, aż po bokach utworzą się odkosy. Jeśli pręt jest skręcony tak, że odkształcenia plastyczne zjawiają się w całym przekroju, to powierzchnia utworzy dach, pokrywający całkowicie przekrój.⁷²⁾

Posiłkując się znaną analogią membranową Prandtla, możemy zobrazować przejrzyście rozkład naprężeń stycznych w przekroju pręta. Mianowicie na otworze, posiadającym płaski profil, identyczny z profilem skręcanego pręta, rozpinamy sprężystą błonę. Nad otworem umieszczamy sztywny daszek o omawianym poprzednio kształcie geometrycznym, który opiera się o profil. Błonę obciążamy równomiernie od spodu, stosując np. pewne ciśnienie powietrza, powoli zwiększane. Dopóki błona nie dotknie się wznoszącego się ponad nią dachu, jej powierzchnia uzmysławia skręcanie sprężyste. Kąt skręcania pręta jest przytem proporcjonalny do prężności powietrza pod błoną.

Jednym z przykładów, podanych przez Nádai'a jest skręcanie pręta o przekroju prostokątnym (por. Timoszenko-Huber, str. 76).



a



b

Rys. 42.

Rys. 42a i 42b przedstawiają zmianę układu naprężeń po przekroczeniu granicy plastyczności w miarę zwiększania momentu skręcającego. Dziedzina plastyczna jest zakreskowana w odróżnieniu od dziedziny sprężystej. Trajektorie naprężeń stycznych w polu odkształcania plastycznego są równoległe do prostych brzegowych. W miarę powiększania się momentu skręcającego zjawiają się pola odkształceń plastycznych również wzdłuż krótszych

boków prostokąta. Rys. 42b odpowiada chwili, gdy moment skręcający zbliża się asymptotycznie do wartości krańcowej.

Analogia membranowa nadaje się, jak wiadomo, do uzmysło-

⁷²⁾ K. Mierzejewski. Nowszy rozwój mechaniki ciał plastycznych. Prz. Techn. 1927. Zawiera opis najnowszych doświadczeń Nádai'a i Bader'a, stwierdzających omawianą teorię.

wienia momentu skręcającego, który jest określony przez dwukrotną objętość przestrzeni, zawartej pomiędzy naprężoną błoną, a profilem zamocowania. Asymptotyczna wartość tego momentu jest określona przez objętość przestrzeni pod powierzchnią odkosową.

Analogia membranowa daje też możność przedstawienia układu naprężeń sprężystych, jakie pozostają w skręconym plastycznie pręcie po uwolnieniu go od momentu skręcającego. Mamy przytem do czynienia z charakterystycznym zamagazynowaniem energii sprężystej, którą uważać możemy za przyrost wewnętrznej energii ciała odkształcanego. Układy omawianych utajonych naprężeń wewnętrznych posiadają cechy pokrewne z układami naprężeń termicznych, wynikających z nierównomiernego ogrzewania ustrojów sprężystych. Na fakt ten, mający znaczenie dla teorii utwardzania i będący punktem wyjścia dla teorii Hencky'ego, o której będzie mowa w rozdziale następnym, pierwsi zwrócili uwagę August i Ludwik Föppl.⁷³⁾

Niech momentowi M^* , dającemu trwale odkształcenia, odpowiada powierzchnia naprężeń φ^* . Przy mniejszym momencie M otrzymujemy inną powierzchnię naprężeń. Oznaczmy przez φ powierzchnię naprężeń sprężystych, odpowiadającą różnicy momentów $M^* - M$. W ust. 16 zaznaczyliśmy, że materiał trwale odkształcony wykazuje sprężystość, przynajmniej do chwili, gdy w jakimkolwiek punkcie przekroju nie zjawi się znowu naprężenie styczne $\pm \tau_0$.

Układ pozostałych własnych naprężeń, gdy moment M zmaleje do zera, przedstawi się jako gradient powierzchni, utworzonej przez różnice spółrzędnych, odpowiadających powierzchniom φ i φ^* , co wyrazimy wzorem $|\tau| = |\text{grad}(\varphi^* - \varphi)|$.

