VIII. ZASADY DYNAMIKI CIAŁA SZTYWNEGO.

106. Model ciała. Zasadnicze zagadnienie dynamiki jest następujące: mając dane ciało oraz siły na nie działające, wyznaczyć ruch jego. Widzieliśmy w rozdziale V, jak się rozwiązuje to zagadnienie w przypadku, gdy można uważać ciało za punkt materjalny; będziemy usiłowali sprowadzić przypadek ogólny do tego przypadku szczególnego.

W tym celu zbudujemy model ciała, złożony z punktów materjalnych. Wyobraźmy sobie dwa układy współrzędnych I i II, zajmujące różne okolice przestrzeni. Do I-go będziemy odnosili dane ciało, które może być jakiekolwiek, a więc niekoniecznie sztywne, w II-im będziemy budowali model.

Dzielimy ciało na drobne elementy o masach m_1, m_2.... Dla skrócenia będziemy mówili tylko o typowym elemencie m. Każdy z tych elementów posiada pewną objętość różną od zera; jeżeli jednak są one dostatecznie małe, to położenie każdego z nich będzie określone z dokładnością wystarczającą, gdy będą dane współrzędne jednego z jego punktów, np. środka ciężkości. Współrzędne takie będziemy nazywali współrzędnemi elementu.

Niech współrzędne elementu m w układzie I będą x, y, z. Wyznaczamy w układzie II punkt (geometryczny), posiadający takie same współrzędne, i przypisujemy mu masę m. Tym sposobem elementowi m ciała będzie odpowiadał punkt geometryczny o równej masie.

Uczyniwszy to samo dla każdego elementu ciała, otrzymamy rój punktów materjalnych, przypominający pod wieloma względami dane ciało. Będzie to właśnie model, o który chodziło. Różni się on od ciała pod tym względem, że punkty jego nie są związane jedne z drugimi, że są to punkty swobodne, gdy tymczasem w danem ciele wszystkie elementy są połączone razem i stanowią jedną całość.

Chodzi teraz o to, aby model i w ruchach naśladował dane ciało. W tym celu nadajemy każdemu punktowi modelu taką szybkość (co do wielkości i kierunku), jaką w chwili danej posiada odpowiedni element ciała. Ale i w przyszłości szybkości te powinny być jednakowe, a więc trzeba starać się o to, aby i przyśpieszenia punktów modelu były zgodne z przyśpieszeniami elementów ciała. Tak np. składowe przyśpieszenia elementu typowego ciała są $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; otóż trzeba, aby i punkt m modelu posiadał takie przyśpieszenia. Osiągniemy ten skutek, przykładając do każdego punktu modelu stosowne siły.

Na dane ciało działa pewna liczba sił, z których każda jest przyłożona do jakiegoś elementu. Przypuśćmy np., że do elementu m jest przyłożona siła P. Przyłóżmy takie same siły do odpowiednich punktów modelu, a więc do punktu m przyłożymy siłę P. Będą to siły zewnętrzne modelu.

Przyśpieszenia, które skutkiem tego otrzymają punkty modelu, nie będą takie, jak przyśpieszenia odpowiednich elementów ciała. Widać to choćby z tego, że np. siła P, działająca na punkt m modelu, udziela tylko jemu jednemu przyśpieszenie, gdy tymczasem taka sama siła, działając na odpowiedni element ciała, wywiera wpływ na ruch całego ciała, t. j. udziela przyśpieszeń wszystkim innym elementom. Aby więc cel osiągnąć, trzeba jeszcze do punktów modelu przyłożyć inne siły.

Założymy w tym celu, że każdy punkt modelu wywiera siły na punkty pozostałe, że punkty te przyciągają się nawzajem lub odpychają. Będą to siły wewnętrzne i powinny czynić zadość trzeciemu prawu Newtona (akcji i reakcji). Jeżeli wszystkich punktów jest n, to na każdy z nich działa $n-1$ sił, a więc wszystkich takich sił wewnętrznych jest $n(n-1)$. Ponieważ jednak siły te występują parami, a siły każdej pary są równe i odwrotne, przeto sił różnych co do wielkości i kierunku będzie wszystkiego $\frac{n(n-1)}{2}$.

Otóż te siły wewnętrzne trzeba dobrać w taki sposób, aby wraz z zewnętrznemi nadawały punktom modelu przyśpieszenia żądane. Zobaczymy, czy jest to rzecz możliwa.

Przypuśćmy, że punkty m_1, m_2... wywierają na m odpowiednio siły Q_1, Q_2..., i kąty kierunkowe tych sił są $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$.... Są to również kąty kierunkowe prostych mm_1, mm_2..., a więc określa je obecne położenie ciała. Równania ruchu punktu m będą

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P_x + Q_1 \cos\alpha_1 + Q_2 \cos\alpha_2 + \ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = P_y + Q_1 \cos\beta_1 + Q_2 \cos\beta_2 + \ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = P_z + Q_1 \cos\gamma_1 + Q_2 \cos\gamma_2 + \ldots$$

Każdemu punktowi modelu odpowiadają takie trzy równania, mamy więc wszystkiego $3n$ równań, i wielkości Q_1, Q_2... powinny być tak dobrane, aby czyniły im wszystkim zadość. Będzie to można uczynić różnemi sposobami, jeżeli liczba tych wielkości jest większa od liczby równań.

Warunkowi temu wogóle łatwo uczynić zadość, dzieląc ciało na dostatecznie wielką liczbę elementów, i wówczas model będzie dokładnie naśladował ruch ciała, a więc zamiast badać ruch ciała możemy badać ruch modelu, czyli ruch układu punktów materjalnych. Tym sposobem osiągnęliśmy cel zamierzony, ale za to do zadania wszedł cały układ sił wewnętrznych; zobaczymy jednak że można ich nie wprowadzać do rachunku.

Aby ułatwić sprawę budowaliśmy model w odrębnym układzie współrzędnych, jest to jednak zbyteczne. Ponieważ chodzi tylko o konstrukcję myślową, można przeto zbudować go w tym samym układzie, do którego odnosimy ciało; zajmie on wówczas tę samą przestrzeń, którą zajmuje ciało; można zapomnieć o istnieniu ciała, a myśleć tylko o modelu. Tak też będziemy czynili w dalszym ciągu. Mówiąc o ciele, będziemy mieli na myśli model jego.

Należy dodać, że w tym przedstawieniu rzeczy nie czynimy żadnych hipotez co do wewnętrznej budowy ciał. Nie dotykamy np. pytania, czy materja wypełnia przestrzeń w sposób ciągły, czy też posiada budowę molekularną.

107. Zasada d'Alemberta. W jaki sposób można usunąć siły wewnętrzne ciała z rachunku, wskazał d'Alembert (r. 1742), od niego też rozpoczyna się istnienie dynamiki ciał sztywnych, jako odrębnej gałęzi wiedzy. Wypada jednak zaznaczyć, że twierdzenie, odkryte przez d'Alemberta, czyli tak zwana *zasada d'Alemberta*, dotyczy nie tylko ciał sztywnych. Ma ono znaczenie ogólne; podlegają mu wszystkie ciała, jakie dostrzegamy w przyrodzie.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił P_1, P_2.... Zwrócimy uwagę na pewien element o masie m, albo raczej na odpowiedni punkt modelu. Wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na ten element, oznaczymy przez P, wypadkową wszystkich sił wewnętrznych przez Q, a przyśpieszenie elementu przez p. Przyśpieszenie to nadają elementowi właśnie te siły P i Q, a zatem wypadkowa ich jest równa mp. Nazwiemy tę siłę mp *siłą czynną elementu* m.

Gdybyśmy przyłożyli do elementu m siłę odwrotną do czynnej, to zrównoważylibyśmy obydwie siły P i Q. Przyłóżmy do każdego elementu ciała taką siłę, odwrotną do jego siły czynnej. Oczywiście w ten sposób zrównoważymy wszystkie siły zarówno zewnętrzne, jak i wewnętrzne, i już żaden element nie będzie miał przyśpieszenia.

Tak więc obecnie na ciało działają trzy układy sił, a mianowicie: (1) siły zewnętrzne, (2) siły wewnętrzne i (3) siły odwrotne do czynnych; układy te równoważą się nawzajem.

Używamy tu wyrazu „równoważą się" dla krótszego wysłowienia, lecz należy zauważyć, że wyraz ten posiada w tym razie inne lub przynajmniej obszerniejsze znaczenie, niż w statyce. Te różne siły działają tu na punkty swobodne modelu, a w takim razie w sensie statycznym nie możnaby wcale mówić o równowadze. Tak np. dwie siły, z któremi dwa punkty materjalne się przyciągają, lub odpychają, nie równoważą się w sensie statycznym, jakkolwiek działają na jednej prostej, są równe i odwrotne. Mówiąc w tym wykładzie o równowadze, mamy na myśli to jedynie, że suma rzutów sił na każdy kierunek oraz suma ich momentów względem każdej prostej są zerami.

Z owych trzech układów sił, działających na elementy ciała, drugi, t. j. siły wewnętrzne, równoważy się sam przez się, gdyż składają go pary sił równych i odwrotnych. Z tego wynika, że dwa układy pozostałe równoważą się nawzajem, mianowicie równoważą w sensie wyżej określonym.

Tak więc *siły zewnętrzne, działające na ciało, równoważą się z siłami odwrotnemi do czynnych.* Jest to właśnie zasada d'Alemberta.

Mówiliśmy już, że zasada ta jest ogólna. Dotyczy ona zarówno ciał szływnych, jak niesztywnych, a także układów, złożonych z większej liczby ciał, bo każdy taki układ można uważać za jedno ciało niesztywne. Wypada uczynić jeszcze jedną uwagę. Te siły odwrotne do czynnych, które gdyby działały, to sprowadziłyby równowagę, nazywają się w wielu wykładach mechaniki *siłami bezwładności*. Z punktu widzenia czystej logiki nie można nazwie tej zrobić żadnego zarzutu; pomimo to jednak nie użyłem jej w tym wykładzie i będę jej unikał również nadal, gdyż wywołała ona wiele nieporozumień, a nawet błędów; zwłaszcza była powodem całkiem jałowych dyskusji na temat istnienia lub nieistnienia tych sił bezwładności.

Prz. Na punkty materjalne m_1 i m_2, połączone nicią sprężystą, działają odpowiednio siły P_1 i P_2. Dowieść bezpośrednio, że suma rzutów tych sił na dowolny kierunek oraz suma ich momentów względem dowolnej prostej są równe sumie rzutów i sumie momentów sił czynnych punktów m_1 i m_2.

108. Przykłady. Okażemy na przykładzie, jak można stosować zasadę d'Alemberta do rozwiązywania zagadnień dynamicznych.

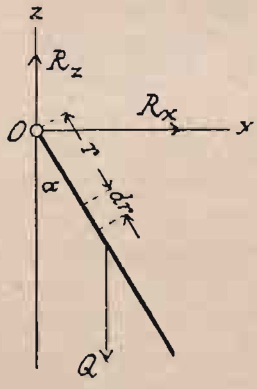

Fig. 78.

Jednorodna sztaba, ważąca Q, jest połączona z pionową osią z gładkim przegubem O i wiruje około tej osi, tworząc z nią stały kąt α. Wyznaczyć reakcję, którą przegub wywiera na sztabę.

Będziemy rozważali tę chwilę, w której sztaba zajęła położenie w płaszczyźnie rysunku. Obieramy początek układu w przegubie, a za osi x, y, z, prostą poziomą w płaszczyźnie rysunku, prostą prostopadłą do tej płaszczyzny i pion.

Wypada naprzód wyjaśnić, jakie siły zewnętrzne działają na sztabę, oraz jakie tu są siły odwrotne do czynnych. Nie można z góry wskazać kierunku szukanej reakcji przegubu*), dla tego

*) Możemy uważać, że przegub składa się z poziomego czopa, należącego do osi, i ucha, należącego do sztaby. Jeżeli ucho ma się obracać swobodnie około czopa, to jego średnica wewnętrzna musi być cokolwiek większa od średnicy czopa, a zatem ucho styka się z czopem tylko na jednej tworzącej. Reakcja posiada punkt przyłożenia na tej tworzącej i działa na wspólnej normalnej do obydwóch powierzchni. Czop może się stykać z uchem według każdej ze swych tworzących, a zatem może wywierać reakcję w każdym kierunku, prostopadłym do swej osi.

też rozłożymy ją na trzy składowe R_x, R_y, R_z w kierunkach osi Gdy wyznaczymy te trzy składowe, to będziemy znali reakcję co do wielkości i kierunku. Prócz tego działa jeszcze siła ciążenia Q, przyłożona w środku sztaby.

Aby wyznaczyć siły odwrotne do czynnych dzielimy sztabę na nieskończenie małe elementy dr. Odległość jednego z nich od O niech będzie równa r. Torem takiego elementu jest koło poziome, którego środek leży na osi, a promień jest równy $r\sin\alpha$. Szybkość jest stała co do wielkości, przeto przyśpieszenie styczne jest zerem, a przyśpieszenie normalne wynosi $r\sin\alpha\,.\,\omega^2$, gdzie ω oznacza szybkość kątową. Siła czynna działa poziomo w płaszczyźnie rysunku w stronę osi, a co do wielkości jest równa $\mu dr\,.\,r\sin\alpha\,.\,\omega^2$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości sztaby. Siła odwrotna do czynnej posiada kierunek odwrotny.

Wyznaczymy sumy rzutów wszystkich sił odwrotnych do czynnych na obrane osi i sumy momentów względem osi y. Suma rzutów na oś x będzie oczywiście

$$\int_0^a \mu\omega^2 \sin\alpha\, r dr = \frac{\mu\omega^2 a^2 \sin\alpha}{2}.$$

gdzie a oznacza długość sztaby. Sumy rzutów na obydwie osi pozostałe są zerami.

