

## XI. RUCH KULISTY.

**126. Ruch bez udziału sił.** Dajmy na to, że punkt  $O$  ciała sztywnego jest osadzony nieruchomo, a zatem może ono mieć tylko ruch kulisty około środka  $O$ . Przypuśćmy, że początkowo ciało pozostawało w spokoju, a następnie zostało uderzone przez ciało inne. Uderzenie to wytworzy moment ilości ruchu  $H$  względem punktu  $O$  prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez linię działania siły chwilowej. Jeżeli w dalszym ciągu na ciało żadne siły nie działają, oprócz reakcji w  $O$ , to wektor  $H$  zachowa stałą wielkość i kierunek, gdyż moment owej reakcji względem  $O$  jest zerem, a więc nie wytwarza ona żadnych przyrostów wektora  $H$ .

Przytem reakcja ta oczywiście nie pracuje, a zatem siła żywa ciała będzie również stała. Oznaczmy tę siłę żywą przez  $\frac{T}{2}$ , czyli podwójną siłę żywą przez  $T$ .

Aby zdać sobie sprawę z ruchu ciała, trzeba znać szybkość kątową  $\omega$  co do wielkości i kierunku. Jeżeli wektor  $H$  powstał w kierunku jednej z osi głównych punktu  $O$ , to taki sam kierunek przybrał i wektor  $\omega$  (par. 115). Wiemy z par. 121, że i w dalszym ciągu ciało będzie wciąż wirowało około tejże prostej, gdyż jest ona osią swobodną. Wektor  $\omega$  posiada w tym razie stałą wielkość i kierunek.

Jeżeli wektor  $H$  powstanie nie na osi głównej punktu  $O$ , to  $\omega$  przybierze kierunek odmienny. Gdybyśmy chcieli, aby  $\omega$  zachowało stale ten kierunek w ciele i w przestrzeni, t. j. aby ciało wciąż wirowało około tejże prostej, to trzebaby je do tego zmusić, przykładając odpowiednie siły. Ponieważ siły takie nie działają, przeto wektor  $\omega$  będzie wciąż zmieniał kierunek i w ciele

i w przestrzeni, będzie więc istniał stożek stały i stożek ruchomy osi chwilowych.

Oznaczmy momenty bezwładności ciała względem osi głównych punktu  $O$  przez  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i przypuśćmy, że w chwili  $t$  składowe szybkości kątowej w kierunkach tych osi wynoszą  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . W takim razie momenty ilości ruchu względem osi, albo składowe wektora  $H$  w ich kierunkach, będą  $A\omega_x$ ,  $B\omega_y$ ,  $C\omega_z$ , a zatem

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = H^2 \quad (1).$$

Dalej według par. 112 będzie

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T \quad (2).$$

Pomnóżmy (2) przez  $A$  i odejmijmy od tego (1).

$$B(A - B)\omega_y^2 + C(A - C)\omega_z^2 = AT - H^2 \quad (3).$$

W podobny sposób otrzymamy dwa inne równania analogiczne:

$$C(B - C)\omega_z^2 + A(B - A)\omega_x^2 = BT - H^2 \quad (4),$$

$$A(C - A)\omega_x^2 + B(C - B)\omega_y^2 = CT - H^2 \quad (5).$$

Załóżmy, że momenty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są nierówne, i że

$$A > B > C.$$

W takim razie, jak widać z (3),  $AT - H^2$  jest dodatnie, gdyż różnice  $A - B$  oraz  $A - C$  są dodatnie, a wszystkie wielkości, występujące w równaniach, t. j. momenty bezwładności, siła żywa, oraz kwadraty szybkości kątowych i momentu ilości ruchu są dodatnie z natury rzeczy. Tak samo wynika z (5), że  $CT - H^2$  jest ujemne, bo obydwie różnice  $C - A$  i  $C - B$  są ujemne. Natomiast  $BT - H^2$  w pewnych razach bywa dodatnie, w innych ujemne, gdyż pierwszy wyraz lewej strony równania (4) jest dodatni, a drugi ujemny.

Pomnóżmy równania (3), (4) i (5) odpowiednio przez  $A\omega_x^2$ ,  $B\omega_y^2$ ,  $C\omega_z^2$  i dodajmy stronami. Wypadnie

$$A(AT - H^2)\omega_x^2 + B(BT - H^2)\omega_y^2 + C(CT - H^2)\omega_z^2 = 0. \quad (6).$$

Moglibyśmy dojść do tego samego bezpośrednio, mnożąc (1) przez  $T$ , (2) przez  $H^2$  i odejmując.

Obierzmy osi główne punktu  $O$  za osi współrzędnych. Osi te są wprawdzie ruchome, ale z okolicznością tą możemy się nie liczyć, gdyż chodzi tu jedynie o stan cynematyczny ciała w chwili  $t$ .

Oznaczmy współrzędne końca wektora  $\omega$  przez  $x, y, z$ . Są one oczywiście proporcjonalne do  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , a więc na zasadzie (6) napiszemy

$$A(AT - H^2)x^2 + B(BT - H^2)y^2 + C(CT - H^2)z^2 = 0.$$

Wszystkie trzy współczynniki są tu stałe, a więc równaniu temu odpowiada powierzchnia związana z ciałem, albo przeprowadzona w ciele; jest to stożek drugiego stopnia, symetryczny względem płaszczyzn współrzędnych i posiadający wierzchołek w początku układu. Początek wektora  $\omega$  leży w wierzchołku tego stożka, a koniec musi zawsze leżeć na powierzchni; z tego wynika, że jest to stożek ruchomy osi chwilowych.

Wprowadzimy dla krótkości oznaczenia następujące:

$$A(AT - H^2) = m^2, \quad B(BT - H^2) = \pm n^2, \quad C(CT - H^2) = -p^2.$$

Tym sposobem równanie stożka ruchomego osi chwilowych w odniesieniu do osi głównych punktu  $O$  przybierze jedną z postaci następujących:

$$m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 = 0 \quad (7),$$

$$m^2x^2 - n^2y^2 - p^2z^2 = 0 \quad (8).$$

Przypuśćmy, że zachodzi pierwszy z tych przypadków. Poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi  $z$  w odległości  $z_1$  od  $O$ , czyli płaszczyznę  $z = z_1$ . Przetnie ona stożek według linii, której rzut na płaszczyznę  $xy$  będzie miał równanie

$$m^2x^2 + n^2y^2 = p^2z_1^2 \quad (9).$$

Jest to oczywiście elipsa, której środek leży w początku układu. Sama krzywa przekroju nie różni się niczem od tego rzutu, a środek jej leży na osi  $z$ . Widzimy z tego, że osią stożka jest oś  $z$ , czyli oś najmniejszego momentu punktu  $O$ .

Przypuśćmy teraz, że zachodzi przypadek drugi. Prowadźmy płaszczyznę  $x = x_1$ , prostopadłą do osi  $x$ . Równanie rzutu przekroju na płaszczyznę  $yz$  będzie

$$n^2y^2 + p^2z^2 = m^2x_1^2.$$

Stąd widać, że w tym razie osią stożka jest prosta  $x$ , czyli oś największego momentu punktu  $O$ .

Tak więc stożek ruchomy osi chwilowych jest zawsze eliptyczny, czyli drugiego stopnia; osią jego jest albo oś najmniejszego momentu, albo oś największego momentu punktu  $O$ .

W żadnym razie osią tego stożka nie może być oś średniego momentu. Można wyciągnąć stąd pewien ważny wniosek, jak zobaczymy w paragrafie następnym.

Prz. 1. Wyznaczyć w ciele miejsce geometryczne prostych, na których z kolei przypada wektor  $H$  dla przypadku, rozważanego w par. niniejszym.

Odp. Równanie szukanego stożka  $\frac{m^2x^2}{A^2} \pm \frac{n^2y^2}{B^2} - \frac{p^2z^2}{C^2} = 0$ , gdzie  $m, n, p$  mają te same znaczenia, co w (7) i (8).

Prz. 2. Dowieść, że rzut szybkości kątowej na linię wektora  $H$  jest stały i równy  $\frac{T}{H}$ .

Prz. 3. Ciało sztywne może poruszać się swobodnie około punktu  $O$  i posiada momenty bezwładności  $A, B, C$  względem jego osi głównych. Wymierzamy uderzenie w punkt  $P$ , którego współrzędne w odniesieniu do osi głównych są  $(xyz)$ . Okazać, że jeżeli szybkość kątowa ciała ma być jak największa, to (1) kierunek uderzenia powinien być prostopadły do  $OP$ , (2) kosynusy kierunkowe  $a, b, c$  tego kierunku powinny zadość zrobić równaniu

$$\frac{x}{a} \left( \frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right) + \frac{y}{b} \left( \frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) + \frac{z}{c} \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) = 0.$$

Wyrzucimy łatwo  $\omega$  w funkcji  $a, b, c$ . Dajmy na to, że  $\omega^2 = f(a, b, c)$ , gdzie pomiędzy  $a, b, c$  zachodzi jeszcze związek  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tworzymy funkcję  $u = f(a, b, c) + \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$ , gdzie  $\lambda$  nie zależy od  $a, b, c$ . Wiadomo, że  $u$  osiąga maksimum dla tych samych wartości zmiennych  $a, b, c$ , co i  $\omega^2$ , i możemy uważać  $u$  za funkcję trzech zmiennych niezależnych; otrzymamy więc równania

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0.$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez  $x, y, z$  i dodając, otrzymamy  $ax + by + cz = 0$ , co jest dowodem pierwszej części twierdzenia. Aby udowodnić część drugą możemy równania powyższe odpowiednio przez  $cy - bz, az - cx, bx - ay$  i dodajemy.

Prz. 4. Ciało porusza się około punktu  $O$  bez udziału sił z zewnątrz. Okazać, że w chwili, gdy oś chwilowa przechodzi przez środek ciężkości, to reakcja w  $O$  jest prostopadła do tej osi.

Prz. 5. Ciało sztywne może się obracać około punktu  $O$ , i wiadomo, że  $A > B > C$ . Jak powinien być skierowany moment pary chwilowej  $H$ , aby siła żywa była jak największa?

Znajdziemy z łatwością, że

$$T = \frac{H^2}{C} - H_x^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) - H_y^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right).$$

Z tego wynika, że  $T$  jest największe, gdy  $H_x = H_y = 0$ , t. j. gdy moment pary ma kierunek osi najmniejszego momentu.



**127. Trwałość ruchu.** Widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, że trzecia oś główna punktu  $O$ , czyli oś średniego momentu, nie może być osią stożka ruchomego osi chwilowych. Wiąże się z tem inna właściwość dynamiczna, odróżniająca tę oś od dwóch pozostałych.

W równaniu (3) par. poprzedniego obydwaj wyrazy lewej strony są dodatnie, a zatem  $AT - H^2$ , jak również  $m^2$ , tylko w takim razie jest zerem, gdy  $\omega_y = \omega_z = 0$ , t. j. gdy ciało wiruje około osi największego momentu. W przypadku takim, jak widać z (4)  $BT - H^2$  jest ujemne, a zatem równanie stożka osi chwilowych sprowadzi się do

$$n^2 y^2 + p^2 z^2 = 0.$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny urojone, przechodzące przez oś  $x$ , albo powierzchnia stożkowa, której wszystkie tworzące leżą na osi  $x$ . Wiedzieliśmy z góry, że tak być musi, bo oś  $x$  pozostaje stale osią obrotu.

Również  $-p^2$  a także  $CT - H^2$  może być zerem tylko wtedy, gdy  $\omega_x = \omega_y = 0$ . W tym przypadku równanie stożka ruchomego osi chwilowych sprowadza się do

$$m^2 x^2 + n^2 y^2 = 0,$$

i trzeba uważać, że stożkiem tym jest oś  $z$ , czyli oś najmniejszego momentu.

W równaniu (4) par. poprzedzającego wyrazy lewej strony mają znaki odwrotne, a zatem  $BT - H^2$  a także  $n^2$  może być zerem, chociaż  $\omega_z$  i  $\omega_x$  nie są zerami. Równanie stożka ruchomego sprowadza się w tym razie do

$$m^2 x^2 - p^2 z^2 = 0 \tag{1}.$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny rzeczywiste, przechodzące przez oś  $y$ , i trzeba uważać je za zdegenerowany stożek. Nazwiemy je *płaszczyznami granicznymi*. Są one położone symetrycznie względem płaszczyzn  $xy$ ,  $yz$ ; innymi słowy dwie ostatnie płaszczyzny są dwusiecznymi kąta płaszczyzn granicznych.

Równanie płaszczyzn granicznych możemy napisać w postaci

$$A(AT - H^2)x^2 + C(CT - H^2)z^2 = 0,$$

a ponieważ w przypadku, który właśnie rozważamy,  $BT - H^2 = 0$ , czyli  $H^2 = BT$ , przeto będzie

$$A(A - B)x^2 + C(C - B)z^2 = 0 \tag{2}.$$

Występują tu jedynie momenty bezwładności względem osi głównych, a zatem położenie płaszczyzn granicznych nie zależy od ruchu, który posiada ciało. Są to pewne płaszczyzny stale związane z ciałem, albo istniejące w ciele.

Jeżeli wektor  $\omega$  znajdzie się w pewnej chwili na jednej z płaszczyzn granicznych, i następnie żadne siły na ciało nie działają, to pozostanie on i nadal w tejże płaszczyźnie, gdyż ta w danym razie stanowi powierzchnię stożka osi chwilowych. Z tego wynika, że wektor  $\omega$  bez pomocy sił zewnętrznych nie może przedostać się przez żadną z płaszczyzn granicznych; są one dla tego wektora nieprzenikalne.

Płaszczyzny graniczne dzielą przestrzeń na cztery wycinki klinowe. W dwóch z nich, przeciwległych, przebiega oś  $x$ ; powiemy, że tworzą one obszar  $x$ ; dwa pozostałe, w których przebiega oś  $z$ , nazwiemy obszarem  $z$ .

Dajmy na to, że pod działaniem pierwotnego impulsu, który otrzymało ciało, oś chwilowa w pierwszej chwili utworzyła się w obszarze  $x$ . Pozostanie ona i nadal w tym samym obszarze, bo od obszaru  $z$  odgradzają płaszczyzny graniczne. Z tego wynika, że osią stożka ruchomego będzie oś  $x$ , czyli oś największego momentu. Jeżeli oś chwilowa znajdzie się w obszarze  $z$ , to osią owego stożka będzie oś najmniejszego momentu.

Przypuśćmy teraz, że ciało wiruje około osi  $x$ , na tej więc prostej leżą obydwa wektory  $H$  i  $\omega$ . Dajmy ciału bardzo mały impuls, skierowany jakkolwiek, ale nie w płaszczyźnie  $yz$ . Skutkiem tego wektor  $H$  otrzyma drobny przyrost geometryczny i opuści oś  $x$ , tworząc z nią mały kąt. Składowe jego w kierunkach osi będą teraz  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ; z nich pierwsza jest prawie równa wypadkowemu wektorowi  $H$ , a dwie pozostałe są bardzo małe.

