# CYNEMATYKA

## I. SZYBKOŚĆ PUNKTU.

**13. Cynematyka i dynamika.** Ruch jest najpospolitszem zjawiskiem natury, bo wszystkie ciała, o których wiemy, pozostają w ustawicznym ruchu, a pojęcie spokoju, spokoju bezwzględnego, powstało w umyśle ludzkim skutkiem błędów dostrzegania. W ruchach ciała możliwa jest rozmaitość nieograniczona. Dotyczy to ciał sztywnych, a w jeszcze większej mierze ciał niesztywnych, takich, jak ciało ludzkie lub zwierzęce, albo wreszcie płynów i gazów.

Pierwszym krokiem w nauce o ruchu musi być wprowadzenie pewnego ładu do tej różnorodności. Trzeba więc rozłożyć dostrzegany przez nas ruch ciała na pewne elementy proste i zbadać, jakie kombinacje mogą powstawać skutkiem łączenia się tych elementów. Stanowi to zadanie nauki zwanej *cynematyką**) od wyrazu greckiego κίνημα, oznaczającego ruch.

Doświadczenie codzienne wskazuje, że jedne ciała wywierają wpływ na ruch innych. Tak np. szyny wywierają wpływ na ruch lokomotywy. Gdyby w pewnym punkcie toru kolejowego usunąć szyny, to od tego punktu ruch lokomotywy stałby się zupełnie innym. Gdy kula bilardowa wejdzie w zetknięcie z inną kulą lub z bandą, to ruch jej zmienia się odrazu pod różnemi względami.

---

*) Często mówi się i pisze *kinematyka* prawdopodobnie pod wpływem języków rosyjskiego i niemieckiego. Jest to sprzeczne ze zwyczajem, oddawna przyjętym w języku naszym pod wpływem łaciny; według zwyczaju tego zgłoski greckie κι i κε przechodzą w wyrazach spolszczonych w *cy* i *ce*, np. *cynik*, *cylinder*, *ocean*.

Ten wpływ ciał na ruchy ciał innych stanowi przedmiot drugiej części nauki o ruchu, zwanej *dynamiką* od wyrazu greckiego *δύναμις*, co znaczy siła.

Wpływ ciała na ruch ciała innego określamy wektorem, zwanem *siłą*, albo pewnym układem takich wektorów. Posługując się tem pojęciem, możemy zwięźlej scharakteryzować zadania cynematyki i dynamiki. Cynematyka opisuje, jak się poruszają ciała bez względu na siły, które na nie działają, a dynamika bada zależność ruchu ciał od sił działających.

Dla cynematyki nauką pomocniczą jest geometrja. Zasadnicza różnica pomiędzy naukami temi polega na tem, że w geometrji nie spotykamy się z pojęciem czasu, gdy w cynematyce pojęcie to odgrywa rolę zasadniczą.

Dynamika opiera się zarówno na geometrji, jak i na cynematyce. Wchodzą w niej dwa nowe pojęcia zasadnicze masa i siła, których nie spotykamy w cynematyce.

Zarówno cynematykę jak i dynamikę można podzielić na dwie części; pierwsza dotyczy ciał sztywnych, druga ciał niesztywnych. Wykład niniejszy obejmuje tylko elementy pierwszej z tych części.

**14. Równanie ruchu punktu.** Będziemy naprzód rozważali ruch punktu, aby przejść następnie do ruchu ciała. Mówiąc w cynematyce o punkcie ruchomym, mamy na myśli punkt w sensie geometrji. Wyobraźmy sobie, że punkt taki, poruszając się, pozostawia za sobą ślad w przestrzeni. Będzie to linja w sensie geometrycznym; nazywamy ją *torem punktu ruchomego.*

Jeżeli torem punktu jest linja prosta, to ruch zowie się *prostoliniowym.*

Dajmy na to, że tor punktu jest znany. Obierzmy na nim kierunek dodatni oraz pewien punkt $O$, który nazwiemy *początkiem toru.* Od punktu tego będziemy mierzyli łuki na torze, jak mierzymy odcinki na osiach współrzędnych od początku układu. Prócz tego obieramy pewną chwilę, od której będziemy rachowali czas. Chwila taka zowie się *erą*, albo *początkiem rachuby czasu.*

Wtrącimy tu pewną ważną uwagę o znaczeniu wyrazu „chwila". W języku potocznym wyraz ten oznacza po prostu jakiś krótki okres czasu. W książce niniejszej będziemy konsekwentnie przypisywali mu znaczenie odmienne. Będziemy mianowicie oznaczali nim pojęcie, analogiczne do pojęcia punktu w geometrji. Jak punkt oznacza granicę pomiędzy dwiema częściami linji, tak chwila ma jedynie oznaczać granicę pomiędzy dwoma okresami czasu. Jak punkt nie posiada rozciągłości i nie należy do żadnej z owych części, tak chwila w znaczeniu naszem nie posiada trwania i nie należy do żadnego z przedzielanych okresów. Gdy powiemy naprzykład „chwila, odgradzająca godzinę czwartą od trzeciej“, to oczywiście nie chodzi tu o jakiś okres czasu, bo nie mogło być okresu nawet najkrótszego, któryby nie należał ani do godziny trzeciej ani do czwartej.

Dajmy na to, że od początku rachuby czasu upłynęło $t$ sekund, albo innych umówionych jednostek czasu, że wówczas punkt ruchomy znalazł się w położeniu $A$ na torze, i że łuk $OA = s$. Z biegiem czasu $s$ się zmienia, a zatem zmienna $s$ jest funkcją zmiennej $t$, funkcją jednoznaczną, bo punkt ruchomy nie może zajmować jednocześnie dwóch lub więcej położeń w przestrzeni.

