DYNAMIKA

V. PRAWA NEWTONA.

70. Punkt materjalny. Mówiliśmy już w par. 13 o zadaniach dynamiki. Nauka ta bada, jak poruszają się ciała pod wpływem ciał innych, czyli pod działaniem sił. Siłę będziemy uważali tu za pojęcie znane ze statyki (par. 4).

Nasuwa się tu pytanie, czy każdą siłę wywiera jakieś ciało, czy zawsze, gdy na ciało A działa siła, to możemy wskazać jakieś ciało B, od którego ta siła pochodzi?

Byłoby może ryzykownem dawać na to pytanie odpowiedź kategorycznie twierdzącą, gdyż znane są zjawiska, w których zachodzi wątpliwość. Zjawiskiem takiem jest np. ciśnienie promieni świetlnych. Gdy światło pada na ciało A, to na powierzchnię tego ciała działają pewne siły; fakt ten przewidziała teorja i stwierdziło doświadczenie. Nie mamy prawa uważać, że siły te wywiera ciało B, wysyłające promienie światła, bo fale świetlne, które w chwili obecnej dochodzą do A, zostały już dawno wysłane przez B, i może B już świecić przestało.

Zasadę, głoszącą, że każdą siłę wywiera jakieś ciało, można byłoby uratować, uważając środowisko, w którem rozchodzą się fale świetlne, czyli tak zw. eter świetlny, za ciało, nie różniące się pod względem zasadniczych właściwości mechanicznych od ciał innych. Kwestja ta jednak nie może być rozstrzygana na gruncie mechaniki.

Pomimo tych wątpliwości dobrze jest przyjąć, przynajmniej jako regułę praktyczną, że siłę wywiera zawsze jakieś ciało. Gdy więc myślimy o sile, to trzeba zaraz zdać sobie sprawę z tego, od jakiego ciała siła ta pochodzi. Reguła taka może uchronić od wielu błędów.

Dynamika, podobnie jak cynematyka, dzieli się na dwie części: dynamikę punktu materjalnego i dynamikę układu. Mówimy *punktu materjalnego*, gdyż chodzi tu nie o ruch punktu geometrycznego, jak było w cynematyce.

Punktem materjalnym nazywamy ciało, którego położenie w przestrzeni daje się określić z dokładnością wystarczającą w taki sam sposób, jak położenie punktu geometrycznego, np. zapomocą trzech współrzędnych Kartezjusza. A więc punktem materjalnym jest przedewszystkiem ciało bardzo małych rozmiarów, albo drobna cząsteczka ciała większego. Nieraz jednak i ciało bardzo wielkie uważamy za punkt materjalny, zwłaszcza, gdy wymiary jego są drobne w stosunku do wymiarów toru. Gdy np. badamy roczny ruch ziemi, to możemy ziemię uważać za punkt materjalny.

Nazwę punkt materjalny można określić i w inny sposób, ściślejszy i dający jednocześnie głębsze pojęcie o podziale dynamiki. Wiemy z cynematyki, że ruch ciała składa się z ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Ciało nazywamy punktem materjalnym, jeżeli, badając ruch jego, nie zwracamy uwagi na ruch obrotowy. Tym sposobem można powiedzieć, że pierwsza część dynamiki, dynamika punktu materjalnego, dotyczy ruchu postępowego ciał, a część druga, dynamika układu, ruchu obrotowego, albo raczej ruchu kulistego.

71. Prawa Newtona. Cały gmach dynamiki jest oparty na pewnych twierdzeniach zasadniczych, tak zw. prawach, podobnie jak geometrja opiera się na aksjomatach. Aksjomaty geometrji sformułował Euklides, i od tego czasu powtarzają się one prawie bez zmiany w ogromnej większości wykładów tej nauki, jakkolwiek według badań nowoczesnych nie wystarczają do czysto logicznej budowy. Wykładający wprowadza do geometrji najczęściej bezwiednie pewne elementy intuicyjne, nie zawierające się w aksjomatach.

Zasadnicze prawdy dynamiki sformułował Newton we wstępie do dzieła „Philosophiae naturalis principia mathematica“, wydanego w r. 1687. Te prawa Newtona stanowią zazwyczaj punkt wyjścia wykładów dynamiki, jakkolwiek zapewne możnaby i tu wykazać, że nie wystarczają całkowicie na podwaliny tej nauki, i że zawiera ona jeszcze inne twierdzenia, wprowadzone ubocznie bez dowodów i uważane za prawdy intuicyjne.

Podajemy tu prawa Newtona w wysłowieniu, przystosowanem do celów naszych.

Prawo pierwsze (prawo bezwładności). Punkt materjalny pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu prostolinjowego i jednostajnego, jeżeli nie działa nań żadna siła.

Prawo drugie. Siła, działająca na punkt materjalny, udziela mu prześpieszenia, które jest z nią zgodne co do kierunku i proporcjonalne do niej co do wielkości.

Prawo trzecie (prawo akcji i reakcji). Siły, które dwa punkty materjalne, lub dwa ciała, wywierają jedno na drugie, mają wspólną linję działania są równe i odwrotnie skierowane.

Pierwsze z tych praw jest oczywiście następstwem lub raczej szczególnym przypadkiem drugiego, bo jeżeli na punkt materjalny żadne siły nie działają, to w myśl drugiego prawa nie może on mieć przyśpieszenia, a zatem ruch jego musi być prostolinjowy i jednostajny. Swoją drogą właśnie w tem pierwszem prawie najłatwiej dostrzedz pewne braki, czy niedomówienia, które dotyczą w równej mierze i drugiego.

Niedomówienia te dotyczą wyrazów *prostolinjowy* i *jednostajny*; bez dalszych wyjaśnień są to wyrazy o znaczeniu nieokreślonem.

Wyobraźmy sobie dwie stacje kolei żelaznej na równinie. Możemy twierdzić, że linja kolei pomiędzy niemi jest prosta, i twierdzenie takie będzie słuszne, o ile pominiemy pewne niezbędne niedokładności. Czy jednak jest prostolinjowym ruch pociągu pomiędzy temi stacjami? Tak jest niewątpliwie względem ziemi, ale względem innego układu, np. względem słońca, ruch pociągu nie jest prostolinjowy, bo pociąg bierze udział w ruchu kuli ziemskiej.

Z tego widać, że pierwsze prawo jest niejasne, gdyż nie zawiera wskazówek, względem jakiego układu ruch punktu, nie podlegającego działaniu sił, jest prostolinjowy.

Przymiotnik *jednostajny* ma oznaczać, że punkt w równych, dowolnie krótkich, odstępach czasu przebiega równe drogi. Jest to także niejasne, dopóki nie umówiliśmy się, co mamy nazywać równemi odstępami czasu.

Człowiek posiada zdolność szeregowania wydarzeń w czasie. Jeżeli dostrzegliśmy trzy wydarzenia A, B i C, to odczuwamy bezpośrednio, że np. B nastąpiło po A, i C po B. Musimy uznać, że czas, który upłynął od A do C, jest dłuższy od czasu AB lub BC, ale żadna logika nie narzuca nam sądu, że np. czas AB był dłuższy od BC, dopóki nie zapadła umowa co do sposobu mierzenia czasu.

O długości odstępu czasu sądzimy według doniosłości zmian, które podczas tego odstępu zachodzą w otaczającym nas świecie i w naszym organizmie, z czego wynika następujący sposób mierzenia czasu. Obieramy jakieś zjawisko, powtarzające się ustawicznie, i umawiamy się uważać za równe odstępy czasu pomiędzy pewnemi fazami jego. W wyborze takiego zjawiska-zegara mamy zupełną swobodę; kierujemy się tu pewnemi względami praktycznemi, lecz nie logiką, która nie stawia tu żadnych norm obowiązujących. Umówiono się uważać za równe dwa odstępy czasu, w których ziemia w ruchu obrotowym względem gwiazd stałych obraca się o jednakowe kąty, ale możnaby np. uznać za równe takie dwa odstępy, w których ziemia w swym ruchu postępowym w układzie słonecznym przebiega równe drogi. Ten drugi sposób byłby mniej dogodny od pierwszego, ale nie doprowadziłby do żadnych sprzeczności logicznych.

Wiadomo, że drogi, które ziemia przebiega w ruchu postępowym, nie są proporcjonalne do kątów, o które się jednocześnie obraca. Równym kątom odpowiadają wogóle nierówne drogi, a zatem dwa okresy czasu, równe przy jednej umowie, byłyby nierówne przy drugiej; ruch, który uważalibyśmy za jednostajny przy jednej, nie byłby jednostajny przy drugiej.

Z uwag tych wynika, że pierwsze prawo, albo raczej ogół tych praw, wymaga jeszcze drugiego uzupełnienia. Powinien być wskazany sposób mierzenia czasu.

Gdybyśmy uważali dynamikę za abstrakcję bez związku ze zjawiskami natury, to trudnościom tym możnaby zejść z drogi, uważając pierwsze prawo za połączone definicje ruchu prostolinjowego oraz równych odstępów czasu. Definicje te w postaci rozwiniętej byłyby takie: ruch punktu nazywamy prostolinjowym, jeżeli torem jego może biec punkt materjalny, na który żadne siły nie działają; nazywamy równemi takie odstępy czasu, w których punkt materjalny, nie podlegający działaniu sił, przebiega równe drogi. Zdaje się jednak, że ogół ludzi, mających do czynienia z mechaniką, nie przepisuje pierwszemu prawu takiego znaczenia.

Kierując się wskazówkami praktyki stosowania twierdzeń dynamicznych do poszczególnych zjawisk, dopełnimy w następujący sposób pierwsze prawo ruchu. Gdy chodzi o zjawiska ziemskie, to najczęściej rozumiemy ruch prostolinjowy, o którym mowa w pierwszem prawie, w odniesieniu do ziemi (por. par. 19)*) gdy chodzi o zjawiska astronomiczne, to rozumiemy ten ruch w odniesieniu do pewnego układu, związanego z naszym systemem planetarnym. W obydwóch przypadkach przyjmować należy sposób mierzenia czasu według ruchu obrotowego ziemi względem gwiazd stałych.

Dynamika jest nauką przyrodniczą. Zawiera ona teorję, czyli opis naukowy, pewnego rodzaju zjawisk natury, i opis ten powinien być możliwie wierny, możliwie bliski rzeczywistości. Z tego wynika konieczność sprawdzenia, czy prawa Newtona, stanowiące podwalinę całej budowy, są w zgodzie z istotnym przebiegiem zjawisk w przyrodzie. Sprawdzenie takie można uskutecznić jedynie na drodze doświadczalnej, ale stosowne doświadczenia nie zostały dotychczas wykonane w sposób dostatecznie dokładny i przekonywający.

Nie mamy więc dowodów bezpośrednich słuszności praw Newtona, lecz natomiast istnieje olbrzymia liczba dowodów pośrednich. Dowodem takim jest w pierwszej linji zgodność różnych zjawisk astronomicznych z przepowiedniami astronomów, których rachunki są oparte na prawach dynamiki, w drugiej linji dobre funkcjonowanie maszyn, których konstruktorzy posługiwali się poprawnie twierdzeniami tej nauki. Można więc twierdzić, że prawa Newtona, przynajmniej w dziedzinie zjawisk, w której je dotychczas stosowano, z dostatecznem przybliżeniem oddają istotny przebieg zjawisk natury.

72. Masa. Według drugiego prawa przyśpieszenie punktu materjalnego jest wprost proporcjonalne do siły. Współczynnik proporcjonalności jest wielkością, charakteryzującą całkowicie punkt materjalny pod względem dynamicznym; odwrotność jego nazywa się masą punktu.

---

* Przy takim układzie odniesienia pierwsze prawo jest tylko w przybliżeniu słuszne. W większości zastosowań, zwłaszcza w technice, przybliżenie jest wystarczające, w pewnych jednak razach potrzeba wprowadzać poprawki, wynikające z ruchu obrotowego ziemi.

Dajmy na to, że dla pewnego punktu współczynnik ten wynosi $\frac{1}{m}$, czyli że masa tego punktu jest równa m. Działająca nań siła P nada mu takie przyśpieszenie p, że $p = \frac{1}{m} P$, albo

$$P = mp.$$

Weźmy ciało, ważące Q kilogramów. Gdy pozwolimy temu ciału spadać swobodnie w próżni, to ta siła Q udzieli mu przyśpieszenie ziemskie g, czyli w naszych szerokościach 9,81 w metrach i sekundach, a zatem $Q = mg$. Jeżeli $Q = g$ klg, to $m = 1$, a zatem masę jednostkową w naszych szerokościach posiada ciało, ważące 9,81 klg. Taka też jednostka masy jest ogólnie używana w technice w krajach, które przyjęły system metryczny. W fizyce wprowadzono jednostkę gram, należącą do systemu CGS, o którym można znaleźć wyczerpujące wiadomości w podręcznikach fizyki.

Niech będą dwa punkty materjalne o masach m_1, m_2, i przypuśćmy, że drugi wywiera na pierwszy pewną siłę, a mianowicie nadaje mu przyśpieszenie p_1. Według trzeciego prawa jednocześnie pierwszy punkt musi działać z siłą równą lecz odwrotną na drugi, a zatem $m_1 p_1 = m_2 p_2$, gdzie p_2 oznacza przyśpieszenie drugiego.

73. **Przykłady.** Podajemy tu szereg przykładów, zawierających zastosowania praw Newtona. Niezbędna jest przedtem pewna uwaga ogólna.

Przypuśćmy, że na punkt materjalny o masie m działają siły $P_1, P_2 \ldots$. Siły te nadają punktowi pewne przyśpieszenie, które można wyznaczyć w sposób dwojaki. Wyznaczamy wypadkową R tych wszystkich sił. Możemy uważać, że działa tylko ta jedna siła R, nada więc ona punktowi przyśpieszenie, zgodne z nią co do kierunku, a co do wielkości równe $\frac{R}{m}$.

