XII. SIŁY CHWILOWE.

137. Odkształcalność ciał. Już w par. 4 była mowa o tem, że ciała odkszałcają się pod działaniem sił, i że ciało sztywne jest abstrakcją, do której niektóre ciała tylko mniej lub więcej się zbliżają. Że odkształcalność jest ogólną właściwością ciał, dowodzą badania doświadczalne; można to również uzasadnić, przynajmniej do pewnego stopnia, przy pomocy rozumowania następującego.

Niech będzie prosta sztaba AB, zrobiona z materjału, który zwykle uważamy za sztywny, np. z żelaza. Przypuśćmy, że leży ona na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Przeprowadźmy w wyobraźni przekrój C, dzielący sztabę na części AC i CB. Możemy uważać te części za odrębne ciała, które mogą wywierać jedno na drugie siły. Obecnie część CB jest w równowadze, a ponieważ ciężar jej równoważy się z reakcją płaszczyzny, wnioskujemy przeto, że część AC nie wywiera na nią żadnej siły.

Przyłóżmy teraz do końca A siłę P, działającą w kierunku BA. Pod działaniem jej sztaba zacznie się przesuwać z odpowiedniem przyśpieszeniem. Skoro część CB posiada obecnie przyśpieszenie, musimy więc uważać, że część AC wywiera na nią pewną siłę. Wyciągamy stąd wniosek, że w AC zaszła jakaś zmiana w chwili, gdy zaczęła działać siła P, i intuicyjnie czujemy, że zmiana ta mogła jedynie polegać na pewnem odkształceniu, a mianowicie wydłużeniu.

Jeżeli tak jest, to rozciągalność stanowi zasadniczą mechaniczną właściwość ciała; bez niej ciała nie mogłyby przenosić działania sił z jednej części na inne, i cały świat zjawisk mechanicznych wyglądałby zupełnie inaczej, niż obecnie.

W dynamice musimy przyjmować przenoszenie sił nie tylko dlatego, że siła, przyłożona do jednego elementu, wywołuje ruch całego ciała, ale i dlatego, że w ruchu obrotowym różne punkty ciała posiadają różne szybkości, a wówczas, jak widzieliśmy w par. 125, w ciele występują naprężenia; innemi słowy jedne części wywierają siły na inne. Nawija się przeto pytanie, czy już w samych podstawach dynamiki ciał sztywnych nie tkwi sprzeczność, polegająca na tem, że jednocześnie przypisujemy ciałom takim zdolność przenoszenia sił i sztywność czyli nieodkształcalność. Aby na to pytanie odpowiedzieć, potrzeba szczegółowiej rozważyć pojęcie ciała sztywnego.

Według definicji w ciele sztywnem odległości pomiędzy punktami, lub pomiędzy elementami, nie ulegają zmianom. Stąd wynikają dwie następujące właściwości, charakteryzujące ciało sztywne pod względem dynamicznym:

(1) szkielet dynamiczny (t. j. momenty bezwładności względem osi głównych) pod działaniem sił nie ulega zmianom,

(2) siły wewnętrzne nie pracują.

Zobaczymy, o ile właściwości te dadzą się pogodzić z odkształcalnością.

Naturalnie skoro wszystkie ciała się odkształcają pod działaniem sił, to właściwości pierwszej w całej pełni żadne z nich nie posiada, ale są ciała, które przy bardzo drobnem, prawie nie dostrzegalnem, odkształceniu są w stanie przenosić bardzo wielkie siły. Możemy przeto uważać, że ciała takie pomimo odkształcalności posiadają pierwszą właściwość w przybliżeniu, jeżeli tylko siły nie przekraczają pewnej granicy.

Drugą właściwość nawet takie ciała, jak surowiec, stal, granit i t. d., zachowują tylko w pewnych warunkach, a przedewszystkiem wtedy, gdy ruch jest postępowy, i działające na nie siły nie ulegają zmianom. Gdy dany układ sił zaczął działać na ciało, to w pierwszej chwili nastąpiło pewne odkształcenie, i wówczas siły wewnętrzne wykonały pewną pracę. Dalej jednak już ciało się nie odkształca, zachowuje się jak sztywne w ścisłem tego słowa znaczeniu, i siły wewnętrzne nie pracują.