Rozpatrzmy układ utajonych, wewnętrznych naprężeń sprężystych w pręcie kwadratowym po doprowadzeniu momentu skręcającego do wartości asymptotycznej M^* , a następnie po odprężeniu naturalnem pręta. Podwójna objętość piramidy zbudowanej na kwadracie będzie $M^* = 2 \iint \varphi^* dx dy = \frac{8}{3} \tau_0 a^3$. Moment skręcający pręta kwadratowego wynosi $M = 4,50 G \Theta a^4$. Z równania $M^* = M$ wynika, że kąt, o jaki pokręca się sprę-

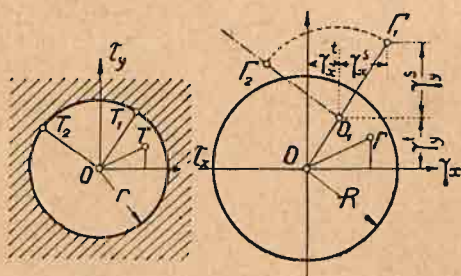
⁷³⁾ A. i L. Föppl. Drang und Zwang. Tom 2.

żyście odcinek pręta o długości $= 1$ po odprężeniu całkowitem wynosi $\theta = 0,593 \tau_0 / G a$.

Zwraca uwagę fakt, że skręcony plastycznie pręt po odprężeniu całkowitem wykazuje pewien sobie właściwy układ pozostałych wewnętrznych naprężeń stycznych. Posiłkując się podaniami zależnościami można ten układ wewnętrznych naprężeń z łatwością odtworzyć. Środkowa część pręta wykazuje przytem naprężenia przeciwnego znaku w stosunku do warstwy zewnętrznej.

18. Wykreślne przedstawienie zmiany kierunku naprężeń głównych przy odkształceniach trwałych. W myśl założeń St. Venant'a (por. § 6) po przekroczeniu granicy plastyczności kierunki naprężeń głównych zbiegają się z kierunkami prędkości odkształceń plastycznych.

Jeśli ograniczymy się do płaskiego półplastycznego układu naprężeń, z jakim mamy do czynienia przy skręcaniu, to układ powyższy określony przez składowe τ_x i τ_y naprężenia stycznego



Rys. 43.

daje się z łatwością przedstawić w postaci punktu T w układzie współrzędnych τ_x, τ_y (rys. 43). Warunek plastyczności $\tau_{max} = k$ wyraża się w tem, że punkt T nie może się znaleźć zewnątrz koła r , zakreślonego z początku osi współrzędnych promieniem k . Umieścmy w myśl propozycji Prandti'a

i Nádai'a obok wykresu naprężeń wykres odkształceń. Punkt Γ (γ_x, γ_y) odpowiada jednoznacznie punktowi T (τ_x, τ_y) pod warunkiem, że znajduje się on wewnątrz koła, zakreślonego promieniem $OR = \tau_{max} / G$. Mamy przytem, że $\gamma_x = \tau_x / G$ oraz $\gamma_y = \tau_y / G$. Jeśli w jakimkolwiek punkcie przekroju skręcanego pręta osiągniemy granicę plastyczności, to dany układ naprężeń i odkształceń charakteryzować będą punkty T i Γ , leżące na odpowiednich kołach. Niech teraz odkształcanie plastyczne zacznie się posuwać dalej z tem zastrzeżeniem, że przyrosty prędkości odkształcania zachowują te same, co i poprzednio kierunki, wciąż zgodne z kierunkami naprężeń. Układ odkształceń scharakteryzuje nam wówczas punkt Γ_1 , któremu odpowiadać będzie punkt T_1 , przy-

to możemy wyznaczyć kierunki naprężenia stycznego dla każdego dowolnego punktu krzywej gg . Weźmy pod uwagę punkt Γ_2 w sąsiedztwie punktu Γ_1 . Opuśćmy prostopadłą $\Gamma_2 S$ na prostą $O_1 \Gamma_1$. Przyprostokątną $\Gamma_1 S$ musimy uważać za przyrost odkształcenia trwałego, zaś przyprostokątną $S\Gamma_2$ za miarę przesunięcia kąтового wektora OT w wykresie naprężeń, czyli za zmianę kierunku naprężeń głównych. Z rys. 44 wnosimy, że konstrukcja powyższa umożliwia wyznaczenie toru punktu O na podstawie toru punktu Γ . Tor punktu O wyznacza składowe odkształcenia trwałego (γ'_x, γ'_y) w zależności od odkształcenia całkowitego (γ_x, γ_y) .