Drugi sposób jest następujący. Siła P_1, działając sama jedna, nadałaby punktowi przyśpieszenie $\frac{P_1}{m}$, również siła P_2 nadałaby mu sama przyśpieszenie $\frac{P_2}{m}$ i t. d. Układ przyśpieszeń $\frac{P_1}{m}, \frac{P_2}{m} \ldots$ jest oczywiście podobny do układu sił $P_1, P_2 \ldots$, a zatem, wyznaczając wypadkową tych przyśpieszeń, otrzymamy przyśpieszenie, które istotnie posiada punkt.

Odwrotnie, jeżeli rozłożyliśmy przyśpieszenie na pewną liczbę składowych, to możemy uważać, że każdą z nich wytwarza odpowiednia składowa siła.

Prz. 1. Na poziomej płycie leży ciało, ważące Q kg, a płyta posiada przyśpieszenie pionowe p. Wyznaczyć siłę, którą ciało wywiera na płytę.

Przyśpieszenie dodatnie będziemy mierzyli na dół, a szukaną siłę oznaczymy przez P. Taką samą siłę, ale zwróconą ku górze, płyta wywiera na ciało, a więc działa na nie siła wypadkowa $Q - P$, nadająca mu przyśpieszenie p. Masa ciała $= \frac{Q}{g}$, a zatem będzie $Q - P = \frac{Q}{g} \cdot p$, a stąd

$$P = \frac{Q(g-p)}{g}.$$

Jeżeli $p = g$, to $P = 0$. Gdyby klatka windy osobowej schodziła z przyśpieszeniem ziemskiem, to jadący mieliby wrażenie, że siła ciążenia przestała działać; np. ciężki przedmiot, nie podtrzymywany, nie spadałby na podłogę.

Prz. 2. Do jednego końca belki wagowej przyczepiono lekki*) bloczek, przez bloczek przerzucono sznur, a na końcach sznura zawieszono ciężary Q_1 i Q_2. Jaki ciężar należy zawiesić na przeciwległym końcu belki, aby ta pozostawała w równowadze podczas ruchu ciężarów Q_1 i Q_2? Odp. $\frac{4Q_1Q_2}{Q_1 + Q_2}$.

Przyjmujemy, że tarcie bloczka o oś jest znikomo małe, oraz że sznur jest lekki i doskonale wiotki. W tych warunkach naprężenia we wszystkich punktach sznura są jednakowe. Jeżeli naprężenie sznura $= S$, to na koniec belki działa siła $2S$. Otrzymamy S z równań $Q_1 - S = \frac{Q_1 P}{g}$ i $S - Q_2 = \frac{Q_2 P}{g}$. Jeżeli na przeciwległym końcu belki wisi ciężar $Q_1 + Q_2$, to która strona belki opadnie?

Prz. 3. Na jednym końcu sznura, przechodzącego przez blok, wisi ciężar Q, a u drugiego końca uczepił się gimnastyk, ważący również Q. Co stanie się z ciężarem, gdy gimnastyk zacznie wspinać się po sznurze w górę?

Prz. 4. Wielokrążek składa się z bloka stałego i bloka ruchomego (fig. 63). Wyznaczyć przyśpieszenie ciężaru Q_1, wiszącego u bloka ruchomego, jeżeli na końcu sznura wisi ciężar Q_2. Odp. $\frac{(2Q_2 - Q_1)g}{4Q_2 + Q_1}$.

Gdy oznaczymy odległości ciężarów od sufitu przez x_1 i x_2, to oczywiście $2x_1 + x_2$ jest wielkością stałą. Z tego wynika $2\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0$, równanie, określające związek pomiędzy przyśpieszeniami ciężarów.

Prz. 5. Ciało o masie m wisi na sprężystym sznurze, którego współczynnik sprężystości $= E$, a naturalna długość $= l$**). Podnosimy je na taką wysokość,

*) Przymiotnik *lekki* ma wskazywać, że masy bloczka nie potrzeba brać w rachubę. Będziemy wyrazu tego używali w tem samem znaczeniu i w dalszym ciągu.

**) Jeżeli długość rozciągniętego sznura $= y$, to naprężenie jego wynosi $\frac{E(y-l)}{l}$; współczynnik E można uważać dla danego sznura za wielkość stałą, aby sznur przybrał tę długość naturalną, i następnie pozostawiamy je samemu sobie. Okazać, że ruch ciała będzie harmoniczny, wyznaczyć okres, amplitudę i środek wahań.

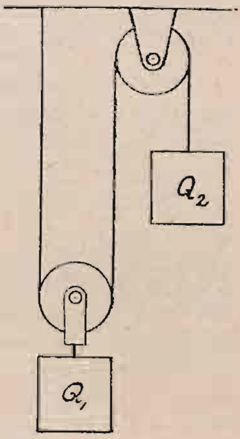

Fig. 63.

Oznaczywszy odległość ciała od punktu zawieszenia przez y, otrzymamy $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \frac{E(y-l)}{l}$. Można tak obrać początek toru, aby równanie to przekształciło się na $\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{E\eta}{ml}$, a to jest równanie ruchu harmonicznego, znane z par. 56. Okres wynosi $2\pi\sqrt{\frac{ml}{E}}$, a amplituda $\frac{2mgl}{E}$.

Prz. 6. Rurka o długości $2a$, wewnątrz gładka, obraca się w płaszczyźnie poziomej około swego końca O ze stałą szybkością kątową ω. W rurce w samym środku, znajduje się kulka, przywiązana nicią do punktu O. W jakim czasie i z jaką szybkością kulka wyjdzie z rurki, gdy nić się zerwie? Wyznaczyć także reakcję pomiędzy rurką i kulką w funkcji odległości r od O. Odp. Szukany czas $= \frac{\lg(2+\sqrt{3})}{\omega}$, szybkość $= a\omega\sqrt{7}$, reakcja $= 2m\omega^2\sqrt{r^2 - a^2}$, gdzie m jest masą kulki.

Gdy kulka znajduje się w odległości r od O, to jej przyśpieszenie posiada trzy składowe: przyśpieszenie unoszenia $\omega^2 r$ i przyśpieszenie względne $\frac{d^2r}{dt^2}$ w kierunku rurki, a prócz tego przyśpieszenie Coriolisa, prostopadłe do rurki. Ponieważ w kierunku rurki nie działa na kulkę żadna siła, przeto wypadkowa dwóch pierwszych musi być zerem, otrzymamy więc $\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$. Z tego już łatwo otrzymać żądane wielkości. Interesującą jest rzeczą, że szukany czas nie zależy od długości rurki.

Prz. 7. Ciało o masie M leży na gładkim stole; do niego jest przyczepiony sznur, który zwisa ze stołu i dźwiga na końcu blok o masie m. Przez blok przechodzi inny sznur, na którego końcach wiszą masy m_1 i m_2. Wyznaczyć przyśpieszenie ciała M. Odp. $\frac{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}{(M+m)(m_1+m_2)+4m_1m_2}g$.

Prz. 8. Przez nieruchomy blok przerzucono sznur, a na lewym końcu sznura zawieszono drugi blok lekki, przez który przechodzi drugi sznur, dźwigający na końcach ciężary P i Q. Jaki ciężar należy zawiesić na prawym końcu pierwszego sznura, aby ciężar Q pozostał w spokoju? Odp. $\frac{4PQ}{3P-Q}$. Urządzenie jest możliwe tylko w takim razie, gdy $P > \frac{Q}{3}$.

---

o ile wydłużenie nie przekroczyło pewnych granic, tak zw. granic sprężystości. Należy przyjmować, że warunek ten jest spełniony, gdy w dalszym ciągu będzie mowa o sznurach, lub wogóle ciałach sprężystych.

Prz. 9. Sznur przechodzi przez dwa nieruchome bloki; jego część, zawarta pomiędzy blokami, dźwiga nawleczony gładki pierścień o masie M, a na jego końcu lewym wisi masa m. Wszystkie części sznura mają kierunek pionowy. Jaka masa powinna wisieć na prawym końcu sznura, aby pierścień pozostawał w spokoju? Odp. $\frac{Mm}{4m - M}$. Urządzenie jest możliwe jeżeli $m > \frac{M}{4}$.

Prz. 10. Na końcach sznura, przerzuconego przez nieruchomy blok, wiszą dwa jednakowe ciężary. Jak zmieni się naprężenie sznura, gdy podwoimy obciążenie jednego końca i zmniejszymy obciążenie drugiego do $^2/_3$? Odp. Pozostanie bez zmiany.

Prz. 11. Wielokrążek składa się z jednego bloka ruchomego i jednego stałego, jak na fig. 63. Na bloku i na końcu sznura wiszą równoważące się ciężary; jak zmieni się naprężenie, gdy podwoimy obciążenie bloka i zmniejszymy do połowy obciążenie sznura?

Prz. 12. Ciało zostało rzucone w górę z szybkością v_0 po linji największego spadku rowni pochyłej, ustawionej pod kątem α do poziomu. Kąt tarcia $= \varphi$. Wyznaczyć szybkość, z którą ciało powróci do miejsca, z którego wyszło. Odp. $v_0\sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}$.

Prz. 13. Wagon o masie m oderwał się w punkcie A podczas pełnego biegu od pociągu, którego całkowita masa była równa M. Wagon zatrzymał się w punkcie B w odległości l od A. W jakiej odległości od B była wówczas reszta pociągu, jeżeli siła pociągowa lokomotywy pozostała bez zmiany, a opór, który pociąg napotyka w biegu, jest proporcjonalny do masy? Odp. $\frac{Ml}{M - m}$.

Prz. 14. Łańcuch jednorodny, którego waga $= Q$, a długość $= l$, leży wzdłuż linji największego spadku gładkiej równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α; początkowo dolny koniec łańcucha znajduje się na samym brzegu równi. Gdy wyswobodzimy łańcuch, i już x metrów zsunie się z równi, to jakie będzie naprężenie w punkcie, który właśnie przechodzi przez brzeg? Odp.

$$\frac{Qx(l - x)(1 - \sin\alpha)}{l^2}.$$

Punkt wskazany dzieli łańcuch na dwie części, które możemy uważać za dwa odrębne ciała; każde z nich wywiera na drugie siłę S, równą szukanemu naprężeniu.

Prz. 15. Punkt O przyciąga wszystkie ogniwa jednorodnego łańcucha z siłami odwrotnie proporcjonalnemi do kwadratu odległości, i pod działaniem tych sił wyprostowany łańcuch sunie wprost do O. Współczynnik proporcjonalności $= k$, długość łańcucha $= a$, i jego masa $= \mu a$. Wyznaczyć naprężenie w jakimkolwiek punkcie łańcucha przy jakimkolwiek położeniu jego.

Końce łańcucha oznaczymy przez A i B; z nich pierwszy ma być bliższy do O. Pragniemy wyznaczyć naprężenie S w punkcie P, w odległości x od A w chwili, gdy $OA = r$. Na element dx działają siły S, $S + dS$ i $\frac{k\mu dx}{(r+x)^2}$, zatem będzie $\mu dx \cdot p = \frac{k\mu dx}{(r+x)^2} - dS$, gdzie p oznacza przyśpieszenie łańcucha. Całkując i uwzględniając, że w A i B naprężenie jest zerem, znajdziemy $S = \frac{k\mu x(a-x)}{r(r+x)(a+r)}$.

Prz. 16. Ciało o masie m otrzymało szybkość v_0 w ośrodku, który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości; współczynnik proporcjonalności $=k$. Wyznaczyć drogę, którą ciało przebiegnie w czasie t.

Równanie ruchu $m\frac{dv}{dt} = -kv^2$. Całkując, otrzymamy $s = \frac{m}{k}\lg\frac{v_0kt+m}{m}$.

Prz. 17. Ciało spadło na ziemię z nieskończenie wielkiej odległości. Dowieść, że doszłoby ono do powierzchni ziemi z taką samą szybkością, gdyby wysokość spadania była równa promieniowi ziemskiemu, i gdyby siła ciążenia była stale równa mg.

Prz. 18. Przypuśćmy, że w kuli ziemskiej przebito prosty tunel w kierunku średnicy. Uważając, że ziemia jest kulą jednorodną i nie uwzględniając oporu powietrza, wyznaczyć czas, w ciągu którego ciało, wpuszczone do tunelu bez początkowej szybkości, dojdzie do końca przeciwległego. Odp. Około 42 minut.

Dajmy na to, że ciało znalazło się w odległości x od środka ziemi. Poprowadźmy przez nie w wyobraźni powierzchnię kulistą współśrodkową z powierzchnią ziemską; tym sposobem podzielimy ziemię na dwie części, zewnętrzną i wewnętrzną. Wiadomo, że pierwsza nie wywiera na ciało żadnej siły, a druga przyciąga je tak, jakgdyby cała jej masa była skoncentrowana w środku. Równanie różniczkowe ruchu będzie $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{a}$. Żądany czas znajdziemy według par. 56.

Prz. 19. Dwa punkty materjalne o masach m i μ przyciągają się według prawa Newtona, t. j. wprost proporcjonalnie do mas i odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości; współczynnik proporcjonalności $= k$. Punkty te umieszczono w położeniach A i B w odległości a, następnie nadano drugiemu stałą szybkość u w kierunku AB i jednocześnie wyswobodzono pierwszy. Czy punkt pierwszy dogoni drugi?

