IX. RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO.

119. Równanie zasadnicze. Rozważymy teraz rozmaite rodzaje ruchów ciała sztywnego przy pomocy twierdzeń, wyłożonych w rozdziale poprzedzającym. Ruch postępowy stanowi przedmiot dynamiki punktu materjalnego, zaczniemy więc od ruchu obrotowego.

Przypuśćmy, że ciało obraca się około nieruchomej osi z pod działaniem sił P_1, P_2.... W chwili t ciało posiadało, dajmy na to, szybkość kątową ω, a moment ilości ruchu względem osi z wynosił $I\omega$, gdzie I oznacza moment bezwładności ciała względem z. W ciągu następnego okresu dt ten moment ilości ruchu przybiera przyrost algebraiczny $d(I\omega)$; z drugiej strony wiemy, że siły P_1, P_2... wytworzą w tym samym czasie przyrosty momentu ilości ruchu $N_1 dt$, $N_2 dt$..., gdzie N_1, N_2... oznaczają ich momenty względem osi z. Będzie więc $d(I\omega) = \Sigma N dt$, albo

$$I\frac{d\omega}{dt} = \Sigma N \qquad (1).$$

To samo równanie wynika także z zasady sił żywych. Siła żywa ciała w chwili t wynosi $\frac{I\omega^2}{2}$; w czasie dt przybierze ona przyrost $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$, a siły P_1, P_2... wykonają jednocześnie prace $N_1 d\vartheta$, $N_2 d\vartheta$..., gdzie $d\vartheta$ oznacza kąt, o który w czasie dt obróciło się ciało. Będzie więc $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \Sigma N d\vartheta$, albo $I\omega d\omega = \Sigma N\omega dt$, gdyż $d\vartheta = \omega dt$. Z tego otrzymamy równanie (1).

Równanie to piszemy często w postaci

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = \Sigma N,$$

gdzie M oznacza masę ciała, k jego ramię bezwładności względem osi, a $\frac{d\omega}{dt}$ jest przyśpieszeniem kątowem.

Jeżeli suma momentów sił P_1, P_2... względem osi obrotu jest równa zeru, to $\frac{d\omega}{dt} = 0$, a zatem ω jest wielkością stałą.

Prz. 1. Poziomy cylinder kołowy o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około swej osi. Na cylinder nawinięto sznur, a do końca sznura przyczepiono ciężar o masie m. O jaki kąt obróci się cylinder w ciągu t sek. od wyswobodzenia ciężaru? Odp. $\frac{mgt^2}{(M+2m)a}$.

Nie trzeba zapominać, że w tego rodzaju urządzeniach na cylinder działa nie ciężar mg, lecz naprężenie sznura.

Prz. 2. Lekki sznur przerzucono przez chropowaty poziomy cylinder, który może się obracać około swej osi, i na końcach zawieszono ciężary. Dowieść, że droga, którą każdy z nich przebiegnie w danym czasie, nie zależy od średnicy cylindra, lecz tylko od masy jego.

Prz. 3. Poziomy cylinder o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około swej osi. Na cylinder nawinięto lekki sznur, a do końca sznura przywiązano łańcuch o masie m i długości l. Sznur był wyprostowany pionowo, a zwinięty łańcuch leżał na podstawce, gdy wtem usunięto podstawkę. O jaki kąt obróci się cylinder, zanim łańcuch wyprostuje się całkowicie? Odp. $\frac{ml}{Ma}$.

W każdej chwili łańcuch dzieli się na dwie części: pierwsza, wyprostowana, spada z przyśpieszeniem $a\frac{d\omega}{dt}$, druga, zwinięta, posiada przyśpieszenie ziemskie.

Prz. 4. Tarcza kołowa jest osadzona na osi, około której może się obracać bez tarcia. Przyciskamy jej obwód do pasa maszynowego, posiadającego szybkość stałą. Przez pewien czas szybkość kątowa tarczy będzie wzrastała, aż wreszcie przybierze wartość, przy której poślizg ustaje. Dowieść, że w tym okresie tarcza zaczerpnie z pasa tyle siły żywej, ile energji przejdzie jednocześnie skutkiem tarcia w ciepło.

Prz. 5. Prostokątna deska $ABCD$, której bok $AD = a$, może się obracać około osi poziomej AB. W początku deska jest podparta i zajmuje położenie poziome, a na niej leży ciężki przedmiot. Jaka powinna być co najmniej odległość przedmiotu od osi AB, aby z chwilą usunięcia podparcia natychmiast ustało zetknięcie pomiędzy nim i deską. Odp. $\frac{2a}{3}$.

Prz. 6. Jednorodna belka o długości a spoczywa poziomo na dwóch podstawkach, położonych symetrycznie względem środka. Jaka powinna być odległość pomiędzy podstawkami, aby reakcja jednej z nich nie uległa zmianie w chwili, gdy usuniemy drugą? Odp. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Prz. 7. Kula jednorodna o promieniu r i gęstości μ wisi na sznurze. Obracamy ją n razy około średnicy pionowej i pozostawiamy samej sobie. Przyjmując, że moment, który sznur wywiera na kulę, jest proporcjonalny do kąta skręcenia, i że współczynnik proporcjonalności $= \lambda$, znaleźć kąt, o który obróci się kula w czasie t. Odp. $2\pi n \cos t \sqrt{\frac{15\lambda}{8\mu\pi r^5}}$.

