## III. PRZYŚPIESZENIE PUNKTU.

**51. Przyrost geometryczny.** Musimy teraz cofnąć się do rozdziału wstępnego, aby dopełnić w pewnym kierunku podane tam krótkie wiadomości o wektorach.

Wyobraźmy sobie jakikolwiek wektor $P=OA$, który z biegiem czasu zmienia się co do wielkości i kierunku, ale którego początek $O$ jest nieruchomy. Powiemy, że wektor $P$ jest funkcją czasu. Koniec $A$ wektora zakreśla w przestrzeni pewną linję.

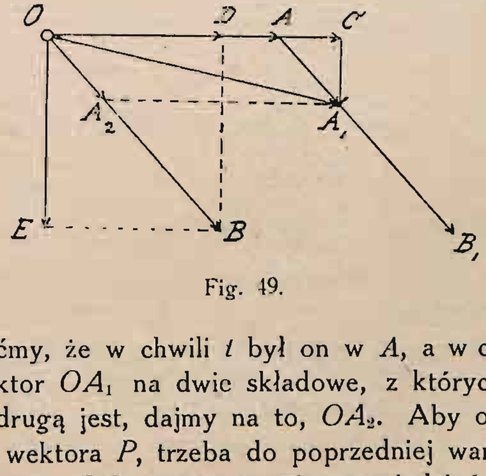


Fig. 49.

Przypuśćmy, że w chwili $t$ był on w $A$, a w chwili $t_1$ w $A_1$. Rozłóżmy wektor $OA_1$ na dwie składowe, z których jedną niech będzie $OA$; drugą jest, dajmy na to, $OA_2$. Aby otrzymać nową wartośc $OA_1$ wektora $P$, trzeba do poprzedniej wartości $OA$ dodać geometrycznie $OA_2$, możemy więc powiedzieć, że wektor $P$ w czasie $t_1-t$ otrzymał *przyrost geometryczny* $OA_2$ albo $AA_1$, gdyż odcinki $AA_1$ i $OA_2$ są równe i jednakowo skierowane.

Należy odróżniać przyrost geometryczny od przyrostu algebraicznego. Odmierzmy od $O$ na prostej $OA$ długość $OC$ równą $OA_1$; otrzymamy odcinek $AC$, którego długość wyraża przyrost algebraiczny wektora $P$ w czasie $t_1-t$.

Jeżeli wektor $P$ zmieniał się tylko pod względem wielkości, zachowując kierunek poprzedni, to przyrost geometryczny jest równy przyrostowi algebraicznemu. Jeżeli wektor $P$ zmienił się jedynie co do kierunku, zachowując poprzednią wielkość, to przyrost algebraiczny jest zerem, gdy przyrost geometryczny jest różny od zera.

**52. Pochodna geometryczna.** Przypuśćmy teraz, że okres $t_1 - t$ jest nieskończenie krótki; oznaczymy go przez $dt$. W takim razie $OA_1$ (fig. 49) różni się nieskończenie mało od $OA$ zarówno co do wielkości, jak i kierunku. Przyrost $AC$ nazwiemy teraz *przyrostem elementarnym algebraicznym* i oznaczymy przez $dP$, a przyrost $OA_2$ lub $AA_1$ będziemy nazywali *przyrostem elementarnym geometrycznym*, oznaczając go dla odróżnienia od poprzedniego przez $\delta P$.

Jeżeli wektor $P$ zmienia się tylko co do wielkości, to $\delta P = dP$, jeżeli zaś $P$ zmienia się tylko co do kierunku, to $dP = 0$.

Wprowadźmy teraz nowy wektor, zgodny co do kierunku z elementarnym przyrostem geometrycznym, a co do wielkości równy $\frac{\delta P}{dt}$. Wektor ten nazywa się *pochodną geometryczną wektora P względem czasu*; reprezentuje go odcinek $OB$ lub $AB_1$, zawierający $\frac{\delta P}{dt}$ obranych jednostek długości. Jeżeli wektor $P$ zmienia się tylko co do wielkości, to pochodna geometryczna posiada kierunek wektora $P$, lub odwrotny i jest równa $\frac{dP}{dt}$.

Oczywiście pochodną geometryczną można uważać za szybkość końca wektora $P$. Z drugiej strony i szybkość każdego punktu ruchomego jest pochodną geometryczną. Połączmy mianowicie ruchomy punkt $A$ z dowolnię obranym nieruchomym punktem $O$ i uważajmy promień wodzący $OA$ za wektor. Pochodna geometryczna tego wektora będzie oczywiście szybkością punktu $A$.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy rzuty wektora $P$ na osi przez $P_x$, $P_y$, $P_z$, a rzuty końca $A$ przez $A_x$, $A_y$, $A_z$. Szybkość punktu $A_x$ jest równa $\frac{dP_x}{dt}$, lecz z drugiej strony jest ona równa rzutowi szybkości punktu $A$, czyli pochodnej geometrycznej wektora $P$. Toż samo dotyczy osi pozostałych.

Można powiedzieć, że składowe pochodnej geometrycznej wektora $P$ w kierunkach osi wynoszą odpowiednio $\frac{dP_x}{dt}$, $\frac{dP_y}{dt}$, $\frac{dP_z}{dt}$.

Użyteczny bywa również rozkład pochodnej geometrycznej w kierunku $OA$ i w kierunku prostopadłym do $OA$. Możemy uważać, że ruch punktu $A$ w czasie $dt$ jest płaski, gdyż punkt ten pozostaje w ciągu tego czasu w płaszczyźnie $AOA_1$. Pierwsza z szukanych składowych $OD$ jest to to samo, co rzut szybkości punktu $A$ na promień wodzący $P$, jest więc równa $\frac{dP}{dt}$, druga zaś jako rzut na kierunek prostopadły wynosi $P\frac{d\vartheta}{dt}$ (gdzie $d\vartheta$ oznacza nieskończenie mały kąt $A_1OA$) według wzorów par. 17. Pierwsza nazywa się *składową styczną*, a druga *składową normalną*.

Na wstępie do tych rozważań w paragrafie poprzedzającym zrobiliśmy wyraźne zastrzeżenie, że punkt $O$, czyli początek wektora $P$, jest nieruchomy. Zastrzeżenie to nie ma w sobie nic istotnego i miało jedynie na celu ułatwienie wyobraźni. Jeżeli punkt $O$ jest ruchomy, to wszystkie wyniki powyższe zachowują całą swą moc obowiązującą z tą tylko drobną zmianą, że pochodna geometryczna wektora $P$ nie jest szybkością bezwzględną jego końca, lecz szybkością końca względem początku $O$.

Gdyby to nie było dla kogo oczywiste od pierwszej chwili, to uwaga następująca usuwa wszelkie wątpliwości. Wyobraźmy sobie inny wektor $Q$, zgodny w każdej chwili co do wielkości i kierunku z wektorem $P$, ale posiadający początek w punkcie nieruchomym. Wektory $P$ i $Q$ przybierają w każdym okresie przyrosty jednakowe, a zatem i ich pochodne geometryczne są wciąż równe i równoległe. Z tego wynika, że wywody powyższe, dotyczące przyrostów i pochodnych geometrycznych, są w jednakowym stopniu ważne dla obydwóch wektorów.

Prz. Pochodna geometryczna wektora jest wciąż doń prostopadła; okazać, że wektor zmienia się tylko co do kierunku.

**53. Przyśpieszenie.** Szybkość, którą punkt ruchomy posiada w chwili obecnej, wskazuje, jakie położenie zajmie on w chwili następnej. Jeżeli szybkość jest równa $v$, to wiadomo, że po upływie $dt$ sek. punkt ruchomy znajdzie się na linji tej szybkości w odległości $vdt$ od położenia obecnego. Nie wiemy wszakże, jaki będzie wówczas stan cynematyczny punktu, czyli jaka będzie jego nowa szybkość. Określa to inny wektor, zwany *przyśpieszeniem*.

*Przyśpieszenie jest to geometryczna pochodna względem czasu*, innemi słowy przyśpieszenie jest to wektor, pod względem kierunku zgodny z elementarnym przyrostem szybkości, a pod względem wielkości równy stosunkowi tego przyrostu do $dt$. Oczywiście przyśpieszenie leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez dwie nieskończenie bliskie styczne do toru, czyli w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru

Oznaczmy przyśpieszenie punktu ruchowego w chwili obecnej przez $p$ i przypuśćmy, że jest ono znane. W takim razie wiemy, że w ciągu następnego okresu $dt$ szybkość otrzyma przyrost geometryczny $pdt$. Dodając ten przyrost geometrycznie do szybkości obecnej, otrzymamy szybkość, którą będzie miał punkt w chwili następnej.

Gdy szybkość zmienia się tylko co do wielkości, t. j. gdy ruch punktu jest prostolinjowy, to przyśpieszenie posiada kierunek zgodny z szybkością albo odwrotny. Jest ono w tym razie równe $\frac{dv}{dt}$, a ponieważ $v = \frac{dx}{dt}$, gdzie $x$ oznacza odległość punktu ruchomego od początku toru, przeto przyśpieszenie $= \frac{d^2x}{dt^2}$. Jeżeli torem punktu nie jest linja prosta, to kierunek przyśpieszenia wogóle różni się od kierunku szybkości.

Rzut przyśpieszenia $p$ punktu ruchomego na dowolną prostą $x$ jest równy $\frac{dv_x}{dt}$, gdzie $v_x$ oznacza rzut szybkości punktu na tę prostą, albo szybkość rzutu (par. 15). Ponieważ torem rzutu jest prosta, przeto $\frac{dv_x}{dt}$ jest przyśpieszeniem rzutu, a więc *rzut przyśpieszenia punktu na dowolną prostą jest przyśpieszeniem rzutu punktu na tej prostej.*

Prz. Określamy przyśpieszenie, jako szybkość końca wektora $v$ względem początku jego. Opierając się na tej definicji dowieść, że rzut przyśpieszenia na dowolną prostą jest równy przyśpieszeniu rzutu.

Rzut szybkości końca wektora $v$ na prostą $x$ będzie $\frac{d(x+v_x)}{dt}$; biorąc pod uwagę, że rzut ten jest równy sumie rzutów szybkości składowych, otrzymamy wynik żądany.