19. Metoda Trefftz'a wyznaczania obszaru plastycznego przy skręcaniu prętów przyrmatycznych. W wyniku badań nad wytrzymałością na skręcanie prętów przyrmatycznych o przekroju wieloboku prostolinowego, Trefftz dał metodę wyznaczania linii granicznej wyodrębniającej obszar odkształcenia plastycznego od sprężystego.⁷⁴⁾⁷⁵⁾ Jakkolwiek dotyczy on pewnej tylko kategorii prętów profilowych, posiada jednak ogólniejsze znaczenie ze względu na charakter użytych przytem metod matematycznych.

Układ naprężeń w przekroju prostopadłym do osi skręcanego pręta przyrmatycznego określają następujące wzory,⁷⁶⁾ w których G jest modułem sprężystości postaciowej, θ kątem skręcania pręta na jednostkę długości

$$\tau_y = G\theta \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right); \quad \tau_x = G\theta \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (19,1)$$

zaś φ pewną funkcją harmoniczną. Ponieważ na obwodzie przekroju wektor naprężeń przebiega tangencjalnie, mamy warunek brzegowy

$$\tau_y \frac{dy}{dl} - \tau_x \frac{dx}{dl} = 0 \quad (19,2)$$

który można bardzo uprościć, jeśli funkcję φ uważać za część

⁷⁴⁾ E. Trefftz. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei theilweiser Überschreitung der Fließgrenze. ZAMM, 5, 64, 1925. ⁷⁵⁾ Tenże. Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalen Querschnitt. Math. Annalen. 82, 97, 1920. ⁷⁶⁾ A. E. H. Love. A Treatise on the Math. Theory of Elasticity. Przekład niemiecki 361 i nast., 1907.

rzeczywistą funkcji analitycznej $\varphi + i\psi$, gdzie ψ czyni również zadość równaniu Laplace'a.

Warunek brzegowy przybiera postać $d\bar{\psi} = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ lub

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const} \quad (19,3)$$

przyczem kreska nad ψ oznacza, że bierzemy wartości tej funkcji wzdłuż profilu. Mamy więc do czynienia ze zwykłym zagadnieniem brzegowym z teorii potencjału logarytmicznego. Dla przekrojów, ograniczonych odcinkami prostoliniowymi, zagadnienie upraszcza się bardzo. Przedewszystkiem zauważmy, że różniczkując funkcję analityczną $\varphi + i\psi$ względem zmiennej zespolonej $z = x + iy$ otrzymujemy nowe funkcje harmoniczne w postaci części rzeczywistej lub urojonej pochodnej.⁷⁷⁾ A więc mamy:

$$p + iq = \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)} \quad (19,4)$$

$$s + it = \frac{d(p + iq)}{d(x + iy)} = \frac{d^2(\varphi + i\psi)}{dz^2} \quad (19,5)$$

Składowe naprężenia stycznego przedstawia się w postaci:

$$\tau_x = G\Theta(-y + p); \quad \tau_y = G\Theta(x - q) \quad (19,61)$$

$$p + iq = f(z) \quad (19,62)$$

Jak wiadomo funkcja $p + iq$, jak i funkcja $s + it$, określają pewne odwzorowania podobne. Na uwagę zasługuje przytem odwzorowanie podobne zapomocą funkcji analitycznej $s + it$ w wypadku przekroju w postaci zamkniętego wieloboku prostoliniowego. Trefftz znalazł mianowicie, że posilkując się nim, odwzorowywujemy dowolny wielobok na innym wieloboku o tej samej liczbie wierzchołków i przy jednoznacznej ich odpowiedniości. Ten nowy wielobok jest jednak opisany na kole o promieniu $= 1$. Kąt zawarty pomiędzy dowolnym bokiem nowego wieloboku, a osią współrzędnej s jest ujemnego znaku i dwa razy większy od kąta, jaki w płaszczyźnie z czyni bok dawnego wieloboku z osią x . Jest to ważna wskazówka dla teorii odwzorowywania podobnego większości profilów technicznych, jak kątowniki, teówki, dwuteówki,

