VI. SIŁA ŻYWA I ILOŚĆ RUCHU.

83. Dwie zasady. Widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym, że można rozwiązać bardzo wiele zagadnień z dynamiki punktu materjalnego, posługując się bezpośrednio prawami Newtona; właściwie napotykane ograniczenia tkwią nie w samej naturze pewnych zagadnień, lecz wynikają raczej z trudności matematycznych, które występują zwłaszcza przy całkowaniu równań różniczkowych.

Pomimo tak rozległego zakresu stosowalności praw Newtona, ważną rolę odgrywają jeszcze w dynamice pewne twierdzenia zasadnicze, czyli *zasady*, które ułatwiają w znacznym stopniu układanie równań i skracają rachunki, ale są one same oparte na prawach Newtona, nie zawierają więc żadnych elementów nowych.

Nam chodzi tu głównie o *zasadę sił żywych* i *zasadę ilości ruchu*. Treścią każdej z nich jest związek pomiędzy pewnemi dwiema wielkościami. Tak więc w pierwszej mamy związek pomiędzy siłą żywą i pracą mechaniczną, a w drugiej pomiędzy ilością ruchu i popędem albo impulsem siły.

Zasadnicza różnica pomiędzy zasadami temi polega na tem, że pierwsza posiada charakter skalarowy, bo zarówno siła żywa jak i praca są skalarami, natomiast druga posiada charakter wektorowy, bo ilość ruchu i popęd są wektorami.

Rozważymy naprzód zasadę sił żywych; wypada jednak na wstępie przypomnieć w zarysie teorję pracy mechanicznej, znaną już ze statyki.

84. Praca elementarna. Przypuśćmy, że na punkt materjalny, który posiada szybkość v, działa siła P, tworząca z v kąt ϑ. Możemy przyjąć, że w ciągu najbliższych dt sekund kąt ten nie ulegnie zmianie. W ciągu tego czasu punkt materjalny przejdzie drogę

$ds = vdt$. Iloczyn $Pds \cos \vartheta$, albo $Pv \cos \vartheta dt$ nazywamy *pracą elementarną* siły P. Będziemy ją oznaczali przez dL.

Pracy nie przypisujemy kierunku, jest to więc skalar, a nie wektor.

Element drogi ds możemy uważać za wektor, a zatem dL jest wynikiem pewnego działania, dokonanego nad dwoma wektorami P i ds. Jest to jedno z działań zasadniczych rachunku wektorowego; nazywa się mnożeniem skalarowem, a $dL = Pds \cos \vartheta$ zowie się iloczynem skalarowym. Również $Pv \cos \vartheta$ jest iloczynem skalarowym wektorów P i v. Nazw tych nie będziemy jednak używali w dalszym ciągu (par. 9).

Można powiedzieć, że praca elementarna jest to iloczyn z elementu drogi ds przez $P \cos \vartheta$, czyli przez rzut siły na kierunek szybkości, albo że jest to iloczyn z siły P przez $ds \,.\, \cos \vartheta$, t. j. przez rzut elementu drogi na kierunek siły.

Pracę elementarną uważamy za dodatnią lub ujemną stosownie do znaku czynnika $\cos \vartheta$. Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, to dL jest dodatnie, jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to dL jest ujemne, wreszcie $dL = 0$, jeżeli $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, t. j. jeżeli siła działa prostopadle do szybkości.

Przypuśćmy, że na punkt materjalny działa pewna liczba sił P_1, $P_2 \ldots$, i że siły te tworzą z szybkością odpowiednio kąty ϑ_1, $\vartheta_2 \ldots$. Oznaczmy wypadkową przez R, a kąt pomiędzy nią i szybkością przez φ. Rzut wypadkowej na kierunek szybkości jest równy sumie rzutów składowych, a zatem

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \vartheta.$$

Mnożąc obydwie strony przez ds, otrzymamy

$$R \cos \varphi ds = \Sigma P \cos \vartheta ds;$$

to znaczy, że *praca elementarna siły wypadkowej jest równa sumie prac elementarnych sił składowych.*

Przy pomocy tego twierdzenia wyprowadzimy jeszcze inne użyteczne wyrażenie pracy elementarnej.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i rozłóżmy siłę P na składowe P_x, P_y, P_z. W chwili t punkt materjalny posiadał współrzędne x, y, z, a w chwili $t + dt$ współrzędne $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Oczywiście dx jest rzutem elementu ds na oś x albo na kierunek siły P_x, a więc praca elementarna tej składowej $= P_x dx$. Tak samo znajdziemy, że prace elementarne składowych P_y i P_z są odpowiednio $P_y dy$ i $P_z dz$. Tak więc

$$dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz \tag{1}.$$

Rozważymy jeszcze parę ważniejszych przypadków szczególnych.

Przypuśćmy, że punkt materjalny A obraca się około punktu O z szybkością kątową ω, promień $OA = r$, i na A w płaszczyźnie toru działa siła P, tworząca ze styczną kąt ϑ. Praca elementarna $dL = P\omega r \cos\vartheta dt$. Lecz $r\cos\vartheta = p$ jest ramieniem siły P względem O, a zatem $Pr\cos\vartheta$ jest to moment tej siły względem O. Oznaczymy go przez M, a kąt ωdt, o który punkt A obrócił się w czasie dt, przez $d\varphi$. Będzie wówczas

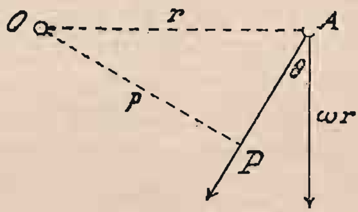

Fig. 69.

$$dL = M\omega dt = Md\varphi \tag{2}.$$

Łatwo się przekonać, że dL jest dodatnie, jeżeli wektory M i ω mają kierunki jednakowe; w razie przeciwnym dL jest ujemne.

Twierdzenie, zawarte we wzorze (2), można łatwo uogólnić. Dajmy na to, że punkt A obraca się około osi z, a siła P jest jakkolwiek skierowana w przestrzeni. Poprowadźmy przez A płaszczyznę **A**, prostopadłą do z i przecinającą tę prostą w punkcie O, i rozłóżmy siłę P na składowe P_1 i P_2, z których pierwsza leży w płaszczyźnie **A**, a druga jest do niej prostopadła, albo równoległa do osi z. Praca elementarna siły P_2 jest zerem, gdyż siła ta działa prostopadle do szybkości, a zatem praca siły P jest równa pracy składowej P_1 czyli równa $Md\varphi$, gdzie M oznacza moment siły P_1 względem O, albo moment siły P względem osi z.

Tak więc *w ruchu obrotowym praca elementarna siły jest równa iloczynowi z momentu tej siły względem osi obrotu przez kąt elementarny.*

Rozważymy teraz inny ważny przypadek szczególny. Niech będą dwa punkty materjalne, zajmujące w danej chwili położenia A_1 i A_2, i przypuśćmy, że wywierają one na siebie nawzajem siły. Według trzeciego prawa Newtona siły te są równe i odwrotne;

oznaczymy każdą z nich przez P i będziemy je uważali za dodatnie, jeżeli są skierowane na zewnątrz odcinka A_1A_2, w razie przeciwnym za ujemne. Chodzi o wyznaczenie sumy prac elementarnych takich dwóch sił.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktów A_1, A_2 odpowiednio przez $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, a kąty kierunkowe prostej A_2A_1 przez α, β, γ. Według (1) prace elementarne obydwóch sił będą

$$P \cos\alpha dx_1 + P \cos\beta dy_1 + P \cos\gamma dz_1$$

i

$$-P \cos\alpha dx_2 - P \cos\beta dy_2 - P \cos\gamma dz_2,$$

a ich suma

$$dL = P[(dx_1 - dx_2) \cos\alpha + (dy_1 - dy_2) \cos\beta + (dz_1 - dz_2) \cos\gamma].$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, przekształcimy w sposób następujący. Oznaczmy przez r odległość A_2A_1. W takim razie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2;$$

a ponieważ $x_1 - x_2 = r \cos\alpha$ i t. d., przeto

$$(dx_1 - dx_2) \cos\alpha + (dy_1 - dy_2) \cos\beta + (dz_1 - dz_2) \cos\gamma = dr.$$

Gdy wprowadzimy to do powyższego wzoru to wypadnie

$$dL = Pdr.$$

Praca dL jest dodatnia, gdy obydwa czynniki P i dr mają znaki jednakowe, t. j. gdy np. siły P są odpychające, i odległość A_1A_2 wzrasta; w razie przeciwnym dL będzie ujemne. Jeżeli odległość punktów jest stała, to $dr = 0$ i suma prac elementarnych obydwóch sił jest zerem.

Gdy np. punkty są połączone lekkim sznurem, którego naprężenie $= S$, a długość $= l$, to praca elementarna naprężenia $= - Sdl$. Jeżeli sznur jest nierozciągalny, to praca naprężenia jest równa zeru.

Wzór $dL = Pdr$ jest ważny i w tym razie, gdy jeden z punktów jest nieruchomy. Wówczas siłę P, działającą na drugi punkt, nazywamy *centralną*, a ten punkt nieruchomy, przez który wciąż przechodzi siła P, zowie się *środkiem siły centralnej*. Tak więc praca elementarna siły centralnej $= Pdr$.

85. Praca całkowita. Przypuśćmy, że punkt materjalny wyszedł z położenia A i doszedł jakimkolwiek torem do położenia B, przyczem wciąż działała nań siła P. Podzielmy tor AB na nieskończenie małe elementy i wyznaczmy dla każdego z nich pracę elementarną, którą wykonała na nim siła P. Sumę tych prac elementarnych nazywamy pracą całkowitą, albo wprost pracą siły P na drodze AB.

Dajmy np. na to, że siła P jest stała co do wielkości i posiada wciąż kierunek szybkości. W takim razie $dL = Pds$ i $L = Ps$, gdzie s oznacza długość toru AB. Jeżeli $P = 1$ kg i $s = 1$ m, to praca jest równa jednemu *kilogramometrowi*. W fizyce jest w użyciu inna jednostka *erg*.

Przypuśćmy, że ciężki punkt materjalny, ważący Q, przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2; pragniemy wyznaczyć pracę siły ciążenia. Obierzmy w taki sposób układ współrzędnych, aby oś z była skierowana pionowo na dół, i oznaczmy w tym układzie współrzędne punktów A_1 i A_2 przez $(x_1 y_1 z_1)$ i $(x_2 y_2 z_2)$. Pracę elementarną wyznaczymy przy pomocy wzoru (1) w paragrafie poprzedzającym. Oczywiście $P_x = P_y = 0$, $P_z = Q$, zatem

$$dL = Qdz,$$

i

$$L = Q\int_{z_1}^{z_2} dz = Q(z_2 - z_1);$$

$z_2 - z_1$ jest różnicą poziomów położeń A_1 i A_2. Widzimy, że praca L zależy jedynie od tej różnicy poziomów, lecz jest niezależna od drogi, którą punkt materjalny przeszedł z jednego położenia do drugiego.

Wyznaczymy jeszcze pracę całkowitą siły centralnej P w przypadku, gdy ta jest funkcją odległości r punktu materjalnego od środka O, gdy np. $P = f(r)$. Dajmy na to, że punkt materjalny przeszedł z położenia A_1 do A_2, i oznaczmy promienie OA_1 i OA_2 odpowiednio przez r_1 i r_2.