Również wektor  $\omega$  zejdzie z osi  $x$ . Składowe jego w nowym położeniu będą

$$\omega_x = \frac{H_x}{A}, \quad \omega_y = \frac{H_y}{B}, \quad \omega_z = \frac{H_z}{C}.$$

Związki te wskazują, że  $\omega_y$  i  $\omega_z$  są małe, a zatem i  $\omega$  utworzy z osią  $x$  kąt mały. Jeżeli tylko impuls był dostatecznie słaby, to  $\omega$  znajdzie się w obszarze  $x$ , osią stożka osi chwilowych pozostanie prosta  $x$ , a jeżeli przytem stożek ruchomy różni się niezbyt wiele od kołowego, to będzie on bardzo ostry.

Tak więc położenie osi obrotu zmieni się w ciele nieznacznie, a łatwo zrozumieć, że zmieni się ono niewiele i w przestrzeni. Jeżeli  $\vartheta$  oznacza kąt pomiędzy  $\omega$  i  $H$ , to

$$\cos \vartheta = \frac{H_x \omega_x + H_y \omega_y + H_z \omega_z}{H \omega}.$$

Pierwszy wyraz licznika różni się niewiele od  $H \omega$ , a dwa wyrazy pozostałe są małe; a zatem  $\cos \vartheta$  mało różni się od jedności, i wektor  $\omega$  niewiele odchyła się od  $H$ . Z drugiej strony wektor  $H$  odchylił się nieznacznie od położenia pierwotnego. Z tego widać, że wogóle ruch zmieni się niewiele, i mówimy, że ruch około osi największego momentu jest *trwały*.

Jeżeli nowy impuls jest zbyt wielki, to wektor  $\omega$  przebieje jedną z płaszczyzn granicznych i znajdzie się w obszarze  $z$ . Oś stożka stanie się prosta  $z$ , i ruch ciała zmieni się w dużym stopniu, a mianowicie oś chwilowa będzie odchyłała się bardzo znacznie od położenia pierwotnego, czyli od osi  $x$ .

Oczywiście większa lub mniejsza trwałość ruchu około osi  $x$  zależy od tego, czy obszar  $x$ , czyli kąt dwuścienny, zawierający oś  $x$ , jest duży czy mały. Jeżeli obszar ten jest duży, to nawet znaczny stosunkowo impuls nie wyprze wektora  $\omega$  z obszaru  $x$ , a więc nie zaburzy zasadniczo ruchu ciała. Jeżeli obszar  $x$  jest mały, to już słaby impuls wywoła całkowitą zmianę w ruchu ciała. Ten kąt dwuścienny można do pewnego stopnia uważać za miarę trwałości ruchu około osi  $x$ .

To samo mutatis mutandis można powiedzieć o ruchu obrotowym około osi  $z$ , czyli około osi najmniejszego momentu punktu  $O$ . Ruch ten jest trwały, i tem trwalszy, im większy jest obszar  $z$ .

Oznaczmy przez  $\alpha$  połowę tego kąta dwuściennego, który stanowi obszar  $x$ , albo kąt, który jedna z płaszczyzn granicznych tworzy z osią  $x$ . Z równania (2) znajdziemy z łatwością, że

$$\tan^2 \alpha = \frac{A(A-B)}{C(B-C)}.$$

Wzór ten wskazuje, od czego zależy trwałość ruchu obrotowego około osi największego i najmniejszego momentu. Jeżeli  $B$  tyleż się różni od  $A$ , co i od  $C$ , t. j. jeżeli  $A-B = B-C$ , to  $\tan \alpha > 1$ , czyli  $\alpha > 45^\circ$ . W tym więc razie obszar  $x$  jest większy od

obszaru  $z$ , a zatem ruch około osi największego momentu posiada większą trwałość, niż ruch około osi najmniejszego momentu. W przypadku ogólnym ruch pierwszy jest tem trwalszy, a drugi tem mniej trwały, im w przedziale  $A - C$  moment  $B$  leży dalej od  $A$  i bliżej do  $C$ .

Przypuśćmy wreszcie, że ciało wiruje około osi średniego momentu. Udzielmy mu impuls, skierowany dowolnie, ale nie w płaszczyźnie  $zx$ . Jakkolwiek mały będzie ten impuls, to w każdym razie wektor  $\omega$  zejdzie z osi  $y$  i znajdzie się w obszarze  $x$  albo w obszarze  $z$ . W pierwszym przypadku osią stożka ruchomego stanie się oś  $x$ , a zatem ruch ciała zmieni się w sposób zasadniczy. To samo stanie się w przypadku drugim, gdy wektor  $\omega$  wkroczy do obszaru  $z$ . Widzimy, że ruch około osi średniej, czyli około osi średniego momentu jest chwiejny. Najdrobniejsze wstrząśnienie może zburzyć go całkowicie.

Pozostaje jeszcze rozważyć, jak ukształtuje się ruch ciała, jeżeli wektor  $\omega$  znajdzie się w jednej z płaszczyzn granicznych, ale nie na osi  $y$ . Uczynimy to w dalszym ciągu.

**128. Elipsoida bezwładności i polodja.** Poincot dał inny obraz ruchu ciała, obracającego się dookoła nieruchomego punktu  $O$ . Poznamy obraz ten w zarysie w paragrafie niniejszym i następnym.

Widzieliśmy w par. 126, że składowe  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  wektora  $\omega$  czynią zadość równaniu

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T.$$

Współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  końca wektora  $\omega$  są proporcjonalne do  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ; rezygnując z jednorodności wzorów, obierzemy za współczynnik proporcjonalności jednostkę; wówczas

$$x = \omega_x, \quad y = \omega_y, \quad z = \omega_z,$$

i z równania powyższego otrzymamy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = T \quad (1).$$

Równaniu temu odpowiada elipsoida, której środkiem jest punkt  $O$ , a osi leżą na osiach głównych tego punktu.

Półowki osi elipsoidy, położonych na  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , wynoszą odpowiednio

$$\sqrt{\frac{T}{A}}, \quad \sqrt{\frac{T}{B}}, \quad \sqrt{\frac{T}{C}}.$$



Z tych wielkości pierwsza jest najmniejsza, trzecia największa, zatem mała oś leży na osi największego momentu, a duża na osi najmniejszego momentu. Oś średnia leży na trzeciej osi głównej.

Tak więc koniec wektora  $\omega$  musi pozostawać na elipsoidzie (1). Kształt tej elipsoidy zależy jedynie od momentów  $A, B, C$ , a wymiary od siły żywej. Gdy zmienia się siła żywa, to wszystkie trzy osi zmieniają się proporcjonalnie do  $\sqrt{T}$ , lecz elipsoida pozostaje podobną do pierwotnej.

Jeżeli podwójna siła żywa jest równa jednostce, to koniec wektora  $\omega$  pozostaje na elipsoidzie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (2).$$

Elipsoida taka nazywa się *elipsoidą bezwładności punktu O*. Posiada ona następującą własność zasadniczą.

Poprowadźmy przez  $O$  dowolną prostą, oznaczmy jej punkt przecięcia z elipsoidą bezwładności przez  $P$ , a moment bezwładności ciała względem niej przez  $I$ . Jeżeli podwójna siła żywa ciała jest równa jednostce, a osią chwilową jest owa prosta  $OP$ , to w myśl definicji elipsoidy bezwładności szybkość kątowna wynosi  $OP$ , a zatem podwojona siła żywa powinna być równa  $I \cdot (OP)^2$ . Tak więc  $I \cdot (OP)^2 = 1$ , czyli

$$I = \frac{1}{(OP)^2}.$$

Widzimy, że odwrotność kwadratu połowy średnicy, położonej na dowolnej prostej, jest równa momentowi bezwładności względem tej prostej, albo raczej proporcjonalna do tego momentu.

Oś chwilowa w chwili danej przecina elipsoidę bezwładności w dwóch punktach. Jeden z nich leży po tej stronie środka  $O$ , w którą jest skierowana szybkość kątowna, a drugi po stronie odwrotnej. Poinsoť nazywa pierwszy z nich  $P$  *biegunem*, a miejsce geometryczne biegunów na elipsoidzie bezwładności *polodją*.

Z poprzedniego wynika, że  $OP$  jest  $\sqrt{T}$  razy mniejsze od  $\omega$ , a zatem współrzędne bieguna wynoszą odpowiednio

$$\frac{\omega_x}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_y}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_z}{\sqrt{T}}.$$

Tak więc polodja jest to krzywa, położona na elipsoidzie bezwładności, i poruszająca się wraz z nią. Prócz tego polodja leży również na stożku ruchomym osi chwilowych, gdyż biegun

jest punktem osi chwilowej; jest to zatem linia przecięcia tych dwóch powierzchni. Jeżeli osią stożka jest oś  $x$ , to polodja okala wierzchołek elipsoidy, położony na tej osi, i jest symetryczna względem płaszczyzn  $xy$  i  $zx$ . Jest to następstwem tej okoliczności, że obydwie powierzchnie są symetryczne względem owych płaszczyzn.

Jeżeli oś stożka ruchomego stanowi prosta  $z$ , to polodja okala wierzchołek, leżący na tej osi, i jest symetryczna względem płaszczyzn  $yz$  i  $zx$ .

Linia przecięcia elipsoidy ze stożkiem składa się z dwóch odrębnych gałęzi, symetrycznych jedna do drugiej względem płaszczyzn  $yz$  lub  $xy$ , gdy osią stożka jest prosta  $x$  lub  $z$ . Z tych dwóch gałęzi tylko jedna stanowi polodję, a obydwie razem tworzą krzywą algebraiczną czwartego stopnia o podwójnej krzywiznie. Za równania jej można uważać równanie elipsoidy bezwładności oraz równanie stożka ruchomego osi chwilowych.

Jeżeli ciało obraca się około osi największego lub najmniejszego momentu, to polodją jest jeden punkt, a mianowicie wierzchołek elipsoidy, leżący na jej małej lub dużej osi. Jeżeli oś chwilowa leży w płaszczyźnie granicznej, to polodją jest elipsa, stanowiąca przecięcie tej płaszczyzny z elipsoidą.

Załączona figura wyobraża elipsoidę bezwładności jakiegoś ciała. Proste  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są jej małą, średnią i dużą osią, czyli są to osi największego, średniego i najmniejszego momentu tego ciała. Na powierzchni elipsoidy wykreślono kilka możliwych polodji. Jedne z nich obiegają koniec osi  $x$ , inne koniec osi  $z$ . Granicę pomiędzy tymi dwoma układami stanowią dwie elipsy, przechodzące przez koniec osi  $y$ . Są to przecięcia płaszczyzn granicznych z elipsoidą.

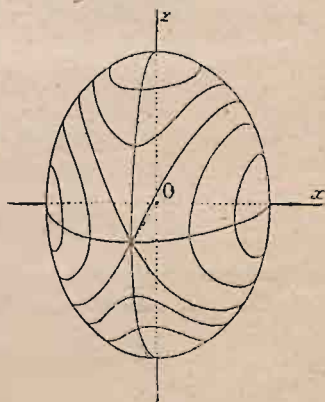


Fig. 85.

Prz. 1. Wyznaczyć równania rzutów polodji na płaszczyzny współrzędnych, czyli na płaszczyzny główne punktu  $O$ , i okazać, że rzut na płaszczyznę  $zx$  jest hiperbolą, a dwa rzuty pozostałe są elipsami.

Prz. 2. Dowieść, że mała oś elipsy przecięcia płaszczyzny granicznej z elipsoidą bezwładności leży na średniej osi głównej punktu  $O$ .

Oczywiście jedna oś elipsy leży na osi  $y$ , a druga na prostej przecięcia  $u$  płaszczyzny granicznej z płaszczyzną  $zx$ . Oznaczmy długości tych osi odpowiednio

przez  $2b$  i  $2a$ . Znajdziemy łatwo, że  $b^2 = \frac{1}{B}$ . Oznaczmy kąt, który tworzy  $u$  z osią  $x$ , przez  $\alpha$ ; w takim razie moment bezwładności względem  $u$  wynosi  $A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha$ , a zatem

$$\frac{1}{a^2} = A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha.$$

Aby sprawdzić, która oś jest większa tworzymy różnicę

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = B - A \cos^2 \alpha - C \sin^2 \alpha.$$

Prawa strona  $= (B - A) \cos^2 \alpha + (B - C) \sin^2 \alpha$ , a gdy zużytkujemy wzór na  $\tan^2 \alpha$  z paragrafu 127, to wypadnie  $\frac{(A - B)(A - C)}{C} \cos^2 \alpha$ . Jest to oczywiście dodatnie, a więc  $a > b$ .

Prz. 3. Dowieść, że linia wektora  $\omega$  jest miejscem geometrycznym środków płaskich przekrojów elipsoidy bezwładności, prostopadłych do wektora  $H$ .

Oznaczmy przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty kierunkowe wektora  $\omega$  i przez  $\xi, \eta, \zeta$  współrzędne środka jakiejkolwiek cięciwy, równoległej do  $\omega$ . W takim razie równania cięciwy można napisać w postaci

$$x = \xi + r \cos \alpha, \quad y = \eta + r \cos \beta, \quad z = \zeta + r \cos \gamma,$$

gdzie  $r$  oznacza promień wodzący z owego środka. Gdy wstawimy to do równania elipsoidy, to otrzymamy równanie kwadratowe względem  $r$ ; powinno ono posiadać dwa pierwiastki równe i odwrotne, a zatem

$$A\xi \cos \alpha + B\eta \cos \beta + C\zeta \cos \gamma = 0.$$

Jest to równanie płaszczyzny, w której leżą środki wszystkich cięciw równoległych do  $\omega$ , czyli płaszczyzny sprzężonej z linią tego wektora. Można łatwo okazać, że płaszczyzna ta jest prostopadła do  $H$ , a z tego wynika bezpośrednio twierdzenie żądane.

Prz. 4. Przypuśćmy, że końce średnic głównych elipsoidy bezwładności są w odległościach  $p, q, r$  od linii wektora  $H$ . Okazać, że  $p^2 + q^2 + r^2$  nie zmienia się podczas ruchu (twierdzenie Poinso't'a).

Umieśćmy we wszystkich sześciu końcach punkty materialne o masach  $m$ ; w takim razie  $2m(p^2 + q^2 + r^2)$  będzie momentem bezwładności takiego układu względem linii wektora  $H$ . Można ten sam moment obrachować na innej drodze.

Prz. 5. Wyznaczyć pole przekroju elipsoidy bezwładności płaszczyzną, poprowadzoną przez środek prostopadłe do wektora  $H$ , czyli t. zw. *płaszczyzną niezmienną*, i okazać że pole to nie zmienia się podczas ruchu ciała.

Można łatwo dowieść, że pole elipsy  $ax^2 + by^2 + 2cxy = d$  wynosi  $\frac{\pi d}{\sqrt{ab - c^2}}$ .