⁷⁷⁾ E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tom III, 172. 1915.

korytka, ograniczonych prostemi pionowymi i poziomymi. Mianowicie zapomocą funkcji $s+it$ możemy dany wielobok odwzorować zawsze na pasku nieograniczonej długości, ograniczonym dwoma równoległymi prostemi, do jakiego sprowadza się wówczas wielobok nowy. Łatwo się o tem przekonać, jeśli zauważymy, że w omawianych profilach technicznych boki tworzą następujące kąty z osią x : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, zaś w wieloboku nowym kąty 0 i π .

Upraszcza się przytem i warunek brzegowy (19,2).

Odwzorowanie podobne danego wieloboku na nowym wieloboku prostoliniowym, jaki zapewnia funkcja zmiennej zespolonej $s+it$, jest przypadkiem szczególnym teorii wzajemnego odwzorowywania wieloboków, jaką zawdzięczamy H. A. Schwartz'owi.⁷⁸⁾⁷⁹⁾ W myśl tej teorii wieloboki mogą być ograniczone nie tylko prostymi, ale i ogólniej łukami kół. Jeśli ograniczymy się do wieloboków prostoliniowych, to i tak metoda Schwartz'a zapewnia nam wiele różnorodnych sposobów odwzorowywania. Możemy np. wierzchołki nowego wieloboka rozmieścić na osi odciętych, przyjmując punkt w nieskończoności za jeden z wierzchołków. Zagadnienie sprowadzi się wówczas do odwzorowania danego wieloboku na półpłaszczyźnie, a tem samem i na ćwierćpłaszczyźnie, czyli kwadrancie (nieograniczonym kącie prostym).

Oznaczmy kąty wewnętrzne danego, znajdującego się w płaszczyźnie $z = x + iy$, wieloboku przez $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, zaś przez $\kappa_h = \frac{\alpha_h}{\pi}$ stosunki tych kątów względem π . Odwzorowujemy płaszczyznę z na płaszczyznę $\zeta = \xi + \eta i$ w ten sposób, że nowe wierzchołki umieszczamy na osi ξ -ów. Są to mianowicie punkty $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Na podstawie wzorów Schwartz'a odwzorowanie daje całka:

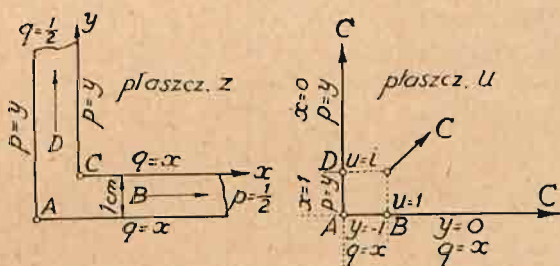
$$z = \int_{\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - \xi_1)^{1-\kappa_1} (\zeta - \xi_2)^{1-\kappa_2} \dots (\zeta - \xi_n)^{1-\kappa_n}}$$

W wypadku omawianych profili technicznych wykładniki potęg w mianowniku są: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$.

⁷⁸⁾ H. A. Schwartz. Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 tomy 1890. ⁷⁹⁾ E. Picard. Traité d'analyse. Tom III. Rozdział 12. Représentation conforme au moyen du rapport de deux solutions de l'équation hypergéométrique, str. 326 i nast.