Praca elementarna $dL = Pdr$, jak wiemy z paragrafu poprzedzającego, czyli

$$dL = f(r)dr,$$

a zatem praca całkowita

$$L = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr.$$

Oczywiście L zależy tu znowu tylko od r_1 i r_2, czyli od skrajnych położeń punktu materjalnego, lecz jest niezależne od drogi, którą punkt ten przeszedł od jednego z nich do drugiego.

Przypuśćmy dla przykładu, że punkt O przyciąga punkt materjalny z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. W takim razie $P = -\frac{\varkappa}{r^2}$, gdzie $\varkappa$ oznacza współczynnik proporcjonalności, i

$$L = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\varkappa dr}{r^2} = \varkappa\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

W technice obok pracy ważną rolę odgrywa pojęcie *sprawności* siły. Sprawność jest to skalar, równy $\frac{dL}{dt}$. Jeżeli sprawność jest stała, to wynosi ona $\frac{L}{t}$, gdzie L jest pracą, wykonaną w czasie t. Jednostką sprawności jest kilogramometr na sekundę, częściej jednak są w użyciu inne jednostki, a zwłaszcza koń parowy lub mechaniczny (75 kilogramometrów na sekundę) i kilowat.

Ponieważ praca jest równa iloczynowi z siły przez drogę, przeto wymiar pracy $= MLT^{-2} . L = ML^2T^{-2}$. Wymiar sprawności $= ML^2T^{-2} : T = ML^2T^{-3}$.

Prz. 1. Wyznaczyć pracę, którą wykonała ziemska siła ciążenia podczas spadania meteorytu, który na powierzchni ziemi waży 1 kg. (Należy uważać, że ciała są przyciągane do środka ziemi z siłami odwrotnie proporcjonalnemi do kwadratu odległości, i że meteoryt doszedł do ziemi z odległości nieskończenie wielkiej). Odp. 6370000 kilogramometrów.

Prz. 2. Punkt materjalny musi pozostawać na łańcuchowej o parametrze a i jest przyciągany do kierownicy z siłą prostopadłą do tej prostej i proporcjonalną do odległości (współcz. prop. $= k$). Wyznaczyć pracę, którą wykona ta siła, gdy punkt materjalny dojdzie z położenia P do wierzchołka A, jeżeli łuk $PA = s$. Odp. $\frac{ks^2}{2}$.

Prz. 3. Wyznaczyć pracę, wykonaną w ciągu roku przez siłę, z którą słońce przyciąga ziemię.

Prz. 4. Sznur sprężysty, którego współczynnik sprężystości $= E$, posiada w stanie nierozciągniętym długość l. Wyznaczyć pracę potrzebną do wydłużenia tego sznura o a. Odp. $\frac{Ea^2}{2l}$.

Prz. 5. Część łańcucha, ważącego Q i l długiego, leży na stole, a część o długości a zwisa. Jaką pracę wykona siła ciążenia, gdy łańcuch całkowicie zsunie się ze stołu. Odp. $\frac{Q(l^2 - a^2)}{2l}$.

Prz. 6. Balon wzniósł się nad powierzchnię ziemi na bardzo dużą wysokość h; z niego zwisa łańcuch, przyczepiony jednym końcem. Długość łańcucha jest równa a, a jego ciężar na powierzchni ziemi byłby równy Q. W pewnej chwili łańcuch się odczepił; jaką pracę wykona siła ciążenia, zanim łańcuch znajdzie się całkowicie na ziemi. Odp. $\frac{Qr^2}{a}\left(\frac{a}{r}+\lg\frac{r+h-a}{r+h}\right)$.

Prz. 7. Punkt materjalny jest przyczepiony do końca sznura, zarzuconego na gładką tarczę kołową, położoną w płaszczyźnie pionowej. W początku punkt znajdował się na końcu średnicy poziomej, a następnie został wciągnięty do szczytu tarczy ze stałem przyśpieszeniem (stycznem) g. Wyznaczyć stosunek pracy, wykonanej na pierwszej połowie drogi, do pracy, wykonanej na drugiej. Odp. $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{\pi+4-2\sqrt{2}}$.

Prz. 8. Po brzegu okrągłej tarczy, położonej w płaszczyźnie pionowej, wciągnięto punkt materjalny z końca średnicy poziomej do szczytu z przyśpieszeniem stycznem $\frac{g}{\pi}$; współczynnik tarcia $=f$. Wyznaczyć stosunek wykonanej pracy do pracy, którą należałoby wykonać, aby ten sam punkt podnieść wprost na taką samą wysokość. Odp. $\frac{6+f(4-\pi)}{4}$.

Prz. 9. Bardzo ostry stożek, posiadający wierzchołek w środku kuli ziemskiej, a podstawę na powierzchni, jest wypełniony ciałem jednorodnem. Dowieść, że do wyciągnięcia zawartości stożka na powierzchnię potrzebna byłaby praca, któraby wystarczyła do podniesienia tej samej zawartości z powierzchni na wysokość równą piątej części promienia ziemskiego, gdyby nad powierzchnią siła ciążenia się nie zmieniała. Zob. par. 73, prz. 18.

Należy naprzód wyznaczyć pracę, potrzebną do wyciągnięcia jednego elementu stożka.

Prz. 10. Cząsteczki, składające obecnie kulę jednorodną o masie M i promieniu a, były niegdyś rozproszone w przestrzeni w nieskończenie wielkich odległościach jedna od drugiej i zbiegły się dzięki przyciąganiu wzajemnemu, podlegającemu prawu Newtona (współczynnik proporc. $=1$). Jaką pracę wykonały przytem siły przyciągania? Odp. $\frac{3M^2}{5a}$.

Kula tworzy się stopniowo. Po pewnym czasie już część cząsteczek utworzyła kulę o promieniu r i masie $M_r=\frac{4\pi r^3\mu}{3}$, gdy reszta pozostaje jeszcze w odległości nieskończenie wielkiej. Następnie przybywa nowa cząsteczka m, która rozkłada się na kuli w postaci warstwy sferycznej o grubości dr, a zatem $m=4\pi r^2 dr\,.\,\mu$. Siła przyciągania wykonała przytem pracę $\frac{M_r m}{r}$. Sumując, otrzymamy żądaną pracę.

Prz. 11. Powłoka w postaci kuli o promieniu a zawiera gaz o ciśnieniu p (siła na jednostkę powierzchni $=p$). Jaką pracę potrzeba wykonać, aby zapomocą ciśnienia, wywieranego na powłokę, doprowadzić kulę do promienia b? Przyjmujemy przytem, że ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do objętości. Odp. $4\pi a^3 p \lg \frac{a}{b}$.

Prz. 12. Do polerowania podłogi służy kamień, ważący 40 kg; jego współczynnik tarcia o podłogę = 0,3. Robotnik przesuwa kamień 10 razy na minutę o 1,2 m w jedną i drugą stronę. Wyznaczyć sprawność robotnika. Odp. 4,8 kilogramometrów na sek.

Prz. 13. Staw o pojemności 5000 m³ ma być opróżniony zapomocą pompy, której współczynnik użytecznego skutku (stosunek pracy użytecznej do pracy, zużytej do poruszania pompy) = 0,8. Motor rozwija 2 konie parowe, a wodę trzeba odprowadzać na wysokość 3 m. Ile czasu zajmie opróżnienie stawu? Odp. 34 godz. 43 min.

Prz. 14. Koło wodne daje 10 koni par. Jego współczynnik użytecznego skutku = 0,5, a spadek wody wynosi 4 m. Ile metrów sześciennych wody spada na sek. na koło? Odp. 0,375.

Prz. 15. Okręt płynie z szybkością $12\frac{1}{2}$ węzła (to znaczy z szybkością $12\frac{1}{2}$ mili morskiej na godzinę, a mila morska = 1850 m), przyczem maszyna jego daje 6000 koni par. Wyznaczyć opór wody. Odp. 70,05 tonn.

86. Pole sił. Wyobraźmy sobie część przestrzeni, która posiada właściwość następującą: gdziekolwiek umieścimy w niej punkt materjalny, to zawsze na ten punkt działa siła. Taka część przestrzeni nazywa się *polem sił*. Tak np. okolice kuli ziemskiej są polem sił, gdyż tu na każde ciało działa siła ciążenia; nazywamy je *grawitacyjnem polem ziemskiem*. Nasz system planetarny jest pogrążony w grawitacyjnem polu słonecznem, i każde ciało wytwarza naokoło siebie grawitacyjne pole sił, gdyż każde ciało przyciąga okoliczne punkty materjalne.

Są pola sił, w których siły działają tylko na niektóre ciała. Tak np. okolice magnesu są polem sił, ale tylko dla żelaza i niewielu ciał innych. Również tak zw. pole elektrostatyczne, istniejące w okolicach ciała naelektryzowanego, oddziaływa nie na wszystkie ciała. W dalszym ciągu będzie mowa głównie o takich polach, w których siły działają na wszystkie ciała, a więc o polach grawitacyjnych.

Umieśćmy w punkcie A takiego pola punkt materjalny o masie m. Na punkt ten zacznie działać siła P; założymy zgodnie z doświadczeniem, że ta siła jest proporcjonalna do masy, a zatem

$$P = Hm,$$

gdzie H oznacza współczynnik proporcjonalności. Wielkość ta charakteryzuje pod pewnymi względami punkt A i nazywa się natężeniem pola w punkcie A. Jeżeli $m = 1$, to $P = H$, a więc natężenie pola w punkcie A jest to wektor, zgodny co do kierunku i wielkości (liczbowo) z siłą, która działałaby na punkt materjalny o masie jednostkowej, gdyby go umieścić w A.

Ponieważ $H = \frac{P}{m}$, przeto wymiar natężenia $= MLT^{-2} : M = LT^{-2}$. Jest to wymiar przyśpieszenia. W polu ziemskiem, w pobliżu powierzchni ziemi, natężenie jest wszędzie równe g i posiada kierunek pionowy na dół.

Wyjdźmy z punktu A i wędrujmy w kierunku natężenia H aż do nieskończenie bliskiego punktu A_1. Znajdziemy tam natężenie H_1, które wogóle różni się nieskończenie mało od H pod względem wielkości i kierunku. Wędrujmy dalej w kierunku tego nowego natężenia H_1 aż do następnego nieskończenie bliskiego punktu A_2, w którym panuje natężenie H_2. Pójdziemy następnie w kierunku H_2 i t. d. Tym sposobem zakreślimy w polu sił pewną linję; linja taka nazywa się *linją sił.*

Przez każdy punkt pola przechodzi linja sił; natężenie jest wszędzie styczne do tej linji, gdyż posiada z nią dwa nieskończenie bliskie punkty wspólne.

W polu ziemskiem linje sił są linjami prostemi; można uważać, że wychodzą one ze środka kuli ziemskiej i rozchodzą się na kształt promieni. Jeżeli chodzi tylko o niewielką część pola ziemskiego, np. o pole, zawarte w granicach jednej sali, to możemy uważać, że linje sił są równoległe, a więc natężenie jest tu stałe co do wielkości i kierunku. Pole takie nazywamy *jednorodnem.*

Pole sił jest szczególnym przypadkiem pojęcia ogólniejszego, a mianowicie *pola wektorowego.* Nazywamy tak przestrzeń, w której każdemu punktowi odpowiada pewien wektor. Już poprzednio (par. 22) mówiliśmy np. o polu szybkości układu sztywnego. Tam w danej chwili punktowi A pola odpowiada szybkość tego punktu układu, który właśnie przez A przebiega.