Dajmy na to, że w chwili t odległość pomiędzy punktami była równa x; w takim razie przyśpieszenie względne punktu A wynosi $\frac{d^2x}{dt^2}$. Temuż samemu jest równe przyśpieszenie bezwzględne, bo przyśpieszenie unoszenia jest zerem, a zatem będzie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{km\mu}{x^2}.$$

Z tego otrzymamy, że $w^2 = \frac{2k\mu}{x} + u^2 - \frac{2k\mu}{a}$, gdzie w oznacza szybkość względną. Początkowo punkty się oddalają, szybkość w jest odwrócona od μ i x jest wciąż większe od a; w przejdzie przez zero i zmieni kierunek, jeżeli $u^2 - \frac{2k\mu}{a}$ jest ujemne, lub jeżeli $u^2 < \frac{2k\mu}{a}$. W tym razie punkt m dogoni μ.

Prz. 20. Część łańcucha, którego całkowita długość $= a$, leży na gładkim stole, a druga część o długości b zwisa. W jakim czasie łańcuch zsunie się ze stołu, jeżeli pozwolimy mu spadać? Odp. $\sqrt{\frac{a}{g}}\lg\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

74. Równania ruchu. Niech będzie punkt materjalny m, na który działa siła P, udzielająca mu przyśpieszenie p. Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktu m przez x, y, z. Rzuty siły na osi niech będą P_x, P_y, P_z, a rzuty przyśpieszenia $p_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $p_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $p_z = \frac{d^2z}{dt^2}$. Oczywiście stosunek p_x do P_x jest taki sam, jak stosunek p do P, a zatem $P_x = mp_x$; toż samo dotyczy rzutów pozostałych. Będzie więc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = P_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = P_z.$$

Całkując, otrzymamy równania ruchu punktu.

Gdy mamy do czynienia z współrzednemi biegunowemi, to rozkładamy siłę i przyśpieszenie w kierunku promienia wodzącego oraz w kierunku prostopadłym. Oznaczając składowe siły przez P_r i P_φ, a współrzędne przez r i φ, otrzymamy

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = P_r, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = P_\varphi.$$

Często wypada rozkładać w kierunku stycznej i normalnej do toru. Składowe siły w tych kierunkach oznaczymy przez P_t, P_n i nazwiemy *siłą styczną* i *siłą normalną*. Będzie więc

$$m\frac{dv}{dt} = P_t, \quad m\frac{v^2}{\varrho} = P_n.$$

Wypada dodać, że gdy tor nie jest płaski, to całkowite przyśpieszenie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (par. 58), a zatem i całkowita siła leży w tejże płaszczyźnie. Z tego wynika, że ostatnie dwa równania dotyczą zarówno ruchu płaskiego, jak i nie płaskiego.

Prz. 1. Na płaszczyźnie poziomej stoi klin, którego ściany boczne tworzą z podstawą kąty α_1 i α_2. Ściany te są gładkie i leżą na nich masy m_1 i m_2, połączone nicią, przechodzącą przez krawędź. Jakie przyśpieszenie poziome powinien mieć klin, aby masy m_1, m_2 pozostawały względem niego w spokoju?

Na każde ciało działa siła ciążenia, naprężenie sznura oraz reakcja ściany. Skoro ciało ma pozostać w spokoju względem klina, to siły te powinny mu nadawać przyśpieszenie poziome, równe przyśpieszeniu klina, a zatem suma ich rzutów na dowolny kierunek musi być równa rzutowi owego przyśpieszenia, pomnożonemu przez masę ciała. Aby nie wprowadzać reakcyj ścian bierzemy rzuty na linje największego spadku; rugując następnie neprężenie nici, znajdziemy, że szukane przyśpieszenie wynosi $\frac{(m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2)g}{m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2}$.

Prz. 2. Z równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α, zsuwa się naczynie z wodą. Współczynnik tarcia pomiędzy dnem naczynia i równią jest równy $\tan\varphi$. Wyznaczyć kąt, który powierzchnia wody tworzy z równią.

Na cząsteczkę wody o masie m, położoną na samej powierzchni, działa siła ciążenia mg oraz reakcja R pozostałej masy wody. Jeżeli woda pozostaje w spokoju względem naczynia, to ta reakcja jest prostopadła do powierzchni wody, a obydwie siły mg i R nadają cząsteczce przyśpieszenie, równe przyśpieszeniu naczynia, czyli $\frac{g\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$. Rzut tego przyśpieszenia na dowolny kierunek, pomnożony przez m, jest równy sumie rzutów owych sił. Biorąc rzuty na dwa stosownie obrane kierunki, znajdziemy, że szukany kąt jest równy φ.

Prz. 3. Na gładki poziomy drążek nawleczono pierścień o masie m, do pierścienia przyczepiono sznur o długości a i na końcu sznura zawieszono masę nm. W początku sznur był wyprężony i odchylony od pionu o kąt α w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez drążek, przyczem zarówno punkt nm, jak i pierścień, pozostawały w spokoju. Wyznaczyć tor, który zatoczy punkt nm po wyswobodzeniu układu.

Za początek obieramy pierwotne położenie pierścienia, drążek za oś x, a oś y kierujemy pionowo na dół. W chwili t punkt nm posiada współrzędne (x, y), pierścień $(x'\ 0)$, a sznur jest odchylony od pionu o ϑ. Otrzymamy równania

$$nm\frac{d^2x}{dt^2} = -S\sin\vartheta, \quad m\frac{d^2x'}{dt^2} = S\sin\vartheta,$$

stąd

$$n\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0.$$

Z tego wynika przedewszystkiem $n\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = 0$, a następnie

$$nx + x' = an\sin\alpha.$$

Korzystając z rzucających się w oczy związków geometrycznych, otrzymamy równanie toru

$$(n+1)^2x^2 + y^2 - 2(n+1)nax\sin\alpha + n^2a^2\sin^2\alpha - a^2 = 0.$$

Jest to elipsa, której osi posiadają długości $\frac{2a}{n+1}$ i $2a$; pierwsza z nich leży na osi x.

Prz. 4. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej stoi umocowana w płaszczyźnie pionowej gładka obręcz o masie M. Na obręczy leży punkt materjalny o masie m, przywiązany do końca sznura A. Sznur ten dochodzi po obręczy do jej najwyższego punktu B, następnie idzie poziomo i w drugim końcu jest umocowany nieruchomo. Kąt $AOB = \vartheta$, gdzie O oznacza środek obręczy. O ile zmniejszy się reakcja, którą punkt m wywiera na obręcz, gdy ta zostanie wyswobodzona?

Odp. $\frac{m^2g\sin^2\vartheta}{M+4m\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$.

Po wyswobodzeniu ruch obręczy będzie postępowy, bo tarcia niema. W pierwszej chwili szybkości obręczy i punktu m są jeszcze zerami, ale już każde z tych ciał posiada przyśpieszenie. Dajmy na to, że przyśpieszenie obręczy $= p$; w takim razie obydwie składowe przyśpieszenia punktu m, t. j. przyśpieszenie względne i unoszenia, są także równe p.

Na obręcz działa reakcja punktu m oraz reakcje różnych elementów sznura AB. Wyznaczanie wypadkowej tych ostatnich może nastręczyć pewne trudności. Następujące proste rozumowanie ułatwi sprawę.

Przypuśćmy, że pewien układ sił działa na ciało o drobnej masie. Jeżeli przyśpieszenie tej masy jest niezbyt wielkie, to siły są prawie w równowadze; znaczy to, że ich suma rzutów na dowolny kierunek lub suma momentów względem dowolnej prostej różni się niewiele od zera. Jeżeli nie uwzględniamy wcale masy owego ciała, to możemy uważać, że siły się równoważą.

W danym przypadku na sznur AB działają naprężenia S w A i B oraz reakcje, które obręcz wywiera na różne elementy. Możemy uważać, że siły te się równoważą, bo nie uwzględniamy masy sznura. Z tego wynika, że naprężenia S równoważą reakcje obręczy, a więc są równoważne z reakcjami, które sznur wywiera na obręcz.

Prz. 5. Gładki pierścień o masie m_1 jest nawleczony na sznur, którego jeden koniec umocowano nieruchomo, a do drugiego przywiązano punkt materjalny o masie m. Początkowo punkt m jest podtrzymywany na poziomie końca nieruchomego, a każda część sznura tworzy z poziomem kąt α. Jakie będzie naprężenie sznura w pierwszej chwili po wyswobodzeniu punktu m. Odp. $\dfrac{mm_1 g \sin\alpha}{m_1 + 4m\sin^2\alpha}$.

Obrawszy nieruchomy punkt sznura za początek, znajdziemy

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = l,$$

gdzie $(x\,y)$, $(x_1\,y_1)$ oznaczają współrzędne punktu m i pierścienia, a l długość sznura. Różniczkując równanie powyższe dwa razy względem t, otrzymamy związek pomiędzy współrzędnemi, szybkościami i przyśpieszeniami. Wszystkie te wielkości można łatwo dla pierwszej chwili wyznaczyć.

Prz. 6. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej jest umocowana okrągła tarcza o promieniu a. Do pewnego punktu jej obwodu przyczepiono punkt materjalny zapomocą sznura, którego długość jest równa połowie obwodu. Sznur był wyprostowany i miał kierunek promienia, gdy punkt materjalny otrzymał szybkość v_0, prostopadłą do sznura. W jakim czasie dojdzie on do obwodu tarczy? Odp. $\dfrac{\pi^2 a}{v_0}$.

Prz. 7. Koniec nici o długości l jest umocowany w najwyższym punkcie gładkiej kuli o promieniu a. W drugim końcu nić dźwiga ciężarek, który zatacza koło poziome ze stałą szybkością kątową, przyczem część nici $a\alpha$ pozostaje w zetknięciu z kulą. Wyznaczyć szybkość kątową.

$$\text{Odp.}\quad \omega^2 = \frac{g\cos\alpha}{[a\sin\alpha + (l - a\alpha)\cos\alpha]\sin\alpha}.$$

Prz. 8. Pierścień, którego promień $= a$ i waga $= Q$, wiruje około osi, prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek. Wiadomo, że sztaba, z której zrobiono obwód pierścienia, zrywa się pod działaniem siły rozciągającej S_0. Ile obrotów na minutę może najwyżej robić pierścień?

Odp. $30\sqrt{\frac{2gS_0}{\pi a Q}}$.

Należy rozważyć stan jednego elementu obwodu, który widać ze środka pod kątem $d\vartheta$. Działają nań naprężenia S na końcach; wypadkowa ich wynosi $2S\sin\frac{d\vartheta}{2}$, albo $Sd\vartheta$, gdyż $\sin\frac{d\vartheta}{2} = \frac{d\vartheta}{2}$.

Prz. 9. Dwa punkty materjalne o masach m_1 i m_2, połączone nicią nierozciągalną o długości l, leżą na gładkim stole, i nić jest wyprężona. Punkt m_1 otrzymuje uderzenie w kierunku prostopadłym do nici; wyznaczyć promień krzywizny toru jego w punkcie początkowym.

Na m_1 działa tylko naprężenie nici S, zatem punkt ten będzie miał tylko przyśpieszenie normalne, i $\frac{v^2}{\rho} = \frac{S}{m_1}$, gdzie v oznacza szybkość początkową. Torem względnym jego, względem m_2, jest koło o promieniu l, szybkość względna $= v$, bo punkt m_2 jest w pierwszej chwili nieruchomy, a więc przyśpieszenie względne $= \frac{v^2}{l}$, i przyśpieszenie unoszenia $= \frac{S}{m_1}$. Będzie przeto $\frac{v^2}{l} - \frac{S}{m_2} = \frac{S}{m_1}$. Rugując z tych równań S, otrzymamy $\rho = \frac{l(m_1+m_2)}{m_2}$. Jeżeli $m_1 = m_2$, to $\rho = 2l$; w tym przypadku torami obydwóch punktów są cykloidy pospolite, jak zobaczymy w przyszłości.

Prz. 10. W środku nici o długości $2a$ jest przywiązany punkt materjalny m, a na końcu punkt M. Drugi koniec nici jest przymocowany do gładkiego stołu, na którym leżą punkty, i dwie połowy nici tworzą kąt α. Punktowi M nadano szybkość prostopadłą do części nici, łączącej go z m, przyczem obydwie części pozostały w naprężeniu. Wyznaczyć promień krzywizny toru pnnktu M w punkcie początkowym. Odp. $\frac{a(m + M\sin^2\alpha)}{m}$.

Łatwo zrozumieć, że M posiada w pierwszej chwili tylko przyśpieszenie normalne, a m tylko styczne.

Prz. 11. Koniec nici jest przymocowany w punkcie O do poziomej gładkiej płaszczyzny; nić przechodzi przez paciórkę B, i do jej drugiego końca jest przyczepiony punkt materjalny A o masie równej masie paciórki. Początkowo wszystko to spoczywa na płaszczyźnie, obydwie części nici są wyciągnięte, tworząc rozwarty kąt α, i część $AB = a$. Wyznaczyć początkowy promień krzywizny toru, który obierze punkt A, gdy mu nadamy szybkość prostopadłą do AB. Odp. $a\left(1 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

Może tu zajść trudność przy wyznaczaniu przyśpieszenia punktu A względem B. Potrzebna jest tylko składowa jego w kierunku BA. Można ją obrachować według wzoru $p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, gdzie $\frac{d^2r}{dt^2}$ jest w pierwszej chwili składową przyśpieszenia paciórki w kierunku OB.

Prz. 12. Dwa punkty materjalne A, B o masach m_1, m_2 są połączone nierozciągalną nicią, przewleczoną przez małe gładkie kółko C. Kółko to jest osadzone nieruchomo u szczytu równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α

Początkowo punkt A spoczywa na równi, część nici AC, równa a, leży na linji największego spadku, a część CB wisi pionowo. Nadajemy punktowi A szybkość v prostopadłą na równi do AC. Zbadać, czy punkt B zacznie się wznosić, czy opadać.

