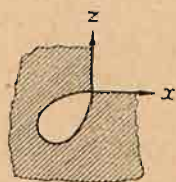


Możemy teraz odwzorować okrąg koła z prawej części rys. 47 na lewą. Mianowicie równaniem tego okręgu w płaszczyźnie t'_2 będzie $t'_2 = m e^{i\theta}$. Po podstawieniu tego wyrażenia we wzór (19,16) i rozwinięciu wyrażen w szeregi przy pominięciu wyrazów wyższych rzędów otrzymamy:

$$z = \frac{4c^3}{3\pi m^3} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (19,17)$$

Otrzymaną krzywą przedstawia rys. 48. Przy założeniu pewnych naprężeń dopuszczalnych na krawędziach zewnętrznych kątownika, okazuje się, że w pobliżu $z=0$, zjawia się w pewnym obszarze odkształcenie plastyczne kształtu przedstawionego na rys. 47 i 48. Obszar ten jest jednak znikomo mały i sprawdzenie doświadczalne natrafia tym sposobem na wielkie trudności.



Rys. 48.

ROZDZIAŁ IV.

Matematyczne ujęcie zagadnień z teorii plastyczności.

20. Uogólnienie teorii krzywych poślizgowych. Krzywe poślizgowe dla ciała szczególnie plastycznego tworzą układ ortogonalny, posiadający charakterystyczne własności geometryczne, znalezione przez Prandtla i Hencky'ego (§ 10). Własności te są następujące:

1. Przyrosty kątów, jakie tworzą z osią odciętych, styczne do krzywych należących do jednego z pęków, w punktach przecięcia się ich z dwoma krzywymi, należącymi do drugiego z pęków, są stałe.

2. Przyrosty promieni krzywizn krzywych, należących do jednego z pęków, w punktach przecięcia się ich z dowolną krzywą z drugiego pęku, są równe odpowiednio odcinkom łuku krzywej, zawartym pomiędzy krzywymi pierwszego pęku.

W ogólnej teorii płaskich układów krzywych ortogonalnych, tak kąty, jakie tworzą z osią odciętych styczne do krzywych, jak i ich promienie krzywizny, są elementami zasadniczymi. Jest

więc rzeczą ważną wyjaśnić, jak się przedstawia teoria krzywych poślizgowych na tle ogólnej teorii płaskich układów ortogonalnych. Pierwszego kroku w tym kierunku dokonali matematycy C. Caratheodory i E. Schmidt, ustalając nowe równania różniczkowe układów krzywych poślizgowych.⁸¹⁾

Ze względu na późniejsze przekształcenia, parametry pęków krzywych oznaczamy tymczasowo przez u i v . Kierunek wzrastających wartości v jest tak dobrany względem kierunku wzrastających wartości u , że odpowiada on położeniu osi y względem osi x . Jeśli oznaczymy przez ϑ kąt, jaki tworzy z osią x styczna do krzywej $v = \text{const.}$ w kierunku wzrastających wartości u , to kąt, jaki tworzy z osią x styczna do krzywej $u = \text{const.}$ w kierunku wzrastających wartości v , będzie $\vartheta + \frac{\pi}{2}$. Mamy

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 \quad (20,1)$$

gdzie U i V są wielkościami dodatnimi. Z porównania obecnych oznaczeń ze stosowanymi poprzednio w § 7, wynika, że $U = 1/h_u$, zaś $V = 1/h_v$, gdzie $h_u = |\text{grad } u|$ i $h_v = |\text{grad } v|$. Mamy teraz:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = U \cos \vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = U \sin \vartheta; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -V \sin \vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = V \cos \vartheta \quad (20,2)$$

Różniczkując $\frac{\partial x}{\partial u}$ względem v , zaś $\frac{\partial x}{\partial v}$ względem u , otrzymamy zależności pomiędzy U , V , ϑ i ich pochodnymi względem u i v . Podobną zależność otrzymamy, różniczkując $\frac{\partial y}{\partial u}$ względem v i $\frac{\partial y}{\partial v}$ względem u . Otrzymujemy tym sposobem po łatwych przekształceniach:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial v}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{1}{U} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (20,3)$$

Zwróćmy uwagę na ścisły związek tych wzorów z wyrażeniami (7,2).

Oznaczmy teraz przez R_u i R_v promienie krzywizny krzywych $u = \text{const.}$ oraz $v = \text{const.}$, przy czym znak dodatni odpowiada położeniu środka krzywizny w kierunku wzrastających parametrów u i v .

⁸¹⁾ C. Caratheodory i E. Schmidt. Über die Hencky-Prandtl'schen Kurven. ZAMM, 3, 1923. 468.

Mamy na podstawie określeń promieni krzywizny:

$$\frac{1}{R_u} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial v}; \quad \frac{1}{R_v} = \frac{1}{U} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \quad (20,4)$$

Różniczkując pierwsze z tych równań względem u i do otrzymanego wyrażenia dodając $\frac{ds}{du} = U$, otrzymamy wzór, który uprości się bardzo na podstawie zależności (20,3). Mianowicie:

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = \frac{V}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} - \frac{\frac{\partial V}{\partial u}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}} + U = \frac{V}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} \quad (20,5)$$

Drugie z równań (20,4) daje nam podobnie:

$$\frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv} = -\frac{U}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} \quad (20,6)$$

Oba równania dotyczą dowolnych płaskich układów ortogonalnych. Obecnie przychodzi kolej na uwzględnienie równań Hencky'ego (8; 9, 10), dotyczących prawa przyrostów promieni krzywizny. Mianowicie wynika z nich, że lewe strony równań (20; 5, 6) są równe zeru, a tem samem

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0 \quad (20,7)$$

Tak otrzymane równanie różniczkowe, dotyczące zależności kąta od parametrów krzywych poślizgowych u i v , jest znacznie prostsze od równań Boussinesq'a i Hencky'ego.

Równanie (20,7) otrzymał L. Föppl,⁸²⁾ niezależnie od Caratheodory'ego i Schmidt'a, z równań równowagi naprężeń (11,2). Mises, ujmując płaski układ naprężeń w postaci tensorowej, uprościł metodę Föppl'a,⁸³⁾ ograniczając się do rozumowań geometrycznych, doprowadzających do równania (20,7).