W polu szybkości zamiast linij sił mamy *linje szybkości.* Linja szybkości przechodzi przez każdy punkt pola i jest styczna do jego szybkości. Ruch układu sztywnego jest wogóle śrubowy; określają go dwa wektory, a mianowicie szybkość postępowa i szybkość kątowa. Gdyby te wektory od tej chwili zachowały obecną wielkość i kierunek, to oczywiście linje szybkości stałyby się torami punktów; z tego wynika, że linje te są śrubowemi posiadającemi wspólną oś i jednakowe kroki.

Jeżeli owe dwa wektory nie są stałe, to i całe pole szybkości zmienia się z biegiem czasu. Przez dany punkt przestrzeni przebiegają punkty układu z coraz innemi szybkościami, i linje szybkości mają coraz inny przebieg. Pole takie nazywamy zmiennem. Można łatwo wyobrazić sobie również zmienne pole sił, w którem natężenia zmieniają się co do wielkości i kierunku, a linje sił przybierają coraz inną postać. Takie zmienne pola odgrywają ważną rolę w elektrotechnice. Maszyna elekrodynamiczna w najprostszej postaci składa się z masy magnetycznej, która porusza się w zmiennem polu magnetycznem, wytwarzanem przez prąd elektryczny. Siła pola, działająca na masę, wykonywa podczas tego ruchu pracę. Jeżeli ta praca jest dodatnia, to można ją przy pomocy znanych urządzeń mechanicznych przenieść na inne maszyny. Maszynę elektrodynamiczną nazywamy w tym razie *motorem*. Prąd do wytwarzania pola w motorze musi być dostarczany z zewnątrz.

Jeżeli praca siły pola jest ujemna, to maszynę nazywamy *generatorem*. Do poruszania masy magnetycznej trzeba tu doprowadzać pracę z zewnątrz, natomiast w generatorze powstaje prąd, który można zużytkować w stosownych przyrządach*).

Niżej podane przykłady mają ilustrować takie urządzenia, należy jednak uważać, że mamy tam do czynienia z polami grawitacyjnemi i masami zwykłemi.

Prz. 1. Jednorodne pole sił o stałem natężeniu H wiruje ze stałą szybkością kątową ω około osi prostopadłej do linij sił. Wyznaczyć pracę, której podczas n obrotów dostarczy motor, złożony z punktu materjalnego m, osadzonego zapomocą ramienia a na osi równoległej do osi obrotu pola, i posiadający stałą szybkość kątową ω_1.

Przyjmiemy, że ω i ω_1 są skierowane jednakowo. Możemy uważać, że masa m wiruje około osi lub około punktu O pod działaniem siły Hm, która znowu obraca się około m. Dajmy na to, że w początku rachuby czasu siła tworzyła z ramieniem mO kąt α, i że jej moment względem O miał kierunek szybkości ω_1. W takim razie praca, wykonana w okresie od t do $t + dt$, będzie

$$dL = Hma\omega_1 \sin[\alpha + (\omega_1 - \omega)\, t]\, dt \qquad (1).$$

Całkując w granicach od O do $\frac{2\pi n}{\omega_1}$, znajdziemy, że praca szukana

$$L = \frac{Hma\omega_1}{\omega_1 - \omega}\left[\cos\alpha - \cos\left(\alpha + 2\pi n\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1}\right)\right] \qquad (2).$$

*) Istnieją motory i generatory oparte na innej zasadzie. Pole ich jest stałe, ale posiada zamknięte linje sił. Pole tego rodzaju zowie się wielowartościowem, a owe motory i generatory unipolarnemi lub jednobiegunowemi.

Jeżeli ω_1 różni się od ω, to ze wzrostem n praca L oscyluje pomiędzy pewną wartością dodatnią i ujemną, a więc motor nie może dostarczać nieograniczonych ilości pracy. Możliwe to jest tylko w takim razie, gdy $\omega_1 = \omega$. Wówczas z (2) wypadnie $L = \frac{0}{0}$; stosując znaną metodę wyznaczania takich wartości lub wprost z (1), otrzymamy $L = 2Hma\pi n \sin\alpha$. Taki motor zowie się *synchronicznym*. Jeżeli $\alpha < 0$, to L jest ujemne, i mamy generator synchroniczny.

Prz. 2. Pole grawitacyjne pulsuje według prawa $H = H_0 \sin \omega t$. Wynaczyć pracę, której podczas n obrotów dostarczy motor, złożony z masy jednostkowej, osadzonej na osi poziomej zapomocą ramienia a, i wirujący ze stałą szybkością kątową ω_1. Odp. $L = \frac{H_0 a \omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2}\left(\omega_1 \cos\alpha \sin 2\pi n \frac{\omega}{\omega_1} - \omega \sin\alpha \cos 2\pi n \frac{\omega}{\omega_1} + \omega \sin\alpha\right)$, gdzie α oznacza kąt, który w początku rachuby czasu ramię tworzyło z pionem. Motor jest synchroniczny podobnie, jak poprzedni. Pracuje on tylko w takim razie, gdy $\omega_1 = \omega$, i wówczas $L = H_0 a\pi n \cos\alpha$.

87. Potencjał. Przenieśmy w polu sił punkt materjalny o masie m z położenia A_1 do położenia A_2. Podczas ruchu na punkt ten będzie wciąż działała siła pola, a zatem siła ta wykona pewną pracę. Istnieją pola, w których praca ta jest niezależna od tego, jaką drogą punkt m dostał się z A_1 do A_2. Otrzymujemy zawsze jedną i tęż samą pracę, jakakolwiek będzie ta droga. Pole, posiadające taką właściwość, nazywa się *jednowartościowem**).

W grawitacyjnem polu ziemskiem punkty materjalne są przyciągane do środka ziemi, a siły są funkcjami odległości od środka. Widzieliśmy w par. 85, że właśnie w tym razie praca zależy jedynie od położeń pierwotnego i końcowego, a jest niezależna od drogi. Z tego wynika, że pole ziemskie i wogóle wszystkie pola grawitacyjne są jednowartościowe.

Obierzmy w polu jednowartościowem punkt O, który nazwiemy początkiem pola. Przenieśmy następnie punkt materjalny m z O do jakiegoś innego punktu A. Siła pola wykona przytem pracę L. Ponieważ siła jest w każdem położeniu proporcjonalna do masy, przeto i praca L będzie proporcjonalna do m. Będzie więc

$$L = Vm,$$

gdzie V oznacza współczynnik proporcjonalności. Wielkość ta

---

*) Nazwa pochodzi stąd, że w polu takiem potencjał jest jednowartościową funkcją współrzędnych punktu. Nie wszystkie pola sił są jednowartościowe. W polu magnetycznem prądu elektrycznego potencjał jest wielowartościową funkcją współrzędnych, a zatem pole takie jest wielowartościowe. (Ob. przypisek w par. poprzedzającym).

jest także charakterystyczną dla punktu A i nazywa się *potencjałem* tego punktu.

Jeżeli $m = 1$, to $L = V$, a zatem potencjał punktu A jest to skalar, liczbowo równy pracy, którą wykona siła pola, gdy masa jednostkowa przejdzie z początku pola do punktu A. Potencjał $= \frac{L}{m}$, a więc wymiar jego będzie $ML^2T^{-2} : M = L^2T^{-2}$.

Oczywiście potencjał początku pola jest zerem, a potencjały wszystkich punktów zależą od położenia początku. Gdy obierzemy początek inaczej, to wogóle potencjały wszystkich punktów pola się zmienią.

Dajmy na to, że punkt materjalny o masie m przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2, i że potencjały tych punktów są odpowiednio równe V_1 i V_2. Mamy wyznaczyć pracę, którą wykonała przytem siła pola.

Ponieważ droga, którą dążył punkt m od A_1 do A_2, nie wywiera wpływu na pracę, możemy przeto uważać, że droga ta przechodzi przez początek O, i składa się z dwóch części AO_1 i OA_2. Na pierwszej części siła pola wykonała oczywiście pracę $-V_1m$, na drugiej V_2m, a zatem praca całkowita

$$L = (V_2 - V_1)\, m.$$

Jeżeli $m = 1$, to praca L jest liczbowo równa różnicy potencjałów. Jeżeli potencjały punktów A_1 i A_2 są równe, to praca siły pola jest zerem.

Weźmy dla przykładu małą część pola ziemskiego w pobliżu powierzchni ziemi, np. część, zawartą w granicach jednej sali. Początek pola O obierzmy w jednym z punktów sufitu. Gdy punkt materjalny o masie jednostkowej przejdzie z O do jakiegoś punktu A, położonego o z niżej, to siła ciążenia wykona pracę gz, a więc potencjał punktu A wynosi gz. Oczywiście potencjały punktów, położonych na jednym poziomie, są równe.

Poprowadźmy w polu sił powierzchnię, która w każdym ze swych punktów jest normalna do linji sił, przechodzącej przez ten punkt. Gdy będziemy po takiej powierzchni przesuwali punkt materjalny, to siła pola wciąż pozostanie normalną do toru, a zatem praca jej będzie zerem. Z tego wynika, że potencjały wszystkich punktów takiej powierzchni są równe, czyli że jest to miejsce geometryczne punktów jednakowego potencjału. Powierzchnie takie zowią się *ekwipotencjalnemi.*

W grawitacyjnem polu ziemskiem powierzchnie ekwipotencjalne są w przybliżeniu powierzchniami kulistemi, współśrodkowemi z powierzchnią ziemi, gdy zaś chodzi o małą część tego pola, to możemy uważać, że powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami poziomemi.

W dalszym ciągu będzie nieraz mowa o *energji potencjalnej* punktu materjalnego. Nazwa ta ma znaczenie następujące. Przypuśćmy, że punkt materjalny m zajmuje w polu położenie A, gdzie panuje potencjał V; mówimy w takim razie, że punkt m posiada energję potencjalną $-Vm$. Gdybyśmy ten punkt przenieśli do początku pola, to właśnie taką pracę wykonałaby siła pola. Wymiar energji potencjalnej jest oczywiście równy wymiarowi pracy. Energja potencjalna punktu materjalnego, który zajmuje w polu pewne określone położenie, jest zależna od obioru początku pola. Gdy zmienimy początek, to zmieni się i energja.

W małej części pola ziemskiego energja potencjalna punktu m, położonego o z niżej od początku, wynosi $-mgz$.

Prz. Wyznaczyć potencjał punktu, położonego na wysokości h nad powierzchnią ziemi, jeżeli początek pola obrano na powierzchni ziemi.

Odp. $-\dfrac{gh}{1+\dfrac{h}{a}}$, gdzie a oznacza promień kuli ziemskiej.

88. Siła żywa. Dajmy na to, że punkt materjalny o masie m posiada szybkość v. Iloczyn $\dfrac{mv^2}{2}$ nazywamy *siłą żywą,* albo *energją cynetyczną* punktu *). Siła żywa jest skalarem, gdyż nie przypisujemy jej kierunku, i posiada ten sam wymiar, co i praca.

