VII. SZKIELET DYNAMICZNY CIAŁA.

96. Przedmiot rozdziału. Zasadnicze zagadnienie dynamiki ciał sztywnych jest takie: mając dane ciało sztywne oraz siły na nie działające, wyznaczyć ruch tego ciała. Aby zagadnienie takie rozwiązać trzeba przedewszystkiem wiedzieć, jak jest w ciele rozłożona masa, czyli znać jego budowę dynamiczną.

Wśród ciał sztywnych możliwa jest nieograniczona rozmaitość kształtów, a wśród ciał niejednorodnych o jednakowych kształtach możliwa jest jeszcze nieograniczona różnorodność w rozkładzie mas. Pomimo to jednak wszystkie ciała sztywne wykazują w swej budowie dynamicznej pewne wspólne rysy. Możnaby powiedzieć, że każde ciało sztywne posiada jakby szkielet dynamiczny, i szkielety wszystkich ciał są zbudowane na jedną modłę, jak na jedną modłę są zbudowane szkielety wszystkich zwierząt kręgowych.

Przedmiotem niniejszego rozdziału ma być właśnie opis budowy dynamicznej ciała sztywnego. Punktem wyjścia będzie pojęcie momentu bezwładności, albo momentu drugiego rzędu. Na początku poznamy trzy rodzaje tych momentów, a mianowicie *moment względem płaszczyzny, moment względem prostej albo osi i moment względem punktu, albo środka.*

Właściwie w zagadnieniach dynamicznych będą potrzebne tylko momenty względem osi, ale pomiędzy wymienionymi rodzajami zachodzą pewne proste związki, które ułatwiają w dużym stopniu wyznaczanie momentów; dlatego też wypada poznać i dwa rodzaje pozostałe. Następnie poznamy jeszzze czwarty rodzaj momentu drugiego rzędu, a mianowicie tak zwany *moment odśrodkowy,* albo *dewjacyjny.*

Wypada zauważyć, że wyraz moment został tu użyty w zupełnie innem znaczeniu, niż np. w par. 9. Moment bezwładności nie jest wcale wektorem, lecz jest skalarem.

97. Moment względem płaszczyzny. Niech będzie jakieś ciało sztywne i jakaś płaszczyzna **P**. Podzielmy to ciało na tak małe elementy, aby każdy z nich można było uważać za punkt. Masy ich niech będą m_1, m_2..., a odległości od płaszczyzny **P** z_1, z_2.... Odległościom tym przypisujemy znaki podobnie, jak odległościom od płaszczyzn współrzędnych. Iloczyn mz^2 nazywa się *momentem bezwładności elementu m względem płaszczyzny* **P**, a suma wszystkich iloczynów takich, t. j. $m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + ... = \Sigma mz^2$ zowie się *momentem bezwładności ciała względem tejże płaszczyzny*.

Oznaczmy masę całego ciała, czyli Σm przez M i obierzmy tak długość k, aby było

$$Mk^2 = \Sigma mz^2.$$

Ta długość k nazywa się *ramieniem bezwładności* ciała względem płaszczyzny **P**.

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została rozłożona na płaszczyźnie **P**$'$, równoległej do **P** i położonej od niej w odległości k. Oczywiście ta płaska warstwa masy miałaby względem **P** taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Poprowadźmy jeszcze przez środek ciężkości, albo raczej przez środek masy ciała*), płaszczyznę $\mathbf{P}_0$ równoległą do **P**, i oznaczmy przez z_0 odległość pierwszej od drugiej, a przez ζ_1, ζ_2..., odległości punktów m_1, m_2... od $\mathbf{P}_0$. Oczywiście $z = \zeta + z_0$, i $z^2 = \zeta^2 + z_0^2 + 2z_0\zeta$, albo

$$mz^2 = m\zeta^2 + mz_0^2 + 2z_0 m\zeta.$$

Utwórzmy takie równania dla wszystkich elementów ciała i dodajmy je stronami. Wypadnie

$$\Sigma mz^2 = \Sigma m\zeta^2 + \Sigma mz_0^2 + \Sigma 2mz_0\zeta.$$

Drugi wyraz prawej strony $= z_0^2 \Sigma m = Mz_0^2$, a wyraz trzeci $= 2z_0 \Sigma m\zeta$. Lecz $\Sigma m\zeta$ jest to tak zw. moment statyczny, czyli moment pierwszego rzędu, względem płaszczyzny $\mathbf{P}_0$, a ze statyki wiadomo, że moment taki względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy, jest zerem. Będzie więc

$$\Sigma mz^2 = \Sigma m\zeta^2 + Mz_0^2 \qquad (1).$$

*) Środek masy i środek ciężkości nie są synonimami, ponieważ jednak w zakresie zjawisk mechanicznych, z któremi mamy do czynienia na powierzchni ziemi, środek masy jest zawsze środkiem ciężkości, nie będziemy przeto nadal czynili różnicy pomiędzy tymi terminami, posługując się przeważnie drugim.

Twierdzenie, zawarte w tym wzorze, można wypowiedzieć tak: *aby otrzymać moment bezwładności względem płaszczyzny* **P**, *trzeba do momentu względam płaszczyzny równoległej, przechodzącej przez środek ciężkośei, dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem* **P**.

Oczywiście ze wszystkich płaszczyzn równoległych najmniejszy moment odpowiada płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości.

Równanie (1) można jeszcze napisać w postaci $Mk^2 = Mk_0^2 + Mz_0^2$, gdzie k_0 oznacza ramię bezwładności względem płaszczyzny $\mathbf{P}_0$; zatem

$$k^2 = k_0^2 + z_0^2 \qquad (2).$$

98. Moment względem osi. Niech będzie znowu ciało sztywne i jakaś prosta z. Odległości elementów m_1, m_2... od z oznaczymy przez r_1, r_2.... Iloczyn mr^2 zowie się *momentem bezwładności elementu m względem osi z*, a Σmr^2 *momentem bezwładności ciała względem tejże osi.*

Jeżeli $Mk^2 = \Sigma mr^2$, to k nazywa się *ramieniem bezwładności ciała względem osi z.* Gdybyśmy rozłożyli masę ciała na powierzchni prostego cylindra, którego osią jest prosta z, a promień jest równy k, to taka warstwa cylindryczna miałaby względem z taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Pomiędzy momentami względem prostych i płaszczyzn zachodzi prosty związek. Poprowadźmy przez oś z dwie płaszczyzny $\mathbf{P}_x$ i $\mathbf{P}_y$, tworzące kąt prosty, i niech x, y oznaczają odległości elementu m od tych płaszczyzn. Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2$, albo

$$mr^2 = mx^2 + my^2.$$

Takie równanie odpowiada każdemu elementowi; sumując je, otrzymamy

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \qquad (1).$$

Znaczy to, że *moment bezwładności względem osi jest równy sumie momentów względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez tę oś i prostopadłych do siebie.*