Punkt B zacznie się wznosić, jeżeli naprężenie nici w pierwszej chwili będzie większe od $m_2 g$, lub jeżeli $\frac{m_2}{m_1} < \frac{v^2}{ag} + \sin\alpha$.

Prz. 13. Trzy jednakowe cząsteczki A, B, C, połączone nićmi, stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego, w którym promień opisanego koła $= a$. Układ ten wirował około środka ciężkości trójkąta, gdy nić AC się zerwała. Wyznaczyć promienie krzywizny torów cząsteczek w pierwszej chwili po zerwaniu. Odp. $\frac{5a}{3}$, $\frac{5a}{6}$, $\frac{5a}{3}$.

Prz. 14. Punkty materjalne A, B, C, każdy o masie m, leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, przyczepione do nierozciągalnej nici, i części nici AB, BC są odpowiednio równe a, b. Punkt B jest przymocowany do płaszczyzny, A zaś oraz C krążą koło niego z szybkością kątową ω, przyczem obydwie części nici leżą na linji prostej. Wyznaczyć naprężenia, które powstaną w nici bezpośrednio po wyswobodzeniu punktu B. Odp. $\frac{m(2a+b)\omega^2}{3}$ i $\frac{m(a+2b)\omega^2}{3}$.

Prz. 15. Punkt materjalny o masie m jest zawieszony na nierozciągalnej nici u końca poziomego sztywnego ramienia, które może się obracać około osi pionowej, przechodzącej przez drugi koniec. Długość ramienia $= a$, długość nici $= b$. Gdy wszystko pozostaje w spokoju, nadajemy ramieniowi szybkość kątową ω. Wyznaczyć początkowe naprężenie nici. Odp. $m\left(g + \frac{a^2\omega^2}{b}\right)$.

Prz. 16. Wagon rusza na łuku i idzie ze stałem przyśpieszeniem p. Szyna zewnętrzna leży wyżej od wewnętrznej, skutkiem czego podłoga wagonu tworzy z poziomem kąt α. Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy podłogą i leżącym na niej przedmiotem, aby przedmiot ten się nie zsuwał? Odp. $\frac{\sqrt{p^2 + g^2\sin^2\alpha}}{g\cos\alpha}$.

Należy naprzód wyznaczyć niezbędną wartość współczynnika tarcia dla szybkości wagonu v, a następnie zbadać, przy jakiem v wartość ta jest największa.

Prz. 17. Dwie jednakowe cząsteczki A, B o masach m są połączone nierozciągalną nicią o długości l. Cząsteczki te leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, pierwsza z nich jest swobodna, a druga może się poruszać tylko po prostej x. Nić była wyciągnięta prostopadle do x, gdy cząsteczka A otrzymała szybkość v_0 równoległą do tej prostej. W jakich granicach zmienia się naprężenie nici? Odp. Od $\frac{mv_0^2}{4a}$ do $\frac{mv_0^2}{a}$.

Prz. 18. Punkt materjalny leży w O na płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem φ, równym kątowi tarcia punktu o płaszczyznę. Punktowi temu udzielono szybkość v_0 w kierunku poziomym na płaszczyźnie; jaka będzie szybkość jego, gdy ruch stanie się jednostajnym na linji największego spadku płaszczyzny, i w jakiej odległości linja ta leży od O? Odp. $\frac{v_0}{2}$ i $\frac{2v_0^2}{3g\sin\varphi}$.

Obrawszy za oś odciętych prostą największego spadku i za oś rzędnych prostą poziomą, otrzymamy łatwo $\frac{dv}{dt}+\frac{dv_x}{dt}=0$, a stąd $v+v_x=v_0$. Dalej $\frac{dv_y}{dt}=-\frac{v^2}{\rho}$, czyli $\frac{dv_y}{v_y}=-\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$, gdzie ϑ oznacza kąt, który szybkość tworzy z osią x. Przy pomocy ostatniego równania wyrazimy y w funkcji ϑ.

Prz. 19. Płaszczyzna materjalna przechodzi przez prostą pionową y i obraca się koło niej ze stałą szybkością kątową ω. Z punktu O położonego na osi, wybiegł punkt materjalny m z szybkością początkową v_0; szybkość ta jest pozioma i zawarta w płaszczyźnie, przyczem punkt biegnie po stronie przedniej. Wyznaczyć linję, którą punkt zakreśli na płaszczyźnie, a także reakcję płaszczyzny na punkt. Odp. Równania ruchu względnego, lub równania parametryczne linji szukanej są $x=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$, $y=\frac{gt^2}{2}$. Szukana reakcja wynosi $2m\omega\sqrt{\omega^2x^2+v_0^2}$ i wytwarza przyśpieszenie Coriolisa.

Prz. 20. Sznur sprężysty, którego długość naturalna $=a$, współczynnik sprężystości $=E$ (par. 73, prz. 5) i masa $=\mu a$, jest zawarty w prostej rurce. Koniec sznura jest umocowany w końcu rurki, i rurka obraca się około tego końca w płaszczyźnie poziomej z szybkością kątową ω. Wyznaczyć długość sznura w przypuszczeniu, że pozostaje on względem rurki w spoczynku, a także naprężenie w końcu nieruchomym. Odp. $\frac{\tan ak}{k}$, $\frac{\mu\omega^2}{k^2}\cdot\frac{1-\cos ak}{\cos ak}$, gdzie $k=\omega\sqrt{\frac{\mu}{E}}$.

Obierzmy na sznurze dowolny punkt P i oznaczmy przez x długość części OP w stanie naturalnym, a przez y w stanie rozciągniętym. Możemy uważać y za funkcję zmiennej niezależnej x. W punkcie P naprężenie $S=E\frac{dy-dx}{dx}$, a stąd $\frac{dS}{dx}=E\frac{d^2y}{dx^2}$. Z drugiej strony $\mu dx\,.\,y\omega^2=-dS$, zatem $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mu\omega^2}{E}y$.

Prz. 21. Punkty materjalne A i B są połączone nierozciągalną nicią; pierwszy leży na stole, a drugi zwisa o h niżej od brzegu. Współczynnik tarcia pomiędzy pierwszym i stołem $=f$. Punkt A miał właśnie ruszyć, gdy punktowi B udzielono szybkość poziomą. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu B w położeniu początkowem. Odp. $(1+f)h$.

75. Ruch na torze przepisanym. Dotychczas mówiliśmy o ruchu punktu swobodnego, t. j. takiego, który z każdego położenia mógłby ruszyć dowolnym torem, gdyby tylko przyłożyć doń odpowiednią siłę. Rozważymy teraz ruch punktu, zmuszonego pozostawać na pewnym określonym torze, np. ruch kulki, zawartej w sztywnej rurce, albo ruch paciórki, nawleczonej na sztywny drut. Tymczasem będziemy pomijali tarcie punktu o tor (o ściany rurki albo o powierzchnię drutu), innemi słowy będziemy uważali tor za doskonale gładki.

Przypuśćmy więc, że punkt materjalny o masie m musi pozostawać na torze α, i że działa nań siła P. W chwili t punkt m zajmuje na torze położenie O.

Obieramy układ współrzędnych w sposób następujący. Początkiem będzie punkt O, osią x styczna do toru, kierunek dodatni w stronę szybkości, osią y główna normalna w stronę środka krzywizny; dyspozycja ta określa również stosownie do przyjętej umowy (par. 12) i oś z. Oczywiście płaszczyzna xy jest ściśle styczna do krzywej α, a oś z jest binormalną tej krzywej.

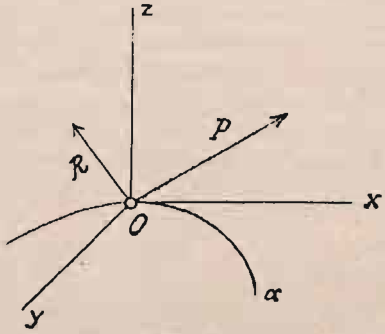

Fig. 64.

Rola mechaniczna ciała, które zmusza punkt materjalny do pozostawania na krzywej α, albo które tworzy tor α (np. rurki lub drutu), polega tylko na tem, że wywiera ono na punkt materjalny pewną reakcję. Jeżeli uwzględnimy tę reakcję w rachunku, to możemy zapomnieć o istnieniu owego ciała, t. j. uważać punkt m za swobodny.

Oznaczmy reakcję toru przez R; ponieważ tor jest gładki, przeto leży ona w płaszczyźnie normalnej, czyli w płaszczyźnie yz.

Rzuty siły P na osi x, y, z oznaczmy odpowiednio przez P_t, P_n i P_b; rzut reakcji R na oś x jest zerem, a dwa rzuty pozostałe oznaczmy przez R_n i R_b. Przyśpieszenie leży w płaszczyźnie xy, i rzuty jego na osi będą odpowiednio $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\varrho}$, 0, gdzie v oznacza szybkość punktu, a ϱ promień krzywizny toru w punkcie O. Tym sposobem otrzymamy następujące trzy równania:

$$m\frac{dv}{dt} = P_t, \qquad \frac{mv^2}{\varrho} = P_n + R_n, \qquad 0 = P_b + R_b.$$

Związki te są ważne dla każdej chwili; trzeba tylko uważać, że w każdej chwili następnej rzuty są brane na styczną, normalną główną i binormalną w tym punkcie toru, który wówczas zajmuje punkt materjalny, a nie na osi, obrane pierwotnie. Jeżeli tor jest płaski, i siła P działa w jego płaszczyźnie, to $P_b = R_b = 0$ i R_n oznacza reakcję całkowitą.

Równania powyższe określają całkowicie ruch punktu, jeżeli dane jest jeszcze położenie jego i szybkość w chwili początkowej. Można z nich także wyznaczyć reakcję toru R.

Rurka może wywierać na zawarty w niej punkt materjalny reakcję w każdym kierunku w płaszczyźnie normalnej; toż samo dotyczy drutu z nanizaną paciórką. W innych razach kierunek reakcji toru musi czynić zadość pewnym warunkom. Wyobraźmy sobie np., że kulka porusza się nie w rurce, lecz w żłobku lub rowku. Oczywiście reakcja nie może tu przekroczyć granic pewnego kąta w płaszczyźnie normalnej.

Albo przypuśćmy, że torem jest skrawek kołowej powierzchni cylindrycznej, czyli obręcz kołowa, a punkt materjalny znajduje się po stronie wewnętrznej. Oczywiście reakcja może tylko działać na promieniu obręczy w kierunku środka.

Równania powyższe są ważne tylko dopóty, dopóki określony przez nie kierunek reakcji czyni zadość postawionym warunkom. Jeżeli znajdziemy, że w pewnym miejscu reakcja wyszła ze wskazanych granic, to wnioskujemy, że dalszy ruch na przepisanym torze był niemożliwy, a zatem punkt materjalny tor ten opuścił. Dalszy ruch punktu odbywa się już w innych warunkach, a zatem i równania ruchu będą inne.

Prz. 1. Punkt materjalny został wprawiony w ruch na gładkim torze, i dalej już żadna siła nań nie działa. Okazać, że szybkość punktu pozostaje stałą co do wielkości, i że reakcja toru jest proporcjonalna do krzywizny.

Prz. 2. Punkt materjalny, który musi pozostawać na okręgu, jest przyciągany do jednego z punktów tego okręgu z siłą odwrotnie proporcjonalną do piątej potęgi odległości. Okazać, że reakcja toru jest stała co do wielkości.

Prz. 3. Dwa jednakowe punkty materjalne umieszczono w dwóch gładkich prostych rurkach, przecinających się pod kątem prostym. Punkty się przyciągają i ruszają ze stanu spokoju. Okazać, że dojdą one jednocześnie do punktu przecięcia rurek, jakiekolwiek jest prawo przyciągania.

Obieramy rurki za osi współrzędnych, współrzędne punktów materjalnych w chwili t oznaczamy przez $(x, 0)$ i $(0, y)$, a kąt, który prosta łącząca tworzy z osią x, przez ϑ. Będzie wówczas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P\cos\vartheta, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -P\sin\vartheta.$$

Z tego otrzymamy łatwo $x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, czyli $d\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$; ostatecznie $y = Cx$, gdzie C jest stałą całkowania. Gdy więc $x = 0$, to i $y = 0$.

Prz. 4. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej leży gładka obręcz o promieniu a, i u jej punktu A wewnątrz leży punkt materjalny. W pewnej chwili nadano obręczy szybkość stałą v w kierunku promienia BO, gdzie O oznacza środek obręczy, a kąt $AOB = \vartheta$ jest mniejszy od prostego. W jakim czasie punkt materjalny dojdzie do B? Odp. $\frac{a\vartheta}{v \sin\vartheta}$.

W pierwszej chwili punkt otrzymuje szybkość bezwzględną w kierunku promienia, bo tarcia niema, a następnie szybkość względna pozostaje stałą.

Prz. 5. Paciórka o masie m jest nawleczona na drut, tworzący koło o promieniu a. W początku paciórka pozostawała w spokoju w położeniu A, gdy drut zaczął się obracać ze stałą szybkością kątową ω około punktu O, położonego na przeciwległym końcu średnicy, przechodzącej przez A. Wyznaczyć reakcję drutu na paciórkę w funkcji odległości r od O. Odp. $R = \frac{m\omega^2 r(3r - 4a)}{2a}$.

Oznaczamy łuk od A do położenia paciórki w chwili t przez $a\vartheta$ i jej szybkość względną przez $a\Omega$. Przyśpieszenie bezwzględne paciórki posiada składowe następujące: 1) przyśpieszenie unoszenia $r\omega^2$, 2) dwa przyśpieszenia względne $a\Omega^2$ oraz $a\frac{d\Omega}{dt}$ i 3) przyśpieszenie Coriolisa $2a\Omega\omega$. Biorąc rzuty na promień koła i styczną, otrzymamy równania

$$R = m\left(a\Omega^2 + r\omega^2 \cos\frac{\vartheta}{2} - 2a\Omega\omega\right), \quad a\frac{d\Omega}{dt} + r\omega^2 \sin\frac{\vartheta}{2} = 0.$$

Początkowa szybkość względna $= 2a\omega$, a całkując drugie z równań powyższych, otrzymamy $\Omega = 2\omega\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega r}{a}$. Kiedy paciórka dojdzie do O?

