# NAUKA O RUCHU

# NAUKA O RUCHU
## (CYNEMATYKA I DYNAMIKA)

Z LICZNEMI PRZYKŁADAMI

PRZEZ

ZYGMUNTA STRASZEWICZA
PROFESORA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WYDANIE DRUGIE

LWÓW—WARSZAWA—KRAKÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WARSZAWA, KSIĘGARNIA WŁASNA, UL. NOWY ŚWIAT L. 69
KRAKÓW, FILJA WYDAWNICTWA, ULICA ŚW. ANNY L. 11
POZNAŃ, SKŁAD GŁÓWNY: KSIĘGARNIA ŚW. WOJCIECHA
1923

Z DRUKARNI ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH WE LWOWIE
pod zarządem Józefa Ziembińskiego.

# PRZEDMOWA

## DO PIERWSZEGO WYDANIA

Książka niniejsza zawiera wykład cynematyki i dynamiki, odpowiadający w głównych rysach kursowi, który wygłosiłem w r. 1916/7 na wydziale Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej. Jest to więc wykład mechaniki teoretycznej (z pominięciem statyki), przystosowany do potrzeb technika i skutkiem tego odbiegający dość daleko od wielu podręczników, które uwzględniają raczej potrzeby astronoma i fizyka. Dotyczy to w równej mierze treści jak i metody. Licząc się więc z potrzebami współczesnego inżyniera, poświęciłem stosunkowo dużo miejsca cynematyce ciała sztywnego, reakcjom w łożyskach i przegubach, naprężeniom, powstającym w ciele podczas ruchu i t. d. Co się tyczy metody to dawałem wszędzie, gdzie to było możliwe, pierwszeństwo metodzie geometrycznej, gdyż zdaniem mojem jest ona dla danego celu odpowiedniejsza od analitycznej. Opanowanie należyte aparatu analitycznego jest rzeczą niełatwą i wymaga długiej pracy, na którą nie każdy technik może się zdobyć. Kto zaś nie włada w dostatecznym stopniu metodą, temu zawiłości rachunku przysłaniają często badane zjawisko. Metoda geometryczna ujmuje rzecz bardziej bezpośrednio i skutkiem tego daje wyraźniejszy obraz zjawiska zwłaszcza dla umysłów mniej wyszkolonych matematycznie.

Przy studjowaniu mechaniki niezbędne są ciągłe ćwiczenia, gdyż tylko tą drogą uczący się może osiągnąć całkowitą asymilację poznanej teorji i zapanować nad zjawiskami mechanicznemi. Pragnąc dostarczyć czytelnikowi materjału do ćwiczeń, zebrałem w książce kosztem niemałej pracy pokaźną liczbę zadań, starając się, aby były interesujące i istotnie kształcące, t. j. aby nietylko rozwijały wprawę w stosowaniu wzorów i metod, lecz aby jednocześnie wzbogacały wiedzę mechaniczną czytelnika. Zadania te nie stanowią odrębnego zbioru, lecz są umieszczone w różnych rozdziałach tak, że czytelnik, poznawszy nowe twierdzenie, znajduje zaraz materjał do stosownych ćwiczeń. Czerpałem je z różnych źródeł. Niektóre z nich są mego własnego pomysłu, inne zapożyczyłem z dzieł Appella, Castellano, Wittenbauera, Crabtree, Besanta, Waltona, Routha, Whittakera, Graya, Love'a i innych; przeważna część, zwłaszcza z dynamiki, jakkolwiek zaczerpnięta przezemnie z dzieł wymienionych autorów, pochodzi z aktów egzaminacyjnych uniwersytetów angielskich.

Do zrozumienia książki potrzebna jest znajomość zasad rachunków różniczkowego i całkowego wraz z elementami równań różniczkowych, a także podstawowych twierdzeń statyki.

Warszawa w grudniu 1917 r.

AUTOR.

## DO DRUGIEGO WYDANIA

Wydanie drugie różni się w dość licznych szczegółach od pierwszego; zmiany miały na celu uczynić wykład prostszym i przejrzystszym. Prócz tego pomnożyłem liczbę zadań, zwłaszcza cynematycznych. Zaczerpnąłem je w znacznej części z książki M. Grüblera „Getriebelehre“.

Warszawa w październiku 1921 r.

AUTOR.

# SPIS RZECZY

## Wstęp.



# CYNEMATYKA.

## I. Szybkość punktu.



## II. Pole szybkości.

## III. Przyśpieszenie punktu.



## IV. Pole przyśpieszeń.

# DYNAMIKA

## V. Prawa Newtona.



## VI. Siła żywa i ilość ruchu.



## VII. Szkielet dynamiczny ciała.

## VIII. Zasady dynamiki ciała sztywnego.



## IX. Ruch obrotowy ciała sztywnego.



## X. Ruch płaski ciała sztywnego.



## XI. Ruch kulisty.

## XII Siły chwilowe.

# WSTĘP

**1. Skalary.** Wielkości, z któremi mamy do czynienia w mechanice, można podzielić na dwie kategorje: *skalary* i *wektory*. Skalar jest to wielkość, nie pozostająca w związku z żadnym określonym kierunkiem przestrzeni. Daje się ona całkowicie określić jedną liczbą jednostek znanych. Tak np. skalarem jest czas. Gdy powiedziano, że pewne wydarzenie trwało tyle a tyle godzin czy minut, to czas trwania tego wydarzenia jest całkowicie określony.

Zamiast podawać liczbę, można wskazać odcinek odpowiedniej skali. Skala taka urządza się na linji prostej, albo na jakiej innej linji. Pewna znana długość, odmierzona na tej linji, odpowiada obranej jednostce. Skala czasu urządza się najczęściej na okręgu koła i zazwyczaj godzinie odpowiada łuk długości $\frac{\pi r}{6}$, gdzie $r$ oznacza promień koła.

Prócz czasu do skalarów należą masa, praca, siła żywa, potencjał i in.