Przypuśćmy, że na punkt m działa siła P, tworząca z szybkością v kąt ϑ. Składowa styczna jest równa $P\cos\vartheta$, a zatem

*) Nazwę *siła żywa* (vis viva) wprowadził Leibniz w wieku siedemnastym. Wówczas znaczenie wyrazu siła było rozleglejsze, niż dzisiaj. Jeszcze niezbyt dawno nazywano siłami różne rodzaje energji, a i obecnie mówi się nieraz o „siłach natury“, „siłach społecznych“ i t. d. W nauce jednak, a przynajmniej w naukach ścisłych, znaczenie tego wyrazu doznało z biegiem czasu dużych ograniczeń, i dziś nazywa się tak tylko wektor, stanowiący podstawowe pojęcie mechaniki. Siła żywa nie jest siłą w tem znaczeniu, i z tego względu wielu uważa tę nazwę za nielogiczną. Pomimo to utrzymała się ona we wszystkich językach europejskich dzięki parowiekowej tradycji i, jak wykazuje doświadczenie, nie wywołuje żadnych nieporozumień. Niektórzy autorowie, zwłaszcza angielscy, nazywają mv^2 siłą żywą, a $\dfrac{mv^2}{2}$ energją cynetyczną.

$$m\frac{dv}{dt}=P\cos\vartheta.$$

Pomnóżmy obydwie strony przez element toru ds. Skutkiem tego lewa strona przekształci się tak: $m\frac{ds}{dt}dv=mvdv=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a zatem będzie

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=P\cos\vartheta ds \qquad (1),$$

czyli *elementarny przyrost siły żywej punktu materjalnego jest równy pracy elementarnej siły, działającej na ten punkt.*

Twierdzenie to wyraża tak zw. *zasadę siły żywej* w postaci różniczkowej.

Jeżeli siła P jest wypadkową pewnej liczby składowych, to możemy powiedzieć, że przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych tych składowych.

Zasada siły żywej wynika również bezpośrednio z równań ruchu, przytoczonych w par. 74. Równania te można napisać w postaci

$$m\frac{dv_x}{dt}=P_x, \qquad m\frac{dv_y}{dt}=P_y, \qquad m\frac{dv_z}{dt}=P_z.$$

Pomnóżmy je odpowiednio przez dx, dy, dz i dodajmy stronami. Wypadnie

$$m(v_x dv_x+v_y dv_y+v_z dv_z)=P_x dx+P_y dy+P_z dz.$$

Lewa strona $=d\left[\frac{m(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)}{2}\right]=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a prawa jest znanem wyrażeniem pracy elementarnej.

Przypuśćmy, że punkt materjalny przeszedł na swym torze z położenia A_1 do położenia A_2, i że działała nań siła P. Podzielmy tor A_1A_2 na nieskończenie małe elementy. Na każdym z nich siła żywa otrzymała pewien przyrost, i siła P wykonała pewną pracę, i ten przyrost siły żywej jest równy tej pracy. Można powiedzieć, że siła P na każdym elemencie toru wytwarza pewną ilość siły żywej, i ta dołącza się algebraicznie do dotychczasowej siły żywej punktu materjalnego. Oczywiście *całkowity przyrost siły żywej na drodze A_1A_2 jest równy całkowitej pracy siły P na tej drodze.* W twierdzeniu tem mamy zasadę siły żywej w postaci całkowej.

Dajmy na to, że punkt materjalny m porusza się w polu sił i w pewnej chwili przebiegał przez punkt A z szybkością v. Potencjał punktu A niech będzie V. W położeniu A punkt m posiadał siłę żywą, czyli energję cynetyczną $\frac{mv^2}{2}$ i energję potencjalną $-Vm$. Suma tych energij, czyli $\frac{mv^2}{2}-Vm$ nazywa się *energją całkowitą* punktu materjalnego.

Przypuśćmy, że punkt materjalny m przebiegał z koleji z szybkościami v_0 i v położenia A_0 i A, w których panują potencjały V_0 i V. Całkowity przyrost siły żywej na tej drodze wynosi $\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}$, a całkowita praca siły pola $mV-mV_0$. W myśl zasady sił żywych

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mV-mV_0,$$

czyli

$$\frac{mv^2}{2}-mV=\frac{mv_0^2}{2}-mV_0.$$

Widzimy, że energja całkowita nie uległa zmianie. Tak więc, gdy punkt materjalny porusza się w polu jednoznacznem, to jego energja całkowita jest wielkością stałą.

Dajmy na to, że zjawisko odbywa się w niewielkiej części pola ziemskiego, i że punkty A_0, A leżą odpowiednio o z_0, z niżej od początku. W takim razie

$$\frac{mv^2}{2}-mgz=\frac{mv_0^2}{2}-mgz_0,$$

z czego wynika, że

$$v^2=v_0^2+2g(z-z_0);$$

jest to równanie, które otrzymaliśmy bezpośrednio w par. 76.

Prz. 1. Sprawność lokomotywy pociągu o masie M jest stała i równa H; również całkowity opór F, który pociąg spotyka na drodze, jest stały. W jakim czasie od wyruszenia ze stacji pociąg osiągnie szybkość v.

Odp. $\frac{M}{F}\left[\frac{H}{F}\lg\frac{H}{H-Fv}-v\right]$.

Prz. 2. Robotnik wyciągnął przy pomocy linki i bloka nieruchomego wiadro o masie m ze studni o głębokości h. Cała czynność trwała t sek.; z początku robotnik wywierał siłę stałą, następnie wypuścił linkę, i wiadro po pewnym czasie zatrzymało się dokładnie u wylotu studni. Wyznaczyć największą sprawność, z jaką pracował robotnik. Odp. $\frac{2mg^2ht}{gt^2-2h}$.

Prz. 3. Paciórka o masie m, nawleczona na gładki krzywy drut, otrzymała początkową szybkość v_0 i podlegała dalej działaniu siły P. Gdyby taka sama paciórka swobodna otrzymała początkową szybkość u_0 i podlegała działaniu takiej samej siły P, to tor jej nie różniłby się od linji drutu. Wyznaczyć reakcję drutu na paciórkę w funkcji promienia krzywizny. Odp. $\frac{m(v_0^2-u_0^2)}{\rho}$.

Prz. 4. Punkt materjalny leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej w odległości l od punktu O i jest z nim połączony sprężystą nicią, której naturalna długość $= l$. Wyznaczyć największą odległość, o którą punkt materjalny odsunie się od O, otrzymawszy uderzenie, skierowane pod kątem α do przedłużenia nici. Gdyby takie same uderzenie zostało wymierzone w kierunku przedłużenia nici, to największa odległość wyniosłaby $2l$.

Wyznaczamy naprzód szybkość v_0, którą dane uderzenie udzieliło punktowi. Gdyby było ono skierowane wzdłuż nici, to w położeniu skrajnem szybkość byłaby równa zeru, a przyrost siły żywej $-\frac{mv_0^2}{2}$. Przyrost ten musi być równy pracy naprężenia nici czyli $-\frac{El}{2}$ (par. 85, prz. 4). Stąd wynika, że $v_0 = kl$, gdzie $k^2 = \frac{E}{ml}$. W przypadku danym, gdy uderzenie wymierzono ukośnie, w położeniu skrajnem $v_r = 0$ i $v = v_\varphi$. Aby wyznaczyć v_φ w funkcji promienia wodzącego, należy wziąć pod uwagę, że $p_\varphi = 0$. Ostatecznie znajdzemy, że szukana odległość jest największym pierwiastkiem równania $r^4 - 2lr^3 + l^4 \sin^2\alpha = 0$.

89. Zasada ilości ruchu. Niech będzie punkt materjalny o masie m, posiadający w danej chwili szybkość v. Nazywamy *ilością ruchu* wektor, zgodny co do kierunku z szybkością v, a co do wielkości równy mv. Wektor ten, tak samo jak szybkość v, jest związany z punktem m i posiada wymiar MLT^{-1}.

Jeżeli rzut szybkości v na jakąś prostą x jest równy v_x, to oczywiście rzut ilości ruchu na tę prostą jest równy mv_x. Mówimy, że punkt m posiada w kierunku prostej x ilość ruchu mv_x.

Dajmy na to, że szybkość przybrała elementarny przyrost geometryczny δv. Oczywiście ilość ruchu przybierze w takim razie przyrost zgodny co do kierunku z δv, a co do wielkości równy $m\delta v$. Napiszemy, że

$$\delta(mv) = m\delta v.$$

Znak $=$ ma oznaczać zgodność nie tylko co do wielkości, lecz i co do kierunku.

W tym samym czasie rzut szybkości na oś x przybiera przyrost dv_x, równy rzutowi δv, a rzut ilości ruchu przybiera przyrost $d(mv_x)$, równy rzutowi $\delta(mv)$.

Przypuśćmy, że w danej chwili na punkt m działa siła P. Możemy uważać, że w ciągu następnego okresu dt siła ta ani pod względem kierunku ani wielkości nie ulegnie zmianie. Wprowadzimy nowy wektor, a mianowicie *popęd* albo *impuls elementarny* siły P. Nazywamy tak wektor zgodny co do kierunku z siłą P, a co do wielkości równy Pdt. Popęd posiada ten sam wymiar, co ilość ruchu, a mianowicie MLT^{-1}.

Jeżeli rzut siły P na prostą x jest równy P_x, to oczywiście rzut popędu elementarnego na tę prostą jest równy $P_x dt$. Mówimy, że popęd siły P w kierunku prostej x jest równy $P_x dt$.

Siła P nadaje punktowi m przyśpieszenie $\frac{P}{m}$, posiadające zgodny z nią kierunek, i

$$\delta v = \frac{P}{m} dt;$$

znak $=$ wyraża tu znowu zgodność co do wielkości i kierunku. Z równania tego wynika, że

$$\delta(mv) = Pdt;$$

znaczy to, że *przyrost elementarny ilości ruchu jest zgodny co do wielkości i kierunku z popędem elementarnym siły.*

W twierdzeniu tem zawiera się tak zw. zasada ilości ruchu w postaci różniczkowej. Możemy uważać, że w ciągu każdego elementu czasu siła P wytwarza nową ilość ruchu, która dołącza się geometrycznie do dotychczasowej ilości ruchu punktu materjalnego. Jeżeli na punkt materjalny działa większa liczba sił, to każda z nich wytwarza w czasie dt przyrost ilości ruchu, równy jej popędowi, i wszystkie te przyrosty dodają się geometrycznie do poprzedniej ilości ruchu punktu.

Oczywiście

$$d(mx_x) = P_x dt,$$

t. j. *przyrost elemertarny ilości ruchu w dowolnym kierunku jest równy popędowi elementarnemu siły w tymże kierunku.*

Można byłoby nadać zasadzie powyższej postać całkową, ale nie przyniosłoby to wyraźnej korzyści

90. Wektor G. Zasada ilości ruchu jest szczególnie użyteczna w tym razie, gdy mamy do czynienia nie z jednym, lecz z większą liczbą punktów materjalnych.

Niech będą punkty materjalne m_1, m_2..., posiadające w danej chwili szybkości v_1, v_2... Mówimy, że punkty te tworzą układ punktów materjalnych. Obrawszy dowolnie w przestrzeni punkt O (nazwiemy go *środkiem redukcji*), utwórzmy układ wektorów, posiadających początek w O i zgodnych z ilościami ruchu punktów m_1, m_2... zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku.

Mamy teraz wektory m_1v_1, m_2v_2..., posiadające wspólny początek, możemy zatem wyznaczyć ich wypadkową. Oznaczymy ją literą G i będziemy nazywali *ilością ruchu układu* m_1, m_2..., lub krócej *wektorem* G. Oczywiście ani wielkość ani kierunek wektora G nie zależy od położenia środka redukcji.