Oznaczając przez k_x i k_y ramiona bezwładności ciała względem $\mathbf{P}_x$ i $\mathbf{P}_y$, znajdziemy, że

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad (2).$$

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała prostą ζ równoległą do z. Odległość pomiędzy prostemi z i ζ oznaczmy przez x_0, a momenty bezwładności względem nich odpowiednio przez I, I_0. Poprowadźmy prócz tego trzy płaszczyzny, a mianowicie płaszczyznę **Q**, przechodzącą przez z i ζ, oraz płaszczyzny **P**, **P**$_0$, prostopadłe do **Q** i przechodzące odpowiednio przez z i ζ. Momenty bezwładności ciała względem płaszczyzn **Q**, **P**, **P**$_0$ oznaczymy odpowiednio przez K, L, L_0. W myśl tylko co dowiedzionego twierdzenia

$$I = K + L \quad \text{i} \quad I_0 = K + L_0.$$

Rugując stąd K, otrzymamy $I = I_0 + L - L_0$. Lecz według twierdzenia, które poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym $L - L_0 = Mx_0^2$, a zatem

$$I = I_0 + Mx_0^2 \qquad (2).$$

Pragnąc otrzymać moment bezwładności względem osi z, trzeba do momentu względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do z, dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem z.

Ze wszystkich prostych równoległych oczywiście najmniejszy moment odpowiada tej, która przechodzi przez środek ciężkości.

Oznaczając przez k_0 ramię bezwładności ciała względem osi z_0, przekształcimy równanie (2) na

$$k^2 = k_0^2 + x_0^2 \qquad (3),$$

99. Moment względem punktu. *Momentem bezwładności ciała względem punktu O* nazywamy Σmr^2, gdzie m_1, m_2... oznaczają masy elementów, a r_1, r_2... ich odległości od O. Jeżeli $Mk^2 = \Sigma mr^2$, to k zowie się ramieniem bezwładności względem O. Gdybyśmy całą masę ciała rozłożyli na powierzchni kuli, której środkiem jest punkt O, a promień jest równy k, to moment bezwładności takiej warstwy kulistej względem O byłby równy momentowi ciała.

Obierzmy O za początek prostokątnego układu współrzędnych i oznaczmy przez x, y, z współrzędne elementu m. Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, albo

$$mr^2 = mx^2 + my^2 + mz^2.$$

Sumując wszystkie takie równania, otrzymamy

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2 \qquad (1),$$

Σmx^2 jest to moment bezwładności względem płaszczyzny yz i t. d., a zatem twierdzenie, zawarte w (1), wypowiemy tak: *moment bezwładności względem punktu jest równy sumie momentów bezwładności względem trzech płaszczyzn, przechodzących przez ten punkt i prostopadłych do siebie.*

Ostatnie równanie przekształca się łatwo na

$$k^2 = k_{yz}^2 + k_{zx}^2 + k_{xy}^2 \qquad (2),$$

gdzie k_{yz}, k_{zx}, k_{xy} oznaczają ramiona bezwładności względem płaszczyzn yz, zx, xy.

Oznaczmy moment bezwładności ciała względem punktu O przez I, momenty względem płaszczyzn yz, zx, xy przez I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} i wreszcie momenty względem prostych x, y, z przez I_x, I_y, I_z.

Na zasadzie (1) w paragrafie poprzedzającym napiszemy

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx}.$$

Gdy dodamy te równania stronami, to wypadnie

$$I_x + I_y + I_z = 2(I_{yz} + I_{zx} + I_{xy})$$

lub

$$I_x + I_y + I_z = 2I \qquad (3),$$

gdyż według (1) $I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = I$.

100. Wyznaczanie momentów bezwładności. Przy pomocy twierdzeń powyższych wyznaczymy momenty lub ramiona bezwładności kilku ciał, z któremi będziemy mieli do czynienia w dalszym ciągu. We wszystkich rozważanych przypadkach należy uważać ciała za jednorodne.

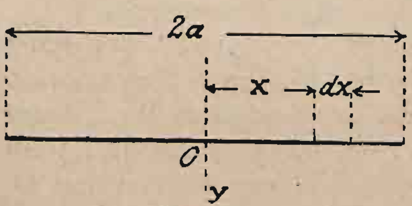

Fig. 74.

Sztaba. Naprzód wyznaczymy moment bezwładności cienkiej prostej sztaby o długości $2a$ względem prostej y, przechodzącej przez środek ciężkości O i prostopadłej do sztaby, albo względem punktu O, bo w danym przypadku jest to wszystko jedno.

Dzielimy sztabę na nieskończenie małe elementy dx; masa takiego elementu jest równa μdx, gdzie μ oznacza masę jednostki długości. Moment bezwładności jednego elementu względem O wynosi $\mu x^2 dx$, a zatem moment bezwładności sztaby

$$I = \int_{-a}^{a} \mu x^2 dx = \frac{2\mu a^3}{3}.$$

Ponieważ masa sztaby $= 2\mu a$, przeto na ramię bezwładności otrzymamy wzór

$$k^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Kwadrat ramienia bezwładności względem końca sztaby $= \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$.

Płyta prostokątna. Wyznaczymy ramię bezwładności cienkiej płyty prostokątnej o podstawie $2a$ i wysokości $2b$ względem prostej x, przechodzącej przez środek ciężkości O i równoległej do podstawy. W tym celu dzielimy płytę na nieskończenie wąskie paski prostokątne, prostopadłe do x. Pasek taki możemy uważać za sztabę o długości $2b$, a zatem kwadrat jego ramienia bezwładności

$$k_x^2 = \frac{b^2}{3}.$$

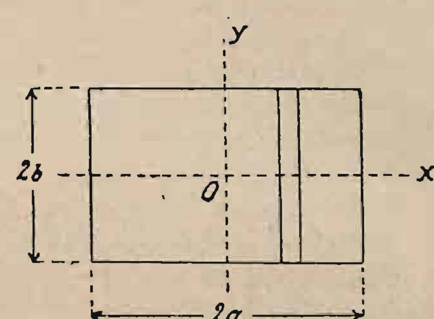

Fig. 75.

Gdybyśmy masę paska skoncentrowali w jednym punkcie w odległości k_x od x, to moment bezwładności całego ciała względem tej prostej nie uległ by zmianie. Z tego wynika, że k_x jest również ramieniem bezwładności płyty względem osi x.

Kwadrat ramienia bezwładności względem osi y, przechodzącej przez O i równoległej do wysokości, będzie oczywiście $k_y^2 = \frac{a^2}{3}$.

Można uważać, że k_x i k_y są ramionami bezwładności płyty względem płaszczyzn przechodzących odpowiednio przez proste x, y i prostopadłych do płaszczyzny płyty, a zatem $k_x^2 + k_y^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}$ będzie kwadratem ramienia bezwładności względem osi, przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny płyty.