Jeżeli ciało jest słabo odkształcalne, i siły, działające na nie, zmieniają się niezbyt gwałtownie, to praca, wykonana w pewnym czasie przez siły wewnętrzne, jakkolwiek wogóle różna od zera, może być bardzo mała w stosunku do pracy sił zewnętrznych w tymże czasie, i wówczas możemy uważać, że ciało posiada i drugą właściwość w przybliżeniu.

Przypuśćmy teraz, że ciało uległo działaniu siły chwilowej, t. j. uderzeniu lub szarpnięciu. Siła taka jest bardzo wielka w porównaniu z siłami zwykłemi i zmienia się bardzo gwałtownie. Z tego wynika, że i odkształcenie jest w tym razie daleko większe niż podczas działania sił zwykłych. Swoją drogą, jeżeli ciało należy do mało odkształcalnych, i siła chwilowa nie była tak wielka, aby wywołać skruszenie lub rozerwanie, to jeszcze i teraz możemy przyjmować z dużem przybliżeniem, że ciało zachowało pierwszą właściwość sztywności, t. j. że jego szkielet dynamiczny nie uległ wyraźnym zmianom.

Natomiast nie mamy prawa przypuszczać, że podczas uderzenia zachowała się i druga właściwość ciała sztywnego, t. j. że siły wewnętrzne nie pracowały. Wprawdzie odległości pomiędzy elementami ciała zmieniły się w wymienionych warunkach bardzo mało, ale siły, działające pomiędzy temi elementami, czyli siły wewnętrzne, były bardzo wielkie, a zatem suma ich prac, wykonanych podczas odkształcania, mogła być duża. Widzieliśmy też w par. 91, że pominięcie pracy sił wewnętrznych w tak zw. nici nierozciągalnej prowadzi do zupełnie błędnego wyniku.

Streszczając wywody powyższe, powiemy, że niektóre ciała można uważać w przybliżeniu za sztywne w pełnem znaczeniu tego słowa, t. j. posiadające obydwie wyżej wymienione właściwości, tylko w tym razie, gdy mamy do czynienia jedynie z siłami zwykłemi. Jeżeli natomiast wchodzą w grę siły chwilowe, to przymiotnik *sztywny* oznacza jedynie obecność właściwości pierwszej.

138. Uderzenie proste centralne. Dajmy na to, że pomiędzy dwoma ciałami nastąpiło uderzenie, i że powierzchnie ich zetknęły się w pierwszej chwili w jednym punkcie, a mianowicie, że weszły w zetknięcie punkt A_1 jednego ciała i punkt A_2 drugiego. Wspólną normalną do obydwóch powierzchni w tym punkcie nazwiemy *linją uderzenia*. Jest rzeczą oczywistą, że szybkość punktu A_1 względem A_2 jest równa i odwrotna do szybkości punktu A_2 względem A_1. Jeżeli w chwili zetknięcia się powierzchni te szybkości względne leżały na linji uderzenia, to uderzenie nazywamy *prostem*, w razie przeciwnym *ukośnem*. Gdy uderzenie jest proste, to oczywiście siły chwilowe działają na linji uderzenia. Jeżeli linja uderzenia przechodzi przez środek ciężkości ciała, to mówimy, że dla tego ciała uderzenie jest *centralne*, w razie przeciwnym uderzenie nazywa się *ekscentrycznem*.

Będziemy rozważali ten przypadek szczególny, gdy uderzenie dla obydwóch ciał jest proste i centralne; prócz tego założymy, że ruchy obydwóch ciał były przed uderzeniem postępowe. Siły chwilowe przechodzą przez środki ciężkości, nie wytworzą więc momentów ilości ruchu względem tych punktów, a zatem i po uderzeniu obydwa ruchy będą postępowe. Najprościej będzie wyobrażać sobie, że ciała są kulami, jakkolwiek dalsze rozważania będą miały znaczenie ogólne.

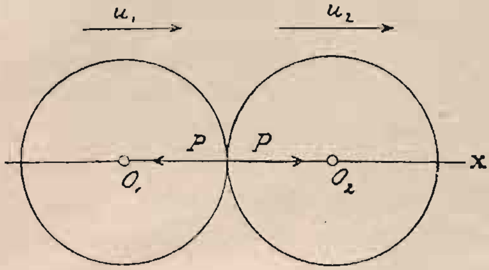

Fig. 95.

Mamy więc dwie kule, których środki O_1, O_2 biegły na linji uderzenia x z szybkościami u_1, u_2; naturalnie pierwsza z nich jest większa. Oznaczmy jeszcze masy kul przez m_1 i m_2.