Z biegiem czasu wektor G zmienia się co do wielkości i kierunku, i ze zmian tych można wyciągnąć pewne wnioski, dotyczące ruchu układu. Możnaby porównać ten wektor do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne zmiany, które zachodzą w układzie punktów. Zobaczymy, jaki wpływ wywierają na wektor G siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy więc, że na punkt m, należący do układu, działa siła P. Wytworzy ona w czasie dt przyrost geometryczny $\delta(mv)$ ilości ruchu punktu m, równy jej popędowi elementarnemu Pdt. Oczywiście taki sam przyrost otrzyma składowa mv wektora G, i taki sam przyrost otrzyma sam wektor G. Tak więc każda siła, działająca na którykolwiek punkt układu, wytwarza co dt sek. pewien przyrost wektora G, i te wszystkie przyrosty dołączają się geometrycznie do dotychczasowej wartości G. W ten sposób zmienia się ten wektor z biegiem czasu.

Siły, działające na różne punkty układu, można podzielić na dwie kategorje, *siły zewnętrzne* i *siły wewnętrzne*. Zewnętrzną nazywamy siłę, która pochodzi od punktu materjalnego lub ciała, nie należącego do układu. Jeżeli np. układ porusza się w polu sił, i ciało, które to pole wytwarza, nie zostało zaliczone do układu, to siły pola uważamy za zewnętrzne.

Wewnętrznemi nazywamy te siły, które jedne z punktów układu wywierają na drugie. Tak np. siły przyciągania, istniejące pomiędzy punktami układu, są wewnętrzne. Albo przypuśćmy, że punkty m_1 i m_2 są połączone lekką nicią. Możemy powiedzieć, że naprężenie nici, działające na punkt m_1, jest to siła, którą punkt m_2 wywiera na m_1 za pośrednictwem nici, i odwrotnie, a zatem naprężenia nici są siłami wewnętrznemi.

Siły wewnętrzne występują zawsze parami. Jeżeli punkt m_1 wywiera pewną siłę na m_2, to m_2 wywiera na m_1 siłę równą i odwrotną. Oczywiście takie dwie siły wytworzą w czasie dt przyrosty równe i odwrotne wektora G, a suma takich przyrostów jest zerem. Z tego wynika, że *siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor G*. Wektor ten może się zmieniać co do wielkości i kierunku tylko pod działaniem sił zewnętrznych.

Twierdzenie to posiada bardzo doniosłe znaczenie; jemu właśnie zasada ilości ruchu zawdzięcza swą ogromną użyteczność.

Jeżeli na układ punktów materjalnych żadne siły zewnętrzne nie działają, to układ taki nazywa się *izolowanym*. Ilość ruchu układu izolowanego jest stała co do wielkości i kierunku.

Prz. U lewego końca belki wagowej wisi naczynie z wodą A, a do niego zapomocą sznurów jest przyczepione próżne naczynie B. W dnie pierwszego naczynia znajduje się otwór, zatkany korkiem. Na prawym końcu belki wisi ciężar, ważący tyleż, co obydwa naczynia razem, a zatem wszystko pozostaje w równowadze. W pewnej chwili korek wypadł, i woda zaczęła wylewać się z naczynia A do B. W którą stronę odchyli się belka wagowa?

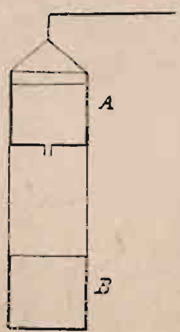

Fig. 70.

Na cały układ, złożony z naczyń i wody, działają dwie siły zewnętrzne, a mianowicie siła ciążenia i naprężenie sznura, na którym jest zawieszone naczynie A; pierwsza jest stała, druga może się zmieniać. Gdy strumień wody jeszcze nie dosięgnął dna naczynia B, to ilość ruchu wzrasta, a zatem naprężenie jest mniejsze od siły ciążenia, i lewa strona belki idzie do góry; gdy woda zbiera się w naczyniu B, to ilość ruchu się nie zmienia, obydwie siły zewnętrzne są równe, i waga pozostaje w spokoju. Wreszcie, gdy resztki wody wyszły z naczynia A, lecz jeszcze nie doszły do B, to lewa strona opada.

Doświadczenie powyższe wykonał Galileusz, pragnąc zbadać, jaką siłę wywiera strumień wody na naczynie B.

91. Siła żywa układu. Zasada ilości ruchu posiada rozleglejszy zakres zastosowań, niż zasada siły żywej. Jest to następstwem okoliczności następującej. Ilość ruchu układu punktów materjalnych, jak widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, nie zależy od sił wewnętrznych układu, ale twierdzenie analogiczne, dotyczące siły żywej, byłoby niesłuszne.

Weźmy układ m_1, m_2..., który rozważaliśmy w par. poprzedzającym. Suma sił żywych wszystkich punktów, czyli $\Sigma \frac{mv^2}{2}$, nazywa się *siłą żywą układu*. Siła żywa każdego punktu otrzymuje w czasie dt przyrost równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na ten punkt, a zatem siła żywa układu otrzyma w tymże czasie przyrost, równy sumie prac elementarnych sił, działających na różne punkty układu.

W wytwarzaniu siły żywej biorą tu udział zarówno siły wewnętrzne, jak i zewnętrzne.

Przypuśćmy np., że punkty m_1 i m_2 wywierają na siebie nawzajem siły P i P równe i odwrotne. Według par. 84 siły te wykonają razem w czasie dt pracę Pdr, gdzie dr oznacza przyrost odległości pomiędzy punktami w tymże czasie; powstanie zatem nowa ilość siły żywej, równa tej pracy, a więc wogóle różna od zera. Jak ta nowowytworzona siła żywa podzieli się pomiędzy punkty m_1 i m_2, to zależy od różnych innych okoliczności, ale w każdym razie suma sił żywych tych punktów, a więc i siła żywa całego układu otrzyma przyrost dodatni lub ujemny, równy tej pracy elementarnej.

Siły wewnętrzne tylko w tym razie nie wywierają wpływu na siłę żywą układu, gdy wszystkie dr są zerami, czyli gdy odległości pomiędzy punktami się nie zmieniają. Mówimy w tym razie, że układ jest *sztywny*. Do sprawy tej powrócimy jeszcze w dynamice ciał sztywnych i zobaczymy, że tam nabiera ona pierwszorzędnego znaczenia.

Jeżeli odległości pomiędzy punktami układu nie są stałe, a pragniemy zastosować do badania ruchu zasadę sił żywych, to musimy wprowadzić do rachunku siły wewnętrzne, a ponieważ siły te są zwykle nieznane, powiększymy więc tym sposobem liczbę niewiadomych i utrudnimy sprawę.

Stosując zasadę siły żywej, należy być bardzo ostrożnym, gdyż łatwo tu wpaść w błędy. Jako ilustrację do tej uwagi przytoczymy przykład, który można uważać za typowy.

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch punktów materjalnych m_1 i m_2, leżących na gładkiej płaszczyźnie poziomej i połączonych tak zwaną „nicią nierozciągalną", czyli niesprężystą, o długości l. Odległość pomiędzy punktami jest, dajmy na to, znacznie mniejsza od l, a zatem nić leży luźno. Nadajmy punktowi m_1 szybkość v, skierowaną według linji, łączącej obydwa punkty, w stronę od m_2. Dopóki nić się nie wyprostuje, punkt m_1 będzie się poruszał, jak gdyby był zupełnie swobodny, ze stałą szybkością v, a całkowita siła żywa układu będzie wciąż równa $\frac{m_1 v^2}{2}$. Po wyprostowaniu nici obydwa punkty będą biegły z jednakową szybkością, np. u, a siła żywa wyniesie $\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$. Chodzi teraz o to, czy te siły żywe są równe.

Ponieważ możemy uważać, że siły zewnętrzne nie istnieją (siły ciążenia równoważą się stale z reakcją płaszczyzny), przeto odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, czy siły wewnętrzne, t. j. naprężenia nici, wykonały jaką pracę, różną od zera. Narzuca się samo przez się rozumowanie następujące.

Przed wyprostowaniem nici siły wewnętrzne nie istniały, bo naprężenie jej było zerem; po wyprostowaniu naprężenie mogło być duże, ale odległość pomiędzy punktami nie mogła się zmieniać, skoro nić jest „nierozciągalna", a zatem i wówczas, według par. 84 praca sił wewnętrznych nie mogła być różna od zera. Z tego wynika, że siła żywa układu po wyprostowaniu nici powinna być taka sama, jak przed wyprostowaniem.

Wniosek taki byłby zupełnie mylny. W rozumowaniu powyższem założyliśmy w milczeniu, że całe zjawisko składa się z dwóch okresów; w pierwszym porusza się tylko punkt m_1 z szybkością v, w drugim obydwa punkty z szybkością u. Przejście od jednego okresu do drugiego odbywa się w jednej chwili („chwili" w znaczeniu, wyjaśnionem w par. 14); w jednej chwili szybkość punktu m_1 z v spada do u, i szybkość punktu m_2 od zera przeskakuje do u.

Takiego skutku nie mogłaby wywołać żadna siła skończona dowolnie wielka; trzebaby tu mówić o siłach i przyśpieszeniach nieskończenie wielkich, t. j. używać wyrazów, którym w naturze nie odpowiada nic realnego. Z drugiej strony nić posiada wytrzymałość ograniczoną i zrywa się, gdy naprężenie dojdzie do pewnej określonej granicy. Przy wyżej opisanym przebiegu zjawiska naprężenie z pewnością przekroczyłoby ową granicę, a zatem nić musiałaby się zerwać. Skoro to nie nastąpiło, to przebieg zjawiska musiał być inny.

Oczywiście pomiędzy pierwszym okresem i drugim istnieje jeszcze okres przejściowy. Trwa on niezmiernie krótko, ale w każ dym razie przejście nie odbywa się w jednej chwili. W ciągu tego okresu przejściowego szybkość punktu m_1 stopniowo spada do u, a szybkość punktu m_2 stopniowo wzrasta do u, a zatem pierwsza jest wciąż większa od drugiej. Z tego wynika, że nić musi się wydłużać, a więc nie jest nierozciągalna.

Przyjmując, że nić jest nierozciągalna, przypisywaliśmy jej właściwość, której żadne ciało w naturze nie posiada, i to doprowadziło do mylnego wniosku. Każda nić, czy sznur, rozciąga się pod działaniem sił. Jeżeli te siły są małe, to nić zwykła (niesprężysta) wydłuża się nieznacznie; w wielu przypadkach możemy to wydłużenie pominąć, i wówczas mówimy o nici nierozciągalnej. W danym razie siły są duże, gdyż przyśpieszenia punktów w okresie przejściowym są bardro wielkie. Z tego wynika, że wydłużenie nici jest stosunkowo znaczne i wywiera wpływ zasadniczy na przebieg zjawiska.

Tak więc w okresie przejściowym odległość pomiędzy punktami się zmienia, a zatem praca naprężeń nici nie jest zerem. Okres ten trwa wprawdzie bardzo krótko, ale ponieważ siły są duże, przeto praca całkowita może być znaczna; nie mamy więc prawa zakładać, nawet w przybliżeniu, że siła żywa pozostaje bez zmiany. Zobaczymy zaraz, że istotnie siła żywa się zmienia.

Siły wewnętrzne, działające w okresie przejściowym, nie wywrą wpływu na ilość ruchu układu; ilość ta w pierwszym okresie wynosi $m_1 v$, a w drugim $(m_1 + m_2)u$, a zatem

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u \qquad (1),$$

skąd

$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Z tego wynika, że w okresie drugim siła żywa układu wynosiła $\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$, a więc zmniejszyła się w okresie przejściowym o

$$\frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Jeżeli np. $m_2 = m_1$, to układ traci połowę siły żywej.