Prosty cylinder kołowy. Wyznaczymy moment bezwładności względem osi cylindra. W tym celu dzielimy cylinder na nieskończenie cienkie warstwy cylindryczne, powierzchniami cylindrycznemi współśrodkowemi z powierzchnią cylindra. Promień jednej z nich niech będzie równy r, a grubość dr; w takim razie masa jej wynosi $2\pi rhdr\,.\,\mu$, gdzie h oznacza wysokość cylindra, a μ masę jednostki objętości. Moment bezwładności takiej warstwy względem osi jest oczywiście równy $2\pi rhdr\,.\,\mu\,.\,r^2$, a moment całego cylindra

$$I = \int_0^a 2\pi\mu hr^3 dr = \frac{\pi\mu ha^4}{2}.$$

gdzie a oznacza promień cylindra.

Ponieważ masa cylindra wynosi $\pi\mu ha^2$, przeto

$$k^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Wyznaczymy jeszcze ramię bezwładności k_1 względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi cylindra. Poprowadzimy przez nią dwie płaszczyzny $\mathbf{P}_x$ i $\mathbf{P}_y$, jedną prostopadle do osi cylindra, a drugą przez tę oś, i wyznaczymy względem nich ramiona bezwładności k_x i k_y.

Możemy uważać, że cylinder składa się ze sztab o długości h równoległych do osi, czyli prostopadłych do płaszczyzny $\mathbf{P}_x$. Kwadrat ramienia bezwładności każdej sztaby względem tej płaszczyzny $= \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{12}$; oczywiście i $k_x{}^2 = \frac{h^2}{12}$.

Ramiona bezwładności względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez oś, są równe, a suma kwadratów ramion względem takich dwóch płaszczyzn nawzajem prostopadłych, jest równa k^2, a zatem $k_y{}^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Ostatecznie znajdziemy, że

$$k_1{}^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2 = \frac{3a_2 + h^2}{12}.$$

Stożek prosty. Naprzód wyznaczymy moment bezwładności względem osi. W tym celu dzielimy stożek na nieskończenie cienkie warstwy płaszczyznami prostopadłemi do osi. Odległość jednej z nich od wierzchołka niech będzie równa y, grubość dy, promień zaś wynosi $y\tan\alpha$, gdzie 2α oznacza kąt wierzchołkowy. Warstwę tę możemy uważać za cylinder, zatem masa jej $= \pi y^2\tan^2\alpha dy\,.\,\mu$, a ponieważ kwadrat ramienia bezwładności $= \frac{y^2\tan^2\alpha}{2}$, przeto moment bezwładności warstwy względem osi $= \dfrac{\pi y^4 \tan^4 \alpha dy \,.\, \mu}{2}$, a moment szukany

$$I = \int_0^h \frac{\pi\mu \tan^4 \alpha y^4 dy}{2} = \frac{\pi\mu \tan^4 \alpha \,.\, h^5}{10}.$$

Oznaczmy jeszcze przez a promień podstawy; w takim razie $\tan\alpha = \dfrac{a}{h}$, i

$$I = \frac{\pi\mu a^4 h}{10}.$$

Masa stożka wynosi $\dfrac{\pi\mu a^2 h}{3}$, a zatem

$$k^2 = \frac{3a^2}{10}.$$

Wyznaczymy jeszcze ramię bezwładności k_1 względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi stożka, a w tym celu wyznaczymy naprzód moment względem płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek prostopadle do osi. Moment bezwładności warstwy wyżej określonej $= \pi y^2 \tan^2 \alpha dy \,.\, \mu \,.\, y^2$, moment stożka $= \int_0^h \pi\mu \tan^2 \alpha y^4 dy = \dfrac{\pi\mu \tan^2 \alpha h^5}{5}$, a kwadrat ramienia bezwładności $\dfrac{3h^2}{5}$, gdyż objętość $= \dfrac{\pi h^3 \tan^2 \alpha}{3}$. Odległość wierzchołka od środka ciężkości, jak wiadomo ze statyki, wynosi $\dfrac{3h}{4}$, a zatem kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadle do osi, będzie $\dfrac{3h^2}{5} - \left(\dfrac{3h}{4}\right)^2 = \dfrac{3h^2}{80}$.

Znajdziemy z łatwością, jak w przypadku cylindra, że kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez oś, $= \dfrac{3a^2}{10} : 2 = \dfrac{3a^2}{20}$, a zatem

$$k_1{}^2 = \frac{3a^2}{20} + \frac{3h^2}{80} = \frac{12a^2 + 3h^2}{80}.$$

Kula. Chodzi tu o ramię bezwładności k względem średnicy, lecz naprzód wyznaczymy moment bezwładności względem środka.

W tym celu dzielimy kulę na nieskończenie cienkie warstwy powierzchniami kulistemi, współśrodkowemi z daną. Niech promień jednej z takich warstw będzie r, a grubość dr. Objętość wyniesie $4\pi r^2 dr$, a masa $4\pi r^2 dr\,.\,\mu$. Oczywiście moment bezwładności warstwy względem środka $= 4\pi r^2 dr\,.\,\mu\,.\,r^2$, a moment kuli $=$ $= \int_0^a 4\pi\mu r^4 dr = \frac{4\pi\mu a^5}{5}$, gdzie a oznacza promień. Kwadrat ramienia bezwładności względem środka równa się $\frac{4\pi\mu a^5}{5} : \frac{4\pi\mu a^3}{3} = \frac{3a^2}{5}$.

Kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek $= \frac{3a^2}{5} : 3 = \frac{a^2}{5}$, i zatem

$$k^2 = \frac{a^2}{5}\,.\,2 = \frac{2a^2}{5}.$$

W przykładach niżej podanych chodzi o momenty bezwładności linij, pól i brył. Należy zawsze uważać, że te linje, pola i bryły są równomiernie okryte lub wypełnione masą.

Prz. 1. Wyznaczyć kwadrat ramienia bezwładności okręgu koła o promieniu a względem osi, przechodzącej przez środek i prostopadłej do płaszczyzny koła, a także względem średnicy. Odp. a^2 i $\frac{a^2}{2}$.

Prz. 2. Wyznaczyć ramię bezwładności równoległoboku o wysokości h względem prostej, przechodzącej przez środek i równoległej do podstawy. Odp. $k^2 = \frac{h^2}{12}$.

Dzieląc pole równoległoboku na wąskie paski równoległe do podstawy, dowiedziemy łatwo, że moment jego jest równy momentowi prostokąta, posiadającego tę samą podstawę i wysokość.

Prz. 3. Wyznaczyć ramię bezwładności trójkąta o wysokości h względem podstawy, Odp. $k^2 = \frac{h^2}{6}$.

Dopełniamy trójkąt do równoległoboku. Momenty bezwładności obydwóch trójkątów względem prostej, przechodzącej przez środek i równoległej do podstawy są równe, zatem moment jednego jest równy połowie momentu równoległoboku. Stąd przejdziemy przy pomocy twierdzenia z par. 98 do momentu (lub ramienia) względem osi równoległej przez środek ciężkości i wreszcie do momentu względem podstawy. Równie łatwo można wyznaczyć ramię zapomocą całkowania.