**54. Wyznaczanie przyśpieszeń.** Przypuśćmy, że mamy dane równania ruchu punktu, a mianowicie

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t);$$

pragniemy wyznaczyć przyśpieszenie co do wielkości i kierunku.

Oznaczmy szukane przyśpieszenie przez $p$, a jego rzuty na osi przez $p_x$, $p_y$, $p_z$. Pierwszy z tych rzutów jest równy przyśpieszeniu rzutu punktu na oś $x$, a to przyśpieszenie jest równe $\frac{dv_x}{dt}$ albo $\frac{d^2x}{dt^2}$, możemy je więc wyznaczyć z pierwszego równania ruchu; $p_y$, $p_z$ wyznaczymy tak samo z równań pozostałych. Będzie więc

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mając te rzuty, znajdziemy

$$p = \sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2},$$

i

$$\cos\alpha = \frac{p_x}{p}, \quad \cos\beta = \frac{p_y}{p}, \quad \cos\gamma = \frac{p_z}{p},$$

gdzie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oznaczają kąty kierunkowe przyśpieszenia.

Jeżeli ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie $xy$, to $p_z = 0$, $\cos\gamma = 0$,

$$p = \sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2}, \quad \tan\alpha = \frac{p_y}{p_x}.$$

Prz. 1. Równania ruchu punktu są $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$; wyznaczyć przyśpieszenie.

Wiemy z prz. 3 w par. 16, że torem punktu jest koło, po którem punkt biegnie ze stałą szybkością $a\omega$. Różniczkując dane równania, otrzymamy $p_x = -a\omega^2\cos\omega t$, i $p_y = -a\omega^2\sin\omega t$, a zatem $p = a\omega^2$. Widzimy, że co do wielkości przyśpieszenie jest stałe; $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, z czego wynika, że przyśpieszenie ma kierunek promienia, a znaki u $p_x$ i $p_y$ wskazują, że jest ono zwrócone do środka.

Prz. 2. Punkt biegnie ze stałą szybkością $c$ linją łańcuchową o parametrze $a$. Wyznaczyć przyśpieszenie. Odp. $p = \frac{ac^2}{y^2}$ i jest skierowane według normalnej wewnątrz krzywej.

Należy tu skorzystać ze znanych związków pomiędzy $a$, $y$, $s$ i $\vartheta$, gdzie $s$ oznacza łuk krzywej, a $\vartheta$ kąt pomiędzy styczną i osią odciętych. Znajdziemy w takim razie łatwo, że $v_x = \frac{ac}{y}$, $v_y = \frac{cs}{y}$.

Prz. 3. Koło o promieniu $a$ toczy się po linji prostej, przyczem szybkość środka jest stała i równa $c$. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu, położonego na obwodzie. Odp. Z równań ruchu znajdziemy, że $p=\frac{c^2}{a}$ i jest skierowane do środka koła.

Prz. 4. Punkt $P$ biegnie do stałego punktu $O$ z szybkością $\alpha x^n$, gdzie $\alpha$ jest stałe, a $x=OP$. Wyznaczyć przyśpieszenie. Odp. Przyśpieszenie jest odwrócone od $O$ i $=\alpha^2 n x^{2n-1}$.

Prz. 5. Ruchoma styczna do paraboli $y^2=4px$ przecina oś $y$ w punkcie $B$, a oś $x$ w $C$. Szybkość punktu $B$ jest stała i równa $v$. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu $C$. Odp. $\frac{2v^2}{p}$. Należy skorzystać z okoliczności, że $OC$ jest równe odciętej punktu zetknięcia.

Prz. 6. Punkt obiega cykloidę $x=a(\vartheta-\sin\vartheta)$, $y=a(1-\cos\vartheta)$; przyśpieszenie jego jest wciąż równoległe do osi odciętych i wynosi $p_0$, gdy $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcji $\vartheta$. Odp. $\frac{p_0(1-\cos\vartheta)}{\sin^3\vartheta}$.

Ponieważ $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, przeto $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\cot\vartheta\cdot\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Całkując, znajdziemy $\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{k}{\sin\vartheta}$, gdzie $k$ oznacza stałą całkowania.

Prz. 7. Ruch punktu jest centralny; znaczy to, że przyśpieszenie przechodzi stale przez nieruchomy punkt $O$. Dowieść, że torem jest krzywa płaska.

Otrzymamy odrazu

$$p_x=\frac{px}{r},\quad p_y=\frac{py}{r},\quad p_z=\frac{pz}{r},$$

gdzie $(xyz)$ są współrzędnemi punktu ruchomego, a $r$ promieniem wodzącym. Z tego zaś wynikają równania

$$xp_y-yp_x=0,\quad yp_z-zp_y=0,\quad zp_x-xp_z=0.$$

Pierwsze, czyli $x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0$, można napisać w postaci $\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$, a zatem będzie

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C,\quad y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=A,\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=B,$$

gdzie $A$, $B$, $C$ oznaczają wielkości stałe. Ostatecznie otrzymamy $Ax+By+Cz=0$, a więc punkt ruchomy pozostaje w płaszczyźnie, przechodzącej przez $O$.

**55. Ruch jednostajnie przyśpieszony.** Okażemy na kilku przykładach, jak się rozwiązuje zagadnienie odwrotne, w którem dane jest przyśpieszenie punktu oraz pewne inne okoliczności, dotyczące ruchu, a chodzi o wyznaczenie równań ruchu. Zaczniemy od ruchu prostolinjowego.

Przypuśćmy więc, że torem punktu jest prosta $x$, a zatem szybkość i przyśpieszenie leżą na tej prostej. Założymy dalej, że przyśpieszenie $p$ jest stałe; ruch nazywa się w tym razie *jednostajnie przyśpieszonym.* Prócz tego przypuścimy, że w początku rachuby czasu punkt znajdował się w odległości $x_0$ od początku toru $O$ i posiadał szybkość $v_0$.

Niech $x$ oznacza odległość punktu ruchomego od $O$ w chwili $t$. W takim razie będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p \qquad (1).$$

Oczywiście całka tego równania drugiego rzędu będzie funkcją całkowitą drugiego stopnia zmiennej $t$, a więc będzie miała postać $x = At^2 + Bt + C$. Podstawiając tę funkcję w nasze równanie, znajdziemy, że jest ona całką tylko w tym razie, gdy $A = \frac{p}{2}$, a zatem

$$x = \frac{pt^2}{2} + Bt + C \qquad (2).$$

Jest to całka ogólna, a współczynniki $B$ i $C$ są stałemi całkowania.

Oczywiście $C = x_0$; stałą $B$ wyznaczymy w sposób następujący. Różniczkując (2), otrzymamy szybkość

$$\frac{dx}{dt} = pt + B.$$

W chwili $t = 0$ szybkość ta wynosiła $v_0$, a zatem $B = v_0$. Ostatecznie szukane równanie ruchu będzie takie:

$$x = \frac{pt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Jeżeli $v_0 = 0$ i $x_0 = 0$, to $x = \frac{pt^2}{2}$. Tak np. gdy ciało ciężkie wychodzi z punktu $O$, położonego niezbyt daleko od powierzchni ziemi, ze stanu spoczynku i spada w próżni, to, jak wiadomo z badań doświadczalnych, przyśpieszenie jego jest prawie stałe i wynosi $g = 9{,}81$ w metrach i sekundach. Jest to tak zwane *przyśpieszenie ziemskie.* Równanie ruchu takiego ciała, jeżeli możemy je uważać za punkt, będzie $x = \frac{gt^2}{2}$.

Prz. 1. Pociąg wyszedł ze stacji, biegł minutę ze stałem przyśpieszeniem, następnie $2^1/_2$ minuty ze stałą szybkością, a ostatnie 30 sekund ze stałem opóźnieniem i zatrzymał się na stacji następnej. Odległość pomiędzy stacjami wynosi $3^1/_4$ klm. Wyznaczyć owo przyśpieszenie, opóźnienie i szybkość stałą. Odp. 3600; 7200; 60 klm./godz.

Prz. 2. Pociąg, idąc ze stałem przyśpieszeniem $p$, przechodził przez dwa następujące po sobie przystanki z szybkościami $v_1$ i $v_2$. Wyznaczyć odległość pomiędzy przystankami. Odp. $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$.

Prz. 3. Dwie łódki na wyścigach ruszyły z szybkościami $v_1$, $v_2$, płynęły z przyśpieszeniami $p_1$, $p_2$ i bieg skończył się nierozegraną. Wyznaczyć odległość mety od startu. Odp. $\frac{2(v_1 - v_2)(v_1 p_2 - v_2 p_1)}{(p_1 - p_2)^2}$.

Prz. 4. Punkty $A$ i $B$ wyruszyły jednocześnie z początku współrzędnych; pierwszy biegnie po osi $x$ ze stałem przyśpieszeniem $p$, a drugi po osi $y$ ze stałą szybkością $v$. Wyznaczyć obwiednię prostej $AB$. Odp. Parabola $y^2 = -\frac{8v^2}{p}x$.

Prz. 5. Pociski $A$ i $B$ pozostawały początkowo na jednym pionie i $AB$ było równe $h$. Jednocześnie $A$ zaczyna swobodnie spadać, a $B$ zostaje wyrzucony pionowo w górę. Spotkanie nastąpiło w tem samem miejscu, z którego wybiegł $B$; wyznaczyć jego szybkość początkową. Odp. $\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

Prz. 6. Z działa, wymierzonego pionowo w górę, dano dwa strzały w odstępie $t$ sek.; początkowa szybkość pocisków wynosi $v$. Kiedy nastąpi spotkanie pomiędzy pociskami? Odp. Po upływie $\frac{2v_0 - gt}{2g}$ od drugiego wystrzału.