Prz. 8. Belka, ważąca Q, może się obracać około swego środka w płaszczyźnie pionowej; do końców jej jest przywiązany dwoma sznurami punkt materjalny, a długości sznurów są równe długości belki. Jaki powinien być ciężar punktu, aby po przecięciu jednego sznura naprężenie drugiego w pierwszej chwili pozostało bez zmiany. Odp. $\frac{2Q}{9}$.

Prz. 9. Kula jednorodna, która może się obracać około punktu O swej powierzchni, opiera się o równię pochyłą, przyczem średnica, przechodząca przez O, jest pozioma. Jakie powinno być nachylenie równi, aby po jej usunięciu reakcja w O w pierwszej chwili nie uległa zmianie co do wielkości. Odp. arctan $^2/_7$. Należy zwrócić uwagę, że reakcja ta była przed usunięciem rowni pozioma, a po usunięciu pionowa.

120. Wahadło fizyczne. Wahadłem fizycznem nazywa się ciało ciężkie, które może się swobodnie obracać około osi poziomej i na które działają jedynie reakcje osi i siła ciążenia. Wahadło kołowe, złożone z punktu materjalnego na sznurze, które opisaliśmy w par. 77, nazywa się w przeciwstawieniu do fizycznego matematycznem albo prostem.

Poprowadźmy w wahadle fizycznem przez środek ciężkości S płaszczyznę, prostopadłą do osi. Nazwiemy tę płaszczyznę *płaszczyzną wahań*. Punkt O, w którym płaszczyzna wahań przecina oś wahadła, nazywa się *punktem zawieszenia*. Odległość OS oznaczymy przez a.

Nadajmy wahadłu pewną szybkość kątową i pozostawmy je samemu sobie. Gdy prosta OS odchyli się od pionu o kąt ϑ, to moment siły ciążenia względem osi, lub względem punktu zawieszenia, będzie $Mga \sin\vartheta$, a zatem w myśl paragrafu poprzedzającego

$$M(k^2 + a^2)\frac{d\omega}{dt} = -Mga \sin\vartheta \qquad (1);$$

k oznacza tu ramię bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do osi obrotu, a zatem $k^2 + a^2$ jest kwadratem ramienia bezwładności względem tej drugiej.

Weźmy na prostej OS punkt O_1 w odległości l od O. Torem jego jest łuk koła, zatoczony z O promieniem l w płaszczyźnie wahań. Za początek toru obierzmy punkt najniższy i oznaczmy przez s łuk, przebieżony przez O_1 i mierzony od tego początku. W takim razie $\vartheta = \frac{s}{l}$, $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{l}\frac{ds}{dt}$, zatem $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{l}\frac{d^2s}{dt^2}$, i równanie (1) przybierze postać

$$\frac{k^2+a^2}{la}\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\left(\frac{s}{l}\right).$$

Możemy to uważać za równanie ruchu punktu O_1.

Obierzmy O_1 w taki sposób, aby współczynnik po lewej stronie był równy jedności, czyli aby było

$$l = \frac{k^2+a^2}{a} \qquad (2).$$

W takim razie będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\left(\frac{s}{l}\right).$$

Jest to równanie ruchu wahadła prostego; mieliśmy je w par. 77. Tak więc punkt O_1, obrany w spósób powyższy, porusza się tak, jak wahadło proste o długości OO_1. Innemi słowy, gdybyśmy całą masę ciała skoncentrowali w O_1, to punkt ten poruszał by się tak, jak obecnie. Mówimy o takiem wahadle prostem, że jest *równoważne* z danem wahadłem fizycznem, a punkt O_1 nazywamy *środkiem wahań* wahadła fizycznego.

Oczywiście okres wahań wahadła fizycznego musi być taki sam, jak okres wahań wahadła prostego równoważnego. Przy małej amplitudzie ten okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (par. 77), czyli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+a^2}{ag}}.$$

Oznaczmy jeszcze odległość SO_1 przez a_1. W takim razie $l = a + a_1$. Wstawiając to do (2), otrzymamy

$$aa_1 = k^2 \qquad (3).$$

Ze związku tego wynika, że punkty O i O_1 odgrywają względem siebie role analogiczne; gdy O_1 uczynimy punktem zawieszenia, to O stanie się środkiem wahań, a okres będzie taki sam, jak poprzednio.

Każdy punkt prostej OS możemy uczynić punktem zawieszenia, i każdemu odpowiada inny punkt tej prostej, jako środek wahań; pomiędzy ich odległościami od S zachodzi zawsze związek (3). Punktowi S odpowiada oczywiście nieskończenie odległy punkt prostej. Tego rodzaju odpowiadanie sobie punktów na prostej zowie się *inwolucją punktów*, a punkt S *środkiem tej inwolucji* *), powiemy więc, że punkty zawieszeń są ze środkami wahań w inwolucji.

Weźmy którąkolwiek parę punktów tej inwolucji i zbudujmy prostokąt z ich odległości od S; pole takiego prostokąta będzie według (3) równe k^2. Ze wszystkich prostokątów o jednakowem polu najmniejszy obwód posiada kwadrat, a z tego wynika, że te dwa odpowiadające sobie punkty inwolucji są najbliżej siebie położone, których odległości od S są równe k. Gdy jeden z nich obierzemy za punkt zawieszenia, to długość prostego wahadła równoważnego, równa $2k$, będzie możliwie najmniejsza, a zatem otrzymamy możliwie najkrótszy okres wahań.