Bogaty wybór odwzorowań, zapewniony przez metodę Schwartz'a, ułatwia znalezienie nie tylko układu naprężeń przy skręcaniu sprężystem, ale i rozwiązywanie o wiele trudniejszego zagadnienia, jakim jest znalezienie krzywej, odgraniczającej obszar odkształcenia plastycznego od sprężystego. Zagadnienie powyższe przedstawia się dla pół lub ćwierćpłaszczyzny, łatwiej, niż dla omawianych profilów technicznych.

Metodę omawianą Trefftz zastosował do kątownika o nieograniczonej długości ramion, dając zupełne rozwiązanie liczbowe



Rys. 45.

i wykreślne. Kątownik powyższy (rys. 45) odwzorowujemy na ćwierćpłaszczyźnie zapomocą zmiennej zespolonej:

$$z = \frac{1}{\pi} \left(\lognat \frac{u+1}{u-1} + i \lognat \frac{u+i}{u-i} \right) \quad (19,7)$$

Na podstawie równania (19,6) określamy warunki brzegowe. Mianowicie przy krawędziach przekroju linie naprężeń stycznych muszą być do nich równoległe, skąd wynika:

$$\text{dla krawędzi poziomych} \quad \tau_y = 0; \quad q = x \quad (19,81)$$

$$\text{„ „ „ pionowych} \quad \tau_x = 0; \quad p = y \quad (19,82)$$

Gdyby jedno z ramion kątownika, np. poziome, posiadało skończoną długość, to na pionowej krawędzi końcówkowej tego ramienia mielibyśmy $\tau_x = 0$. Jeśli jednak ta krawędź odsunie się w nieskończoność, warunek powyższy zmieni się, a mianowicie

$\int_{-1}^0 \tau_x dy = 0$, skąd $p = \frac{1}{2}$. To samo rozumowanie możemy zastosować względem ramienia pionowego, dla którego $q = \frac{1}{2}$.

Ale nie tylko zmienną $z = x + iy$ możemy przedstawić jako funkcję pewnej pomocniczej zmiennej zespolonej u . Możemy również $p + iq$ przedstawić jako funkcję u . Posiłkując się zrzęcznie metodą ogólną, Trefftz znalazł powyższą funkcję w postaci wzoru:

$$p + iq = iz - \frac{16}{\pi^2} \int_{-\infty}^u \frac{\log nat u du}{1 - u^4} - 0,74244 u$$

Można łatwo sprawdzić, że funkcja powyższa wzdłuż osi wartości rzeczywistych jest rzeczywista i że dla krawędzi poziomych $q = x$, zaś dla osi urojonej przyjmuje wartości czysto urojone i dla krawędzi pionowych $p = y$.

Wartości τ_x i τ_y z równań (19,6) można otrzymać i z jednego równania, wprowadzając zmienną zespoloną $t = -iz_0 + p + iq$ gdzie przez z_0 oznaczamy $x - iy$. Równania (19,6) zastępuje wówczas:

$$G \Theta t = \tau_x - i \tau_y \quad (19,9)$$

Tak więc rozwiązanie zagadnienia skręcania pręta o przekroju kątownika o nieograniczonej długości ramion wyrazi się ostatecznie w postaci wzoru (19,7) i następującego:

$$t = -iz_0 + iz - \frac{16}{\pi^2} \int_{-\infty}^u \frac{\log nat u du}{1 - u^4} - 0,74244 u \quad (19,10)$$

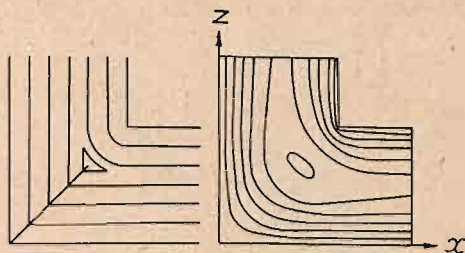
Wektor t rozłożmy na dwie części $t = t_1 - t_2$, gdzie

$$t_1 = -iz_0 + iz - \frac{16}{\pi^2} \int_{-\infty}^u \frac{\log nat u du}{1 - u^4}; \quad \text{zaś } t_2 = 0,74244 u \quad (19,11)$$

co ma zasadnicze znaczenie dla postępowania dalszego.