Zjawisko, zwane uderzeniem, ma przebieg bardzo szybki, musimy jednak uważać, że czas trwania jego jest skończony, i podzielimy ten czas na dwa okresy. W ciągu pierwszego okresu ciała odkształcają się coraz bardziej, dzięki czemu środki O_1 i O_2 zbliżają się do siebie. Na ciała działają siły równe i odwrotne na na prostej x; oznaczymy każdą z nich literą P. Siły te są zmienne, a mianowicie wzrastają bardzo gwałtownie w miarę tego, jak postępuje odkształcenie. Pod ich wpływem zmniejsza się szybkość kuli O_1, a wzrasta szybkość O_2. Musi zatem nadejść chwila taka, gdy szybkości te się wyrównają. Mówimy, że wówczas kończy się okres pierwszy, a rozpoczyna drugi.

Tak więc w końcu pierwszego okresu odkształcenie jest największe, i szybkości ciał są równe. Oznaczmy tę wspólną szybkość przez w. Ponieważ ilość ruchu układu, złożonego z obydwóch kul, w kierunku osi x nie ulega zmianie, przeto

$$w = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \qquad (1).$$

W pewnych razach z końcem pierwszego okresu kończy się i całe zjawisko. Bywa to przedewszystkiem wtedy, gdy podczas uderzenia wytwarza się pomiędzy ciałami połączenie, skutkiem czego muszą one poruszać się już dalej z szybkością wspólną. Mamy np. podobny przypadek, gdy łańcuch, tworzący stos na stole, prostuje się pod działaniem siły, przyłożonej do końca. Co moment zachodzi tu uderzenie pomiędzy ostatniem ogniwem, będącem już w ruchu, a pierwszem ogniwem, pozostającem jeszcze w spokoju; dalej ogniwa te poruszają się z jednakową szybkością. Tak właśnie się dzieje w różnych przykładach paragrafu 93 i 117.

W dalszym ciągu poznamy inny ważny przypadek, w którym również istnieje tylko pierwszy okres uderzenia, w ogóle jednak, jeżeli ciała są swobodne, to po pierwszym okresie następuje drugi. Ciała usiłują powrócić do poprzednich kształtów, a więc się rozprężają. Siły P działają w dalszym ciągu, zmniejszając się gwałtownie; pod ich działaniem szybkość kuli O_1 maleje dalej, a szybkość O_2 wzrasta. Ostatecznie powierzchnie ciał muszą się rozejść, i na tem kończy się drugi okres, a zarazem całe zjawisko.

Nie należy sądzić, że odkształcenia, które powstały w ciągu pierwszego okresu, zniknęły całkowicie w ciągu drugiego. Przedewszystkiem po uderzeniu mogą pozostać pewne odkształcenia trwałe, powtóre jeżeli nawet ciała powracają całkowicie do poprzednich kształtów, to w chwili rozejścia się powierzchni wyrównanie mogło nie być jeszcze ukończone, tak że w końcu drugiego okresu jeszcze pewne odkształcenia istnieją.

Niechaj v_1 i v_2 oznaczają szybkości kul w końcu drugiego okresu, lub zaraz po uderzeniu. Ponieważ ilość ruchu układu w kierunku osi x i teraz pozostaje bez zmiany, przeto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (2).$$

Jest to jedyny związek pomiędzy szybkościami, wynikający z zasad dynamiki, bo nie mamy prawa zakładać, że zachowała się siła żywa układu. Drugiego związku może dostarczyć tylko doświadczenie.

Wyniki odnośnych doświadczeń streszczają się w tak zw. regule Newtona, która głosi, że *stosunek szybkości względnych ciał po uderzeniu i z przed uderzenia jest dla dwóch danych materjałów wielkością stałą*, niezależną ani od kształtu ciał ani od tych szybkości. Regułę tę wyrazimy wzorem

$$v_1 - v_2 = -\varepsilon(u_1 - u_2) \qquad (3),$$

gdzie ε oznacza ów stały stosunek, czyli tak zwany *współczynnik restytucji;* jest to zawsze ułamek właściwy dodatni. Tak np. jeżeli obydwa ciała są ze szkła, to $\varepsilon = 0{,}94$, dla kości słoniowej $\varepsilon = 0{,}81$, dla żelaza lanego 0,66, dla ołowiu 0,2 i t. d. Znak minus po prawej stronie wskazuje, że szybkości względne przed uderzeniem i po uderzeniu mają kierunki odwrotne, a mianowicie przed uderzeniem ciała się zbliżają, a po uderzeniu oddalają.