**56. Ruch prosty harmoniczny.** Przypuśćmy znowu, że punkt porusza się na prostej $x$, a przyśpieszenie jest wciąż skierowane do punktu $O$ i wprost proporcjonalne do odległości od $O$. Współczynnik proporcjonalności oznaczymy przez $\omega^2$ i punkt $O$ obierzemy za początek współrzędnych. W początku rachuby czasu

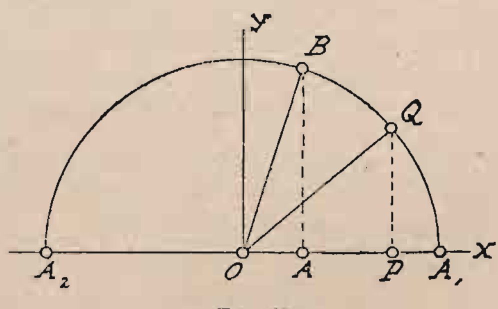


Fig. 50.

punkt ruchomy znajdował się, dajmy na to, w odległości $x_0$ od $O$, i posiadał szybkość $v_0$.

W chwili $t$ punkt ruchomy znajdzie się np. w położeniu $P$ po stronie dodatniej od $O$, a szybkość jego niech będzie odwrócona od $O$. Szybkość ta się zmniejsza, a zatem równanie różniczkowe ruchu posiada postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (1).$$

Jest to tak zw. równanie linjowe drugiego rzędu. Całkę jego można napisać w postaci

$$x = a \sin(At + \alpha) \qquad (2).$$

Różniczkując dwa razy, otrzymamy $\frac{d^2x}{dt^2} = -A^2 a \sin(At + \alpha)$ czyli $\frac{d^2x}{pt^2} = -A^2 x$. Z tego wynika, że (2) jest całką (1), jeżeli $A = \omega$. Tak więc całka ogólna będzie

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \qquad (3),$$

gdzie $a$ i $\alpha$ są stałemi całkowania. Z warunków początkowych wynikają dwa równania

$$x_0 = a \sin \alpha \quad \text{i} \quad v_0 = a\omega \cos \alpha.$$

Z równań tych dają się wyznaczyć $a$ i $\alpha$, można więc te stałe uważać za znane.

Ruch punktu, odbywający się według równania (3), nazywa się *ruchem prostym harmonicznym*; odgrywa on ważną rolę w fizyce i technice.

Możemy zdać sobie łatwo sprawę z tego szczególnego rodzaju ruchu w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że około punktu $O$ obraca się odcinek $OB$ o długości $a$ z szybkością kątową $\omega$, i że w chwili $t = 0$ tworzył on z osią $y$ kąt $\alpha$. Łatwo sprawdzić, że (3) jest równaniem ruchu rzutu końca tego odcinka na oś $x$.

Z tego wynika, że dany punkt ruchomy oscyluje pomiędzy skrajnemi położeniami $A_1$ i $A_2$, w których koło, zatoczone z $O$ promieniem $a$, przecina oś $x$. Długość $A_2A_1 = 2a$ nazywa się *amplitudą* ruchu harmonicznego.

Dajmy na to, że w chwili $t$ punkt ruchomy zajmował położenie $P$; z równania (3) wynika, że po upływie $\frac{2\pi}{\omega}$ sekund punkt powróci do położenia $P$, z taką samą szybkością, jaką miał poprzednio. Czas $\frac{2\pi}{\omega}$ nazywa się *okresem*, kąt $\alpha$ *fazą*, a punkt $O$ *środkiem* ruchu harmonicznego.

Z zagadnieniem powyższem wiąże się ściśle następujące. Punkt $A_2$ jest w ruchu prostym harmonicznym względem środka $A_1$, a punkt $A_1$ jest również w ruchu prostym harmonicznym względem nieruchomego środka $O$. Równania tych ruchów są odpowiednio $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$ i $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$. Wyznaczyć równanie ruchu bezwzględnego punktu $A_2$.

Dane ruchy harmoniczne nazywają się *składowemi*, a ruch szukany wypadkowym. Wypada zwrócić uwagę, że obydwa ruchy składowe mają tu okresy równe.

Za początek współrzędnych obierzemy punkt $O$, i odciętą punktu $A_2$ oznaczymy przez $x$. Oczywiście

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{czyli} \quad x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Rozwijając obydwie funkcje trygonometryczne, otrzymamy

$$x = (a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2)\sin\omega t + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2)\cos\omega t \qquad (1).$$

Równanie to daje się przekształcić w sposób następujący. Wprowadzamy dwie nowe wielkości $a$ i $\alpha$ takie, aby było

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 = a\cos\alpha, \quad a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 = a \sin\alpha \qquad (2).$$

Będzie więc $x = a(\sin\omega t \cos\alpha + \cos\omega t \sin\alpha)$, czyli

$$x = a\sin(\omega t + \alpha).$$

Widzimy, że ruch wypadkowy jest także harmoniczny o tym samym okresie.

Poprowadźmy z punktu $O$ odcinki $OB_1$, $OB_2$, odpowiednio równe $a_1$, $a_2$ i tworzące z osią $y$ kąty $\alpha_1$, $\alpha_2$, a następnie wyznaczmy wypadkową $OB$ wektorów $OB_1$, $OB_2$. Wypadkowa ta będzie równa $a$ i utworzy z osią $y$ kąt $\alpha$. Wynika to stąd, że rzut jej na oś $y$ jest równy sumie rzutów składowych, a ta według (2) jest równa $a\cos\alpha$; podobnież rzut $OB$ na oś $x$ jest równy $a\sin\alpha$.

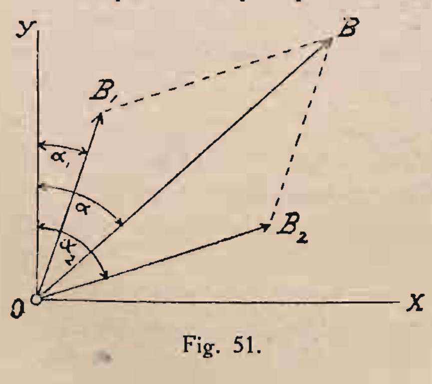

Fig. 51.

Gdy wektor $OB$ obraca się około $O$ z szybkością kątową $\omega$, to ruch rzutu jego końca na osi $x$ jest właśnie ruchem szukanym. W podobny sposób można połączyć dowolną liczbę ruchów harmonicznych, i zawsze ruch wypadkowy otrzymamy, jako ruch rzutu końca wektora wypadkowego.

Prz. 1. Jakie powinny być amplitudy i fazy ruchów harmonicznych składowych, aby szybkość ruchu wypadkowego była zerem? Mówimy w tym razie, że zachodzi interferencja.

Szybkość będzie wciąż zerem, jeżeli $a = 0$, a w takim razie z (2) wynika, że $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ i $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, bo $\alpha_1$ i $\alpha_2$ nie mogą być równe.

Prz. 2. Jaką szybkość posiada punkt, pozostający w ruchu prostym harmomicznym, gdy odległość jego od środka jest równa $x$? Odp. $\pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$,

Prz. 3. Dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$; kąt $A_3$ jest prosty, a boki $A_1A_3$, $A_2A_3$ równe. W $A_1$ znajdował się punkt ruchomy w spoczynku; przyciągają go wierzchołki $A_1$, $A_2$, $A_3$, a udzielane przyśpieszenia są wprost proporcjonalne do odległości (współcz. proporc. $= k^2$). Wyznaczyć tor punktu i okres wahań. Odp. Okres wahań $= \dfrac{2\pi}{k\sqrt{3}}$.

**57. Ruch pocisku w próżni.** Rozważymy ruch pocisku, wyrzuconego w przestrzeni pozbawionej powietrza, jako przykład ruchu na torze krzywym. Przypuśćmy więc, że pocisk, który uważamy za punkt, wybiegł z punktu $O$ z szybkością początkową $v_0$, tworzącą z poziomem kąt $\alpha$. Wiadomo z doświadczenia, że pocisk posiada stałe przyśpieszenie $g$, skierowane pionowo na dół, a zatem szybkość otrzymuje tylko przyrosty pionowe, i ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez linię szybkości początkowej. W płaszczyźnie tej obierzemy płaski układ współrzędnych. Początkiem będzie punkt $O$, a osią odciętych prosta pozioma. Kierunek dodatni osi rzędnych obierzemy w górę.

Rzuty przyśpieszenia na osi $x$ i $y$ są odpowiednio $0$ i $-g$, a zatem równania różniczkowe ruchu będą

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Za początek rachuby czasu obieramy tę chwilę, w której pocisk wybiegał z $O$; wówczas współrzędne jego były zerami, a szybkość miała składowe w kierunkach osi $v_0\cos\alpha$ i $v_0\sin\alpha$. Całkując powyższe równania różniczkowe i uwzględniając te warunki początkowe, otrzymamy z łatwością równania ruchu

$$x = v_0\cos\alpha\,.\,t, \quad y = v_0\sin\alpha\,.\,t - \frac{gt^2}{2} \qquad (1).$$

Rugując z tych równań $t$, otrzymamy równanie toru

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (2).$$

Jest to oczywiście parabola; przecina ona oś $y$ tylko w jednym punkcie zwykłym, a mianowicie w $O$, a więc oś jej jest równoległa do osi $y$, czyli pionowa.

Jeżeli pocisk przetnie po raz drugi oś $x$ w punkcie $A$, to odległość $OA$ nazywa się *donosłością rzutu* albo donosłością strzału. Zakładając w (2) $y = 0$, znajdziemy, że

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3).$$

Donosłość będzie największa, gdy wyrzucimy pocisk pod kątem $45^0$, gdyż w tym razie $\sin 2\alpha = 1$. Ta największa donosłość wynosi $\frac{v_0^2}{g}$.

Przypuśćmy, że chodzi o to, aby przy danej szybkości początkowej $v_0$ pocisk upadł w odległości $a$ od $O$. Jaki kierunek należy nadać pociskowi w $O$? Z (3) znajdziemy, że w takim razie $\sin 2\alpha = \frac{ga}{v_0^2}$. Równaniu temu czynią zadość dwie wartości kąta $2\alpha$ mniejsze od $\pi$; jeżeli jedna wynosi $\varphi$, to druga $\pi - \varphi$. Wogóle zatem istnieją dwa kierunki, czyniące zadość postawionemu żądaniu. Tworzą one z poziomem kąty $\frac{\varphi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, innemi słowy jeden z nich jest tak nachylony do poziomu, jak drugi do pionu. Dwusieczna kąta pomiędzy temi kierunkami tworzy z poziomem kąt $45^0$.