Jeśli od tensora $\bar{\sigma}$ w płaskim układzie naprężeń odjąć ciśnienie hydrostatyczne — $p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, to, przy wartości

⁸²⁾ Aug. u. Ludw. Föppl. Drang und Zwang. 1 tom. Wyd. 2-gie, 356, 1924.

⁸³⁾ R. v. Mises. Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie. ZAMM, 5, 147, 1925.

$|\tau_{max}| = k$, pozostanie dewiator $\bar{\sigma}$, przyczem główne naprężenia normalne będą wynosiły $+k$, $-k$. Stosując operator hamiltonowski ∇ względem tensora $\bar{\sigma}$, składającego się z dwóch części: skalarnej $-\rho$ i dewiatorowej $\bar{\sigma}$, otrzymujemy, że $\text{grad } \rho = \nabla \bar{\sigma}$. Nazwijmy „pierwszym” kierunek tego głównego naprężenia stycznego, który otrzymujemy przez dodatni obrót o kąt 45° kierunku głównego naprężenia rozciągającego. Kąt, jaki czyni kierunek tego głównego naprężenia stycznego z osią x , oznaczmy przez ϑ . Oznaczając przez \bar{i} jednostkowy wektor w kierunku x , zaś przez \bar{j} — w kierunku y , mamy:

$$\text{grad } \rho = \bar{i} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \bar{i} \left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} \right) \quad (20,8)$$

Niech ϑ' będzie kątem, jaki tworzy kierunek głównego naprężenia rozciągającego z osią x . W omawianym układzie mamy:

$$\sigma_x' = k \cos 2\vartheta'; \quad \sigma_y' = -k \cos 2\vartheta'; \quad \tau = k \sin 2\vartheta' \quad (20,9)$$

Możemy teraz wyrazić $\text{grad } \rho$ w funkcji kąta ϑ' , a tem samem i kąta ϑ . Odpowiednie wyrażenie możemy bardzo uprościć, jeśli oś x -ów utożsamimy z kierunkiem pierwszego naprężenia głównego. Po łatwych przeróbkach otrzymamy wynik, że

$$\text{grad } \rho = 2k \left(\bar{i} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \bar{j} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \quad (20,10)$$

Tak więc $\text{grad } \rho$ jest równy wektorowi, jaki otrzymamy, mnożąc przez $2k$, poddany uprzedniemu odbiciu względem kierunku głównego naprężenia tnącego, $\text{grad } \vartheta$.

Jeśli $u(x, y) = \text{const.}$ i $v(x, y) = \text{const.}$ są równaniami krzywych poślizgowych, to na mocy ostatniej zależności mamy:

$$\frac{\partial}{\partial u} (\rho - 2k\vartheta) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial v} (\rho + 2k\vartheta) = 0 \quad (20,11)$$

skąd wynika, że $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$. Jeśli nakreślić układ krzywych poślizgowych dla jednakowych przyrostów wielkości u i v , to przeprowadzając następnie krzywe przekątne, otrzymamy izobary i izokliny.⁸⁴⁾

⁸⁴⁾ A. Mesnager. Naprężenia ciał stałych w postaci widzialnej. Przegląd Techniczny 52, 523, 1924.

Kierunek wzrastających α i β odpowiada kierunkowi wzrostu u i v .
Mamy stąd

$$\vartheta = \beta - \alpha \quad (21,6)$$

Przy nowych parametrach funkcje U i V położenia punktów przejdą w A i B , przyczem nowe wielkości, jak o tem łatwo przekonać się, nie są niczem innem, jak promieniami krzywizny z ujemnym znakiem

$$R_\beta = -A; \quad R_\alpha = -B \quad (21,7)$$

otrzymujemy równocześnie wzory:

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = B; \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = A; \quad \text{skąd} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \beta} = A \quad (21,8)$$

Równania (20,2) przedstawia się w postaci:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = A \cos(\beta - \alpha); \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -B \sin(\beta - \alpha) \quad (21,9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = A \sin(\beta - \alpha); \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = B \cos(\beta - \alpha) \quad (21,10)$$

Znając A i B w funkcji parametrów α i β , możemy na podstawie twierdzeń o całkowaniu różniczek zupełnych⁸⁵⁾ znaleźć wartości $x(\alpha, \beta)$ i $y(\alpha, \beta)$.

Równanie (20,7) jest równaniem różniczkowem o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu hyperbolicznego. Przy stosowaniu metod Riemann'a rozwiązywania zagadnień brzegowych jako funkcje podstawowe nadają się tu specjalnie funkcje Bessel'a, a mianowicie, użyta już przez nas poprzednio funkcja (7,2)

$$J(\alpha\beta) = \sum_0^\infty \frac{(\alpha\beta)^\nu}{(\nu!)^2} = 1 + \frac{\alpha\beta}{1} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(2!)^2} + \dots$$

Z szeregu, określającego daną funkcję, wynika, że

$$J(0) = 1; \quad \frac{\partial^2 J(\alpha\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = J(\alpha\beta) \quad (21,11)$$

Szereg $J(\alpha\beta)$ jest szybkozbieżny i dzięki temu nadaje się do liczbowego rozwiązywania zagadnień brzegowych.

⁸⁵⁾ E. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome I, str. 379.