Z równań (2) i (3) wypada, że

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1u_1 + m_2u_2 + \varepsilon m_2(u_2 - u_1)}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{m_1u_1 + m_2u_2 + \varepsilon m_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Podczas uderzenia każde z ciał otrzymuje impuls, wytwarzający odpowiedni przyrost wektora G. Impulsy obydwóch ciał są równe i odwrotne; każdy z nich co do wielkości wynosi $\int P dt$, gdzie całkowanie rozciąga się na obydwa okresy. Dla pierwszego ciała całka ta jest równa $m_1(v_1 - u_1)$, a po wstawieniu wartości v_1 otrzymamy

$$\frac{m_1m_2(u_1 - u_2)(1 + \varepsilon)}{m_1 + m_2}.$$

Będzie może nie bez pożytku powtórzyć tu uwagę, uczynioną już w par. 117, a mianowicie, że siły zwykłe, działające na ciała podczas uderzenia, nie wywierają wyraźnego wpływu na przebieg zjawiska, a zatem wzory powyższe są ważne bez względu na te siły.

Prz. 1. Ciało spada na płaszczyznę poziomą z wysokości h; w jakim czasie ruch ustanie całkowicie? Odp. $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Prz. 2. Kula o masie m uderza centralnie kulę o masie mn, i po uderzeniu szybkości kul są równe i odwrotne. Wyznaczyć współczynnik restytucji oraz najmniejszą wartość liczby n Odp. $\varepsilon = \frac{2}{n-1}$.

139. Przypadki szczególne. Niektóre ciała po odkształceniu wykazują bardzo słabą tendencję powrotu do formy pierwotnej; należą do nich ołów, żelazo miękkie, a jeszcze w wyższym stopniu wosk, glina wilgotna i t. d. Ciała takie nazywamy *plastycznemi.* Dla ciał plastycznych współczynnik restytucji jest bardzo mały, innemi słowy w drugim okresie uderzenia impulsy sił chwilowych są bez porównania słabsze niż w pierwszym, i szybkość względna po uderzeniu stanowi drobny ułamek takiejże szybkości z przed uderzenia.

Jeżeli współczynnik restytucji jest zerem, to uderzenie nazywamy *doskonale plastycznem;* jest to przypadek idealny, do którego mniej lub więcej zbliżają się uderzenia ciał wyżej wspomnianych. W uderzeniu plastycznem drugi okres nie istnieje wcale, i po uderzeniu w przypadku, który rozważaliśmy w par. poprzedzającym, obydwa ciała poruszają się ze wspólną szybkością w. Widzieliśmy, że

$$w = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

Otrzymamy to samo, zakładając w (4) paragrafu poprzedzającego $\varepsilon = 0$.

Są inne ciała, które znowu po odkształceniu bardzo energicznie dążą do odzyskania postaci pierwotnej. Takiemi są np. szkło, ebonit, kość słoniowa i t. d. Dla nich współczynnik restytucji jest bliski jedności. W przypadku idealnym, gdy współczynnik ten jest równy jedności, mówimy, że uderzenie jest *doskonale sprężyste.* W tym razie drugi okres ma ten sam przebieg, co i pierwszy, lecz odbywa się w odwrotnym porządku, a szybkości względne przed i po uderzeniu są równe i odwrotne.

Zakładając w (4) paragrafu poprzedzającego $\varepsilon = 1$, otrzymamy dla uderzenia doskonale sprężystego

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1) u_2 + 2 m_1 u_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Z wzorów tych wynika, że jeżeli $m_1 = m_2$, to $v_1 = u_2$ i $v_2 = u_1$; znaczy to, że kule zamieniają się na szybkości. Jeżeli np. kula O_2 była nieruchoma, to skutek uderzenia jest taki, że O_1 się zatrzymuje, a O_2 odskakuje z takę szybkością, jaką przed uderzeniem miała kula O_1. Ten wynik teoretyczny daje się łatwo sprawdzić doświadczalnie.