Postawimy zagadnienie ogólniejsze: pod jakim kątem należy wyrzucić pocisk z $O$, nadając mu szybkość $v_0$, aby trafić w dany punkt $P(xy)$? Tor punktu powinien przejść przez $P$, a zatem w (2) trzeba uważać $x$, $y$ za wielkości znane, a $\alpha$ za wielkość szukaną. Gdy zamiast $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ napiszemy $1 + \tan^2\alpha$, to równanie to przybierze postać

$$gx^2 \tan^2\alpha - 2v_0^2 x \tan\alpha + gx^2 + 2v_0^2 y = 0 \quad (4).$$

Jest to równanie drugiego stopnia względem $\tan\alpha$, a więc posiada dwa pierwiastki rzeczywiste lub urojone. W przypadku pierwszym postawionemu warunkowi czynią zadość dwa kąty różne; powiemy, że punkt $P$ jest dosięgalny pod dwoma kątami. W przypadku drugim punkt $P$ jest wcale niedosięgalny.

Tak więc punkty płaszczyzny pionowej, którą przebiega pocisk, dzielą się na dosięgalne i niedosięgalne. Na granicy leżą oczywiście punkty, które są dosięgalne, ale tylko pod jednym kątem. Jażeli $P$ jest takim punktem granicznym, to pierwiastki równania (4) są równe, a zatem $(xy)$ czynią zadość równaniu $v_0^4x^2 - gx^2(gx^2 + 2v_0^2y) = 0$, albo

$$g^2x^2 + 2v_0^2gy - v_0^4 = 0.$$

Jest to równanie krzywej granicznej, zwanej *linja bezpieczeństwa;* krzywa ta jest parabolą, której oś leży na osi $y$.

Wyrzucając z $O$ pociski pod różnemi kątami, ale z jedną i tą samą szybkością początkową $v_0$, otrzymamy całą sieć torów parabolicznych. Żaden z tych torów nie przecina krzywej granicznej, bo w razie przeciwnym punkty dosięgalne leżałyby po obydwóch stronach granicy. Z tego widać, że parabola graniczna jest obwiednią owej sieci.

Należy dodać, że ruch pocisku w przestrzeni wypełnionej powietrzem, wogóle różni się od ruchu pocisku w próżni. Różnica jest tem większa, im większą powierzchnię posiada pocisk w stosunku do wagi, i im większą nadano mu szybkość początkową. Teorja powyższa jest w przybliżeniu zgodna ze zjawiskiem, zachodzącem w atmosferze, gdy pociskiem jest np. pełna kula działowa, a szybkość początkowa nie przenosi 150 do 200 metrów na sekundę. Ale rzućmy jakieś ciało bardzo lekkie, np. balonik kauczukowy, wypełniony wodorem; ruch takiego pocisku w powietrzu nie będzie wcale przypominał ruchu parabolicznego, który poznaliśmy w tym paragrafie. Niewiele wspólnego z naszą teorją posiada także ruch pocisku ciężkiego, który otrzymał bardzo wielką szybkość początkową.

Aby mniej więcej unaocznić rozmiary zachodzącej tu różnicy przytoczymy przykład pocisku, wystrzelonego z nowoczesnego karabinu. Początkowa szybkość takiego pocisku wynosi około 700 metrów na sekundę a zatem w próżni przy $\alpha = 45^0$ donioslość strzału według wzoru (3) byłaby bliska 50 kilometrów. W powietrzu osiąga się donioslość największą, strzelając pod kątem trzydziestu kilku stopni, i ta największa donioslość nie dochodzi pięciu kilometrów.

Prz. 1. Z punktu $O$ wyrzucono wielką liczbę pocisków pod różnemi kątami, nadając wszystkim szybkość początkową $v_0$; wyznaczyć miejsce geometryczne, które zajmują pociski po czasie $t$. Odp. Równaniami szukanego miejsca geometrycznego będą (1), jeżeli uznamy $t$ za wielkość stałą, a $\alpha$ za parametr zmienny. Miejscem tem jest koło o promieniu $v_0t$; środek jego leży w punkcie

$\left(0, -\frac{gt^2}{2}\right)$. Z biegiem czasu koło to się rozszerza, a jednocześnie środek spada, jak ciało ciężkie.

Prz. 2. Wyznaczyć miejsce geometryczne ognisk torów parabolicznych pocisków, wyrzuconych z $O$ z szybkością początkową $v_0$.

Styczna do paraboli jest dwusieczną kąta pomiędzy średnicą i promieniem wodzącym, a z tego wynika, że promień wodzący punktu $O$ tworzy z osią $x$ kąt $2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Mając równanie osi paraboli, otrzymamy z łatwością współrzędne ogniska $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$, $y = -\frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g}$. Są to równania parametryczne koła, którego środek leży w $O$, a promień $= \frac{v_0^2}{2g}$.

Prz. 3. Wyznaczyć kierownicę toru pocisku, którego szybkość początkowa $= v_0$. Odp. Jest to prosta pozioma, położona na wysokości $\frac{v_0^2}{2g}$ nad $O$. Wysokość ta nie zależy od $\alpha$, a zatem tory wszystkich pocisków, wyrzuconych z $O$ z szybkością początkową $v_0$, mają kierownicę wspólną.

Prz. 4. Dwa pociski $A$ i $B$ znajdowały się na jednym poziomie. Pocisk $A$ otrzymał szybkość poziomą w kierunku $B$, i jednocześnie $B$ zaczął spadać. Dowieść, że pociski te się spotkają.

Prz. 5. Z punktu $O$ wyrzucono jednocześnie trzy pociski $A_1$, $A_2$, $A_3$. Okazać, że płaszczyzna $A_1A_2A_3$ pozostaje równoległą do pewnej płaszczyzny stałej.

Gdyby nie istniało przyśpieszenie ziemskie, to pociski biegłyby po linjach prostych z otrzymanemi szybkościami $v_1$, $v_2$, $v_3$, i po $t$ sek. byłoby $OA_1 = v_1 t$, $OA_2 = v_2 t$, $OA_3 = v_3 t$. Oczywiście podstawa zmiennej piramidy $OA_1A_2A_3$ pozostawałaby równoległą do płaszczyzny stałej. Można uważać, że dzięki przyśpieszeniu ziemskiemu cała ta podstawa posiada obok tego ruchu jeszcze ruch postępowy.

Prz. 6. Człowiek idzie z szybkością $u$ obwodem koła o promieniu $a$ i rzuca piłkę, trzymając rękę na wysokości $h$ nad ziemią. Jaką szybkość względną $w$ powinna mieć co najmniej piłka, aby upaść w środku okręgu. Odp.

$$w^2 = u^2 - gh + g\sqrt{a^2 + h^2}.$$

Jeżeli czas biegu piłki ma być $t$, to $w^2 = \frac{a^2 + h^2}{t^2} + \frac{g^2 t^2}{4} + u^2 - gh$; $w$ będzie najmniejsze, gdy $t^2 = \frac{2\sqrt{a^2 + h^2}}{g}$.

Prz. 7. Na płaskiem zboczu, tworzącem z poziomem kąt $\alpha$, stoi fort o wysokości $h$. Na szczycie fortu ustawiono działo, którego pociski otrzymują szybkość początkową $v_0$. Wyznaczyć pole zbocza, które można ostrzeliwać z działa. Odp. $\frac{\pi(2gh\cos^2\alpha + v_0^2)v_0^2}{g^2\cos^3\alpha}$.

Obieramy za początek współrzędnych szczyt fortu, za oś $z$ prostą pionową, a za oś $y$ prostą równoległą do płaszczyzny zbocza. Można ostrzeliwać część zbocza zawartą wewnątrz paraboloidy obrotu $g^2(x^2 + y^2) + 2v_0^2 gz - v_0^4 = 0$. Rzut poziomy tej części jest kołem o promieniu $\frac{v_0\sqrt{2gh\cos^2\alpha + v_0^2}}{g\cos\alpha}$.

Prz. 8. Strzelec stoi w odległości $a$ od pionowej ściany, a początkowa szybkość pocisku jego strzelby wynosi $v_0$. Wyznaczyć granicę pomiędzy punktami ściany dosięgalnemi i niedosięgalnemi. Odp. Parabola, której parametr (odległość ogniska od kierownicy) $= \frac{v_0^2}{g}$, a ognisko leży pod poziomem strzelca na głębokości $\frac{a^2 g}{2v_0^2}$.

Prz. 9. Dowieść, że punkt przecięcia stycznej do toru pocisku z dowolnym pionem porusza się na tym pionie podczas biegu pocisku z przyśpieszeniem ziemskiem.

Najdogodniej będzie obrać za początek współrzędnych punkt $O$, w którym dany pion przecina parabolę, i za początek rachuby czasu chwilę, w której pocisk przebiegał przez $O$.

Prz. 10. Z punktu $O$ wybiegła jednocześnie pewna liczba pocisków. Prowadzimy z jakiegoś punktu, położonego pionowo nad $O$, styczne do torów. Dowieść, że pociski przebiegały jednocześnie przez punkty zetknięcia.

Prz. 11. Z punktów, leżących na jednym pionie w odległości $h$ jeden od drugiego, wybiegają jednocześnie dwa pociski z szybkościami $v_0$; kierunki szybkości początkowych są tak dobrane, że pociski się spotykają. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów spotkania. Odp. Gdy obierzemy dolny punkt za początek, to równanie szukanego miejsca będzie $y = \frac{h}{2} - \frac{g(h^2+4x^2)}{8v_0^2}$.

Prz. 12. Pocisk wybiega w kierunku poziomym z najwyższego punktu kuli o promieniu $a$. Jaka powinna być szybkość początkowa, aby pocisk nie dotknął powierzchni kuli? Odp. Powinna być większa od $\sqrt{ag}$.

Prz. 13. Punkt ruchomy wyszedł z punktu $O$, położonego na danej prostej $x$, z szybkością $v_0$, tworzącą z ową prostą kąt $\alpha$, i posiada przyśpieszenie prostopadłe po $x$, zwrócone do tej prostej i wprost proporcjonalne do odległości; współczynnik proporcjonalności $= \omega^2$. Wyznaczyć tor. Odp. Równania ruchu $x = v_0 \cos\alpha \,.\, t$, $y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin\omega t$, a więc torem jest synusoida.