Podane przez Caratheodory'ego i Schmidt'a przykłady rozwiązania równań (21; 9, 10) dotyczą bądź układów krzywych poślizgowych, znalezionych już poprzednio przez Prandtl'a i Hencky'ego, bądź stanowią nowe typy układów. Przytoczymy niektóre z nich. Mamy np.:

$$A = aJ(\alpha\beta) + b \frac{\partial J(\alpha\beta)}{\partial \alpha}; \quad B = a \frac{\partial J(\alpha\beta)}{\partial \beta} + bJ(\alpha\beta) \quad (21,12)$$

gdzie a i b oznaczają wielkości stałe. Wprowadzamy tak określone funkcje A i B do równań (21; 9, 10), które następnie całkujemy wzdłuż różnych torów, dla stałych wartości, bądź np. parametru α , następnie parametru β , bądź też odwrotnie. Otrzymujemy z łatwością wynik w postaci następującej:

$$\begin{aligned} x &= a \int_0^{\alpha} J(\beta t) \cos(t - \beta) dt - b \int_0^{\beta} J(\alpha t) \sin(t - \alpha) dt \\ y &= -a \int_0^{\alpha} J(\beta t) \sin(t - \beta) dt + b \int_0^{\beta} J(\alpha t) \cos(t - \alpha) dt \end{aligned} \quad (21,13)$$

Krzywej $\alpha=0$ odpowiada koło o promieniu b , zaś krzywej $\beta=0$ koło o promieniu a . Tym sposobem układ krzywych poślizgowych (21,13) zawiera dwa przecinające się pod kątem prostym okręgi kół o promieniach a i b .

Inne układy otrzymamy, zakładając, że A jest dowolną funkcją wyrażenia linjowego $\alpha\alpha + b\beta$, gdzie a i b są to wielkości stałe. Przy danem założeniu równanie $\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \beta} = A$ sprowadza się do równania linjowego o zwyczajnych pochodnych, które całkujemy zapomocą elementarnych metod. Otrzymujemy przytem rozwiązania typu

$$A = ke^{c\alpha + \beta/\beta}; \quad \text{lub} \quad A = m \cos(n\alpha - \beta/n) \quad (21,14)$$

gdzie c , k , m , n , oznaczają pewne stałe wielkości. Łatwo sprawdzić, wprowadzając otrzymane wartości A do równań (21; 9, 10), że w pierwszym wypadku mamy do czynienia z ortogonalnym układem spirali logarytmicznych, w drugim zaś cycloid.

Ze względu na doniosłą rolę podobnych odwzorowań w zagadnieniach dwuwymiarowych, zjawia się pytanie, czy można

w pewnych warunkach otrzymać nowe układy krzywych poślizgowych, odwzorowując płaszczyznę $z = x + iy$ na płaszczyźnie $w = u + iv$, gdzie u i v są parametrami znanego układu krzywych poślizgowych. Ponieważ z zasady odwzorowania podobnego wynika, że $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, skąd (por. 20,2) $U = V$, przeto mamy, że

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = F'(u); \quad \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial U}{\partial u} = \Phi'(v), \quad \text{czyli}$$

$$F''(u) = \Phi''(v) = \text{const.} \quad (21,15)$$

Dobierając odpowiednio stałe całkowania, możemy, nie ograniczając ogólności rozwiązania, otrzymać bez trudu, że $U = V = c \cdot e^{2luv}$, skąd ostatecznie

$$\Phi = \Phi(v) - F(u) = l(v^2 - u^2) + \text{const.} \quad (21,16)$$

Wybierając odpowiednio początek osi spółrzędnych i normując parametry u i v , możemy w dalszym ciągu pozbyć się wyrazu stałego w równaniu (21,16) i sprowadzić l do jedności. Otrzymamy tym sposobem równanie różniczkowe:

$$\frac{dz}{dw} = a e^{\pm i w^2}, \quad \text{lub } z = a \int_0^w e^{\pm i t^2} dt \quad (21,17)$$

w którym a jest wielkością rzeczywistą. Te równanie obejmuje wszelkie układy krzywych poślizgowych, dopuszczające odwzorowanie podobne na płaszczyźnie x, y przy odpowiednim doborze parametrów u i v .

22. Superpozycja układów krzywych poślizgowych.

Jeśli zwrócimy się do układu równań (21; 9, 10), to zauważymy, że układ krzywych poślizgowych można przedstawić zapomocą funkcji zmiennej zespolonej $z(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta) + iy(\alpha, \beta)$. Mianowicie, równania układów przedstawiają się nam w postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -R_\beta e^{i(\beta - \alpha)}; \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = -i R_\alpha e^{i(\beta - \alpha)} \quad (22,1)$$

Jak to zauważył Mises⁸³⁾, równanie powyższe jest podstawą płodnego w zastosowaniu prawa superpozycji układów krzywych poślizgowych. Niech izokliny i izobary dwóch układów krzywych poślizgowych odpowiadają sobie wzajemnie. A więc punktowi $P_1(\alpha_0, \beta_0)$ jednego układu odpowiada punkt $P_2(\alpha_0, \beta_0)$ drugiego

układu przy tych samych wartościach parametrów (α_0, β_0) . Jeśli z pewnego dowolnie wybranego stałego punktu O przeprowadzić wektory OP_1 i OP_2 i dodać je geometrycznie $\overline{OP_1} + \overline{OP_2} = \overline{OP}$, to punkty P wyznaczą nam nowy układ krzywych poślizgowych.

Można też otrzymać ogólniejsze rozwiązania układu równań (21; 9, 10) na drodze sumowania rozwiązań elementarnych. Założmy naprzód, że $A = F(a\alpha + b\beta)$ jest dowolną funkcją wyrażenia linowego względem α i β ze stałymi współczynnikami a i b . Znajdźmy następnie rozwiązanie równania (21,8), które możemy sprowadzić do typu $A = e^{C\alpha + \beta/C}$. Rozwiązanie powyższe daje się uogólnić przy założeniu, że a i b są wielkościami zespolonemi, przyczem i C w tych warunkach staje się wielkością zespoloną. Jeśli C jest wielkością zespoloną $C = d + ic$, to obok rozwiązania elementarnego $A = e^{C\alpha + \beta/C}$ otrzymujemy równoległe $A = e^{C^*\alpha + \beta/C^*}$, gdzie $C^* = d - ie$. W ostatecznym wyniku Mises otrzymał rozwiązanie fundamentalne układu równań (22,1)

$$z = e^{(\beta - \alpha)i} \left[\frac{e^{C\alpha + \beta/C}}{C - i} + \frac{e^{C^*\alpha + \beta/C^*}}{C^* - i} \right] \quad (22,2)$$

Dla różnych wartości C otrzymujemy różne wartości z w postaci wektorów, które sumujemy, biorąc te same wartości zmiennych niezależnych α_0 i β_0 .