Korzystając z tego wzoru, znajdziemy pola rzutów wskazanego przekroju na płaszczyzny główne, a następnie przy pomocy twierdzenia, podanego w przykładzie 2 paragrafu 8, pole samego przekroju. Wypadnie  $\frac{\pi H}{\sqrt{ABCT}}$ , co oczywiście jest niezmiennie.

Prz. 6. Prowadzimy w ciele elipsoidę, która w odniesieniu do osi głównych posiada równanie  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$ , czyli tak zw. elipsoidę Mac Cullagha. Okazać, że podczas ruchu ciała przechodzi ona wciąż przez pewien stały punkt  $P$  przestrzeni, i wyznaczyć położenie jego. Odp.  $P$  leży na linii wektora  $H$ , i  $OP = \frac{H}{\sqrt{T}}$ .

Prz. 7. Prowadzimy w punkcie  $P$ , o którym była mowa w przykładzie poprzedzającym, płaszczyznę styczną do elipsoidy Mac-Cullagha; w chwili danej odległość tej płaszczyzny od środka  $= p$ . Wyznaczyć szybkość kątową ciała w tej chwili. Odp.  $\frac{\sqrt{T}}{p}$ .

**129. Herpolodja.** Z geometrii analitycznej wiadomo, że równanie płaszczyzny stycznej w punkcie  $(x_1 \ y_1 \ z_1)$  do elipsoidy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

czyli do elipsoidy bezwładności, jest takie:

$$Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 = 1 \quad (1).$$

Wyznamy równanie płaszczyzny stycznej w biegunie. Współrzędne tego punktu, jak wiemy z par. poprzedzającego, są

$$\frac{\omega_x}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_y}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_z}{\sqrt{T}};$$

wprowadzając je do (1), otrzymamy

$$A\omega_x \cdot x + B\omega_y \cdot y + C\omega_z \cdot z = \sqrt{T}.$$

Lecz  $A\omega_x = H_x = H \cos \alpha$ , jeżeli  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty kierunkowe wektora  $H$ . Przekształcając analogicznie  $B\omega_y$  i  $C\omega_z$ , nadamy równaniu płaszczyzny stycznej postać

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{\sqrt{T}}{H}. \quad (2).$$

Jest to tak zw. postać normalna równania płaszczyzny. Wiadomo, że prostopadła do płaszczyzny tworzy z osiami kąty  $\alpha, \beta, \gamma$ , i że odległość płaszczyzny od początku układu wynosi  $\frac{\sqrt{T}}{H}$ . Z tego wynika, że płaszczyzna styczna w biegunie do elipsoidy bezwładności jest wciąż prostopadła do wektora  $H$  i pozostaje w stałej odległości od nieruchomego punktu  $O$ , a ponieważ kierunek wektora  $H$  nie ulega zmianom, przeto owa płaszczyzna styczna jest nieruchoma. Oznaczmy ją dla krótkości literą **F**.



Tak więc biegun pozostaje wciąż w nieruchomej płaszczyźnie **F**. Jego miejsce geometryczne w tej płaszczyźnie Poinso nazwał *herpolodją*. Jest to oczywiście krzywa nieruchoma; gdy połączymy wszystkie jej punkty ze środkiem  $O$ , to powstanie stożek stały osi chwilowych.

Herpolodja przebiega pomiędzy dwoma okręgami, posiadającymi wspólny środek w rzucie środka elipsoidy  $O$  na płaszczyznę  $F$ . Okrąg zewnętrzny odpowiada punktowi polodji najbardziej odległemu od  $O$ , a wewnętrzny punktowi najbliższemu. Na załączonym rysunku mamy obraz herpolodji, wykreślony dla pewnego przypadku konkretnego. Jest to krzywa przestępna.

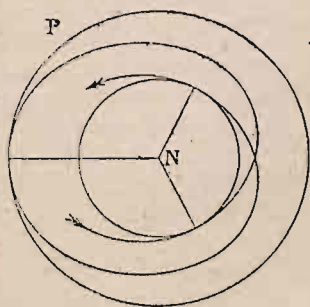


Fig. 86.

Polodja i herpolodja posiadają w każdej chwili wspólny punkt, a mianowicie ówczesny biegun. Wyobraźmy sobie ruchomy punkt  $M$ , który nie należy do badanego ciała, ale podąża za biegunem i znajduje się wciąż w tym punkcie. Torem bezwzględny punktu  $M$  jest herpolodja, a względny do badanego ciała polodja; zatem szybkość bezwzględna jest styczna do pierwszej z tych krzywych, a względna do drugiej. Szybkość unoszenia jest zerem, bo biegun leży na osi chwilowej. Z tego wynika, że krzywe posiadają wspólną styczną, i polodja toczy się po herpolodji bez poślizgu. Mówi się także, że elipsoida bezwładności toczy się po nieruchomej płaszczyźnie **F**, jakkolwiek ruch jej nie zupełnie odpowiada pojęciu toczenia się.

Wytworzyli się więc taki obraz ruchu ciała. W ciele istnieje pewna elipsoida, elipsoida bezwładności, której środek  $O$  posostaje w spokoju, i ta elipsoida toczy się po nieruchomej płaszczyźnie **F**.

Prz. Wyznaczyć herpolodję w przypadku, gdy stożkiem ruchomym jest jedna z płaszczyzn granicznych.

Polodją jest w tym razie elipsa, mamy więc tu następujące zadanie geometryczne. Elipsa, której środek jest nieruchomy, toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie **F**; wyznaczyć w tej płaszczyźnie miejsce geometryczne punktu zetknięcia.

Oznaczmy rzut punktu  $O$  na płaszczyznę **F** przez  $Q$ , punkt zetknięcia przez  $P$ , i osi elipsy przez  $2a$  i  $2b$ . Z prz. 2 w par. 128 wiemy, że połowa malej

osi  $b = \frac{1}{\sqrt{B}}$ . Według (2)  $OQ = \frac{\sqrt{T}}{H}$ , a ponieważ w tym razie  $H^2 = BT$ , przeto  $OQ = b$ . Z tego wynika, że herpolodja przechodzi przez punkt  $Q$ . Gdy biegun dojdzie do tego punktu, to osią obrotu stanie się trzecia oś główna punktu  $O$ , elipsa przestanie się toczyć i zacznie wraz z ciałem obracać się około  $OQ$ . Można zresztą ruch ten uważać także za toczenie się.

Elipsę odniesiemy do jej osi i zastosujemy jej równania w postaci

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta \quad (3),$$

gdzie  $\vartheta$  oznacza t. zw. anomalję ekscentryczną. Herpolodję odniesiemy do współrzędnych biegunowych. Za biegun obierzemy punkt  $Q$ , a oś biegunową poprowadzimy przez ten punkt, który zajmował koniec dużej osi elipsy w chwili, gdy był biegunem ruchu.

Oczywiście  $QP^2 = OP^2 - OQ^2$ , a z tego otrzymamy z łatwością  $r = c \cos \vartheta$ , jeżeli  $(r, \varphi)$  oznaczają współrzędne bieżące herpolodji, a  $2c$  odległość międzyogniskową elipsy.

Ponieważ niema poślizgu, przeto punkt zetknięcia w czasie  $dt$  przebiega jednakowe łuki na polodji i herpolodji, a zatem  $dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2$ , i stąd

$$d\varphi = - \frac{b dr}{r \sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Stawiamy znak  $-$ , bo ze wzrostem  $\varphi$  oczywiście  $r$  się zmniejsza.

Równanie powyższe zcałkujemy łatwo, wprowadzając nową zmienną  $u = \frac{c}{r}$ . Wypadnie

$$r = - \frac{2c}{\frac{c\varphi}{e} \mp e - \frac{c\varphi}{b}}.$$

Takie jest równanie herpolodji. Widać z niego, że  $r$  przybiera jednakowe wartości dla  $\varphi$  i  $-\varphi$ , a zatem krzywa jest symetryczna względem osi biegunowej. Promień wodzący jest największy, gdy  $\varphi = 0$ ; wówczas  $r = c$ . Gdy  $\varphi$  wzrasta nieograniczenie, to  $r$  nieograniczenie zbliża się do zera, innymi słowy krzywa obiega wciąż punkt  $Q$ , zbliżając się doń asymptotycznie; jest to spiralna, posiadająca punkt asymptotyczny  $Q$ .

Tak więc, jeżeli oś chwilowa znajdzie się w płaszczyźnie granicznej, to następnie dąży ona wciąż do trzeciej osi głównej punktu  $O$ . Po pewnym czasie kąt pomiędzy temi prostymi staje się znikomo małym, i możemy uważać, nie popełniając wyraźnego błędu, że ciało obraca się stale około owej osi głównej.

**130. Przypadki szczególne.** Rozważymy osobno ten przypadek szczególny, w którym momenty bezwładności względem dwóch osi głównych środka  $O$ , mianowicie  $A$  i  $B$ , są równe. Przypadek taki zachodzi np. w tym razie, gdy ciało jest jednorodną bryłą obrotu, i punkt  $O$  leży na osi symetrii.

Oznaczmy tę oś główną punktu  $O$ , której odpowiada moment bezwładności  $C$ , nie równy  $A$ , przez  $z$ . Wiemy, że w płaszczyźnie dwóch pozostałych osi głównych, czyli w płaszczyźnie prostopadłej do  $z$ , wszystkim prostym, przechodzącym przez  $O$ , odpowiadają momenty równe  $A$ , i każdą z tych prostych można uważać za oś główną.

Poprowadźmy przez oś  $z$  i przez wektor  $\omega$  płaszczyznę i oznaczmy jej prostą przecięcia z ową płaszczyzną równych momentów przez  $x$ . Rozłóżmy następnie  $\omega$  na składowe  $\omega_z$  i  $\omega_x$  w kierunkach  $z$  i  $x$ . Wektor  $H$  posiada w tych kierunkach składowe  $C\omega_z$ ,  $A\omega_x$  i oczywiście leży w płaszczyźnie  $zx$ .

Podobnie, jak w par. 126, otrzymamy tu równania

$$\begin{aligned} C^2\omega_z^2 + A^2\omega_x^2 &= H^2 \\ C\omega_z^2 + A\omega_x^2 &= T \end{aligned} \quad (1).$$

Z równań tych wynika, że  $\omega_z$  i  $\omega_x$  są stałe, a zatem i szybkość wypadkowa  $\omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2}$  jest stała.

Tak więc w rozważanym przypadku szczególnym *szybkość kątowa nie zmienia się co do wielkości*.

Wektor  $\omega$  tworzy z osią  $z$  kąt  $\arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$ . Kąt ten jest stały, gdyż  $\omega_z$  i  $\omega_x$  są stałe. Z tego wynika, że prosta  $z$  jest osią stożka ruchomego osi chwilowych, i że stożek ten jest kołowy.

Wektor  $H$  tworzy z osią  $z$  kąt  $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z}$ , a kąt pomiędzy wektorami  $H$  i  $\omega$  wynosi  $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z} - \arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$ . Kąt ten jest także stały, a ponieważ linja wektora  $H$  zajmuje niezmiennie położenie w przestrzeni, przeto jest ona osią stożka stałego osi chwilowych, i stożek ten jest również kołowy.

Sprawa więc w rozważanym przypadku jest szczególnie prosta. Ruchomy stożek kołowy, którego osią jest prosta  $z$ , toczy się po również kołowym stożku stałym, którego osią jest linja wektora  $H$ . W par. 41 nazwaliśmy ruch taki precesją.

Przypuśćmy, że  $z$  jest osią najmniejszego momentu. W takim razie  $\frac{A}{C} > 1$ , i  $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z} > \arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$ , a zatem  $\omega$  leży pomiędzy  $H$  i  $z$ , i stożek ruchomy toczy się zewnętrzną stroną po stożku stałym.

Przypadek ten wyobraża fig. 87, na której stożek bardziej ostry należy uważać za stały. Jeżeli  $z$  jest osią największego momentu, to  $H$  leży pomiędzy  $z$  i  $\omega$ , i stożek ruchomy obejmuje stożek stały, stykając się z nim stroną wewnętrzną. Przypadek taki widzimy na fig. 88, gdzie znowu stożek ostry ma być stałym.

Jeżeli ciało obraca się około prostej  $z$ , to na tej prostej leży również wektor  $H$ , i oś obrotu jest stała. Dajmy w tym razie wektorowi  $H$  mały przyrost geometryczny. Odchyli się on cokolwiek od osi  $z$  i powstanie mała składowa  $H_x$  na osi  $x$ . Skutkiem tego powstanie także na tej osi mała składowa  $\omega_x = \frac{H_x}{A}$  wektora  $\omega$ , a zatem wektor ten utworzy mały kąt z osią  $z$ , który pozostanie już nadal bez zmiany. Z tego widać, że ruch zmieni się w małym stopniu, i można uważać ruch około osi  $z$  za trwały.

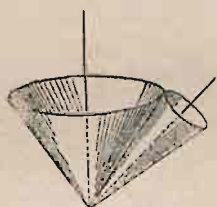


Fig. 87.

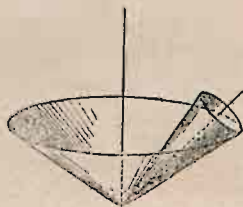


Fig. 88.

Przypuśćmy teraz, że ciało obraca się około prostej  $x$ , prostopadłej do  $z$ . I w tym razie wektor  $H$  leży na osi obrotu, która nie zmienia się z biegiem czasu, ale ruch taki jest nie-trwały. Istotnie dajmy wektorowi  $H$  przyrost dowolnie mały. Jeżeli tylko wektor ten wyjdzie z płaszczyzny równych momentów, to osią stożka ruchomego stanie się prosta  $z$ , i oś chwilowa zacznie wędrować *w ciele*, odchylając się coraz bardziej od położenia pierwotnego. Stożek ruchomy będzie w tym razie bardzo rozwarty, a stożek stały bardzo ostry. Ośią tego drugiego jest wektor  $H$ , który zmienił bardzo mało położenie w przestrzeni, a zatem *w przestrzeni* oś obrotu będzie zmieniała położenie bardzo mało.

Rozważania powyższe wyjaśniają znany fakt, że szybki ruch obrotowy do pewnego stopnia utrzuca położenie osi obrotu w przestrzeni.



Wyobraźmy sobie bryłę obrotu, której środek ciężkości  $O$  jest unieruchomiony. Możemy uważać, że żadne siły na nią nie działają, gdyż moment siły ciężenia względem  $O$  jest zerem. Nadajmy takiemu ciału bardzo szybki ruch obrotowy około osi symetrii; skutkiem tego powstanie bardzo duży wektor  $H$  na tejże osi.

Wymierzmy bryle uderzenie, skierowane np. prostopadłe do osi symetrii, i niechaj  $h$  oznacza moment impulsu względem  $O$ . Oczywiście wektor  $H$  otrzyma przyrost geometryczny  $h$  i odchyli się od dotychczasowego położenia o  $\arctan \frac{h}{H}$ . Ponieważ  $H$  było duże, przeto kąt ten jest mały, a więc wektor  $H$  zmieni nieznacznie położenie w przestrzeni. W dalszym ciągu oś symetrii będzie tworzyła z tym wektorem mały kąt stały, zataczając w przestrzeni stożek bardzo ostry. Będzie się wydawało, że bryła i dalej wiruje około nieruchomej osi symetrii.