Prz. 14. Rzuty przyśpieszenia punktu na osi $x$ i $y$ są odpowiednio równe $-a$ i $a$, a gdy punkt przebiegał przez początek układu, to szybkość jego $v_0$ była skierowana według osi $x$. Wyznaczyć położenie, w którem punkt poruszał się najwolniej. Odp. $\left(\frac{3v_0^2}{8a}, \frac{v_0^2}{8a}\right)$.

Prz. 15. Punkt wyszedł z położenia $A$ na osi $y$ z szybkością $v_0$ równoległą do osi $x$ i posiada przyśpieszenie równoległe do osi $y$ i proporcjonalne do szybkości; współcz. proporc. $= k$. Wyznaczyć tor. Odp. Katenoida, której parametr $= \frac{v_0}{k}$.

**58. Przyśpieszenie styczne i normalne.** W par. 52 widzieliśmy, jak rozkłada się pochodna geometryczna wektora w kierunku tego wektora i w kierunku prostopadłym. Pierwszą z tych składowych nazwaliśmy styczną, drugą normalną.

Przyśpieszenie jest pochodną geometryczną szybkości, a jego składowa styczna, czyli *przyśpieszenie styczne*, leży na jednej prostej z szybkością, t. j. na stycznej do toru; składowa normalna, czyli *przyśpieszenie normalne*, leży na normalnej, a mianowicie na głównej normalnej, bo przyśpieszenie zawiera się w płaszczyźnie ściśle stycznej. Będziemy oznaczali te składowe przyśpieszenia przez $p_t$ i $p_n$.

Przypuśćmy, że w punkcie $A$ toru i w chwili $t$ szybkość punktu była równa $v$; według wzmiankowanego paragrafu

$$p_t = \frac{dv}{dt} \qquad (1),$$

a $p_n = v\frac{d\vartheta}{dt}$, gdzie $d\vartheta$ oznacza kąt pomiędzy szybkością w $A$ a szybkością w punkcie nieskończenie bliskim $A_1$, albo pomiędzy stycznemi w tych punktach. Jeżeli $\varrho$ oznacza promień krzywizny toru w $A$, i $ds$ element toru $AA_1$, to $d\vartheta = \frac{ds}{\varrho}$, a zatem $p_n = \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{ds}{dt}$, a ponieważ $\frac{ds}{dt} = v$, więc

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho} \qquad (2).$$

Wzory (1) i (2) można także otrzymać bez trudności bezpośrednio. Przypuśćmy, że ruch punktu jest płaski, i że prosta $t$ jest styczną do toru w $A$, a $n$ normalną. Za typowy uważamy ten przypadek, gdy tor jest zwrócony do osi $x$ wypukłością, a na normalnej $n$ kierunek dodatni obieramy w stronę środka krzywizny. Rozkładamy naprzód przyśpieszenie $p$ na $p_x$ i $p_y$; rzut przyśpieszenia na dowolny kierunek jest równy sumie rzutów tych składowych, a zatem będzie

$$p_t = p_x \cos\vartheta + p_y \sin\vartheta,$$
$$p_n = p_y \cos\vartheta - p_x \sin\vartheta,$$

gdzie $\vartheta$ oznacza kąt pomiędzy styczną i osią $x$.

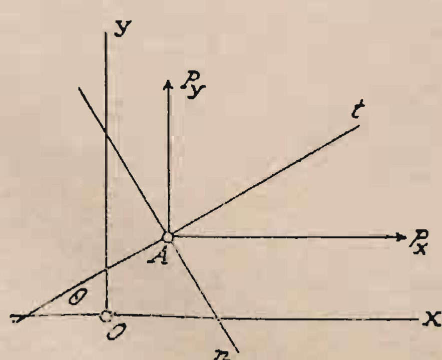

Fig. 52.

Gdy podstawimy $p_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $p_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}$,

$\sin\vartheta = \frac{dy}{ds}$, to wypadnie

$$p_t = \frac{d^2x dx + d^2y dy}{dt^2 ds} \tag{3}$$

$$p_n = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{dt^2 ds} \tag{4}$$

Wiemy, że $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, różniczkując znajdziemy, że $\frac{d^2x\, dx + d^2y\, dy}{dt^2} = vdv$. Skutkiem tego (3) przekształci się na $p_t = \frac{vdv}{ds}$, lecz $ds = vdt$, zatem $p_t = \frac{dv}{dt}$.

Wiemy dalej, że $\varrho = \frac{ds^3}{d^2ydx - d^2xdy}$, a zatem $\frac{d^2ydx - d^2xdy}{ds} = $ $= \frac{ds^3}{\varrho}$ i $p_n = \frac{ds^2}{\varrho dt^2} = \frac{v^2}{\varrho}$.

Przyjmowaliśmy w tym dowodzie, że ruch punktu jest płaski. Jeżeli torem jest krzywa przestrzenna, to jednak możemy uważać, że w czasie $dt$ ruch odbywa się w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru, a więc jest płaski. Z tego wyciągamy wniosek, że dowód powyższy jest ważny ogólnie.

Zobaczymy teraz, jakie znaczenie posiadają te składowe przyśpieszenia $p_t$ i $p_n$. W tym celu załóżmy, że wciąż $p_t = 0$, czyli $\frac{dv}{dt} = 0$. Z równania tego wynika, że szybkość jest stała pod względem wielkości czyli, że ruch jest jednostajny. Można więc powiedzieć, że dzięki prszyśpieszeniu stycznemu szybkość zmienia się co do wielkości.

Jeżeli ruch nie jest jednostajny, to przyśpieszenie styczne może znikać w pewnych chwilach wyjątkowych, a mianowicie wówczas, gdy szybkość osiąga maksymum lub minimum.

Załóżmy następnie, że wciąż $p_n = 0$, czyli $\frac{v^2}{\varrho} = 0$. Szybkość $v$ nie jest zerem, bo mówimy o punkcie w ruchu, a zatem $\frac{1}{\varrho} = 0$; z tego wynika, że torem punktu jest linja prosta. Możemy więc znowu powiedzieć, że dzięki przyśpieszeniu normalnemu szybkość zmienia się co do kierunku.

Jeżeli tor nie jest prosty, to przyśpieszenie normalne może znikać tylko w chwilach wyjątkowych, mianowicie na przegięciach toru, bo tam krzywizna jest zerem, albo gdy szybkość jest zerem, jak np. w chwili ruszania, albo w chwili zmiany kierunku ruchu.

Prz. 1. Pocisk został wyrzucony z szybkością początkową $v_0$ pod kątem $\alpha$. Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie najwyższym. Odp. $\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

Prz. 2. Torem punktu jest łańcuchowa, której parametr $= a$. Szybkość w wierzchołku była równa $c$, a przyśpieszenie tworzy wciąż jednakowe kąty ze styczną i normalną. Wyznaczyć szybkość i przyśpieszenie w funkcji kąta $\vartheta$, który styczna tworzy z kierownicą. Odp. $v = ce^{\vartheta}$, $p = \frac{\sqrt{2}\, c^2 e^{2\vartheta} \cos^2 \vartheta}{a}$.

Prz. 3. Torem punktu jest cykloida, przyśpieszenie jest wciąż skierowane prostopadle do podstawy, i wiadomo, że punkt przybywa do wierzchołka z szybkością $c$. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcji promienia krzywizny.

Rozkładając przyśpieszenie na składowe styczną i normalną, otrzymamy $\frac{dv}{dt} = -p \cos \frac{\vartheta}{2}$ i $v^2 = 4ap \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, gdzie $a$ oznacza promień koła tworzącego i $\vartheta$ kąt, o który się to koło obróciło. Z tego wypadnie $v = \frac{c}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$ i $p = \frac{64 a^3 c^2}{\rho^4}$.

Prz. 4. Punkt obiega cykloidę, w której promień koła tworzącego $= a$, przyczem styczna do toru obraca się ze stałą szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć przyśpieszenie. Odp. $v = \omega\rho$, i $p = 4a\omega^2$.

Prz. 5. Odwijamy nić z koła o promieniu $a$, utrzymując ją w naprężeniu, przytem promień, przechodzący przez punkt zetknięcia, obraca się ze stałą szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć przyśpieszenie końca nici i okazać, że odcinek, łączący ten koniec z punktem, położonym na owym promieniu w odległości średnicy koła od środka, wyraża przyśpieszenie w odpowiedniej skali co do wielkości i kierunku.

Prz. 6. Punkt posiada przyśpieszenie równoległe do osi $y$ i proporcjonalne do kwadratu promienia krzywizny toru, a przebiegając przez początek układu $O$, posiadał szybkość $v_0$, skierowaną według osi $x$; promień krzywizny toru w $O$ wynosi $a$. Wyznaczyć równanie toru.

Należy zastosować oczywiste związki

$$p_y \frac{dx}{ds} = \frac{v^2}{\rho}, \quad p_y \frac{dy}{ds} = \frac{dv}{dt}.$$

Z pierwszego wynika, że $\rho = \frac{av}{v_0}$, a z drugiego, że $v = v_0 e^{\frac{y}{a}}$.

Wstawiwszy $v = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}$, otrzymamy przez całkowanie równanie szukane $y = -a \lg \cos\left(\frac{x}{a}\right)$. Krzywa ta jest symetryczna względem osi $y$ i posiada asymptoty $x = \frac{\pi a}{2}$, $x = -\frac{\pi a}{2}$.

Prz. 7. Przyśpieszenie punktu ruchomego $A$ posiada dwie składowe, przechodzące przez stałe punkty $O_1$, $O_2$ i odwrotnie proporcjonalne do odległości od tych punktów; współcz. proporcjonalności $= k$. Tor przechodzi przez środek $O$ odcinka $O_1O_2$, szybkość jest stała co do wielkości, i $O_1O_2 = 2a$. Wyznaczyć tor punktu i szybkość.