Zatoczmy z punktu S w płaszczyźnie wahań okrąg promieniem k. Gdy obierzemy którykolwiek punkt tego okręgu za punkt zawieszenia, to zawsze otrzymamy jeden i ten sam okres wahań, a mianowicie dla danego wahadła i danej płaszczyzny wahań okres najkrótszy. Punktom, położonym wewnątrz tego koła albo na zewnątrz, odpowiadają okresy dłuższe.

W innych płaszczyznach wahań mogą istnieć punkty, którym odpowiadają jeszcze krótsze okresy. Chcąc otrzymać dla danego wahadła okres najkrótszy, należy poprowadzić płaszczyznę wahań prostopadle do osi najmniejszego momentu środka ciężkości i w tej płaszczyźnie zatoczyć koło promieniem, równym ramieniowi bezwładności względem owej osi. Gdy osią wahadła jest prostopadła w którymkolwiek punkcie tego okręgu do jego płaszczyzny, to okres wahań jest dla danego wahadła fizycznego najkrótszy.

Prz. 1. Sześcian jednorodny może się obracać około jednej z krawędzi, umocowanej w położeniu poziomem. Długość krawędzi jest równa $2a$. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

Prz. 2. Toż samo, jeżeli osią obrotu jest przekątnia jednej ze ścian. Odp. $\frac{5a}{3}$.

*) Jest to tak zw. *inwolucja eliptyczna*, gdyż punkty podwójne są urojone.

Prz. 3. Końce jednorodnego pręta mogą się poruszać po gładkiej obręczy o promieniu r, ustawionej nieruchomo w płaszczyźnie pionowej. Pręt obejmuje łuk tej obręczy, wynoszący 120^0. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. r.

Prz. 4. Łuk koła o promieniu r może się wahać około osi, przechodzącej przez środek łuku (nie koła) i prostopadłej do jego płaszczyzny. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. $2r$.

Prz. 5. Wahadło ma być zrobione z pręta o długości a, którego gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości od jednego z końców. W jakiej odległości od środka ciężkości należy obrać punkt zawieszenia, aby okres wahań był jak najkrótszy? Odp. $\frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Prz. 6. Dwa wahadła fizyczne o masach m_1, m_2 są osadzone na jednej osi poziomej. Odległości środków ciężkości od osi są odpowiednio równe h_1 i h_2, a długości równoważnych wahadeł prostych l_1 i l_2. Wahadła te połączono sztywno, gdy środki ciężkości znalazły się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś. Wyznaczyć dla tego wahadła złożonego długość równoważnego wahadła prostego.

Odp. $\frac{m_1 h_1 l_1 + m_2 h_2 l_2}{m_1 h_1 + m_2 h_2}$.

Prz. 7. Dwie sztaby AB i BC są połączone sztywno w B pod kątem prostym i mogą się obracać około tego punktu w płaszczyźnie pionowej. Ustawiamy sztabę AB poziomo i następnie pozostawiamy układ samemu sobie. Dowieść, że amplituda będzie dwa razy większa od kąta, który AB tworzy z poziomem w stanie równowagi.

121. Reakcje łożysk. Będziemy uważali oś, około której wiruje ciało sztywne, za sztywną linję materjalną, należącą do owego ciała. Podobne urządzenie posiadają różne obracające się części maszyn, jak koła rozpędowe, pasowe, zębate i t. d. Są one zazwyczaj sztywno umocowane na wale, a wał jest osadzony w łożyskach nieruchomych.

Dajmy na to, że oś ciała wirującego jest osadzona w dwóch łożyskach; wystarcza to całkowicie do unieruchomienia jej w przestrzeni. Rola mechaniczna łożysk polega jedynie na tem, że wywierają one na oś pewne reakcje. Rozważymy teraz, w jaki sposób reakcje te dają się wyznaczyć. Aby ułatwić sprawę będziemy uważali łożyska za punkty; w takim razie każde z nich może wywierać tylko jedną siłę, i zadanie sprowadza się do wyznaczenia dwóch sił, przyłożonych w danych punktach osi.

Zbadamy naprzód przypadek szczególny, w którym na ciało nie działają żadne siły z wyjątkiem owych reakcyj. Wiemy z paragrafu 119, że w takim razie szybkość kątowa jest stała. Oznaczmy ją przez ω.

Obierzmy na osi obrotu środek redukcji O i wyznaczmy dlań wektory G i H. Prócz tego zredukujmy obydwie reakcje łożysk do siły wypadkowej, przyłożonej w O i do pary. Tę siłę wypadkową oznaczymy przez R, a moment pary przez N. Można także uważać N za sumę momentów reakcyj względem punktu O. Siła R nie wywiera wpływu na wektor H, gdyż moment jej względem O jest zerem, z drugiej strony para N nie oddziaływa wcale na wektor G, gdyż jej siły wytwarzają równe i odwrotne przyrosty tego wektora. Tak więc wektor G zmienia się jedynie pod działaniem siły R, a wektor H pod działaniem pary N, i zadanie nasze rozpada się na dwa zadania odrębne, a mianowicie wyznaczenie siły R według zmian, zachodzących w wektorze G, i wyznaczenie pary N według zmian wektora H.