**2. Wektory.** Wektor jest to wielkość, pozostająca w związku z pewnym kierunkiem przestrzeni. Wektor nie daje się całkowicie określić zapomocą jednej liczby, gdyż trzeba jeszcze wskazać ów kierunek. Tak więc wektor należy określać *pod względem wielkości i pod względem kierunku.*

Prostym przykładem wektora jest przesunięcie jakiegoś drobnego przedmiotu, powiedzmy punktu ruchomego. Dajmy na to, że punkt ten zajmuje znane położenie $A$ i wiadomo, że ma być przesunięty o 3 metry. Dane te nie określają jeszcze przesunięcia, gdyż na ich zasadzie nie umielibyśmy wskazać, gdzie znajdzie się punkt ruchomy po dokonaniu przesunięcia. Wiadomo jedynie, że nowe położenie znajduje się gdzieś na powierzchni kuli, zatoczonej z punktu $A$ promieniem 3 m.

Jeżeli posługujemy się metodami analitycznemi, to określamy kierunek przesunięcia lub wogóle kierunek wektora tak, jak to się robi w geometrji analitycznej, t. j. zapomocą odpowiednich kątów kierunkowych. Jeżeli stosujemy metody wykreślne, to określamy kierunek wektora odcinkiem prostej, na którym jeszcze wskazać potrzeba, w którą stronę jest zwrócony wektor. Jeżeli więc odcinek $MN$ ma określać kierunek przesunięcia, to należy wskazać, np. zapomocą grotu, czy przesunięcie ma się odbyć w stronę od $M$ do $N$, czy też w stronę odwrotną. W przypadku pierwszym punkt $M$ zowie się *początkiem* odcinka, a $N$ *końcem*.

Pod względem wielkości wektor określa się tak samo, jak skalar, a więc liczbą albo długością, wskazaną na skali. Dogodnie jest odznaczać tę długość na tym samym odcinku, który ma wskazywać kierunek, albo wprost nadawać odcinkowi temu taką właśnie długość. Odcinek taki określa wektor nietylko co do kierunku, ale i co do wielkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że na przyjętej skali przesunięć przesunięciu jednego metra odpowiada jeden centymetr. W takim razie przesunięcie, o którem wyżej była mowa, będzie całkowicie określone odcinkiem $MN$, wskazującym kierunek przesunięcia i posiadającym długość 3 cm.

Do kategorji wektorów należą: siła, moment, szybkość, przyśpieszenie i t. d.

**3. Rodzaje wektorów.** Przesunięcie punktu ruchomego z danego położenia $A$ nazywamy *wektorem, związanym z punktem A*. Umówiono się obierać początek odcinka $MN$, który ma określać przesunięcie, właśnie w tym punkcie $A$. Tym sposobem, mając dany odcinek $MN$, nietylko znamy przesunięcie co do wielkości i kierunku, ale wiemy jeszcze, z jakiego położenia wyrusza punkt przesuwany.

Przypuśćmy teraz, że chodzi o przesunięcie nie punktu, lecz cienkiego, sztywnego i prostego pręta, powiedzmy linji prostej, w kierunku tejże prostej. Oczywiście wszystkie punkty tej prostej doznają jednakowych przesunięć zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku. Gdy znamy przesunięcie jednego, to znamy przesunięcie i wszystkich innych, a zatem takie przesunięcie prostej możemy całkowicie określić zapomocą jednego odcinka. Początek tego odcinka obierzemy naturalnie w jednym z punktów przesuwanej prostej, w którymkolwiek, bo żaden nie wyróżnia się z pośród ogółu. Oczywiście i cały odcinek będzie leżał na tejże prostej. Takie przesunięcie prostej wzdłuż tej prostej nazywamy *wektorem, związanym z tą prostą.*

Dajmy teraz na to, że przesuwa się cała bryła, przyczem wszystkie jej punkty doznają przesunięć jednakowych, zarówno co do kierunku jak i co do wielkości. Początek odcinka, określającego takie przesunięcie, możemy obrać w dowolnym punkcie przestrzeni, uważając, że bryła rozciąga się w przestrzeni nieograniczenie. Takie przesunięcie bryły nazywa się *wektorem swobodnym.*

Wektory wogóle dzielą się na trzy kategorje: wektory, związane z punktami, wektory, związane z prostemi, i wektory swobodne. Wektor, związany z punktem, lub raczej odcinek, określający ten wektor, posiada zupełnie określone położenie w przestrzeni. Wektor, związany z prostą, musi pozostawać na pewnej określonej prostej, ale możemy go na niej przenosić dowolnie; wektor swobodny możemy dowolnie przenosić w przestrzeni.

4. **Przykłady.** Pojęcie siły uważamy za znane ze statyki. Siła posiada kierunek, a więc jest to wektor, i, jak wiadomo, możemy ją całkowicie określić zapomocą odcinka. Chodzi teraz o to, do której z trzech wyżej wymienionych kategoryj wektorów wypada zaliczyć siłę.

Zapomocą tego wektora daje się w pewnych razach całkowicie określić mechaniczne działanie jednego ciała na drugie, jak np. w tym razie, gdy ciało $A$ działa na ciało $B$ przez bezpośrednie zetknięcie, przyczem ciała te stykają się tylko w jednym punkcie $M$. Wyobrażamy sobie, że bezpośredniemu działaniu ciała $A$ podlega tylko ten element ciała $B$, do którego należy punkt $M$. Na inne elementy działanie przenosi się za pośrednictwem połączeń, które istnieją pomiędzy niemi. Punkt $M$ nazywamy *punktem przyłożenia* albo punktem zaczepienia siły. Prosta, przeprowadzona przez punkt przyłożenia w kierunku siły, zowie się *linią działania siły.*

Skutki działania siły zależą nietylko od jej wielkości i kierunku, ale także od punktu przyłożenia. Gdybyśmy przenieśli punkt przyłożenia do jakiegoś innego punktu, położonego na linji działania lub gdzie indziej, to wogóle skutek byłby inny. Aby się o tem przekonać, wyobraźmy sobie sznur, leżący na podłodze i tworzący linję prostą $MN$. Przyłóżmy do końca $N$ siłę, działającą na prostej $MN$ i zwróconą od $M$ do $N$ czyli nazewnątrz. Cały sznur zacznie się poruszać wzdłuż prostej *MN*. Gdybyśmy taką samą siłę, działającą na tejże prostej w tym samym kierunku, przyłożyli do końca *M*, to oczywiście wywołałaby ona zupełnie inny ruch sznura.