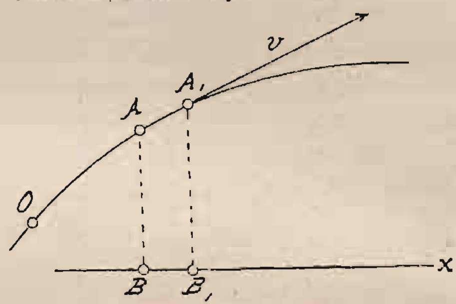

Fig. 6.

Przypuśćmy, że

$$s = f(t).$$

Równanie to nazywa się równaniem ruchu punktu. Jest w niem zawarty dokładny opis ruchu, bo gdy je znamy, to możemy wskazać położenie punktu na torze w każdej chwili okresu, dla którego równanie jest ważne.

Prz. 1. Torem punktu ruchomego jest linja prosta, a równanie ruchu $s = t^2 - 20t + 75$. Gdzie znajdował się punkt, gdy zaczynano rachować czas, w jakiej chwili przebiegał przez początek toru, w którem miejscu i w której chwili kierunek ruchu zmienił się na odwrotny, w jakim kierunku punkt biegł przedtem i w jakim potem?

Prz. 2. Punkt biegnie w linji prostej według równania $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 5$. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami zwrotu. Odp. 108.

Prz. 3. Ruch punktu jest prostolinjowy, a równanie ruchu $s = a\sin(\alpha + \omega t)$, gdzie $a$, $\alpha$ i $\omega$ są wielkościami stałemi. Gdzie znajdował się punkt ruchomy, gdy zaczynano rachować czas, kiedy przechodził po raz pierwszy od owej chwili przez początek toru, w jakich położeniach odbywają się zmiany kierunku ruchu, i ile czasu upływa pomiędzy dwiema następującemi po sobie zmianami? Odp. Pomiędzy dwiema zmianami upływa $\frac{\pi}{\omega}$ sekund.

Prz. 4. Dwa punkty biegną tąż samą prostą, a ich równania ruchu są: $s=t^2+15t-25$ i $s=18t+15$. W których miejscach nastąpią spotkania?

Prz. 5. Dwa punkty biegną prostemi $x$ i $y$, przecinającemi się w $O$ pod kątem prostym. Jeżeli punkt $O$ obierzemy za początek obydwóch torów, to równania ruchu będą $x=a_1t+b_1$, $y=a_2t+b_2$. Wyznaczyć najmniejszą odległość pomiędzy punktami ruchomemi. Odp. $\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.

**15. Szybkość linjowa.** Dajmy na to, że od chwili $t$, gdy punkt ruchomy przebiegał przez położenie $A$ (fig. 6), upłynęło jeszcze $dt$ sek., i wówczas punkt ruchomy doszedł do położenia $A_1$ tak, że $AA_1=ds$. Utwórzmy wektor, związany z punktem ruchomym, według definicji następującej: kierunek jego ma być zgodny z kierunkiem elementu $AA_1$ (t. j. od $A$ do $A_1$), a pod względem wielkości ma on być równy $\frac{ds}{dt}=v$. Wektor taki nazywamy *szybkością linjową* punktu ruchomego w chwili $t$, albo w położeniu $A$.

Jak temperatura charakteryzuje stan cieplny ciała, tak szybkość charakteryzuje ruch punktu w danej chwili lub w danem położeniu, możnaby powiedzieć *stan cynematyczny* punktu.

Gdy mamy tor punktu i równanie ruchu $s=f(t)$, to możemy wyznaczyć szybkość dla każdej chwili, gdyż jest ona oczywiście styczna do toru, a pod względem wielkości równa $f'(t)$.

Jeżeli szybkość jest stała pod względem wielkości, to ruch punktu nazywamy *jednostajnym*. W tym przypadku całkując równanie $\frac{ds}{dt}=v$ otrzymamy

$$s=vt+C,$$

gdzie $C$ oznacza stałą całkowania. Jeżeli za początek rachuby czasu obrano tę chwilę, w której punkt ruchomy przechodził przez początek toru, to $C=0$ i $v=\frac{s}{t}$.

W przypadku ruchu prostolinjowego szybkość oczywiście wciąż leży na torze.

Poznamy tu pewne twierdzenie, które będzie użyteczne w dalszym ciągu. Obierzmy w przestrzeni dowolną prostą $x$ (fig. 6); rzut prostokątny punktu ruchomego na tej prostej jest także punktem ruchomym. Gdy oryginał zajął położenie $A$, to rzut jego znalazł się w $B$, gdy po upływie $dt$ sek. oryginał doszedł do $A_1$, to rzut doszedł do $B_1$. Jeżeli $BB_1 = dx$, to szybkość rzutu $v_x = \frac{dx}{dt}$; leży ona oczywiście na prostej $x$.

Niech $\alpha$ oznacza kąt pomiędzy szybkością $v$ i prostą $x$; w takim razie $dx = ds \, . \cos\alpha$ i $v_x = \frac{ds}{dt}\cos\alpha$, czyli

$$v_x = v\cos\alpha.$$

Widzimy, że rzut *szybkości punktu ruchomego na dowolną prostą jest szybkością rzutu punktu na tę prostą.*

Prz. 1. Równanie ruchu punktu: $s = 2t^3 - 18t^2 + 50t - 50$. Z jaką szybkością punkt ten przechodził przez początek toru? Odp. 20.

Prz. 2. Prosta $x$ jest nieruchoma, a prosta $a$ posuwa się ze stałą szybkością $v$ w kierunku prostopadłym do $a$, tworząc z prostą $x$ stały kąt $\alpha$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostych $a$ i $x$. Odp. $\frac{v}{\sin\alpha}$. Należy naprzód utworzyć równanie ruchu.