Obecnie znamy układ naprężeń sprężystych w przekroju kątownika. Możemy też, posilając się wzorami (19,7) znaleźć warstwicę funkcji naprężeń. W myśl analogii Prandtla będą im odpowiadać poziome warstwicę błony, rozpiętej wzdłuż profilu kątownika, a następnie poddanej równomiernemu obciążeniu. Rys. 46 przedstawia nam układ tych warstw, wykonany przez Trefftz'a zapomocą nader prostej metody wykreślnej. Obok niego podany jest układ warstw dla odkształcenia plastycznego, odpowiadającego asymptotycznej wartości momentu skręcającego. Wi-

dzimy przytem z łatwością, że największe skupienie warstw w układzie sprężystym znajduje się w pobliżu wcięcia kąowego. Gradient funkcji naprężeń, równy wartości naprężenia stycznego, staje się tu równy nieskończoności. Mamy się też tu prawo spodziewać zapoczątkowania odkształcenia plastycznego. Otóż w pobliżu punktu $z=0$, czyli dla $u=\infty$, dwie składowe wektora naprężeń, zachowują się diametralnie przeciwnie. Mianowicie składowa t_1 (19,11) w tym punkcie zanika, zaś składowa t_2 naodwrot staje się równą nieskończoności.



Rys. 46.

Weźmy pod uwagę jedynie najbliższe sąsiedztwo punktu $z=0$. Jeśli nad błoną umieścimy daszek o stałym pochyleniu, a następnie w myśl analogji membranowej, zaczniemy wdmuchiwać np. powietrze pod błonę rozpiętą na przekroju, to łatwo zdać sobie sprawę z tego, że krzywa, odgraniczająca obszar plastyczny od sprężystego, będzie się zaczynać i kończyć w punkcie $z=0$. Wzdłuż tej krzywej granicznej naprężenia będą posiadały ten sam kierunek, zarówno od strony plastycznej jak i sprężystej. Wielkość naprężenia stycznego τ_p będzie krytyczną, odpowiadającą warunkowi plastyczności. Dla ciała szczególnie plastycznego otrzymamy tym sposobem wartości brzegowe dla krzywej granicznej w postaci:

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2; \quad x\tau_x + y\tau_y = 0 \quad (19,12)$$

gdyż, jak się o tem przekonać można z lewej strony rys. 46, kierunkiem naprężeń są promienie wychodzące z punktu $z=0$.

Wektor naprężeń sprężystych $t=t_1-t_2$ ulega zmianie z chwilą, gdy w danej części przekroju pręta zjawia się odkształcenie plastyczne. W pobliżu punktu $z=0$ pierwsza składowa zanika i możemy ją pominąć przy poszukiwaniu kształtu krzywej granicznej. Zamiast drugiej składowej, która przy założeniu odkształceń sprężystych wzrasta do nieskończoności, będziemy mieli do czynienia z nową funkcją zmiennej zespolonej t'_2 , przyjmującej wartości skończone. Przyjmujemy przytem, jako warunek

niezbędny, że obszar odkształcenia plastycznego jest mały. Jeśli pominiemy składową t_1 i zastąpimy t_2 przez t'_2 , to równanie (19,9) przedstawi się w postaci:

$$\tau_x - i\tau_y = -G\Theta t'_2 \quad (19,13)$$

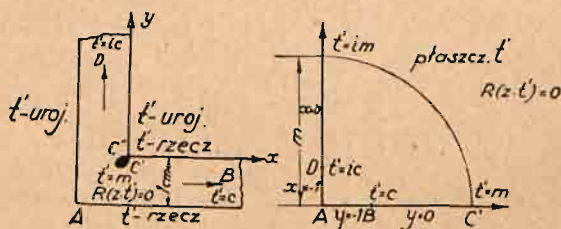
Oznaczmy przez $R(t'_2)$ rzeczywistą część funkcji zmiennej zespolonej, zaś przez $J(t'_2)$ jej część urojoną. Z równań (19,12) i (19,13) wynika, że

$$G^2\Theta^2 |t'_2|^2 = G^2\Theta^2 [R(t'_2)^2 + J(t'_2)^2] = k^2; \quad xR(t'_2) - yJ(t'_2) = 0 \quad (19,14)$$

skąd zakładając, że $\tau_p: G\Theta = m$, warunki brzegowe dla krzywej granicznej przedstawia się w postaci:

$$|t'_2| = m; \quad R(zt'_2) = 0 \quad (19,15)$$

Jeśli pominąć sąsiedztwo punktu $z=0$, to składowa t_2 jest



Rys. 47.