Z tego wynika, że siła jest to wektor związany z punktem. Twierdzenia o siłach, znane ze statyki, dotyczą przeważnie tak zw. *ciała sztywnego*, t. j. ciała, które nie odkształca się pod działaniem sił. Ciało sztywne jest to abstrakcja, do której jedynie mniej lub więcej zbliżają się takie ciała, jak żelazo, kamień, drzewo, gdy działające na nie siły nie są zbyt wielkie. Jeżeli siła działa na ciało sztywne, to skutki jej nie ulegają zmianie, gdy przenosimy punkt przyłożenia na linji działania. W tym więc razie siła jest wektorem, związanym z prostą.

W statyce ciała sztywnego mamy prócz siły inne zasadnicze pojęcie, a mianowicie *parę sił*. Zazwyczaj definjujemy parę, jako układ dwóch sił równych, równoległych i zwróconych w strony odwrotne. Trzy są odróżniające znamiona pary: płaszczyzna działania, zwrot czyli kierunek, w którym para usiłuje obrócić ciało, i wreszcie moment czyli iloczyn z jednej siły przez ramię. Wiadomo, że wszystkie te znamiona dadzą się wyrazić zapomocą jednego odcinka, opatrzonego grotem. Odcinek ten jest prostopadły do płaszczyzny pary, jest zwrócony tak, że dla osoby, patrzącej od końca do początku, zwrot pary pozostaje w zgodzie z ruchem wskazówki zegara, a długość odcinka wyraża w odpowiedniej skali wielkość momentu. Z tego wynika, że para jest to wektor tak, jak siła.

Wiadomo, że dwie pary, działające w płaszczyznach równoległych, zwrócone zgodnie i posiadające momenty równe, wywierają skutki jednakowe. Para zatem nie pozostaje w związku z żadnym szczególnym punktem ani żadną szczególną prostą. Początek odcinka, określającego parę, można obierać dowolnie w przestrzeni, a więc para jest to wektor swobodny.

**5. Suma geometryczna.** W zakres mechaniki wchodzą zagadnienia, w których mamy pewną liczbę wektorów, a chodzi o wyznaczenie nowego wektora, stojącego z danemi w określonym związku. Zagadnienia tego rodzaju dają się często sprowadzić do pewnych działań typowych, które mamy właśnie poznać.

Niech będą dwa wektory $P = OA$ i $Q = OB$, mające wspólny początek $O$. Mogą to być wektory, związane z punktem $O$, albo wektory, związane z prostemi $OA$ i $OB$, albo wreszcie wektory swobodne. Wyznaczamy nowy wektor $R$ w sposób następujący. Prowadzimy z końca $A$ wektora $P$ odcinek $AC$ równy i równoległy do $OB$. Otóż początkiem wektora $R$ ma być punkt $O$, a końcem punkt $C$.

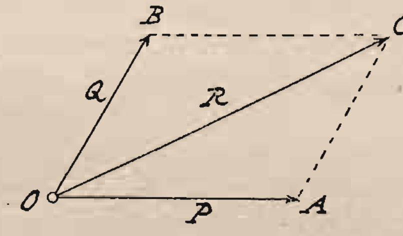

Fig. 1.

Wyznaczanie takiego wektora $R$ nazywa się *dodawaniem geometrycznem*, a wektor $R$ nazywamy *sumą geometryczną*, albo *wektorem wypadkowym*, albo wreszcie wprost *wypadkową* wektorów $P$ i $Q$, a te dwa ostatnie *wektorami składowemi* wektora $R$. Pisze się symbolicznie

$$R = P + Q.$$

W równaniu tem znaki $=$ i $+$ mają inne znaczenie niż w algebrze zwykłej, czyli w algebrze skalarów.

Z figury wynika bezpośrednio, że moglibyśmy również otrzymać wektor $R$, prowadząc z punktu $B$ odcinek $BC$, równy i równoległy do $OA$, a zatem wektory składowe są równouprawnione i w sumie $P + Q$ porządek składników nie odgrywa żadnej roli. Wyrazimy to symbolicznie, pisząc

$$P + Q = Q + P.$$

Wektor wypadkowy $R$ można także wyznaczyć jako przekątnię równoległoboku, zbudowanego na wektorach składowych.

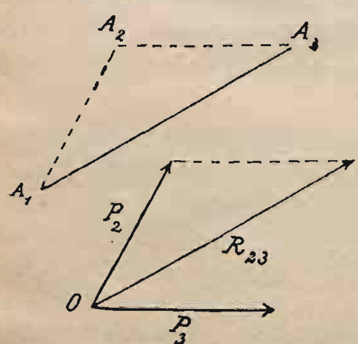

Fig. 2.

Niech będą teraz wektory $P_1$, $P_2$, $P_3$.... $P_n$, posiadające wspólny początek $O$ i położone jakkolwiek w przestrzeni (a więc niekoniecznie w jednej płaszczyźnie). Wyznaczamy nowy wektor $R$ w sposób następujący. Z końca $A_1$ wektora $P_1$ prowadzimy odcinek $A_1A_2$, równy i równoległy do wektora $P_2$, z punktu $A_2$ prowadzimy odcinek równy i równoległy do $P_3$ i t. d.; ostatnim będzie odcinek $A_{n-1}A_n$ równy i równoległy do $P_n$. Utworzy się w ten sposób wielobok $O A_1 A_2 \dots A_n$. Początkiem szukanego wektora $R$ ma być $O$, a końcem $A_n$. Wektor $R$ zowie się sumą geometryczną albo wektorem wypadkowym wektorów $P_1$, $P_2$, $P_3 \dots P_n$. Piszemy

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n \qquad (1)$$

I tu suma $R$ nie zależy od porządku składników ani pod względem wielkości, ani kierunku. Aby to uzasadnić, dostatecznem będzie okazać, że przestawienie dwóch którychkolwiek następujących po sobie składników, np. $P_2$ i $P_3$, nie wywiera wpływu na sumę, bo, przestawiając zkolei odpowiednio po dwa sąsiednie składniki, można otrzymać dowolny porządek.