Prz. 4. Wyznaczyć ramię bezwładności trójkąta $A_1A_2A_3$ względem prostej, przechodzącej przez A_3 w odległości a_1, a_2 od wierzchołków A_1, A_2.

Odp. $k^2 = \frac{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2}{6}$.

Moment bezwładności trójkąta $A_1A_2A_3$ będzie oczywiście równy różnicy momentów trójkątów BA_2A_3 i BA_1A_3, gdzie B oznacza przecięcie prostej danej z A_1A_2.

Prz. 5. Wyznaczyć ramię bezwładności tarczy kołowej o promieniu a względem stycznej. Odp. $k^2=\frac{5a^2}{4}$.

Prz. 6. Wyznaczyć ramię bezwładności płyty półkolistej o promieniu a, względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy. Odp. $k^2=a^2\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)$.

Prz. 7. Wyznaczyć ramiona bezwładności pola elipsy względem dużej osi, małej osi, a także względem prostej, przechodzącej przez środek i prostopadłej do płaszczyzny krzywej. Odp. Kwadraty szukanych ramion wynoszą odpowiednio $\frac{b^2}{4}$, $\frac{a^2}{4}$, $\frac{a^2+b^2}{4}$, gdzie $2a$ i $2b$ oznaczają długości osi dużej i małej.

Ze względów symetrji wynika, że wyrażenia na ramiona bezwładności względem osi muszą być symetryczne względem a i b. Moment względem dużej osi daje się łatwo wyznaczyć bez całkowania. Uważamy elipsę za rzut koła, położonego w płaszczyźnie, przechodzącej przez tę oś i nachylonej do płaszczyzny elipsy pod kątem $\alpha=\arccos\left(\frac{b}{a}\right)$. Elementowi dS pola koła, położonemu w odległości y od osi, odpowiada element $dS\cos\alpha$ elipsy, położony w odległości $y\cos\alpha$. Z tego wynika, że moment bezwładności elipsy jest $\cos^3 a$ razy większy od momentu koła.

Prz. 8. Wyznaczyć ramiona bezwładności łuku kołowego o długości $2a\alpha$ (promień koła$=a$) względem średnicy, przechodzącej przez środek łuku, a także względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do płaszczyzny koła. Odp. $\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$, $a^2\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$.

Prz. 9. Granicę cienkiej płyty stanowi parabola $y^2=4px$ i prosta prostopadła do osi paraboli, przeprowadzona w odległości c od wierzchołka. Wyznaczyć ramiona bezwładności względem osi i względem stycznej w wierzchołku. Odp. $\frac{4cp}{5}$, $\frac{3c^2}{7}$.

Prz. 10. Wyznaczyć ramię bezwładności półkuli o promieniu a względem stycznej w wierzchołku. Odp. $\frac{13a^2}{20}$.

Prz. 11. Wyznaczyć ramię bezwładności elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ względem osi x. Odp. $\frac{b^2+c^2}{5}$.

Prz. 12. Wyznaczyć ramię bezwładności paraboloidy obrotu, w której promień podstawy $=b$, względem osi obrotu. Odp. $\frac{b^2}{3}$.

Prz. 13. Wyznaczyć ramiona bezwładności lemniskaty ($r^2=a^2\cos 2\varphi$) względem obydwóch osi. Odp. Kwadraty szukanych ramion względem osi przecinającej pole krzywej i nieprzecinającej są $\frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)$, i $\frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\right)$.

Najlepiej będzie wyznaczyć naprzód moment względem bieguna czyli węzła, następnie względem osi nieprzecinającej i z tego obrachować moment względem drugiej. Pole lemniskaty (obydwóch pętlic) $= a^2$.

Prz. 14. Wyznaczyć ramię bezwładności sześciennego pudełka o cienkich ścianach i krawędzi a względem krawędzi. Odp. $\frac{7a^2}{9}$.

101. Osi główne. Niech będzie ciało sztywne, jakakolwiek płaszczyzna **P** i w tej płaszczyźnie jakikolwiek punkt O. Skierujmy uwagę na te proste, które w płaszczyźnie **P** przechodzą przez punkt O, czyli na pęk promieni O. Każdej z tych prostych odpowiada pewien moment bezwładności ciała. Wyróżnimy z pośród nich dwie, a mianowicie tę, której odpowiada moment największy, i tę, której odpowiada moment najmniejszy. Nazwiemy je *osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie* **P**. Zobaczymy, jaki kąt tworzą te proste.

W tym celu obieramy O za początek układu prostokątnego, a **P** za płaszczyznę xy. W takim razie oś z będzie prostopadła do **P**. Oznaczmy przez I_x, I_y, I_z, I momenty bezwładności ciała względem prostych x, y, z, oraz względem punktu O. Według (3) w par. 99 $I_x + I_y + I_z = 2I$, a zatem

$$I_x + I_y = 2I - I_z.$$

Wyobraźmy sobie teraz, że układ współrzędnych obraca się około osi z, ale ciało i płaszczyzna **P** pozostają w spokoju. Podczas tego ruchu I_x i I_y się zmieniają, ale suma ich pozostaje stałą, gdyż ani I ani I_z nie ulegają zmianom. Z tego wynika, że gdy I_x osiągnie wartość największą, to I_y przybierze wartość najmniejszą, to znaczy, gdy oś x zajmie położenie osi największego momentu, to oś y zajmie właśnie położenie osi najmniejszego momentu. Tak więc *osi największego i najmniejszego momentu tworzą kąt prosty.*

Zwróćmy teraz uwagę na wszystkie proste, które przechodzą w przestrzeni przez O, czyli na snop promieni O. Wyróżnimy znowu z pośród tych prostych dwie, którym odpowiadają momenty największy i najmniejszy. Nazwiemy je *osiami największego i najmniejszego momentu punktu O* i oznaczymy przez a i b. Są one również osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie ab, a zatem w myśl wyżej dowiedzionego twierdzenia są do siebie prostopadłe.

Poprowadźmy jeszcze trzecią prostą c prostopadłą do płaszczyzny ab. Będzie ona oczywiście osią największego momentu w płaszczyźnie bc i osią najmniejszego momentu w płaszczyźnie ca. Te trzy proste a, b i c nazywają się *osiami głównemi punktu O*, a jeżeli O jest środkiem ciężkości, to *osiami głównemi ciała.*

Osi główne odgrywają ważną rolę w dynamice ciała sztywnego. Stanowią one właśnie ten szkielet dynamiczny ciała, o którym była wzmianka w par. 96.

102. Moment odśrodkowy. Niech będzie ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Nazywamy *momentem odśrodkowym* albo *momentem dewjacyjnym* ciała względem osi x, y sumę $m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + \ldots$, czyli Σmxy. Również Σmyz i Σmzx nazywają się momentami odśrodkowemi względem y, z i z, x.