Prz. 6. Punkt materjalny, przywiązany do końca nici nawiniętej na koło, jest odpychany od środka koła z siłą wprost proporcjonalną do odległości; współcz. proporcjonalności $= k$. Początkowo punkt znajdował się na obwodzie koła w spoczynku; wyznaczyć naprężenie nici, gdy już odwinie się długość s. Odp. $2ks$.

Prz. 7. Punkt materjalny P może poruszać się wewnątrz gładkiej rurki posiadającej postać okręgu, którego środkiem jest punkt C. Rurka wiruje ze stałą szybkością kątową około punktu O, którego odległość od C wynosi jedną trzecią promienia rurki, i punkt P wyruszył z takiego położenia w rurce, że obiega cały okrąg. Wyznaczyć takie położenie punktu P, w którem reakcja rurki jest zerem.

Na punkt P działa jedynie reakcja rurki. Biorąc rzuty na styczną do rurki, otrzymamy $\frac{\Omega^2 a \sin\vartheta}{3} = \frac{d\omega}{dt}$, gdzie Ω oznacza szybkość kątową rurki, a jej promień, ϑ kąt OCP i ω szybkość kątową, z którą punkt P obiega rurkę. Całkując znajdziemy $\omega^2 = \frac{2\Omega^2}{3}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$. Punkt P obiega cały okrąg, a więc ϑ zmienia się od ϑ_0 do $2\pi + \vartheta_0$; aby podczas tego ω pozostawało wciąż rzeczywistem, ϑ_0 musi być zerem. W położeniu szukanem $\cos\vartheta = 1/3$.

Prz. 8. Paciórka P o masie m jest nawleczona na gładki drut kołowy o promieniu a. Paciórkę przyciąga punkt Q, krążący po kole współśrodkowem o promieniu b ze stałą szybkością kątową ω, i siła przyciągania wynosi $\mu \, . \, PQ$. Szybkość paciórki była równa zeru, gdy punkty O (t. j. wspólny środek kół), P i Q leżały na jednej prostej. Przy jakim kącie POQ reakcja drutu na paciórkę jest największa?

Biorąc rzuty na normalną i styczną, otrzymamy równania

$$\frac{mv^2}{a} = R + \mu(a - b\cos\vartheta), \quad m\frac{dv}{dt} = \mu b \sin\vartheta,$$

gdzie R oznacza reakcję drutu, ϑ kąt POQ i v szybkość paciórki. W pierwszem z tych równań mamy reakcję R w funkcji v i ϑ, a drugie określa związek pomiędzy v i ϑ. Z równań tych wynika, że R osiąga maksymum, gdy $\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{5ma\omega^2}{36\mu b}$.

76. Spadek na torze przepisanym. Rozważymy oddzielnie przypadek w którym ciało porusza się na gładkim torze przepisanym pod działaniem siły ciążenia. Układ współrzędnych obierzemy inaczej, niż w paragrafie poprzedzającym. Początek możemy wziąć dowolnie, a oś z skierujemy pionowo na dół.

Przypuśćmy, że punkt o masie m wyruszył z położenia $A_0(x_0 z_0 y_0)$ z szybkością v_0, a w chwili t znalazł się w położeniu $A(xyz)$; szybkość jego była wówczas równa v, a reakcja toru R tworzyła z osiami kąty α, β, γ. W takim razie będzie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\alpha$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = R\cos\beta$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = R\cos\gamma + mg.$$

Mnożymy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz i dodajemy stronami.

$$m\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = R(dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma) + mgdz.$$

Lewą stronę możemy przekształcić na

$$\frac{m}{2}\,\frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{m}{2}\,\frac{d(ds^2)}{dt^2} = \frac{m}{2}\,d\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)^{*)} = \frac{md(v^2)}{2},$$

gdzie ds oznacza element toru. Współczynnik u R po prawej stronie jest oczywiście równy rzutowi elementu ds na kierunek

---

*) Tu, jak wogóle w mechanice, uważamy t za zmienną niezależną, a więc dt za stałą.

reakcji R; lecz reakcja jest normalna do toru, a więc rzut ten jest zerem. Tym sposobem równanie nasze przekształci się na

$$\frac{d(v^2)}{2} = gdz.$$

Całkując w granicach od z_0 do z, otrzymamy

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0).$$

Z równania tego wynika wniosek bardzo ważny, że szybkość punktu w położeniu A nie zależy wcale od kształtu toru A_0A, lecz jedynie od szybkości początkowej v_0 i od $z - z_0$, czyli od różnicy poziomów punktów A i A_0. Odwrotnie jeżeli punkt materjalny wyruszy z A z szybkością v w stronę A_0, to dojdzie do tego ostatniego z szybkością v_0.

W przypadku szczególnym, gdy $v_0 = 0$ i $z - z_0 = h$

$$v^2 = 2gh.$$

Aby wyznaczyć równanie ruchu, czyli związek pomiędzy drogą, przebytą na torze, i czasem, trzeba mieć dany tor punktu. Przypuśćmy dla przykładu, że torem przepisanym jest linja prosta, nachylona do poziomu pod kątem α.

W tym razie siła styczna jest równa $mg\sin\alpha$, a siła normalna $mg\cos\alpha$. Krzywizna toru jest zerem; z tego wynika, że reakcja toru jest wciąż równa sile normalnej $mg\cos\alpha$.

Ruch punktu jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony, a mianowicie przyśpieszenie wynosi $g\sin\alpha$. Według par. 55 równanie ruchu będzie

$$x = \frac{g\sin\alpha \,.\, t^2}{2} + v_0t + x_0,$$

gdzie v_0 i x_0 ściągają się do chwili $t = 0$ i oznaczają szybkość i odległość od początku toru.

W przytoczonych niżej przykładach użyto dla krótkości terminu *cięciwa najprędszego spadku*. Tak nazywa się pewna prosta, przechodząca przez dany punkt A i przecinająca daną linję α; po niej punkt materjalny, który wyruszył z A bez początkowej szybkości, dochodzi w najkrótszym czasie do α pod działaniem siły ciążenia.

Prz. 1. Z punktu A wychodzi wielka liczba prostych we wszelkich kierunkach, i po tych prostych zsuwają się ciężkie punkty materjalne, które wyruszyły jednocześnie z A bez początkowej szybkości. Okazać, że w każdej chwili punkty te leżą na kuli, której punktem najwyższym jest A, i wyznaczyć średnicę tej kuli.

Dowiedziemy naprzód, że wszystkie punkty schodzące w płaszczyźnie pionowej przez A, leżą na kole, a stąd już bezpośrednio wynika powyższe twierdzenie. W chwili t średnica kuli wynosi $\frac{gt^2}{2}$.

Prz 2. Mając dany punkt A i prostą a, wyznaczyć cięciwę najprędszego spadku.

W płaszczyźnie Aa zataczamy koło, styczne do a i posiadające najwyższy punkt w A. Prosta, łącząca punkt A z punktem zetknięcia, będzie szukaną.

Prz. 3. Punkt A i koło α leżą w jednej płaszczyźnie; wyznaczyć cięciwy najkrótszego i najdłuższego spadku.

Prz. 4. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, z którego punkty materjalne spadają po gładkich prostych do trzech danych punktów A, B, C w jednakowym czasie.

Punkt taki P jest najwyższym punktem kuli, przechodzącej przez punkty dane. Oznaczmy przez O środek koła, opisanego na trójkącie ABC, i przez a jego promień. Oczywiście wszystkie punkty P leżą w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny ABC. Za początek współrzędnych dobrze będzie obrać punkt O, a za oś x dwusieczną kąta pomiędzy prostopadłą do płaszczyzny ABC i prostą poziomą. W takim razie równanie szukanego miejsca będzie $x^2 - y^2 = a^2 \cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy płaszczyzną ABC i pionem. Tak więc szukane miejsce geometryczne jest hiperbolą równoramienną.

Prz. 5. Wyznaczyć w płaszczyźnie pionowej krzywą, posiadającą taką własność, że punkt materjalny spada po niej od danego punktu O do dowolnego punktu P w tym samym czasie, co i po cięciwie OP.

Punkt O obieramy za biegun, a oś biegunową kierujemy pionowo na dół. Jeżeli w czasie dt punkt przebiegnie element krzywej ds, to $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gr\cos\varphi}}$.
Wielkości r i s są funkcjami φ, zatem $t = \int_\alpha^\varphi \frac{ds}{\sqrt{2gr\cos\varphi}}$, gdzie α oznacza kąt, który styczna do szukanej krzywej w O tworzy z pionem. Stosownie do warunku

$$\int_\alpha^\varphi \frac{ds}{\sqrt{2gr\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\varphi}}.$$

Różniczkując i podstawiając $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, otrzymamy równanie różniczkowe, którego całką będzie $r^2 = A\sin 2\varphi$. Z tego widać, że krzywa jest lemniskatą, której oś tworzy z pionem kąt 45^0.

Prz. 6. Ciężki punkt może się poruszać na okręgu, położonym w płaszczyźnie pionowej. Punktowi temu nadano taką szybkość w położeniu A, że mógłby on dojść do najwyższego punktu B okręgu. W jakim czasie punkt ten dojdzie do położenia P, jeżeli kąt $BOA = \alpha$ i $BOP = \vartheta$? Odp. $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \lg \frac{\tan\frac{\alpha}{4}}{\tan\frac{\vartheta}{4}}$.
Kiedy punkt materjalny dojdzie do B?

Prz. 7. Punkt materjalny, spadając po obręczy, ustawionej w płaszczyźnie pionowej, opuścił ją w punkcie A i pobiegł dalej po paraboli. Dowieść, że obręcz jest kołem krzywizny paraboli w punkcie A.

Prz. 8. Punkt materjalny został okręcony na sznurze w płaszczyźnie pionowej około punktu nieruchomego. Dowieść, że suma naprężeń sznura w dwóch położeniach punktu materjalnego na końcach jednej średnicy była dla wszystkich średnic jednakowa.

Prz. 9. Rura ABC wewnątrz gładka stanowi łuk koła o promieniu a, odpowiadający kątowi centralnemu 240^0. Rurę ustawiono w płaszczyźnie pionowej, nadając cięciwie AC położenie poziome. Jaką szybkość należy nadać pociskowi w najniższym punkcie B, aby ten odbył całkowity obrót $BACB$? Odp. $5ag$.

Prz. 10. Punkt materjalny położono w punkcie A na zewnętrznej stronie gładkiej obręczy kołowej, ustawionej w płaszczyźnie pionowej; promień, przechodzący przez A, tworzy z pionem kąt α. W którym punkcie obręczy punkt materjalny z niej zejdzie?

Punkt szukany można poznać po tem, że w nim reakcja obręczy znika. Kosynus kąta, który odpowiedni promień tworzy z pionem, $= \frac{2\cos\alpha}{3}$.

Prz. 11. W najwyższym punkcie gładkiego kołowego drutu o promieniu r, położonego w płaszczyźnie pionowej, umieszczono paciórkę, nawleczoną na drut. Paciórce nadano szybkość v i jednocześnie wyswobodzono drut. Ile razy paciórka obiegnie drut naokoło, zanim ten spadnie o h metrów? Odp. $\frac{v}{\pi r}\sqrt{\frac{h}{2g}}$.

Prz. 12. W trójkącie prostokątnym ABC wierzchołek A kąta ostrego leży pionowo nad wierzchołkiem C kąta prostego. Dwa ciężkie punkty wyszły jednocześnie z A; jeden z nich podążył przeciwprostokątną AB, a drugi drogą okólną ACB (należy uważać, że w okolicach wierzchołka C przyprostokątne są połączone małym łukiem), i obydwa doszły jednocześnie do B. Wyznaczyć kąt ABC. Odp. arcsin $^3/_5$.

77. Wahadło kołowe. Przypuśćmy, że punkt materjalny, na który działa jedynie siła ciążenia, musi pozostawać na krzywej płaskiej, położonej w płaszczyźnie pionowej, symetrycznej względem prostej pionowej i przecinającej tę oś symetrji w punkcie A. Przypuścimy prócz tego, że punkt A jest najniższym punktem krzywej, i że punkt materjalny nie wychodzi poza część toru, zwróconą wypukłością ku dołowi.

Odsuńmy punkt materjalny do punktu B_1, i pozostawmy go samemu sobie. Oczywiście pod działaniem siły ciążenia zacznie on zsuwać się po torze i dojdzie do A z szybkością $\sqrt{2gh}$, gdzie h oznacza wysokość punktu B_1 nad A. Dzięki nabytej szybkości punkt materjalny pobiegnie dalej, i szybkość jego wyczerpie się dopiero w punkcie B_2, położonym o h wyżej nad A, a więc symetrycznym do B_1. Od tej chwili zjawisko zacznie się powtarzać. Punkt materjalny będzie wciąż przebiegał drogę B_1B_2 to w jedną, to w drugą stronę. Ruch taki nazywa się *wahadłowym*, całe urządzenie nazywamy *wahadłem płaskiem*, łuk B_1B_2 *amplitudą wahań* i czas, w którym punkt materjalny obiega swą drogę w jedną i drugą stronę, *okresem wahań*.

Wogóle okres wahań zależy od amplitudy; im większa jest amplituda, tem dłuższy okres. Możliwe jest wszakże i takie wahadło, które posiada dla wszelkich amplitud jednakowy okres wahań, którego okres wahań nie zależy od amplitudy. Mówimy że w tym razie istnieje *izochronizm wahań*, a wahadło nazywamy *izochronicznem*.