Oś symetrii tem mniej zmienia położenie pod działaniem uderzeń, im większy jest wektor  $H$ , lub im większa jest szybkość kątowa bryły. Gdyby szybkość początkowa była mała, to nawet słabe uderzenie odchyliłoby znacznie wektor  $H$  od osi symetrii, a zatem ta oś zmieniałaby bardzo znacznie położenie w przestrzeni, i dalszy ruch ciała byłby na pozór zupełnie nieregularny.

Przypuśćmy wreszcie, że  $A = B = C$ . W takim razie ciało jest kuliste; znaczy to, że momenty bezwładności jego względem wszystkich prostych, przechodzących przez  $O$ , są równe, i każdą z nich można uważać za oś główną.

Gdy wprowadzimy w ruch takie ciało, to w każdym razie wektory  $H$  i  $\omega$  znajdą się na jednej prostej, a zatem oś obrotu nie będzie zmieniała położenia ani w ciele, ani w przestrzeni. Ruch ten jest oczywiście trwały.

Prz. 1. Cienka jednorodna sztaba może poruszać się swobodnie około swego środka. Wprawiamy ją w ruch około osi, tworzącej z nią kąt dowolny. Dowieść, że sztaba, pozostawiona nadal samej sobie, będzie zataczała w przestrzeni płaszczyznę.

Prz. 2. Prosty stożek kołowy, którego wysokość  $= h$ , a kąt wierzchołkowy ma  $60^\circ$ , może się swobodnie obracać około swego środka ciężkości. Jaki będzie tor wierzchołka, gdy wprowadzimy taki stożek w ruch około osi, tworzącej z jego osią kąt  $\alpha$ ? Odp. Kolo o promieniu  $\frac{21 h \sin \alpha}{4 \sqrt{49 + 15 \cos^2 \alpha}}$ .

Prz. 3. Okrągłej tarczy, której środek jest nieruchomy, nadano szybkość kątową  $\omega$  około osi, tworzącej z płaszczyzną tarczy kąt  $\alpha$ . Po jakim czasie tarcza powróci po położenia pierwotnego? Odp.  $\frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}$ .

Prz. 4. Sześcian obraca się około jednego ze swych wierzchołków, i żadne siły zewnętrzne nań nie działają. Niechaj  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  oznaczają składowe szybkości kątowej w kierunkach krawędzi, przechodzących przez środek ruchu; okazać, że sumy  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  i  $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$  są stałe.

**131. Równania Eulera.** Niechaj znowu punkt  $O$  ciała sztywnego będzie nieruchomy, ale przypuścimy teraz, że na ciało działają siły  $P_1, P_2, \dots$ . Jeżeli te siły sprowadzają się do jednej wypadkowej, przechodzącej wciąż przez  $O$ , czyli jeżeli suma geometryczna ich momentów względem  $O$  jest stale zerem, to nie wytwarzają one żadnych przyrostów wektora  $H$ ; wektor ten nie zmienia się ani co do kierunku ani co do wielkości, a zatem ruch ciała całkowicie odpowiada teorii, wyłożonej w par. 126 i następnych. Od sił  $P_1, P_2, \dots$  zależy jedynie reakcja w punkcie  $O$ , lecz na ruch ciała nie wywierają one żadnego wpływu.

W przypadku ogólnym, gdy suma momentów sił  $P_1, P_2, \dots$  względem  $O$  nie jest zerem, badanie ruchu ciała jest wogóle trudniejsze. Często bywają tu użyteczne tak zw. *dynamiczne równania Eulera*, które właśnie mamy teraz poznać.

Niech  $A, B, C$  oznaczają, jak poprzednio, główne momenty bezwładności względem punktu  $O$ ; osi główne oznaczmy tym razem przez  $a, b, c$ . Oznaczmy dalej te proste przestrzeni, na których w chwili  $t$  przypadają osi  $a, b, c$ , odpowiednio przez  $x, y, z$ .

Rzuty wektora  $H$  na osi główne będziemy oznaczali przez  $H_a, H_b, H_c$ , a na  $x, y, z$  przez  $H_x, H_y, H_z$ . W chwili  $t$  pierwsze nie różnią się od drugich ale już w chwili następnej, gdy osi  $a, b, c$  zajmą nowe położenia, zaznaczy się różnica zarówno co do wielkości, jak i kierunku.

W analogiczny sposób będziemy oznaczali rzuty wektora  $\omega$ . Pragniemy wyrazić przyrosty  $dH_x, dH_y, dH_z$ , które w czasie  $dt$  otrzymają składowe  $H_x, H_y, H_z$  w funkcjach  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ .

$H_a, H_b, H_c$  są składowymi wektora  $H$ , a zatem  $H_x$  jest w każdej chwili równe sumie rzutów tych składowych na prostą  $x$ . Z tego wynika bezpośrednio, że  $dH_x$  będzie równe sumie rzutów przyrostów, które w czasie  $dt$  otrzymają owe składowe.

Składowe  $H_a, H_b, H_c$  są to wektory ruchome, takie właśnie, jakie rozważaliśmy w par. 51 i 52. W czasie  $dt$  każdy z nich

otrzyma pewien przyrost geometryczny, który rozłożymy zaraz na dwie składowe, a mianowicie na przyrost styczny i przyrost normalny. Pierwszy z nich, jak wiemy ze wzmiankowanych paragrafów, posiada kierunek wektora ruchomego, a drugi jest doń prostopadły.

Przyrosty styczne wynoszą  $dH_a$ ,  $dH_b$ ,  $dH_c$ . Rzut pierwszego na oś  $x$  jest równy  $dH_a$ , rzuty dwóch pozostałych są zerami. Rzut przyrostu normalnego składowej  $H_a$  na oś  $x$  jest także zerem, potrzeba więc jeszcze tylko wyznaczyć rzuty przyrostów normalnych składowych  $H_b$  i  $H_c$ .

Oś  $b$  obróci się w czasie  $dt$  o kąt  $\omega_a dt$  około osi  $a$  i o kąt  $\omega_c dt$  około osi  $c$ . Stosownie do tego przyrost normalny wektora  $H_b$  będzie miał dwie składowe, a mianowicie składową  $H_b \omega_a dt$ , położoną w płaszczyźnie  $bc$  lub  $yz$ , oraz składową  $H_b \omega_c dt$ , położoną w płaszczyźnie  $ab$  lub  $xy$ . Rzut pierwszej na oś  $x$  jest oczywiście zerem, druga jest równoległa do  $x$ , ale zwrócona w stronę ujemną, a zatem rzut jej  $= -H_b \omega_c dt$ .

Prosta  $c$  obróci się o kąt  $\omega_a dt$  około  $a$  i o kąt  $\omega_b dt$  około  $b$ , a zatem składowe przyrostu normalnego wektora  $H_c$  będą  $H_c \omega_a dt$  i  $H_c \omega_b dt$ . Pierwsza leży w płaszczyźnie  $yz$ , i rzut jej na oś  $x$  jest zerem, druga leży w płaszczyźnie  $zx$ , i rzut jej jest równy  $+H_c \omega_b dt$ .

Wypada więc, że

$$dH_x = dH_a - H_b \omega_c dt + H_c \omega_b dt.$$

Lecz  $H_a = A\omega_a$ , a zatem  $dH_a = A d\omega_a$ ; dalej  $H_b = B\omega_b$  i  $H_c = C\omega_c$ . Wstawiając to do wyrażenia powyższego, otrzymamy

$$dH_x = A d\omega_a - (B - C) \omega_b \omega_c dt \quad (1).$$

Oznaczamy przez  $L$ ,  $M$ ,  $N$  odpowiednio sumy momentów sił  $P_1$ ,  $P_2$ ... względem osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . W takim razie  $dH_x = L dt$ , a zatem  $A d\omega_a - (B - C) \omega_b \omega_c dt = L dt$ . Z tego oraz z dwóch równań analogicznych otrzymamy

$$A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C) \omega_b \omega_c = L,$$

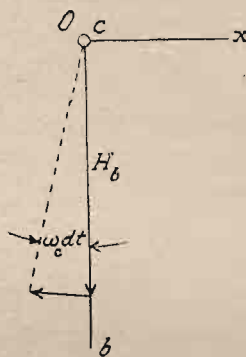


Fig. 89.

$$B \frac{d\omega_b}{dt} - (C - A)\omega_c\omega_a = M,$$

$$C \frac{d\omega_c}{dt} - (A - B)\omega_a\omega_b = N.$$

Są to właśnie równania Eulera.

**132. Inny dowód.** Sposób, w jaki otrzymaliśmy w paragrafie poprzedzającym równania Eulera, jest bardzo prosty. Pozwala on nawet przy niewielkiej wyobraźni geometrycznej przypomnieć je sobie odrazu bez żadnych rachunków. Dobrze będzie jednak poznać jeszcze inny sposób, prawie równie prosty; przyczyni się to do lepszego zrozumienia rzeczy.

Zachowamy wszystkie oznaczenia poprzednie i jeszcze oznaczymy przez  $Q$  koniec wektora  $H$ . Współrzędne tego punktu w układzie  $a, b, c$  będą  $H_a, H_b, H_c$ , a w układzie  $x, y, z$   $H_x, H_y, H_z$ , jeżeli współczynnik proporcjonalności jest równy jednostce. W czasie  $t$  współrzędne te są odpowiednio równe, jak już zaznaczyliśmy w par. poprzedzającym.

Wektor  $H$  zmienia się z czasem zarówno co do wielkości, jak i kierunku, a zatem koniec jego  $Q$  jest ruchomy. Szybkość (bezwzględna) punktu  $Q$  posiada dwie składowe, a mianowicie szybkość  $w$  względem ciała, czyli względem układu  $a, b, c$ , i szybkość unoszenia  $u$ , t. j. szybkość tego punktu ciała, w którym w chwili  $t$  przypada punkt  $Q$ . Wyznamy rzut szybkości bezwzględnej na oś  $x$ , czyli  $\frac{dH_x}{dt}$ .

Oczywiście rzut ten jest równy sumie rzutów składowych  $w$  i  $u$ , czyli

$$\frac{dH_x}{dt} = w_x + u_x \quad (1).$$

W chwili  $t$  mamy  $w_x = w_a = \frac{dH_a}{dt} = A \frac{d\omega_a}{dt}$ ;  $u_x$  znajdziemy przy pomocy wzorów, które poznaliśmy w par. 47. Mianowicie

$$u_x = \omega_y H_z - \omega_z H_y.$$

Lecz  $\omega_y = \omega_b$ ,  $\omega_z = \omega_c$ ,  $H_z = H_c = C\omega_c$ , i wreszcie  $H_y = H_b = H\omega_b$  a zatem

$$u_x = (C - B)\omega_b\omega_c.$$



Wprowadzając to do (1), otrzymamy

$$\frac{dH_x}{dt} = A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C)\omega_b\omega_c,$$

a ponieważ z drugiej strony  $\frac{dH_x}{dt} = \frac{Ldt}{dt}$ , przeto wypadnie, jak poprzednio

$$A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C)\omega_b\omega_c = L.$$

Równania Eulera ściągaają się do osi nieruchomych, ale do coraz innych, a mianowicie w każdej chwili do tych, na których przypadają wówczas osi główne  $O$ , a zatem można uważać, że równania te dotyczą osi głównych, t. j. prostych, należących do ciała i poruszających się wraz z niem.

Prz. 1. Okazać, że równania (1) i (2) par. 126 wynikają z równań Eulera.

W przypadku, gdy na ciało siły nie działają,  $L = M = N = 0$ . Mnożąc równania Eulera odpowiednio przez  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_c$  i dodając, otrzymamy

$$A\omega_a d\omega_a + B\omega_b d\omega_b + C\omega_c d\omega_c = 0,$$

a mnożąc przez  $A\omega_a$ ,  $B\omega_b$ ,  $C\omega_c$  i dodając, otrzymamy

$$A^2\omega_a d\omega_a + B^2\omega_b d\omega_b + C^2\omega_c d\omega_c = 0.$$

Całki tych równań są równaniami żadanemi.

Prz. 2. Jeden punkt ciała jest nieruchomy; przykładamy do tego ciała taką parę, aby obracało się ono ze stałą szybkością kątową około jego pewnej prostej. Wyznaczyć te proste, którym odpowiadają pary o momentach największych, czyli proste największego momentu.

Składowe momentu w kierunkach osi głównych będą:

$$L = (C - B)\omega^2 \cos \beta \cos \gamma, \quad M = (A - C)\omega^2 \cos \gamma \cos \alpha, \quad N = (B - A)\omega^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  oznaczają stałe kąty, które wektor  $\omega$  tworzy z osiami głównymi punktu  $O$ . Chodzi o to, przy jakich wartościach tych kątów  $L^2 + M^2 + N^2$  osiąga maksimum, przyczem

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1).$$

Różniczkując  $\omega^4 [(C - B)^2 \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + (A - C)^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha + (B - A)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta] - \lambda (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1)$  względem  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , otrzymamy

$$[(A - C)^2 \cos^2 \gamma + (B - A)^2 \cos^2 \beta + \lambda] \sin 2\alpha = 0 \quad (2),$$

$$[(B - A)^2 \cos^2 \alpha + (C - B)^2 \cos^2 \gamma + \lambda] \sin 2\beta = 0 \quad (3),$$

$$[(C - B)^2 \cos^2 \beta + (A - C)^2 \cos^2 \alpha + \lambda] \sin 2\gamma = 0 \quad (4).$$

Zakładając  $\sin 2\gamma = 0$ , znajdziemy, że  $\gamma = 0$  lub  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ; pierwszej wartości od-

powiada oczywiście minimum, a więc drugiej maksimum. Dla  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  znajdziemy z (2), (3) i (1), że  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  lub  $\frac{3\pi}{4}$ ; znaczy to, że dwie szukane proste leżą w płaszczyźnie  $ab$  i są dwusiecznymi kąta pomiędzy osiami  $a$  i  $b$ . Dwie inne pary prostych największego momentu leżą w płaszczyznach  $bc$  i  $ca$ .

Wyznaczyć jeszcze odpowiednie momenty co do wielkości i kierunku.

Prz. 3. Punkt  $O$  ciała jest nieruchomy, i żadne siły z wyjątkiem reakcyj nie działają. Początkowo wektor  $\omega$  leżał na przecięciu jednej z płaszczyzn granicznych i płaszczyzny  $zx$ . Wyznaczyć  $\omega$  w funkcji  $t$ .