Prz. 3. Prosta obraca się około punktu O, przyczem punkt jej, położony w odległości $=1$ od $O$, posiada stałą szybkość $\omega$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia tej prostej z okręgiem, który przechodzi przez $O$, i którego promień $= a$. Odp. $2a\omega$.

Prz. 4. Drabina $AB$ opiera się końcem $A$ o podłogę, a końcem $B$ o ścianę, tworząc z podłogą kąt $\vartheta$. Z jaką szybkością ruszy koniec $B$, gdy zaczniemy koniec $A$ odsuwać od ściany z szybkością $v$. Odp. $\frac{v}{\tan\vartheta}$. Oznaczając odległości końców $A$, $B$ od ściany i podłogi przez $x$, $y$, a długość drabiny przez $a$, otrzymamy $x = a\cos\vartheta$, $y = a\sin\vartheta$. Szukana szybkość $\frac{dy}{dt} = a\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$, lecz z pierwszego równania wynika, że $\frac{dx}{dt} = -a\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$. Rugując $\frac{d\vartheta}{dt}$, otrzymamy wynik żądany ze znakiem minus.

Prz. 5. Punkt $M$ biegnie po prostej $OM$ w kierunku $OM$ z szybkością $v$. Jest on połączony sznurem, przechodzącym przez blok $O$, z innym punktem $P$, który porusza się po prostej $x$, równoległej do $OM$. Wyznaczyć szybkość, którą punkt $P$ posiada w chwili, gdy prosta $PO$ tworzy z $x$ kąt $\varphi$. Odp. $\frac{v}{\cos\varphi}$.

**16. Inne równania ruchu.** Równanie $s = f(t)$ określa całkowicie ruch punktu tylko w tym razie, gdy znany jest tor; dlatego też częściej stosujemy inne równania, określające jednocześnie i tor i ruch na torze.

Oznaczmy współrzędne punktu ruchomego w układzie prostokątnym przez $(x\ y\ z)$. Współrzędne te zmieniają się z biegiem czasu, są więc funkcjami czasu. Przypuśćmy, że

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t).$$

Równania te nazywają się także równaniami ruchu. Określają one całkowicie ruch punktu, gdyż możemy z nich wyznaczyć dla każdego $t$, t. j. dla każdej chwili, współrzędne punktu ruchomego, a więc i położenie tego punktu w przestrzeni.

Równania powyższe określają także tor punktu; możemy je uważać wprost za parametryczne równania toru, a rugując z nich $t$, otrzymamy równania toru w postaci $\varphi(x, z)=0$, $\psi(y, z)=0$.

Oczywistą jest rzeczą, że równanie $x=f(t)$ jest równaniem ruchu rzutu rozważanego punktu ruchomego na osi $x$; dwa równania pozostałe posiadają znaczenia analogiczne.

Dajmy na to, że równania ruchu są dane; pragniemy wyznaczyć szybkość punktu w chwili $t$ pod względem wielkości i kierunku. Oznaczmy szukaną szybkość przez $v$, a jej kąty kierunkowe przez $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Oznaczmy jeszcze rzuty szukanej szybkości na osi przez $v_x$, $v_y$, $v_z$. Możemy wielkości te uważać również za składowe wektora $v$ w kierunkach osi.

Z par. poprzedzającego wiemy, że $v_x$ jest także szybkością rzutu punktu ruchomego na osi $x$, możemy więc ją wyznaczyć z pierwszego równania ruchu; tak samo wyznaczymy $v_y$ i $v_z$ z dwóch równań pozostałych. Będzie więc

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

Dalej
$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}.$$

Jeżeli ruch jest płaski, t. j. odbywa się w jednej płaszczyźnie, to możemy w płaszczyźnie tej obrać osi $x$ i $y$, i w takim razie będzie

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2},\qquad \tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}.$$

Prz. 1. Równania ruchu punktu są: $x=a_1t+b_1$, $y=a_2t+b_2$, $z=a_3t+b_3$. Gdy wyrugujemy stąd $t$, to otrzymamy dwa równania pierwszego stopnia pomiędzy $x$, $y$, $z$, a zatem torem jest linja prosta. $v_x = a_1$, $v_y = a_2$, $v_z = a_3$ i $v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Widzimy, że $v$ jest stałe, a zatem ruch jest jednostajny. Wyznaczymy łatwo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, które są w tym razie również kątami kierunkowymi toru.

Prz. 2. Punkt ruchomy posiada następujące równania ruchu: $x = a_1 + b_1 t + c_1 t^2$, $y = a_2 + b_2 t + c_2 t^2$, $z = a_3 + b_3 t + c_3 t^2$. Wyznaczyć tor punktu, a także to położenie, w którem szybkość jest najmniejsza. Odp. Torem jest parabola, a szybkość jest najmniejsza w wierzchołku.

Weźmy płaszczyznę $Ax + By + Cz + D = 0$: punkt przechodzi przez nią, gdy

$$A(a_1 + b_1 t + c_1 t^2) + B(a_2 + b_2 t + c_2 t^2) + C(a_3 + b_3 t + c_3 t^2) + D = 0 \qquad (1)$$

Punkt wciąż pozostaje w płaszczyźnie, jeżeli

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \qquad (2)$$

$$Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \qquad (3)$$

$$Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0 \qquad (4)$$

Z tych trzech równań można wyznaczyć stosunki współczynników $A$, $B$, $C$ i $D$ do jednego z nich, a więc ruch jest płaski i torem jest krzywa płaska. Z (1) widać, że tor przecina każdą inną płaszczyznę w dwóch punktach, a zatem jest to stożkowa, posiadająca punkty nieskończenie odległe, bo gdy $t$ wzrasta nieograniczenie, to $x$, $y$, $z$ wzrastają nieograniczenie co do wartości bezwzględnych. Połączmy punkt ruchomy z początkiem współrzędnych. Otrzymamy prostą

$$\frac{x}{a_1 + b_1 t + c_1 t^2} = \frac{y}{a_2 + b_2 t + c_2 t^2} = \frac{z}{a_3 + b_3 t + c_3 t^2}.$$

Gdy $t = \infty$, to równania te przybierają postać

$$\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}. \qquad (5)$$

Z tego wynika, że tor posiada tylko jeden punkt nieskończenie odległy, a więc jest to parabola.