Moment siły odwrotnej do czynnej, działającej na element dr wynosi $-\mu dr\,.\,r\sin\alpha\,.\,\omega^2\,.\,r\cos\alpha$, a suma momentów

$$-\int_0^a \mu\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\, r^2 dr = -\frac{\mu\omega^2 a^3 \sin\alpha\cos\alpha}{3}$$

Tworzymy równania równowagi, t. j. bierzemy rzuty na osi oraz momenty względem nich sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych.

$$R_x + \frac{\mu\omega^2 a^2 \sin\alpha}{2} = 0. \quad R_y = 0, \quad R_z - Q = 0$$

$$\frac{Qa\sin\alpha}{2} - \frac{\mu\omega^2 a^3 \sin\alpha\cos\alpha}{3} = 0.$$

W równaniu ostatniem mamy sumę momentów względem osi y; względem osi pozostałych momenty wszystkich sił są zerami.

Z ostatniego równania wynika, że

$$\omega^2 = \frac{3Q}{2\mu a^2 \cos\alpha} \qquad (1),$$

a zatem będzie

$$R_x = -\frac{3Q\tan\alpha}{4}, \quad R_y = 0, \quad R_z = Q.$$

Widać stąd, że reakcja leży w płaszczyźnie rysunku i tworzy z pionem kąt $-\operatorname{arctan}\left(\frac{3\tan\alpha}{4}\right)$.

Warto jest jeszcze zwrócić uwagę na równanie (1). Gdy $\alpha = 0$, to $\omega = \sqrt{\frac{3Q}{2\mu a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$, a zatem tylko przy większych szybkościach kątowych sztaba może być odchylona o kąt różny od zera.

Prz. 1. Dwie lekkie sztaby o długościach a i $2a$ są połączone sztywno w O pod kątem prostym i zaopatrzone na końcach w kule, ważące odpowiednio Q i $\frac{Q}{2}$. Sztaby mogą się obracać około O w płaszczyźnie pionowej i wirują ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, przechodzącej przez O, przyczem pierwsza tworzy z tą osią stały kąt. Wyznaczyć ten kąt. Odp. Szukany kąt czyni zadość równaniu $\frac{1}{\sin\vartheta} - \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{a\omega^2}{g}$.

Aby nie wprowadzać reakcji w O, należy wziąć momenty sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych względem O.

Prz. 2. W zwykłym kołowrocie promień koła $= a$, i promień wału $= b$. Na kole i na wale są nawinięte sznury, dźwigające odpowiednio ciężary P i Q. Wyznaczyć przyśpieszenie ciężaru P, uważając masę kołowrotu za znikomo małą. Odp. $\frac{a(aP - bQ)g}{a^2P + b^2Q}$.

Prz. 3. Planeta obraca się około swej osi z tak wielką szybkością kątową, że ciała na jej równiku pozornie nie mają ciężaru. Dowieść, że we wszystkich okolicach powierzchni planety piony przybierają kierunek równoległy do osi.

Prz. 4. Linja kolejowa idzie wzdłuż równoleżnika na szerokości ϑ. Dwa wagony, każdy o masie m, jadą w kierunkach odwrotnych z szybkością v. Wyznaczyć różnicę reakcji, które te wagony wywierają na szyny. Odp. $4m\omega v\cos\vartheta$, gdzie ω oznacza szybkość kątową ziemi.

Prz. 5. Wagon biegnie na łuku o promieniu r. Wysokość środka ciężkości nad szynami $= h$, i szerokość toru $= a$. Wyznaczyć największą możliwą szybkość wagonu. Odp. $\sqrt{\frac{gar}{h}}$.

Siła odwrotna do czynnej $\frac{Q}{g}\frac{v^2}{r}$, gdzie Q oznacza ciężar wagonu, a v szybkość, jest przyłożona w środku ciężkości. Siłami zewnętrznemi są Q i reakcje szyn. Rozkładamy reakcję szyny wewnętrznej na składową poziomą H i pionową N i bierzemy moment względem szyny zewnętrznej. Wypadnie, że $N = \frac{Q}{2a}\left(\frac{v^2h}{gr} - a\right)$.

Jeżeli $\frac{v^2h}{gr} < a$, to wagon się przewróci, bo szyna nie może wywierać reakcji, skierowanej na dół.

Prz. 6. Soczewka wahadła o masie m jest przywiązana sznurem o długości l do dolnego końca lekkiej pionowej sztaby, prowadzonej bez tarcia w kierunku pionowym. Do górnego końca sztaby jest przywiązany inny sznur, który przechodzi przez mały blok, i dźwiga na końcu ciężar o masie m. Wyznaczyć okres małych wahań takiego wahadła.

Stosując zasadę d'Alemberta oddzielnie do soczewki i przeciwwagi i rugując wielkości pomocnicze, otrzymamy równanie

$$l(1+\cos^2\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - l\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -2g\sin\vartheta.$$

Pierwsza całka tego równania będzie

$$l\omega^2(1+\cos^2\vartheta) = 4g(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

gdzie $2/\alpha$ oznacza amplitudę. Ponieważ chodzi o małe odchylenia, możemy przeto podstawić $\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ i $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Odrzuciwszy przytem po lewej stronie $-\vartheta^2 + \frac{\vartheta^4}{2}$ wobec 2, otrzymamy równanie, które się daje łatwo całkować. Szukany okres $= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; okres ten jest taki, jak gdyby koniec sznura był przyczepiony do punktu nieruchomego.

Prz. 7. Ciężką kulkę osadzono na lekkim pręcie o długości a, i pręt oparto drugim końcem w punkcie O zupełnie chropowatej płaszczyzny poziomej, przyczem tworzył on z pionem kąt $\alpha = 30^0$. Następnie pozostawiono układ samemu sobie. W jakiej odległości od O kulka upadnie na płaszczyznę?

Odp. $\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ruch układu dzieli się na dwa okresy; w pierwszym koniec pręta pozostaje w O i płaszczyzna wywiera nań reakcję R, w drugim kulka porusza się, jak punkt swobodny. Przypuśćmy, że w chwili t pierwszego okresu pręt tworzy z pionem kąt ϑ, i jego szybkość kątowa $= \omega$. Przy pomocy zasady d'Alemberta otrzymamy równania

$$R_x - ma\omega^2\sin\vartheta - ma\frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta = 0,$$

$$R_y - mg - ma\omega^2\cos\vartheta + ma\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta = 0,$$

$$ma^2\frac{d\omega}{dt} - mga\sin\vartheta = 0,$$

gdzie R_x i R_y oznaczają składowe poziomą i pionową reakcji R. Z trzeciego równania wyznaczymy $\frac{d\omega}{dt}$ i ω^2, a następnie z dwóch pierwszych R_x i R_y. Wypadnie, że okres pierwszy się kończy, gdy $\cos\vartheta = \frac{2\cos\alpha}{3}$.

Przykłady dotychczasowe należały jeszcze do dynamiki punktu; w dwóch następnych mamy do czynienia z ruchem obrotowym brył.

Prz. 8. Cylinder o masie $2nm$ może obracać się około osi poziomej. Na jego najwyższej tworzącej leży punkt materjalny o masie m, a współczynnik tarcia pomiędzy punktem i cylindrem $= f$. Odchylamy układ cokolwiek od położenia pierwotnego; o jaki kąt obróci się cylinder, zanim punkt m zacznie się zsuwać?

Ruch układu dzieli się na dwa okresy; w pierwszym punkt m pozostaje w spokoju względem cylindra, i tarcie nie jest całkowicie rozwinięte. Chwilę przejścia do drugiego okresu, w którym punkt jest w ruchu względnym, charakteryzuje ta okoliczność, że tarcie osiąga wartość graniczną, t. j. $F = fN$, gdzie F oznacza siłę tarcia, a N reakcję normalną cylindra na punkt.

Przypuśćmy, że w czasie t pierwszego okresu cylinder obrócił się o kąt ϑ i posiada szybkość kątową ω. Stosując zasadę d'Alemberta do punktu m, otrzymamy

$$F + ma\frac{d\omega}{dt} - mg\sin\vartheta = 0$$

$$N + ma\omega^2 - mg\cos\vartheta = 0.$$

Stosujemy następnie tę samą zasadę do całego układu, a mianowicie bierzemy momenty wszystkich sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych względem osi cylindra. Wypadnie

$$-\Sigma\mu r^2\frac{d\omega}{dt} - ma^2\frac{d\omega}{dt} + mga\sin\vartheta = 0,$$

W równaniu tem μ oznacza masę typowego elementu cylindra, r jego odległość od osi, a sumowanie rozciąga się na cały cylinder. Oczywiście $\Sigma\mu r^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\Sigma\mu r^2$; lecz $\Sigma\mu r^2$ jest to moment bezwładności cylindra, względem osi, a zatem $\Sigma\mu r^2 = Mk^2 = \frac{2nma^2}{2}$. Znajdziemy, że szukany kąt czyni zadość równaniu $n\sin\vartheta - f(n+3)\cos\vartheta + 2f = 0$.

Prz. 9. Prostokątna deska o masie M może się obracać około osi poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do dwóch boków; długość boku prostopadłego do osi $= 2a$. Gdy deska zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, położono na niej w odległości c od osi punkt materjalny o masie m; współczynnik tarcia punktu o deskę $= f$. Przy jakiem nachyleniu deski do poziomu punkt zacznie się zsuwać? Odp. $\arctan\frac{fMa^2}{Ma^2 + 9mc^2}$.

Prz. 10. Łańcuch o długości $2a\beta$ jest zawarty w gładkiej rurce, posiadającej kształt okręgu o promieniu a. Rurka ta wiruje około średnicy pionowej z szybkością kątową ω; wyznaczyć kąt, który promień, przechodzący przez środek łańcucha, tworzy z osią obrotu, gdy łańcuch pozostaje w spokoju względnym. Odp. $\vartheta = 0$, albo $\cos\vartheta = -\frac{g}{a\omega^2\cos\beta}$. Jeżeli $a\omega^2\cos\beta$ zawiera się pomiędzy $-g$ i g, to istnieje tylko jedno położenie równowagi względnej.

Prz. 11. Jednorodny łańcuch przechodzi przez dwa gładkie poziome kołki, położone na jednym poziomie. Ogniwa poruszają się z szybkością stałą, przenosząc się ze stosu, położonego pionowo pod lewym kołkiem o h niżej, do stosu, położonego pod prawym kołkiem o $h+b$ niżej, przyczem część łańcucha, zawarta pomiędzy kołkami, nie zmienia postaci. Jaką krzywą tworzy łańcuch pomiędzy kołkami, i jaka jest owa stała szybkość ogniw? Odp. Krzywa jest katenoidą, a szybkość wynosi $\sqrt{bg}$.

Niechaj S_0 oznacza naprężenie w najniższym punkcie A_0 krzywej, a S w jakimkolwiek punkcie A. Wyznaczamy wypadkową sił, odwrotnych do czynnych, działających na część $A_0A = s$. Na element ds działa siła normalna $\frac{\mu v^2 ds}{\rho}$ lub $\mu v^2 d\vartheta$, gdzie ρ oznacza promień krzywizny, μ masę jednostki długości, a ϑ kąt, który styczna tworzy z poziomem. Składowa pozioma szukanej siły $= \mu \int_0^\vartheta v^2 \sin\vartheta d\vartheta =$ $\mu v^2(1-\cos\vartheta)$, a składowa pionowa $\mu \int_0^\vartheta v^2 \cos\vartheta d\vartheta = \mu v^2 \sin\vartheta$. Równania równowagi będą

$$S_0 - \mu v^2 (1-\cos\vartheta) - S\cos\vartheta = 0$$
$$\mu g s + \mu v^2 \sin\vartheta - S\sin\vartheta = 0.$$

Rugując stąd S, otrzymamy

$$s = \frac{S_0 - \mu v^2}{\mu g} \tan\vartheta.$$

Równanie to dowodzi, że szukaną krzywą jest katenoida, której parametr $a = \frac{S_0 - \mu v^2}{\mu g}$ (par. 18, prz. 1).

Można jeszcze łatwo udowodnić, że lewy stos leży na kierownicy.

Prz. 12. Łańcuch o długości $a\alpha$ jest zawarty w gładkiej rurce, posiadającej kształt okręgu o promieniu a. Masa jednostki długości łańcucha $= \mu$, rurka jest ustawiona w płaszczyźnie pionowej, i koniec łańcucha jest umocowany w najwyższym punkcie A. Jakie będzie w pierwszej chwili naprężenie w punkcie B, gdy wyswobodzimy koniec A, jeżeli łuk AB widać ze środka pod kątem ϑ. Odp. $\mu a g \vartheta \left[\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} - \frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta}\right]$.

Prz. 13. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej umocowano w położeniu pionowem gładką obręcz o masie M. Na obręcz jest nawleczony pierścionek o masie m, przywiązany nicią do punktu najwyższego; nić tę widać ze środka pod kątem α. W pewnej chwili jednocześnie wyswobodzono obręcz i przecięto nić. W jakim stosunku stoi reakcja obręczy na pierścień zaraz po wyswobodzeniu do reakcji przed wyswobodzeniem. Odp. $\frac{M\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$.