Wektor G jest równoległy do szybkości środka ciężkości S ciała, czyli prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez S i oś obrotu. Co do wielkości $G = Ma\omega$, gdzie M oznacza masę ciała i a odległość środka ciężkości od osi. Można uważać, że wektor G jest sztywno połączony z ciałem i obraca się wraz z niem około osi z szybkością kątową ω.

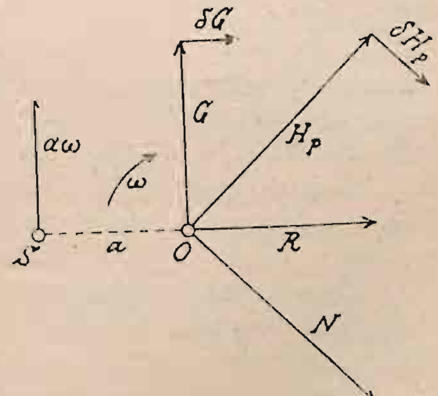

Fig. 81.

W czasie dt wektor G obróci się o kąt ωdt, czyli przybierze przyrost geometryczny $G\omega dt$ w kierunku, w którym porusza się koniec jego; przyrost ten jest równy popędowi Rdt, a zatem $R = G\omega$, czyli

$$R = Ma\omega^2.$$

Co do kierunku siła R jest prostopadła do osi, leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś oraz środek ciężkości, i jest odwrócona od tego środka.

Do tego samego moglibyśmy dojść bardzo łatwo przy pomocy zasady ruchu środka ciężkości. Ponieważ ω jest stałe, zatem środek ciężkości posiada tylko przyśpieszenie normalne, skierowane prostopadle do osi obrotu i wynoszące $a\omega^2$. Przyśpieszenie to nadałaby masie M siła R, z czego wynika ta sama wielkość jej i kierunek, które znaleźliśmy poprzednio.

Siłę R wywierają obydwa łożyska razem; aby znaleźć, jaki w tem udział bierze każde z nich, trzeba tylko rozłożyć R na dwie składowe równoległe R' i R'', przyłożone w łożyskach. Jeżeli środek redukcji O został obrany w jednem z łożysk, to łożysko to wywiera całkowitą siłę R.

Wektor H, podobnie jak G, nie zmienia się co do wielkości, lecz tylko wiruje około osi obrotu z szybkością kątową ω. Rozłożymy go na dwie składowe, a mianowicie w kierunku osi obrotu i w kierunku prostopadłym do osi. Pierwszą oznaczymy przez H_0, drugą przez H_p. Składowa H_0 nie zmienia się ani pod względem wielkości, ani pod względem kierunku a zatem para N wytwarza tylko przyrost składowej H_p.

W czasie dt wektor H_p przybierze przyrost geometryczny $H_p \omega dt$ w kierunku szybkości końca, i przyrost ten musi być równy Ndt, a zatem

$$N = H_p \omega .$$

Moment ten jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez wektor H i oś obrotu, zwrócony zaś jest w stronę, w którą porusza się koniec H_p.

Siły, tworzące parę N (oznaczymy je przez P', P''), są przyłożone w łożyskach; mając moment N, możemy je z łatwością wyznaczyć co do wielkości i kierunku.

Tak więc jedno łożysko wywiera siły R', P', a drugie R'' i P''. Znając te składowe, wyznaczymy reakcję wypadkową każdego łożyska. Jest ona oczywiście prostopadła do osi i obraca się około niej z szybkością kątową ω. Rola dynamiczna tych reakcyj polega, jak widzimy, na tem, że wytwarzają one przyrosty wektorów G i H; nazwiemy je *reakcjami dynamicznemi*. Nazwa ta znajdzie w par. następnym bliższe uzasadnienie.

Rozważymy pewne ważne przypadki szczególne. Przypuśćmy naprzód, że obrany przez nas środek redukcji O jest punktem głównym osi obrotu. W takim razie wektor H leży na osi obrotu (par. 115); nie otrzymuje on żadnych przyrostów, a więc moment N jest zerem. Istnieje tylko siła wypadkowa R, i łożyska wywierają reakcje równoległe R' i R''.

Jeżeli przytem ten główny punkt O leży w jednem z łożysk, to wywiera ono całkowitą siłę R. Drugie łożysko nie wywiera żadnej reakcji, a więc nie odgrywa żadnej roli. Gdybyśmy je usunęli, to ciało poruszałoby się w dalszym ciągu zupełnie tak samo, jak poprzednio. W tym przypadku oś obrotu, jedna z osi głównych punktu O, nazywa się także *osią swobodną* tego punktu. Nazwa pochodzi stąd, że ciało bez zewnętrznego przymusu może się obracać około tej prostej, jeżeli tylko jest unieruchomiony punkt O. Gdybyśmy chcieli, aby ciało wirowało stale około jakiejś innej prostej, przechodzącej przez O, lecz nie będącej jego osią główną, to trzebaby ruch ten wymusić, ustawiając drugie łożysko, albo wywierając na oś odpowiednie siły.

Przypuśćmy teraz, że środek ciężkości ciała leży na osi obrotu. Jeżeli ta prosta nie jest osią główną ciała, to jak wiemy (par. 105), nie posiada ona punktu głównego w odległości skończonej, a zatem moment N nie może być zerem. Natomiast nie istnieje siła wypadkowa R, gdyż środek ciężkości pozostaje w spokoju, a zatem wektor G jest stale równy zeru. Tak więc w tym razie łożyska wywierają reakcje P', P'' równe i odwrotne.