Prz. 1. Dwa jednakowe punkty materjalne, połączone nicią nierozciągalną, leżą na gładkim stole. Jeden z nich otrzymał szybkość v, i w chwili wyprostowania nici punkty zajmują położenia A_1 i A_2. Wyznaczyć wykreślnie szybkości u_1 i u_2 tych punktów po wyprostowaniu.

Ponieważ masy punktów są równe, możemy przeto wyrażać ilości ruchu temi samemi odcinkami, co i szybkości. Należy skorzystać jeszcze i z tej okoliczności, że po wyprostowaniu nici ruch punktów będzie taki, jak gdyby należały do układu sztywnego. Załączony rysunek (Fig. 71) zawiera rozwiązanie.

Prz. 2. Masa m jest połączona sznurami z dwiema masami m_1; sznury te przechodzą przez bloki, urządzone na jednym poziomie w odległości $2a$, a masa m pozostaje w spokoju na linji bloków w środku pomiędzy nimi. Jak głęboko zatrzyma się masa m, gdy pozwolimy jej spadać?

Rozważamy układ złożony ze wszystkich trzech mas. Przyrost jego siły żywej jest równy sumie prac sił ciążenia. Masa m zatrzyma się w odległości $\frac{4mm_1a}{4m_1^2 - m^2}$ od linji bloków.

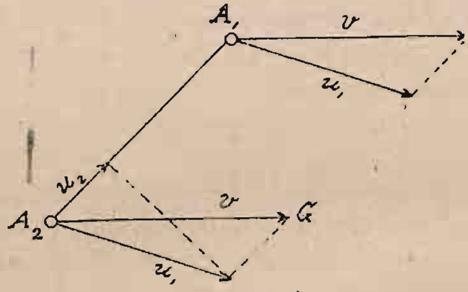

Fig. 71.

Prz. 3. Sznur bez końca o długości $2l$ przechodzi przez dwa gładkie poziome kołki, leżące na jednym poziomie. Na sznur są nawleczone dwie paciórki o masach m i M. Pierwszą z nich podnosimy do punktu środkowego linji kołków i następnie pozwalamy jej spadać. Jaka powinna być odległość pomiędzy kołkami, aby paciórki doszły tylko do spotkania? Odp, $\frac{(3M+m)(M-m)l}{(M+m)^2}$.

Prz. 4. Do końców sznura, przechodzącego przez blok, są przywiązane ciężary M i m. Z nich większy M spoczywa na podłodze, a mniejszy m wisi na pewnej wysokości nad podłogą. Ciągnąc za sznur po stronie ciężaru M podnosimy m jeszcze o h wyżej. Jak wysoko uniesie się M po wyswobodzeniu sznura?

Przed samem wyprężeniem sznura ciężar m posiada szybkość $\sqrt{2gh}$. Potem następuje szarpnięcie, z którego zawsze wynika strata siły żywej. Po wyprężeniu sznura obydwa ciężary posiadają szybkość v; ze względu na wzmiankowaną stratę nie mamy prawa do wyznaczania tej szybkości stosować zasady sił żywych, natomiast nadaje się tu zasada ilości ruchu.

W okresie przejściowym, t. j. podczas wyprężania sznura, ciężar m stracił ilość ruchu $m(\sqrt{2gh} - v)$, a M zyskał Mv. W tym okresie na ciężary działały przedewszystkiem naprężenia sznura; były to siły zmienne i bardzo wielkie. Prócz tego działały jeszcze siły ciążenia, oraz w pierwszej chwili reakcja podłogi na M; są to siły stosunkowo małe i w okresie przejściowym, trwającym niezmiernie krótko, nie mogą wywrzeć wyraźnego wpływu na ilości ruchu ciężarów, możemy je przeto pominąć.

Przyjmujemy, że blok jest zupełnie gładki, a sznur doskonale giętki, a zatem naprężenia w obydwóch końcach sznura są jednakowe. Wytwarzają one w okresie przejściowym równe ilości ruchu, a zatem $m(\sqrt{2gh} - v) = Mv$. Stąd znajdziemy v. Do wyznaczenia wysokości żądanej możemy zastosować zasadę sił żywych. Wypadnie $\frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$.

Prz. 5. Dwie jednakowe masy M są przyczepione do końców sznura maszyny Atwooda i początkowo pozostają w spokoju w odległości $2a$ jedna od drugiej. Na jedną z mas kładziemy płytkę dodatkową o masie m. Masy M przechodzą jednocześnie przez nieruchome pierścienie, ustawione na jednym poziomie, przyczem pierwsza pozostawia na pierścieniu swą płytkę dodatkową, gdy druga jednocześnie zabiera z pierścienia taką samą inną płytkę. Wyznaczyć szereg kolejnych odchyleń mas M od poziomu pierścieni. Odp. $\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^2 a$, $\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^4 a$...

Prz. 6. Trzy jednakowe punkty A, B, C, połączone nierozciągalną nicią tak, że $AB = BC$, leżą na gładkim stole na linji prostej, i nić jest wyciągnięta. Nadajemy jednocześnie punktom skrajnym A i C szybkości v prostopadłe do nici; jaką szybkość będzie miał każdy punkt przed samą chwilą spotkania tych punktów skrajnych? Odp. Punkt środkowy $\frac{2v}{3}$, skrajne $\frac{v\sqrt{7}}{3}$.

W tym razie nie zmieni się ani ilość ruchu ani siła żywa. Oznaczmy przez u szybkość punktu B i przez w składową szybkości punktu A w kierunku prostopadłym do AB, czyli szybkość A względem B, w chwili, o którą chodzi. W takim razie będzie $2mv = 3mu$ i $\frac{3mu^2}{2} + \frac{2mw^2}{2} = \frac{2mv^2}{2}$.

Prz. 7. Punkt materjalny o masie M obiega koło na gładkiej płaszczyźnie poziomej, będąc przywiązany do środka nierozciągalną nicią. W pewnej chwili M uderza o inny punkt materjalny o masie m, pozostający dotychczas w spoczynku. Punkty zlepiają się i dalej obiegają razem to samo koło. W jakim stosunku zmieni się naprężenie nici? Odp. Stosunek nowego naprężenia do poprzedniego $\frac{M}{M+m}$.

Prz. 8. Kula dęta o masie m leży na płaszczyźnie poziomej i zawiera punkt materjalny o takiej samej masie. Punkt ten jest przywiązany sprężystą nicią do najwyższego punktu A kuli i nicią nierozciągalną do najniższego punktu. Normalna długość nici górnej $= a$, obecna długość $= a + c$. W pewnej chwili nić dolna pękła, punkt m dobiegł do A i przylgnął tam do kuli; zauważono przytem, że kula podskoczyła o h w górę. Wyznaczyć współczynnik sprężystości nici górnej. Odp. $\frac{2mga(a + c + 4h)}{c^2}$.

Interesująca w tem zagadnieniu jest kwestja taka: przed zerwaniem nici ilość ruchu układu, złożonego z kuli i punktu, jest zerem, po zerwaniu ilość ta w kierunku pionowym wzrasta; chodzi o to, jakie siły zewnętrzne wytwarzają tę ilość ruchu. Na układ działają tylko dwie siły zewnętrzne, a mianowicie siła ciążenia i reakcja płaszczyzny. Oczywiście nowe ilości ruchu mogą powstawać tylko dzięki przewadze drugiej nad pierwszą, należy więc rozważyć, jak zmienia się reakcja po zerwaniu nici

Prz. 9. Na gładkim poziomym stole leżą dwa punkty materjalne M i m, połączone nicią nierozciągalną. Nić przechodzi przez gładki pierścień O, przymocowany do stołu i jest wyciągnięta, a początkowa odległość M od O jest równa c. Jaki tor będzie obiegał punkt M, otrzymawszy szybkość prostopadłą do kierunku nici OM? Odp. Obrawszy O za biegun i pierwotne położenie nici OM za oś biegunową, znajdziemy równania ruchu

$$r^2 = A^2t^2 + c^2 \text{ i } \varphi = \frac{v_0}{A} \operatorname{arctan} \frac{At}{c}, \text{ gdzie } A = \frac{Mv_0^2}{M+m},$$

Równanie toru będzie $r = \dfrac{c}{\cos\left(\varphi\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}\right)}$.

Prz. 10. Trzy jednakowe punkty materjalne, pomiędzy któremi istnieje odpychanie wprost proporcjonalne do odległości (współcz. proporc. $= k$), leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej i są połączone równemi nierozciągalnemi nićmi. Przecinamy jedną z nici; jaką szybkość kątową będą miały nici pozostałe, gdy kąt pomiędzy niemi stanie się równym ϑ? Odp. $\omega^2 = \dfrac{3k(1-2\cos\vartheta)}{2(2+\cos\vartheta)}$.

Należy tu przedewszystkiem zdać sobie sprawę z tego, jaki będzie ruch punktu średniego. Ilość ruchu całego układu się nie zmienia, a zatem suma rzutów ilości ruchu wszystkich trzech punktów, np. na kierunek szybkości punktu średniego, pozostaje zerem. Natomiast siła żywa przybiera przyrosty, i przyrost całkowity jest równy pracy, wykonanej przez siły odpychania; praca ta daje się łatwo wyznaczyć.

Prz. 11. Dwa jednakowe punkty materjalne A, B są połączone nierozciągalną nicią o długości l. Punkt A leży na gładkim stole, nić jest wyciągnięta prostopadle do brzegu, a punkt B wysuwamy tuż poza brzeg stołu. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu A zaraz po zejściu tegoż ze stołu.

Rozważamy ruch układu w dwóch chwilach, bezpośrednio poprzedzającej zejście punktu A ze stołu i zaraz następnej. Ilości ruchu układu w kierunkach pionowym i poziomym w tych chwilach różnią się znikomo mało, a z tego wyniknie, że szybkości punktów w drugiej wynoszą $\frac{1}{2}\sqrt{5gl}$ i $\sqrt{gl}$. Szukany promień krzywizny $= \dfrac{5\sqrt{5}}{12} l$.

Prz. 12. Dwa jednakowe punkty materjalne A i B są połączone nicią o długości a, której środek C jest umocowany na gładkim poziomym stole. Punkty krążą około C w tę samą stronę z jednakowemi szybkościami, a kąt ACB jest prosty. W pewnej chwili wyswobadzamy punkt C; wyznaczyć promienie krzywizny torów punktów A, B zaraz po wyprężeniu nici.

Odp. $\dfrac{5\sqrt{5}\,a}{4}$ i ∞.

Prz. 13. Ciężki jednorodny łańcuch wypełnia cienką gładką rurkę, posiadającą kształt ćwiartki okręgu o promieniu a; jeden z promieni granicznych tej ćwiartki jest pionowy, a drugi poziomy. Łańcuch zaczyna spadać ze stanu spoczynku; wyznaczyć szybkość jego w chwili, gdy górny koniec wychodzi z rurki.

Odp. $\sqrt{\dfrac{ga(\pi^2+8)}{2\pi}}$.

Prz. 14. Dwa wiadra o masach m_1, m_2 i wysokościach h wiszą na końcach linki, przerzuconej przez lekki blok, i na dnie pierwszego siedzi żaba o masie μ. W chwili, gdy wiadra były w spokoju, żaba podskoczyła pionowo w górę, i zauważono, że dosięgnęła górnego brzegu wiadra. Wyznaczyć bezwzględną wysokość, na którą wzbiła się żaba, oraz czas, po którym znalazła się znowu na na dnie wiadra.