23. Niewyznaczalność układów krzywych poślizgowych w zagadnieniu dwuwymiarowym. Gdy tylko Hencky uogólnił pierwsze intuicyjne założenia Prandtl'a i dał swą teorię krzywych poślizgowych (§ 8), przyjmując, zresztą błędnie, że układy płaskie mogą być wyłącznie promieniowe, stało się odrazu rzeczą jasną, że istota właściwych rozwiązań leży w zagadnieniach brzegowych. O ile interpretowanie przypadków najprostszych, cytowanych w § 10 i 11, mniej nastroczało wątpliwości, o tyle w miarę przechodzenia do przypadków bardziej złożonych, nawpół empiryczna metoda Prandtl'a, doprowadziła do sprzeczności. Przykładem takiej sprzeczności będzie np.⁸⁰⁾ wgniatanie dłuta o podstawie pryzmatycznej w półpłaszczyznę (rys. 49). Jeśli przyjmiemy, że w danym przypadku układ krzywych poślizgowych jest promie-

⁸⁰⁾ H. Hencky. Statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, 3, 245, 1923.

niowy, to powstaje pytanie, która z linii łamanych, składających się z odcinków prostych i kół: $M_1 OM_1$, $M_2 OM_2$, czy $M_3 OM_3$ odpowiada rzeczywistości. Odpowiedź jednoznaczna otrzymamy,



Rys. 49.

w myśl propozycji Hencky'ego, jeśli pod uwagę weźmiemy minimum energii, wydatkowanej na odkształcenie plastyczne. Ale, wracając do rys. 49, nasuwa się pytanie, czy można w omawia-

nych warunkach ściśle określić cechy charakterystyczne tej fazy odkształcenia plastycznego, którą uważamy za odpowiednik granicy plastyczności.

Przy obecnym stanie teorii pomijamy świadomie okres przejścia od układu sprężystego do układu sprężysto-plastycznego, przystępując bezpośrednio do rozważania pewnej wyidealizowanej fazy odkształcenia. Utrudnia to bardzo matematyczne sformułowanie zagadnień równowagi ciała odkształconego plastycznie. Zauważmy ponadto, że jeśli jest nam dany układ krzywych poślizgowych, czyli trajektorii głównych naprężeń stycznych, to tem samem nie jest jednak jednoznacznie określony kierunek przesunięć. Na pomoc przychodzi nam w tym wypadku hipoteza St. Venant'a, głosząca, że kierunek największej prędkości odkształcania postaciowego zbiega się z kierunkiem głównego naprężenia stycznego.

Wprowadźmy pojęcie funkcji ϕ prądu odkształcenia plastycznego. Zakładamy, że odkształcenie jest równoobjętościowe.

Prędkości przesunięć przedstawia się w postaci $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ i $v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, zaś prędkości odkształceń właściwych w postaci:

$$\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (23,1)$$

Dla ekstremalnych wartości $\dot{\gamma}$ mamy $\dot{\epsilon} = 0$. Równanie funkcji prądu wyrazimy w współrzędnych α i β , odpowiadających układowi krzywych poślizgowych. Dla tych warunków $\dot{\gamma}$ posiada wartości ekstremalne, skąd równaniem różniczkowem funkcji prądu będzie $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$. Jeśli dokonamy odpowiedniej zamiany zmiennych i równocześnie utożsamimy kierunki α i β z osiami x i y , które

to założenie wprowadza do wzorów (20,2) wartości $\psi = 0$, to posilując się wzorami (8,9) bez trudu uprościmy przekształcone równanie funkcji prądu, otrzymując ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{R\alpha}{R\beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{R\beta}{R\alpha} = 0 \quad (23,2)$$

Jest to równanie różniczkowe typu hyperbolicznego z krzywymi poślizgowymi jako charakterystykami. Z teorii tego równania wiemy, że układ linii prądu możemy określić bądź na podstawie pełnych wartości prędkości wzdłuż jednej z dowolnych krzywych, bądź na podstawie składowych normalnych prędkości wzdłuż dwóch dowolnych przecinających się krzywych. Jako przykład zaproponowanej przez siebie metody Mises traktuje przebieg wtlaczania stempla płaskiego w półpłaszczyznę (§ 9). Zadając sobie dowolną krzywą prądu, odgraniczającą obszar plastyczny od sprężystego i przyjmując, że dla tej krzywej wartości potencjału są $\psi = 0$ i $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, sprawdzamy następnie, czy w bezpośrednim otoczeniu spodu stempla linie prądu są doń prostopadłe i rozmieszczone równomiernie.

24. Matematyczne ujęcie warunków brzegowych w zagadnieniu dwuwymiarowym. Zastosowana przez Trefftz'a metoda określania obszaru odkształcenia plastycznego w przekrojach skręcanych wałków pryzmatycznych, oparta jest na ścisłym sformułowaniu zagadnienia brzegowego, które można nazwać „statycznie wyznaczalnym”. Metoda Trefftz'a uwzględnia stopniowe przechodzenie od układu ściśle sprężystego do układu mieszanego sprężysto-plastycznego, dzięki czemu faza odkształcenia plastycznego mogła być ściśle określona. Układ sprężysto-plastyczny przedstawia się wówczas, jako lokalne wynaturzenie układu sprężystego.

Zastosowanie analogicznej metody do zagadnienia płaskiego jest bez porównania trudniejsze. Różnica polega na tem, że teoria sprężystości nie jest tak posunięta w zakresie zagadnienia płaskich tarcz sprężystych, jak w dziedzinie skręcania prętów pryzmatycznych. Jak wiadomo w teorii skręcania podstawowe znaczenie posiada równanie Laplace'a $\Delta_2 u = 0$, zaś w zagadnieniu płaskich tarcz sprężystych zasadniczą rolę odgrywa równanie biharmono-

niczne $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$. Otóż o ile posiadamy szereg znakomitych ogólnych metod całkowania równania Laplace'a i, jak to wskazują przykłady z hydromechaniki cieczy idealnej i z innych dziedzin fizyki teoretycznej, równanie to jest rozwiązane dla całego szeregu konturów z uwzględnieniem różnorodnych warunków brzegowych, o tyle z równaniem biharmonicznym rzecz się ma znacznie gorzej. Należy zaznaczyć wszakże, że równanie biharmoniczne oddawna zwróciło uwagę matematyków i istnieje cały szereg rozpraw, poświęconych jego rozwiązaniu. W r. 1907 paryska Akademia Nauk, w uznaniu doniosłości głębszych badań nad powyższem równaniem, ogłosiła nagrodę im. Vaillant'a za prace w tym kierunku. W rozprawach specjalnych, poświęconych równaniu biharmonicznemu, jakie zawdzięczamy m. inn. Almansi'emu, Boggio, Hadamard'owi, Zarembie,⁸⁶⁾ znaleźć można dowody istnienia rozwiązań dla ogólnych założeń i szereg rozwiązań w przypadkach poszczególnych.