identyczna z t'_2 . Należy obecnie określić warunki, jakim powinna czynić zadość funkcja t'_2 . Znajdujemy tu odpowiedniość, przedstawioną na rys. 47 (wskaźnik 2 przy t'_2 został wszędzie opuszczony na rysunku). Mianowicie t'_2 zachowuje się podobnie jak zmienna u (por. 19,11). W płaszczyźnie t'_2 krzywa graniczna przedstawi się w postaci ćwierci koła o promieniu m .

Należało teraz dobrać taką funkcję (t'_2), któraby spełniała wszystkie warunki brzegowe tak na osiach współrzędnych, jak i na obwodzie koła w płaszczyźnie t'_2 . Trefftz znalazł ją,⁹⁰⁾ posługując się metodą odbić inwersyjnych. Jest nią mianowicie wyrażenie:

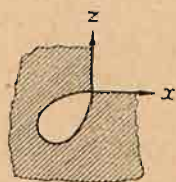
$$z = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{t'_2 + 1}{t'_2 - 1} + i \ln \frac{t'_2 + i}{t'_2 - i} \right) - \frac{m^2}{\pi t'^2_2} \left(\ln \frac{m^2 + t'_2}{m^2 - t'_2} - \ln \frac{m^2 + i t'_2}{m^2 - i t'_2} \right) \quad (19,16)$$

⁹⁰⁾ E. Trefftz. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei theilweiser Überschreitung der Fließgrenze. ZAMM. 5, 68, 1925.

Możemy teraz odwzorować okrąg koła z prawej części rys. 47 na lewą. Mianowicie równaniem tego okręgu w płaszczyźnie t'_2 będzie $t'_2 = m e^{i\theta}$. Po podstawieniu tego wyrażenia we wzór (19,16) i rozwinięciu wyrażen w szeregi przy pominięciu wyrazów wyższych rzędów otrzymamy:

$$z = \frac{4c^3}{3\pi m^3} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (19,17)$$

Otrzymaną krzywą przedstawia rys. 48. Przy założeniu pewnych naprężeń dopuszczalnych na krawędziach zewnętrznych kątownika, okazuje się, że w pobliżu $z=0$, zjawia się w pewnym obszarze odkształcenie plastyczne kształtu przedstawionego na rys. 47 i 48. Obszar ten jest jednak znikomo mały i sprawdzenie doświadczalne natrafia tym sposobem na wielkie trudności.



Rys. 48.

ROZDZIAŁ IV.

Matematyczne ujęcie zagadnień z teorii plastyczności.

20. Uogólnienie teorii krzywych poślizgowych. Krzywe poślizgowe dla ciała szczególnie plastycznego tworzą układ ortogonalny, posiadający charakterystyczne własności geometryczne, znalezione przez Prandtla i Hencky'ego (§ 10). Własności te są następujące:

1. Przyrosty kątów, jakie tworzą z osią odciętych, styczne do krzywych należących do jednego z pęków, w punktach przecięcia się ich z dwoma krzywymi, należącymi do drugiego z pęków, są stałe.

2. Przyrosty promieni krzywizn krzywych, należących do jednego z pęków, w punktach przecięcia się ich z dowolną krzywą z drugiego pęku, są równe odpowiednio odcinkom łuku krzywej, zawartym pomiędzy krzywymi pierwszego pęku.

W ogólnej teorii płaskich układów krzywych ortogonalnych, tak kąty, jakie tworzą z osią odciętych styczne do krzywych, jak i ich promienie krzywizny, są elementami zasadniczymi. Jest