109. Równania ruchu. Niech będzie znowu jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił P_1, P_2 .... Odbierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne elementu m przez x, y, z. Rzut siły czynnej elementu m na oś x jest równy $m\frac{d^2x}{dt^2}$, a siły odwrotnej do czynnej $-m\frac{d^2x}{dt^2}$. Suma takich rzutów wyrazi się przez $-\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}$, a suma rzutów sił zewnętrznych na tę samą oś przez ΣP_x. Suma rzutów sił odwrotnych do czynnych i zewnętrznych według zasady d'Alemberta musi być zerem, zatem

$$-\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}+\Sigma P_x=0$$

czyli

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}&=\Sigma P_x\\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}&=\Sigma P_y\\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}&=\Sigma P_z\end{aligned}\right\}\qquad(1).$$

również

Suma momentów sił odwrotnych do czynnych i sił zewnętrznych musi być także zerem. Znajdziemy z łatwością według par. 12, że względem osi z pierwsza wynosi $-\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, a druga $\Sigma(xP_y-yP_x)$, a zatem

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\Sigma(xP_y-yP_x)\\ \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\Sigma(yP_z-zP_y)\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\Sigma(zP_x-xP_z)\end{aligned}\right\}\qquad(2).$$

Obydwie grupy równań są ważne dla wszelkich ciał, sztywnych i niesztywnych, ale w przypadku ciała sztywnego te sześć równań określają ruch całkowicie, jeżeli są dane warunki początkowe. Przekonamy się zaraz, że tak jest istotnie.

Obierzmy w ciele sztywnem, którego ruch mamy zbadać, prostokątny układ współrzędnych ξ, η, ζ, związany stale z tem ciałem i poruszający się wraz z niem. Jeżeli np. ciało jest sześcianem, to układ taki mogą tworzyć trzy krawędzie, wychodzące ze wspólnego wierzchołka. Gdy dane jest położenie tego układu $\xi\eta\zeta$ w układzie nieruchowym xyz, to oczywiście położenie ciała jest całkowicie określone. Ileż do tego potrzeba wielkości niezależnych?

Przedewszystkiem potrzebne są współrzędne początku układu $\xi\eta\zeta$ w układzie xyz; oznaczmy je przez x_0, y_0, z_0. Prócz tego potrzeba mieć kąty kierunkowe osi ξ, η i ζ. Kątów tych jest dziewięć, ale nie są one niezależne jedne od drugich. Zachodzą pomiędzy niemi trzy związki typu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

oraz trzy związki typu

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0\,;$$

te ostatnie warunkują prostokątność układu. Przy pomocy tych sześciu związków można sześć z owych kątów kierunkowych wyrazić w funkcjach trzech pozostałych. Wypada więc, że są niezbędne tylko trzy kąty kierunkowe, które wraz ze współrzędnemi x_0, y_0, z_0 całkowicie określają położenie układu $\xi\eta\zeta$. Te sześć wielkości są niezależne jedne od drugich i nazywają się *współrzędnemi ciała sztywnego*.

Współrzędne każdego elementu ciała w układzie $\xi\eta\zeta$ nie zmieniają się podczas ruchu, i można je uważać za znane, a mając je, możemy wyznaczyć współrzędne tego elementu w układzie xyz w funkcjach owych sześciu współrzędnych ciała. Gdy następnie wstawimy te funkcje do równań (1) i (2), to otrzymamy sześć równań, zawierających siedm wielkości zmiennych, a mianowicie sześć współrzędnych ciała oraz zmienną t. Równania te pozwalają wyrazić każdą z współrzędnych ciała w funkcji t, a zatem określają ruch ciała.

Opisany sposób postępowania byłby wysoce niedogodny, i dla tego też równań (1) i (2) nie używamy do rozwiązywania poszczególnych zagadnień dynamicznych. Są one ważne tylko pod tym względem, że można z nich wyciągnąć pewne wnioski ogólne o ruchu ciał, jak zobaczymy w paragrafach najbliższych.

110. Ruch środka masy. Niech będzie jakiekolwiek ciało, sztywne lub niesztywne, albo nawet układ złożony z większej liczby ciał. Obierzmy prostokątny nieruchomy układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne środka ciężkości ciała, albo układu, przez x_0, y_0, z_0. Wiemy, że $Mx_0 = \Sigma mx$, gdzie M oznacza masę całkowitą.

Jeżeli ciało się porusza, to x_0 oraz wszystkie x są zmienne, natomiast M i wszystkie m są stałe. Różniczkując to równanie, otrzymamy

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},$$

oraz dwa analogiczne związki dla y_0 i z_0.

Przy pomocy tych związków możemy równania (1) paragrafu poprzedzającego przekształcić tak:

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2}=\Sigma P_x, \quad M\frac{d^2y_0}{dt^2}=\Sigma P_y, \quad M\frac{d^2z_0}{dt^2}=\Sigma P_z.$$

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została skoncentrowana w środku ciężkości i siły P_1, P_2..., t. j. wszystkie siły zewnętrzne, zostały przeniesione równolegle do tego punktu. Trzy ostatnie równania są właśnie równaniami ruchu takiego wyobrażalnego punktu. Możemy więc powiedzieć, że *środek masy ciała, albo układu, porusza się tak, jak gdyby cała masa była w nim skoncentrowana i wszystkie siły zewnętrzne przeniesione doń równolegle.*

Twierdzenie to nazywa się zwykle *zasadą ruchu środka masy* albo *środka ciężkości.* Wynika z niego bezpośrednio, że siły wewnętrzne układu nie wywierają wpływu na ruch środka masy, jakkolwiek mogą wywołać ruch poszczególnych części układu względem tego środka. Podajemy tu parę zwykle przytaczanych ilustracyj.

Przypuśćmy, że pocisk wybuchowy został wyrzucony w próżni. Jego środek ciężkości porusza się tak, jak gdyby był swobodnym punktem materjalnym, a więc zatacza parabolę. Jeżeli podczas tego ruchu nastąpi eksplozja, to odłamki rozlecą się na wszystkie strony, ale wciąż będzie istniał środek ciężkości wszystkich odłamków. Punkt ten będzie w dalszym ciągu obiegał parabolę, gdyż siły, wywołujące eksplozję, jako wewnętrzne, nie wywarły wpływu na ruch jego. Ruch środka ciężkości ulegnie zmianie dopiero wtedy, gdy pierwszy odłamek upadnie na ziemię; zmiana ta będzie następstwem działania nowej siły zewnętrznej, a mianowicie reakcji gruntu.

Wyobraźmy sobie, że człowiek znalazł się w przestrzeni, w której żadne siły nań nie działają. Może on poruszać kończynami i głową, ale siły, wywołujące te ruchy, są siłami wewnętrznemi ciała, a zatem nie będzie on w stanie przesunąć swego środka ciężkości.

Gdy istota żyjąca pragnie nadać przyśpieszenie swemu środkowi ciężkości, to wywiera siłę na jedno z ciał otaczających; reakcja tego ciała wywołuje pożądane przyśpieszenie środka ciężkości.

Przypuśćmy, że człowiek, stojący na podłodze poziomej, chce uczynić krok naprzód. W tym celu wysuwa naprzód prawą nogę. Gdyby podłoga była doskonale gładka, to środek ciękości musiałby pozostać w spokoju, gdyż niebyłoby tu żadnej zewnętrznej siły poziomej; a więc lewa noga przesunęłaby się w tył. Na podłodze chropowatej lewa noga również usiłuje przesunąć się w tył, t. j. wywiera na podłogę siłę poziomą, czyli siłę tarcia, a więc skierowaną w tył. Podłoga działa na stopę z siłą równą i odwrotną, skierowaną naprzód; jest to siła zewnętrzna, i pod jej działaniem środek ciężkości otrzymuje przyśpieszenie.

Ptak podczas lotu, poruszając skrzydłami, wywiera siły na otaczające powietrze, a reakcja powietrza nadaje przyśpieszenie jego środkowi ciężkości. W podobny sposób ryba porusza się w wodzie.

Para sił, działająca na ciało sztywne, nie może nadać przyśpieszenia środkowi ciężkości tego ciała. Jeżeli zatem na ciało żadne inne siły nie działają, to wynikiem będzie ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek ciężkości, albo raczej ruch kulisty około tego punktu.

Magnetyzm ziemski wywiera na magnes parę sił, a zatem magnes, umieszczony w magnetycznem polu ziemskiem, otrzymuje ruch obrotowy.

Prz. 1. Człowiek stoi na zupełnie gładkim stole; wskazać, w jaki sposób mógłby on zejść na podłogę.

Prz. 2. Przez gładki poziomy kołek przechodzi sznur, na którego końcach wiszą masy M i m. Wyznaczyć przyśpieszenie środka ciężkości tych mas, a następnie reakcję, którą kołek wywiera na sznur. Odp. Reakcja $= \frac{4Mmg}{M+m}$.

Prz. 3. Na zupełnie gładkiej podłodze ustawiono w płaszczyźnie pionowej półkolistą tarczę o promieniu a. Tarcza opiera się o podłogę punktem P obwodu, a promień przechodzący przez P, tworzy z podstawą kąt α. Gdzie się znajdzie w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy tarcza zostanie wyswobodzona? Odp. Na pionie, przechodzącym przez P, w odległości $\frac{(3\pi - 4\sin\alpha)a}{3\pi}$.

Prz. 4. Płaska płyta wisi w płaszczyźnie pionowej na dwóch sznurach pionowych. Gdzie będzie leżał w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy jeden ze sznurów się zerwie.

Prz. 5. Nadajemy prostej sztabie położenie pochyłe, opierając jeden koniec o gładką podłogę. Okazać, że gdy wyswobodzimy sztabę, to torem drugiego końca będzie elipsa.

Prz. 6. Trzy jednakowe punkty materjalne A, B, C są połączone nierozciągalną nicią tak, że $AB = BC$. Z początku punkt A jest umocowany, a dwa pozostałe krążą koło niego, i nić jest wyprostowana. W jakim stosunku zmienią się naprężenia obydwóch części nici, gdy wyswobodzimy punkt A? Odp. W AB naprężenie spadnie do $^1/_3$, a w BC do $^1/_2$.

111. Ruch ciała sztywnego. Zastosujemy wyniki, osiągnięte w ostatnich paragrafach, do ciała sztywnego. Ruch jego rozłożymy na ruch postępowy, zgodny z ruchem środka ciężkości, i na ruch kulisty, którego środkiem ma być środek ciężkości. Innemi słowy będziemy rozważali osobno ruch środka ciężkości i ruch ciała względem środka ciężkości.

W tym celu obierzemy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy xyz i drugi ruchomy $\xi\eta\zeta$. Początkiem drugiego niech będzie środek ciężkości, i układ ten ma brać udział jedynie w ruchu postępowym ciała; jeżeli zatem obierzemy w początku rachuby czasu osi ξ, η, ζ równoległe do x, y, z, to pozostaną one równoległemi i nadal.

Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości w układzie nieruchomym, a przez x, y, z i ξ, η, ζ współrzędne typowego elementu m ciała w układach nieruchomym i ruchomym. W takim razie będzie

$$x = \xi + x_0\,, \quad y = \eta + y_0\,, \quad z = \zeta + z_0 \qquad (1).$$

Składowe szybkości względnej elementu m w kierunkach osi będą $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, szybkości unoszenia $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ i szybkości bezwzględnej $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Również przyśpieszenie względne posiada składowe $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, przyśpieszenie unoszenia $\frac{d^2x_0}{dt^2}$, $\frac{d^2y_0}{dt^2}$, $\frac{d^2z_0}{dt^2}$, a przyśpieszenie bezwzględne $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, gdyż ruch unoszenia jest postępowy.

Przekształcimy prócz tego układ sił zewnętrznych P_1, $P_2 \ldots$, działających na ciało. Mianowicie obierzemy środek ciężkości za punkt redukcji i zredukujemy wszystkie siły do jednej siły wypadkowej, przyłożonej w środku ciężkości, i do jednej pary. Siłę oznaczymy przez R, a moment pary przez N. Ten ostatni jest równy geometrycznej sumie momentów sił P_1, $P_2 \ldots$ względem środka ciężkości *).

*) Celem dokonania redukcji przykładamy w środku ciężkości siły P i $-P$ równoległe do danej siły zewnętrznej P. Z nich P będzie składową wypadkowej R, a $-P$ wraz z daną siłą P tworzy parę, składową pary N. Oczywiście moment tej pary P, $-P$ jest to to samo, co moment danej siły P względem środka ciężkości, a zatem N będzie sumą geometryczną momentów sił P_1, P_2 .. względem tego punktu.

Sprawę ruchu postępowego rozstrzyga całkowicie zasada ruchu środka ciężkości, którą poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym. Para N nie wywiera tu żadnego wpływu, a zatem będzie

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = R_x, \quad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = R_y, \quad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = R_z \qquad (2).$$

Chodzi teraz o ruch względem środka ciężkości. Łatwo jest zrozumieć, że do określenia jego potrzebne są trzy nowe równania. Wiemy mianowicie, że sześć równań określa całkowicie ruch ciała sztywnego; trzy równania ostatnie są niezbędne do określenia ruchu środka ciężkości, a więc do określenia ruchu względnego pozostają trzy. Otrzymamy je przekształcając odpowiednio równania (2) z par. 109.

W tym celu zastąpimy w nich x przez $\xi + x_0$ i t. d. stosownie do (1) w par. niniejszym. Wówczas lewa strona równania pierwszego przybierze postać taką:

$$\Sigma m\left[(\xi + x_0)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2y_0}{dt^2}\right) - (\eta + y_0)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2x_0}{dt^2}\right)\right].$$

Gdy wykonamy wskazane działania i przed każdym wyrazem napiszemy znak sumy, to otrzymamy ośm wyrazów. Przedewszystkiem będą dwa wyrazy, zawierające same współrzędne ξ, η, ζ; łącząc je, otrzymamy

$$\Sigma m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right).$$

Dalej będą cztery wyrazy, zawierające współrzędne ξ, η, ζ łącznie z x_0, y_0, z_0. Łatwo okazać, że każdy z nich jest zerem. Tak np. $\Sigma m\xi\frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2}\Sigma m\xi = 0$, gdyż $\Sigma m\xi$ jest momentem statycznym względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości. Również $\Sigma m x_0\frac{d^2\eta}{dt^2} = x_0\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$, gdyż $\Sigma m\eta = 0$, i t. d.