Łatwo okazać, że szybkość osiąga minimum, gdy

$$t = -\frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3}{2\,(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)} \qquad (6)$$

Gdy punkt przechodzi przez wierzchołek paraboli, to szybkość jest prostopadła do osi, lub do prostej (5), a zatem

$$c_1(b_1 + 2c_1 t) + c_2(b_2 + 2c_2 t) + c_3(b_3 + 2c_3 t) = 0$$

Równaniu temu czyni właśnie zadość wartość (6).

Wyjątkowy przypadek zachodzi, gdy współczynniki $b_1$, $b_2$, $b_3$ są proporcjonalne do $c_1$, $c_2$, $c_3$ czyli, gdy $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = \lambda$. Wówczas istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn, zawierających tor, a więc torem tym może być tylko prosta. Można to okazać jeszcze tak: W tym przypadku równania ruchu przybierają postać: $x = a_1 + c_1(\lambda t + t^2)$, $y = a_2 + c_2(\lambda t + t^2)$, $z = a_3 + c_3(\lambda t + t^2)$, Gdy z tych równań wyrugujemy $\lambda t + t^3$, to oczywiście otrzymamy dwa równania linjowe.

Prz. 3. Zbadać ruch punktu, którego równania są $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$. Odp. Torem jest okrąg o promieniu $a$, punkt biegnie od przecięcia toru z osią $x$ do przecięcia z osią $y$, ruch jest jednostajny i szybkość $= a\omega$.

Prz. 4. Zbadać ruch punktu, gdy równania ruchu są $x = a\cos^2\omega t$, $y = a\sin^2\omega t$. Odp. Torem jest odcinek prostej, zawarty pomiędzy osiami, i punkt przebiega go to w jedną stronę, to w drugą. W którem miejscu szybkość jest największa?

Prz. 5. Równania ruchu: $x = \frac{a^2t^2}{2p}$, $y = at$. Wyznaczyć tor oraz szybkość w początku rachuby czasu. Torem jest parabola styczna do osi $y$, szukana szybkość $= a$.

Prz. 6. Zbadać ruch punktu, gdy $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = ct$. Odp. Torem jest śrubowa, której krok (czyli odległość pomiędzy sąsiednimi zwojami, mierzona w kierunku osi) $= \frac{2\pi c}{\omega}$.

Prz. 7. Równania ruchu punktu są: $x = a\cos^3\omega t$, $y = a\sin^3\omega t$. Wyznaczyć tor punktu, położenie, w którem szybkość osiąga maksymum, oraz tę szybkość największą. Odp. Szybkość największa $= \frac{3a\omega}{2}$.

Prz. 8. Punkt porusza się według równań $x = t^2 - 4t + 3$ i $y = 5t - 9$. Wyznaczyć położenie, w którem szybkość była najmniejsza oraz kierunek tej szybkości. Odp. Szybkość najmniejsza jest prostopadła do osi $x$.

**17. Współrzędne biegunowe.** W wielu razach dogodniejsze od współrzędnych Kartezjusza są współrzędne biegunowe; będziemy je stosowali zwłaszcza w przypadku ruchu płaskiego. Tor oraz ruch na torze są tu określone, gdy mamy dane obydwie współrzędne t. j. promień wodzący $r$ i kąt biegunowy $\varphi$ w funkcjach czasu.

Przypuśćmy więc, że

$$r = f(t), \quad \varphi = g(t).$$

Są to znowu równania ruchu. Pierwsze z nich określa ruch punktu na promieniu wodzącym, a drugie obrót tego promienia około bieguna Chodzi teraz o wyznaczenie szybkości $v$ punktu ruchomego. Wyznaczymy naprzód rzuty jej na promień wodzący w stronę od bieguna i na prostą $u$ prostopadłą do promienia w stronę, w którą $\varphi$ wzrasta. Oznaczmy te rzuty odpowiednio przez $v_r$ i $v_\varphi$.

Obieramy biegun za początek układu Kartezjusza, a oś biegunową za oś $x$, i rozkładamy szybkość na składowe $v_x$ i $v_y$, równoległe do osi. Rzut szybkości $v$ na jakikolwiek kierunek będzie równy sumie rzutów tych składowych. Otrzymamy więc

$$v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi,$$

$$v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi,$$

a ponieważ $v_x = \frac{dx}{dt}$ i $v_y = \frac{dy}{dt}$,

przeto

$$v_r = \frac{dx \,.\, \cos\varphi + dy \,.\, \sin\varphi}{dt},$$

$$v_\varphi = \frac{-dx \,.\, \sin\varphi + dy \,.\, \cos\varphi}{dt}.$$

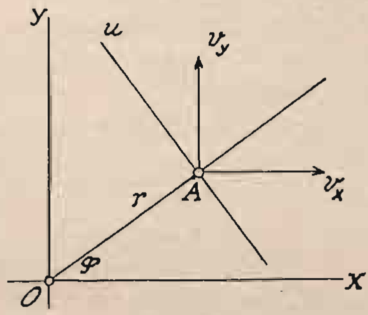

Fig. 7*).