Z prac, poświęconych teorii równania biharmonicznego, obchodzą nas bliżej te z nich, które zajmują się szczegółowiej niektórymi ważnemi z punktu widzenia technicznego przypadkami. Są też one omówione w obszerniejszych traktatach i monografiach z zakresu teorii sprężystości.⁸⁷⁾⁸⁸⁾ Zauważmy również, że teoria płyt sprężystych, nasuwa wiele rozwiązań równania biharmonicznego dla różnorodnych warunków brzegowych⁸⁹⁾.

Ścisłe teorie wytrzymałości sklepień arkadowych i tam wodnych sprowadzają się niejednokrotnie do zagadnienia płaskiego sprężystości.⁹⁰⁾

⁸⁶⁾ Niepodobna omówić tu najważniejszych nawet prac nad tem zagadnieniem, rozproszonych zresztą po różnych czasopismach naukowych. Wskazówki bibliograficzne znaleźć można w Enc. Nauk Matem. Tom IV — 4. Tedone — Timpe. *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körpern*, str. 165. Por. także podstawowe prace S. Zaremby nad równaniem biharmonicznym, zamieszczone w Biul. Międz. Akademji Umiejętności w Krakowie w r. 1907 i 1908. ⁸⁷⁾ A. E. H. Love. *Elasticity*. Prz. niem., 242. A. i L. Föppl. *Drang und Zwang*. Wyd. 2-gie, 244. ⁸⁸⁾ G. W. Kolosow. *Ob odnom priloženii teorii funkcij kompleksnago pieremiennago k płoskoj zadacze matiematycznej teorii uprugosti* str. XV + 186. Dorpat 1909. Wyczerpująca i źródłowa monografia, zawierająca nowe metody rozwiązywania zagadnienia płaskiego, wraz z licznemi zastosowaniami. ⁸⁹⁾ A. Nádai. *Elastische Platten*, 222, 1925. ⁹⁰⁾ Wymienić tu należy zwłaszcza prace: St. Belzecki. *Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle*. C. R. 140, 1905; Płaskie

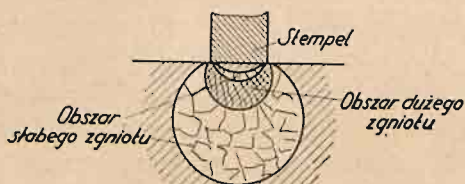
Niewiele znamy dotychczas takich płaskich układów sprężystych, o których moglibyśmy powiedzieć, że są one rozwiązane i wszechstronnie zbadane teoretycznie, np. przez ustalenie trajektorji głównych naprężeń normalnych. Do takich zaliczamy w pierwszym rzędzie płaskie układy sprężyste w przekroju walca kołowego,⁹¹⁾ jak również w półpłaszczyźnie.⁹²⁾ Są one znane dla najróżnorodniejszych wypadków obciążenia w postaci sił skupionych i ciśnień, działających na kontur. Gorzej rzecz się ma z przekrojem prostokątnym. Jakkolwiek znane są piękne metody rozwiązywania tego zagadnienia⁹³⁾ i dla poszczególnych przypadków ustalone są trajektorje naprężeń głównych, to jednak obecność punktów osobliwych w konturze, za jakie należy uważać wierzchołki prostokąta, nastręcza w pewnych przypadkach wielkie trudności.⁹⁴⁾ Jeśli jeden z boków prostokąta przedłużymy do nieskończoności, to otrzymamy obszar, ograniczony dwiema półprostymi równoległymi nieograniczonej długości, oraz prostopadłym do nich odcinkiem prostej. Również i dla tego obszaru znane są rozwiązania płaskiego układu sprężystego dla pewnych określonych warunków brzegowych.⁹⁵⁾ Pozatem wymienić można z zagadnień szczegółowiej badanych: układ naprężeń w pobliżu otworu kołowego, eliptycznego i lemniskatowego w nieograniczonej bryle materiału,⁹⁶⁾ oraz układ naprężeń w płaszczyźnie, przeciętej przez półprostą, zaczerpnięty ze świetnej pracy Hadamard'a, traktującej o całkowaniu równania biharmonicznego.⁹⁶⁾

Prawie wszystkie, tu wymienione, typowe zagadnienia wytrzymałościowe czekają na próby rozwiązania z punktu widzenia

zadanie w współrzędnych Dekarta. Izw. Sobr. Inż. P. S.; Płaskie zadanie w współrzędnych cylindrycznych. Izw. Sobr. Inż. P. S. 1905; Płaskie zadanie w współrzędnych eliptycznych. Izw. Sobr. Inż. P. S. 1905, oraz szereg innych prac, poświęconych teorii sklepień i tam wodnych, w których rozwinięto płaskie zagadnienie teorii sprężystości. ⁹¹⁾ J. H. Michell. Elementary Distributions of Plane Stress. Proc. London Math. Soc. 32, 35, 1900. ⁹²⁾ Tenże. The Inversion of Plane Stress. Proc. London Math. Soc. 34, 134, 1902. ⁹³⁾ S. Zarembka. O całkowaniu równania biharmonijnego. Bull. Acad. Sc. Cracovie I, 1908. ⁹⁴⁾ M. Knein. Zur Theorie des Druckversuchs. ZAMM, 6, 414, 1926. ⁹⁵⁾ S. D. Carothers. Plane Strain: the Direct Determination of Stress. Proc. Roy. Soc. 97, 110, 1920. Również A. Nádai. Darstellung ebener Spannungszustände mit Hilfe von winkeltreuen Abbildungen. Z. f. Phys. 41, 48, 1927. ⁹⁶⁾ J. Hadamard. Memoire sur le problème d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Paris. 1908.

teorii krzywych poślizgowych Hencky'ego i Prandtl'a. Z nich dwa zaledwie są zaproponowane: mowa tu o zagadnieniu wtlaczania płaskiego stempla w półpłaszczyznę (§ 9), jak również o próbie ściskania (§ 10). Dla obu tych przypadków Prandtl narzucił nawpółempirycznie pewne schematy odkształceń plastycznych. Otóż jest rzeczą ciekawą, na ile ta metoda, opierająca się w znacznej mierze na postępowaniu intuicyjnym, jest usprawiedliwiona z punktu widzenia stopniowego wynaturzania się układu sprężystego po przekroczeniu granicy plastyczności.