Warto wspomnieć jeszcze o innym przypadku szczególnym, gdy jedno z ciał, np. O_2, posiada bardzo wielką masę i jest nieruchome, gdy jest to np. ściana, związana z budynkiem i gruntem. Wzory (1) napiszemy w postaci takiej

$$v_1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) u_1 + 2u_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}, \quad v_2 = \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) u_2 + 2\frac{m_1}{m_2} u_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}.$$

Ponieważ m_2 jest bardzo wielkie w porównaniu z m_1, możemy przeto założyć $\frac{m_1}{m_2} = 0$; prócz tego $u_2 = 0$. Wypadnie, że $v_1 = -u_1$ i $u_2 = 0$, czyli że ciało O_1 odskakuje z szybkością równą i odwrotną do szybkości początkowej.

Prz. 1. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej kładziemy trzy kule doskonale sprężyste w linji prostej. Udzielamy następnie jednej ze skrajnych szybkość taką, aby uderzyła centralnie środkową, a środkowa uderzy drugą skrajną. Masy skrajnych wynoszą odpowiednio m_1 i m_2; jaka powinna być masa środkowej, aby druga skrajna otrzymała szybkość jaknajwiększą. Odp. $\sqrt{m_1 m_2}$.

Prz. 2. Dwa ciężary P i Q wiszą na końcach sznura, przechodzącego przez nieruchomy blok. W początku ciężary są w spoczynku na wysokości h nad zupełnie niesprężystą płaszczyzną poziomą; po wyswobodzeniu większy ciężar P robi szereg uderzeń w ową płaszczyznę. W jakim czasie ruch ustanie całkowicie? Odp. $3\sqrt{\frac{2h(P+Q)}{g(P-Q)}}$.

Prz. 3. Trzy jednakowe punkty materjalne A, B i C są połączone nierozciągalną nicią o długości $2a$, a mianowicie punkty A i C są przyczepione do jej końców, a B do środka. Punkty te poruszają się w kierunku prostopadłym do rozciągniętej nici i w pewnej chwili punkt B uderza o nieruchomą zupełnie sprężystą przeszkodę. Wyznaczyć początkowe promienie krzywizny nowych torów punktów A i C. Odp. $\frac{a}{4}$.

140. Strata siły żywej. Podczas pierwszego okresu uderzenia cząsteczki ciał się zbliżają do siebie, siły wewnętrzne wykonywają pracę ujemną, i siła żywa układu się zmniejsza; podczas drugiego okresu ciała się rozprężają, siły wewnętrzne pracują dodatnio, i siła żywa wzrasta. Ale ten zysk siły żywej w drugim okresie jest wogóle mniejszy od straty w pierwszym, i koniec końców siła żywa podczas całego uderzenia się zmniejsza.

Naturalnie niema mowy o znikaniu siły żywej, przekształca się ona jedynie w inne postaci energji. Z punktu widzenia energetycznego przebieg zjawiska wygląda w ogólnych zarysach, jak następuje.

Odkształcenia, których doznają ciała w pierwszym okresie, dadzą się podzielić na dwie części; pierwszej części ciała pozbędą się w drugim okresie, lub później, druga część pozostaje na trwałe. Siła żywa, zużyta na część pierwszą, przekształca się w energję potencjalną, jak w ściskanej sprężynie, siła żywa zużyta na część drugą, przechodzi w ciepło. W drugim okresie energja potencjalna przechodzi z powrotem w siłę żywą. Zwykle jednak zetknięcie pomiędzy ciałami ustaje, zanim to przekształcenie powrotne dobiegło do kresu. W takim razie pozostała energja potencjalna przekształca się w inny rodzaj siły żywej, a mianowicie w energję drgań. Ostatecznie przechodzi ona częściowo w energję fal dźwiękowych w powietrzu, a częściowo w ciepło.

Niechaj T oznacza siłę żywą układu przed uderzeniem, R siłę żywą, pozostałą po uderzeniu, a S stratę. Oczywiście

$$T = \frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{2} \quad \text{i} \quad R = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2},$$

a zatem $$S = T - R = \frac{m_1(u_1^2 - v_1^2) + m_2(u_2^2 - v_2^2)}{2}.$$

Ostatnie wyrażenie daje się przekształcić w sposób następujący:

$$S = \frac{m_1(u_1 + v_1)(u_1 - v_1) + m_2(u_2 + v_2)(u_2 - v_2)}{2}.$$

Lecz z (2) w par. 138 wynika, że $m_2(u_2 - v_2) = - m_1(u_1 - v_1)$; wstawiając to, otrzymamy

$$S = \frac{m_1(u_1 - v_1)(u_1 - u_2 + v_1 - v_2)}{2}.$$

Wprowadzając zamiast $v_1 - v_2$ z (3) we wzmiankowanym paragrafie $-\varepsilon(u_1 - u_2)$, a zamiast v_1 jego wartość z (4), otrzymamy ostatecznie

$$S = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 (1 - \varepsilon^2)}{2(m_1 + m_2)} \qquad (1).$$