Lecz $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$. Różniczkując, otrzymamy

$$dx = \cos\varphi \, dr - r\sin\varphi \, d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi \, dr + r\cos\varphi \, d\varphi.$$

Wstawiając te wartości w wyrażenia składowych $v_r$ i $v_\varphi$, znajdziemy, że

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Pochodne $\frac{dr}{dt}$ i $\frac{d\varphi}{dt}$ wyznaczymy z danych równań ruchu, będziemy więc mieli $v_r$ i $v_\varphi$ w funkcjach $t$. Oczywiście

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \quad \text{i} \quad \tan\vartheta = \frac{v_\varphi}{v_r},$$

jeżeli $\vartheta$ oznacza kąt, który szybkość tworzy z promieniem wodzącym.

Prz. 1. Równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych są $r = at$, $\varphi = \omega t$; zbadać ruch puntu. Odp. Torem jest spiralna Archimedesa, szybkość $= a\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$, a więc szybkość nieograniczenie wzrasta; $\tan\vartheta = \omega t$, z czego wynika, że $\vartheta$ wzrasta, zbliżając się nieograniczenie do kąta prostego.

Prz. 2. Równania ruchu we współrzędnych biegunowych: $r = ae^{\omega t}$, $\varphi = \omega t$. Odp. Torem jest spiralna logarytmiczna, szybkość tworzy stale z promieniem wodzącym kąt $45^0$.

---

*) Na figurze tej i wielu następnych obrano kierunki osi zgodnie ze zwyczajem. Jeżeli umowa, zawarta w par. 12, ma zachować moc obowiązującą, to trzeba uważać, że oś $z$ jest skierowana na dół, lub za płaszczyznę papieru.

**18. Zagadnienie odwrotne.** Dajmy na to, że wiemy, jakie szybkości pod względem wielkości i kierunku przybiera punkt ruchomy z biegiem czasu albo ze zmianą miejsca w przestrzeni, że mamy np. składowe szybkości $v_x$, $v_y$, $v_z$ (albo $v_r$, $v_\varphi$ w przypadku ruchu płaskiego) w funkcjach czasu albo w funkcjach współrzędnych. Dane te nie określają jeszcze ruchu punktu, gdyż nie zawierają żadnych wskazówek, przez jakie położenia w przestrzeni punkt przechodził istotnie. Ruch dopiero wtedy będzie całkowicie określony, gdy prócz tego będziemy mieli jeszcze położenie, przez które punkt w pewnej danej chwili przechodził.

Na zasadzie danych powyższych dają się utworzyć równania różniczkowe pierwszego rzędu, zawierające zmienne $x$, $y$, $z$ i $t$ (albo $r$, $\varphi$ i $t$), a jeżeli będzie można je całkować, to otrzymamy równania ruchu i będziemy mogli zbadać ruch całkowicie. Owo dane położenie punktu służy do wyznaczenia stałych całkowania.

Przypuśćmy dla przykładu, że w pewnej chwili, którą obierzemy za początek rachuby czasu, punkt ruchomy zajmował położenie $(b_1, b_2, b_3)$, i że rzuty szybkości jego na osi stale wynoszą odpowiednio $a_1$, $a_2$, $a_3$. Na zasadzie tego otrzymamy trzy równania różniczkowe

$$\frac{dx}{dt}=a_1, \quad \frac{dy}{dt}=a_2, \quad \frac{dz}{dt}=a_3 .$$

Całka pierwszego będzie $x=a_1t+C$, gdzie $C$ oznacza stałą całkowania. Gdy $t=0$, to $x=b_1$, zatem $C=b_1$. Tak samo znajdziemy dwa pozostałe równania ruchu (parag. 16, prz. 1).

Prz. 1. Punkt ruchomy zajmował w pewnej chwili położenie $(o, a)$, a rzuty szybkości jego na osi $x$ i $y$ wynoszą odpowiednio $\frac{ac}{y}$ i $\frac{c\sqrt{y^2-a^2}}{y}$. Wyznaczyć równanie toru. Odp. Z danych tych wynika, że ruch jest jednostajny, i szybkość $=c$. Dalej znajdziemy, że $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$, a to jest równanie różniczkowe linji łańcuchowej czyli katenoidy*).

---

*) Niech będzie na łańcuchowej jakikolwiek punkt $A$. Długość łuku od wierzchołka do $A$ oznaczmy przez $s$, odległość tego punktu od kierownicy przez $y$, kąt stycznej w $A$ z kierownicą przez $\vartheta$, i parametr łańcuchowej przez $a$. Przy pomocy równania łańcuchowej łatwo udowodnić, że $a=y\cos\vartheta$, $s=y\sin\vartheta$ i $a^2+s^2=y^2$. Związki te będą nam nieraz potrzebne w dalszym ciągu. Można je łatwo zapamiętać w sposób następujący. Niechaj $B$ oznacza rzut punktu $A$ na kierownicę, i $C$ rzut punktu $B$ na styczną w $A$. Oczywiście w prostokątnym trójkącie $ABC$ kąt $ABC=\vartheta$, $AB=y$, $BC=a$ i $AC=s$. Poprowadźmy jeszcze w $A$ prostopadłą do $AC$, albo normalną do krzywej. Punkt przecięcia jej z kierownicą oznaczmy przez $D$. Otóż wiadomo, że $AD=\rho$, czyli promieniowi krzywizny w A.

Prz. 2. Człowiek stoi w punkcie $O$, a pies jego w punkcie $A$ w odległości $a$ od $O$. Człowiek zaczyna iść z szybkością $c$ w kierunku prostopadłym do $OA$, a pies zaczyna biedz doń z szybkością $2c$. Kiedy pies dogoni pana? Odp. Za $\frac{2a}{3c}$ sekund.