Wyznaczamy naprzód  $\omega_y$  w funkcji  $t$ . Według drugiego równania Eulera będzie

$$B \frac{d\omega_y}{dt} = - (A - C) \omega_z \omega_x \quad (2).$$

Dalej z (3) i (5) w par. 126, uwzględniając  $H^2 = BT$ , otrzymamy

$$C(A-B)\omega_z^2 = (A-B)T - B(A-B)\omega_y^2,$$

$$A(C-A)\omega_x^2 = (C-B)T - B(C-B)\omega_y^2.$$

Zakładamy  $T = B\omega_1^2$ . Znaczenie stałej  $\omega_1$  jest jasne; taką wartość przybierze szybkość kątowa, gdy osią obrotu stanie się prosta  $y$ . Przy pomocy tego związku z dwóch równań ostatnich otrzymamy

$$\omega_z^2 \omega_x^2 = \frac{B^2 n^2 (\omega_1^2 - \omega_y^2)^2}{(A-C)^2}$$

gdzie  $n^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC}$ . Przyjmiemy, że początkowo  $\omega$  leży w tej ćwiartce płaszczyzny  $zx$ , w której współrzędne  $z$  i  $x$  są dodatnie. W takim razie  $\omega_z$ ,  $\omega_x$ , a więc i  $\omega_z \omega_x$  muszą być dodatnie, i

$$\omega_z \omega_x = \frac{Bn(\omega_1^2 - \omega_y^2)}{A-C}.$$

Wprowadzając to do (2), znajdziemy

$$\frac{d\omega_y}{dt} = -n(\omega_1^2 - \omega_y^2),$$

skąd 
$$\omega_y = - \frac{\omega_1 \left( e^{n\omega_1 t} - e^{-n\omega_1 t} \right)}{e^{n\omega_1 t} + e^{-n\omega_1 t}}.$$

Z tego równania wynika, że  $\omega_y$  zbliża się asymptotycznie do  $-\omega_1$ . Jest to zgodne z prz. par. 129, według którego oś chwilowa zbliża się asymptotycznie do osi  $y$ .

Znajdziemy już teraz łatwo, że  $\omega^2 = \omega_1^2 + n^2(\omega_1^2 - \omega_y^2)$ ; gdy  $\omega_y$  zbliża się do  $\omega_1$ , to i  $\omega$  zbliża się do  $\omega_1$ .

Prz. 4. Ciało obraca się około punktu nieruchomego pod działaniem sił jakichkolwiek. Dowieść, że  $\frac{dT}{dt} = N\Omega$ , gdzie  $T$  oznacza siłę żywą,  $N$  sumę momentów sił względem osi chwilowej i  $\Omega$  szybkość kątową.

Prz. 5. Ciało jest w ruchu kulistym około punktu  $O$  i pozostaje pod działaniem sił, które w każdej chwili wywołałyby ruch około osi prostopadłej do ówczesnej szybkości kątowej, gdyby wówczas ciało było w spokoju. Dowieść, że w tych warunkach szybkość kątowa pozostanie stałą co do wielkości tylko w takim razie, jeżeli momenty bezwładności względem dwóch osi głównych punktu  $O$  są równe.

Z przytoczonych okoliczności wynika, że

$$\frac{L\omega_a}{A} + \frac{M\omega_b}{B} + \frac{N\omega_c}{C} = 0.$$

Przy pomocy tego związku otrzymamy z równań Eulera

$$ABC \cdot \frac{d(\omega^2)}{dt} = 2(A-B)(B-C)(A-C).$$

Prz. 6. Prostopadłościan, posiadający krawędzie  $2a$ ,  $2a$ ,  $2b$ , obraca się około swego środka; działa nań jedynie siła ciężenia wraz z reakcją, a składowa szybkości kątowej w kierunku osi symetrii  $= \omega_1$ . Dowieść, że szybkość kątowa około każdej z pozostałych osi głównych zmienia się okresowo, i wyznaczyć długość okresu. Odp.  $\frac{2\pi(b^2 + a^2)}{\omega_1(b^2 - a^2)}$ .

Prz. 7. Płyta w kształcie jednej pętlicy lemniskaty może się poruszać około punktu węzłowego, i żadne siły na nią nie działają. Płyta otrzymała w pierwszej chwili szybkość kątową około jednej ze stycznych w punkcie węzłowym; wyznaczyć stosunek największej szybkości kątowej do najmniejszej.

Odp.  $\sqrt{\frac{3\pi+4}{3\pi}}$ .

Oznaczmy przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  osi główne środka obrotu i dajmy na to, że pierwsza przechodzi przez pole płyty, a trzecia jest prostopadła do jej płaszczyzny. Z dwóch równań Eulera wynika, że  $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2$ , gdzie  $\omega_0$  oznacza szybkość początkową. Zatem  $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_z^2$ , i  $\omega$  osiąga maksimum i minimum jednocześnie z  $\omega_z$ . Biorąc pod uwagę trzecie równanie Eulera oraz równanie siły żywej, dojdziemy łatwo, że  $\omega_z$  osiąga maksimum, gdy  $\omega_y = 0$ .

Prz. 8. Na ciało sztywne, będące w ruchu kulistym, działa taka para sił, że kwadrat momentu ilości ruchu względem środka jest proporcjonalny do siły żywej. Dowieść, że płaszczyzna, zawierająca wektory  $H$  i  $\omega$ , jest prostopadła do płaszczyzny, zawierającej pierwszy z nich oraz moment pary.

Z równań (1) i (2) w par. 126 oraz z równań Eulera otrzymamy

$$LH_x + MH_y + NH_z - D(L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z) = 0.$$

Oznaczmy przez  $\vartheta$  i  $\psi$  kąty, które moment pary tworzy z  $H$  i  $\omega$ , a przez  $\varphi$  kąt pomiędzy  $H$  i  $\omega$ . Wiadomo, że  $\omega \cos \varphi = \frac{T}{H}$  (par. 126, prz. 2.). Stąd i z poprzedniego równania wynika  $\cos \vartheta \cos \varphi = \cos \psi$ . Związek ten jest dowodem wypowiedzianego twierdzenia.

Prz. 9. Ciało porusza się około nieruchomego punktu  $O$ . Momenty bezwładności względem osi głównych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tego punktu wynoszą  $A$ ,  $A$ ,  $C$ , i w kierunku osi  $z$  działa wciąż para o stałym momencie  $N$ . W pierwszej chwili

ciało miało szybkość kątową  $\omega_0$  około osi  $y$ . Wyznaczyć stożek ruchomy osi chwilowych. Odp.  $\frac{x}{y} = \tan \frac{(A-B)C\omega_0^2}{2AN} \frac{z^2}{x^2+y^2}$ .

Z dwóch równań Eulera dojdziemy, że  $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2$ , a z trzeciego, że  $C\omega_z = Nt$ ; następnie otrzymamy  $\omega_x, \omega_y$  w funkcjach  $t$ . Należy zachować jednoznaczność równań.

Prz. 10. Punkt  $O$  ciała sztywnego jest nieruchomy, a momenty bezwładności względem jego osi głównych  $x, y, z$  wynoszą odpowiednio  $A, A$  i  $C$ . Ciało otrzymało szybkość kątową około osi, tworzącej z osią  $z$  kąt  $\gamma_0$ , a dalej działa na nie para opóźniająca (np. opór powietrza), której moment jest skierowany zawsze według osi chwilowej i proporcjonalny do szybkości kątowej (współcz. proporcjonalności  $= k$ ). Jak zmienia się z czasem kąt  $\gamma$  pomiędzy osią

chwilową i osią  $z$ ? Odp.  $\tan \gamma = \tan \gamma_0 e^{\frac{kt(A-C)}{AC}}$ . Jeżeli  $A > C$ , to oś chwilowa odchyła się coraz bardziej od osi  $z$ , zbliżając się asymptotycznie do płaszczyzny równych momentów. Jeżeli  $A < C$ , to oś chwilowa zbliża się asymptotycznie do osi  $z$ . Jeżeli wreszcie  $A = C$ , to kąt pomiędzy temi osiami jest stały.

Prz. 11. Punkt  $O$  cienkiej płyty jest nieruchomy; momenty bezwładności względem osi głównych tego punktu, położonych w płaszczyźnie płyty, są równe  $A$  i  $B$ . Z nich drugi jest większy od pierwszego. Na płytę siły zewnętrzne nie działają. Nadano jej szybkość kątową około osi, położonej w płaszczyźnie płyty; mom. bezwł. względem tej osi jest równy  $I$ . Wyznaczyć stosunek pomiędzy największą i najmniejszą szybkością kątową płyty. Odp.  $\sqrt{\frac{B+I}{A+I}}$ .

Szybkość kątową osiąga maks. lub min., jeżeli  $\frac{d(\omega^2)}{dt} = \omega_a \frac{d\omega_a}{dt} + \omega_b \frac{d\omega_b}{dt} + \omega_c \frac{d\omega_c}{dt} = 0$ , a z równań Eulera wynika, że to jest możliwe wtedy, gdy  $\omega_a = 0$ , lub  $\omega_b = 0$ , lub  $\omega_c = 0$ . Lecz wektor  $\omega$  nie może się znaleźć na płaszczyźnie  $bc$ , bo do tego musiałby przejść przez płaszczyznę graniczną, a zatem wypadek pierwszy jest niemożliwy.

**133. Precesja regularna.** Na fig. 90 prosta  $OC$  wyobraża oś symetrii jednorodnej bryły obrotu, a zarazem oś materialną, wystającą z tej bryły w obydwóch końcach. Koniec dolny osi jest osadzony w łożysku kulistym nieruchomem  $O$ , a koniec górny w łożysku ruchomem cylindrycznem  $C$ . To ostatnie łączy się za pomocą sztywnego lekkiego ścięgna  $CD$  z łożyskiem  $D$ , nasadzonym na nieruchomą oś pionową  $OD$ , przechodzącą przez łożysko  $O$ . Ścięgno to jest prostopadłe do  $OC$ . Przy takim urządzeniu ciało może obracać się około swej osi  $OC$  i jednocześnie wraz z ostatnią około pionu  $OD$ .

Przypuśćmy, że środkiem ciężkości ciała jest punkt  $S$ , i że ciężar jego jest równy  $Q$ . Moment bezwładności względem osi  $OC$



oznaczymy przez  $C$ , a względem prostych, poprowadzonych przez  $O$  prostopadle do  $OC$  przez  $A$ . Prócz tego niechaj będzie kąt  $COD = \vartheta$ ,  $OS = a$  i  $OC = b$ .

Nadajmy teraz ciału ruch obrotowy około  $OC$  i około  $OD$ ; pragniemy zbadać reakcję  $R$ , którą łożysko  $D$  wywiera za pośrednictwem ścięgna na koniec  $C$  osi ciała.

Jest rzeczą prawie oczywistą, że szybkości kąto-  
we dwóch ruchów obrotowych, które posiada ciało, są stałe. Można to uzasadnić ściśle w sposób następujący.

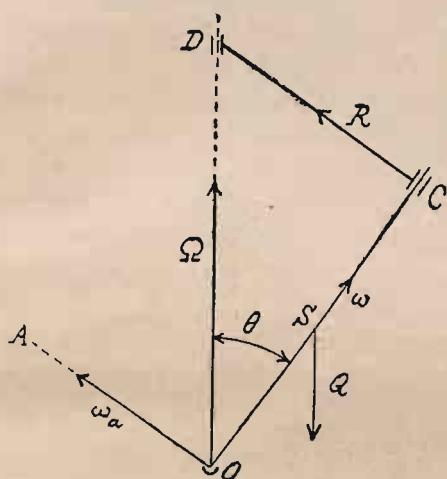


Fig. 90.

Całkowita szybkość kąto-  
wa ciała leży w płaszczyźnie  $OCD$ ; rozłożmy ją na składowe  $\omega$  i  $\omega_a$  w kierunkach prostych  $OC$  i  $OA$ , z których druga jest poprowadzona prostopadle do  $OC$  w płaszczyźnie  $OCD$ . W takim razie podwójna siła żywa ciała wyniesie

$$A\omega_a^2 + C\omega^2.$$

Jest to oczywiście wielkość stała. Z drugiej strony dowiedzimy łatwo, że  $\omega$ , t. j. rzut szybkości kąto-  
wej na oś  $OC$ , jest stały. W tym celu poprowadźmy w ciele przez  $O$  prostopadle do  $OC$  dwie proste, tworzące kąt prosty. Możemy je wraz z  $OC$  uważać za osi główne punktu  $O$  i zastosować do nich równania Eulera\*). W trzecim z nich, dotyczącym osi  $OC$ ,  $B=A$ , a prócz tego  $N=O$ ,

\*) Prosta  $OA$  jest ruchoma w ciele, a więc do niej równań tych stosować nie wolno.

gdyż momenty wszystkich sił, działających na ciało, względem  $OC$  są zerami. Wypada więc, że  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ ; z tego wynika, że  $\omega$ , a więc i  $\omega_a$ , są stałe.

Rozłóżmy teraz całkowitą szybkość kątową na składowe  $\Omega$  i  $\omega'$  w kierunkach  $OD$  i  $OC$ . Biorąc ich rzuty na  $OC$  i  $OA$ , znajdziemy, że

$$\omega = \omega' + \Omega \cos \vartheta, \quad \omega_a = \Omega \sin \vartheta.$$

Z tego wynika, że  $\Omega$  i  $\omega'$  są również stałe.

Moment ilości ruchu ciała względem  $O$ , czyli wektor  $H$ , posiada w kierunku  $OC$  składową  $C\omega$ , a w kierunku  $OA$  składową  $A\Omega \sin \vartheta$ . Składowe te w czasie  $dt$  obróćą się wraz z płaszczyzną  $OCD$  o kąt  $\Omega dt$  około pionu  $OD$ , a zatem pierwsza otrzyma przyrost  $C\omega \sin \vartheta \cdot \Omega dt$ , prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony w stronę widza, a druga przyrost  $A\Omega \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \Omega dt$  również prostopadły do tej płaszczyzny, lecz zwrócony w stronę odwrotną. Całkowity przyrost wektora  $H$ , mierzony w stronę widza, wyniesie  $\Omega(C\omega - A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta dt$ .

Przyrost ten wytwarzają momenty sił  $Q$  i  $R$  względem  $O$ . Moment wypadkowy, mierzony w stronę widza, wynosi  $Qa \sin \vartheta - Rb$ , a zatem

$$\Omega(C\omega - A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta dt = (Qa \sin \vartheta - Rb)dt$$

$$i \quad R = \frac{[Qa + \Omega(A\Omega \cos \vartheta - C\omega)] \sin \vartheta}{b} \quad (1).$$

Taka więc siła powinna działać w płaszczyźnie pionowej na punkcie  $C$  prostopadle do osi  $OC$ , aby wskazany ruch mógł trwać stale. Siła ta jest równa zeru w dwóch przypadkach, po pierwsze gdy  $\sin \vartheta = 0$ , czyli, gdy kąt  $\vartheta$  jest równy zeru lub  $\pi$ ; a więc w tym razie  $OC$  zajmuje położenie pionowe, a środek ciężkości może znajdować się wyżej lub niżej od  $O$ . Było to oczywiste z góry. Przypadek drugi jest daleko ciekawszy. Zachodzi on wówczas, gdy

$$Qa + \Omega(A\Omega \cos \vartheta - C\omega) = 0 \quad (2).$$

Ponieważ w tym razie ścięgno  $CD$  nie wywiera reakcji, możemy więc je usunąć, nie wywołując tem żadnej zmiany w ruchu ciała. Będzie ono w dalszym ciągu wirowało około osi symetrii  $OC$  z szybkością kątową  $\omega' = \omega - \Omega \cos \vartheta$  (względem płaszczyzny

$OCD$ ), obracając się jednocześnie z szybkością  $\Omega$  około osi pionowej  $OD$ . Taki ruch pp. Klein i Sommerfeld w swem obszernem dziele o bąku nazwali *precesją regularną*. W podobny sposób porusza się w stosownych warunkach bąk dziecienny lub żyroskop.