Należy zaznaczyć, że na pierwsze z tych zagadnień doświadczenia Nádaí'a rzucają wiele światła i to w kierunku nie nazbyt przychylnem dla schematu Prandtl'a. Mianowicie, zaobserwowany przez Nádaí'a zgniot w materiale pod stemplem wyraźnie wskazywał,⁹⁴⁾ że w przykładzie Prandtl'a obszar odkształceń plastycznych



Rys. 50.

odpowiada jak najściślej pasowi największych naprężeń stycznych, jakie wyznaczamy na podstawie naprężeń, obliczonych z teorii sprężystości. Mianowicie, w danym przypadku (rys. 50) pas największych naprężeń stycznych posiada

kształt półksiężyca, zakreślonego przez dwa okręgi, przechodzące przez krawędzie stempla, a których środki leżą w pobliżu prostej, ograniczającej półpłaszczyznę. Nádaí zaznacza co prawda, że wynaturzenie układu sprężystego musi zachodzić w kierunku schematu Prandtl'a, jednak przytem zaczynają się zjawiać wątpliwości co do ustalenia właściwej fazy odkształcenia, odpowiadającej granicy plastyczności.⁹⁷⁾

Wobec tego, że dalszy rozwój dwuwymiarowego zagadnienia plastyczności zależy będzie w znacznej mierze od postępów teorii sprężystości, należy zastanowić się nad metodami matematycznymi, które pozwoliłyby zwiększyć ilość rozwiązań w za-

⁹⁷⁾ Doświadczenia najnowsze (G. Sachs. Beitrag zum Härteproblem Naturwissenschaften 14, 1219, 1926) potwierdzają słusność tego poglądu Sachs podaje nawet w wątpliwość, czy tendencja wynaturzania układu idzie w kierunku schematu Prandtl'a.

kresie płaskich układów sprężystych. Nie jest to zadanie łatwe. Metoda odwzorowań podobnych np., tak celowa, gdy chodzi o przekształcenia układów hydrodynamicznych, zawodzi prawie zawsze, gdy w grę wchodzi płaskie układy sprężyste, zależne od równania biharmonicznego. Coprawda bieguny i punkty osobliwe zachowują się po dokonaniu odwzorowania podobnego. Tak więc punkty przyłożenia sił skupionych na konturze pierwotnym i odwzorowanym odpowiadają sobie wzajemnie. Na konturze odwzorowanym zjawiają się prawie zawsze pewne dodatkowe siły zewnętrzne, których nie było na konturze pierwotnym. Pozbycie się tych dodatkowych sił zewnętrznych drogą wprowadzenia nowej funkcji Airy'ego, czyniącej zadość równaniu biharmonicznemu, jest najczęściej bezowocne. Wskutek zjawienia się tych dodatkowych sił zewnętrznych odwzorowywanie układów trajektorji naprężeń głównych nie prowadzi do celu. Można też sprawdzić, że w wyniku zamiany zmiennych niezależnych, uwarunkowanej odwzorowaniem podobnem, samo równanie biharmoniczne zmienia swój kształt. Jedynie zamiana zmiennych zapomocą promieni odwrotnych (inwersja)⁹² daje nowe płaskie układy sprężyste, wolne od omawianych powyżej niedogodności, zato zakres stosowalności tej metody jest ograniczony.

Funkcję biharmoniczną χ dwóch zmiennych niezależnych można rozłożyć na wyrażenia następujące:

$$\varphi_1 + (ax + by) \psi_1 \text{ lub } \varphi_2 + (x^2 + y^2) \psi_2 \quad (24,1)$$

gdzie $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$, są funkcjami harmonicznymi, zaś a i b spółczynniki stałymi. Naprężenia otrzymuje się przytem na podstawie wzorów:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}; \quad \tau = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (24,2)$$

Większość płaskich układów sprężystych ustalona została na podstawie t. zw. metody bezpośredniej, polegającej na zestawieniu funkcji Airy'ego ze zρέcznie dobranych funkcji harmoniczych według wyrażen (24,1), przystosowanych do danych warunków brzegowych. W niektórych przypadkach okazało się celowem systematyczne wypróbowywanie szeregu funkcji harmoniczych określonego typu. Metodę bezpośrednią rozwinął szczegółowiej Carothers⁹⁵ dla spółrzędnych zwykłych i krzywolinjowych. Dla

zwykłych współrzędnych łatwo udowodnić, że naprężenia można przedstawić w postaci wzorów:

$$\sigma_x = a\varphi + b\psi + c\left(\varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + d\left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \quad (24,31)$$

$$\sigma_y = -a\varphi - b\psi + c\left(\varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + d\left(\varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \quad (24,32)$$

$$\tau = -a\psi + b\varphi + c\left(-x \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + d\left(-y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad (24,33)$$

w których a, b, c, d są stałymi. Oddzielne wyrazy w równaniach (24,3) można uważać za rozwiązania a, b, c, d . W rozwiązaniach a i b funkcje φ i ψ są zespolone, w rozwiązaniach c i d : φ jest dowolną funkcją harmoniczną.