Oczywiście $p_t = 0$, czyli $p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} = 0$, co się przekształci łatwo na $\frac{\cos \vartheta_1 dx + \sin \vartheta_1 dy}{r_1} + \frac{\cos \vartheta_2 dx + \sin \vartheta_2 dy}{r_2} = 0$, gdzie $r_1$, $r_2$ oznaczają promienie wodzące $O_1A$ i $O_2A$, a $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ kąty, które te promienie tworzą z osią $x$. Licznik pierwszego ułamka jest to rzut łuku elementarnego $ds$ na $r_1$, a zatem $= dr_1$; tak samo licznik drugiego $= dr_2$, otrzymamy zatem $r_1r_2 = a^2$. Równanie to wskazuje, że torem jest lemniskata. Przyśpieszenie $p = \frac{2kr}{a^2}$, gdzie $r$ oznacza promień $OA$. Aby wyznaczyć szybkość stosujemy wzór na $p_n$ do punktu przecięcia toru z osią $x$ (promień krzywizny wyznaczyliśmy w prz. 7 par. 37, gdzie jednak oznaczenia są odmienne). Wypadnie $v^2 = \frac{4k}{3}$.

**59. Współrzędne biegunowe.** Gdy równania ruchu są dane we współrzędnych biegunowych, a pragniemy wyznaczyć przyśpieszenie, to wyznaczamy naprzód rzuty jego na promień wodzący i na prostą $u$, prostopadłą do promienia, jak to czyniliśmy dla szybkości (par. 17).

Rzuty te oznaczymy przez $p_r$ i $p$. Każdy z nich jest oczywiście równy sumie rzutów składowych $p_x$ i $p_y$ na odpowiednią prostą, a więc będzie

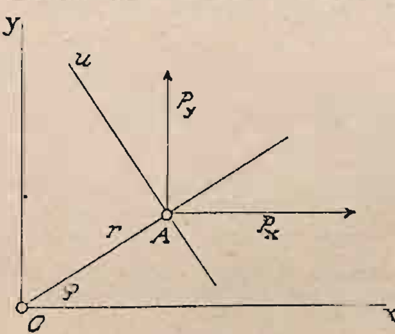


Fig. 53.

$$p_r = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi$$

$$p_\varphi = - p_x \sin \varphi + p_y \cos \varphi,$$

albo
$$p_r = \frac{d^2x \cos \varphi + d^2y \sin \varphi}{dt^2} \qquad (1)$$

$$p_\varphi = \frac{-d^2x \sin \varphi + d^2y \cos \varphi}{dt^2} \qquad (2).$$

Aby wzory te przekształcić odpowiednio do celów naszych, różniczkujemy dwa razy równania $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, uważając przytem zarówno $r$, jak i $\varphi$ za funkcje zmiennej $t$. Wypadnie

$$d^2x = \cos\varphi\, d^2r - 2\sin\varphi\, d\varphi\, dr - r\cos\varphi\, d\varphi^2 - r\sin\varphi\, d^2\varphi \quad (3)$$

$$d^2y = \sin\varphi\, d^2r + 2\cos\varphi\, d\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi^2 + r\cos\varphi\, d^2\varphi \quad (4).$$

Mnożąc (3) przez $\cos\varphi$, a (4) przez $\sin\varphi$ i dodając, znajdziemy, że licznik prawej strony (1) jest równy $d^2r - rd\varphi^2$, a zatem

$$p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (5).$$

Pomnóżmy następnie (3), (4) odpowiednio przez $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$ i dodajmy; znajdziemy, że licznik prawej strony (2) jest równy $2d\varphi\, dr + rd^2\varphi$, a zatem

$$p_\varphi = 2\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6)$$

Wzorowi temu nadamy jeszcze inną postać. Oczywiście $p_\varphi = \frac{1}{r}\left(2r\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$, a to, co stoi w nawiasie, jest pochodną od $r^2\frac{d\varphi}{dt}$, zatem

$$p_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad (7).$$

Mając równania ruchu $r = f(t)$ i $\varphi = g(t)$, możemy przy pomocy wzorów powyższych wyznaczyć $p_r$ i $p_\varphi$, a gdy mamy te składowe, to mamy i przyśpieszenie $p$ co do wielkości i kierunku.

Prz. 1. Równania ruchu punktu są $r = ae^{\omega t}$, $\varphi = \omega t$; wyznaczyć przyśpieszenie. Odp. Przyśpieszenie jest prostopadłe do promienia wodzącego i równe $2\omega^2 r$.

Prz. 2. Punkt $A$ obiega koło o promieniu $a$, przyczem przyśpieszenie jest skierowane do stałego punktu $O$, położonego na obwodzie. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcji promienia wodzącego $OA = r$. Odp. Obieramy $O$ za biegun, a średnicę za oś biegunową; $p_\varphi = 0$, a zatem $r^2\frac{d\varphi}{dt} = C$, gdzie $C$ jest stałą dowolną. $p = p_r = -\frac{8C^2a^2}{r^5}$.

Prz. 3. Torem punktu jest elipsa, a przyśpieszenie jest wciąż zwrócone do jej ogniska $F$; okazać, że jest ono odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od $F$.

Jeżeli $F$ obierzemy za biegun, a wielką oś elipsy za oś biegunową, to równanie toru będzie $r = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}$. Można skrócić rachunek, wprowadzając zamiast $r$ nową zmienną $u = \frac{1}{r}$.

Prz. 4. Przyśpieszenie punktu ruchomego $M$ jest wciąż skierowane do stałego punktu $O$ i równe $\frac{k^2}{r^3}$, gdzie $r$ oznacza odległość $OM$, a $k^2$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Punkt $M$ wyruszył z położenia $A$, odległego o $a$ od $O$ z szybkością $\frac{k}{a}$, tworzącą z $OA$ kąt 45°. Wyznaczyć tor punktu $M$.

Odp. Równanie toru $r = ae^{\varphi}$, jeżeli $AO$ jest osią biegunową, a $O$ biegunem.

Prz. 5. Punkt posiada stałą szybkość $a\omega$, a jego promień wodzący $r$, wyprowadzony ze stałego bieguna $O$, obraca się z szybkością kątową $\frac{r\omega}{a}$. Wyznaczyć tor i przyśpieszenie. Odp. Torem jest lemniskata, a przyśpieszenie $= 3\omega^2 r$.

**60. Ruch względny.** Z kolei rzeczy wypada teraz rozwiązać zagadnienie takie: dany jest ruch punktu $M$ względem układu $S$, a także ruch układu $S$ względem innego układu, który uważamy za nieruchomy; chodzi o wyznaczenie przyśpieszenia punktu $M$ w ruchu bezwzględnym.

Przypuśćmy, że w chwili $t$ punkt $M$ zajmuje punkt $A$ układu $S$. Szybkość bezwzględna $v$ punktu $M$ posiada dwie składowe, a mianowicie szybkość unoszenia $u$ i szybkość względną $w$. Zobaczymy, jakie przyrosty każda z tych składowych przybierze w ciągu następnego okresu $dt$.

W chwili $t+dt$ punkt $M$ zajmie nowy, nieskończenie bliski, punkt układu $S$, np. punkt $B$, który posiada już obecnie szybkość, różniącą się od szybkości punktu $A$, czyli od $u$, o nieskończenie mały przyrost geometryczny $\delta u_1$. Gdy więc $M$ przechodzi z $A$ do $B$, to jego szybkość unoszenia musi przedewszystkiem przybrać ten przyrost $\delta u_1$

Jeżeli ruch układu $S$ jest postępowy, to szybkości punktów $A$ i $B$ nie różnią się ani co do wielkości, ani co do kierunku, a więc w tym przypadku $\delta u_1 = 0$.

Lecz w ciągu $dt$ sek. szybkość punktu $B$ się zmieni, a mianowicie przybierze nieskończenie mały przyrost geometryczny, który oznaczymy przez $\delta u_2$. Oczywiście szybkość unoszenia punktu $M$ przybierze i ten przyrost $\delta u_2$. Szybkości nieskończenie bliskich punktów $A$ i $B$ różnią się nieskończenie mało co do wielkości i kierunku, a różnice pomiędzy wielkościami oraz kierunkami przyrostów, które te szybkości przybiorą w ciągu czasu $dt$, są nieskończenie małemi wyższych rzędów. Z tego wynika, że możemy $\delta u_2$ uważać także za przyrost szybkości punktu $A$ w czasie $dt$.

Zobaczymy teraz, jakie przyrosty przybierze szybkość względna $w$. Tor względny punktu $M$ przechodzi przez punkty $A$ i $B$, i szybkość względna w chwili $t$ posiada kierunek elementu $AB$. Element ten jest ruchomy i w chwili $t+dt$ zajmie w przestrzeni jakieś nowe położenie $A'B'$ nierównoległe do $AB$. Oczywiście więc skutkiem tego przesunięcia szybkość względna $w$ punktu $M$ zmieni kierunek, czyli przybierze przyrost geometryczny $\delta w_1$; jest to przyrost nieskończenie mały, bo odchylenie elementu $AB$ od pierwotnego położenia jest nieskończenie małe.

Jeżeli ruch układu $S$ jest postępowy, to prosta $A'B'$ jest równoległa do $AB$, i $\delta w_1 = 0$.

Szybkość względna $w$ przybierze jeszcze inny przyrost, pochodzący stąd, że szybkość ta zmienia się pod względem wielkości i że tor względny posiada pewną krzywiznę. Przyrost ten oznaczymy przez $\delta w_2$. Jest on równy zeru, jeżeli ruch względny punktu $M$ jest prostolinjowy i jednostajny.

W chwili $t+dt$ szybkość bezwzględna punktu $M$ będzie sumą geometryczną szybkości $u$ i $w$ oraz tych wszystkich przyrostów, które składowe te otrzymały w okresie $dt$. Wypadkową szybkości $u$ i $w$ jest szybkość $v$, a wypadkową przyrostów $\delta u_1$, $\delta u_2$, $\delta w_1$, $\delta w_2$ oznaczmy przez $\delta v$. Oczywiście $\delta v$ jest to przyrost geometryczny, który w czasie $dt$ otrzymała szybkość bezwzględna $v$, a zatem przyśpieszenie punktu $M$ w ruchu bezwzględnym, czyli *przyśpieszenie bezwzględne*, ma kierunek tego przyrostu $\delta v$, a co do wielkości jest równe $\frac{\delta v}{dt}$.