Na fig. 2 widzimy wektory $P_2$ i $P_3$ oraz równolegle do nich boki $A_1A_2$ i $A_2A_3$ wieloboku. Boki te można zastąpić odcinkiem $A_1A_3$, skutkiem czego oczywiście nie zmieni położenia punkt $A_n$, a więc i wektor $R$. Lecz odcinek $A_1A_3$ jest równy i równoległy do sumy geometrycznej wektorów $P_2, P_3$, którą oznaczono przez $R_{23}$. Zatem $R_{23} = P_2 + P_3$ i możemy napisać

$$R = P_1 + R_{23} + P_4 + \dots P_n \qquad (2)$$

Wektor $R_{23}$, jako suma geometryczna dwóch składników, nie zależy od ich porządku, jak dowiedliśmy poprzednio, a więc $R_{23} = P_3 + P_2$. Wstawiając to do (2), otrzymamy

$$R = P_1 + P_3 + P_2 + P_4 + \dots P_n,$$

co właśnie było do dowiedzenia.

Jeżeli wszystkie wektory składowe są położone na jednej prostej, to i wektor wypadkowy będzie leżał na tejże prostej i będzie równy sumie algebraicznej wektorów składowych. Tak więc sumę algebraiczną możemy uważać za szczególny przypadek sumy geometrycznej.

Często bardzo wypada rozwiązywać zagadnienie odwrotne: dany jest wektor $R$, wyznaczyć pewną liczbę wektorów $P_1$, $P_2 \dots$, dla których $R$ jest sumą geometryczną, czyli, innemi słowy, rozłożyć wektor $R$ na wektory składowe $P_1$, $P_2 \dots$ Mogą być przytem postawione jeszcze inne warunki, którym szukane wektory składowe mają czynić zadość.

Wszystkie te działania są znane ze statyki, gdzie stosujemy je do sił i par.

**6. Rzuty wektorów.** W mechanice często mamy do czynienia z prostokątnemi rzutami wektorów na płaszczyzny i proste.

Rzut taki możemy zawsze uważać za wektor, którego początek i koniec są odpowiednio rzutami początku i końca wektora rżucanego czyli oryginału.

Niech będą wektory $P_1$, $P_2 \ldots$, posiadające wspólny początek $O$, lecz położone jakkolwiek w przestrzeni. Utwórzmy wielobok $OA_1A_2 \ldots$ i wyznaczmy wektor wypadkowy $R$. Obierzmy następnie dowolną płaszczyznę rzutów i zbudujmy rzut całej figury na tej płaszczyźnie. Części składowe rzutu będziemy oznaczali temi samemi literami, co odpowiednie części oryginału, kreskując je dla odróżnienia.

Ponieważ rzuty prostokątne dwóch odcinków równych i równoległych są równe i równoległe, przeto odcinek $A_1'A_2'$ będzie równy wektorowi $P_2'$ i równoległy do niego, odcinek $A_2'A_3'$ będzie równy i równoległy do $P_3'$ i t. d. Stąd wynika, że wektor $R'$ będzie sumą geometryczną wektorów $P_1'$, $P_2' \ldots$. A zatem *rzut wektora wypadkowego na płaszczyznę jest sumą geometryczną rzutów wektorów składowych.*

Uczyńmy teraz rzut tej samej figury na dowolnie obraną oś rzutów. Na osi tej będziemy odróżniali kierunek dodatni od ujemnego, jak się to dzieje w geometrji analitycznej. Jeżeli rzut wektora jest zwrócony w stronę dodatnią, to liczbę, określającą ten rzut, będziemy uważali za dodatnią, w razie przeciwnym za ujemną.

Widać odrazu, że $R'$ co do wielkości i znaku równa się sumie algebraicznej odcinków $O'A_1'$, $A_1'A_2', \ldots$, gdzie porządek liter określa znak, który składnikowi przypisać należy. Jeśli np. punkt $A_2'$ leży po stronie dodatniej punktu $A_1'$, to odcinek $A_1'A_2'$ uważamy za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.

Lecz $O'A_1' = P_1'$, odcinek $A_1'A_2'$ jest równy co do wielkości i zgodny co do kierunku z $P_2'$ i t. d., a zatem *rzut wektora wypadkowego na oś jest równy sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych.*

Twierdzeniu temu nadamy postać równania algebraicznego. W tym celu umówimy się naprzód uważać za kąt pomiędzy wektorem i osią ten z dwóch kątów przyległych, którego obydwa ramiona biegną od wierzchołka.

Oznaczmy teraz przez $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ kąty pomiędzy wektorami $P_1$, $P_2, \ldots R$ i osią rzutów. W takim razie rzuty tych wektorów na oś będą, zarówno co do wielkości bezwzględnej jak i znaku, odpowiednio równe $P_1 \cos \alpha_1$, $P_2 \cos \alpha_2, \ldots$ $R \cos \alpha_r$, gdzie $P_1, P_2 \ldots$

$R$ oznaczają wielkości wektorów, a twierdzenie powyższe wyrazi się tak:

$$R \cos \alpha_r = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots$$

lub krócej

$$R \cos \alpha_r = \Sigma P \cos \alpha.$$

7. **Metoda analityczna sumowania.** Na drugiem twierdzeniu paragrafu poprzedzającego jest oparta metoda analityczna wyznaczania wektora wypadkowego.