Jeżeli oś obrotu jest osią główną środka ciężkości, to zarówno siła R, jak i moment N, są zerami. Obydwa łożyska nie wywierają na oś żadnych reakcyj, i możnaby je usunąć. Dlatego też osi główne środka ciężkości nazywają się także *osiami swobodnemi ciała*.

Twierdzenia powyższe wyrażają zasadniczą właściwość dynamiczną osi głównych.

122. Reakcje łożysk w ruchu przyśpieszonym. Przypuśćmy teraz, że na ciało wirujące działa para o momencie L_0, położonym na osi obrotu. Postępujemy, jak poprzednio. Obieramy na osi środek redukcji O, redukujemy reakcje łożysk do siły R i pary o momencie N i wyznaczamy względem O wektor G i wektor H, albo raczej składowe tego ostatniego H_p i H_o. Obecnie składowa H_o otrzymuje przyrosty pod działaniem pary L_0, a mianowicie $dH_o = L_0 dt$, a ponieważ H_o, t. j. moment ilości ruchu względem osi obrotu, wynosi $Mk^2\omega$, przeto otrzymujemy znane równanie

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = L_0.$$

Wektor G zmienia się w tym razie nietylko co do kierunku, ale i co do wielkości; w czasie dt przybierze on przyrost prostopadły $G\omega dt = Ma\omega^2 dt$, a obok tego przyrost $dG = Mad\omega$ w swym kierunku. Pierwszy z tych przyrostów leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości i oś obrotu, a drugi jest do niej prostopadły. Wytwarza je siła R, a zatem rzuty jej na kierunki przyrostów powinny być odpowiednio równe $Ma\omega^2$ i $Ma\frac{d\omega}{dt}$. Z tego wynikają dwa równania, określające wielkość i kierunek siły R.

W analogiczny sposób wyznacza się moment N, wytwarzający przyrosty $H_p\omega dt$ oraz dH_p wektora H_p. Jeżeli O jest punktem głównym osi, to H_p jest zerem i nie przybiera żadnych przyrostów, a zatem moment N jest zerem.

Znając R i N, wyznaczymy, jak poprzednio, reakcje łożysk. Jak widzimy rola ich polega na tem, że wytwarzają one przyrosty wektorów G i H, są to więc *reakcje dynamiczne*.

Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym na wirujące ciało działają siły P_1, P_2.... Sprowadzimy przypadek ten do poprzedniego; w tym celu przykładamy do osi w łożyskach dwie siły, które wraz z siłami P_1, P_2... sprowadzają się do pary o momencie, położonym na osi. Takie dwie siły zowią się *reakcjami statycznemi*.

Zobaczymy zaraz, jak się wyznaczają te reakcje statyczne. Obierzmy na osi środek redukcji O i zredukujmy siły P_1, P_2... do siły wypadkowej Q i pary o momencie L. Każdy z tych wektorów rozkładamy na dwie składowe w kierunku osi i w kierunku prostopadłym, będziemy więc mieli siły Q_o i Q_p oraz pary L_o i L_p. Wypada zwrócić uwagę, że L_o jest to suma momentów sił P_1, P_2... względem osi. Otóż reakcje statyczne mają zrównoważyć siły Q_o i Q_p oraz parę L_p, gdyż tym sposobpm pozostanie tylko para L_o, której moment leży na osi; odpowiednio do tego każda reakcja statyczna będzie miała trzy składowe.

Aby zrównoważyć siłę Q_o, obydwa łożyska muszą wywierać w kierunku osi siły, których suma jest równa i odwrotna do Q_o, ale nie da się rozstrzygnąć, jaką siłę wywiera każda z nich, jeżeli uważamy oś za ciało sztywne. Siły osiowe, wywierane przez poszczególne łożyska, należą do tak zw. sił *statycznie niewyznaczalnych*. Zresztą łożyska można urządzić i w taki sposób, aby tylko jedno z nich mogło wywierać reakcję osiową i tak też zwykle dzieje się w technice. W tym razie owo jedno łożysko wywiera całkowitą reakcję $-Q_o$, i nieokreśloność powyższa nie zachodzi.

Dalej rozkładamy siłę Q_p na dwie składowe równoległe, przyłożone w łożyskach. Siły równe i odwrotne do tych składowych zrównoważą siłę Q_p.

Wreszcie możemy uważać, że siły pary L_p są przyłożone w łożyskach; zrównoważą je siły równe i odwrotne.

Tym sposobem otrzymamy trzy składowe każdej reakcji, a więc ostatecznie i tę reakcję.

Następnie przyłożymy do osi w łożyskach *reakcje dynamiczne*, t. j. takie dwie siły, które same przez się, bez udziału sił P_1, P_2..., wytworzą wszystkie przyrosty, jakie przybierają wektory G oraz H_p. Wyznaczając reakcje dynamiczne musimy również obrać środek redukcji. Może to być ten sam punkt O, który służył już do wyznaczania reakcyj statycznych, albo inny punkt osi. Naturalnie obieramy obydwa te punkty w sposób dla nas najdogodniejszy.

Możemy uważać, że jednocześnie działają siły P_1, P_2..., reakcje statyczne i reakcje dynamiczne, gdyż siły P_1, P_2... z reakcjami statycznemi sprowadzają się do pary L_0, a ta para łącznie z reakcjami dynamicznemi wywołuje dany ruch ciała. Z tego wynika, że reakcja, którą istotnie wywiera łożysko jest wypadkową reakcji statycznej i reakcji dynamicznej.