Dajmy na to, że punkt materjalny w chwili t znalazł się w położeniu P pomiędzy A i B_2, dąży w stronę B_2, posiada szybkość v, i że normalna do toru w P tworzy z pionem kąt ϑ. Oczywiście siła styczna wynosi $mg\sin\vartheta$ i ma kierunek odwrotny do szybkości. Będzie więc $m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\vartheta$, a jeżeli s oznacza łuk AP, to $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ i

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\vartheta \tag{1}$$

Pragnąc znaleźć okres wahań, należy wyrazić $\sin\vartheta$ w funkcji łuku s i wyznaczyć całkę powyższego równania.

Najłatwiej jest urządzić *wahadło kołowe*, w którem torem punktu materjalnego jest łuk okręgu. W tym celu przywiązujemy ciężarek do końca sznura, którego drugi koniec jest umocowany w punkcie nieruchomym. Gdy odchylimy takie wahadło od położenia pionowego i pozostawimy je samemu sobie, to oczywiście ciężarek będzie obiegał łuk koła, położony w płaszczyźnie pionowej. Jeżeli możemy uważąć ciężarek za punkt materjalny, to nazywamy jeszcze wahadło takie *prostem*.

Oznaczmy długość sznura, czyli długość prostego wahadła przez l. Kąt ϑ we wzorze (1) oznacza tu oczywiście odchylenie sznura od pionu, zatem $\vartheta = \frac{s}{l}$, i w tym razie będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\left(\frac{s}{l}\right).$$

Całkowanie tego równania prowadzi do całki eliptycznej, ograniczymy się przeto do tego szczególnego przypadku, w którym amplituda jest mała w stosunku do l, tak mała, że nieprzekraczając granic dozwolonego błędu, możemy napisać $\frac{s}{l}$ zamiast $\sin\left(\frac{s}{l}\right)$.

Wiadomo, że $\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{2\,.\,3} + \frac{\vartheta^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \ldots$ Jeżeli największe odchylenie wahadła od pionu wynosi 18^0, to największa wartość ϑ będzie $\frac{\pi\,.\,18}{180} = 0{,}1\,.\,\pi$. Łatwo obliczyć, że w tym razie drugi wyraz szeregu powyższego nie przenosi $\frac{1}{60}$, a trzeci $\frac{1}{12000}$ pierwszego.

Otrzymamy więc równanie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s \qquad (2).$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego, znane już z par. 56; możemy więc powiedzieć, że ruch jest harmoniczny, jakkolwiek torem jest tu okrąg, a nie linja prosta. Oznaczmy okres przez T. Znaleźliśmy w paragrafie wzmiankowanym, że okres jest równy $\frac{2\pi}{\omega}$, ponieważ w danym razie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, przeto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3).$$

Widzimy, że okres nie zależy tu od amplitudy, a zatem wahadło kołowe jest izochroniczne; twierdzenie to jest jednak słuszne tylko dla małych amplitud w granicach dozwolonego błędu.

Prz. 1. Wahadło składa się z ciężaru, uwiązanego na sznurze o długości l. Wiadomo, że sznur ten zrywa się pod działaniem siły równej podwójnej wadze ciężaru; wyznaczyć największą możliwą amplitudę takiego wahadła. Odp. $\frac{2\pi l}{3}$.

Prz. 2. Torem wahadła o masie m jest łańcuchowa, a amplituda jest równa podwójnemu parametrowi. Wyznaczyć reakcję toru w punkcie najniższym. Odp. $mg(2\sqrt{2} - 1)$.

Prz. 3. Punkt materjalny może się poruszać po łańcuchowej i jest przyciągany do kierownicy z siłą, skierowaną prostopadle do tej prostej i wprost proporcjonalną do masy punktu i do odległości (współcz. proporc. $= k^2$). Dowieść, że wahadło takie jest izochroniczne i wyznaczyć okres wahań.

Dojdziemy z łatwością, że $\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s$, co jest dowodem wskazanego twierdzenia. Okres $= \frac{2\pi}{k}$.

Prz. 4. W pewnym punkcie wewnątrz gładkiej rurki, posiadającej kształt pierścienia kołowego i położonej w płaszczyźnie poziomej, są przymocowane końce dwóch jednakowych nici sprężystych. Naturalna długość każdej nici $= \frac{\pi a}{2}$, naprężenie jest proporcjonalne do wydłużenia i współcz. proporc. $= k$. Nici te naciągnięto wewnątrz rurki w kierunkach odwrotnych i końce swobodne przyczepiono do punktu materjalnego o masie m. Następnie punkt ten odchylono od położenia równowagi o łuk, mniejszy od ćwiartki okręgu, i wypuszczono swobodnie. Okazać, że drgania punktu są izochroniczne i wyznaczyć okres.

Odp. $\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Prz. 5. Gładki drut, posiadający kształt okręgu o promieniu a, obraca się w płaszczyźnie poziomej około punktu O ze stałą szybkością kątową Ω. Odległość środka C okręgu od punktu O jest równa b. Wyznaczyć okres drobnych wahań paciórki, nawleczonej na drut. Odp. $\frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Znajdziemy łatwo, że $a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -b\Omega^2 \sin\vartheta$, gdzie ϑ oznacza kąt, który promień, przechodzący przez paciórkę, tworzy z OC. Zatoczmy z C koło promieniem l, i niech s oznacza łuk tego koła, odpowiadający kątowi ϑ. Tak więc $\vartheta = \frac{s}{l}$ i równanie powyższe przekształci się na $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{bl\Omega^2}{a}\sin\frac{s}{l}$. Możemy tak dobrać l, aby było $\frac{bl\Omega^2}{a} = g$, a zatem ruch względny promienia, łączącego paciórkę z C, jest taki, jak ruch sznura wahadła, o długości $l = \frac{ag}{b\Omega^2}$.

78. Wahadło cykloidalne. Niech torem wahadła będzie cykloida. Promień koła tworzącego oznaczymy przez a, i dajmy na to, że koło to obróciło się o kąt φ od chwili, gdy punkt P, kreślący cykloidę, przechodził przez wierzchołek A. Normalna PQ tworzy oczywiście z pionem kąt $\frac{\varphi}{2}$, a zatem w równaniu (1) paragrafu poprzedzającego należy zamiast ϑ napisać $\frac{\varphi}{2}$, i będzie

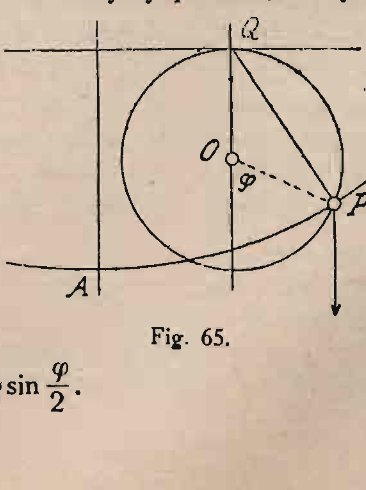

Fig. 65.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Z geometrji wiadomo, że łuk $AP = s = 4a \sin\frac{\varphi}{2}$*), a zatem $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{4a}$. Wprowadzając to do powyższego równania, otrzymamy

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{gs}{4a}.$$

Jest to znowu równanie ruchu harmonicznego. W tym razie $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$, a więc okres

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad (1).$$

Widzimy, że okres nie zależy od amplitudy, a zatem wahadło cykloidalne jest dokładnie izochroniczne, innemi słowy, z jakiegokolwiek położenia punkt materjalny zaczął spadać po cykloidzie, to zawsze dojdzie do wierzchołka w jednym i tym samym czasie $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, Krzywa, posiadająca taką właściwość, nazywa się *tautochroną*.

Izochronizm wahadła cykloidalnego odkrył Huygens (przed r. 1673); on również podał sposób zrealizowania takiego wahadła. W tym celu sporządza się sztywną ramę w kształcie dwóch gałęzi cykloidy, posiadających wspólne ostrze A. Ramę ustawia się w płaszczyźnie pionowej tak, aby podstawa cykloidy była pozioma (fig. 66).

W ostrzu A jest umocowany koniec taśmy AB, dźwigającej w drugim końcu ciężarek B. Jeżeli koło, tworzące obydwie cykloidy, ma promień a, to długość taśmy wynosi $4a$. Gdy owiniemy taśmę na jednej z cykloid, to ciężarek znajdzie się w wierzchołku. Pozostawmy następnie wahadło samemu sobie; taśma zacznie się odwijać, pozostając wciąż wyprężoną, a więc ciężarek będzie obiegał rozwijającą cykloidy; wiadomo z geometrji, że jest to cykloida, równa cykloidom ramy.

---

*) W podręcznikach zazwyczaj mierzy się łuk cykloidy od ostrza i w takim razie łuk $= 4a\left(1 - \cos\frac{\vartheta}{2}\right)$, gdzie ϑ oznacza kąt, o który obróciło się koło tworzące od chwili, gdy punkt P był w ostrzu. Pragnąc mierzyć od wierzchołka, trzeba od tego odjąć $4a$ (łuk pomiędzy ostrzem i wierzchołkiem) i na miejsce ϑ postawić $\pi + \varphi$.

Punkt A jest środkiem krzywizny toru ciężarka w wierzchołku C, a koło, zatoczone z A promieniem $4a$, jest kołem krzywizny. Zetknięcie tego koła z cykloidą jest bardzo ścisłe i na znacznym obszarze, po obydwóch stronach punktu C, można z dobrem przybliżeniem zastąpić łuk cykloidy łukiem koła.

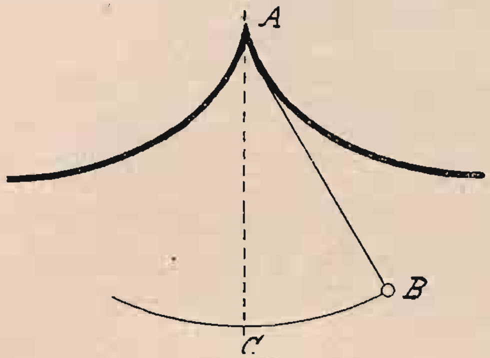

Fig. 66.

Wynika stąd wniosek taki: jeżeli amplituda wahadła kołowego jest mała, to można uważać je w przybliżeniu za cykloidalne, a zatem wahadło kołowe przy małych amplitudach jest izochroniczne. Gdy oznaczymy długość taśmy przez l, to $a = \frac{l}{4}$; podstawiając to we wzorze (1) paragrafu niniejszego, znajdziemy, że okres drobnych wahań wahadła kołowego wynosi $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, co jest zgodne z (3) w par. poprzedzającym.

Prz. 1. Punkt materjalny zsuwa się po gładkiej cykloidzie o osi pionowej wyszedłszy z ostrza bez początkowej szybkości, Wyznaczyć przyśpieszenie całkowite co do wielkości i kierunku w położeniu dowolnem. Odp. Przyśpieszenie jest skierowane do środka koła tworzącego i równe g.

Prz. 2. Okazać, że punkt materjalny w przykładzie poprzedzającym porusza się tak, jakby był przymocowany do obwodu koła tworzącego, a to toczyło się po podstawie cykloidy z szybkością kątową stałą.

Do tego trzeba tylko dowieść, że $\frac{d\vartheta}{dt}$ jest wielkością stałą.

Prz. 3. Po gładkiej cykloidzie, której podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku dołowi, zsuwają się dwa punkty materja'ne. Obydwa wyszły ostrza, lecz jeden wyruszył o t sek. wcześniej od drugiego. Za ile sekund od wyruszenia pierwszego nastąpi spotkanie? Odp. $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{t}{2}$.

Prz. 4. Gładki drut o długości l w postaci jednej gałęzi cykloidy ustawiono w płaszczyźnie pionowej tak, że podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku górze. Na drut nanizano bardzo małych paciórek, które okryły go całkowicie. W pewnej chwili usunięto przeszkody na końcach, i paciórki zaczęły się zsuwać: wyznaczyć łuk cykloidy, który obnaży się w t sekund. Odp.

$$\frac{l\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}}-e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}}\right)}{e^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}}+e^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}}}.$$

Dla jednej paciórki otrzymamy równanie $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{2gs}{l}$; całka ogólna $s=Ae^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}}+Be^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}}$, gdzie A i B oznaczają stałe całkowania.

79. Brachistochrona. Okażemy tu jeszcze inną ciekawą właściwość mechaniczną cykloidy. Naprzód wypada dowieść pewne twierdzenie pomocnicze.

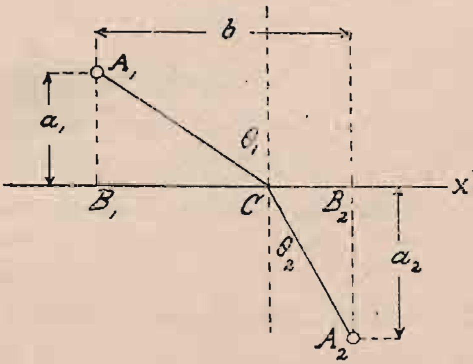

Fig. 67.

Punkt ruchomy wyszedł z punktu A_1, położonego po jednej stronie prostej x i doszedł do punktu A_2, położonego po drugiej; ruchy po obydwóch stronach były prostolinjowe i jednostajne, ale szybkość po jednej stronie wynosiła v_1, a po drugiej v_2. Dajmy na to, że punkt ruchomy przeciął prostą x w punkcie C, i że drogi A_1C i CA_2 tworzą odpowiednio z prostopadłą do prostej x kąty ϑ_1 i ϑ_2. W takim razie całą drogę od A_1 do A_2 punkt ruchomy odbył w czasie

$$t=\frac{a_1}{v_1\cos\vartheta_1}+\frac{a_2}{v_2\cos\vartheta_2} \tag{1}$$

Prócz tego zachodzi związek

$$a_1 \tan \vartheta_1 + a_2 \tan \vartheta_2 = b \qquad (2).$$

Znaczenie liter wyjaśnia dostatecznie fig. 67.