Reszta R jest równa $T - S$, czyli

$$R = \frac{(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2)(m_1 + m_2) - m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 + m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 \varepsilon^2}{2(m_1 + m_2)};$$

ostatecznie $$R = \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2 + m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 \varepsilon^2}{2(m_1 + m_2)} \qquad (2).$$

W przypadku uderzenia doskonale plastycznego, gdy $\varepsilon = 0$

$$S = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad R = \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (3).$$

W przypadku uderzenia doskonale sprężystego $S = 0$ i $R = T$; w tym razie strata siły żywej w pierwszym okresie całkowicie wyrównywa się w okresie drugim.

Prz. 1. Okazać, że jeżeli masa młotka krokietowego jest równa masie kuli, to współczynnik użytecznego skutku uderzenia, czyli stosunek energji, wydanej użytecznie, do energji całkowitej, udzielonej młotkowi, jest największy.

Prz. 2. Dowieść, że podczas kucia współczynnik użytecznego skutku uderzeń jest tem większy, im mniejsza jest masa młota, i im większa jest masa odkuwanego przedmiotu.

W tym razie ta część siły żywej młota zostaje wydana użytecznie, która wywołuje odkształcenie metalu. Możemy uważać, że młot nie doznaje odkształcenia.

141. Uderzenie ukośne i ekscentryczne. Dajmy na to, że pomiędzy dwowa ciałami swobodnemi, których powierzchnie są zupełnie gładkie, nastąpiło uderzenie jakiekolwiek. Ciała te nie mogą wywierać jedno na drugie reakcyj stycznych czyli sił tarcia, a zatem siły chwilowe działają w kierunku wspólnej normalnej.

Przypuśćmy, że punkt A_1 pierwszego ciała w samym początku uderzenia wchodzi w zetknięcie z punktem A_2 drugiego. Rozłóżmy szybkość każdego z tych punktów przed uderzeniem na dwie składowe, a mianowicie w kierunku wspólnej normalnej oraz w kierunku odpowiedniej stycznej do powierzchni ciał. Otóż składowe normalne podlegają regule Newtona, a zatem *stosunek szybkości względnych punktów A_1 i A_2 po uderzeniu i przed uderzeniem w kierunku wspólnej normalnej jest równy $-\varepsilon$, gdzie ε oznacza współczynnik restytucji.*

Wyjaśni się to jeszcze w przykładzie następującym. Kula, której ruch był postępowy, uderzyła w ścianę. Przed uderzeniem szybkość jej u tworzyła ze wspólną normalną kąt α, a współczynnik restytucji jest równy ε. Pragniemy wyznaczyć ruch kuli po uderzeniu.

Uderzenie jest dla kuli centralne, a zatem siła chwilowa nie wytworzy momentu ilości ruchu względem środka, i ruch po uderzeniu będzie również postępowy. Rozkładamy szybkość u na składowe normalną $u \cos \alpha$ i styczną $u \sin \alpha$. Pierwsza podczas uderzenia przekształci się na $\varepsilon u \cos \alpha$ w kierunku odwrotnym, a druga pozostanie bez zmiany. Tak więc szybkość po uderzeniu będzie $u\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$. Niech β oznacza kąt, który ta szybkość tworzy z normalną, to $\tan\beta=\frac{\tan\alpha}{\varepsilon}$. Jeżeli uderzenie jest sprężyste, to szybkość co do wielkości pozostaje bez zmiany, i $\beta=\alpha$. Możemy powiedzieć, że w tym razie kąt odbicia jest równy kątowi padania.

Jeżeli uderzenie jest ekscentryczne, to wytworzy ono przyrosty zarówno wektora G, jak i wektora H, jak widzieliśmy w par. 117.

Jeżeli powierzchnie ciał nie są gładkie, to siły chwilowe tworzą ze wspólną normalną kąt różny od zera; innemi słowy na każde z ciał oprócz chwilowej reakcji normalnej działa jeszcze chwilowa siła tarcia. Oznaczmy reakcję normalną, działającą na ciało, przez N. W kierunku wspólnej normalnej ciało otrzymuje impuls $\int N dt$. Jeżeli tarcie jest całkowicie rozwinięte, to siła tarcia wynosi fN, gdzie f oznacza współczynnik tarcia, i w kierunku stycznej ciało otrzyma impuls $\int fN dt = f\int N dt$, czyli impuls f razy większy od normalnego. Obydwa te impulsy wytworzą przyrosty wektorów G i H.