Precesja regularna należy do najdziwniejszych zjawisk mechanicznych. Wydaje się ona czemś paradoksalnem, zwłaszcza gdy kąt  $\vartheta$  jest bliski prostego. Wygląda tak, jak gdyby ciało nie podlegało działaniu siły ciężenia, bo nie spada, jakkolwiek jest podparte tylko w punkcie  $O$ , położonym zdala od środka ciężkości.

Gdy mamy dane  $\omega$  i  $\vartheta$ , to możemy z (2) wyznaczyć taką szybkość kątową  $\Omega$ , przy której zachodzi precesja regularna. Wypadnie

$$\Omega = \frac{C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4AQa \cos \vartheta}}{2A \cos \vartheta} \quad (3).$$

Widzimy, że istnieją dwie wartości szybkości  $\Omega$ , przy której w danych warunkach zachodzi precesja regularna. Jeżeli  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ , inaczej mówiąc, gdy środek ciężkości ciała znajduje się niżej od  $O$ , to wartości te są w każdym razie rzeczywiste. Jeżeli  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ , a więc środek ciężkości leży nad  $O$ , to  $\Omega$  jest rzeczywiste, jeżeli wyrażenie stojące pod znakiem pierwiastka jest większe od zera, czyli jeżeli

$$\omega^2 > \frac{A}{C} \cdot \frac{4 \cdot Qa \cos \vartheta}{C}.$$

Warunek ten wskazuje, że tem łatwiej jest doprowadzić ciało do precesji regularnej w położeniu, wskazanem na fig. 90, im mniejszy jest stosunek  $\frac{A}{C}$ . Ołówek, oparty na zaostrozonym końcu, mógłby poruszać się w ten sposób tylko przy bardzo, wielkiej szybkości kątowej około osi. W nim  $C$ , t. j. moment bezwładności względem osi, jest bardzo mały w stosunku do  $A$ .

Jeżeli  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ , to w (3) licznik jest dodatni, jakkolwiek znak położymy przed pierwiastkiem, a więc obydwie wartości  $\Omega$  są dodatnie; znaczy to, że obydwie szybkości kątowe  $\Omega$  i  $\omega$  podczas precesji regularnej mają kierunki takie, jak wskazują strzałki na fig. 90, albo obydwie odwrotne. Jeżeli  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ , to licznik w (3) jest

dodatni lub ujemny stosownie do tego, czy przed pierwiastkiem stoi plus czy minus, mianownik zaś jest w każdym razie ujemny; znaczy to, że dwie wartości  $\Omega$ , przy których zachodzi precesja regularna, posiadają kierunki odwrotne.

Jeżeli  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , to precesji regularnej odpowiada tylko jedna (skończona) wartość  $\Omega$ , a mianowicie

$$\Omega = \frac{Qa}{C\omega},$$

jak widać z (2).

Prz. 1. Kółko żyroskopu jest zrobione z cienkiego drutu; promień jego  $= r$  i ciężar  $= Q$ . Oś  $OS$  i szprychy są lekkie. Kółko wiruje około osi  $OS$  z szybkością kątową  $\omega$  i obraca się jednocześnie około pionu  $OD$ ; oś  $OS$  pozostaje poziomą, i odległość  $OS = a$ , gdzie  $S$  oznacza środek kółka. Wyznaczyć bezpośrednio, posługując się zasadą d'Alemberta, szybkość precesji  $\Omega$ , t. j. szybkość kątową około pionu  $OD$ .

Rozkładamy reakcję w  $O$  na składowe w kierunkach  $OS$  i  $OD$ . Pierwszą oznaczmy przez  $R$ , druga musi być równa  $Q$ , gdyż środek ciężkości  $S$  nie posiada przyspieszenia pionowego.

Podzielimy obwód kółka na elementy. Przyspieszenie każdego z nich ma trzy składowe: (1) przyspieszenie względne, (2) przyspieszenie unoszenia i (3) przyspieszenie Coriolisa. Odpowiednio do tego otrzymamy trzy układy sił odwrotnych do czynnych. Pierwszy równoważy się sam przez się, drugi posiada wypadkową na  $OS$ , która równoważy się z  $R$ , trzeci sprowadza się do pary, której moment jest prostopadły do płaszczyzny  $DOS$  i równy  $mr^2\Omega\omega$ , gdzie  $m$  oznacza masę kółka. Para ta musi się równoważyć z reakcją pionową i ciężarem, a zatem

$$mr^2 \cdot \Omega\omega = Qa.$$

Jest to zgodne z ostatnim wzorem w tekście, bo  $mr^2$  jest momentem bezwładności kółka względem osi  $OS$ . Ostatecznie  $\Omega = \frac{ag}{r^2\omega}$ .

Prz. 2. Okrągła tarcza o promieniu  $a$  pozostaje w ruchu precesji regularnej na zupełnie chropowatej płaszczyźnie poziomej. Płaszczyzna tarczy tworzy z pionem kąt  $\alpha$ , a szybkość kątowna precesji jest równa  $\Omega$ . Wyznaczyć promień koła, które zatacza środek tarczy. Odp.  $\frac{(4g - \Omega^2 a \cos \alpha) \tan \alpha}{6\Omega^2}$ .

Przypuśćmy, że osią precesji jest prosta  $OD$ ; oś tarczy  $OS$  przecina ją w punkcie  $O$ . Punkt ten jest nieruchomy, i przez niego przechodzi zawsze oś chwilowa, obecnie  $OB$ . Tworzymy wektor  $H$  względem tego punktu  $O$ . W tym celu rozkładamy całkowitą szybkość kątową według prostej  $OS$  oraz według równoległej przez  $O$  do średnicy  $BE$ . Znajdziemy, że pierwsza  $\omega = \frac{\Omega r}{a}$ , gdzie  $r$  oznacza promień szukany, a druga  $= \Omega \cos \alpha$ . Stosownie do tego wektor  $H$  posiada składowe  $C\omega$  i  $A\Omega \cos \alpha$ , gdzie  $C$  i  $A$  oznaczają odpowiednie momenty



bezwładności. Wektor ten w czasie  $dt$  otrzyma przyrost

$$\Omega(C\cos\alpha + A\Omega\sin\alpha\cos\alpha)dt.$$

Przyrost ten wytwarzają ciężar tarczy  $Q$  i reakcja w punkcie zetknięcia  $B$ . Ostatnią rozkładamy na składowe pionową i poziomą; pierwsza jest równa  $Q$ , bo środek ciężkości nie posiada przyspieszenia pionowego, a druga  $F$  nadaje temu środkowi przyspieszenie normalne, a więc jest równa  $M\Omega^2r$ , gdzie  $M$  oznacza masę tarczy.

Prz. 3. Jednorodny prosty stożek kołowy toczy się na płaszczyźnie poziomej doskonale chropowatej, i ruch jest jednostajny; promień podstawy stożka jest równy  $a$ , a kąt wierzchołkowy  $2\alpha$ . Ile co najmniej sekund trwa całkowity obrót stożka około pionu, przechodzącego przez wierzchołek? Odp.

$$2\pi\sqrt{\frac{3a(1+5\cos^2\alpha)\cos\alpha}{5g(4-3\cos^2\alpha)}}.$$

Precesja regularna odbywa się tu pod działaniem pary sił, z których jedna jest ciężarem stożka, a druga reakcją płaszczyzny. Punkt przyłożenia reakcji z góry nie da się wskazać, w każdym razie leży on na tworzącej, którą stożek w danej chwili dotyka płaszczyzny. Znajdziemy łatwo, że ruch jest najszybszy, gdy ramię owej pary jest największe.

Prz. 4. Chropowata tarcza pozioma może się obracać około osi pionowej. Na tarczy spoczywa prosty stożek kołowy z wierzchołkiem na jej osi. Zaczynamy obracać tarczę ze stałą szybkością kątową  $\omega$ . Dowieść (1), że stożek może z tarczy zaczerpnąć najwyżej  $\frac{AC\omega^2}{2D}$  siły żywej (w tem  $C$ ,  $A$  i  $D$  oznaczają

odpowiednio momenty bezwładności stożka względem osi, względem prostopadłej do osi przez wierzchołek i względem tworzącej), (2) że wówczas reakcja tarczy przechodzi przez środek ciężkości stożka. Prócz tego zbadać ruch w tym szczególnym przypadku, gdy  $C=A$ .

Prz. 5. Naczynie stożkowe, posiadające kąt wierzchołkowy  $\alpha$ , obraca się ze stałą szybkością kątową  $\Omega$  około pionowej tworzącej  $z$ . W naczyniu znajduje się kula o powierzchni chropowatej i promieniu  $a$ ; styka się ona stale z wewnętrzną powierzchnią stożka w punkcie  $C$ , położonym na tworzącej przeciwległej do  $z$ , a odległość tego punktu od wierzchołka stożka jest równa  $r$ . Wyznaczyć szybkość kątową, z którą kula obraca się około średnicy, przechodzącej przez  $C$ , względem płaszczyzny, przechodzącej przez  $C$  i  $z$ .

$$\text{Odp. } \frac{5[g - \Omega^2(r\sin\alpha - a\cos\alpha)\tan\alpha]}{2a\Omega}.$$

Prz. 6. Kulę jednorodną o promieniu  $a$  oparto na chropowatym drucie, wygiętym w formę koła o promieniu  $c$  i umocowanym w płaszczyźnie poziomej;

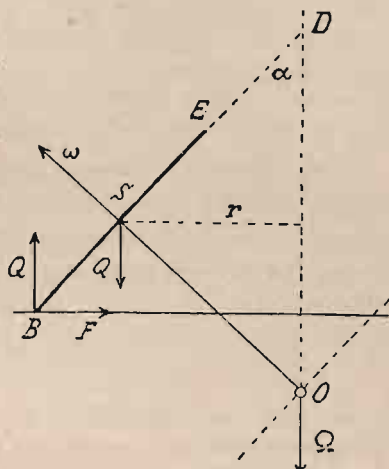


Fig. 91.

następnie nadano kuli impuls w kierunku poziomym, skutkiem czego obiega ona drut ze stałą szybkością kątową, i średnica, przechodząca przez punkt zetknięcia, tworzy z pionem kąt  $\alpha$ . Wyznaczyć tę szybkość kątową. Odp.  $\frac{5g \tan \alpha}{7c - 5a \sin \alpha}$ .

Prz. 7. Żyroskop, złożony z ciężkiego krążka, osadzonego na lekkiej osi, jest zawieszony na nici o długości  $a$ ; nić ta jest przyczepiona do osi w odległości  $h$  od środka ciężkości żyroskopu, a ramię bezwładności krążka względem osi jest równe  $k$ . Krążek wiruje z szybkością kątową  $\omega$  około osi, a oś pozostaje poziomą. Wyznaczyć kąt, który nić tworzy z pionem. Odp. Szukany kąt  $\alpha$  czyni zadość równaniu  $k^2 \omega^2 \tan \alpha = (a \sin \alpha \pm h) g h^2$ .

**134. Trwałość precesji regularnej.** Przypuśćmy, że w urządzeniu, wyobrażonem na fig. 90, ścięgno  $CD$  wydłuża się lub skraca, przyczem łożysko  $D$  powinno tak przesuwać się na pionie  $OD$ , aby ścięgno pozostawało prostopadłym do osi  $OC$ . Podczas tego wydłużania lub skracania oczywiście na koniec  $C$  osi ciała musiała działać prócz siły  $R$  jakaś nowa siła  $P$  w kierunku  $DC$  lub  $CD$ . Gdy już pożądana zmiana długości nastąpiła, usuńmy tę siłę  $P$ . Naturalnie zmienił się kąt  $\vartheta$ , a zatem zmieniła się i siła  $R$ . Zbadamy, czy  $R$  ze wzrostem kąta  $\vartheta$  wzrasta, czy maleje.

Naprzód zobaczmy, jak zmieniają się szybkościątowe  $\omega$  i  $\Omega$ , gdy  $\vartheta$  zmienia się w opisany sposób. Moment siły  $P$  względem osi  $OC$  jest zerem, a zatem dowiedzimy z łatwością przy pomocy trzeciego równania Eulera, jak w paragrafie poprzedzającym, że szybkość  $\omega$  pozostaje stałą.

Siła  $P$  działała wciąż w płaszczyźnie  $OCD$ , podobnie jak siły  $Q$  i  $R$ , a zatem moment jej względem  $O$  był poziomy, i wektor  $H$  względem  $O$  otrzymywał wciąż przyrosty poziome. Z tego wynika, że koniec tego wektora pozostaje stale w niezmienniej płaszczyźnie poziomej, a więc rzut jego  $H'$  na pion  $OD$  jest wielkością stałą.

Ponieważ składowe wektora  $H$  w kierunkach  $OC$  i  $OA$  wynoszą odpowiednio  $C\omega$  i  $A\Omega \sin \vartheta$ , otrzymamy przeto

$$C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta = H' \quad (1).$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy  $\vartheta$  i  $\Omega$ . Różniczkując je, otrzymamy

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{C\omega - 2A\Omega \cos \vartheta}{A \sin \vartheta} \quad (2).$$

Z drugiej strony z (1) w par. poprzedzającym mamy

$$Rb = (Qa - C\Omega\omega + A\Omega^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta \quad (3)$$

a stąd

$$b \frac{dR}{d\vartheta} = - (C\omega - 2A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta \frac{d\Omega}{d\vartheta} - A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \\ + (Qa - C\Omega\omega + A\Omega^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta.$$

Gdy wprowadzimy  $\frac{d\Omega}{d\vartheta}$  z (2) i uwzględnimy (3), to wypadnie

$$\frac{dR}{d\vartheta} = - \frac{(2A\Omega \cos \vartheta - C\omega)^2}{Ab} - \frac{A\Omega^2 \sin^2 \vartheta}{b} + \frac{R}{\tan \vartheta}.$$

Gdy zachodzi precesja regularna, to  $R = 0$  i

$$\frac{dR}{d\vartheta} = - \frac{(2A\Omega \cos \vartheta - C\omega)^2}{Ab} - \frac{A\Omega^2 \sin^2 \vartheta}{b}.$$

Widzimy, że przy tej wartości kąta  $\vartheta$ , przy której ciało posiada ruch precesji regularnej,  $\frac{dR}{d\vartheta}$  jest ujemne; znaczy to, że ze wzrostem kąta  $\vartheta$   $R$  się zmniejsza i odwrotnie.