Moment odśrodkowy posiada ten sam wymiar, co i momenty bezwładności, a mianowicie ML^2, jest to więc także moment drugiego rzędu, czyli rodzaj momentu bezwładności; jednak pod pewnym względem rodzaj ten różni się zasadniczo od innych.

Moment bezwładności względem płaszczyzny, zawiera współrzędne elementów tylko w drugich potęgach, a zatem jest on zawsze dodatni. To samo dotyczy momentów względem prostej i punktu. Tymczasem moment odśrodkowy posiada współrzędne w pierwszych potęgach, może więc być ujemny a także równy zeru. Okażemy zaraz na przykładzie, że ten ostatni przypadek jest możliwy.

Przypuśćmy, że ciało posiada płaszczyznę symetrji, a mianowicie *mechaniczną płaszczyznę symetrji*. Znaczy to, że dwa elementy, symetryczne geometrycznie względem owej płaszczyzny, posiadają prócz tego jednakowe masy. Obierzmy osi x i y w płaszczyźnie symetrji, i zwróćmy uwagę na dwa jakiekolwiek elementy symetryczne o masach m. Jeżeli jeden z nich posiada współrzędne x, y, z, to drugi x, y, $-z$, zatem moment odśrodkowy jednego względem y, z będzie myz, a drugiego $-myz$. Z tego wynika, że moment odśrodkowy całego ciała względem osi y, z jest równy zeru, i tożsamo dotyczy momentu względem z, x.

Momenty odśrodkowe cienkiej jednorodnej płyty względem y, z i z, x są oczywiście zerami, jeżeli oś z jest prostopadła do płaszczyzny płyty, i początek leży na płycie.

Powróćmy do przypadku ogólnego. Oznaczmy współrzędne środka ciężkości ciała przez x_0, y_0, z_0 i poprowadźmy przez ten punkt nowe osi współrzędnych ξ, η, ζ równolegle do poprzednich.

Jeżeli współrzędne elementu m w dawnym układzie są x, y, z, a w nowym ξ, η, ζ, to

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0,$$

i
$$xy = \xi\eta + x_0\eta + y_0\xi + x_0y_0,$$

albo
$$mxy = m\xi\eta + mx_0\eta + my_0\xi + mx_0y_0.$$

Sumując wszystkie takie równania, otrzymamy

$$\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + x_0\Sigma m\eta + y_0\Sigma m\xi + Mx_0y_0.$$

Lecz $\Sigma m\eta$ i $\Sigma m\xi$ są zerami, jako momenty statyczne ciała względem płaszczyzn, przechodzących przez środek ciężkości, a zatem

$$\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + Mx_0y_0.$$

Tak więc *moment odśrodkowy ciała względem osi x, y jest równy sumie momentu ciała względem osi równoległych, przechodzących przez środek ciężkości, oraz momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x, y.*

Toż samo dotyczy osi y, z i z, x.

Prz. 1. Wyznaczyć moment odśrodkowy prostokąta o masie M i bokach a, b względem boków. Odp. $\frac{Mab}{4}$.

Prz. 2. Wyznaczyć moment odśrodkowy ćwiartki koła o masie M i promieniu a względem promieni granicznych. Odp. $\frac{Ma^2}{2\pi}$.

103. Moment bezwładności w funkcji kątów kierunkowych. Niech będzie znowu ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Momenty bezwładności względem osi oznaczymy przez I_x, I_y, I_z, a momenty odśrodkowe przez I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}. Niech będzie prócz tego prosta u, przechodząca przez początek i tworząca z osiami współrzędnych kąty α, β, γ. Mamy wyznaczyć moment bezwładności I danego ciała względem tej prostej u.

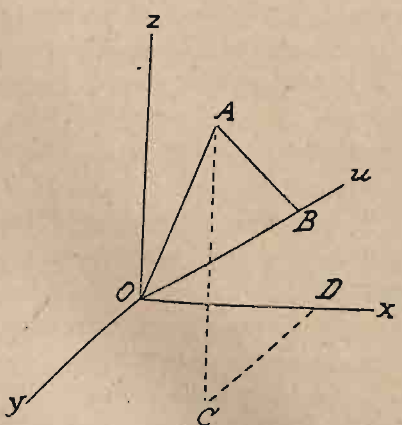

Fig. 76.

Dajmy na to. że jeden z elementów ciała o masie m zajmuje położenie $A(x, y, z)$, a odległość jego AB od u niech będzie równa r

Oczywiście

$$r^2 = OA^2 - OB^2 \qquad (1).$$

$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a OB jest rzutem odcinka OA albo wieloboku $ODCA$ na prostą u. Boki tego wieloboku są odpowiednio równe x, y, z i tworzą z u kąty α, β, γ, a zatem $OB = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$. Wprowadzając te wartości do (1), otrzymamy

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

Ponieważ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, możemy więc napisać

$$r^2 = (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

czyli $r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma -$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

Mnożymy to przez m i sumujemy takie równania dla wszystkich elementów. Wypadnie

$$\Sigma mr^2 = \cos^2\alpha\Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\Sigma m(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\Sigma m(x^2 + y^2) -$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy - 2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx.$$

Lecz $y^2 + z^2$ jest to kwadrat odległości elementu m od osi x, a zatem $\Sigma m(y^2 + z^2) = I_x$ i t. d. Będzie więc

$$I^2 = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$-2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \qquad (2).$$

Jest to szukany moment bezwładności.

Rozważymy szczegółowo przypadek, gdy prosta u leży w płaszczyźnie xy. W takim razie $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma = 0$ i $\cos\beta = \sin\alpha$, a zatem

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\cos\alpha\sin\alpha.$$

Wyznaczymy tę wartość kąta α, przy której I osiąga maks. lub min. Zakładając, że $\frac{dI}{d\alpha} = 0$, otrzymamy

$$(I_y - I_x)\sin 2\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0 \qquad (3),$$

a zatem
$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Kąt $2a$ posiada taki tangens przy dwóch wartościach mniejszych od 2π; różnią się one o π, a zatem równaniu (3) czynią zadość dwie wartości α, różniące się o $\frac{\pi}{2}$. Oczywiście przy jednej z nich I osiąga maks., a przy drugiej min.; jednej z nich odpowiada prosta największego, a drugiej prosta najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie xy.

Jeżeli $I_{xy}=0$, to owe wartości są 0 i $\frac{\pi}{2}$; znaczy to, że osi x i y są osiami największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie xy. Odwrotnie, jeżeli za osi x, y obierzemy proste największego i najmniejszego momentu, to $\tan 2\alpha=0$, a zatem $I_{xy}=0$. W tym przypadku

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha \tag{4}$$

Oczywiście otrzymamy to samo I dla dwóch prostych, z których jedna tworzy z osią x kąt α, a druga $-\alpha$, innemi słowy *osi największego i najmniejszego momentu są dwusiecznemi kąta pomiędzy dwiema prostemi, którym odpowiadają momenty równe.*

Jeżeli $I_y=I_x$, to $I=I_x$; znaczy to, że ciało posiada względem wszystkich prostych, przechodzących przez O i położonych w płaszczyźnie xy, momenty jednakowe.