Znacznie ogólniejszy charakter posiada metoda Kołosowa, polegająca na wyznaczaniu, w zależności od danych warunków brzegowych, wartości funkcji zmiennej zespolonej $2\tau + i(\sigma_1 - \sigma_2)$, gdzie σ_1, σ_2, τ są naprężeniami normalnymi i stycznym w współrzędnych zwykłych lub krzywoliniowych.⁸⁸⁾

Metody elementarne całkowania równania biharmonicznego, jakkolwiek bardzo pożyteczne w przypadkach prostszych, nie mogą zapewnić rozwiązania w przypadkach złożonych. Stąd też dalszego rozwoju teorii płaskich układów sprężystych należy oczekiwać od metod ogólnych, których podstawy znajdujemy dziś w zastosowaniu równań całkowych do rozwiązywania zagadnień brzegowych.

Obecnie jednak przykłady rozwiązań zagadnień brzegowych przy posilkowaniu się metodami ogólnymi są nieliczne^{87a)}. Zastosowanie równań całkowych posiada dotychczas znaczenie ogólne. Toteż dla technika, zainteresowanego w rozwiązaniu specjalnego zagadnienia brzegowego, niezmiernie ważnem jest posiadać metodę, która chociaż w sposób przybliżony, dawałaby możność liczbowego ujęcia tych zagadnień. Metodą obiecującą w tym zakresie jest zastąpienie równań różniczkowych przez równania różnicowe. Jest rzeczą oczywistą, że otrzymujemy przytem wyniki daleko mniej precyzyjne, wystarczające jednak w wielu razach.

^{87a)} R. Miche. Le calcul pratique des problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales. C. R. du II-ème Congr. de Méc. Appl. Zürich. 1926.

Wiadomą jest rzeczą, że całkowania graficzne polegają częściowo na rachunku zapomocą różnic skończonych. Posiadamy kilka ważnych i praktycznych metod liczbowego rozwiązywania zwykłego równania różniczkowego. Za najważniejszy krok naprzód, w zakresie teorii sprężystości, uważać należy przedstawienie równań potencjału i funkcji Green'a w kształcie różnicowym i zastosowanie dogodnych metod arytmetycznych dla rozwiązywania odnośnych zagadnień brzegowych.^{98) 99) 100) 101)}

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z kwadratową siatką punktową dwóch zmiennych niezależnych. Niech podziałka siatki wynosi 1 tak, że x i y będą wyrażone zawsze w liczbach całkowitych. Jeśli przez $u(x, y)$ oznaczymy wartość pewnej funkcji harmonicznej dla punktu (x, y) , znajdującego się wewnątrz danego obszaru, to równanie harmoniczne przedstawi się w postaci:

$$\Delta_2 u \equiv u(x+1, y) + u(x-1, y) + u(x, y+1) + u(x, y-1) - 4u(x, y) = 0 \quad (24,4)$$

Wynika z tego, że wartość funkcji harmonicznej w dowolnym punkcie wewnętrznym siatki stanowi średnią arytmetyczną wartości tejże funkcji w czterech punktach sąsiednich. Powyższe elementarne założenie jest punktem wyjścia dla zadziwiająco prostej metody rachunkowej, umożliwiającej rozwiązywanie różnorodnych zagadnień brzegowych.

Analogiczną metodę stosujemy względem równania biharmonicznego. Zazwyczaj rozbijamy wszakże równanie biharmoniczne $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$ na układ dwóch równań o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

$$\Delta_2 u = v; \quad \Delta_2 v = 0 \quad (24,5)$$

co ułatwia w dużym stopniu stosowanie schematu działań arytmetycznych ustalonego dla równania harmonicznego.¹⁰²⁾

⁹⁸⁾ L. F. Richardson. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam. Phil. Trans. A. 210, 307, 1911.

⁹⁹⁾ H. Liebmann. Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Münch. Sitz. Ber. 385, 1918. ¹⁰⁰⁾ F. Wolf. Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen. ZAMM, 6, 118, 1926. ¹⁰¹⁾ R. Courant. Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichungen. ZAMM, 6, 322, 1926. ¹⁰²⁾ H. Marcus. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, 1924.

Niepodobna pominąć na tem miejscu uwagi, że różnorodne płaskie układy sprężyste mogą być rozwiązywane doświadczalnie, posilkując się metodą badania bezpośredniego naprężeń w ciałach przezroczystych zapomocą światła spolaryzowanego.¹⁰³⁾¹⁰⁴⁾ Ostatnia okoliczność stawia badania płaskich układów sprężystych i ich wynaturzanie się w chwili przekraczania granicy plastyczności w rzędzie najważniejszych zagadnień mechaniki technicznej.

25. Wpływ stwardnienia materiału. Sformułowanie matematyczne zagadnień plastyczności przez Haar'a i Kármán'a. Jak kilkakrotnie zaznaczaliśmy, istnieje możliwość magazynowywania energii sprężystej przy trwałem odkształcaniu ciał plastycznych (17). Rozpatrując różnorodne układy sprężysto-plastyczne, Hencky doszedł do wniosku, że zjawisko to jest dość powszechne i że przyczyny t. zw. stwardnienia wskutek zgniotu należy upatrywać nie tylko w zmianach molekularnych w pobliżu powierzchni poślizgowych, ale i w tem, że po odkształceniu trwałem pewne obszary ciała pozostają w stanie napięcia. Nie trudno też obmyśleć modele mechaniczne, ilustrujące możliwość magazynowania energii sprężystej w postaci utajonej po zgnioście. Wskazać by można tu na piłkę gumową, z wewnętrznym szkieletem drucianym, który zgnieciony utrzymywałby gumę w stanie napięcia. Na jednym z takich modeli Hencky wykazał analogię, zachodzącą pomiędzy wykresami wytrzymałościowymi, charakteryzującymi stwardnienie materiału, a pomiędzy wykresem, odpowiadającym sprężysto-plastycznemu odkształcaniu medelu.¹⁰⁵⁾ Można przytem odróżnić dwie fazy odkształcenia trwałego. Podczas pierwszej fazy zjawisko odprężania dotyczy obszarów sprężystych. Pozorne stwardnienie materiału można przytem wyjaśnić tem, że po odprężeniu ciała, wskutek dokonanych trwałych odkształceń, pozostają i nadal obszary naprężeń wewnętrznych. Przy ponownem obciążaniu utajone naprężenia wewnętrzne działają tak, że nowa granica plastyczności jest wyższa od dawnej. Podczas drugiej