Z rozważań powyższych wynika wniosek następujący. Przypuśćmy, że ściągna niema, i że ciało posiada ruch precesji regularnej. Wymierzmy w koniec osi  $C$  lekkie uderzenia skierowane do  $D$ . Skutkiem tego oś zbliży się cokolwiek do pionu, t. j. kąt  $\vartheta$  się zmniejszy. Poprzedniej wartości kąta  $\vartheta$  odpowiadała wartość zero reakcji  $R$ , nowej wartości odpowiada wartość większa, t. j. dodatnia. Znaczy to, że pragnąc utrwalić nowe położenie osi w płaszczyźnie  $OCD$ , musielibyśmy przyłożyć do  $C$  siłę skierowaną do  $D$ . Jeżeli pozostawimy ciało samemu sobie, to oś podąży do położenia pierwotnego, przy którym odbywała się precesja regularna.

Gdyby uderzenie nastąpiło w kierunku  $DC$ , to siła  $R$  przybrałaby wartość ujemną, a więc byłaby zwrócona od  $D$  do  $C$ , a oś pozostawiona samej sobie, podążyłaby do pionu  $OD$ , czyli znowu do położenia pierwotnego.

Ze względu na takie właściwości precesji regularnej mówi się zwykle, że jest to ruch trwały.

**135. Precesja pseudoregularna.** Usuńmy w urządzeniu, wyobrażonem na fig. 90, ściągno  $CD$ , ustawmy oś ciała  $OC$  pod kątem  $\vartheta_0$  do pionu, nadajmy następnie ciału szybkość kątową  $\omega$  około  $OC$ , skierowaną od  $O$  do  $C$ , jak wskazuje strzałka, i pozostawmy ciało samemu sobie. Pragniemy zbadać ruch dalszy.

Oprócz reakcji w  $O$  na ciało działa jedynie siła ciężenia  $Q$ . Z trzeciego równania Eulera wynika, jak wiemy, że rzut całkowitej szybkości kątowej na  $OC$  pozostanie i nadal równym  $\omega$ .

Moment ilości ruchu względem  $O$  może przybierać jedynie przyrosty poziome, a zatem rzut jego  $H'$  na pion  $OD$  będzie stale równy  $C\omega \cos \vartheta_0$ .

W pierwszej chwili wektor  $H$  posiada kierunek  $OC$ . Pod działaniem siły  $Q$  oś ta zacznie odchyłać się od pionu, i gdyby nie powstał jeszcze jakiś ruch inny, toby rzut  $H'$  się zmniejszał.  $H'$  zachowa wartość stałą tylko w takim razie, jeżeli jednocześnie z opadaniem  $OC$  powstanie na  $OA$  odpowiednia składowa wektora  $H$ , czyli jeżeli ciało zacznie się obracać około pionu  $OD$  z odpowiednią szybkością kątową  $\Omega$ ; szybkość ta będzie skierowana od  $O$  do  $D$ , jak wskazuje strzałka.

Gdy oś  $OC$  odchyli się od pionu o kąt  $\vartheta$ , to rzut  $H'$  będzie równy  $C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta$ , a zatem

$$C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta = C\omega \cos \vartheta_0 \quad (1).$$

Wówczas szybkość kątowa ciała będzie miała składowe  $\omega$ ,  $\Omega \sin \vartheta$  i  $\frac{d\vartheta}{dt}$  na prostych  $OC$ ,  $OA$  oraz na prostopadłej  $OB$  do płaszczyzny  $OCD$ , a więc siła żywa ciała wyniesie

$$\frac{1}{2} \left[ C\omega^2 + A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right],$$

gdy w pierwszej chwili wynosiła  $\frac{C\omega^2}{2}$ . Przyrost

$$\frac{1}{2} \left[ A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right]$$

jest równy pracy  $Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$  siły  $Q$ , zatem

$$A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = 2Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \quad (2).$$

Równania (1) i (2) określają ruch ciała; aby wytworzyć sobie wyobrażenie o tym ruchu, należy zbadać, jak zmieniają się szybkości kątowe  $\Omega$  i  $\frac{d\vartheta}{dt}$ , gdy wzrasta kąt  $\vartheta$ .

Z (1) otrzymamy  $\Omega = \frac{C\omega}{A} \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$ , a stąd

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{C\omega}{A} \frac{1 + \cos^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta_0 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta}$$



pisząc w liczniku  $\sin^2 \vartheta_0 + \cos^2 \vartheta_0$  zamiast 1, przekształcimy to na

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{C\omega}{A} \frac{\sin^2 \vartheta_0 + (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)^2}{\sin^3 \vartheta}$$

pochodna ta jest oczywiście dodatnia, a więc ze wzrostem kąta  $\vartheta$  szybkość kątowna  $\Omega$  wzrasta.

Aby zdać sobie sprawę z tego, jak zmienia się szybkość  $\frac{d\vartheta}{dt}$ , wyznaczmy naprzód skrajne położenia osi  $OC$  (fig. 90), czyli te wartości kąta  $\vartheta$ , przy których oś przestaje odchyłać się od pionu i zaczyna się zbliżać, lub odwrotnie. Oczywiście w takim położeniu osi  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ , a zatem z (2) wypada, że wówczas

$$A\Omega^2 \sin^2 \vartheta = 2Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \quad (3).$$

Rugując stąd i z (1) szybkość  $\Omega$ , otrzymamy

$$(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)[C^2 \omega^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) - 2AQa \sin^2 \vartheta] = 0.$$

Z tego równania wynika przedewszystkiem, że  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ , gdy  $\vartheta = \vartheta_0$ ,

t. j. w położeniu początkowym i wogóle wówczas, gdy oś tworzy z pionem kąt  $\vartheta_0$ . Aby otrzymać inne położenia skrajne, należy założyć, że drugi czynnik lewej strony jest zerem. Celem skrócenia rachunku założymy, że  $\cos \vartheta = u$ , a więc  $\sin^2 \vartheta = 1 - u^2$ , i że

$\frac{C^2 \omega^2}{2AQa} = 2n$ . Wypadnie wówczas

$$u^2 - 2nu + 2n \cos \vartheta_0 - 1 = 0 \quad (4).$$

Wyróżnik tego równania kwadratowego wynosi  $n^2 - 2n \cos \vartheta_0 + 1$ . Najmniejsza wartość jego wypada w tym razie, gdy  $\cos \vartheta_0 = 1$ , czyli gdy początkowo oś ciała miała położenie pionowe, lecz i wówczas jest on równy  $(n-1)^2$ , czyli dodatni. Wnioskujemy stąd, że obydwa pierwiastki równania (4) są rzeczywiste.

Dajmy niewiadomej  $u$  wartość  $-1$ , wówczas lewa strona równania przybierze wartość  $2n(1 + \cos \vartheta_0)$  oczywiście dodatnią. Następnie dajmy  $u$  wartość  $\cos \vartheta_0$ ; po lewej stronie wypadnie  $\cos^2 \vartheta_0 - 1$ , co jest znowu ujemne. Tak więc, gdy  $u$  wzrasta od  $-1$  do  $\cos \vartheta_0$ , to lewa strona zmienia znak, a więc równanie posiada pierwiastek, zawarty pomiędzy  $-1$  i  $\cos \vartheta_0$ ; innemi słowy szybkość kątowna  $\frac{d\vartheta}{dt}$  staje się zerem dla pewnej wartości  $\vartheta$ , zawartej pomiędzy  $\pi$  i  $\vartheta_0$ . Oznaczmy tę wartość przez  $\vartheta_1$ .

Przypuśćmy teraz, że  $u$  wzrasta dalej, poczynając od  $\cos\vartheta_0$ . Gdy  $u$  przybierze wartość  $+1$ , to lewa strona stanie się równą  $-2n(1 - \cos\vartheta_0)$ ; jest to ujemne, podobnie jak dla  $u = \cos\vartheta_0$ , a zatem pomiędzy  $\cos\vartheta_0$  i  $+1$  niema pierwiastka. Gdy  $u$  wzrasta w dalszym ciągu i przekroczy  $2n$ , to suma dwóch pierwszych wyrazów  $u^2 - 2nu$ , czyli  $u(u - 2n)$ , staje się dodatnią, i następnie z dalszym wzrostem  $u$  wzrasta nieograniczenie; musi więc ostatecznie cała lewa strona stać się dodatnią. Z tego wynika, że równanie posiada pierwiastek większy od 1; nie wchodzi on w rachubę, bo  $u$ , czyli  $\cos\vartheta$ , nie może być większe od 1.

Tak więc szybkość kątowna  $\frac{d\vartheta}{dt}$  staje się zerem dla dwóch położeń osi ciała, a mianowicie gdy ta oś tworzy z pionem kąty  $\vartheta_0$  i  $\vartheta_1$ . Widzieliśmy, że  $\cos\vartheta_1$  zawiera się pomiędzy  $-1$  i  $\cos\vartheta_0$ , jest więc mniejszy od  $\cos\vartheta_0$ , a zatem kąt  $\vartheta_1$  jest większy od  $\vartheta_0$ .

Możemy teraz zdać sobie sprawę z ruchu ciała. W tym celu wyobraźmy sobie kulę, zatoczoną z punktu  $O$  promieniem  $OC=b$ , obierzmy za biegun jej punkt najwyższy i przeprowadźmy na powierzchni dwa równoleżniki, których średnice widać z  $O$  odpowiednio pod kątami  $2\vartheta_0$  i  $2\vartheta_1$ ; pierwszy z nich leży oczywiście wyżej od drugiego. Otóż ruch punktu  $C$  odbywa się na powierzchni kuli pomiędzy temi równoleżnikami granicznymi. W każdej chwili szybkość punktu  $C$  daje się rozłożyć na dwie składowe; jedna  $v_p$  w kierunku południka, lub raczej w kierunku stycznej do tegoż, jest równa  $b \frac{d\vartheta}{dt}$ , druga  $v_r$  w kierunku równoleżnika wynosi  $b\Omega \sin\vartheta$ .

Punkt  $C$  wyrusza z pewnego położenia na górnym równoleżniku granicznym w kierunku południka. Szybkość kątowna  $\Omega$ , a zatem i składowa  $v_r$  szybkości liniowej punktu  $C$ , powstają dopiero skutkiem odchyłania się od pionu. W dalszym ciągu wzrastają obydwie składowe  $v_p$  i  $v_r$ , a więc punkt  $C$  odbiega coraz prędzej i coraz dalej od początkowego południka, jak również od górnego równoleżnika granicznego.

Podczas tego ruchu ku dolnemu równoleżnikowi granicznemu składowa  $v_r$  wzrasta wciąż, bo inaczej zmniejszałby się rzut  $H'$  wektora  $H$  na pion  $OD$ . Natomiast składowa  $v_p$  wraz z szybkością kątowną  $\frac{d\vartheta}{dt}$

wzrasta tylko do pewnego maksimum, następnie maleje i staje się zerem, gdy punkt  $C$  doszedł do dolnego równoleżnika granicznego. Wówczas punkt  $C$  posiada tylko składową  $v_r$  szybkości, a więc biegnie w kierunku równoleżnika.

Z rozważań tych wynika, że tor punktu  $C$  przecina górny równoleżnik graniczny pod kątem prostym i jest styczny do równoleżnika dolnego.

Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt, który oś ciała tworzy z pionem w chwili, gdy  $v_p$  lub  $\frac{d\vartheta}{dt}$  osiąga maksimum. Łatwo się domysleć, że kąt ten odpowiada precesji regularnej; znaczy to, że przy ówczesnej wartości  $\Omega$  zachodziłaby precesja regularna, gdyby nie istniała szybkość  $\frac{d\vartheta}{dt}$ . Można się o tem przekonać w sposób następujący.

Różniczkujemy (1) i (2) względem  $t$  i z otrzymanych równań rugujemy  $\frac{d\Omega}{dt}$ ; skracając następnie przez  $\sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$ , znajdziemy

$$C\Omega\omega - A\Omega^2 \cos\vartheta + A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Qa \quad (5).$$

Do tego równania moglibyśmy z łatwością dojść bezpośrednio. W tym celu należy tylko napisać, że przyrost elementarny wektora  $H$  jest równy momentowi popędu elementarnej siły  $Q$  względem punktu  $O$ .

Dajmy w (5) zmiennej  $\vartheta$  wartość  $\alpha$ : wówczas  $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0$ , gdyż przy tej wartości kąta  $\vartheta$  szybkość  $\frac{d\vartheta}{dt}$  osiąga maksimum, i wypadnie

$$\Omega(C\omega - A\Omega \cos\alpha) = Qa.$$

Taki właśnie warunek powinien być spełniony, aby zachodziła precesja regularna; przekonamy się o tem, gdy porównamy to równanie z (2) w par. 133.

Gdy punkt  $C$  znajdzie się na dolnym równoleżniku granicznym, to, jak widzieliśmy, porusza się wzdłuż tego równoleżnika. Ruch taki jednak nie może trwać dłużej, bo warunki precesji regularnej nie są tu spełnione. Punkt  $C$  przeto zaczyna podnosić się w górę, i ruch przechodzi przez wszystkie fazy, przez które przechodził poprzednio, w porządku odwrotnym. A więc  $v_r$  wciąż się zmniejsza, natomiast  $v_p$  wzrasta, dopóki  $C$  nie dojdzie do równoleżnika pre-

cesji regularnej, a potem  $v_p$  maleje i staje się zerem na górnym równoleżniku granicznym.

Fig. 92 wyobraża tor punktu  $C$ , widziany z góry. Taki ruch pp. Klein i Sommerfeld nazwali *precesją pseudoregularną*. Mówimy, że wywołuje ją siła  $Q$ . Jeżeli równoleżniki graniczne są zbliżone do siebie, to oko nie dostrzega prawie drobnych wahań osi w kierunku pionowym, i wygląda tak, jak gdyby siła  $Q$  wywoływała ruch w kierunku do niej prostopadłym.

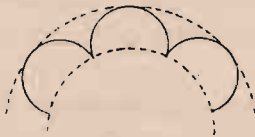


Fig. 92.

Jeżeli oś ciała pozostaje podczas precesji prawie poziomą, to mówi się, że wektor  $\omega$  goni moment siły  $Q$ . Słuszność tej reguły, która bywa nieraz użyteczna, można łatwo stwierdzić przy pomocy fig. 90.

Prz. 1. Ciało pozostaje w precesji pseudoregularnej stosownie do opisu, podanego w tym paragrafie. Wyznaczyć maksimum szybkości kątowej  $\Omega$ .  
Odp.  $\frac{2aQ}{C\omega}$ .

Prz. 2. Obręcz toczyła się wprost od nas na chropowatej płaszczyźnie poziomej i z jakiejś przyczyny pochyliła się cokolwiek na prawo. W którą stronę zboczy ona z linii prostej?