Jeżeli za osi współrzędnych obierzemy osi główne punktu O, to w każdej z płaszczyzn współrzędnych będą one prostemi największego i najmniejszego momentu, a więc w tym razie $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}=0$. Będziemy w tym przypadku szczególnym oznaczali momenty względem osi x, y, z odpowiednio przez A, B, C, nazywając je *momentami głównymi punktu O*, a zatem równanie (2) przekształci się na

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \tag{5}$$

Dowiedziemy teraz twierdzenie odwrotne. Osi współrzędnych obrano, dajmy na to, w taki sposób, że wszystkie trzy momenty odśrodkowe są zerami. Tymczasem można stąd wyciągnąć jedynie ten wniosek, że osi x i y są prostemi największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie xy, osi y i z w płaszczyźnie yz, wreszcie osi z i x w płaszczyźnie zx. Wypada dowieść, że osi współrzędnych są także osiami głównemi początku O.

Aby nie przesądzać sprawy, napiszemy równanie (2) w postaci

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma.$$

Dajmy na to, że z trzech momentów I_x, I_y, I_z pierwszy jest największy, a drugi najmniejszy. Oczywiście

$$I_x = I_x\cos^2\alpha + I_x\cos^2\beta + I_x\cos^2\gamma.$$

Odejmując od tego równania poprzednie, otrzymamy

$$I_x - I = (I_x - I_y)\cos^2\beta + (I_x - I_z)\cos^2\gamma.$$

Prawa strona jest oczywiście dodatnia, zatem I_x jest większe od I, jakiekolwiek są α, β, γ, a z tego wynika, że oś x jest prostą największego momentu punktu O. Tak samo dowiedziemy, że oś y jest prostą najmniejszego momentu, a więc osi współrzędnych są osiami głównemi.

Przypuśćmy, że wszystkie trzy główne momenty bezwładności punktu O, t. j. A, B i C, są równe. Z równania (5) wynika bezpośrednio, że w takim razie ciało posiada względem wszystkich prostych, przechodzących przez O, momenty równe. Jeżeli do tego O jest środkiem ciężkości, to ciało takie nazwiemy *kulistem*. Przedewszystkiem właściwość taką posiada kula jednorodna, ale prócz niej istnieje jeszcze bardzo wiele innych ciał kulistych. Ciałem takiem jest np. sześcian. Za osi główne możemy tu uważać proste, prostopadłe do ścian, i oczywiście momenty względem nich są równe.

Prosty kołowy cylinder jednorodny jest kulisty, jeżeli moment bezwładności względem osi jest równy momentowi względem prostej, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadle do osi, czyli jeżeli $\frac{a^2}{2} = \frac{3a^2 + h^2}{12}$ (par. 100), gdzie a oznacza promień, a h wysokość. Z tego wynika, że w cylindrze kulistym $h = a\sqrt{3}$.

Prosty stożek jednorodny jest kulisty, jeżeli $\frac{3a^2}{10} = \frac{12a^2 + 3h^2}{80}$ (par. 100), gdzie a jest promieniem podstawy i h wysokością. W takim razie $h = 2a$.

Prz. 1. Dowieść, że ramiona bezwładności trójkąta równobocznego względem wszystkich prostych, położonych w jego płaszczyźnie i przechodzących przez środek ciężkości, są równe.

Wynika to wprost stąd, że ramiona bezwładności względem trzech wysokości są równe.

Prz. 2. Dowieść, że momenty bezwładności półkulistej czaszy względem wszystkich prostych, przechodzących przez środek, a także względem wszystkich prostych, przechodzących przez wierzchołek, są równe.

Prz. 3. Wyznaczyć ramię bezwładności elipsy o osiach $2a$ i $2b$ względem średnicy, której długość wynosi $2r$. Odp. $k^2 = \frac{a^2b^2}{4r^2}$.

Prz. 4. Wyznaczyć ramię bezwładności sztaby o długości l względem prostej, przechodzącej przez koniec i tworzącej ze sztabą kąt α. Odp. $k^2 = \frac{l^2 \sin^2\alpha}{3}$.

Prz. 5. Wyznaczyć ramię bezwładności prostokąta, mającego boki a i b, względem przekątni. Odp. $k^2 = \frac{a^2 b^2}{6(a^2 + b^2)}$.

Prz. 6. Promień podstawy prostego stożka $= a$, a wysokość $= h$; wyznaczyć ramię bezwładności względem tworzącej. Odp. $\frac{3a^2(a^2 + 6h^2)}{20(a^2 + h^2)}$.

Prz. 7. Na końcach prostej sztaby o masie m umieszczamy dwa punkty materjalne, z których każdy posiada masę $\frac{m}{6}$, a w środku punkt materjalny o masie $\frac{2m}{3}$. Dowieść, że moment bezwładności sztaby względem każdej prostej jest równy momentowi tych trzech punktów.

Dowiedziemy naprzód, że ramię bezwładności sztaby względem każdej prostej, przechodzącej przez środek, jest równe ramieniowi bezwładności układu, złożonego z owych trzech punktów. Z tego wynika bezpośrednio twierdzenie, o którem mowa.

Prz. 8. W środkach boków trójkąta, którego masa $= m$, umieszczamy trzy punkty materjalne o masach $\frac{m}{3}$; dowieść, że moment bezwładności trójkąta względem każdej prostej jest równy momentowi układu, złożonego z tych trzech punktów.

Prowadzimy przez jeden z wierzchołków dowolną prostą; korzystając z wzoru, który otrzymaliśmy w par. 100, prz. 4, znajdziemy łatwo, że ramiona bezwładności trójkąta i układu względem tej prostej są równe. Dowiedziemy następnie, że trójkąt i układ mają równe ramiona bezwładności względem wszystkich prostych, przechodzących przez wspólny środek ciężkości, a z tego wynika twierdzenie żądane.

Naszkicowany dowód dotyczy prostych, położonych w płaszczyźnie trójkąta, ale twierdzenie daje się łatwo rozciągnać do wszystkich prostych przestrzeni.

Prz. 9. Przekątnia prostokąta tworzy z jednym z boków kąt α. Wyznaczyć osi główne wierzchołka.

Oznaczamy boki przez $2a$, $2b$ i przekątnię przez $2c$. Prowadzimy przez wierzchołek prostą u, tworzącą z pierwszym bokiem kąt ϑ; znajdziemy, że kwadrat ramienia bezwładności względem tej prostej $= \frac{b^2}{3}\cos^2\vartheta + \frac{a^2}{3}\sin^2\vartheta + c^2\sin^2(\alpha - \vartheta)$. Wielkość ta osiąga maks. lub min., gdy $\tan 2\vartheta = \frac{3\tan 2\alpha}{4}$.