Czas t jest funkcją kątów ϑ_1 i ϑ_2. Jeżeli punkt ruchomy ma w jaknajkrótszym czasie dojść do A_2, to kąty te powinny być takie, aby było

$$\frac{a_1 \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1}{v_1 \cos^2 \vartheta_1} + \frac{a_2 \sin \vartheta_2 \, d\vartheta_2}{v_2 \cos^2 \vartheta_2} = 0.$$

Prócz tego mamy z (2), że

$$\frac{a_1 d\vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_1} + \frac{a_2 d\vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_2} = 0.$$

Z tych dwóch równań wynika, że

$$\frac{\sin \vartheta_2}{v_2} - \frac{\sin \vartheta_1}{v_1} = 0 \qquad (3).$$

Taki warunek powinien być spełniony, aby czas t osiągnął minimum.

Rozwiążemy teraz zagadnienie następujące. Dane są punkty O i A, z których pierwszy leży wyżej od drugiego. Punkt materjalny wyszedł z O bez początkowej szybkości i biegnie do A pod działaniem siły ciążenia po gładkim torze przepisanym. Jaki powinien być ten tor, aby czas spadania był jaknajkrótszy? Będziemy uważali, że ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkty dane.

Obierzemy punkt O za początek współrzędnych; oś x poprowadzimy poziomo, a oś y pionowo na dół. Niech będą na szukanej linji trzy punkty nieskończenie bliskie P_1, P, P_2. Elementy P_1P i PP_2 tworzą z pionem kąty ϑ i $\vartheta + d\vartheta$, a punkt materjalny przebiega je z szybkościami v i $v + dv$.

Droga P_1PP_2 musi być taka, aby punkt materjalny doszedł z P_1 do P_2 w czasie jaknajkrótszym, a zatem na zasadzie tylko co dowiedzionego twierdzenia będzie

$$\frac{\sin(\vartheta + d\vartheta)}{v + dv} - \frac{\sin \vartheta}{v} = 0,$$

czyli

$$d\left(\frac{\sin \vartheta}{v}\right) = 0.$$

Z tego wynika, że $\frac{\sin\vartheta}{v}$ jest wielkością słałą. Oznaczymy tę stałą przez $\frac{1}{\sqrt{4ag}}$, a ponieważ $v = \sqrt{2gy}$, gdzie y jest rzędną punktu P, przeto $y = 2a\sin^2\vartheta$. Wprowadźmy jeszcze kąt $\varphi = 2\vartheta$; w takim razie ostatnie równanie przybierze postać

$$y = a(1 - \cos\varphi).$$

Jest to znane równanie cykloidy, której ostrze leży w punkcie O, a podstawa na osi x, a więc linją najprędszego spadku, czyli *brachistochroną* jest cykloida, której ostrze leży w O, a podstawa jest pozioma.

80. Tarcie o tor. Uważaliśmy dotychczas, że reakcja toru na punkt materjalny leży w płaszczyźnie normalnej; w rzeczywistości reakcja tworzy zawsze z płaszczyzną normalną kąt różny od zera, innemi słowy oprócz składowej normalnej posiada jeszcze składową styczną, którą nazywamy *siłą tarcia*, lub wprost *tarciem*. Punkt materjalny jest w ruchu, a zatem tarcie jest całkowicie rozwinięte; kąt φ pomiędzy reakcją i płaszczyzną normalną nazywa się *kątem tarcia*, a $\tan\varphi = f$ współczynnikiem tarcia *).

Pragnąc uwzględnić w rachunku tarcie, musimy zmodyfikować albo raczej dopełnić równania, do których doszliśmy w par. 75. Pozostawimy oznaczenia bez zmiany z tą tylko różnicą, że R ma oznaczać nie reakcję całkowitą, lecz jej składową normalną. W takim razie reakcja styczna, czyli siła tarcia, będzie równa fR; jest ona zawsze skierowana odwrotnie do szybkości, a w punktach, w których szybkość jest zerem, tarcie ma kierunek odwrotny do siły stycznej.

Wprowadzając siłę tarcia, otrzymamy zamiast równań paragrafu 75 następujące:

$$m\frac{dv}{dt} = P_t - fR, \qquad \frac{mv^2}{\varrho} = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b.$$

Wypada uczynić tu pewną uwagę, o której trzeba pamiętać zawsze, gdy w zagadnieniu dynamicznem pragniemy uwzględnić siłę tarcia. Przypuśćmy, że szybkość punktu materjalnego się

---

*) Uważamy tu, że współczynnik tarcia jest niezależny od szybkości, co, jak wiadomo ze statyki, jest słuszne tylko w przybliżeniu.

zmniejsza, schodzi do zera w pewnem położeniu A_0, a następnie zmienia kierunek. Oczywiście siła tarcia w A_0 nie staje się zerem, jeżeli tylko w położeniu tem nie znika reakcja normalna, ale tarcie jest zawsze odwrotne do szybkości, a zatem w A_0 kierunek jego zmienia się na odwrotny, Widzimy, że wektor tarcie zmienia się w owej chwili w sposób nieciągły.

W chwili, gdy punkt materjalny przechodzi przez położenie A_0, pierwsze z trzech równań powyższych przestaje być ważnem, a mianowicie znak wyrazu, zawierającego f, już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Należy więc ułożyć nowe równania stosownie do zmienionych okoliczności.

Jako ilustrację do uwagi powyższej przytoczymy przykład następujący. Przypuśćmy, że punkt materjalny musi pozostawać na prostej x, i że przyciąga go nieruchomy punkt C, odległy od x o $OC = h$, a siła przyciągania jest wprost proporcjonalna do odległości. Gdy więc punkt materjalny zajmuje położenie P, to działa nań siła $\omega^2 r$, gdzie $r = CP$, a ω^2 oznacza współczynnik proporcjonalności.

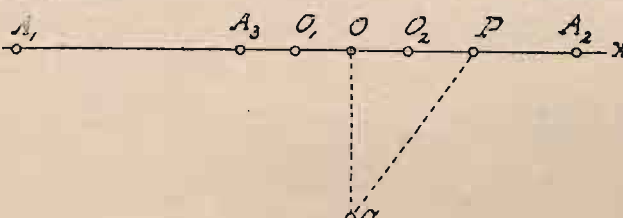

Fig. 68.

Siła styczna jest oczywiście równa $\omega^2 r \sin \vartheta$ i zawsze zwrócona do punktu O, czyli do rzutu punktu C. Siła normalna $= \omega^2 r \cos \vartheta$, gdzie ϑ oznacza kąt OCP. Lecz $r \sin \vartheta = OP = x$, a $r \cos \vartheta = h$, zatem siła styczna $= \omega^2 x$, a normalna $= \omega^2 h$. Widzimy, że siła normalna, a więc i reakcja normalna, są stałe dla wszystkich położeń punktu materjalnego.

Obierzmy kierunek dodatni toru w prawo na fig. 68, i przypuśćmy, że punkt materjalny został odsunięty do położenia A_1 w lewo od O, i pozostawiony samemu sobie. Pod działaniem siły przyciągania wyruszy on w stronę punktu O, a jeżeli tor jest gładki, to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \text{*)} \qquad (1),$$

z czego wynika, że ruch będzie harmoniczny, i połowa okresu wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.

Dajmy teraz na to, że tor jest chropowaty, i oznaczmy współczynnik tarcia przez f. Ponieważ reakcja normalna jest stale równa $\omega^2 h$, przeto siła tarcia będzie stała co do wielkości i równa $f\omega^2 h$. Gdy punkt materjalny dąży w kierunku dodatnim, to prócz siły przyciągania działa jeszcze w kierunku ujemnym siła tarcia, a zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - f\omega^2 h \qquad (2).$$

Przenieśmy początek toru do punktu O_1, którego odcięta niech będzie równa b, i oznaczmy nową odciętą punktu materjalnego przez ξ. Będzie więc $x = \xi + b$, i równanie powyższe przekształci się na $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi - \omega^2(b + fh)$. Obierzmy b w taki sposób, aby było $b + fh = 0$, czyli

$$b = -fh.$$

W takim razie równanie przybierze postać

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi \qquad (3).$$

Widzimy, że ruch jest znowu harmoniczny, ale środkiem jest teraz nie O, lecz inny punkt O_1, położony w lewo od O w odległości fh. Skrajne położenie wypadnie w punkcie A_2, którego odległość od O_1 jest równa A_1O_1. Skutkiem tarcia amplituda zmniejszyła się o $2OO_1$, czyli o $2fh$, natomiast półokres i teraz wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.

Gdy punkt materjalny wyruszy z A_2 w lewo, to kierunek tarcia zmieni się na odwrotny i zamiast równania (2) będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + f\omega^2 t.$$

Postępując, jak poprzednio, znajdziemy, że ruch jest wciąż har-

*) Założono tu, że punkt materjalny posiada masę jednostkową, co wcale nie ogranicza ogólności rozważań.

moniczny, ale środek przesunął się do punktu O_2, położonego w prawo od O w odległości fh, amplituda skróciła się jeszcze o $2fh$, a okres pozostał bez zmiany.

W ten sposób ruch będzie trwał w dalszym ciągu. Po każdem wahnięciu prostem amplituda zmniejszy się o $2fh$, i ostatecznie jedno ze skrajnych położeń przypadnie pomiędzy O_1 i O_2. Wówczas oczywiście siła styczna będzie mniejsza od $f\omega^2 h$, czyli mniejsza od granicznej siły tarcia, przyciąganie punktu C nie zdoła przemóc tarcia, i punkt materjalny pozostanie w spokoju.

Prz. 1. Prosty pręt, tworzący z poziomem kąt α, wiruje ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, położonej z nim w jednej płaszczyźnie. Na pręt jest nawleczony ciężki pierścień, i kąt tarcia pomiędzy nimi jest równy φ. Wyznaczyć długość części pręta, na której pierścień może pozostawać w spoczynku względnym. Odp. $\frac{g[\tan(\alpha+\varphi)-\tan(\alpha-\varphi)]}{\omega^2\cos\alpha}$.

Gdy pierścień znajduje się na końcu szukanego odcinka, to tarcie jest całkowicie rozwinięte. Po tem można poznać ten odcinek.

Prz. 2. Punkt materjalny wyszedł z pewnego punktu, leżącego na wewnętrznej stronie powierzchni kołowego cylindra o promieniu a, z szybkością v_0, styczną do powierzchni i prostopadłą do tworzących. Punkt biegnie dalej jedynie pod działaniem reakcji powierzchni i siły tarcia, a współczynnik tarcia $= f$. W jakim czasie punkt obiegnie cylinder naokoło? Odp. $\frac{a}{fv_0}(e^{2\pi f}-1)$.

Prz. 3. Ciężki punkt zsuwa się po okręgu koła, położonego w płaszczyźnie pionowej, poczynając od końca średnicy poziomej. Współczynnik tarcia wynosi $1/2$. W jakim położeniu szybkość punktu będzie największa?

Znajdziemy z łatwością, że

$$a\left(\omega^2+2\frac{d\omega}{dt}\right)=g(2\cos\vartheta-\sin\vartheta),$$

gdzie ϑ oznacza kąt, który tworzy z poziomem promień, przechodzący przez punkt ruchomy, a ω szybkość kątową tego promienia. Aby równanie powyższe całkować, mnożymy je przez $e^{\vartheta}d\vartheta$. Wówczas po lewej stronie otrzymamy $ad\left(\omega^2 e^{\vartheta}\right)$. Po prawej stronie wypadnie wyznaczyć $\int e^{\vartheta}(2\cos\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta$. Można to uczynić krótko w sposób następujący. Daje się przewidzieć, że szukana całka posiada postać $e^{\vartheta}(M\cos\vartheta+N\sin\vartheta)+C$, gdzie M i N oznaczają współczynniki stałe, które jeszcze trzeba wyznaczyć, a C jest stałą całkowania. Tak więc

$$\int e^{\vartheta}(2\cos\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta=e^{\vartheta}(M\cos\vartheta+N\sin\vartheta)+C.$$

Różniczkując i porównywując współczynniki $\sin\vartheta$ oraz $\cos\vartheta$, znajdziemy, że $M=\frac{3}{2}$, $N=\frac{1}{2}$.

Największa szybkość odpowiada temu kątowi ϑ, który czyni zadość równaniu $\cos\vartheta-3\sin\vartheta+3e^{-\vartheta}=0$.

Prz. 4. Ciężki punkt materjalny zsuwa się po chropowatej cykloidzie, której podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku dołowi. Jaki powinien być współczynnik tarcia, aby punkt, wyszedłszy z ostrza bez początkowej szybkości, zatrzymał się w wierzchołku? Odp. Szukany współczynnik f powinien czynić zadość równaniu $f^2 e^{f\pi} = 1$. Niezbędne całki można otrzymać przy pomocy metod, wskazanych w przykładzie poprzedzającym.

Prz. 5. Punkt materjalny o masie jednostkowej jest zawarty w prostej chropowatej rurce i podlega działaniu siły centralnej odpychającej, która w odległości r od środka odpychania C wynosi $\frac{\lambda}{r}$. Współczynnik tarcia $= f$. Punkt wzmiankowany wyruszył z szybkością v_0 z położenia A, stanowiącego rzut środka C na osi rurki; wyznaczyć kąt, który promień wodzący, wyprowadzony z C, utworzy z CA, gdy punkt się zatrzyma. Odp. Szukany kąt czyni zadość równaniu $2\lambda(f\vartheta + \lg\cos\vartheta) = v_0{}^2$.