Prz. 1. Sztaba o długości $2a$, ważąca Q, jest umocowana w punkcie środkowym O na osi poziomej i tworzy z nią kąt α. Oś posiada dwa łożyska,

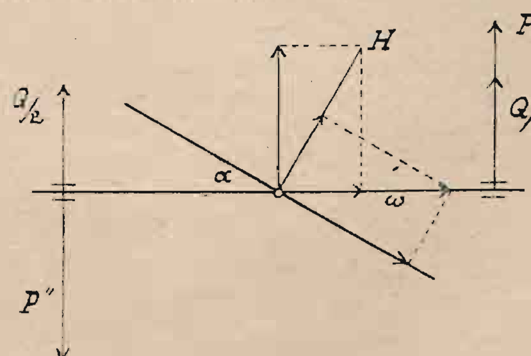

Fig. 82.

każde w odległości b od O, i obraca się z szybkością kątową ω. Wyznaczyć reakcje łożysk.

Reakcje statyczne są obydwie skierowane pionowo w górę, i każda z nich wynosi $\frac{Q}{2}$. Aby znaleźć reakcje dynamiczne, wyznaczamy naprzód według par. 115 wektor H. Jest on skierowany prostopadle do sztaby i wynosi $\frac{Qa^2\omega\sin\alpha}{3g}$. W czasie dt wektor ten przybierze przyrost $H\cos\alpha \,.\, \omega dt$; na rysunku ten przyrost jest skierowany od widza. Reakcje dynamiczne składają się z pary sił o momencie $H\cos\alpha$, a każda z sił pary $= \frac{Qa^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{6bg}$. Siły te P' i P'' leżą zawsze w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś i sztabę. Całkowita reakcja każdego łożyska zmienia się w zależności od położenia sztaby, osiągając maksymum lub minimum, gdy sztaba przechodzi przez płaszczyznę pionową, przeprowadzoną przez oś.

Prz. 2. Koło rozpędowe zostało umontowane w taki sposób, że płaszczyzna jego tworzy z osią wału kąt α. Moment bezwładności koła względem średnicy $= A$ i względem osi symetrji $= C$. Wyznaczyć moment pary, działającej na łożyska, gdy wał posiada stałą szybkość kątową ω. Odp. $(C - A)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Prz. 3. Prosty kołowy cylinder o masie m, promieniu a i wysokości h wiruje około tworzącej AB, która zachowuje położenie pionowe, jakkolwiek tylko górny koniec A jest umocowany. Wyznaczyć reakcję w tym punkcie A. Odp. $\frac{mg}{h}\sqrt{h^2 - 4a^2}$.

Można uważać, że i w B, lub w jakim innym punkcie prostej AB, istnieje łożysko, lecz tam reakcje statyczne równoważą się z dynamicznemi.

Prz. 4. Jednorodna płyta posiada kształt prostokątnego, równoramiennego trójkąta ABC. Kąt B jest prosty i $AB = a$. Płyta wiruje około przyprostokątnej AB, zachowującej położenie pionowe, i tylko górny koniec B jest umocowany. Wyznaczyć szybkość kątową. Odp. $2\sqrt{\frac{g}{a}}$.

Za środek redukcji dogodnie będzie obrać wierzchołek B. Potrzebna jest tylko składowa wektora H w kierunku BC; można łatwo wyznaczyć ją bezpośrednio, dzieląc płytę na paski elementarne i sumując momenty ilości ruchu wszystkich pasków.

Prz. 5. Ciało ciężkie może się obracać około poziomej osi AB, dla której A jest punktem głównym. Ruch rozpoczął się w położeniu, w którem płaszczyzna ABS, przechodząca przez środek ciężkości S, była pozioma. Dowieść, że, gdy płaszczyzna ABS tworzy z pionem kąt ϑ, to wypadkowa reakcyj dynamicznych tworzy z ową płaszczyzną kąt φ taki, że $\tan\varphi = \frac{1}{2}\tan\vartheta$.

Prz. 6. Ćwiartka AOB koła o promieniu a obraca się około promienia OA, ustawionego poziomo. Dowieść, że reakcje łożysk są równoważne z dwiema siłami, z których jedna jest równa ciężarowi płyty i działa na punkt promienia OA, położony w odległości $\frac{4a}{3\pi}$ od środka, a punkt przyłożenia drugiej dzieli ten promień w stosunku $3 : 5$.

Aby wyznaczyć reakcje dynamiczne, potrzebaby znaleźć naprzód punkt główny promienia OA. Zamiast tego można obrać za środek redukcji punkt O

i wyznaczyć składową wektora H w kierunku OB, rozkładając płytę na paski elementarne równoległe do OB.

Prz. 7. Końce sztaby o długości $2a$ mogą przesuwać się po dwóch gładkich prętach x i y, z których pierwszy jest poziomy, drugi pionowy, i obydwa leżą w jednej płaszczyźnie. Cały ten układ obraca się ze stałą szybkością kątową ω około prostej y. Jaki kąt tworzy sztaba z prętem x, gdy pozostaje względem prętów w spokoju? Odp. $\frac{\pi}{2}$ lub $\arcsin\frac{3g}{4a\omega^2}$. To drugie położenie istnieje tylko w takim razie, jeżeli $\omega^2 > \frac{3g}{4a}$.