Prz. 3. Względem lotnika śmigło aeroplanu, umieszczone na przedzie, obraca się w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara. Jaki ruch wykona aeroplan w płaszczyźnie pionowej, gdy lotnik, pragnąc skrócić na lewo, zwróci ster w stosowną stronę?

Prz. 4. Oś  $OC$  bryły obrotu jest tak osadzona w punkcie  $O$ , że mogłaby się około niego obracać w każdym kierunku. Na końcu  $C$  oś ta posiada ucho, przez które przechodzi gładki pałak kołowy, umocowany w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez  $O$  (fig. 93). Tym sposobem oś  $OC$  może się poruszać tylko w tej płaszczyźnie. Ciężar ciała  $= Q$ , jego momenty bezwładności względem osi obrotu i względem prostopadłej do niej przez  $O$  są równe  $C$  i  $A$ , odległości środka ciężkości  $S$  i ucha  $C$  od  $O$  wynoszą  $a$  i  $b$  (temu jest także równy promień pałaka). Ustawiamy oś  $OC$  pod kątem  $\vartheta_0$  do pionu, nadajemy ciału szybkość kątową  $\omega$  około tejże i pozostawiamy je samemu sobie. Jaki będzie ruch dalszy, i jaką reakcję pałak będzie wywierał na ucho? Odp. Gdy oś utworzy z pionem kąt  $\vartheta$ ,

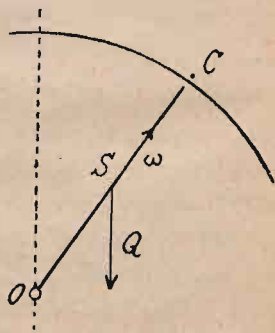


Fig. 93.

to reakcja wyniesie  $\frac{C\omega}{b} \sqrt{\frac{2Qa(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}{A}}$ .

Prz. 5. Puszczono bąk na zupełnie gładkiej płaszczyźnie poziomej. W pierwszej chwili oś ta była nieruchoma i pochylona. Okazać, że tor ostrza



leży pomiędzy dwoma okręgami współśrodkowemi, przecinając wewnętrzny pod kątem prostym i stykając się z zewnętrznym.

Prz. 6. Dwie jednakowe gładkie sztaby  $AO$  i  $OB$  każda o długości  $2a$  są połączone luźno z nieruchomym punktem  $O$ , a trzecia taka sama sztaba  $CD$  może przesuwac się po nich przy pomocy pierścieni, umocowanych w końcach  $C$ ,  $D$ . Ustawiamy wszystkie sztaby na prostej poziomej tak, aby pierścienie przypadały w środkach sztab  $AO$  i  $OB$ , a następnie nadajemy temu układowi szybkość kątową  $\omega_0$  około pionu. Jaka powinna być ta szybkość, aby sztaba  $CD$

nie zsunęła się z dwóch pozostałych. Odp. powinno być  $\omega_0^2 > \frac{2g}{a\sqrt{3}}$ .

Kąt  $\vartheta$ , który sztaby  $AO$  i  $OB$  tworzą z pionem, zmienia się w pewnych granicach, i znajdziemy, że jego wartość najmniejsza czyni zadość równaniu  $6a\omega_0^2 = \frac{g(1+2\sin\vartheta)(1+8\sin^2\vartheta)}{\sin 2\vartheta}$ . Aby sztaba  $CD$  się nie zsunęła, ten graniczny kąt  $\vartheta$  powinien być większy od  $30^\circ$ , a dla tej wartości  $\vartheta$  prawa strona powyższego równania jest funkcją wzrastającą. Z tego wynika warunek, podany w odpowiedzi.

Prz. 7. Ciało pozostaje w precesji pseudoregularnej, jak w tekście paragrafu niniejszego. Dowieść, że koniec szybkości kątowej (wypadkowej) zatacza w ciele krzywą płaską, a w przestrzeni nieruchomej krzywą sferyczną, t. j. położoną na kuli, której środek znajduje się na pionie  $OD$  (fig. 90). Można by te krzywe uważać za podstawy stożków osi chwilowych ruchomego i stałego.

Pierwsza część twierdzenia wynika wprost stąd, że  $\omega$  jest wielkością stałą. Aby dowieść część drugą obierzemy na pionie  $OD$  jakikolwiek punkt  $P$  w odległości  $p$  od  $O$ , mierzonej w górę; wyznaczmy odległość  $r$  końca szybkości kątowej od tego punktu  $P$ . Wypadnie

$$r^2 = (\omega \sin \vartheta - \Omega \sin \vartheta \cos \vartheta)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (\omega \cos \vartheta + \Omega \sin^2 \vartheta - p)^2,$$

a przy pomocy (1) i (2) przekształcimy to z łatwością na

$$Ar^2 = A\omega^2 + 2Qa\cos\vartheta_0 - 2pC\omega\cos\vartheta_0 + Ap^2 + 2[p\omega(C-A) - Qa]\cos\vartheta.$$

Odległość  $r$  jest stała, jeżeli  $p\omega(C-A) - Qa = 0$ , czyli jeżeli

$$p = \frac{Qa}{(C-A)\omega}.$$

Tym sposobem twierdzenie zostało dowiedzione, i wzór ostatni określa położenie środka kuli. Jeżeli  $C = A$ , czyli jeżeli bąk jest „kulisty“, to  $p = \infty$ , a więc krzywa jest płaska. Bezpośrednio wynika to z tej okoliczności, że w tym przypadku szczególnym szybkość kątowa leży na linii wektora  $H$  i wynosi  $\frac{H}{A}$ , a zatem rzut jej na pion jest stały.

Prz. 8. Mamy dwa bąki dla których wielkości  $Q$ ,  $a$  i  $A$  są jednakowe, zaś momenty bezwładności względem osi symetrii są odpowiednio równe  $C$  i  $C_1$ . Jak należy puścić te bąki, aby ich końce poruszały się zupełnie jednakowo. Odp. Należy ustawić osi pod jednakowemi kątami do pionu i nadać bąkom takie szybkości kątowe  $\omega$  i  $\omega_1$ , aby było  $C\omega = C_1\omega_1$ .

**136. Ruch kuli na płaszczyźnie poziomej.** Rozważymy tylko pewien przypadek szczególny; załóżmy mianowicie, że w chwili



przyrost  $\delta H = afgdt$  prostopadły do  $fg$ . Na naszej figurze moment siły  $fg$  jest zwrócony w lewo, i ten sam kierunek posiada przyrost  $\delta H$ . Składowa  $a\omega$  szybkości punktu najniższego\*) otrzyma przyrost prostopadły do  $\delta H$ , a więc skierowany według  $fg$ . Co do wielkości przyrost ten musi być w tym samym stosunku do  $\delta H$ , co  $a\omega$  do  $H$ , a zatem wynosi  $\frac{5\delta H}{2a} = \frac{5fgdt}{2}$ .

Szybkość wypadkowa  $v$  otrzyma w kierunku  $fg$  przyrosty  $fgdt$  i  $\frac{5fgdt}{2}$ , a więc jej przyrost całkowity, ujemny, wyniesie  $\frac{7fgdt}{2}$ . Z tego wynika, że szybkość tego punktu kuli, który zajmuje w każdej chwili położenie najniższe, posiada wciąż jeden i ten sam kierunek, a zmienia się jedynie co do wielkości, a mianowicie co  $dt$  sekund zmniejsza się o  $\frac{7fgdt}{2}$ ; innemi słowy koniec tej szybkości  $D$  zbliża się do  $A$  z szybkością  $\frac{7fg}{2}$ . Jeżeli początkowa szybkość najniższego punktu była równa  $v_0$ , to w czasie  $\frac{3v_0}{7fg}$   $D$  dojdzie do  $A$ , t. j. szybkość najniższego punktu stanie się zerem, i rozpocznie się nowy, drugi, okres zjawiska.

Siła tarcia jest zawsze odwrotna do szybkości najniższego punktu, a więc w ciągu pierwszego okresu posiada kierunek stały, i środek kuli porusza się tak, jak punkt materialny o masie jednostkowej, na który działa siła  $fg$  stała co do wielkości i kierunku, czyli jak poruszałby się pocisk w próżni, gdyby przyspieszenie ziemskie było  $f$  razy większe. Z tego wynika, że torem środka jest parabola o osi równoległej do  $v_0$ .

Według doświadczeń Coriolisa współczynnik tarcia pomiędzy bilardem i kulą bilardową wynosi 0,2, jeżeli zatem początkowa szybkość najniższego punktu  $v_0$  była równa 0,5 m na sek., to pierwszy okres trwa wszystkiego  $\frac{2v_0}{7fg} = 0,07$  sekundy.

W chwili, gdy szybkość najniższego punktu znika, rozpoczyna się proste toczenie się kuli po płaszczyźnie. Odtąd ruch środka jest prostoliniowy i jednostajny. Można z łatwością wyznaczyć kierunek szybkości ostatecznej środka.

\*) Wypada zwrócić uwagę, że po upływie  $dt$  sek. już inny punkt kuli będzie najniższym; jest tu więc mowa o szybkości coraz innego punktu kuli, zawsze tego, który zajmuje położenie najniższe.

Obierzmy na średnicy pionowej kuli jakikolwiek punkt  $P$  w odległości  $x$  od  $O$ , przyczem kierunek na dół będziemy uważali za dodatni. Szybkość punktu  $P^*)$  posiada dwie składowe; jedna jest równa i równoległa do  $u$ , druga zaś równa  $x\omega$ , ma kierunek  $OC$ . W ciągu  $dt$  sekund obydwie te składowe otrzymają przyrosty w kierunku  $fg$ ; przyrost pierwszej wynosi, jak wiemy  $fgdt$ , a przyrost drugiej musi być w tym samym stosunku do odpowiedniego przyrostu szybkości punktu  $A$ , czyli do  $\frac{5fgdt}{2}$ , co  $x\omega$  do  $a\omega = OC$ , a zatem jest równy  $\frac{5fgxdt}{2a}$ . Szybkość wypadkowa punktu  $P$  otrzyma w kierunku siły  $fg$  przyrost  $fg\left(1 + \frac{5x}{2a}\right)dt$ .

Jeżeli  $1 + \frac{5x}{2a} = 0$ , t. j. jeżeli  $x = -\frac{2a}{5}$ , to ów przyrost jest zerem; innemi słowy ten punkt kuli, który w jakiegokolwiek chwili leży na średnicy pionowej o  $\frac{2a}{5}$  wyżej od środka, posiada wówczas szybkość taką samą, jak punkt, który zajmował to położenie w chwili pierwotnej.

Na figurze 94 odcinek  $OE$  równy  $\frac{2}{5}$  odcinka  $OC$  wyobraża drugą składową szybkości punktu  $P$ , a  $OF$  ową stałą szybkość wypadkową.

W ciągu drugiego okresu średnica pionowa posiada ruch obrotowy około punktu najniższego, a więc oczywiście ostateczna szybkość środka będzie miała kierunek  $OF$ , a co do wielkości wyniesie  $\frac{5}{7}$  owej szybkości stałej punktu  $P$ .

Prz. 1. Zupelnie chropowata płaszczyzna pozioma obraca się ze stałą szybkością kątową  $\Omega$  około osi pionowej. W spodku tej osi położono kulę i nadano jej impuls poziomy, skutkiem czego środek otrzymał szybkość  $v_0$ . Wyznaczyć tor bezwzględny środka. Odp. Koło o promieniu  $\frac{7v_0}{2\Omega}$ .

Niechaj początkowe położenie środka będzie początkiem prostokątnego układu współrzędnych; osi  $x, y$  obieramy w płaszczyźnie poziomej a mianowicie pierwszą w kierunku szybkości  $v_0$ . Skutkiem początkowego pchnięcia, czy uderzenia, kula otrzymuje ilość ruchu  $G_0 = Mv_0$  w kierunku osi  $x$  oraz moment

\*) Jest tu znowu mowa nie o jednym i tym samym punkcie kuli, lecz zawsze o tym punkcie, który w danej chwili zajmuje położenie  $P$ .



ilości ruchu względem środka  $H_0 = -\frac{Mk^2\omega_0}{a}$  w kierunku osi  $y$ ;  $M$  oznacza w tem masę kuli,  $a$  promień i  $k$  ramię bezwładności względem średnicy. Dalsze przyrosty wektorów  $G$  i  $H$  wytwarza pozioma siła tarcia, a zatem przyrosty te są poziome, i obydwa wektory pozostają stale w płaszczyźnie  $xy$ . Z tego wynika, że całkowita szybkość kątowa jest zawsze pozioma.

Siła tarcia  $F$  wytworzy w czasie  $dt$  przyrost  $Fdt$  wektora  $G$  oraz przyrost  $Fadt$  wektora  $H$ . Przyrosty te są do siebie prostopadłe, a stosunek pomiędzy ich wielkościami wynosi  $\frac{1}{a}$ , a więc i całkowity przyrost, jaki otrzyma wektor  $G$  w czasie  $t$ , jest prostopadły do całkowitego przyrostu wektora  $H$  i pozostaje doń w tym samym stosunku.

Opierając się na wynikach powyższych, można zadanie rozwiązać w sposób bardzo prosty.

W chwili  $t$  środek kuli zajmie położenie  $(xy)$ . Składowe szybkości linowej (bezwzględnej) środka w kierunkach osi oznaczamy przez  $v_x$ ,  $v_y$ , a składowe szybkości kątowej przez  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ . Ponieważ poślizg jest wyłączony, przeto

$$v_x + a\omega_y = -\Omega y, \quad v_y - a\omega_x = \Omega x.$$

Całkowity przyrost wektora  $G$  w kierunku osi  $x$ , pomnożony przez  $a$ , musi być taki sam, jak całkowity przyrost wektora  $H$  w kierunku osi  $y$ , i odwrotnie. Stąd wynikają dwa inne równania

$$a(Mv_x - G_0) = Mk^2\omega_y - H_0, \quad aMv_y = -Mk^2\omega_x.$$

Rugując z tych czterech równań  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  i całkując, otrzymamy równanie toru

$$\Omega(x^2 + y^2) - 7v_0y = 0.$$

Łatwo okazać, że szybkość środka jest stale równa  $v_0$ .

Prz. 2. Kulę położono na zupełnie chropowatej płaszczyźnie poziomej, a następnie nadano płaszczyźnie ruch obrotowy około osi pionowej z ze stałą szybkością kątową  $\Omega$ . Początkowa odległość środka kuli od osi  $z$  jest równa  $r$ . Wyznaczyć tor bezwzględny środka kuli i jego szybkość. Odp. Torem jest koło o promieniu  $r$ , a szybkość wynosi  $\frac{2r\Omega}{7}$ .

Rozumując podobnie, jak w przykładzie poprzedzającym, rozwiążemy zadanie prawie bez rachunku. Znajdziemy najprzód, że wektory  $G$  i  $H$  tworzą wciąż kąt prosty, a zatem szybkość środka jest równoległa do szybkości najniższego punktu.