Mamy więc wyznaczyć pod względem wielkości i kierunku wektor wypadkowy danych wektorów $P_1$, $P_2 \ldots$, posiadających wspólny początek $O$. Obierzmy $O$ za początek prostokątnego układu współrzędnych $xyz$ i oznaczmy odpowiednio przez $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$, $(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) \ldots$ kąty, które dane wektory tworzą z osiami, czyli ich kąty kierunkowe. Szukany wektor wypadkowy oznaczymy przez $R$, a jego rzuty na osi przez $R_x$, $R_y$, $R_z$. Na zasadzie wzmiankowanego twierdzenia będzie

$$R_x = \Sigma P \cos \alpha, \quad R_y = \Sigma P \cos \beta, \quad R_z = \Sigma P \cos \gamma$$

i

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Oznaczmy jeszcze przez $(\alpha_r \beta_r \gamma_r)$ kąty kierunkowe wektora $R$. Znajdziemy, że

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta_r = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma_r = \frac{R_z}{R}$$

Mając $R$, $\alpha_r$, $\beta_r$ i $\gamma_r$, znamy wektor wypadkowy co do wielkości i kierunku.

8. **Rzut trójkąta.** W dalszym ciągu będzie użyteczne pewne twierdzenie geometryczne, które przytoczymy na tem miejscu.

Niech będzie trójkąt $ABC$ i jego rzut $A'B'C'$ na jakąkolwiek płaszczyznę **F**. Oznaczmy przez $S$ i $S'$ pola oryginału i rzutu, a przez $\alpha$ kąt pomiędzy płaszczyzną trójkąta i płaszczyzną **F**. Dowiedziemy, że

$$S' = S \cos \alpha.$$

Rozważymy naprzód przypadek szczególny, gdy jeden z boków trójkąta, np. $AB$, jest równoległy do **F**. Jeżeli $CD$ jest wysokością oryginału, to $C'D'$ jest wysokością rzutu i $S' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'D'$. Lecz $A'B' = AB$ i $C'D' = CD \cos \alpha$, zatem $S' = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos \alpha$, co było do dowiedzenia.

Przypuśćmy teraz, że trójkąt $ABC$ ma położenie jakiekolwiek. Poprowadźmy przez wierzchołek $A$ płaszczyznę równoległą do **F**;

przetnie ona bok $BC$ w punkcie $D$ i prosta $AD$ będzie równoległa do **F**. Oznaczmy teraz przez $S_1$ i $S_2$ pola trójkątów $ABD$ i $ACD$ a przez $S_1'$ i $S_2'$ pola ich rzutów. Na zasadzie powyższego będzie $S_1' = S_1 \cos\alpha$ i $S_2' = S_2 \cos\alpha$. Dodając lub odejmując te dwa równania i uwzględniając, że $S_1 \pm S_2 = S$ oraz $S_1' \pm S_2' = S'$, otrzymamy związek żądany.

Twierdzenie powyższe daje się bardzo łatwo uogólnić. Przypuśćmy naprzód, że $S$ i $S'$ są odpowiednio polami dowolnego wieloboku płaskiego i jego rzutu na płaszczyznę **F**. Wielobok możemy podzielić na trójkąty; stosując dowiedzione twierdzenie do każdego z nich i dodając otrzymane równania, otrzymamy znowu $S' = S\cos\alpha$.

Gdy granicę figury płaskiej stanowi linja krzywa, to możemy uważać taką figurę za wielobok o nieskończenie krótkich bokach, a zatem twierdzenie nasze rozciąga się do wszystkich figur płaskich.

Przykład 1. Opierając się na tem, że każdą elipsę można uważać za prostokątny rzut koła, dowieść, że pole elipsy $= \pi ab$.

Prz. 2. Pole figury płaskiej jest równe $S$, a pola jej rzutów na płaszczyzny współrzędnych układu prostokątnego są $S_x, S_y, S_z$. Okazać że, $S^2 = S_x{}^2 + S_y{}^2 + S_z{}^2$.

Prz. 3. Dane są w układzie prostokątnym punkty $A_1(x_1 y_1 z_1)$, $A_2(x_2 y_2 z_2)$, $A_3(x_3 y_3 z_3)$; wyznaczyć objętość czworościanu $OA_1A_2A_3$.

Niech $BA_1$ będzie wysokością czworościanu, $(\alpha\beta\gamma)$ jej kątami kierunkowemi i $S$ polem trójkąta $OA_2A_3$. Możemy uważać $BA_1$ za sumę geometryczną składowych $BO$, $x_1, y_1, z_1$. Biorąc rzuty na $BA_1$, otrzymamy $BA_1 = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma$, a szukana objętość

$$V = \tfrac{1}{3}S(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma), \quad \text{lub } V = \tfrac{1}{3}(x_1 S_x + y_1 S_y + z_1 S_z).$$

Pola $S_x$, $S_y$, $S_z$ wyznaczają się w sposób znany. Wynikowi można nadać postać

$$V = {}^1/_6 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

**9. Moment względem punktu.** W teorjі wektorów obok dodawania zasadniczą rolę odgrywają dwa działania inne. Wynikiem jednego z nich jest wektor, zwany *iloczynem wektorowym*, a wynikiem drugiego skalar, zwany *iloczynem skalarowym*. Działania te wyłożymy jedynie w tej postaci, w której będą nam potrzebne w dalszym ciągu; nie będziemy nawet używali powyższych nazw ogólnych, posługując się zamiast tego nazwami *moment* i *praca*, używanemi częściej w mechanice. Działanie pierwsze rozważymy na tem miejscu, o drugiem będzie mowa w jednym z rozdziałów następnych.

Niech będzie wektor $P = AB$, związany z punktem lub prostą, i niech będzie prócz tego punkt $O$. Poprowadźmy przez $O$ prostą, prostopadłą do płaszczyzny $OAB$. Gdy spojrzymy z jakiegoś punktu $C$ tej prostej na płaszczyznę $OAB$, to zobaczymy, że wektor $P$ jest, dajmy na to, zwrócony w tę stronę, w którą posuwa się koniec wskazówki zegarowej, obracającej się około punktu $O$. Gdybyśmy patrzyli na $OAB$ z innego punktu tejże prostej, położonego po odwrotnej stronie płaszczyzny, to dla nas zwrot wektora $P$ byłby odwrotny do biegu wskazówki zegarowej.