Prz. 8. Tarcza eliptyczna jest utrzymywana w płaszczyźnie pionowej zapomocą dwóch poziomych kołków, umocowanych na jednym poziomie, i przechodzących przez otwory tarczy w ogniskach. Jaki powinien być mimośród liczbowy elipsy, aby po usunięciu jednego kołka reakcja drugiego nie uległa zmianie? Odp. $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

123. Środek uderzeń. Poprowadźmy w ciele wirującem płaszczyznę **F** przez środek ciężkości S i przez oś obrotu u.

Przypuśćmy, że na ciało działa jedna siła P, prostopadła do płaszczyzny **F** i przyłożona w jej punkcie A. Oznaczmy odległości punktów S i A od osi u odpowiednio przez a i $a+x$, a ramię bezwładności względem prostej u', przechodzącej przez S i równoległej do u, przez k. W takim razie będzie

$$M(k^2+a^2)\frac{d\omega}{dt} = P(a+x) \qquad (1).$$

Dajmy na to, że oś obrotu posiada punkt główny, i że jest nim rzut O punktu A na tę prostą. Obierzemy O za środek redukcji dla wszystkich reakcyj. Reakcje dynamiczne sprowadzają się do jednej siły wypadkowej; rozłożymy ją odrazu na składowe Q i Q', z których pierwsza leży w płaszczyźnie **F**, a druga jest do niej prostopadła. Znajdziemy, że

$$Q = Ma\omega^2 \qquad (2),$$

a $Q' = Ma\frac{d\omega}{dt}$, rugując zaś $\frac{d\omega}{dt}$ przy pomocy (1), otrzymamy

$$Q' = \frac{Pa(a+x)}{k^2+a^2} \qquad (3).$$

Reakcje statyczne sprowadzają się również do jednej wypadkowej, równej i odwrotnej do siły P. Wypadkową siły Q' i tej reakcji statycznej oznaczymy przez R; oczywiście $R = Q' - P$, albo, gdy uwzględnimy (3),

$$R = \frac{P(ax - k^2)}{k^2 + a^2} \qquad (4).$$

Tak więc całkowite reakcje łożysk sprowadzają się do dwóch sił Q i R. Pierwsza nie zależy bezpośrednio od siły P, lecz tylko od szybkości kątowej, którą ciało posiada w danej chwili, nato-

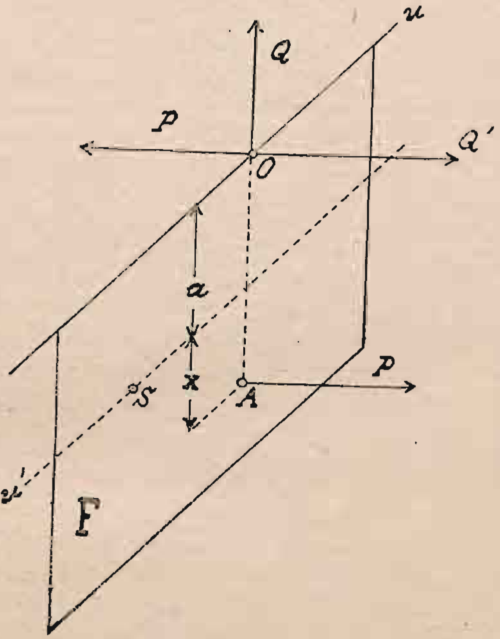

Fig. 83.

miast druga jest niezależna od szybkości kątowej, a zależy jedynie od siły P. Jeżeli ciało pozostawało w spokoju, gdy siła P zaczęła działać, to w pierwszej chwili Q było zerem, a R odrazu osiągnęło wartość, wymienioną w (4).

Jeżeli punkt A jest tak położony, że

$$x = \frac{k^2}{a} \qquad (5),$$

to $R = 0$, i reakcje łożysk sprowadzają się do siły Q. Można powiedzieć, że siła P w tym przypadku nie oddziaływa wcale na łożyska. Taki punkt A nazywa się *środkiem uderzeń.* Gdy porównamy (5) z (3) w paragrafie 120, to przekonamy się, że środek uderzeń leży w tej samej odległości od osi, w której by leżał środek wahań, gdyby dane ciało uczynić wahadłem fizycznem, pozostawiając je na tej samej osi. Jeżeli oś obrotu jest równoległa do osi głównej ciała, to, jak wiemy, punkt główny O znajduje się w rzucie środka ciężkości, a zatem środki uderzeń i wahań leżą razem.

Jeżeli x jest większe od $\frac{k^2}{a}$, t. j. jeżeli punkt przyłożenia siły P leży dalej od osi, niż środek uderzeń, to R jest dodatnie; znaczy to, że łożyska wywierają na oś siły prostopadłe do płaszczyzny **F** w kierunku siły P. Jeżeli punkt przyłożenia siły P znajduje się bliżej osi, niż środek uderzeń, albo po drugiej stronie osi, to reakcje łożysk mają kierunek odwrotny.

Środek uderzeń istnieje tylko w takim razie, gdy oś obrotu posiada punkt główny.