Wreszcie będą jeszcze dwa wyrazy, zawierające tylko współrzędne x_0, y_0, z_0, a mianowicie

$$\Sigma m x_0\frac{d^2y_0}{dt^2} - \Sigma m y_0\frac{d^2x_0}{dt^2} = x_0 M\frac{d^2y_0}{dt^2} - y_0 M\frac{d^2x_0}{dt^2};$$

uwzględniając (2) w par. niniejszym, przekształcimy te wyrazy na

$$x_0R_y - y_0R_x.$$

Po prawej stronie równania należy napisać moment siły R względem osi z oraz rzut momentu N na oś z albo oś ζ. Wypadnie

$$x_0 R_y - y_0 R_x + N_\zeta .$$

Gdy przeprowadzimy analogiczne przekształcenia również w dwóch równaniach pozostałych, to otrzymamy trzy równania następujące:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) &= N_\zeta, \\ \Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) &= N_\xi, \\ \Sigma m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) &= N_\eta. \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Są to szukane równania ruchu kulistego.

Możemy teraz wypowiedzieć dwa następujące twierdzenia, z których pierwsze jest tylko powtórzeniem zasady ruchu środka ciężkości:

1) Ruch postępowy ciała sztywnego jest niezależny od ruchu kulistego; nie zależy on od pary wypadkowej N, lecz tylko od siły wypadkowej R.

2) Ponieważ równania (3) nie zawierają wcale szybkości ani przyśpieszeń środka ciężkości, przeto ruch kulisty jest niezależny od ruchu postępowego. Prócz tego z równań tych wynika, że na ruch kulisty nie wywiera wpływu siła wypadkowa R, lecz tylko para wypadkowa N, albo momenty sił zewnętrznych względem środka ciężkości.

Twierdzenia te zawierają tak zw. *zasadę niezależności ruchów postępowego i kulistego.* W myśl tej zasady zagadnienie ruchu ciała sztywnego rozpada się na dwa zagadnienia odrębne i od siebie niezależne; jedno z nich dotyczy ruchu postępowego, drugie ruchu kulistego. Rozwiązując pierwsze, możemy uważać, że ruch kulisty nie istnieje, t. j. że całkowity ruch ciała jest postępowy, rozwiązując drugie, możemy nie zwracać uwagi na ruch postępowy, albo uważać, że środek ciężkości jest nieruchomy. Pierwsze zagadnienie stanowi przedmiot dynamiki punktu, drugie dynamiki ciał sztywnych.

112. Siła żywa ciała sztywnego. Nazywamy siłą żywą ciała, albo układu ciał, sumę sił żywych wszystkich elementów jego czyli $\sum\frac{mv^2}{2}$, gdzie m oznacza masę elementu, a v jego szybkość. Wiemy już (par. 91), że przyrost elementarny tej siły żywej jest równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na ciało, zarówno zewnętrznych, jak i wewnętrznych.

W ciele sztywnem odległości pomiędzy elementami się nie zmieniają, a w takim razie, jak widzieliśmy we wspomnianym paragrafie, suma prac sił wewnętrznych jest zerem, i przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych sił zewnętrznych. Z tego wynika, że i przyrost całkowity siły żywej w pewnym czasie jest równy sumie prac całkowitych sił zewnętrznych.

Istnieją pewne proste wzory na siłę żywą ciała sztywnego, które w dużym stopniu ułatwiają stosowanie zasady sił żywych. Jeżeli ruch ciała jest postępowy, to szybkości wszystkich elementów są równe i wówczas

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m=\frac{Mv^2}{2} \qquad (1),$$

gdzie M oznacza masę całego ciała. Tak więc w przypadku ruchu postępowego siła żywa ciała wyznacza się tak, jak gdyby ciało było punktem materjalnym.

Przypuśćmy teraz, że ruch ciała jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową ω około osi z. Jeżeli r oznacza odległość elementu m od z, to $v=r\omega$, i

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\sum\frac{mr^2\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2=\frac{I\omega^2}{2} \qquad (2);$$

I oznacza tu moment bezwładności ciała względem osi z. Ponieważ $I=Mk^2$, gdzie k jest ramieniem bezwładności, można przeto nadać także ostatniemu wyrażeniu postać $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$.

Nieraz bywa użyteczne jeszcze inne wyrażenie siły żywej w ruchu obrotowym. Obierzmy na osi z dowolny punkt O. Dajmy na to, że osi główne punktu O tworzą z z kąty α, β, γ, i że momenty bezwładności ciała względem tych osi są A, B, C. W takim razie $I=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma$ (par. 103), a zatem siła żywa będzie

$$\frac{A\omega^2\cos^2\alpha+B\omega^2\cos^2\beta+C\omega^2\cos^2\gamma}{2}.$$

Lecz $\omega \cos \alpha$, $\omega \cos \beta$, $\omega \cos \gamma$ są to rzuty wektora ω na osi główne punktu O, albo składowe w kierunkach tych osi. Oznaczając te składowe przez ω_x, ω_y, ω_z, znajdziemy, że

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2}{2}.$$

Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym ciało sztywne posiada ruch jakikolwiek; znaczy to, że ruch jego jest śrubowy. Osią tego ruchu niech będzie w danej chwili prosta z, szybkość postępową oznaczymy przez u, a kątową przez ω. Jeżeli odległość elementu m od z jest równa r, to $v^2 = u^2 + r^2\omega^2$, i

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 = \frac{Mu^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2},$$

gdzie k oznacza ramię bezwładności względem osi z.

Ponieważ w zjawiskach dynamicznych szczególną rolę odgrywa środek masy, dobrze więc będzie zamiast u wprowadzić szybkość środka masy. Niech r_0 oznacza jego odległość od z, v_0 szybkość, a k_0 ramię bezwładności ciała względem osi z_0, przechodzącej przez ten środek i równoległej do z. W takim razie $k^2 = r_0^2 + k_0^2$, i wyrażenie powyższe przekształci się na $\frac{M}{2}(u^2 + r_0^2\omega^2 + k_0^2\omega^2)$.

Lecz $u^2 + r_0^2\omega^2 = v_0^2$, zatem będzie

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{Mk_0^2\omega^2}{2} \qquad (4).$$

Widzimy, że siła żywa składa się z dwóch części; pierwsza pochodzi z ruchu postępowego z szybkością środka ciężkości, a druga z ruchu kulistego około środka ciężkości.

Prz. Krążek toczy się na płaszczyźnie bez poślizgu, i jego całkowita siła żywa $= L$. Wyznaczyć części siły żywej, pochodzące z ruchów postępowego i obrotowego. Odp. $\frac{2L}{3}$ i $\frac{L}{3}$.

113. Przykłady. Okażemy na paru przykładach użyteczność zasady sił żywych w dynamice ciała sztywnego.

I. Sztaba o długości $2a$ może się obracać w płaszczyźnie pionowej około osi poziomej, przechodzącej przez koniec sztaby. Nadajemy sztabie położenie poziome i następnie pozostawiamy ją samej sobie. Wyznaczyć szybkość kątową sztaby w funkcji jej nachylenia do poziomu.

Przypuśćmy, że sztaba posiada szybkość kątową ω, gdy tworzy z poziomem kąt ϑ. Całkowity przyrost siły żywej wynosi $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$, gdzie M oznacza masę sztaby, a k ramię bezwładności względem osi obrotu. Na sztabę działa tylko reakcja osi i siła ciążenia. Pierwsza nie pracuje, a całkowita praca drugiej $= Mga \sin\vartheta$, gdyż środek ciężkości sztaby opadł o $a \sin\vartheta$. Zatem

$$\frac{Mk^2\omega^2}{2} = Mga \sin\vartheta.$$

Ponieważ $k^2 = \frac{4a^2}{3}$ (par. 100), przeto ostatecznie wypadnie, że

$$\omega^2 = \frac{3g \sin\vartheta}{2a}.$$

Przyjęliśmy tu, że praca siły ciążenia, działającej na ciało, jest równa iloczynowi z ciężaru ciała przez obniżenie środka ciężkości. Twierdzenie to jest słuszne zarówno dla ciał sztywnych, jak i niesztywnych, i wynika wprost stąd, że ciążar ciała jest wypadkową ciążarów wszystkich jego elementów, ale można je łatwo dowieść bezpośrednio.

Skierujmy oś z prostokątnego układu współrzędnych pionowo na dół i przypuśćmy, że element m jakiegokolwiek ciała przeszedł z położenia (xyz) do $(x'y'z')$. Praca siły ciążenia, działającej na ten element, będzie $mg(z'-z)$, a praca wszystkich sił takich jest równa $\Sigma mg(z'-z) = g(\Sigma mz' - \Sigma mz)$. Jeżeli środek ciężkości przeszedł z $(x_0y_0z_0)$ do $(x_0'y_0'z_0')$ to $\Sigma mz = Mz_0$ i $\Sigma mz' = Mz_0'$, a zatem wyrażenie powyższe przekształci się na $Mg(z_0'-z)$, co było do dowiedzenia.

II. Na zupełnie chropowatej płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem α, kładziemy kulę jednorodną i pozwalamy jej staczać się swobodnie. Wyznaczyć szybkość środka kuli w funkcji drogi.

Przypuśćmy, że środek przebiegł drogę x i posiada obecnie szybkość v. Siła żywa kuli wynosi $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2}$, gdzie ω oznacza szybkość kątową około średnicy poziomej, a k ramię bezwładności względem średnicy. Na kulę działa siła ciążenia, reakcja normalna płaszczyzny i siła tarcia. Praca pierwszej wynosi $Mgx \sin\alpha$; dwie siły pozostałe są wciąż przyłożone w punkcie kuli, którego szybkość jest zerem, a zatem ich prace są równe zeru. Wypadnie przeto

$$\frac{Mv^2}{2}+\frac{Mk^2\omega^2}{2}=Mgx\sin\alpha.$$

Kula się toczy bez poślizgu, z czego wynika, że $\omega=\frac{v}{a}$, gdzie a oznacza promień. Uwzględniając prócz tego, że $k^2=\frac{2a^2}{5}$, znajdziemy

$$v^2=\frac{10gx\sin\alpha}{7}.$$

Gdyby płaszczyzna była zupełnie gładka, i kula się zsuwała, to kwadrat szybkości byłby równy $2gx\sin\alpha$. Widzimy, że w przypadku rozważanym ruch jest wolniejszy.

Prz. 1. Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy kulą i płaszczyzną w przykładzie ostatnim, aby nie było poślizgu?

W myśl zasady ruchu środka ciężkości możemy uważać środek kuli za punkt materjalny o masie M, na który działają trzy wyżej wymienione siły. Zatem będzie $M\frac{dv}{dt}=Mg\sin\alpha - F$, gdzie F oznacza siłę tarcia. Z tego otrzymamy $F=\frac{2Mg\sin\alpha}{7}$. Taka powinna być siła tarcia, aby nie było poślizgu. W kierunku prostopadłym do płaszczyzny środek ciężkości nie posiada przyśpieszenia, a zatem reakcja normalna $N=Mg\cos\alpha$. Najmniejszy możliwy współczynnik tarcia $f=\frac{F}{N}=\frac{2\tan\alpha}{7}$. Jeżeli współczynnik tarcia przewyższa tę wartość, to kula się toczy przy tarciu mniejszem od granicznego.

Jeżeli płaszczyzna jest pozioma, to $\sin\alpha=0$ i $F=0$. Znaczy to, że podczas toczenia się kuli sztywnej na płaszczyźnie poziomej siła tarcia nie występuje. Jeżeli kula w pierwszej chwili się toczy, i żadne siły prócz ciążenia i reakcji płaszczyzny na nią nie działają, to będzie ona toczyła się czas nieograniczony z szybkością stałą.

Prz. 2. Mamy dwie kule o jednakowych średnicach i jednakowych wagach. Jedna z nich jest złota dęta, a druga srebrna pozłacana. Jak odróżnić złotą od srebrnej?

Prz. 3. Kula surowcowa o promieniu 50 cm robi 120 obrotów na minutę. Ile obrotów na minutę będzie robiła kula, gdy utraci 2452 kilogramometry siły żywej? Odp. 60. (Ciężar właściwy surowca = 7,8).

Prz. 4. Ile trzeba wyłożyć pracy, aby kamień młyński, ważący 820 kg, o średnicy 1,4 m wprawić w ruch obrotowy o 108 obr. na minutę, nie rachując strat na tarcie? Odp. 1300 kilogramometrów.

Prz. 5. Wydrążony żelazny cylinder (cięż. wł. = 7,8) o osi poziomej posiada promień zewnętrzny $R=20$ cm, promień wewnętrzny $r=10$ cm i długość $a=3$ m. Na cylinder jest nawinięty sznur, na którym wisi ciężar $Q=10$ kg.

Jaką szybkość kątową powinien posiadać cylinder, aby jeszcze podnieść ciężar o $h = 5$ m wyżej? Odp. 4,19.

Prz. 6. Cylinder o promieniu r, wirujący około osi, postawiono na płaszczyźnie poziomej. W chwili, gdy podstawa dotknęła płaszczyzny, cylinder robił n obrotów na min., a współczynnik tarcia $= f$. Ile jeszcze obrotów zrobi cylinder? Odp. $\frac{\pi r n^2}{4800 f g}$.

Prz. 7. Sztaba, wirująca na gładkiej płaszczyźnie poziomej około jednego końca, osadzonego na osi, z szybkością kątową ω, pękła w samym środku. Jaki był ruch dalszy każdej części?

Prz. 8. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej położono dwie jednakowe kulki, połączone lekkim prętem; następnie jedną z nich uderzono w kierunku prostopadłym do pręta. Wyznaczyć tory kulek. Odp. Cykloidy.