Za oś $x$ obieramy prostą $OA$, a za początek punkt $O$, i w tym układzie wyznaczamy równanie toru psa. Jeżeli po $t$ sekundach szybkość psa tworzy z osią $x$ kąt $\vartheta$, to $\frac{dx}{dt} = 2c\cos\vartheta$ i $\frac{dy}{dt} = 2c\sin\vartheta$, a stąd $\frac{dy}{dx} = -\frac{ct-y}{x}$, równanie, które wynika także wprost z figury. Zmiennej $t$ pozbędziemy się w sposób następujący. Pies przebiegł dotychczas drogę $s = 2ct$, a zatem $ct = \frac{s}{2}$. Podstawiamy to i różniczkujemy, uważając $x$ za zmienną niezależną. Gdy następnie zamiast $ds$ napiszemy $-\sqrt{dx^2+dy^2}$ (minus, bo $s$ wzrasta, gdy $x$ się zmniejsza), to wypadnie równanie drugiego rzędu $2x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Całkując je, otrzymamy równanie toru, a zatem i punkt spotkania.

Prz. 3. Samochód wyruszył z położenia $A$ i jedzie ze stałą szybkością $v$, gwiżdżąc. Jaki powinien być tor samochodu, aby fale głosowe, wytworzone na całej drodze, doszły jednocześnie do punktu $O$, położonego w odległości $a$ od $O$? Odp. Równanie toru we współrzędnych biegunowych $r = ae^{-\frac{c\varphi}{\sqrt{v^2-c^2}}}$, gdzie $c$ oznacza szybkość głosu, a więc tor powinien być spiralną logarytmiczną.

Prz. 4. Prosta obraca się około ogniska $F$ paraboli, przyczem punkt jej, położony w odległości jednostkowej od $F$, posiada szybkość $2\omega$. Odległość ogniska od wierzchołka $= p$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostej z parabolą w chwili, gdy pierwsza tworzy z osią paraboli kąt $\varphi$. Odp. $v = \frac{2\omega p}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

(Równanie biegunowe paraboli $r = \frac{2p}{1-\cos\varphi}$.)

Prz. 5. Cztery punkty ruchome znajdowały się w pewnej chwili na okręgu o promieniu $a$ w jednakowych odstępach, i każdy z nich wciąż biegnie do następnego ze stałą szybkością $u$. Znaleźć tor takiego punktu oraz czas, w którym punkt dojdzie do środka koła.

Oczywiście punkty będą wciąż znajdowały się w jednakowych odległościach od środka koła, t. j. będą wciąż leżały na jednym okręgu w jednakowych odstępach. Obrawszy środek koła za biegun i poprowadziwszy oś biegunową przez początkowe położenie jednego z punktów, znajdziemy łatwo równania różniczkowe ruchu: $\frac{dr}{dt} = -\frac{u}{\sqrt{2}}$ i $r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u}{\sqrt{2}}$. Równanie toru $r = ae^{-\varphi}$, czas szukany $= \frac{a\sqrt{2}}{u}$.

**19. Ruch względny.** W dotychczasowym sposobie mówienia o ruchu punktu była pewna nieścisłość, którą wypada teraz wyjaśnić.

Wyobraźmy sobie wagon kolejowy, toczący się po szynach, ułożonych w linji prostej. Można otrzymać wykres toru jakiegoś punktu, należącego do obwodu koła, w sposób następujący. Osadzamy w owym punkcie ołówek i rozpinamy obok toru kolejowego, w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny koła, papier. Podczas biegu wagonu ołówek wykreśli na papierze żądaną linję. Oczywiście będzie to cykloida. Gdybyśmy natomiast rozpięli papier na ramie, przymocowanej do wagonu, to ołówek zakreślił by okrąg koła.

Z tego wynika, że inny jest ruch owego punktu względem ziemi, albo w odniesieniu do układu współrzędnych, połączonego z ziemią, a inny w odniesieniu do układu, połączonego z wagonem. Gdy więc mówimy o ruchu punktu, to należy zawsze wskazać, do jakiego układu ruch ten odnosimy.

Mogłoby się wydawać, że gdy mowa wprost o ruchu punktu, to chodzi o ruch względem układu nieruchomego, ale układu takiego nie znamy; wszystkie ciała znane, a więc ziemia, słońce, planety i nawet tak zw. gwiazdy stałe poruszają się jedne względem drugich.

Wprawdzie zarówno w sprawach życia codziennego, jak i w nauce, wciąż się mówi o ruchu różnych ciał bez wyraźnego wskazywania układu odniesienia; nie wywołuje to nieporozumień, gdyż zwykle domyślamy się, o jaki układ odniesienia chodzi. Gdy np. jest mowa o ruchu tłoka maszyny okrętowej, to każdy rozumie, że chodzi o ruch względem korpusu maszyny, albo względem okrętu, a nie względem ziemi; gdy kto mowi o krążeniu krwi ludzkiej, to oczywiście ma on na myśli ruch względem naczyń krwionośnych lub względem ciała ludzkiego.

Najczęściej, gdy mówimy o ruchu bez wskazania układu odniesienia, to mamy na myśli ruch względem ziemi. Człowiek od wieków przywykł uważać planetę, na której mieszka, za nieruchomą i do niej zwykle odnosił ruchy ciał nietylko ziemskich, ale i niebieskich. Przekonanie o nieruchomości ziemi jest tak głęboko zakorzenione w umyśle ludzkim, że odkrycie jej ruchu uważamy słusznie za jeden z największych wysiłków, na jakie zdobyła się myśl człowieka. Od tego odkrycia upłynęły już cztery wieki, dawno przebrzmiały walki, które musiała staczać nowa idea, pomimo to jednak wciąż mówimy i myślimy o ruchu dziennym sklepienia niebieskiego, o wschodzie i zachodzie słońca i t. d.