Odp. Szukana wysokość $\dfrac{2m_1(m_1+m_2)h}{(\mu+m_1+m_2)^2}$, czas $2\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)h}{m_2 g}}$. Należy tu rozważyć, jaką szybkość względną posiada żaba w chwili, gdy dochodzi do brzegu.

92. Siły chwilowe. Powróćmy jeszcze do przykładu, który rozważaliśmy w paragrafie poprzedzającym. W okresie przejściowym, trwającym bardzo krótko, nić wywiera na obydwa punkty materjalne siły bardzo wielkie. Tego rodzaju siły, bardzo wielkie, lecz trwające bardzo krótko, nazywamy *chwilowemi*.

Siły chwilowe w czasie swego krótkiego trwania zmieniają się zwykle w rozległych granicach. Tak np. w przykładzie naszym siły chwilowe w samym początku okresu przejściowego są zerami, następnie gwałtownie wzrastają w miarę tego, jak nić się wydłuża, i odrazu schodzą znowu prawie do zera, gdy szybkości punktów się wyrównają, czyli z końcem okresu przejściowego *).

O wielkości takich sił możemy sądzić jedynie ze skutków ich działania, a głównym skutkiem, dającym się łatwo wymierzyć, są zmiany, zachodzące w ilościach ruchu.

W danym razie ilość ruchu punktu m_1 zmniejszyła się o $m_1v - m_1u$, czyli otrzymała przyrost $m_1v - m_1u$, skierowany do m_2. Mówimy, że taki właśnie był *impuls* albo *popęd siły chwilowej*, która w okresie przejściowym działała na m_1. Impuls siły, działającej na m_2, wynosił oczywiście m_2u i był skierowany do m_1.

Suma ilości ruchu punktów m_1 i m_2 nie uległa zmianie, a więc przyrosty tych wektorów musiały być równe i odwrotne; innemi słowy *impulsy sił chwilowych, które wywierają na siebie nawzajem punkty m_1 i m_2, są równe i odwrotne*. Twierdzenie to odpowiada trzeciemu prawu (akcji i reakcji) Newtona. Zobaczymy zaraz, że jest ono słuszne i w przypadku ogólniejszym.

Przypuśćmy naprzód, że punkt materjalny m, poruszający się z szybkością v, uderzył w nieruchomą przeszkodę, np. w ścianę,

*) Uważamy wciąż nić za zupełnie niesprężystą, jak już było zaznaczone w par. poprzedzającym. Jeżeli nić taka wydłuży się pod działaniem sił, to zachowuje to wydłużenie na stałe i nie kurczy się, gdy siły przestaną działać.

w punkcie O i odbił się od niej z szybkością u. I tu zetknięcie punktu m ze ścianą trwało pewien czas, jakkolwiek bardzo krótki, i ściana wywierała w tym czasie siłę bardzo wielką, czyli siłę chwilową.

Przed uderzeniem punkt materjalny posiadał ilość ruchu $mv = OA$, a po uderzeniu $mu = OB$, a zatem podczas uderzenia jego ilość ruchu otrzymała przyrost geometryczny AB albo OC (par. 51). Odcinek OC wyraża także co do wielkości i kierunku impuls siły chwilowej

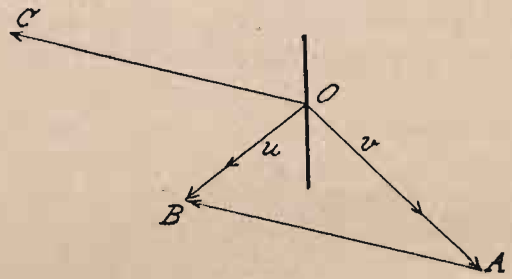

Fig. 72.

Dajmy teraz na to, że nastąpiło uderzenie pomiędzy dwoma punktami materjalnemi m_1 i m_2. Punkty te poruszały się przed samem uderzeniem, przypuśćmy, z szybkościami v_1 i v_2, a bezpośrednio po uderzeniu z szybkościami u_1 i u_2. Wyznaczymy, jak poprzednio, przyrost geometryczny ilości ruchu punktu m_1, czyli impuls siły chwilowej, którą wywierał punkt m_2 na m_1, i uczynimy toż samo dla siły chwilowej, którą punkt m_1 wywierał na m_2. Łatwo się przekonać, że impulsy te są równe i odwrotne.

Siły chwilowe, działające podczas uderzenia, są siłami wewnętrznemi układu, złożonego z punktów m_1 i m_2, nie mogą więc zmienić wektora G. Z tego wynika, że ilości ruchu z przed uderzenia, t. j. m_1v_1 i m_2v_2, posiadają tę samą wypadkową, co ilości ruchu po uderzeniu, czyli m_1u_1 i m_2u_2. Skoro zaś wypadkowa się nie zmieniła, to przyrosty geometryczne składowych musiały być równe i odwrotne.

Wypada dodać, że i w tym razie siła żywa układu podczas uderzenia, t. j. w okresie, gdy trwa zetknięcie pomiędzy punktami, wogóle ulega zmianie.

Prz. 1. Punkt materjalny o masie m jest połączony nierozciągalnemi nićmi z dwoma innemi punktami m_1 i m_2. Punkty te leżały na poziomym gładkim stole, a nici były wyciągnięte prostopadle jedna do drugiej. Punkt m otrzyma uderzenie, zwrócone nazewnątrz owego kąta prostego i skierowane według dwusiecznej. Wyznaczyć stosunek szybkości początkowych punktów m_1 i m_2. Odp. $\frac{m+m_2}{m+m_1}$.

Podczas uderzenia na m działają trzy siły chwilowe, a mianowicie siła uderzenia i dwa naprężenia nici, a zatem wogóle początkowa szybkość tego punktu utworzy z dwusieczną kąt różny od zęra. Jednocześnie na m_1 i m_2 działają naprężenia, więc szybkości tych punktów będą skierowane według nici. Siła uderzenia działała w kierunku dwusiecznej, przeto całemu układowi mogła ona nadać tylko ilość ruchu w tym samym kierunku; z tego wynika, że suma rzutów ilości ruchu wszystkich trzech punktów na dwusieczną zewnętrzną musi być zerem. Należy jeszcze wziąć pod uwagę, że po uderzeniu długości nici pozostają bez zmiany, a więc punkty m i m_1, (lub m i m_2) poruszają się tak, jakby należały do ciała sztywnego.

Prz. 2. Cztery jednakowe punkty materjalne, połączone nierozciagalnemi nićmi o długości a, tworzą romb $ABCD$, w którym kąt ostry $= 2a$. Cały ten układ poruszał się na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością u w kierunku większej przekątni AC. Wstrzymujemy wierzchołek A; z jaką szybkością kątową zaczną się obracać boki AB i AD? Odp. $\frac{2u \sin\alpha}{a(1+2\sin^2\alpha)}$.

Prz. 3. Trzy punkty materjalne A, B, C o masach m, m_1, m_2, połączone nierozciągalnemi i wyprostowanemi nićmi, AB i BC leżą na gładkim stole, i rozwarty kąt $ABC = \pi - \alpha$. Pierwszy otrzymuje impuls F równoległy do CB; wyznaczyć szybkość początkową punktu C. Odp. $\frac{Fm_1 \cos^2\alpha}{mm_2 \sin^2\alpha + (m+m_1+m_2)m_1}$.

Oznaczmy przez G impuls, który przenosi nić AB. Początkowa ilość ruchu punktu A jest wypadkową impulsów F i G, a ilość ruchu tego punktu w kierunku BA wynosi $F\cos\alpha - G$, zatem rzut szybkości na ten kierunek $\frac{F\cos\alpha - G}{m}$.

93. Ruch łańcucha.

Niektóre z podanych niżej przykładów, dotyczące ruchu łańcuchów, wymagają pewnych wyjaśnień wstępnych.

Łańcuch jednorodny możemy w przybliżeniu uważać za szereg jednakowych punktów materjalnych, połączonych krótkiemi, niesprężystemi nićmi. Przypuśćmy, że łańcuch leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Część jego $BA = a$ jest wyciągnięta na płaszczyźnie, a część pozostała tworzy stos, leżący na płaszczyźnie w najbliższych okolicach punktu B. Możemy przyjmować w przybliżeniu, że cały ten stos znajduje się w punkcie B.

Przyłóżmy do końca A siłę P, działającą stale w kierunku BA. Dopóki łańcuch nie wyprostuje się całkowicie, ruch jego będzie odbywał się w sposób następujący. W każdej chwili dzieli się on na dwie części; część pierwsza, już wyprostowana, posiada szybkość v w kierunku siły P, część druga tworzy jeszcze stos w punkcie B i jest nieruchoma. Co moment nowy element łańcucha przechodzi z części drugiej do pierwszej, przybierając w ciągu niezmiernie krótkiego czasu szybkość v. Oczywiście powtarza się tu wciąż zjawisko, które rozważaliśmy szczegółowo w paragrafie 91. Element, który właśnie rusza w danej chwili, przebywa okres, który tam nazywaliśmy przejściowym. Z tego wynika, że siła żywa łańcucha będzie zawsze mniejsza od pracy całkowitej, wykonanej przez siłę P.

Dajmy na to, że w chwili t część pierwsza ma długość x, a zatem ilość ruchu, czyli wektor G, *całego* łańcucha wynosi μxv, gdzie μ oznacza masę jednostki długości (wymiar ML^{-1}). W czasie dt ta ilość ruchu wzrośnie o $d(\mu xv)$, gdzie zarówno x jak i v należy uważać za zmienne. Jedyną siłą zewnętrzną, działającą na łańcuch, jest P, a zatem

$$d(\mu xv) = Pdt. \qquad (1).$$

Jest to równanie zasadnicze, z którego dadzą się wywnioskować różne okoliczności, dotyczące zjawiska. Wyznaczymy np. naprężenie S, które panuje w punkcie łańcucha, stanowiącym granicę pomiędzy częścią ruchomą i nieruchomą. Z (1) otrzymamy

$$\mu xdv + \mu vdx = Pdt \qquad (2)$$

Warto zauważyć, że wyraz μxdv wyraża przyrost ilości ruchu tej części łańcucha, która już się poruszała w chwili t, a wyraz μvdx jest przyrostem ilości ruchu tego elementu, który ruszył w czasie dt.

Dzieląc (2) przez dt, otrzymamy

$$\mu x\frac{dv}{dt} + \mu v^2 = P \qquad (3).$$

$\frac{dv}{dt}$ jest to przyśpieszenie części ruchomej, której masa wynosi μx, i na którą działają w kierunkach odwrotnych siły P i S, a zatem $\mu x\frac{dv}{dt} = P - S$. Wprowadzając to do (3), znajdziemy, że

$$S = \mu v^2 \qquad (4).$$

Do tego samego można dojść bezpośrednio. Pod działaniem siły S element dx w czasie dt przybiera szybkość v, innemi słowy siła S w czasie dt wytwarza ilość ruchu $\mu v dx$, zatem $Sdt=\mu v dx$. Dzieląc przez dt, otrzymamy znowu (4).

Prz. 1. W rozważonym przykładzie całkowita długość łańcucha l. W jakim czasie łańcuch wyprostuje się całkowicie, i ile straci siły żywej; innemi słowy ile wyniesie różnica pomiędzy pracą, wykonaną przez siłę P, a siłą żywą wyprostowanego łańcucha? Odp. Szukany czas $\sqrt{\frac{\mu(l^2-a^2)}{P}}$, strata $\frac{P(l-a)^2}{2l}$.