Do tego samego dojdziemy przy pomocy wzoru

$$\tan 2\vartheta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

104. Trzecia oś. Z trzech osi głównych punktu O jedna est prostą największego momentu, druga prostą najmniejszego momentu, a o trzeciej wiemy dotychczas tylko to, że jest prostopadła do dwóch pierwszych. Mamy tu poznać pewne właściwości szczególne tej trzeciej osi.

Za osi współrzędnych obieramy osi główne punktu O i oznaczamy momenty główne przez A, B, C. Niech z nich A będzie największym, a B najmniejszym, a więc x jest osią największego, a y osią najmniejszego momentu.

Poprowadźmy przez oś z dowolnie płaszczyznę, przecinającą płaszczyznę xy według prostej u, i w tej płaszczyźnie poprowadźmy również dowolnie przez O prostą v. Kąt pomiędzy prostemi u i x oznaczymy przez φ, a pomiędzy v i z przez ϑ. Jeżeli kąty kierunkowe prostej v są α, β, γ, to jak wiadomo z geometrji,

$$\cos\alpha = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\beta = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\gamma = \cos\vartheta \text{ *)}$$

Wstawiając to do (5) paragrafu poprzedzającego, otrzymamy

$$I = C\cos^2\vartheta + (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\sin^2\vartheta.$$

Gdy porównamy to z (4) par. poprzedzającego, to dojdziemy z łatwością do dwóch wniosków: 1) że wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest momentem bezwładności względem prostej u; 2) że proste z i u są osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie zu. Tak więc *prosta z jest osią największego lub najmniejszego momentu w każdej, przechodzącej przez nią, płaszczyźnie.*

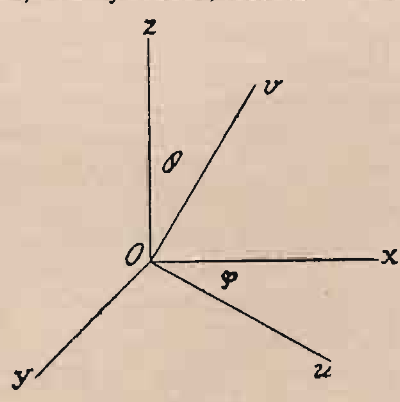

Fig. 77.

Jasną jest rzeczą, że jeżeli prosta u leży w pobliżu osi x, to jest ona prostą największego momentu w płaszczyźnie zu, a z jest wówczas prostą najmniejszego momentu. Jeżeli u leży w pobliżu osi y, to zachodzi przypadek odwrotny. Granicę pomiędzy dwoma obszarami stanowi to położenie

*) Wzory te można łatwo otrzymać w sposób następujący. Przypuśćmy, że na prostej v leży wektor P, posiadający początek w O. Składowe jego w kierunkach u i z będą $P\sin\vartheta$ i $P\cos\vartheta$, a rzut na oś x jest równy $P\cos\alpha$, albo $P\sin\vartheta\cos\varphi$. Z tego otrzymamy wzór pierwszy, a biorąc rzuty na oś y, wzór drugi.

prostej u, przy którem momenty względem z i u są równe. W przypadku granicznym

$$A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi = C.$$

Pisząc $1 - \cos^2\varphi$ zamiast $\sin^2\varphi$, znajdziemy odrazu, że

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{C-B}{A-B}}.$$

Widzimy, że w płaszczyźnie xy istnieją dwie takie proste graniczne u_1 i u_2, tworzące odpowiednio z osią x kąty φ_1, φ_2 i $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Dwusiecznemi kąta pomiędzy niemi są osi x i y.

Proste u_1 i u_2 dzielą płaszczyznę xy na cztery wycinki kątowe, czyli na dwa obszary. Jeżeli u leży w obszarze, zawierającym oś x, to z jest osią najmniejszego momentu płaszczyzny zu, jeżeli zaś u należy do obszaru, w którym przebiega oś y, to z jest osią największego momentu.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę na płaszczyzny zu_1 i zu_2. W myśl twierdzenia, które poznaliśmy w par. poprzedzającym, momenty bezwładności względem wszystkich prostych, położonych w tych płaszczyznach i przechodzących przez O, są równe. Możnaby płaszczyzny zu_1 i zu_2 nazwać *przekrojami kołowymi* punktu O. Wogóle przez każdy punkt przechodzą dwa takie przekroje, a ich przecięcie jest trzecią osią główną tego punktu.

105. Punkt główny prostej. Jeżeli prosta z jest osią główną punktu O, to punkt ten nazywamy *punktem głównym* prostej z. Nasuwa się pytanie, czy każda prosta jest dla któregoś ze swych punktów osią główną, albo czy każda prosta posiada punkt główny.

Na pytanie to można dać z góry odpowiedź przeczącą. Wynika to z uwagi następującej. Położenie punktu w przestrzeni daje się określić zapomocą trzech liczb, np. trzech współrzędnych Kartezjusza, i z tego względu mówimy, że zbiorowość punktów przestrzeni jest rozciągłością trójwymiarową. Położenie prostej określa się zapomocą czterech liczb, np. czterech współczynników równań prostej w układzie Kartezjusza. Z tego wynika, że zbiorowość prostych przestrzeni jest rozciągłością czterowymiarową. Można powiedzieć, że prostych jest nieskończenie razy więcej niż punktów, gdy tymczasem osi głównych może być najwyżej trzy razy więcej niż punktów.

Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne i jakakolwiek prosta ζ. Zobaczymy, jakie warunki powinny być spełnione, aby ta prosta posiadała punkt główny. Obierzmy za początek prostokątnego układu współrzędnych środek ciężkości O danego ciała, a oś z poprowadźmy równolegle do prostej ζ. Przypuśćmy, że ta ostatnia przecina płaszczyznę xy w punkcie $P(a, b, 0)$, i że posiada ona punkt główny $Q(a, b, c)$. Poprowadźmy jeszcze przez Q proste ξ, η odpowiednio równolegle do osi x, y.

Według paragrafu 102 momenty odśrodkowe ciała względem osi η i ζ tudzież osi ζ i ξ są odpowiednio równe $I_{yz} + Mbc$ i $I_{zx} + Mca$, gdzie I_{yz}, I_{zx} oznaczają momenty odśrodkowe względem odpowiednich osi układu xyz, a M masę ciała. Skoro jednak prosta ζ jest osią główną punktu Q, to η i ζ są osiami największego i najmniejszego momentu tegoż punktu w płaszczyźnie $\eta\zeta$, a zatem moment odśrodkowy względem nich jest zerem; również jest zerem moment odśrodkowy względem ζ i ξ. Wynikają stąd równania

$$I_{yz} + Mbc = 0 \qquad (1),$$

$$I_{zx} + Mca = 0 \qquad (2).$$

Równaniom tym wogóle nie może czynić zadość jedna i ta sama wartość niewiadomej c, a więc wogóle prosta ζ nie posiada punktu głównego. Rugując z równań powyższych c, otrzymamy

$$I_{yz}\, a - I_{zx}\, b = 0 \qquad (3).$$

Jest to warunek, który powinien być spełniony, aby prosta ζ posiadała punkt główny. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to można współrzędną c, a więc i położenie punktu głównego, wyznaczyć z równania (1) lub (2). Otrzymamy tylko jedną wartość na c, a więc *wogóle* prosta może posiadać tylko jeden punkt główny.