Prz. 9. Cienka gładka rurka o długości $2a$ i masie m jest osadzona na poziomej osi, przechodzącej przez środek i prostopadłej do osi rurki. Gdy rurka była w spokoju w położeniu poziomem, na przedłużeniu jej osi ustawiono pręt o długości $2a_1$ i masie m_1. Następnie nadano prętowi szybkość v w kierunku osi rurki, skutkiem czego zaczął on wchodzić w rurkę, i środek jego zatrzymał się, doszedłszy do środka rurki. Jaka była w owej chwili szybkość kątowa układu, złożonego z rurki i pręta? Odp. $v\sqrt{\frac{3m_1}{ma^2 + m_1 a_1^2}}$.

Prz. 10. Zakładamy, że największa siła, którą może wywrzeć mięsień zwierzęcia, jest proporcjonalna do przekroju mięśnia, i że ciężar zwierzęcia jest proporcjonalny do objętości. Dowieść, że największa wysokość, na którą może podskoczyć zwierzę, jest dla zwierząt, posiadających podobne kształty, lecz różne wymiary, jednakowa. Przez wysokość podskoku rozumieć należy drogę, którą przebywa w kierunku pionowym środek ciężkości, poczynając od chwili, w której zwierzę przestało stykać się z ziemią.

Prz. 11. Jednorodna laska AB o długości $2a$ jest zawieszona swobodnie za koniec A na takiej wysokości, że koniec B znajduje się nad samą ziemią. Nadajemy lasce pewną szybkość kątową, a gdy dojdzie do położenia poziomego, wyswobadzamy koniec A. Jaka powinna być ta początkowa szybkość, aby laska, spadając, utkwiła końcem B w ziemi. Odp. Jeżeli laska ma utkwić w ziemi po jednym obrocie, to kwadrat szybkości szukanej $= \frac{3g(3\pi^2 + 6\pi + 4)}{4a(3\pi + 2)}$.

Prz. 12. Pozioma sztaba o długości a i masie M jest osadzona w jednym z końców na osi pionowej. Sztabie nadano szybkość kątową ω_0, i w dalszym ciągu działa na nią jedynie opór powietrza, a mianowicie na element dx opór ten wynosi Adx(szybkość)^2. Wyznaczyć szybkość sztaby w chwili t. Odp. $\frac{4M\omega_0}{4M + 3Aa^2\omega_0 t}$.

Prz. 13. Sztaba jednorodna i gładka o długości a obracała się z szybkością kątową ω_0 około jednego ze swych końców na gładkiej płaszczyźnie poziomej. W pewnej chwili przed sztabą, bardzo blizko nieruchomego końca, położono punkt materjalny, którego masa jest równa masie sztaby. Jaką szybkość osiągnie punkt, doszedłszy do drugiego końca sztaby? Odp. $\frac{a\omega_0\sqrt{5}}{4}$.

Obieramy początkowe położenie sztaby za oś biegunową, a jej koniec nieruchomy za biegun. Ponieważ na punkt w kierunku promienia wodzącego żadna siła nie działa, przeto $\frac{d^2r}{dt^2} = r\omega^2$, gdzie r oznacza promień wodzący punktu, a ω szybkość kątową sztaby w chwili t. Gdy prócz tego wyrazimy, że elementarny przyrost siły żywej układu jest zerem, i wyrugujemy $\frac{d^2r}{dt^2}$, to otrzymamy proste równanie pierwszego rzędu.

Prz. 14. Sztabie trapezu gimnastycznego nadano szybkość kątową około osi pionowej, przechodzącej przez środek, i sztaba wzniosła się aż do poziomu punktów zawieszenia. Wyznaczyć naprężenie każdego sznura w pierwszej chwili po puszczeniu w ruch. Odp. Jest ono siedm razy większe niż w stanie spoczynku. Trzeba naprzód wyznaczyć początkowe przyśpieszenie środka sztaby.

Prz. 15. Cztery jednakowe sztaby o długości $2a$, połączone przegubami, tworzą kwadrat $ABCD$, zawieszony za wierzchołek A. Przekątnia AC jest pionowa, a wierzchołek C utrzymujemy w spokoju. Wyznaczyć szybkość kątową, którą przybiorą sztaby po wyswobodzeniu wierzchołka C, w funkcji nachylenia ich do pionu. Odp. $\omega^2 = \frac{3g(\sqrt{2}\cos\vartheta - 1)}{a(1+3\sin^2\vartheta)\sqrt{2}}$, gdzie ϑ oznacza nachylenie.

114. Ilość ruchu. Każde ciało, albo układ ciał, możemy uważać za układ punktów materjalnych, a zatem wszystkie twierdzenia, dotyczące wektora G, które poznaliśmy w par. 90, są słuszne ogólnie. Pozostaje jedynie okazać, jak wyznacza się ten wektor.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, poruszające się w jakikolwiek sposób. Obieramy dowolny punkt O za środek redukcji, a zarazem za początek prostokątnego układu współrzędnych xyz. Szukany wektor G rozkładamy z góry na trzy składowe G_x, G_y, G_z w kierunkach osi. Oczywiście składowa G_x jest równa sumie ilości ruchu wszystkich elementów ciała w kierunku osi x, czyli

$$G_x = \Sigma m \frac{dx}{dt}.$$

Oznaczmy masę ciała przez M a współrzędne środka ciężkości przez x_0, y_0, z_0. W takim razie $\Sigma mx = Mx_0$. Uwzględniając ten związek, przekształcimy powyższe równanie oraz dwa analogiczne na

$$G_x = M\frac{dx_0}{dt}, \quad G_y = M\frac{dy_0}{dt}, \quad G_z = M\frac{dz_0}{dt} \qquad (1).$$

Tak więc przy wyznaczaniu wektora G możemy uważać, że cała masa ciała, lub układu, jest skoncentrowana w środku ciężkości.

Okażemy na przykładzie zastosowanie tego twierdzenia. Wyznaczymy mianowicie reakcję, jaką w przykładzie I-ym par. poprzedzającego oś wywiera na sztabę. Rozłożymy tę reakcję na składowe R_1 i R_2 w kierunku sztaby i w kierunku prostopadłym. Za początek wektora G obierzemy punkt O, w którym sztaba łączy się z osią. Wektor ten jest równoległy do szybkości środka ciężkości, czyli prostopadły do sztaby; przypuśćmy, że wyraża go

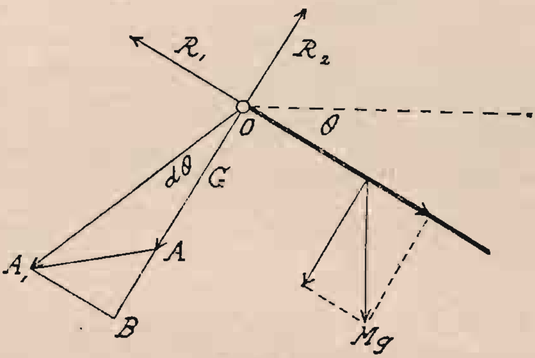

Fig. 79.

odcinek OA. W czasie dt sztaba obróci się o kąt $d\vartheta$, i wektor G przybierze wartość OA_1, t. j. otrzyma przyrost elementarny AA_1. Przyrost ten rozkładamy stosownie do par. 52 na dwie składowe AB i BA_1 w kierunku G i w kierunku prostopadłym. Pierwsza jest równa dG, a druga $Gd\vartheta$. Pierwszą wytworzyła reakcja R_2 i składowa $Mg\cos\vartheta$ siły ciążenia, drugą reakcja R_1 i $Mg\sin\vartheta$, a zatem będzie

$$dG = (Mg\cos\vartheta - R_2)dt,$$
$$Gd\vartheta = (-Mg\sin\vartheta + R_1)dt.$$

Lecz $G = Ma\omega$ i $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, a zatem równania powyższe przekształcą się na

$$\left.\begin{aligned} Ma\frac{d\omega}{dt} &= Mg\cos\vartheta - R_2, \\ Ma\omega^2 &= -Mg\sin\vartheta + R_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2).$$

Wprowadziwszy wartość ω z par. poprzedzającego, znajdziemy, że $R_1 = \frac{5Mg\sin\vartheta}{2}$, $R_2 = \frac{Mg\cos\vartheta}{4}$.

Wypada zwrócić uwagę, że równania (2) wynikają bezpośrednio z zasady ruchu środka ciężkości, i wogóle zasada ilości ruchu, o ile to dotyczy wektora G, różni się od tamtej jedynie pod względem formy.

Prz. 1. Okrągła tarcza, ważąca Q, jest osadzona w punkcie C obwodu na osi poziomej, prostopadłej do płaszczyzny tarczy. Tarcza wyruszyła z położenia, w którem średnica, przechodząca przez C, stała pionowo nad tym punktem. Wyznaczyć reakcję osi po obrocie o 90° i o 180°. Odp. $\frac{\sqrt{17}Q}{3}$ i $\frac{11Q}{3}$.

Prz. 2. Szklany sześcian o masie M zawiera kulistą próżną przestrzeń o promieniu a, i w tej przestrzeni mieści się punkt materjalny o masie m. Sześcian stoi na gładkiej płaszczyźnie poziomej; jaką szybkość początkową należy mu nadać przez popchnięcie, aby punkt m obiegł kulę naokoło, pozostając wciąż w zetknięciu ze szkłem? Odp. Co najmniej $\sqrt{\frac{(5M+4m)ag}{M}}$.

Ściany kuli są gładkie, a więc w pierwszej chwili na punkt m nie działa żadna siła pozioma, i jego szybkość bezwzględna jest zerem. Skoro punkt ma wciąż pozostawać w zetknięciu z kulą, to reakcja, którą ta na niego wywiera, nie powinna znikać w żadnem położeniu, chyba w najwyższem. W tym przypadku skrajnym i w tem położeniu najwyższem $\omega^2 = \frac{g}{a}$. Utworzywszy równania ilości ruchu oraz siły żywej układu, wyznaczymy z łatwością szybkość szukaną.

Pyz. 3. W gładkiej rurce kołowej o masie M umieszczono dwa punkty materjalne o masach m. Punkty te połączono nicią sprężystą, której długość naturalna jest równa $^2/_3$ obwodu, następnie wyciągnięto tak nić, aby się punkty zeszły, położono rurkę na gładkim stole i pozostawiono układ samemu sobie. W jakim stosunku stała siła żywa punktów w chwili, gdy nić odzyskała długość naturalną, do pracy, wyłożonej na rozciągnięcie nici? Odp. $\frac{2(M^2+m^2+Mm)}{(M+2m)(2M+m)}$.

115. Wektor H ciała sztywnego. Bez porównania ważniejszą rolę od wektora G odgrywa w dynamice ciała sztywnego wektor H, czyli moment ilości ruchu. I w tym razie wszystkie twierdzenia, które dowiedliśmy w par. 95 dla układu punktów materjalnych, są ważne ogólnie, dla ciał sztywnych i niesztywnych; pozostaje tylko wskazać sposoby wyznaczania wektora H w różnych przypadkach.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, albo układ ciał, i jakikolwiek środek redukcji O. Pragniemy wyznaczyć moment ilości ruchu względem tego środka. Obieramy punkt O za początek prostokątnego układu współrzędnych, i rozkładamy szukany wektor H na składowe H_x, H_y, H_z w kierunkach osi. Składowe ilości ruchu elementu m (xyz) ciała są $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, a zatem moment ilości ruchu tego elementu względem osi z wynosi $m\left(x\frac{dy}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ i wypadnie

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ H_y &= \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\ H_z &= \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Przypuśćmy, że ciało jest sztywne, i ruch jest postępowy. W takim razie szybkości wszystkich elementów są jednakowe co do wielkości i kierunku, a zatem $H_x = \Sigma my\frac{dz}{dt} - \Sigma mz\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}\Sigma my - \frac{dy}{dt}\Sigma mz$. Oznaczmy masę ciała przez M, a współrzędne środka ciężkości przez x_0, y_0, z_0. Możemy napisać $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt}$, $\Sigma my = My_0$, i t. d.; wówczas równania (1) przekształcą się na

$$\left.\begin{aligned} H_x &= M\left(y_0\frac{dz_0}{dt} - z_0\frac{dy_0}{dt}\right) \\ H_y &= M\left(z_0\frac{dx_0}{dt} - x_0\frac{dz_0}{dt}\right) \\ H_z &= M\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Jeżeli więc ruch jest postępowy, to wektor H względem dowolnego punktu jest taki, jak gdyby cała masa ciała była skoncentrowana w środku ciężkości.

Dajmy na to, że w chwili, dla której wyznaczamy moment ilości ruchu, właśnie środek ciężkości przechodzi przez O. W takim razie $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, a zatem $H_x = H_y = H_z = 0$. Możemy powiedzieć, że *w ruchu postępowym wektor H względem środka ciężkości jest zerem.*

Rozważmy teraz inny ważny przypadek szczególny. Przypuśćmy, że ruch ciała *sztywnego* jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową ω około prostej u. Pragniemy wyznaczyć wektor H względem jakiegoś punktu O, położonego na osi obrotu.

Za osi współrzędnych x, y, z obierzemy te proste, na których w chwili danej leżą osi główne punktu O; przypuśćmy, że oś obrotu u tworzy z niemi kąty α, β, γ, i rozłóżmy szybkość kątową ω na składowe $\omega_x = \omega\cos\alpha$, $\omega_y = \omega\cos\beta$, $\omega_z = \omega\cos\gamma$. Składowe szybkości elementu $m(xyz)$ według par. 47 będą

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Wstawiając to do (1), znajdziemy, że

$$H_x = \Sigma m[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx] = \omega_x \Sigma m(y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma mxy - \\ - \omega_z \Sigma mzx.$$

Lecz $\Sigma m(y^2 + z^2)$ jest momentem bezwładności względem osi x, a Σmxy i Σmzx, jako momenty odśrodkowe względem osi głównych, są zerami; zatem wypadnie

$$H_x = A\omega_x, \quad H_y = B\omega_y, \quad H_z = C\omega_z \qquad (3),$$

gdzie A, B, C oznaczają momenty bezwładności względem osi x, y, z, czyli momenty główne punktu O. Mając składowe H_x, H_y, H_z, znamy wektor H co do wielkości i kierunku, a mianowicie $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$, czyli

$$H = \omega\sqrt{A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma}.$$

Jeżeli λ, μ, ν oznaczają kąty kierunkowe wektora H, to

$$\cos\lambda = \frac{H_x}{H} = \frac{A\cos\alpha}{\sqrt{A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma}}.$$

Dla μ i ν otrzymamy wzory analogiczne.