Prz. 1. Pomiędzy dwiema gładkiemi kulami zachodzi uderzenie; jedna z nich była przedtem w spoczynku, a szybkość drugiej tworzyła kąt 30^0 z linją środków. Współczynnik restytucji $=\varepsilon$. Ile razy masa pierwszej powinna być większa od masy drugiej, aby ta ostatnia pobiegła po uderzeniu w kierunku prostopadłym do szybkości poprzedniej? Odp. $\frac{4}{3\varepsilon-1}$.

Trzy szybkości, wchodzące tu w grę, muszą czynić zadość trzem warunkom: (1) rzuty szybkości drugiej kuli na kierunek prostopadły do linji środków muszą być równe, (2) ilość ruchu układu w kierunku linji środków pozostaje bez zmiany, i (3) szybkości względne kul w kierunku linji środków podlegają regule Newtona. Z równań, wyrażających te warunki, wynika podana odpowiedź. Zadanie jest możliwe tylko w takim razie, gdy ε przewyższa $^1/_3$.

Prz. 2. Dwie jednakowe gładkie kule leżą na płaszczyźnie poziomej w zetknięciu. W jakim kierunku należy uderzyć jedną z nich, aby ta po uderzeniu w drugą poszła w kierunku, tworzącym z linją środków kąt α, jeżeli współczynnik restytucji jest równy ε? Odp. $\tan\vartheta=\frac{1-\varepsilon}{2}\tan\alpha$, gdzie ϑ oznacza kąt, który szukany kierunek tworzy z linją środków.

Niechaj impuls, udzielony pierwszej kuli, będzie równy mu, a szybkości kul po uderzeniu niech będą odpowiednio v i v_1. Szybkość pierwszej kuli w kierunku stycznym pozostaje bez zmiany, zatem

$$u \sin \vartheta = v \sin \alpha ;$$

również pozostaje bez zmiany ilość ruchu układu w kierunku linji środków, zatem

$$mv \cos \alpha + mv_1 = mu \cos \vartheta ,$$

wreszcie z reguły Newtona wynika, że

$$v \cos \alpha - v_1 = - \varepsilon u \cos \vartheta .$$

Prz. 3. Dwie gładkie jednakowe kule leżą na stole; trzecia taka sama kula uderza obydwie i zatrzymuje się. Wyznaczyć współczynnik restytucji. Odp. $^2/_3$.

Prz. 4. Odległość pomiędzy środkami dwóch jednakowych gładkich kul, leżących na płaszczyźnie poziomej, wynosi c, średnica każdej a, i współczynnik restytucji ε. Pragniemy jedną z nich uderzyć w taki sposób, aby jej kierunek po zetknięciu z drugą doznał jaknajwiększego odchylenia. Wyznaczyć kąt, który początkowa szybkość pierwszej powinna tworzyć z linją środków. Odp. $\arcsin \left(\frac{a}{c} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{3-\varepsilon}} \right)$.

Prz. 5. Na prostokątnym bilardzie $ABCD$ przy boku AB, w punkcie P leży kula. $AP = b_1$, $BP = b_2$, $BC = a$ i współczynnik restytucji $= \varepsilon$. W jakim kierunku należy uderzyć kulę, aby ta, uderzywszy po kolei wszystkie boki, powróciła do punktu P? Szukany kierunek tworzy z AB kąt $\arctan \frac{a\varepsilon}{b_1 + \varepsilon b_2}$.

Prz. 6. Punkt materjalny, przywiązany nicią nierozciągalną o długości l do punktu nieruchomego O, zostaje wyrzucony z tego punktu w kierunku poziomym. Jaka powinna być szybkość początkowa, aby w czasie prostowania nici strata siły żywej była jak najmniejsza? Odp. $\sqrt{\frac{lg}{\sqrt{3}}}$.

Składowa szybkości w kierunku wyprostowanego sznura powinna być najmniejsza. Należy wyrazić ją w funkcji kąta, który wyprostowany sznur tworzy z poziomem.