81. Opór powietrza. W rozważaniach dotychczasowych pomijaliśmy jeszcze inną siłę, która w warunkach zwykłych działa zawsze na ciała w ruchu, a mianowicie opór powietrza.

Opór powietrza jest pod tym względem podobny do tarcia, że zawsze przeciwdziała ruchowi ciała, gdy jednak tarcie może działać i podczas spoczynku ciała, to opór powietrza występuje tylko podczas ruchu i jest funkcją szybkości.

Pomimo licznych doświadczeń nie zdołano dotychczas wykryć dokładnego i ogólnego związku funkcjonalnego pomiędzy oporem powietrza a wymiarami pocisku, kształtem powierzchni i szybkością, jeżeli jednak szybkość nie jest zbyt wielka, nie przekracza kilkudziesięciu metrów na sek., to otrzymuje się wyniki dość zgodne z rzeczywistością, przyjmując. że dla danego pocisku opór jest proporcjonalny do kwadratu szybkości. Jeżeli szybkość wynosi v, to opór powietrza jest równy $\varkappa v^2$, gdzie $\varkappa$ oznacza współczynnik proporcjonalności.

Ten współczynnik $\varkappa$ jest dla każdego ciała inny. Zależy on przedewszystkiem od wymiarów, a mianowicie w przybliżeniu można uważać, że dla ciał podobnych jest proporcjonalny do pola rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą po szybkości; prócz tego zależy on jeszcze w dużym stopniu od kształtu powierzchni.

Opierając się na założeniach powyższych, rozważymy jedno zagadnienie z tej dziedziny, a mianowicie ruch pionowy ciała ciężkiego w powietrzu.

Przypuśćmy, że ciało o masie m zostało wyrzucone z punktu O z szybkością v_0 pionowo w górę. Obieramy początek toru w O i kierunek dodatni w górę; w takim razie wypadnie, że

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \varkappa v^2 \qquad (1).$$

Będziemy uważali, że współczynnik $\varkappa$ podczas całego ruchu pozostaje bez zmiany.

Załóżmy

$$c = \sqrt{\frac{mg}{\varkappa}} \qquad (2).$$

Będziemy nazywali tę wielkość c *szybkością graniczną* ciała ze względów, które wyjaśnią się w dalszym ciągu. Wprowadzając do (1) $\frac{mg}{c^2}$ zamiast $\varkappa$, otrzymamy

$$c^2\frac{dv}{dt} = -g(c^2 + v^2) \qquad (3).$$

Całkując to równanie znaleźlibyśmy związek pomiędzy szybkością v i czasem t. Ważniejszy jest związek pomiędzy v i przebytą drogą x; aby go otrzymać mnożymy ostatnie równanie przez dx i po lewej stronie zamiast $\frac{dx}{dt}$ piszemy v. Wypadnie wówczas

$$\frac{c^2 v dv}{c^2 + v^2} = -g dx.$$

Całkując, znajdziemy

$$\lg\frac{c^2 + v_0^2}{c^2 + v^2} = \frac{2gx}{c^2}.$$

Aby wyznaczyć wysokość h, do której wzbije się ciało, trzeba tylko w równaniu ostatniem założyć $v = 0$; wypadnie

$$h = \frac{c^2}{2g}\lg\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right).$$

Przypuśćmy dla przykładu, że szybkość początkowa $v_0 = c$. W takim razie $h = \frac{c^2 \lg 2}{2g}$. W próżni ciało wzbiłoby się do wysokości $\frac{c^2}{2g}$, a więc opór powietrza zmniejszył tę wysokość o $\frac{c^2}{2g}(1 - \lg 2)$.

W chwili, gdy ciało osiąga największą wysokość, równanie (1) przestaje być ważnem, gdyż wyraz $\varkappa v^2$, reprezentujacy opór powietrza, już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Szybkość v wchodzi w nim w drugiej potędze, a więc nie zmienia on znaku pomimo to, że opór powietrza zwraca się do góry. Taka nieciągłość jest możliwa zawsze, gdy na ciało działa siła, proporcjonalna do parzystej potęgi szybkości.

Musimy więc uważać, że od chwili, gdy szybkość się wyczerpała, rozpoczyna się nowe zagadnienie, które potrzeba rozważyć odrębnie od poprzedzającego; obierzemy też inaczej początek toru i kierunek dodatni, aby otrzymać przejrzystsze wyniki, a mianowicie początek umieścimy w punkcie najwyższym, a kierunek dodatni obierzemy na dół. Będzie wówczas

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \varkappa v^2,$$

a gdy wprowadzimy szybkość graniczną c według (2), to wypadnie

$$c^2\frac{dv}{dt} = g(c^2 - v^2) \qquad (4).$$

Równanie to wskazuje, że szybkość v nie może przekroczyć szybkości granicznej. Gdyby v doszło do szybkości granicznej, to przyśpieszenie stałoby się zerem, i ruch byłby nadal jednostajny, a mianowicie ciało spadałoby z szybkością graniczną. Stąd pochodzi nazwa tej wielkości.

Jeżeli rzucimy ciało pionowo na dół z szybkością większą od c, to przyśpieszenie będzie ujemne, a więc szybkość będzie się zmniejszała, znowu dążąc do granicznej.

Całkując równanie (4) podobnie, jak (3), otrzymamy

$$\lg\frac{c^2 - v^2}{c^2} = -\frac{2gx}{c^2},$$

a stąd

$$v^2 = c^2\left(1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}\right).$$

Równanie to wskazuje, że szybkość ciała zbliża się asymptotycznie do granicznej; pierwsza jest wciąż mniejsza od drugiej, ale różnica z biegiem czasu zaciera się nieograniczenie.

Zobaczymy jeszcze, w jakiej zależności pozostąje szybkość graniczna od rozmiarów ciała. Weźmy dla przykładu kulę o promieniu r, której masa gatunkowa, czyli masa jednostki objętości, jest rówwa μ. Masa tej kuli $m = \frac{4\pi\mu r^3}{3}$. Współczynnik $\varkappa$, jak już mówiliśmy, jest proporcjonalny do rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości, a więc w tym razie $\varkappa = \lambda \pi r^2$, gdzie λ oznacza nowy współczynnnik proporcjonalności. Podstawiając to w (2), znajdziemy

$$= \sqrt{\frac{4\mu g r}{3\lambda}}.$$

Widzimy, że c jest proporcjonalne do $r^{1/2}$. Tem możnaby wytłomaczyć fakt, że drobne kropelki mgły, a także cząsteczki pyłu spadają bardzo wolno. Ich szybkość graniczna dzięki drobnym rozmiarom jest bardzo mała.

Prz. 1. Ciało zostało wyrzucone z punktu O pionowo w górę z szybkością v_0, a powróciło do O z szybkością v. Dowieść, że $\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0{}^2} = \frac{1}{c^2}$.

Prz. 2. Punktowi materjalnemu, który musi pozostawać na gładkim poziomym torze nadano szybkość początkową v_0 i pozostawiono go samemu sobie. Wyznaczyć szybkość w funkcji drogi a także równanie ruchu, uwzględniając opór powietrza. Odp. $v = v_0 e^{-\varkappa x}$, $x = \frac{1}{\varkappa} \lg(1 + v_0 \varkappa t)$; widzimy, że szybkość asymptotycznie schodzi do zera.

82. Wymiary. Długość, czas i masę nazywamy wielkościami prostemi i będziemy je tu dla krótkości oznaczali odpowiednio literami L, T i M. Można powiedzieć, że w pewnym sensie wszystkie inne wielkości, z któremi mamy do czynienia w mechanice, są złożone z tych wielkości prostych.

Tak np. liczbę wyrażającą pole figury, otrzymujemy jako iloczyn dwóch liczb, z których każda wyraża pewną długość, albo, mówiąc krócej, jako iloczyn dwóch długości. Mówi się również, że wymiarem pola jest długość w potędze drugiej, czyli L^2. Tym sposobem wymiar objętości będzie L^3.

Szybkość $\frac{ds}{dt}$ otrzymujemy jako iloraz liczby, wyrażającej pewną długość ds, przez inną liczbę, wyrażającą czas dt, lub jako iloraz długości przez czas, a zatem wymiar szybkości $= \frac{L}{T} = LT^{-1}$.

Przyśpieszenie, np. $\frac{d^2s}{dt^2}$, w tem samem znaczeniu, jest ilorazem długości przez drugą potęgę czasu, a zatem wymiar przyśpieszenia $= \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$.

Siła jest równa iloczynowi masy przez przyśpieszenie, a więc jej wymiar $= MLT^{-2}$.

Kąt mierzymy stosunkiem łuku do promienia, a zatem wymiar $= \frac{L}{L} = L^0 = 1$. Mówimy, że kąt wyraża się liczbą bez wymiaru, albo że jest to liczba oderwana. Każda funkcja liczby oderwanej, np. lg, sin, jest liczbą oderwaną.

Szybkość kątowa $\frac{d\vartheta}{dt}$ jest ilorazem kąta $d\vartheta$ przez czas dt a więc wymiar będzie $\frac{1}{T} = T^{-1}$.

Pole pewnej figury może wyrażać się tą samą liczbą, co długość pewnego odcinka; np. pole może zawierać 3 m², a odcinek 3 m. Pomimo to niedorzecznie byłoby twierdzić, że pole jest równe odcinkowi, również niedorzecznie byłoby mówić o sumie pola i odcinka, jakkolwiek możemy wyznaczyć sumę obydwóch liczb. Z tego wynika, że znakami $=$, $+$ i $-$ wolno łączyć tylko wielkości, posiadające jednakowe wymiary.

Tak np. nie mogą być połączone żadnym z tych znaków wyrazy mv i P, gdzie m oznacza masę, v szybkość i P siłę, bo wymiar pierwszego $= MLT^{-1}$, a drugiego MLT^{-2}.

Regule powyższej powinien w mechanice czynić zadość wynik każdego rachunku, a także sam rachunek w każdej ze swych faz. Jeżeli tylko wykryjemy gdziekolwiek wykroczenie przeciwko regule, to możemy być pewni, że do rachunku zakradł się błąd.

Może nie będzie od rzeczy zwrócić uwagę na pewne wyjątki pozorne. Przypuśćmy np., że chodzi o wyznaczenie podstawy prostokąta, którego wysokość jest równa jednostce, a pole polu innego prostokąta o wysokości a i podstawie b. Oczywiście szukana podstawa $x = ab$. Wygląda tak, jak gdyby wielkość o wymiarze L była równa wielkości o wymiarze L^2. Paradoks ten jest następstwem skróconego sposobu pisania. Powinno być $x = \frac{ab}{1}$, i ta jednostka w mianowniku posiada wymiar L.

Inne odstępstwa pozorne od reguły mogą pochodzić stąd, że wyrażamy wektory zapomocą odcinków, i niekiedy w rachunku oznaczamy tą samą literą wielkość wektora i długość odcinka. Tak np. jeżeli punkt ruchomy (xyz) posiada szybkość v, to mówimy, że koniec szybkości posiada współrzędne $x + v_x$ i t. d.

Oczywiście v_x oznacza w tym razie nie składową szybkości, lecz długość odcinka i posiada wymiar L. Na wyjątek tego rodzaju zwróciliśmy już uwagę w par. 23.

Można nieraz rozwiązać zagadnienie mechaniczne, posługując się wyłożonem tu prawidłem; przykłady następujące ilustrują tę metodę.

Prz. 1. Punkt ruchomy, posiadający przyśpieszenie wciąż skierowane do punktu O i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, wyruszył z odległości a od O ze stanu spoczynku i doszedł do O w czasie t. Wyznaczyć zależność czasu t od odległości a.

Oznaczmy przez $\varkappa$ współczynnik proporcjonalności. pomiędzy przyśpieszeniem i odwrotnością kwadratu odległości. Oczywiście t może być funkcją tylko tego współczynnika $\varkappa$ i odległości a. Gdy rozwiniemy tę funkcję w szereg według potęg tych zmiennych, to otrzymamy sumę wyrazów typu $A\varkappa^p a^q$, gdzie A oznacza pewien czynnik oderwany, a p i q wykładniki jeszcze nieznane, a zatem

$$t = \Sigma A \varkappa^p a^q \qquad (1).$$

Wymiar lewej strony jest równy T; taki sam powinien być wymiar strony prawej. Współczynnik $\varkappa$, podzielony przez kwadrat długości, oznacza przyśpieszenie, zatem wymiar tego współczynnika wynosi L^3T^{-2}, a wymiar prawej strony $= (L^3T^{-2})^p L^q = L^{3p+q}T^{-2p}$. To będzie równe T, jeżeli

$$3p + q = 0, \quad -2p = 1.$$

Z tych równań wynika, że $p = -\frac{1}{2}$ i $q = \frac{3}{2}$.

Otrzymaliśmy dla p i q po jednej wartości, a zatem prawa strona równania (1) składa się tylko z jednego wyrazu, i

$$t = A\varkappa^{-1/2}a^{3/2}.$$

Tak więc czas t jest proporcjonalny do drogi w potędze $^3/_2$.

Prz. 2. Dowieść, że jeżeli w przykładzie poprzedzającym przyśpieszenie jest proporcjonalne do odległości, to czas t nie zależy od a.

Prz. 3. Wyprowadzić zapomocą metody powyższej zależność okresu wahań prostego wahadła od długości l, masy m i przyśpieszenia ziemskiego g.

Wypadnie, że szukany okres $= A\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie współczynnik A może zależeć od amplitudy.

Prz. 4. Tarcza cylindryczna o promieniu a i masie m może się swobodnie obracać około swej osi. Jakie przyśpieszenie kątowe $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ nada jej styczna do niej siła P? Odp. $\frac{AP}{ma}$. Zobaczymy w dalszym ciągu, że $A = 2$.