Jest rzeczą równie oczywistą, że to przyśpieszenie posiada cztery składowe; kierunki ich są zgodne z kierunkami owych czterech przyrostów, a wielkości wynoszą

$$\frac{\delta u_1}{dt} = p_1, \quad \frac{\delta u_2}{dt} = p_2, \quad \frac{\delta w_1}{dt} = q_1, \quad \frac{\delta w_2}{dt} = q_2.$$

Składowe $p_1$ i $q_1$ nazwiemy tymczasem przyśpieszeniami Coriolisa. Mają one pewną ważną wspólną właściwość: obydwie są równe zeru, gdy ruch unoszenia jest postępowy, bo w takim razie przyrosty $\delta u_1$ i $\delta w_1$ są zerami. Z tego wynika, że gdyby do ruchu, który układ $S$ posiada istotnie, dołączył się jakiś ruch postępowy, to przyśpieszenia Coriolisa nie uległyby zmianie. Przy wyznaczaniu tych przyśpieszeń nie potrzeba zwracać uwagi na ruch postępowy układu $S$. Z okoliczności tej skorzystamy w dalszym ciągu.

Składowa $p_2$ jest to po prostu przyśpieszenie punktu $A$, t. j. tego punktu układu $S$, który zajmuje obecnie punkt $M$. Nazwiemy ją *przyśpieszeniem unoszenia.*

Składowa $q_2$ jest to przyśpieszenie punktu $M$ w ruchu względnym. Nazwiemy ją *przyśpieszeniem względnem.*

**61. Przyśpieszenie Coriolisa.** Jeżeli znamy ruch układu $S$, to możemy wyznaczyć przyśpieszenie punktu $A$, t. j. przyśpieszenie unoszenia $p_2$ punktu $M$. Jeżeli znamy ruch względny punktu $M$, to możemy wyznaczyć jego przyśpieszenie względne $q_2$. Chodzi więc tylko o to, jak się wyznacza obydwa przyśpieszenia Coriolisa.

Rozwiążemy to zagadnienie naprzód w pewnym przypadku szczególnym. Założymy mianowicie, że układ $S$ jest płaski i porusza się w swej płaszczyźnie, i że w tej samej płaszczyźnie porusza się punkt $M$.

Rozłóżmy ruch układu $S$ na dwa ruchy składowe, na ruch postępowy o szybkości punktu $A$ i na ruch obrotowy około punktu $A$. Pierwszy z tych ruchów nie wywiera wpływu na przyśpieszenie Coriolisa, możemy więc pominąć go całkowicie i uważać, że układ $S$ obraca się w chwili obecnej około punktu $A$ z szybkością kątową, dajmy na to, $\omega$.

Tak więc obecnie punkt $M$ zajmuje nieruchomy punkt $A$ i posiada szybkość względną $w$. Za $dt$ sek. $M$ dojdzie do punktu $B$, leżącego na linji tej szybkości w odległości $wdt$ od $A$. Szybkość punktu $B$ wynosi obecnie $wdt \,.\, \omega$, i temu właśnie jest równy przyrost szybkości $\delta u_1$, a przyśpieszenie $p_1 = w\omega$. Oczywiście szybkość punktu $B$ jest prostopadła do szybkości względnej $w$ i zwrócona w tę stronę, w którą dąży koniec szybkości względnej $w$ skutkiem obrotu układu $S$ około punktu $A$.

W czasie $dt$ układ $S$ obróci się około $A$ o kąt $\omega dt$, i o tyle zmieni się kierunek szybkości względnej $w$. Koniec jej zatoczy łuk $\omega dt \,.\, w$. Możemy ten nieskończenie krótki łuk uważać za przyrost geometryczny szybkości $w$, czyli za $\delta w_1$, a zatem drugie przyśpieszenie Coriolisa $q_1 = w\omega$ i posiada oczywiście ten sam kierunek, co i pierwsze.

Widzimy, że $p_1$ i $q_1$ są zgodne co do kierunku i wielkości; wypadkowa ich, równa $2w\omega$, jest prostopadła do szybkości względnej punktu $M$ i zwrócona w tę stronę, w którą dąży koniec tej szybkości skutkiem ruchu obrotowego układu $S$ około punktu $A$.

W dalszym ciągu będzie mowa tylko o tej wypadkowej, i ją właśnie będziemy nazywali *przyśpieszeniem Coriolisa.*

Przy pomocy twierdzeń powyższych można odrazu napisać wzory na $p_r$ i $p_\varphi$, czyli na przyśpieszenie punktu w kierunku promienia wodzącego i w kierunku prostopadłym, wzory, które w par. 59 otrzymaliśmy, jako wynik dość długiego rachunku.

Uważamy, że promień wodzący obraca się z szybkośeią kątową $\frac{d\varphi}{dt}$ około bieguna $O$, a punkt $M$ wędruje po promieniu wodzącym z szybkością względną $\frac{dr}{dt}$. Przyśpieszenie bezwzględne punktu $M$ posiada składowe następujące:

(1) Przyśpieszenie unoszenia, t. j. przyśpieszenie tego punktu $A$ promienia wodzącego, w którym znajduje się obecnie punkt $M$. Torem punktu $A$ jest koło o promieniu $OA = r$, a szybkość wynosi $r\frac{d\varphi}{dt}$. Przyśpieszenie jego rozłożymy odrazu na składowe w kierunku $OA$ i w kierunku prostopadłym do $OA$, czyli na składową normalną i styczną. Pierwsza jest równa $-\frac{1}{r}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$; kładziemy znak —, gdyż składowa ta jest zwrócona do bieguna. Składowa styczna $= \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, bo promień $r$ jest dla punktu $A$ wielkością stałą.

(2) Przyśpieszenie względne jest oczywiście równe $\frac{d^2r}{dt^2}$ i skierowane według toru względnego, czyli promienia wodzącego.

(3) Przyśpieszenie Coriolisa, prostopadłe do szybkości względnej, czyli do promienia wodzącego, i równe $2\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}$.

Zebrawszy wszystkie składowe w kierunku promienia wodzącego oraz w kierunku prostopadłym, otrzymamy wzory, znane już z par. 59.

Prz. 1. Tarcza okrągła o promieniu $a$ obraca się około środka ze stałą szybkością kątową $\omega$, a brzegiem tarczy biegnie punkt $M$ ze stałą szybkością względną $w$. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne punktu $M$. Odp. Przyśpieszenie to jest skierowane do środka tarczy i równe $(a\omega + 2w)\omega + \frac{w^2}{a}$. Jaka powinna być szybkość względna, aby przyśpieszenie było równe zeru?

Prz. 2. Sztaba obraca się około swego końca z szybkością kątową stałą. Z końca tego wyszedł punkt $M$ z początkową szybkością równą zeru i wędruje po sztabie ze stałem przyśpieszeniem $p$. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne, które posiadał punkt $M$ w chwili, gdy tworzyło ze sztabą kąt $45^0$. Odp. $Ap(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Prz. 3. Układ $S$ obraca się około punktu $O$ ze stałą szybkością kątową $\omega$, a szybkość względna $w$ punktu $M$ jest stała co do wielkości. Jaki powinien być tor względny punktu $M$, aby jego przyśpieszenie bezwzględne było stale skierowane do punktu $O$? Odp. Koło o promieniu $\frac{w}{2\omega}$, położone dowolnie, albo koło o promieniu dowolnym, zatoczone z $O$.

Prz. 4. Punkt $M$ posiada ruch harmoniczny na prostej $x$; środkiem tego ruchu jest punkt $O$, okres wynosi $\frac{2\pi}{\omega}$, a amplituda $2a$. Prosta $x$ jest ruchoma, a mianowicie obraca się około $O$ z szybkością kątową $\omega$. Dowieść, że koniec przyśpieszenia bezwzględnego punktu $M$ zatacza około niego okrąg o promieniu $2a\omega^2$. Prócz tego wyznaczyć tor bezwzględny punktu $M$.

Prz. 5. Tarcza okrągła toczy się po linji prostej ze stałą szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu tarczy, odległego od środka o $r$. Odp. Wynosi ono $r\omega^2$ i jest skierowane do środka (zob. prz. 3 par. 54).

Prz. 6. Koło o promieniu $a$ toczy się po prostej $x$; w danej chwili środek $O$ posiada szybkość $v$ oraz przyśpieszenie $p$, i koło styka się z prostą $x$ w punkcie $A$. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu $B$, położonego tak na obwodzie, że kąt $AOB = \vartheta$. Odp. $p_x = \frac{v^2}{a}\sin\vartheta + p(1-\cos\vartheta)$, $p_y = \frac{v^2}{a}\cos\vartheta + p\sin\vartheta$.

**62. Przypadek ogólny.** Dajmy na to, że układ $S$ posiada ruch obrotowy około osi $z$, i szybkość względna punktu $M$ jest równoległa do tej osi. Punkty $A$ i $B$ układu $S$, które $M$ zajmuje w chwilach $t$ i $t+dt$, leżą na równoległej do osi, a zatem posiadają szybkości równe i równoległe. Z tego wynika, że przyrost $\delta u_1$ szybkości unoszenia i przyśpieszenie $p_1$ są zerami. W czasie $dt$ szybkość względna, jako równoległa do osi, nie zmieni kierunku skutkiem ruchu unoszenia, a zatem przyrost szybkości względnej $\delta w_1$ i przyśpieszenie $q_1$ są także zerami.

Tak więc w tym przypadku przyśpieszenie Coriolisa jest równe zeru.

Rozważymy teraz przypadek ogólny. Przypuśćmy, że układ $S$ posiada ruch śrubowy; oś oznaczymy przez $z$, a szybkości postępową i kątową przez $u$ i $\omega$. Przypuśćmy jeszcze, że szybkość względna $w$ punktu $M$ tworzy w rozważanej chwili z osią $z$ kąt $\vartheta$.

Ruch postępowy układu, jako nie mający wpływu na przyśpieszenie Coriolisa, możemy pominąć całkowicie, będziemy więc uważali, że układ posiada tylko ruch obrotowy około osi $z$.

Szybkość $w$ rozłożymy na dwie składowe w kierunkach równoległym i prostopadłym do osi $z$; są one odpowiednio równe $w \cos \vartheta$ i $w \sin \vartheta$. Gdyby istniała tylko pierwsza, to przyśpieszenie Coriolisa byłoby zerem, a więc przyśpieszenie to jest od niej niezależne, i możemy ją również pominąć.