Widzimy, że kąty kierunkowe nie zależą od szybkości kątowej ω, a zatem wektor H względem punktu O leży na prostej, zajmującej w ciele położenie stałe. Gdy zmienia się ω, to wektor ten zmienia się co do wielkości, ale kierunek jego *względem ciała* pozostaje bez zmiany. Możemy powiedzieć, że wiruje on wraz z ciałem około prostej u.

Wyznaczymy teraz moment ilości ruchu ciała względem osi obrotu. Będzie to rzut wektora H na prostą u, albo suma rzutów składowych H_x, H_y, H_z. Wypadnie

$$H_u = H_x \cos\alpha + H_y \cos\beta + H_z \cos\gamma = \omega(A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma).$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest to moment bezwładności ciała względem prostej u. Oznaczywszy go przez I, napiszemy

$$H_u = I\omega.$$

Można łatwo otrzymać równanie to bezpośrednio. Jeżeli r oznacza odległość elementu m od osi u, to szybkość tego elementu $= \omega r$, a moment ilości ruchu $= m\omega r^2$, zatem $H_u = \omega \Sigma m r^2 = I\omega$.

Zobaczymy, w jakich razach wektor H punktu O leży na osi obrotu. H_x, H_y, H_z, t. j. momenty ilości ruchu względem osi x, y, z, są rzutami wektora H na te osi, a zatem w przypadku, o którym mowa, $A\omega_x = I\omega\cos\alpha$, czyli $A\omega\cos\alpha = I\omega\cos\alpha$; powinny więc istnieć związki

$$A\cos\alpha = I\cos\alpha, \quad B\cos\beta = I\cos\beta, \quad C\cos\gamma = I\cos\gamma.$$

Równania te są możliwe w dwóch przypadkach. Przedewszystkiem wtedy, gdy dwa z kątów kierunkowych, np. α i β, są proste; w takim razie $I = C$, i prosta u jest osią główną punktu O. Powtóre równania powyższe są spełnione, jeżeli wszystkie trzy momenty główne punktu O są równe. W tym razie, jak wiemy, temuż samemu jest równy moment bezwładności względem u, a więc można znowu tę prostą uważać za oś główną punktu O.

Powiemy wogóle, że wektor H względem punktu O, wziętego na osi obrotu u, leży tylko wtedy na tej osi, gdy O jest punktem głównym prostej u.

Jeżeli oś obrotu jest osią główną ciała, to jak wiemy z par. 105, jest ona osią główną każdego ze swych punktów; z tego wynika bezpośrednio, że na niej leżą wektory H względem wszystkich jej punktów, i że wektory te są równe.

Prz. 1. Tarcza kołowa o promieniu a i masie M obraca się z szybkością kątową ω około cięciwy, którą widać ze środka pod kątem prostym. Wyznaczyć wektor H względem punktu O, w którym oś obrotu przecina obwód. Odp. Oczywiście wektor H leży w płaszczyźnie tarczy. Osiami głównemi są średnica i styczna. Momenty bezwładności względem nich są odpowiednio $A = \frac{Ma^2}{4}$ i $C = \frac{5Ma^2}{4}$, a składowe wektora H są $\frac{Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$ i $\frac{5Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$. Wektor $H = \frac{Ma^2\omega\sqrt{13}}{4}$; tworzy on ze średnicą kąt arctan 5.

Prz. 2. Sztaba o długości $2a$ i masie M obraca się z szybkością kątową ω około nieruchomej osi, która przechodzi przez koniec O sztaby i tworzy z nią kąt α. Wyznaczyć wektor H względem punktu O. Odp. Wektor H jest prostopadły do sztaby i równy $\frac{4Ma^2\omega \sin\alpha}{3}$.

Prz. 3. Kula o masie M i promieniu a obraca się z szybkością kątową ω około średnicy, a średnica z szybkością 2ω około prostej, która tworzy z nią kąt 60^0 i przechodzi przez koniec O. Wyznaczyć wektor H względem O. Odp. $H = \frac{Ma^2\omega\sqrt{163}}{5}$.

Prz. 4. Prosty stożek kołowy, którego masa jest równa M, wysokość h i kąt wierzchołkowy 2α, toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie poziomej, przyczem płaszczyzna pionowa, przechodząca przez oś, posiada szybkość kątową ω. Wyznaczyć wektor H względem wierzchołka.

Odp. $H = \frac{3Mh^2\omega\sqrt{1+10\cos^2\alpha+5\cos^4\alpha}}{20\cos\alpha}$.

Prz. 5. Płyta trójkątna ABC o masie M obraca się z szybkością kątową ω około boku AC. Wyznaczyć moment ilości ruchu względem boku BC. Odp. $\frac{Mab\omega\sin^2 C}{12}$, gdzie $a = BC$, $b = CA$ i C oznacza kąt ACB.

Płytę możemy tu zastąpić przez model, zrobiony tak: z lekkiego drutu tworzymy obwód trójkąta i w środkach boków osadzamy punkty materjalne, każdy o masie $\frac{M}{3}$. Model taki będzie miał z płytą jednakową masę, wspólny środek ciężkości i jednakowe momenty bezwładności względem wszystkich prostych (par. 103, prz. 8); łatwo zrozumieć, że pod względem dynamicznym zastąpi on płytę całkowicie.

Prz. 6. Sztaby OA, AB wirują około osi pionowej, przechodzącej przez O z szybkością kątową ω, pozostając w jednej płaszczyźnie pionowej i tworząc z osią odpowiednio kąty ϑ i φ. Długości sztab wynoszą a i b, masy m i m_1. Wyznaczyć moment ilości ruchu względem osi obrotu (par. 103, prz. 7). Odp. $\omega\left[\left(\frac{m}{3}+m_1\right)a^2\sin^2\vartheta + m_1 ab\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{m_1}{3}b^2\sin^2\varphi\right]$.

116. Ciało jakiekolwiek. Poznamy tu pewne twierdzenia, bardzo ważne i zupełnie ogólne. W tym celu przekształcimy równania (1), które otrzymaliśmy w par. poprzedzającym dla jakiegokolwiek ciała i dla dowolnego punktu redukcji.

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała nowe osi współrzędnych ξ, η, ζ odpowiednio równoległe do x, y, z. Dla elementu m będzie

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0.$$

Wstawiamy to do wyżej wspomnianego równania i wykonywamy przekształcenia zupełnie podobne do tych, które opisaliśmy w par. 111. Wypadnie

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \Sigma m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) + M\left(y_0\frac{dz_0}{dt} - z_0\frac{dy_0}{dt}\right) \\ H_y &= \Sigma m\left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right) + M\left(z_0\frac{dx_0}{dt} - x_0\frac{dz_0}{dt}\right) \\ H_z &= \Sigma m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + M\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Prawa strona każdego z tych równań zawiera dwa wyrazy; oznaczmy odpowiednio wyrazy, postawione na pierwszem miejscu, przez H_x', H_y', H_z', a wyrazy, stojące na drugiem miejscu, przez H_x'', H_y'', H_z''. Pierwsze są momentami ilości ruchu ciała względem osi ξ, η, ζ, a drugie momentami ilości ruchu masy M, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x, y, z. Będzie zatem

$$H_x = H_x' + H_x'', \quad H_y = H_y' + H_y'', \quad H_z = H_z' + H_z''.$$

Wogóle *moment ilości ruchu ciała względem prostej jest sumą algebraiczną dwóch składników, a mianowicie momentu ciała względem prostej równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości, i momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem prostej danej.*

Oznaczmy przez H' i H'' odpowiednio wypadkowe wektorów H_x', H_y', H_z' i H_x'', H_y'', H_z''. Oczywiście H' jest momentem ilości ruchu ciała względem środka ciężkości, a H'' momentem masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem punktu O. Wektor H jest wypadkową momentów H' i H''.

Tak więc *moment ilości ruchu ciała względem punktu jest sumą geometryczną dwóch składowych, a mianowicie momentu ciała względem środka ciężkości i momentu masy ciała, skoncentrowanej w tym środku, względem punktu danego.*

Pierwsza z tych składowych jest oczywiście jedna i ta sama dla wszystkich punktów redukcji, druga zależy od położenia punktu redukcji. Jeżeli środek ciężkości jest w spokoju, to druga składowa jest zerem, a zatem ciało względem wszystkich punktów posiada jednakowe momenty ilości ruchu zarówno co do wielkości, jak i kierunku.

W twierdzeniach powyższych łatwo dostrzedz pewne niedomówienie, które należy uzupełnić, a raczej wyjaśnić. Chodzi o to, że H' jest momentem ilości ruchu w ruchu względnym, a mianowicie w ruchu względem środka masy, bo $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ są składowemi szybkości względnej. Niedomówienie to jest jednak usprawiedliwione, gdyż równie dobrze można uważać H' za moment w ruchu bezwzględnym względem środka masy, lub względem tego punktu przestrzeni nieruchomej, który w danej chwili środek masy zajmuje. Aby się o tem przekonać, należy tylko w wyrażeniach na H_x', H_y', H_z', zamiast $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ podstawić odpowiednio $\frac{d(x-x_0)}{dt}$, $\frac{d(y-y_0)}{dt}$, $\frac{d(z-z_0)}{dt}$. Wypadnie wówczas

$$H_x' = \Sigma m\left(\eta\frac{dz}{dt} - \zeta\frac{dy}{dt}\right)$$

oraz analogiczne wyrażenia na H_y' i H_z'. Są to oczywiście składowe momentu w ruchu bezwzględnym.

Wypada tu rozważyć pewną kwestję, która przy stosowaniu zasady ilości ruchu może nieraz wywoływać trudności. Wektor H, wzięty względem punktu *nieruchomego*, może się zmieniać jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, działających na ciało. Ale oczywiście może być mowa i o wektorze H (w ruchu bezwzględnym) względem punktu *ruchomego*; czy i wówczas twierdzenie powyższe zachowuje moc obowiązującą?

Weźmy wektor H względem ruchomego punktu A, który w czasie dt przeszedł z położenia A_1 do A_2. Składowa H' jest w każdej chwili taka sama dla A_1, jak i dla A_2, a więc w czasie dt mogła ona się zmienić jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, natomiast składowa H'' jest dla A_2 inna niż dla A_2, a zatem przybrała w czasie dt przyrost już skutkiem tego, że punkt A zmienił położenie, niezależnie od sił zewnętrznych. Z tego wynika, że na pytanie powyższe należy dać odpowiedź przeczącą.

Wyjątkowe stanowisko pod tym względem zajmuje środek masy ciała. Dla niego składowa H'' jest zawsze zerem, a zatem wektor H względem środka masy zmienia się jedynie pod działaniem sił zewnętrznych zupełnie tak samo, jak dla punktu nieruchomego. Jeżeli na ciało żadne siły zewnętrzne nie działają, albo jeżeli układ ciał jest izolowany, to wektor H względem środka masy nie zmienia się ani co do kierunku, ani co do wielkości.

Takim układem izolowanym jest nasz system planetarny. Siły przyciągania, które wywierają na siebie nawzajem słońce, planety i księżyce, są siłami wewnętrznemi. Siły zewnętrzne mogłyby pochodzić jedynie od gwiazd stałych, ale odległości tych ciał od naszego układu są tak olbrzymie, że ich siły przyciągania muszą być nieznaczne, i można ich nie brać w rachubę.

Z tego wynikają dwa wnioski: po pierwsze, że ruch środka masy systemu słonecznego jest prostolinjowy i jednostajny, i po wtóre, że wektor H względem środka masy jest stały co do wielkości i kierunku. Płaszczyzna poprowadzona przez środek masy prostopadle do wektora H, nazywa się *płaszczyzną niezmienną*. Wypada jednak zaznaczyć, że wyżej użyte wyrazy „ruch prostolinjowy i jednostajny“ i „stały kierunek“ dopiero wtedy miałyby znaczenie ściśle określone, gdyby było wskazane do jakiego układu odnosimy ruch słońca i planet.

Wszystkie twierdzenia, które poznaliśmy w paragrafie niniejszym, dotyczą w równej mierze ciała sztywnego, jak i niesztywnego. Wektor H ciała sztywnego względem dowolnego punktu posiada także dwie składowe H' i H''. Pierwsza z nich pochodzi oczywiście z ruchu kulistego około środka ciężkości, a druga z ruchu postępowego.

Jest to przypadek szczególny pewnego prawie oczywistego twierdzenia ogólnego. *Gdy rozłożymy ruch ciała sztywnego na dwa ruchy składowe, to wektor H względem dowolnego punktu O rozłoży się na dwa wektory składowe, odpowiadające owym ruchom.*

Niechaj v' i v'' będą szybkościami elementu m, pochodzącemi z tych ruchów składowych. W takim razie ilość ruchu tego elementu posiada składowe mv', mv'', i moment tej ilości ruchu względem O składa się z momentów wektorów mv' i mv''; oznaczmy te momenty odpowiednio przez h' i h''. Wektor H będzie wypadkową wszystkich h' i wszystkich h'', albo wypadkową H' i H'', jeżeli przez H' oznaczymy wypadkową wszystkich h', a przez H'' wszystkich h''.