Gdy w dalszym ciągu będzie mowa o ruchu bez wyraźnego wskazania układu odniesienia, to można zgodnie z owym odwiecznym zwyczajem uważać, że chodzi o ruch względem ziemi, albo gdy będziemy mówili o układzie nieruchomym, to ma to oznaczać układ związany z ziemią.

**20. Równoległobok szybkości.** Niech będzie jakiś układ sztywny, ktory będziemy nazywali układem $S$, i który porusza się w sposób znany względem innego układu, uważanego za nieruchomy. Niech będzie prócz tego punkt ruchomy $M$, poruszający się jakkolwiek. Ruch układu $S$, albo ruch któregokolwiek z jego punktów, nazywamy *ruchem unoszenia*. Prócz tego trzeba odróżniać dwa ruchy punktu $M$: ruch względem układu $S$, który nazywamy *względnym*, i ruch względem układu nieruchomego, zwany *bezwzględnym*.

Możemy uważać, że punkt $M$ porusza się wewnątrz układu $S$. Zajmuje on coraz nowe punkty tego układu, i wszystkie te punkty leżą na pewnej linji. Dobrze będzie wyobrażać sobie, że jest to kanał, przebity w ciele $S$ i poruszający się wraz z niem, a w kanale porusza się punkt $M$. Linja ta, należąca do układu $S$, zowie się *torem względnym* punktu $M$.

Od toru względnego należy odróżniać *tor bezwzględny*, czyli linję, którą zatacza punkt $M$ w układzie nieruchomym. W przykładzie, o którym była mowa w paragrafie poprzedzającym, torem względnym punktu, należącego do obwodu koła wagonowego, był okrąg, a torem bezwzględnym cykloida.

Będziemy dalej rozróżniali trzy szybkości: 1) *szybkośc względną*, czyli szybkość punktu $M$ w ruchu względnym, 2) *szybkość unoszenia*, czyli szybkość tego punktu układu $S$, który w danej chwili zajmuje punkt $M$, i 3) *szybkość bezwzględną*, czyli szybkość punktu $M$ w ruchu bezwzględnym. Mamy teraz poznać związek, jaki zachodzi pomiędzy temi szybkościami.

Przypuśćmy, że w chwili obecnej punkt $M$ zajmuje punkt $A$ układu $S$; niech $w = AB$ będzie szybkością względną, a $u$ szybkością unoszenia. Gdyby istniał tylko ruch względny, to po upływie $dt$ sek. punkt $M$ znalazłby się w punkcie $B_1$,

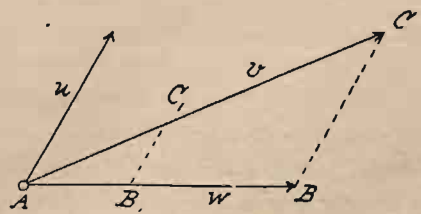


Fig. 8.

położonym na $AB$ tak, że $AB_1 = wdt$. Ale punkt $B_1$ układu $S$ jest ruchomy i za $dt$ sek. zajmie nowe położenie $C_1$, i tam też znajdzie się oczywiście punkt $M$.

Punkty $A$ i $B_1$ układu $S$ są nieskończenie bliskie, a zatem szybkości ich różnią się pod względem wielkości nieskończenie mało, i również kąt zawarty pomiędzy niemi jest nieskończenie mały. Możemy przeto uważać, że szybkość punktu $B_1$ jest zgodna z $u$ co do wielkości i kierunku, a zatem odcinek $B_1C_1$ jest równoległy do $u$ i równy $udt$.

Z rozważań tych wynika, że punkt $C_1$ leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez $u$ i $w$, a odcinek $AC_1$, jako element toru bezwzględnego, wynosi $vdt$, gdzie $v$ oznacza szybkość bezwzględną punktu $M$.

Poprowadźmy przez punkt $B$ prostą, równoległą do $u$, albo do $B_1C_1$; przetnie ona $AC_1$ w punkcie $C$ i otrzymamy $AC : vdt = w : wdt$, z czego wynika, że odcinek $AC$ co do wielkości i kierunku określa szybkość bezwzględną punktu $M$. Widzimy, że *szybkość bezwzględna jest wypadkową szybkości względnej i szybkości unoszenia.* Nazywa się to *twierdzeniem o równoległoboku szybkości.*

Twierdzenie to można bez trudności uogólnić. Przypuśćmy, że punkt $M$ posiada szybkość $w$ względem układu $S_1$ i zajmuje w nim położenie $A_1$, punkt $A_1$ posiada względem innego układu $S_2$ szybkość $u_1$ i zajmuje w nim położenie $A_2$, punkt $A_2$ posiada względem $S_3$ szybkość $u_2$ i zajmuje w nim położenie $A_3$ i t. d., wreszcie punkt $A_n$ układu $S_n$ posiada względem układu nieruchomego szybkość $u_n$. W takim razie szybkość bezwzględna punktu $M$ będzie wypadkową szybkości $w$, $u_1$, $u_2 ... u_n$.

Na zasadzie równoległoboku szybkości można odrazu napisać wzory na $v_r$ i $v_\varphi$, t. j. na składowe szybkości punktu ruchomego w biegunowym układzie współrzędnych. Pierwsza z nich $v_r$ jest oczywiście szybkością punktu względem promienia wodzącego, a druga $v_\varphi$ szybkością unoszenia.