Tym sposobem sprowadziliśmy przypadek ogólny do przypadku szczególnego, który rozważyliśmy już w paragrafie poprzedzającym.

Poprowadźmy przez obecne położenie punktu $M$ płaszczyznę **A**, prostopadłą do $z$ i przecinającą tę prostą w punkcie $O$. Wyznaczając przyśpieszenie Coriolisa, możemy uważać, że płaski układ $S$ obraca się w płaszczyźnie **A** około punktu $O$, i że w tejże płaszczyźnie porusza się punkt z szybkością względną $w \sin \vartheta$. Przyśpieszenie Coriolisa wynosi zatem $2w\omega \sin \vartheta$, leży w płaszczyźnie **A**, jest prostopadłe do składowej $w \sin \vartheta$ i zwrócone w tę stronę, w którą dąży koniec tej składowej skutkiem ruchu obrotowego około obecnego położenia punktu $M$; jest ono także prostopadłe do szybkości względnej $w$ i do osi $z$.

**63. Dowód analityczny.** Przytaczam jeszcze piękny dowód analityczny twierdzenia o przyśpieszeniu w ruchu względnym, zapożyczony z dzieła E. Villié „Traité de Cinématique". Może być, że dla niektórych czytelników dowód ten będzie łatwiejszy od poprzedniego. Mimochodem poznamy także dowód analityczny twierdzenia o równoległoboku szybkości.

Przystąpimy odrazu do przypadku najogólniejszego.

Niech więc będzie sztywny układ $S$, poruszający się jakkolwiek. Obieramy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy, początek jego oznaczymy przez $O$, a osi przez $x$, $y$, $z$, drugi należący do układu $S$ i poruszający się wraz z nim; początek tego drugiego oznaczymy przez $A$, a osi przez $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Niech współrzędne punktu $A$ w układzie nieruchomym będą $x_0$, $y_0$, $z_0$, a kosynusy kątów, które osi $\xi$, $\eta$, $\zeta$ tworzą z osiami nieruchomemi, odpowiednio $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$, $c_3$. Wszystkie te dziewięć wielkości zmieniają się podczas ruchu układu $S$, są to więc funkcje czasu. Niech będzie jeszcze punkt $M$, poruszający się jakkolwiek względem układu $S$. Współrzędne tego punktu w układzie nieruchomym oznaczymy przez $x$, $y$, $z$, a w ruchomym przez $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Oczywiście wzpółrzędna $x$ jest równa sumie rzutów odcinków $OA$ i $AM$ na oś $x$, a ponieważ ten drugi odcinek można uważać za sumę geometryczną odcinków $\xi$, $\eta$, $\zeta$, zatem $x$ jest sumą rzutów odcinków $OA$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ na oś $x$. Wynikają stąd następujące wzory przejścia od układu stałego do ruchmego:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \\ y &= y_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \\ z &= z_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Różniczkując te równania względem $t$, otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{da_1}{dt}\xi + \frac{da_2}{dt}\eta + \frac{da_3}{dt}\zeta + a_1\frac{d\xi}{dt} + a_2\frac{d\eta}{dt} + a_3\frac{d\zeta}{dt} \quad (2),$$

oraz dwa równania analogiczne.

Oznaczymy $\frac{dx}{dt}$ przez $v_x$, sumę pierwszych czterech wyrazów prawej strony przez $u_x$, sumę trzech wyrazów pozostałych przez $w_x$ i wprowadzimy oznaczenia analogiczne do dwóch równań następnych. Otrzymamy

$$\begin{aligned} v_x &= u_x + w_x \\ v_y &= u_y + w_y \\ v_z &= u_z + w_z. \end{aligned}$$

Oczywiście $v_x$, $v_y$, $v_z$, $u_x$, $u_y$, $u_z$, $w_x$, $w_y$, $w_z$ są odpowiednio rzutami na osi nieruchome pewnych wektorów $v$, $u$, $w$, z których pierwszy jest wypadkową dwóch pozostałych. Zobaczymy, jakie znaczenie cynematyczne posiadają te wektory.

Pierwszy z nich $v$ jest oczywiście szybkością bezwzględną punktu $M$. Aby wykryć rolę wektora $u$ oznaczmy przez $B$ ten punkt układu $S$, który obecnie zajmuje punkt $M$. Współrzędne punktu $B$ w obydwóch układach są takie same, jak współrzędne punktu $M$, z tą jedynie różnicą, że tu $\xi$, $\eta$, $\zeta$ są stałe. Znajdziemy więc składową szybkości punktu $B$ w kierunku osi $x$, zakładając w (2), że $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ są zerami; wypadnie $u_x$. Z tego wynika, że $u$ jest szybkością punktu $B$, czyli szybkością unoszenia punktu $M$.

Przypuśćmy teraz, że układ $S$ jest nieruchomy, a zatem $x_0$, $y_0$, $z_0$ i wszystkie kosynusy kierunkowe są stałe, a ich pochodne są zerami. Zakładając to w (2), przekonamy się, że w tym razie składowe szybkości w kierunkach osi stałych są odpowiednio równe $w_x$, $w_y$, $w_z$, a więc $w$ jest to szybkość punktu $M$ względem układu $S$, uważanego za nieruchomy, czyli szybkość względna. Jest to i skądinąd oczywiste. Pochodne $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ są to składowe szybkości względnej punktu $M$ w kierunkach osi $\xi$, $\eta$, $\zeta$; tworzą one z osią $x$ kąty, których kosynusy są odpowiednio równe $a_1$, $a_2$, $a_3$, a zatem suma trzech ostatnich wyrazów w (2) jest równa rzutowi szybkości względnej punktu $M$ na oś $x$.

Dowiedliśmy więc twierdzenie, że szybkość bezwzględna punktu $M$ jest wypadkową szybkości względnej i szybkości unoszenia.

Aby otrzymać twierdzenie o przyśpieszeniu różniczkujemy (2) względem $t$. Wypadnie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2a_1}{dt^2}\xi + \frac{d^2a_2}{dt^2}\eta + \frac{d^2a_3}{dt^2}\zeta + a_1\frac{d^2\xi}{dt^2} + a_2\frac{d^2\eta}{dt^2} + a_3\frac{d^2\zeta}{dt^2} +$$
$$+ 2\left(\frac{da_1}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{da_2}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{da_3}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \qquad (3).$$

Oznaczmy lewą stronę przez $p_x$, sumę czterech pierwszych wyrazów prawej strony przez $q_x$, sumę trzech dalszych wyrazów przez $r_x$, a wyrażenie w nawiasie przez $s_x$. Uczyniwszy to samo w dwóch równaniach pozostałych, otrzymamy

$$p_x = q_x + r_x + 2s_x$$
$$p_y = q_y + r_y + 2s_y$$
$$p_z = q_z + r_z + 2s_z.$$

Z tego wynika, że wektor $p$ jest wypadkową wektorów $q$, $r$ i $2s$.

Rozumując, jak poprzednio, dojdziemy z łatwością, co oznaczają wektory $p$, $q$ i $r$. Pierwszy jest to przyśpieszenie bezwzględne punktu $M$, drugi jest przyśpieszeniem punktu $B$, czyli przyśpieszeniem unoszenia punktu $M$, trzeci przyśpieszeniem względnem punktu $M$. Pozostaje jeszcze zbadać, co to jest wektor $s$.

Obieramy taki punkt $C$ układu $S$, aby odcinek $AC$ co do wielkości i kierunku był zgodny z szybkością względną $w$ punktu $M$. Współrzędne punktu $C$ w układzie ruchomym będą $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, a współrzędne w układzie nieruchomym oznaczmy przez $x_1$, $y_1$, $z_1$.

Oczywiście $$x_1 = x_0 + a_1\frac{d\xi}{dt} + a_2\frac{d\eta}{dt} + a_3\frac{d\zeta}{dt}$$
i t. d. Aby wyznaczyć szybkość punktu $C$ różniczkujemy te równania, pamiętając, że pochodne $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ są tu wielkościami stałemi. Otrzymamy

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{da_1}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{da_2}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{da_3}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt},$$

a zatem
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + s_x$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + s_y$$
$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + s_z.$$

Tak więc szybkość punktu $C$ posiada dwie składowe; jedna z nich jest zgodna co do wielkości i kierunku z szybkością punktu $A$, a druga z wektorem $s$.

Rozłóżmy ruch układu $S$ na dwa ruchy składowe, postępowy i obrotowy. Szybkość ruchu postępowego niech będzie zgodna co do wielkości i kierunku z szybkością punktu $A$; w takim razie oś $n$ ruchu obrotowego przechodzi przez ten punkt $A$. Jest rzeczą jasną, że wyżej wymienione składowe szybkości punktu $C$ pochodzą odpowiednio z tych ruchów postępowego i obrotowego. Dzięki tej okoliczności możemy wyrazić składową $s$ w sposób następujący.

Oznaczmy szybkość kątową ruchu obrotowego przez $\omega$, a kąt, który tworzy odcinek $AC$, lub szybkość względna $w$, z osią $n$ przez $\vartheta$. W takim razie odległość punktu $C$ od osi $n$ wynosi $w \sin\vartheta$ i $s = w\omega \sin\vartheta$. Tak więc trzecia składowa przyśpieszenia bezwzględnego punktu $M$ jest równa $2w\omega\sin\vartheta$ i oczywiście jest ona prostopadła do osi ruchu obrotowego, lub śrubowego, a także do szybkości względnej. Wszystko to jest zgodne z wynikami, do których doszliśmy w paragrafach poprzedzających.

Prz. Ciało biegnie wzdłuż południka ziemskiego z szybkością stałą $w$. Przy jakiej szybkości $w$ przyśpieszenie bezwzględne ciała jest niezależne od szerokości geograficznej, i ile wynosi przyśpieszenie w tym razie? Odp. $w = \frac{a\omega}{\sqrt{2}}$, gdzie $a$ oznacza promień ziemski, a $\omega$ szybkość kątową ziemi; inaczej $w = 336$ metrów na sekundę. Przyśpieszenie $= \frac{3a\omega^2}{2}$.