Twierdzenie to daje się z łatwością rozciągnąć do dowolnej liczby ruchów składowych.

Jeżeli rozkładamy ruch ciała sztywnego na ruch kulisty około środka ciężkości i na odpowiedni ruch postępowy, i bierzemy moment ilości ruchu względem środka ciężkości, to składowa, odpowiadająca drugiemu z tych ruchów, jest zerem, a zatem wyznaczamy wektor H, jak gdyby ciało posiadało tylko ruch kulisty około środka ciężkości.

Prz. 1. Okazać, że wektor H dowolnego układu względem punktów prostej, równoległej do szybkości środka ciężkości, jest stały co do wielkości i kierunku.

Prz. 2. Wektor H względem środka ciężkości jest prostopadły do jego szybkości; wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, względem których moment ilości ruchu jest równy zeru.

Prz. 3. Płyta jednorodna obraca się około osi prostopadłej do je płaszczyzny. Dowieść, że końce wektorów H względem wszystkich punktów tej płaszczyzny leżą na jednej płaszczyźnie.

Obieramy środek ciężkości za początek współrzędnych, oś z prostopadle do płaszczyzny płyty i oś x przez środek obrotu. W takim razie równanie miejsca geometrycznego końców wektorów H będzie $z = \omega(I + May)$, gdzie I oznacza moment bezwładności względem osi z, i a odległość osi z od osi obrotu.

Prz. 4. Ciała, tworzące układ, pozostawały początkowo w spokoju; przyciągają się one pomiędzy sobą, lecz pozatem żadne inne siły na nie nie działają. Pod działaniem przyciągania ciała się zeszły, i powstało jedno ciało sztywne. Okazać, że pozostaje ono w spokoju.

Prz. 5. Dwie bardzo cienkie banie kuliste o masach m_1, m_2 mogą się obracać około wspólnego środka. Promienie ich są prawie jednakowe, a zatem stykają się one na całej powierzchni. Udzielamy pierwszej bani szybkość kątową ω_1 około osi, posiadającej w nieruchomym układzie współrzędnych kąty kierunkowe α_1, β_1, γ_1, i jednocześnie udzielamy drugiej szybkość ω_2 około osi $(\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2)$. Około jakiej osi i z jaką szybkością kątową będą wirowały banie, gdy tarcie zniszczy ich ruch względny? Odp. Jeżeli $\omega(\alpha\beta\gamma)$ oznacza szybkość szukaną, to

$$\omega^2 = \frac{m_1^2\omega_1^2 + m_2^2\omega_2^2 + 2m_1m_2\omega_1\omega_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)}{(m_1+m_2)^2}$$

i

$$\cos\alpha = \frac{m_1\omega_1\cos\alpha_1 + m_2\omega_2\cos\alpha_2}{(m_1+m_2)\omega} \quad \text{i t. d.}$$

Prz. 6. Około planety o masie M obraca się mały księżyc o masie m, pozostając od niej w stałej odległości r. Planeta wiruje z szybkością kątową ω około osi prostopadłej do płaszczyzny drogi księżyca, a jej moment bezwładności względem średnicy $= I$. Wyznaczyć moment ilości ruchu względem środka ciężkości, zakładając, że współczynnik proporcjonalności w prawie Newtona $= \varkappa$.

Odp. $I\omega + Mm\sqrt{\dfrac{\varkappa r}{M+m}}$.

117. Działanie siły chwilowej. Dajmy na to, że ciało jakiekolwiek, pozostające w ruchu lub spokoju, doznało uderzenia lub szarpnięcia, czyli wogóle uległo działaniu siły chwilowej. Chodzi o to, jak zmieni się stan dynamiczny ciała, czyli jakie przyrosty geometryczne otrzymają wektory G i H.

Podczas działania siły chwilowej na ciało działają zazwyczaj i inne siły zwykłe, ale całe zjawisko uderzenia lub szarpnięcia ma przebieg tak szybki, że podczas trwania jego siły zwykłe nie mogą wywrzeć na żaden z wektorów wyraźnego wpływu. Z tego wynika, że, rozwiązując podane tu zagadnienie, potrzeba rachować się jedynie z siłą chwilową, wszelkie zaś inne siły możemy pominąć.

Przypuśćmy, że pod działaniem siły chwilowej szybkość środka ciężkości otrzymała przyrost geometryczny u; w takim razie przyrost geometryczny ilości ruchu ciała, czyli wektora G, wyniesie oczywiście Mu, gdzie M oznacza masę ciała. Temu właśnie jest równy impuls siły chwilowej; oznaczmy go przez F.

Czas działania siły chwilowej oznaczmy przez τ. W ciągu tego czasu siła zmienia się co do wielkości w bardzo rozległych granicach, ale możemy uważać, że kierunek jej i położenie w przestrzeni nie ulega zmianie. Bierzemy moment ilości ruchu względem punktu O. W czasie dt moment ten otrzyma przyrost $Ppdt$, gdzie P oznacza siłę i p odległość jej od O. Całkowity przyrost wektora H możemy wyrazić w postaci $\int_0^\tau Ppdt$, czyli $p\int_0^\tau Pdt$. Lecz

$$\text{przyrost szukany} = Fp.$$

Tak więc przyrost wektora G jest równy impulsowi, a przyrost wektora H momentowi impulsu. Wyraz równy oznacza tu zgodność co do wielkości i kierunku.

Można to wypowiedzieć w nieco odmienny sposób. Przenosimy siłę chwilową do środka redukcji O, wprowadzając odpowiednią parę. Tę ostatnią nazwiemy *parą chwilową*; moment jej jest bardzo wielki, lecz działa przez czas bardzo krótki. Para nie wywrze oczywiście wpływu na wektor G, lecz wytworzy przyrost wektora H, równy jej momentowi co do wielkości i kierunku. Można także powiedzieć, że miarą momentu pary chwilowej jest wytworzony przez nią przyrost wektora H.

Prz. 1. Gładkie, poziome ramię AB o długości $2a$ i masie M jest w końcu A przymocowane do pionowej osi z, a w B posiada małą nasadę. Na ramieniu może się swobodnie przesuwać ciężarek m, ale nasada w B nie pozwoliłaby mu zejść z ramienia. Początkowo ciężarek jest przywiązany do osi nicią o długości a, i wszystko obraca się z szybkością kątową ω_0. Jaką szybkość kątową będzie miał układ, gdy nić się zerwie, i ciężarek dojdzie do B?

Na układ działają reakcje łożysk, w których jest osadzona oś z, oraz siła ciążenia. Momenty tych sił względem osi z są zerami, a zatem moment ilości ruchu względem tej osi nie może się zmienić. Będzie więc $Mk^2\omega_0+ma^2\omega_0=Mk^2\omega+4ma^2\omega$, gdzie k oznacza ramię bezwładności ramienia AB względem osi z, a ω ostateczną szybkość kątową. Z tego wypada, że $\omega = \frac{(4M+3m)\omega_0}{4(M+3m)}$. Znajdziemy z łatwością, że układ stracił $\frac{3(4M+3m)ma^2\omega_0^2}{8(M+3m)}$ siły żywej.

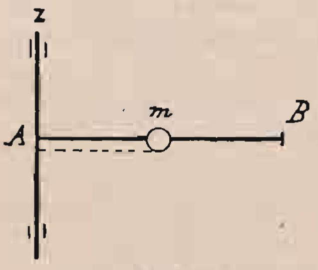

Fig. 80.

Prz. 2. Na gładki prosty pręt, ustawiony nieruchomo pod jakimkolwiek kątem do poziomu, nasunięto obrączkę, a do obrączki przymocowano koniec innego pręta. Ten drugi pręt ustawiono w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez pierwszy, prostopadle do tegoż, i pozostawiono samemu sobie. Dowieść, że ruch drugiego pręta będzie postępowy.

Prz. 3. Kula jednorodna o masie M i promieniu a_0 obraca się z szybkością kątową ω_0 około średnicy. Ile siły żywej straci kula, gdy skutkiem obniżenia temperatury promień skurczy się do długości a? Odp. $\frac{Ma_0^2\omega_0^2(a^2-a_0^2)}{5a^2}$.

Prz. 4. Belka o długości $2a$ i masie M może się swobodnie obracać około osi poziomej, przechodzącej przez jej środek ciężkości. Początkowo belka zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, gdy na koniec jej spadł pionowo z wysokości h kawałek wilgotnej gliny o masie m i przylgnął. Wyznaczyć szybkość kątową, którą otrzyma belka. Odp. $\frac{3m\sqrt{2gh}}{(M+3m)a}$.

Uważamy układ, złożony z belki i gliny. W niezmiernie krótkim czasie, w którym glina uderza o belkę, moment ilości ruchu tego układu względem osi się nie zmieni, bo występujące podówczas siły chwilowe są jego siłami wewnętrznemi, a moment reakcji osi jest zerem. Wprawdzie podczas uderzenia działa siła zewnętrzna, której moment względem osi nie jest zerem, a mianowicie ciężar gliny, ale wytworzony przez nią w ciągu tak krótkiego okresu przyrost momentu ilości ruchu jest znikomo mały, i możemy go pominąć.

Prz. 5. Na szale wagi, z których każda waży Q, spadły jednocześnie ciężary Q_1 i Q_2 z wysokości h_1 i h_2. Wyznaczyć początkową szybkość szal. Odp. $\frac{(Q_1\sqrt{h_1}-Q_2\sqrt{h_2})\sqrt{2g}}{2Q+Q_1+Q_2}$.

Prz. 6. Trzy jednakowe sztaby o długości a, połączone gładkiemi zawiasami, posiadają ruch postępowy o szybkości v na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc linję prostą prostopadłą do tej szybkości. Po jakim czasie spotkają się końce sztab skrajnych, gdy zatrzymamy środek średniej? Odp. $\frac{4a\pi}{9v}$.

Oczywiście wektor H sztaby skrajnej względem zawiasy podczas zatrzymywania średniej nie ulega zmianie.

Prz. 7. Sześcian posiada ruch postępowy na płaszczyźnie poziomej, przyczem cztery jego krawędzie są prostopadłe do szybkości. Środek przedniej krawędzi, pozostającej na płaszczyźnie, uderza o nieruchomą przeszkodę i zatrzymuje się. Wyznaczyć kierunek uderzenia.

Moment ilości ruchu względem krawędzi zatrzymanej nie ulegnie zmianie, i znajdziemy łatwo, że sześcian zacznie się obracać z szybkością $\frac{3v}{8a}$, gdzie v oznacza szybkość ruchu postępowego i $2a$ długość krawędzi. Przed zatrzymaniem wektor G sześcianu był poziomy i równy mv, po zatrzymaniu wektor ten tworzy z poziomem kąt 45^0 i wynosi $\frac{3mv\sqrt{2}}{8}$. Składowa pozioma impulsu wynosi $\frac{5mv}{8}$, a pionowa $\frac{3mv}{8}$, a stąd wynika, że kierunek uderzenia tworzy z poziomem kąt arctan $^3/_5$.

Prz. 8. Pryzmat prostokątny, którego masa wynosi $3m$, a podstawą jest kwadrat $ABCD$, stoi na płaszczyźnie poziomej i może obracać się około krawędzi CD. Wysokość pryzmatu $= 3a$, bok zaś podstawy $= a$. W środek ściany pionowej nad krawędzią AB uderza punkt materjalny o masie m i osiada tam na stałe. Jaka powinna być co najmniej szybkość pozioma tego punktu, aby pryzmat się przewrócił? Odp. $\frac{\sqrt{53\,ag}}{3}$.

Prz. 9. Okrągła tarcza obraca się z szybkością kątową ω około punktu A swego obwodu. Wyswobadzamy punkt A i jednocześnie zatrzymujemy inny punkt B obwodu; kąt $AOB = \vartheta$, gdzie O oznacza środek tarczy. Wyznaczyć szybkość kątową tarczy około B. Odp. $\frac{(1+2\cos\vartheta)\,\omega}{3}$.

Gdzie powinien leżeć punkt B, aby tarcza się zatrzymała?

Prz. 10. Sztaba AB wiruje około końca A. Jak zmieni się siła żywa sztaby, gdy wyswobodzimy A i jednocześnie zatrzymamy B? Odp. Zmniejszy się poczwórnie.

Prz. 11. Sześcian wiruje z szybkością kątową ω około przekątni. Zatrzymujemy jedną z krawędzi, nie przecinających owej przekątni; wyznaczyć nową szybkość kątową. Odp. $\frac{\omega}{4\sqrt{3}}$.

Prz. 12. Swobodna płyta kwadratowa wiruje około przekątni z szybkością kątową ω. Zatrzymujemy jeden z wierzchołków, nie leżących na tej przekątni; wyznaczyć nową szybkość kątową. Odp. $\frac{\omega}{7}$.

Należy przedewszystkiem zdać sobie sprawę z tego, jaki kierunek przybierze nowa oś obrotu, a w tym celu trzeba wyznaczyć wektor H względem wierzchołka, który mamy zatrzymać, nietylko co do wielkości, ale i co do kierunku. Znajdziemy, że wektor ten leży na osi głównej wierzchołka, a z tego wynika, że ta sama prosta będzie osią obrotu.

Prz. 13. Tarcza eliptyczna pozostawała w spokoju, gdy wtem końce dużej i małej osi otrzymały odpowiednio szybkości u_1 i u_2 prostopadłe do płaszczyzny tarczy. Wyznaczyć początkową szybkość środka. Odp. $\frac{u_1+u_2}{6}$.