Odetnijmy od punktu $O$ w stronę $C$ $Pp$ umówionych jednostek długości, gdzie $p$ oznacza odległość wektora $P$ od punktu $O$ i nazywa się *ramieniem momentu*; innemi słowy odmierzmy na $OC$ w odpowiedniej skali podwójne pole trójkąta $OAB$. Otrzymamy wektor, związany z punktem $O$; wektor ten zowie się *momentem wektora P względem punktu O.*

Krótko mówiąc, *moment wektora P względem O jest to wektor prostopadły do płaszczyzny, zawierającej O i P, zwrócony w tę stronę, z której widać P w kierunku biegu wskazówki zegarowej, a pod względem wielkości równy iloczynowi z wektora P przez ramię.*

Oczywiście moment ani pod względem kierunku ani wielkości nie zależy od położenia wektora $P$ na prostej $AB$.

Jeżeli punkt $O$ leży na $AB$, to moment jest równy zeru.

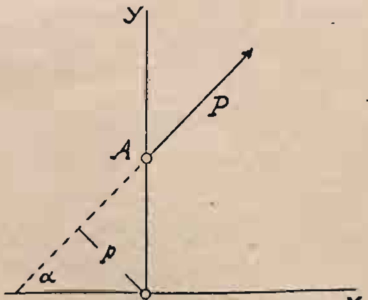

Fig. 3.

Niech będą wektory $P_1$, $P_2$... (typowy wektor $P$), położone w jednej płaszczyźnie, np. w płaszczyźnie rysunku, i posiadające wspólny początek $A$. Ich wektor wypadkowy oznaczymy przez $R$. Niech będzie prócz tego w tejże płaszczyźnie jakikolwiek punkt $O$. Obierzemy $O$ za początek prostokątnego układu współrzędnych, a prostą $OA$ za oś $y$. Oś $z$ obierzemy prostopadle do płaszczyzny rysunku; na fig. 3 ma być ona skierowana w górę. Oczywiście momenty wszystkich wektorów $P_1$, $P_2$... $R$ leżą na osi $z$; przypisujemy im znaki + lub — stosownie do tego, czy są zwrócone w stronę dodatnią, czy ujemną tej osi. Oznaczmy jeszcze przez $\alpha_1$, $\alpha_2 \dots \varphi$ kąty, które wektory $P_1$, $P_2 \dots R$ tworzą odpowiednio z osią $x$, a przez $p_1, p_2 \dots r$ ich odległości od $O$. Biorąc rzuty na oś $x$, otrzymamy

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha.$$

Mnożymy następnie obydwie strony tego równania przez $OA$. Wypadnie, że

$$R \,.\, OA \cos \varphi = \Sigma P \,.\, OA \cos \alpha.$$

W równaniu tem zawiera się bardzo ważne twierdzenie. Oczywiście $OA \cos \alpha$ co do wielkości bezwzględnej jest równe $p$, a zatem iloczyn $P \,.\, OA \cos \alpha$ wyraża moment wektora $P$ względem $O$ co do wielkości. Ale iloczyn ten wyraża ów moment poprawnie i co do znaku, bo, jak widać z fig. 3, jeżeli kąt $\alpha$ jest ostry, to moment jest dodatni, a jeżeli kąt $\alpha$ jest rozwarty, to moment jest ujemny. To samo dotyczy lewej strony równania, a zatem *moment wektora wypadkowego wektorów, położonych w jednej płaszczyźnie, względem punktu tejże płaszczyzny jest równy sumie algebraicznej momentów wektorów składowych.*

Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego, które poznamy w jednym z paragrafów następnych.

Prz. 1. Twierdzenie powyższe dowiedliśmy, zakładając, że wektory $P_1$, $P_2 \dots$ mają wspólny początek; dowieść, że twierdzenie jest ważne i w tym razie, gdy wektory $P_1$, $P_2 \dots$ są związane z prostemi, położonemi w jednej płaszczyźnie, lecz nie przechodzącemi przez jeden punkt.

Prz. 2. Wektor $P$ leży w płaszczyźnie $\mathbf{F}$; okazać, że końce momentów jego względem wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbf{F}$ leżą na innej płaszczyźnie, przechodzącej przez $P$ i nachylonej do $\mathbf{F}$ pod kątem, którego tangens jest liczbowo równy $P$.

Prz. 3. Dane są momenty wektora względem trzech punktów $A$, $B$, $C$, nie leżących na jednej prostej. Momenty te są prostopadłe do płaszczyzny $ABC$. Wyznaczyć (wykreślnie) wektor pod względem wielkości i położenia.

Prz. 4. Sumy momentów układu płaskiego wektorów związanych z prostemi względem trzech punktów, położonych w płaszczyźnie układu nie na jednej prostej, są równe. Okazać, że sumy momentów względem wszystkich innych punktów tejże płaszczyzny są równe. W tym razie wektor wypadkowy leży w nieskończoności i układ sprowadza się do pary wektorów.

Prz. 5. Punkty $A_1$, $A_2$, $A_3$ leżą w odległościach $p_1$, $p_2$, $p_3$ od prostej, z którą związany jest dany wektor $P$ (wszystko w jednej płaszczyźnie), a wysokości trójkąta $A_1A_2A_3$ wynoszą odpowiednio $h_1$, $h_2$, $h_3$. Rozłożyć wektor $P$ na trzy składowe, położone na bokach trójkąta.

Odp. Szukane składowe będą $\dfrac{Pp_1}{h_1}$, $\dfrac{Pp_2}{h_2}$, $\dfrac{Pp_3}{h_3}$.

**10. Moment względem prostej.** Niech będzie wektor $P=AB$, związany z punktem lub prostą, i jakakolwiek prosta $z$. Obierzmy na niej dowolny punkt $C$ i wyznaczmy względem niego moment $M$ wektora $P$. Przypuśćmy, że $M$ tworzy z prostą $z$ kąt $\gamma$; w takim razie rzut $N$ tego momentu na prostą $z$ jest równy $M\cos\gamma$. Dowiedziemy, że rzut ten jest niezależny od położenia punktu $C$ na prostej $z$.