Przypuśćmy, że prosta ζ jest równoległa do jednej z osi głównych ciała, czyli że oś z jest osią główną ciała. W tym przypadku szczególnym $I_{yz} = I_{zx} = 0$, a więc warunek (3) jest spełniony, a z (1) lub (2) wynika, że $c = 0$. Widzimy więc, że *każda prosta, równoległa do osi głównej ciała, posiada punkt główny; jest nim rzut środka ciężkości na tę prostą.*

Można twierdzenie to wypowiedzieć w inny sposób. Weźmy w płaszczyźnie, zawierającej dwie osi główne ciała, czyli w *płaszczyźnie głównej ciała*, jakikolwiek punkt. Oczywiście dwie jego osi główne leżą w owej płaszczyźnie, a trzecia jest do niej prostopadła, a zatem *płaszczyzna główna ciała jest płaszczyzną główną każdego ze swych punktów.*

Przypuśćmy następnie, że prosta ζ przechodzi przez środek ciężkości, a więc $a = b = 0$. I w tym razie warunek (3) jest spełniony, a z (1) lub (2) wynika, że $c = \infty$, jeżeli I_{yz} i I_{zx} są różne od zera. Możemy przeto powiedzieć, że *żadna z prostych, przechodzących przez środek ciężkości ciała, nie posiada w odległości skończonej punktu głównego, jeżeli nie jest osią główną ciała.*

Przypuśćmy wreszcie, że prosta ζ jest osią główną ciała. W tym razie $I_{yz} = I_{zx} = 0$, oraz $a = b = 0$, i równaniom (1) i (2) czyni zadość każda wartość współrzędnej c. Z tego wynika, że *oś główna ciała jest osią główną każdego ze swych punktów.* Innemi osiami głównemi jakiegokolwiek punktu Q, położonego na osi głównej ciała, są dwie proste odpowiednio równoległe do dwóch pozostałych osi głównych ciała, gdyż punkt Q jest na każdej z tych prostych rzutem środka ciężkości.

Prz. 1. Wyznaczyć osi główne sześcianu względem danego punktu A.

Jeżeli O oznacza środek sześcianu, to AO jest jedną z osi szukanych; dwiema innemi może być każda para prostokątna prostych, prostopadłych do OA.

Prz. 2. Mając dane ciało, wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, dla których jedna z osi głównych ma kierunek dany.

Obieramy środek ciężkości za początek układu współrzędnych i prowadzimy oś z w kierunku danym. Jeżeli $A(xyz)$ jest jednym z punktów szukanego miejsca geometrycznego, to $I_{yz}x - I_{zx}y = 0$, a zatem wszystkie takie punkty leżą w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś z. Gdy oś x obierzemy w tej płaszczyźnie, to równanie szukanego miejsca będzie $I_{zx} + Mzx = 0$, a więc jest to hiperbola równoramienna, której asymptotą jest prosta z.

Prz. 3. Osi Ox, Oy obrano w taki sposób, że $\Sigma mxy = 0$, a momenty bezwładności względem nich wynoszą A i B. Wyznaczyć moment odśrodkowy względem osi Ox', Oy', położonych w płaszczyźnie xy, jeżeli kąt $xOx' = \vartheta$.

Odp. $\frac{(A-B)\sin 2\vartheta}{2}$.

Prz. 4. Wyznaczyć w płaszczyźnie głównej ciała punkt F w taki sposób, aby wszystkim prostym, przechodzącym przez F w tejże płaszczyźnie, odpowiadały momenty równe.

Obieramy osi główne za osi x, y; momenty względem nich oznaczamy przez A, B, zakładając, że $A > B$. Niechaj $F(x_1 y_1)$ będzie punktem szukanym. Prowadzimy przezeń nowe osi $\xi\eta$ równolegle do xy. Możemy uważać ξ, η za osi główne punktu F, a zatem $\Sigma m\xi\eta = 0$, a ponieważ i $\Sigma mxy = 0$, przeto według par. 102 $Mx_1 y_1 = 0$. Z tego wynika, że albo $x_1 = 0$, albo $y_1 = 0$. Znajdziemy bez trudności, że zachodzi ten drugi przypadek, i że $x_1 = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$.

Istnieją więc dwa punkty F_1 i F_2, posiadające właściwość żądaną. Punkty te leżą na osi większego momentu w jednakowych odległościach od środka ciężkości. Nazywamy je *ogniskami bezwładności.*

Prz. 5. W płaszczyźnie głównej ciała dane są ogniska bezwładności F_1, F_2, oraz punkt P. Wyznaczyć osi główne tego punktu.

Jedna z szukanych osi jest prostopadła do danej płaszczyzny głównej, dwie inne są dwusiecznemi kąta F_1PF_2 (par. 103).

Prz. 6. W płaszczyźnie głównej ciała dane są ogniska bezwładności i prosta p. Wyznaczyć punkt główny tej prostej.

Szukany punkt P powinien leżeć tak, aby prosta p była jedną z dwusiecznych kąta F_1PF_2. Można wyznaczyć P w sposób następujący. Niech Q będzie punktem przecięcia prostych p i F_1F_2. Wyznaczamy punkt R, harmonicznie sprzężony z Q względem F_1, F_2, i zataczamy okrąg na średnicy QR; przetnie on p w punkcie szukanym.

Jeżeli prosta p przechodzi przez środek O odcinka F_1F_2, czyli przez środek ciężkości ciała, to R leży w nieskończoności, i ów okrąg wyradza się w dwie proste; jedną jest prosta nieskończenie odległa płaszczyzny, a drugą prostopadła w O do F_1F_2. Oczywiście punkt główny prostej p jest w tym razie nieskończenie odległy.

Prz. 7. Jeżeli momenty bezwładności względem wszystkich prostych, przechodzących przez pewien punkt są równe, to punkt taki zowie się *kulistym*. Okazać, że ciało posiada punkty kuliste tylko w takim razie, gdy momenty względem dwóch osi głównych są równe, a moment względem trzeciej jest większy od tamtych.

Prz. 8. Wyznaczyć punkty kuliste półkulistej czaszy.

Prz. 9. Wyznaczyć punkty kuliste okrągłej tarczy o promieniu a. Odp. Punkty osi, położone w odległości $\frac{a}{2}$ od środka.

Prz. 10. Wyznaczyć punkty kuliste prostego stożka kołowego, w którym wysokość jest równa promieniowi podstawy a. Odp. Odległość każdego z punktów szukanych od środka ciężkości $= \frac{3a}{4\sqrt{5}}$.