Twierdzenia powyższe dotyczą oczywiście w równej mierze sił chwilowych, i właśnie w tym przypadku posiadają doniosłość szczególną. Gdy ciało, osadzone na osi, dozna uderzenia w środku uderzeń w kierunku prostopadłym do płaszczyzny **F**, to reakcje łożysk w pierwszej chwili nie doznają zmiany. Jeżeli ciało było poprzednio w spokoju, i żadne inne siły na nie nie działają, to podczas uderzenia łożyska nie wywierają żadnych reakcyj, a zatem nie odgrywają żadnej roli. Gdyby ciało było swobodne, to zaczęłoby się obracać około tej samej osi u; byłaby to pierwsza oś chwilowa.

Dla przykładu wyobraźmy sobie wahadło fizyczne, urządzone na podstawie ruchomej, np. na wózku kolejowym, i niech oś będzie prostopadła do szyn. Przypuśćmy, że wahadło pozostaje w spokoju, gdy uderza je pocisk, biegnący z szybkością równoległą do szyn. Jeżeli pocisk trafi niżej od środka uderzeń, to łożyska, połączone szytywno z wózkiem, wywrą na oś w krótkim okresie uderzenia bardzo wielkie reakcje, czyli siły chwilowe, w kierunku szybkości pocisku, a zatem oś wywrze na łożyska siły odwrotne, i wózek potoczy się w kierunku odwrotnym do szybkości pocisku. Jeżeli pocisk trafi wyżej od środka uderzeń, to wózek potoczy się w tę samą stronę, w którą biegł pocisk. Jeżeli wreszcie uderzenie nastąpi w samym środku uderzeń, to wózek w pierwszej chwili pozostanie w spokoju.

Niech będzie jeszcze cienka płyta, leżąca na płaszczyźnie poziomej. Wprawmy ją w ruch zapomocą uderzenia poziomego, skierowanego wzdłuż pewnej określonej prostej p. Twierdzenia powyższe pozwalają łatwo wyznaczyć najpierwszy środek chwilowy O.

Gdybyśmy osadzili płytę na pionowej osi u, przechodzącej przez ten środek chwilowy, to w pierwszej chwili ruch płyty byłby taki sam, jak i bez tej osi. Z tego wynika, że oś u nie wywiera podczas uderzenia żadnych reakcyj, a więc uderzenie nastąpiło w jej środek uderzeń A; środek ten jest oczywiście rzutem punktu O na prostą p. Prosta AO przechodzi przez środek ciężkości S, gdyż punkt ten musi leżeć w płaszczyźnie, przechodzącej przez A i u.

Tak więc znajdziemy punkt A, prowadząc prostopadłą z S do p, a środek chwilowy leży na tejże prostopadłej po drugiej stronie środka ciężkości w odległości $\frac{k^2}{AS}$.

Narzędzia, przeznaczone do uderzeń, jak młoty, siekiery i t. d. powinny być tak urządzone, aby środek uderzeń przypadał mniej więcej w tem miejscu, które obejmuje dłoń robotnika. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to ręka doznaje nieprzyjemnych wstrząśnień.

Prz. 1. Sztaba AOB, która może się obracać około O, otrzymuje uderzenie w sam koniec A, wymierzone w kierunku do niej prostopadłym. Okazać, że sztaba zaczerpnie najwięcej siły żywej, jeżeli A jest środkiem uderzeń punktu O.

Prz. 2. Zwykle wysokość band bilardowych jest równa 0,7 średnicy kul. W jakim celu obrano taki stosunek?

Prz. 3. Tarcza kołowa, której środek leży w O, a promień $= r$, otrzymuje uderzenia w punkt A obwodu i może się obracać około cięciwy prostopadłej do AO. W jakiej odległości od środka powinna być ta cięciwa, aby uderzenia nie wywoływały wstrząśnień? Odp. $\frac{r}{4}$.

Prz. 4. Trójkąt prostokątny ABO, w którym $OB = a$, i $OA = b$, może się obracać około przyprostokątnej OB. Wyznaczyć środek uderzeń.

Należałoby wyznaczyć naprzód ramię bezwładności względem OB oraz punkt główny tej przyprostokątnej, ale można znaleźć żądany punkt i bezpośrednio. Obieramy proste OB, OA za osi x, y i wyznaczamy momenty ilości ruchu H_x i H_y, które powstaną względem takich osi po oderzeniu. Ponieważ oś obrotu ma nie wywierać żadnych reakcyj, przeto $H_x = P\eta$ i $H_y = P\xi$, gdzie ξ, η oznaczają współrzędne punktu szukanego, a P impuls, który łatwo wyrazić w funkcji szybkości kątowej. Z równań tych wypadnie $\xi = \frac{a}{4}$, $\eta = \frac{b}{2}$.

Prz. 5. Ćwiartka koła AOB o promieniu r może się obracać około promienia OA. Wyznaczyć środek uderzeń. Odp. Odległości szukanego punktu od OA i OB wynoszą odpowiednio $\frac{3\pi r}{16}$, $\frac{3r}{8}$.

Prz. 6. W jaki sposób należy uderzyć tarczę okrągłą, leżącą na gładkim stole, aby zaczęła się obracać około jednego z punktów obwodu? Odp. Linja uderzenia powinna dzielić prostopadłą średnicę w stosunku 3 : 1.

Prz. 7. Wahadło składa się z kuli o promieniu a i masie M, osadzonej na końcu pręta o długości b i masie m. Wyznaczyć środek uderzeń. Odp. Szukana odległość x od punktu zawieszenia wyznacza się z równania

$$\left[M(a+b)+\frac{mb}{2}\right]x=M\left[\frac{2a^2}{5}+(a+b)^2\right]+\frac{mb^2}{3}.$$