W tym celu poprowadźmy dowolnie płaszczyznę **F**, prostopadłą do prostej $z$; przetnie ona tę prostą w punkcie $O$. Jeżeli rzutami punktów $A$, $B$ na **F** są punkty $A'$, $B'$, to rzutem trójkąta $ABC$ będzie trójkąt $A'B'O$ przy każdem położeniu punktu $C$ na prostej $z$.

Podwójne pole trójkąta $ABC$ jest równe $M$ i płaszczyzna $ABC$ tworzy z **F** kąt $\gamma$ (płaszczyzny te są odpowiednio prostopadłe do boków kąta $\gamma$), a zatem podwójne pole trójkąta $A'B'O=$ $=M\cos\gamma=N$. Znaczy to, że rzut $N$ jest dla punktów prostej $z$ wielkością niezmienną.

Ten rzut $N$ momentu $M$ zowie się *momentem wektora $P$ względem osi $z$*. Jest to wektor, związany z prostą $z$ i oczywiście równy co do wielkości i kierunku momentowi wektora $P'=A'B'$ względem punktu $O$.

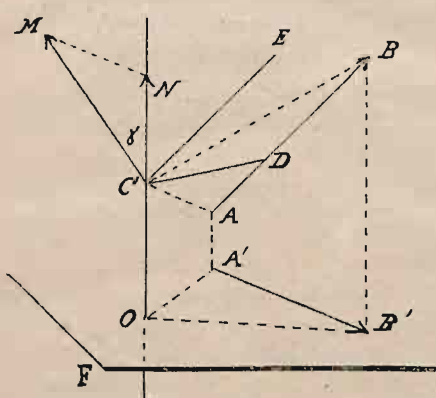

Fig. 4.

Znajdziemy jeszcze dla wektora $N$ pewne wyrażenie, które bywa często użyteczne.

Dajmy na to, że $CD=p$ jest najkrótszą odległością pomiędzy prostemi $AB$ i $z$; w takim razie $M=Pp$ i $N=$ $=Pp\cos\gamma$. Oznaczmy jeszcze przez $\vartheta$ kąt pomiędzy wektorem $P$ i prostą $z$ i poprowadźmy przez $C$ prostą $CE$ równolegle do $AB$; tworzy ona również z prostą $z$ kąt $\vartheta$. Lecz proste $M$, $z$ i $CE$ leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do $CD$, i $M$ tworzy z $CE$ kąt prosty. Z tego wynika, że $\gamma=\frac{\pi}{2}-\vartheta$ i

$$N=Pp\sin\vartheta.$$

Moment wektora $P$ względem prostej $z$ jest równy zeru (1) jeżeli $p=0$, t. j. jeżeli proste $z$ i $AB$ się przecinają, i (2) jeżeli $\vartheta=0$, t. j. jeżeli proste $z$ i $AB$ są równoległe. Wogóle *moment wektora względem osi jest zerem, jeżeli wektor i oś leżą w jednej płaszczyźnie.*

**11. Moment wypadkowy.** Niech będą wektory $P_1$, $P_2$... i ich wypadkowa $R$ i niech będzie prócz tego jakakolwiek prosta $z$. Prowadzimy, jak poprzednio, płaszczyznę **F**, prostopadłą do $z$ i przecinającą tę prostą w punkcie $O$. Rzut $R'$ wektora $R$ na **F** będzie wypadkową rzutów $P_1'$, $P'_2$... wektorów $P_1$, $P_2$.... Ponieważ wektory $P_1'$, $P_2'$... tworzą układ płaski, przeto moment wektora wypadkowego $R'$ względem punktu $O$ jest równy sumie algebraicznej momentów wektorów składowych $P_1'$, $P_2'$...; innemi słowy: moment wektora $R$ względem $z$ jest równy sumie momentów wektorów $P_1$, $P_2$... względem $z$. Wogóle *moment wektora wypadkowego względem osi jest równy sumie momentów wektorów składowych.*

Weźmy teraz ten sam układ wektorów $P_1$, $P_2$... $R$ i jakikolwiek punkt $O$. Wyznaczmy względem $O$ momenty $M_1$, $M_2$... wektorów $P_1$, $P_2$... oraz moment $N$ wektora $R$. Ponieważ $M_1$, $M_2$... są to wektory, posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wektor wypadkowy; oznaczmy go przez $N'$. Dowiedziemy, że $N$ i $N'$ nie różnią się ani pod względem wielkości ani kierunku.

W tym celu poprowadźmy przez $O$ trzy osi współrzędnych $x$, $y$, $z$. Rzut wektora $N'$ na oś $x$ jest równy sumie rzutów wektorów $M_1$, $M_2$..., czyli $N_x'=\Sigma M_x$. Lecz w myśl twierdzenia poprzedzającego również $N_x=\Sigma M_x$. Stąd wynika, że rzuty wektorów $N$ i $N'$ na oś $x$ muszą być równe, a ponieważ toż samo dotyczy dwóch osi pozostałych, przeto wektory $N$ i $N'$ nie mogą się różnić pod żadnym względem.

Dowiedliśmy więc twierdzenie takie: *moment wektora wypadkowego względem dowolnego punktu jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych względem tegoż punktu.* Rozumie się, wyraz „równy“ oznacza tu zgodność co do wielkości i kierunku.

Twierdzenie, które poznaliśmy w par. 9, jest oczywiście szczególnym przypadkiem twierdzenia powyższego.

Prz. 1. Momenty wypadkowe układu wektorów względem trzech prostych, przechodzących przez punkt $O$ i nie leżących w jednej płaszczyźnie, są zerami; dowieść, że moment wypadkowy względem $O$ jest zerem

Prz. 2. Momenty wypadkowe układu wektorów względem trzech punktów, nie leżących na jednej prostej, są zerami; dowieść, że moment wypadkowy względem każdego innego punktu jest zerem.

Prz. 3. Moment wypadkowy czterech wektorów względem dowolnego punktu jest zerem; okazać, że te wektory leżą na hiperboloidzie jednopowłokowej.