Prz. 7. Gładka kula o masie m_1 leży na płaszczyźnie poziomej i jest przywiązana poziomym nierozciągalnym sznurem do nieruchomego punktu. Uderza ją inna kula o masie m_2, poruszająca się z szybkością u; linja środków tworzy ze sznurem ostry kąt α, a współczynnik restytucji jest równy ε. Wyznaczyć szybkość, którą przybiera kula pierwsza. Odp. $\frac{(1+\varepsilon) m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$.

Układ, złożony z obydwóch kul, podlega podczas uderzenia działaniu zewnętrznej siły chwilowej, z którą potrzeba się liczyć, a mianowicie szarpnięciu sznura. Pomimo to reguła Newtona nie przestaje obowiązywać.

Prz. 8. Dwie płaszczyzny, tworzące kąt prosty, są jednakowo nachylone do poziomu, a ich prosta przecięcia jest pozioma. Z punktu, położonego pionowo nad tą prostą, w kierunku prostopadłym do niej i poziomym wyrzucono doskonale sprężysty pocisk. Dowieść, że po dwóch odbiciach pocisk powróci do położenia pierwotnego.

Prz. 9. Pocisk niesprężysty wybiegł z punktu O, położonego na chropowatej płaszczyźnie poziomej, z szybkością taką, jaką by nabył, spadając z wysokości h. Szybkość ta tworzyła z poziomem kąt α, a współczynnik tarcia $= 1$. W jakiej odległości od O pocisk się zatrzyma? Odp. $h(1 + \sin 2\alpha)$.

W chwili uderzenia pocisk otrzymuje w kierunku pionowym impuls $\int Ndt$, znoszący składową pionową szybkości, oraz w kierunku poziomym impuls $f\int Ndt = \int Ndt$, zmniejszający odpowiednio składową poziomą.

Wzór, przytoczony w odpowiedzi, jest ważny tylko dla $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$. Jeżeli kąt α jest większy, to pocisk zatrzyma się w miejscu, w którem upadnie.

Prz. 10. Gładka jednorodna półkula o masie M sunie z szybkością v na płaszczyźnie poziomej, opierając się na niej całą podstawą. W płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek półkuli O i przez v, spada punkt materjalny o masie m, mniejszej od M, i uderza o półkulę w punkcie A, położonym z przodu tak, że prosta AO tworzy z pionem kąt 45°. Współczynnik restytucji pomiędzy punktem i półkulą $= \varepsilon$, a pomiędzy półkulą i płaszczyzną $= 0$. Z jakiej wysokości powinien spaść punkt, aby półkula się zatrzymała? Odp. $\frac{[2M + m(1-\varepsilon)]^2 v^2}{2g(1+\varepsilon)^2 m^2}$.

Prz. 11. Klin o gładkich ścianach i masie M leży na stole; ten jego kąt dwuścienny, którego krawędź przylega do stołu, jest równy α. W krawędź tę uderza punkt materjalny o masie m, który poprzednio biegł po stole z szybkością v w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości klina i prostopadłej do owej krawędzi; uderzenie jest plastyczne. Jak wysoko wzniesie się punkt po ścianie klina? Odp. $\frac{M^2 v^2 \cos^2\alpha}{2(M+m)(M+m\sin^2\alpha)g}$.

Prz. 12. Kula jest utrzymywana w powietrzu zapomocą strumienia piasku, który posiada kształt powierzchni stożkowej symetrycznej względem pionowego promienia kuli. Masa piasku, uderzająca kulę na sekundę $= m$, szybkość piasku $= v$, kąt, pod którym widać ze środka kuli koło uderzeń $= 2\alpha$, kąt u wierzchołka stożka $= 2\beta$, i współczynnik restytucji $= \varepsilon$. Wyznaczyć ciężar kuli. Odp. $mv(1 + \varepsilon)\cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$.

Prz. 13. Punkt materjalny o masie m spada na koniec poziomej belki, osadzonej na poziomej osi; oś ta przechodzi przez środek ciężkości belki. Współczynnik restytucji $= \varepsilon$. Jaka powinna być masa belki, aby punkt materjalny odskoczył? Odp. Większa od $\frac{3m}{\varepsilon}$.

Prz. 14. Sztaba jednorodna spada pionowo bez ruchu obrotowego i uderza jednym końcem w gładką płaszczyznę poziomą. Jaki kąt powinna sztaba tworzyć z poziomem, aby jej szybkość kątowa była po uderzeniu jak największa? Odp. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.