Możemy uważać, że ruch tarczy został wywołany przez dwa uderzenia jednoczesne, wymierzone prostopadle do jej płaszczyzny w wierzchołki. Ruch początkowy daje się rozłożyć na ruch postępowy, którego szybkość v jest szukana, i na ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek i położonej w płaszczyźnie tarczy. Składowe szybkości kątowej w kierunkach osi oznaczamy przez ω_1, ω_2. Ułożymy teraz z łatwością dwa równania cynematyczne

$$u_1 = v + a\omega_2, \quad u_2 = v + b\omega_1,$$

oraz trzy równania dynamiczne

$$mv = F_1 + F_2, \quad \frac{m\omega_2 a^2}{4} = F_1 a, \quad \frac{m\omega_1 b^2}{4} = F_2 b,$$

gdzie F_1, F_2 oznaczają impulsy uderzeń.

Prz. 14. Płyta trójkątna, pozostająca w spokoju, została uderzona w środek jednego z boków w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty. Wyznaczyć początkowe położenie osi chwilowej.

Zastępujemy płytę przez trzy punkty materjalne A, B, C, osadzone w środkach boków (par. 115, prz. 5). Przypuśćmy, że uderzenie zostało wymierzone w A; w takim razie moment ilości ruchu względem AB jest zerem, a zatem w pierwszej chwili C pozostanie w spokoju. Wynika stąd, że BC jest osią szukaną.

Prz. 15. Płyta trójkątna ABC doznała uderzenia w wierzchołek A w kierunku prostopadłym do jej płaszczyzny. Wyznaczyć początkowe położenie osi chwilowej. Odp. Szukana prosta dzieli każdy z boków AB i AC w stosunku 3 : 1.

Prz. 16. Dwie jednakowe sztaby AB i CD leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc kwadrat $ABCD$, przyczem końce B i C są połączone wyprężonym, nierozciągalnym sznurem. Zapomocą uderzenia, wymierzonego w koniec A w kierunku AD, nadajemy temu końcowi szybkość v. Wyznaczyć szybkość początkową końca D. Odp. $\frac{v}{7}$.

Prz. 17. Dwie jednakowe sztaby AB i BC, połączone przegubem, każda o długości a tworzą linję prostą i biegną na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością v prostopadłą do AC. Jakie szybkości kątowe będą miały w pierwszej chwili sztaby, gdy zatrzymamy koniec A? Odp. $\frac{9v}{7a}$ i $-\frac{3v}{7a}$.

Prz. 18. Zbadać dalszy ruch sztab z przykładu poprzedzającego, a mianowicie wyznaczyć największy kąt pomiędzy niemi oraz stosunek szybkości kątowych w chwili, gdy znowu utworzą linję prostą. Odp. Szukany kąt = arccos $^2/_3$, szukany stosunek szybkości sztab AB i BC wynosi $^1/_9$.

Ruch sztaby BC rozkładamy na postępowy i obrotowy około środka ciężkości, a szybkość środka ciężkości na składowe w kierunku AB i w kierunku prostopadłym. Potrzebne równania otrzymamy, stosując zasadę ilości ruchu i zasadę sił żywych, a także związki cynematyczne. W chwili, gdy kąt pomiędzy sztabami osiąga maksymum, to oczywiście ruch ich jest taki, jak gdyby tworzyły jedno ciało sztywne.

Prz. 19. Trzy jednakowe sztaby, połączone przegubami, tworzą na gładkim stole linję prostą. Wymierzamy prostopadle do tej prostej w sam środek impuls F; wyznaczyć impulsy, które otrzymają sztaby boczne. Odp. $\frac{F}{6}$.

Prz. 20. Trzy jednakowe sztaby, połączone przegubami, tworzyły na gładkim stole linję prostą. Sztabom skrajnym nadano szybkości kątowe ω w tę samą stronę około odpowiednich końców średniej. Wyznaczyć szybkość kątową, którą przybierze średnia w chwili, gdy skrajne utworzą z jej przedłużeniem kąty największe. Odp. $\frac{4\omega}{7}$.

Prz. 21. Trzy jednakowe punkty materjalne A, B i C są połączone dwoma lekkiemi prętami jednakowej długości. Przegub, urządzony w punkcie B, jest początkowo zaciśnięty, kąt ABC wynosi 60^0, i cały układ wiruje na gładkiej płaszczyźnie poziomej około swego środka ciężkości. W jakich granicach będzie zmieniał się kąt ABC, jeżeli przegub się rozluźni. Odp. Od 60^0 do 150^0.

Prz. 22. Na gładkim stole leży sztywny kwadrat $ABCD$, zrobiony z czterech jednakowych prętów. W wierzchołku A siedzi mucha, której masa jest równa masie jednego pręta, i kwadrat może się swobodnie obracać około wierzchołka B. W pewnej chwili mucha zaczyna wędrować po pręcie AD ze stałą szybkością względną v. O jaki kąt obróci się kwadrat, zanim mucha dojdzie do wierzchołka D?

Moment ilości ruchu względem B będzie wciąż zerem, a stąd wynika, że szybkość kątowa kwadratu $= \frac{6av}{52a^2 + 3v^2t^2}$, gdzie a oznacza długość pręta. Kąt szukany $= \sqrt{\frac{3}{13}}$ arctan $\sqrt{\frac{3}{13}}$.

Prz. 23. Kółko o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około osi poziomej, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego płaszczyzny. W najniższym punkcie kółka siedzi mucha o masie m; w pewnej chwili wyrusza ona po obwodzie i wędruje z szybkością względną stałą. Jaka powinna być co najmniej ta szybkość, aby mucha doszła do najwyższego punktu kółka? Odp. $2a\sqrt{\frac{mga}{Mk^2 + ma^2}}$.

W tym razie moment ilości ruchu układu względem osi obrotu się zmienia pod działaniem ciężaru muchy; elementarny przyrost jego wynosi $mga \sin \vartheta dt$, gdzie ϑ oznacza kąt pomiędzy promieniem, przechodzącym przez muchę, i pionem.

Prz. 24. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej leży płyta o masie M, a na niej stoi człowiek o masie m. Moment bezwładności płyty względem jej środka ciężkości $= I$. O jaki kąt obróci się płyta, gdy człowiek, nie schodząc z niej, zatoczy w przestrzeni linję zamkniętą, zawierającą pole A? Odp. $\frac{2m(M+m)A}{IM}$.

Dobrze będzie zastosować współrzędne biegunowe, obierając za biegun środek ciężkości układu, złożonego z człowieka i płyty. Jeżeli (r, φ) oznaczają współrzędne człowieka, to $\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = 2A$.

Prz. 25. Na tarczę poziomą, wirującą swobodnie około osi pionowej, usiadł owad i pełznie ze stałą szybkością względną, zbliżając się wciąż do osi. Szybkość kątowa tarczy nie zmieniła się w chwili, gdy owad siadał, a dalszy ruch jego jest taki, że ta szybkość pozostaje stałą i nadal. Okazać, że owad dojdzie do osi, zanim tarcza zrobi ćwierć obrotu.

Prz. 26. Obrączka o masie M i promieniu a leży na gładkim stole, a na niej siedzi mucha o masie m. Jaki będzie ruch obrączki, gdy mucha zacznie iść po niej z szybkością względną v? Odp. Środek obrączki zatacza koło, a obrączka obraca się około tego środka z szybkością kątową $\frac{mv}{(M+2m)a}$.

Prz. 27. Końce jednorodnego pręta o długości $2a$ mogą się swobodnie poruszać po okręgu koła, którego promień wynosi $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. W środku pręta siedzi owad, którego masa jest równa masie pręta. O jaki kąt obróci się pręt w czasie t, gdy owad pobiegnie po nim ze stałą szybkością względną v?

Odp. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{vt}{a}$.

Prz. 28. Rurka wewnątrz gładka w postaci koła o promieniu a leży na gładkim stole i może się swobodnie obracać około punktu A obwodu. W rurce w punkcie B na przeciwległym końcu średnicy, przechodzącej przez A, znajdował się punkt materjalny o masie dwa razy mniejszej od masy rurki. Rurka była w spokoju, gdy punkt materjalny otrzymał szybkość v_0. Jaką szybkość względną będzie miał ten punkt po przejściu łuku $a\varphi$ rurki? Odp. $\frac{2 v_0 \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4+\sin^2 \varphi}}$.

Prz. 29. Rurka, zgięta w postaci koła i posiadająca masę nm, spoczywa na gładkiej płaszczyźnie poziomej i zawiera punkt materjalny o masie m. W chwili początkowej rurka jest w spokoju, a punkt materjalny posiada szybkość kątową ω_0 około jej środka. Współczynnik tarcia pomiędzy punktem i rurką jest równy f. Po jakim czasie punkt zatrzyma się w rurce? Odp. $\frac{n+1}{f\omega_0}$.

Prz. 30. Dwie tarcze cylindryczne o masach m_1, m_2 i promieniach a_1, a_2, położone w jednej płaszczyźnie pionowej, mogą się swobodnie obracać około osi, przechodzących przez ich środki i prostopadłych do owej płaszczyzny. Na obwodach tarcz są umocowane końce wiotkiego, lekkiego pasa, daleko dłuższego niż odległość pomiędzy punktami umocowania. Pas w części spoczywa na obwodach, a w części zwisa pomiędzy tarczami. Nadajemy pierwszej tarczy szybkość kątową ω i pozostawiamy układ samemu sobie. Jakie szybkości kątowe będą miały tarcze, gdy pas się wypręży? Odp. $\frac{m_1\omega}{m_1+m_2}$, $\frac{m_1 a_1 \omega}{(m_1+m_2) a_2}$.

Prz. 31. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej leży prosta wewnątrz gładka rurka o długości $2a$, a w niej prawie w samym środku znajduje się punkt materjalny; masy obydwóch ciał są równe. Rurka otrzymała szybkość kątową ω_0 około środka; z jaką szybkością wyjdzie z niej punkt materjalny?

Odp. $a\omega_0 \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Prz. 32. Punkt materjalny leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej. W tej samej płaszczyźnie znajduje się tarcza okrągła, która może się obracać około osi pionowej, przechodzącej przez środek. Punkt materjalny łączy się z obwodem tarczy sznurem, którego część jest wyprostowana, a część jest nawinięta na tarczę. Promień tarczy jest równy r, a masa dwa razy większa od masy punktu.

Nadajemy punktowi szybkość prostopadłą do wyprostowanej części sznura tak, aby ten zaczął się nawijać na tarczę. Jaką długość powinna mieć owa część, aby punkt doszedł do obwodu tarczy, i aby od tej chwili sznur zaczął się odwijać? Odp. $a\sqrt{2}$.

118. Ruch istot żyjących. Jeżeli na istotę żyjącą nie działają żadne siły zewnętrzne, to nie może ona nadać swemu środkowi ciężkości przyśpieszenia (par. 110), czyli nie może zmienić swego wektora G. Nie zmieni ona również swego wektora H np. względem środka ciężkości, jeżeli więc pozostawała w spokoju, to nie może nadać swemu ciału ruchu obrotowego. Z tego jednak nie wynika, aby istota taka nie mogła zmienić swego położenia względem środka ciężkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że człowiek stoi na zupełnie gładkiej płaszczyźnie poziomej. Działają nań dwie siły zewnętrzne, a mianowicie siła ciążenia i reakcja płaszczyzny, która w tym razie posiada zawsze kierunek pionowy. Momenty tych sił względem osi pionowej są zerami, nie mogą więc one wywierać wpływu na moment ilości ruchu względem tej osi. Człowiek jest zwrócony, dajmy na to, twarzą na północ, a chciałby zwrócić się na wschód. Da się to uskutecznić różnemi sposobami.

Przypuśćmy, że człowiek ten posiada jakiś ciężki przedmiot, np. sztabę. Może on nadać jej nad głową ruch obrotowy względem swego ciała w kierunku od prawej ręki ku lewej, czyli dla patrzącego z góry w stronę odwrotną do biegu wskazówek zegara. Gdyby ciało pozostało przytem w spokoju, to układ, złożony z człowieka i sztaby, zyskałby względem środka ciężkości wektor H, skierowany na dół. Jest to niemożliwe, gdyż siły, wywołujące ruch sztaby, są siłami wewnętrznemi układu. Z tego wynika, że ciało musi się zacząć jednocześnie obracać w kierunku odwrotnym, przyczem oczywiście twarz będzie się zwracała w stronę żądaną. Obróciwszy sztabę dostateczną liczbę razy, człowiek mógłby obrócić swe ciało o kąt dowolny.

W braku odrębnego przedmiotu ciężkiego człowiek osiągnie ten sam wynik, czyniąc ruchy analogiczne rękami, głową lub tułowiem.

Opiszemy jeszcze inny sposób. Człowiek wyciąga ręce przed siebie i skręca górną część tułowia w lewo względem dolnej o kąt jaknajwiększy. Jednocześnie dolna część ciała obróci się o pewien kąt w prawo. Następnie człowiek zwiesza ręce wzdłuż ciała i powraca do położenia normalnego. Podczas tego ruchu powrotnego dolna część ciała obróci się znowu o pewien kąt w lewo, lecz o mniejszy, niż poprzednio w prawo, gdyż moment bezwładności górnej części względem osi obrotu się zmniejszył. Wynikiem obydwóch ruchów będzie oczywiście obrót całego ciała o jakiś kąt w prawo. Powtarzając tę czynność dostateczną liczbę razy, człowiek może obrócić się o kąt dowolny.

W podobny sposób postępuje spadający kot, aby odwrócić się łapami do dołu. Wyciąga on prostopadle do ciała przednie łapy, a kurczy tylne i skręca przednią część tułowia względem tylnej o kąt jaknajwiększy. Następnie kurczy przednie łapy, wyciąga tylne i nadaje ciału ruch odwrotny do poprzedniego, powtarzając tę czynność, dopóki ciało jego nie przybierze żądanego położenia.

Prz. Na jeziorze stoi okrągła tratwa, a na niej znajduje się człowiek. Aby obrócić tratwę około osi pionowej, człowiek obiega ją dookoła. Dowieść, że gdy człowiek się zatrzyma, to tratwa ruszy w kierunku odwrotnym.