**12. Analityczne wyrażenie momentu.** W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest początek $A(xyz)$ wektora $P$, oraz rzuty $P_x$, $P_y$, $P_z$ tego wektora na osi. Pragniemy wyznaczyć moment $M$ wektora $P$ względem początku $O$.

Uczynimy tu naprzód pewną uwagę ogólną, dotyczącą obioru układu współrzędnych. Spojrzyjmy z jakiegoś punktu osi $z$ (fig. 5), położonego po stronie dodatniej od $O$, na tę część płaszczyzny $xy$, która leży pomiędzy stronami dodatniemi osi $x$ i $y$. Wskazówka zegarka, leżącego na tej płaszczyźnie tarczą do nas, posuwałaby się od osi $x$ ku osi $y$. Powiemy, że oś $y$ następuje po osi $x$ w kierunku ruchu wskazowki zegarowej. Tak samo oś $z$ następuje po osi $y$ i oś $x$ po osi $z$. W taki sposób będziemy zwykle obierali osi współrzędnych w przestrzeni.

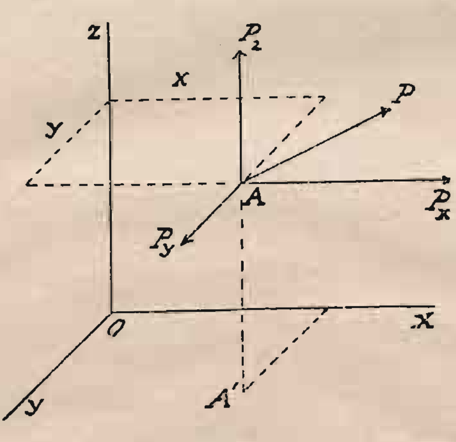


Fig. 5.

Na załączonym rysunku mamy wyobrażony ten przypadek, w którym wszystkie wielkości dane, t. j. $x$, $y$, $z$, $P_x$, $P_y$, $P_z$ są dodatnie.

Wyznaczymy naprzód rzuty $M_x$, $M_y$, $M_z$ szukanego momentu $M$ na osi współrzędnych, czyli momenty wektora $P$ względem osi. W tym celu rozkładamy wektor $P$ na trzy składowe w kierunkach osi. Oczywiście składowe te są równe danym rzutom $P_x$, $P_y$, $P_z$.

$M_z$, czyli moment wektora $P$ względem osi $z$, jest równy sumie momentów wektorów $P_x$, $P_y$, $P_z$. Moment pierwszego jest równy $-yP_x$ (znak $-$, gdyż moment ten jest zwrócony w kierunku ujemnym osi $z$), moment drugiego wynosi $xP_y$ i wreszcie moment trzeciego jest równy zeru. Zatem wypadnie

$$M_z = xP_y - yP_x.$$

Tak samo znajdziemy

$$M_x = yP_z - zP_y,$$

$$M_y = zP_x - xP_z,$$

a

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Dalej otrzymamy $\cos\alpha = \frac{M_x}{M}$, $\cos\beta = \frac{M_y}{M}$, $\cos\gamma = \frac{M_z}{M}$, gdzie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oznaczają kąty kierunkowe momentu $M$.

Jeżeli mamy wyznaczyć moment wektora $P$ nie względem początku $O$, lecz względem innego punktu $A_1$ ($x_1$ $y_1$ $z_1$), to we wzorach powyższych wypadnie zamiast $x$, $y$, $z$ napisać $\xi$, $\eta$, $\zeta$, czyli współrzędne punktu $A$ w układzie, którego początek leży w $A_1$, a osi są odpowiednio równoległe do $x, y, z$; zatem $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$, $\zeta = z - z_1$. Będzie więc

$$M_z = (x - x_1)\, P_y - (y - y_1)\, P_x \quad \text{i t. d.}$$

Prz. 1. Układ współrzędnych obrano w taki sposób, że oś $y$ następuje po osi $x$ w kierunku odwrotnym do biegu wskazówki zegara. Okazać zapomocą rysunku, że w tym razie $M_z = yP_x - xP_y$ z odpowiedniemi zmianami w $M_x$ i $M_y$.

Prz. 2. Wektor $P$ tworzy z osiami kąty $90^0$, $135^0$, $45^0$, a początek jego leży w punkcie ($a$, $a$, $o$). Wyznaczyć moment względem $O$. Odp.

$$M = Pa\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Prz. 3. Początek wektora $P$ leży w początku współrzędnych, a składowe jego w kierunkach osi wynoszą $P_x$, $P_y$, $P_z$. Wyznaczyć moment wektora $P$ względem punktu $A$ ($xyz$).

Składowa szukanego momentu w kierunku osi $z$ jest równa sumie momentów wektorów $P_x$, $P_y$ względem prostej $A'A$, równoległej do $z$. Wypadnie $yP_x - xP_y$ i t. d. Szukany moment jest równy lecz odwrotny do momentu wektora $P$, posiadającego początek w $A$, względem $O$.

Prz. 4. Dane są wektory $P$ i $-P$ równe, równoległe i zwrócone w strony przeciwne, czyli *para wektorów*. Początki ich znajdują się w $A_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$) i $A_2$ ($x_2$, $y_2$, $z_2$). Wyznaczyć sumę (geometryczną) ich momentów względem początku współrzędnych, czyli *moment pary*.

Sumy rzutów momentów wektorów danych, czyli rzuty momentu szukakanego na osi $z$, $x$, $y$, będą $(x_1 - x_2)\, P_y - (y_1 - y_2)\, P_x$ i t. d. Z tego wynika, że moment szukany będzie taki sam, jak moment wektora $P$ względem punktu $A_2$. Jest on przeto prostopadły do płaszczyzny pary, zwrócony w tę stronę, z której widać parę w kierunku ruchu wskazówki zegara, a co do wielkości równy $Pa$, gdzie $a$ oznacza odległość wektorów danych, czyli tak zw. *ramię pary*. Widzimy, że momenty pary względem wszystkich punktów przestrzeni są zgodne co do wielkośei i kierunku, można więc wprost mówić o momencie pary.