¹⁰³⁾ A. Mesnager. Naprężenia ciał stałych w postaci widzialnej. Prz. Techn. 1924. ¹⁰⁴⁾ E. G. Coker. Metody fotosprężystościowe badania naprężeń. Prz. Techn. 1925. Wiele materiału doświadczalnego zawiera też monografia: Th. Wyss Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin. 1926. ¹⁰⁵⁾ H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Proc. I. Intern. Congr. Mech. Delft, 312, 1924. Również: ZAMM, 4, 323, 1924.

fazy odprężenie wywołuje już odkształcenie trwałe w pewnych obszarach. Stosując obciążanie i odprężanie, odpowiadające drugiej fazie, nadwyreżamy stale materiał i możemy doprowadzić go do pęknięcia.

Teorie krzywych poślizgowych dla ciała idealnie plastycznego pomijają czynnik stwardnienia materiału wskutek zgniotu. Istnieje wszakże możliwość uwzględnienia tego czynnika, jeśli zagadnienie plastyczności inaczej sformułować pod względem matematycznym. Można mianowicie, jak to uczynili w swej pracy Haar i Kármán,¹⁰⁶⁾ szukać na gruncie metod rachunku warjacyjnego, przy danym układzie sił zewnętrznych, stanu równowagi, odpowiadającego chwili, gdy odkształcenie plastyczne jest powstrzymane przez wzrost naprężeń w pewnych obszarach sprężystych. Przy sposobności należy zaznaczyć, że te obszary można wyodrębnić w postaci „jąder sprężystych” w zagadnieniu dwuwymiarowym, lub przy skręcaniu prętów, natomiast w przestrzeni trójwymiarowej obszary plastyczne i sprężyste mogą się przenikać wzajemnie. Najważniejszą rzeczą w danym wypadku jest to, że przyjmując hipotezę wytrzymałościową Hubera (§ 3), uważamy pojemność danego elementu ciała w zakresie magazynowania energii odkształcania postaciowego za ograniczoną przez warunek (3,12), czyli $\Phi \equiv \Lambda_p - \frac{2}{3} \frac{k^2}{G} = 0$.

Stawiając zagadnienie stanu równowagi ciała na gruncie metod rachunku warjacyjnego, musimy szukać wartości ekstremalnych całki $\iiint \Lambda \, dx \, dy \, dz$, rozpostartej na cały obszar danego ciała, gdzie $\Lambda = \Lambda_n + \Lambda_p$ (3; 8, 9).

Aby uprościć poniżej podane wzory, unikając pomieszania wskaźników, oznaczających rodzaj składowych naprężeń, ze wskaźnikami, określającymi pochodne cząstkowe, oznaczmy w drodze wyjątku, składowe naprężenia normalnych i stycznych: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, odpowiednio przez: $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \tau^{12}, \tau^{23}, \tau^{31}$. Będziemy przytem pamiętali, że kierunki 1, 2, 3, są tożsame z kierunkami x, y, z . Pozwoli to nam używać stale skróconego znakowania pochodnych cząstkowych, typu: $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$; $F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ i t. d.

¹⁰⁶⁾ A. Haar und Th. v. Kármán. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien. Gött. Nachr. 204, 1909.

Ustalmy teraz t. zw. warunki poboczne zagadnienia warjacyjnego. Będą niemi warunki równowagi elementu objętościowego ciała, wyrażone w postaci symbolicznej:

$$A \equiv \sigma_x^1 + \tau_y^{12} + \tau_z^{13} = 0; \quad B \equiv \tau_x^{21} + \sigma_y^2 + \tau_z^{23} = 0; \quad C \equiv \tau_x^{31} + \tau_y^{32} + \sigma_z^3 = 0 \quad (25,1)$$

oraz warunek plastyczności: $\Phi = 0$.

W myśl zasad rachunku warjacyjnego¹⁰⁷⁾ szukamy teraz wartości ekstremalnych całki: $\iiint W dx dy dz$, gdzie

$$W = \Lambda + Au + Bv + Cw + \Phi\varphi \quad (25,2)$$

Multiplikatory Lagrange'a: u, v, w, φ są w danym wypadku funkcjami punktu x, y, z . Równania ekstremali Euler'a-Lagrange'a przedstawia się nam w postaci sześciu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych typu:

$$W_{\sigma^1_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(W_{\sigma^1_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(W_{\sigma^1_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(W_{\sigma^1_z} \right) = 0 \text{ i t. d.} \quad (25,3)$$

Po wykonaniu różniczkowań otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi \Phi_{\sigma^1_x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \Lambda_{\sigma^1_x}; & \varphi \Phi_{\tau^{23}_z} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} - \Lambda_{\tau^{23}_z} \\ \varphi \Phi_{\sigma^2_y} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \Lambda_{\sigma^2_y}; & \varphi \Phi_{\tau^{31}_x} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \Lambda_{\tau^{31}_x} \\ \varphi \Phi_{\sigma^3_z} &= \frac{\partial w}{\partial z} - \Lambda_{\sigma^3_z}; & \varphi \Phi_{\tau^{12}_y} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} - \Lambda_{\tau^{12}_y} \end{aligned} \quad (25,4)$$

Wyrazy dodatnie po prawej stronie tych równań oznaczają ogólne odkształcenia sprężysto-plastyczne, zaś wyrazy ujemne (por. 3; 3, 4): $\Lambda_{\sigma^1_x} = \varepsilon^1$; $\Lambda_{\sigma^2_y} = \varepsilon^2$ i t. d. oznaczają składowe odkształcenia sprężystego, odpowiadającego odprężeniu sprężystemu danego elementu objętościowego, pozostawionego samemu sobie.

Liczba równań (25,1), (25,4) oraz $\Phi = 0$, odpowiada liczbie zmiennych $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \tau^{12}, \tau^{23}, \tau^{31}, u, v, w, \varphi$.

¹⁰⁷⁾ R. Courant und D. Hilbert. Methoden der mathematischen Physik str. 191.