W dalszym ciągu będzie nieraz mowa o *ruchu jednego punktu względem drugiego,* np. punktu $A$ względem punktu $B$. Wyrażenie to należy rozumieć w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że z punktem $B$ jest połączony cały układ sztywny $S$, i że wszystkie punkty tego układu poruszają się tak samo, jak $B$, a więc każdy z nich ma w każdej chwili szybkość zgodną co do wielkości i kierunku z szybkością punktu $B$. Ruch taki układu sztywnego jest oczywiście możliwy (ob. par. 22), i nazywa się *ruchem postępowym*; rozważymy go szczegółowo w rozdziale następnym. Otóż ruch punktu $A$ względem takiego wyobrażalnego układu $S$ nazywa się ruchem względem punktu $B$.

Prz. 1. Dane są co do wielkości i kierunku szybkość okrętu i szybkość wiatru. Wyznaczyć wykreślnie, w jakim kierunku wychodzi dym z komina okrętowego. Odp. Oczywiście kierunek dymu będzie odwrotny do kierunku szybkości okrętu względem otaczającego powietrza.

Prz. 2. Dwa pociągi wychodzą jednocześnie ze stacyj $A_1$, $A_2$ dwóch prostych linij kolejowych, przecinających się w punkcie $O$. $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$, szybkość pierwszego pociągu jest stała i równa $u$, a podróżnym jego wydaje się wciąż, że drugi pociąg jest nieruchomy. Wyznaczyć szybkość drugiego pociągu i zbadać ruch jego. Odp. Ruch ten jest jednostajny i szybkość $= \frac{x_2 u}{x_1}$.

Widzowi nieruchomemu odległy przedmiot wydaje się nieruchomym, jeżeli szybkość tego przedmiotu jest skierowana wzdłuż prostej, łączącej go z okiem widza.

Prz. 3. Dwa okręty, zajmujące dane położenia, płyną z szybkościami danemi. Wyznaczyć wykreślnie szybkość, z którą powinien płynąć trzeci okręt, którego położenie jest również dane, aby jadącym na nim wydawało się, że dwa pierwsze są nieruchome.

Prz. 4. Deszcz pada pionowo z szybkością $v$. Pod jakim kątem do pionu należy ustawić laskę parasola, aby, idąc z szybkością $u$, najskuteczniej zasłonić się od deszczu? Odp. $\operatorname{arctan}\frac{u}{v}$.

Prz. 5. Czy do wagonu bez dachu więcej wpada deszczu na sek. podczas postoju czy podczas jazdy?

Prz. 6. Dane są położenia okrętów $A$ i $B$, szybkość (stała) pierwszego pod względem wielkości i kierunku oraz szybkość drugiego pod względem wielkości. Wyznaczyć wykreślnie kierunek, w którym powinien płynąć okręt $B$, aby spotkać się z $A$.

Prz. 7. Okrągła tarcza obraca się około środka; okazać, że względem punktu $A$, położonego na obwodzie, szybkości wszystkich innych punktów obwodu są skierowane do przeciwległego końca średnicy, przechodzącej przez $A$, albo od tego końca.

Prz. 8. Środkiem ulicy, której szerokość jest równa $c$, jedzie szereg wagonów tramwajowych z szybkością stałą $u$ w odstępach $a$. Szerokość każdego wagonu jest równa $b$. W ciągu jakiego czasu można przejść przez ulicę, idąc w linji prostej z najmniejszą szybkością stałą? Odp. $\frac{c}{u}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Prz. 9. Dwa punkty ruchome $P$ i $Q$ zajmują w pewnej chwili położenia $O$ i $A$. Pierwszy porusza się z szybkością stałą $u$, prostopadłą do $OA$, szybkość zaś drugiego jest wciąż skierowana do pierwszego, i odległość pomiędzy nimi jest stale równa $a$. Jaki kąt utworzą te szybkości po upływie $t$ sekund? Odp.

Szybkość punktu $Q$ względem $P$ wynosi $a\frac{d\vartheta}{dt}$, gdzie $\vartheta$ oznacza kąt szukany. Znajdziemy łatwo $a\frac{d\vartheta}{dt} = -u\sin\vartheta$, a stąd $\tan\frac{\vartheta}{2} = e^{-\frac{ut}{a}}$.

Prz. 10. Dowieść, że styczna do elipsy jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi.

Jeżeli $r_1$, $r_2$ oznaczają promienie wodzące, to rzuty szybkości punktu, obiegającego elipsę, na te promienie wynoszą $\frac{dr_1}{dt}$, $\frac{dr_2}{dt}$. Ponieważ $r_1 + r_2 = 2a$, przeto $\frac{dr_1}{dt} = -\frac{dr_2}{dt}$, skąd bezpośrednio wynika żądane twierdzenie.

Prz. 11. Dowieść, że styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi.

Prz. 12. Dowieść twierdzenie analogiczne dla paraboli.

Prz. 13. Koło obraca się w swej płaszczyźnie około punktu $A$, położonego na obwodzie, z szybkością kątową $\omega$, a punkt $P$ porusza się po obwodzie w kierunku odwrotnym z szybkością kątową $2\omega$ względem koła. Okazać, że torem punktu $P$ jest linja prosta i wyznaczyć szybkość bezwzględną. Odp. $2a\omega\cos\left(\frac{s}{2a}\right)$, gdzie $s$ oznacza łuk $AP$.

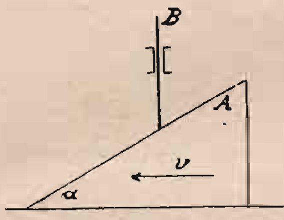

Fig. 9.

Prz. 14. Równia pochyła $A$, tworząca z poziomem kąt $\alpha$, porusza się w kierunku poziomym z szybkością $v$, a sztyft $B$, prowadzony w kierunku pionowym, opiera się o nią dolnym końcem. Wyznaczyć szybkość sztyfta. Odp. $v\tan\alpha$.