Prz. 2. Gdy w opisanym przykładzie zaczęła działać stała siła P, to już wyprostowana część łańcucha posiadała pewną szybkość. Jaka powinna być ta szybkość, aby dalszy ruch części wyprostowanej, był jednostajny? Odp. $\sqrt{\frac{P}{\mu}}$.

Prz. 3. Jednorodny łańcuch o długości l tworzy stos na samym brzegu stołu. Jeden koniec wysunięto cokolwiek po za brzeg, skutkiem czego łańcuch zaczął się stopniowo zsuwać. Z jaką szybkością zejdzie ze stołu koniec drugi? Odp. $\sqrt{\frac{2gl}{3}}$.

Na łańcuch działają tu trzy siły: ciężar części zwisającej, ciężar części pozostałej i reakcja stołu. Dwie ostatnie się równoważą, a zatem tylko pierwsza wywiera wpływ na ilość ruchu całego łańcucha.

Prz. 4. Do końca łańcucha, tworzącego stos na płaszczyźnie poziomej, jest przywiązany pocisk, który waży tyle, co a metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha wzniesie się w górę, gdy nadamy pociskowi szybkość pionową $\sqrt{2gh}$? Odp. $\sqrt[3]{a^2(3h+a)}-a$.

Prz. 5. Ciężki łańcuch tworzy stos na poziomym stole; do jego końca jest przywiązany lekki sznur, który przechodzi przez blok, urządzony pionowo nad stosem, i na drugim końcu sznura wisi ciężar, ważący tyle, co a metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha uniesie się nad stołem, gdy wyswobodzimy ciężar? Odp. $a\sqrt{3}$.

Prz. 6. Łańcuch, ważący Q, jest zawieszony za jeden koniec nad stołem, a drugi koniec dotyka stołu. Wyswobadzamy koniec górny; wyznaczyć reakcję, którą stół wywiera na łańcuch w chwili, gdy ostatnie ogniwo dochodzi do stołu. Odp. $3Q$.

Prz. 7. Końce łańcucha uczepiono w bardzo bliskich punktach A, B tak, że obydwie części wiszą prawie pionowo. Długość łańcucha $= 2l$, a ciężar jednostki długości $= \varkappa$. Wyswobadzamy koniec B; wyznaczyć reakcję w A w funkcji czasu. Odp. $\varkappa\left(l+\frac{3gt^2}{4}\right)$.

Prz. 8. Na końcach lekkiego sznura, przechodzącego przez gładki blok, wiszą dwie szale, ważące po Q kg. Ciężki łańcuch o długości a i wadze q wisi nad jedną z szal, prawie dotykając jej końcem dolnym. W jakim czasie łańcuch legnie całkowicie na szali, gdy wyswobodzimy koniec górny? Odp. $\sqrt{\frac{(4Q+q)a}{2gQ}}$.

Dla obydwóch szal i dla łańcucha, otrzymamy odpowiednio równania

$$d\left(\frac{Q}{g}u\right)=(S-Q)dt,$$

$$d\left(\frac{Q}{g}u\right) = (Q + R - S)dt,$$

$$d[\mu(a - x)gt + \mu xu] = (\mu ga - R)dt,$$

gdzie μ oznacza masę jednostki długości łańcucha, x długość tej części łańcucha, która już leży na szali, u szybkość szali, S naprężenie sznura i R reakcję szali na łańcuch. Dodając równania powyższe, otrzymamy równanie, które daje się łatwo całkować.

Prz. 9. Końce łańcucha A i B są umocowane prawie pionowo jeden nad drugim, i łańcuch jest wyprostowany. W pewnej chwili wyswobodzono górny koniec A; w t_0 sek. doszedł on do poziomu końca B, a wówczas wyswobodzono i ten drugi. W jakim czasie łańcuch wyprostuje się znowu? Odp. $\frac{3t_0}{4}$ sek. od chwili, w której obydwa końce znalazły się na jednym poziomie.

Prz. 10. Lekki sznur przechodzi przez gładki blok, i do jego końców są przywiązane jednakowe łańcuchy. W pierwszej chwili cały lewy łańcuch leży na podłodze, a l metr. prawego wznosi się pionowo nad podłogą, i wszystko pozostaje w spokoju. Jaka długość lewego łańcucha będzie wzniesiona nad podłogą w chwili, gdy szybkość osiągnie maksymum? Odp. $\frac{l \lg 2}{2}$,

Otrzymamy z łatwością równanie

$$lvdv + v^2dx = g(l - 2x)dx,$$

gdzie v oznacza szybkość, a x długość lewego łańcucha, wzniesioną nad podłogą. Równanie można całkować, mnożąc przez $e^{\frac{2x}{l}}$, albo przy pomocy metody Bernoullego.

Prz. 11. Łańcuch tworzy stos nad samym brzegiem stołu, którego wysokość h, a koniec łańcucha zwisa aż do podłogi. Wyznaczyć szybkość, którą osiągnie łańcuch w t sek., gdy pozwolimy mu swobodnie schodzić ze stołu na podłogę. Odp.

$$\frac{c\left(e^{\frac{ct}{h}} - e^{-\frac{ct}{h}}\right)}{e^{\frac{ct}{h}} + e^{-\frac{ct}{h}}},$$

gdzie $c = \sqrt{gh}$ oznacza granicę, do której szybkość łańcucha dąży asymptotycznie.

Należy tu rozważać ilość ruchu całego łańcucha. Działa nań siła ciążenia oraz reakcja stołu i podłogi. Dojdziemy bez trudności, że ostatnia przewyższa ciężar części łańcucha, spoczywającej na podłodze, o μv^2.

Prz. 12. Jeden koniec linki $3a$ długiej jest umocowany tuż obok nieruchomego gładkiego kółka, i część jej a jest przewleczona przez kółko. Wszystkie trzy części wiszą pionowo i pozostają w równowadze. Zsuwamy cokolwiek na dół część przewleczoną przez kółko; wyznaczyć szybkość linki przed samem zatrzymaniem. Odp. $\frac{1}{3}\sqrt{ag}$.

Prz. 13. Otwarty zbiornik, zawierający pewną ilość wody, ustawiono na wózku kolejowym. Wózkowi nadano szybkość v_0 i przyłożono siłę pociągową, która dokładnie równoważy w każdej chwili opory toru i powietrza. W pierwszej chwili masa całego układu była równa M_0, ale przez otwór w dnie zbiornika wypływa na sekundę masa wody μ, a deszcz pionowy przynosi jednocześnie masę m. Jaką szybkość będzie miał wózek za t sek.?

Krople deszczu nie posiadają ilości ruchu w kierunku poziomym, a zatem deszcz nie zmienia ilości ruchu zbiornika; natomiast woda, wypływająca z dna, unosi w czasie dt ilość ruchu $\mu v dt$, a zatem będzie $d(Mv) = -\mu v dt$, gdzie M oznacza masę układu w chwili t, a v szybkość. Oczywiście M jest tu wielkością zmienną. Znajdziemy, że

$$\lg\frac{v}{v_0} = \frac{m}{m-\mu}\lg\frac{M_0}{M_0+(m-\mu)t}.$$

Wyznaczyć prócz tego v, gdy $m = \mu$.

Prz. 14. W obłokach powstała kulista kropla wody o promieniu a i zaczęła spadać, przyczem dzięki dalszemu skraplaniu pary wodnej masa kropli wzrasta proporcjonalnie do powierzchni. Wyznaczyć szybkość, którą osiągnie kropla w czasie t, gdy promień jej stanie się równym r.

Odp. $\frac{gt}{4}\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^3}{r^3}\right)$.

94. Moment ilości ruchu. Niech będzie punkt materjalny o masie m, którego szybkość w chwili t jest równa v, a ilość ruchu mv. Obierzmy jakkolwiek w przestrzeni punkt O i wyznaczmy moment wektora mv względem tego punktu O. Oznaczmy ten *moment ilości ruchu* literą H. Posiada on wymiar ML^2T^{-1} i jest liczbowo równy podwójnemu polu trójkąta, którego podstawą jest odcinek, reprezentujący mv, a wierzchołek leży w O.

Przypuśćmy naprzód, że na m żadna siła nie działa. W takim razie punkt ten biegnie ze stałą szybkością na prostym torze x. Oczywiście wektor H, prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez O i x, nie zmienia się z czasem co do kierunku; nie zmienia się on również co do wielkości, gdyż pole owego trójkąta jest stałe pomimo ruchu punktu m.

Przypuśćmy teraz, że na m działa siła P. W czasie dt ilość ruchu otrzyma przyrost geometryczny $\delta(mv)$, zgodny co do wielkości i kierunku z Pdt, a zatem moment ilości ruchu w chwili $t+dt$ będzie posiadał dwie składowe, a mianowicie moment wektora mv i moment wektora $\delta(mv)$ lub wektora Pdt. Widzimy, że wektor H w czasie dt otrzyma przyrost geometryczny δH, równy momentowi Pdt względem O. Lecz moment Pdt względem O jest to oczywiście to samo, co moment siły P względem tego punktu, pomnożony przez dt.

Tak więc co dt sekund siła P wytwarza przyrost geometryczny wektora H, zgodny co do kierunku z jej momentem względdem O, a co do wielkości dt razy większy. W ten sposób zmienia się wektor H.

Użyteczność tych prostych rozważań okażemy na przykładzie następującym. Przypuśćmy, że siła P, działająca na punkt m, jest centralna, a środkiem jej niech będzie punkt O. Moment siły P względem O jest stale równy zeru, a zatem wektor H względem tego samego punktu nie otrzymuje żadnych przyrostów i jest stały co do wielkości i kierunku.

Z tego wynikają bezpośrednio dwa wnioski następujące. Przedewszystkiem oczywistą jest rzeczą, że szybkość punktu m musi stale pozostawać w płaszczyźnie, przechodzącej przez O i prostopadłej do H, a więc ruch pod działaniem siły centralnej, czyli ruch centralny, jest zawsze płaski.

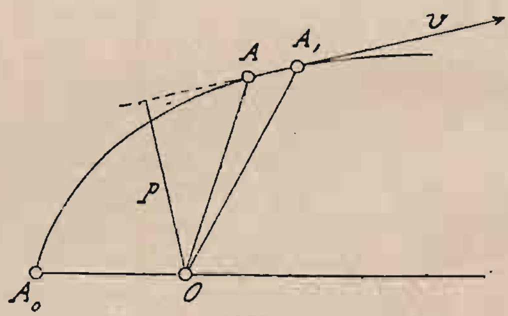

Fig. 73.

Aby dojść do wniosku drugiego oznaczmy przez p odległość szybkości v punktu m od O, czyli ramię momentu ilości ruchu. W takim razie $H = mvp$, a zatem iloczyn vp, równy $\frac{H}{m}$, jest wielkością stałą. Wyjaśnimy w krótkości znaczenie cynematyczne tego iloczynu.

Przypuśćmy, że w początku rachuby czasu punkt m zajmował położenie A_0 (fig. 73), w chwili t położenie A i w chwili $t+dt$ położenie A_1. Oznaczmy pole wycinka A_0OA przez S, a pole wycinka AOA_1 przez dS. Nazywamy $\frac{dS}{dt}$ *szybkością wycinkową* punktu m.

Oczywiście $dS = \frac{pds}{2}$, gdzie $ds = AA_1$, a zatem $\frac{dS}{dt} = \frac{p}{2}\frac{ds}{dt} = \frac{pv}{2}$. Widzimy, że pv jest podwójną szybkością wycinkową punktu m, i drugi wniosek, tylko co otrzymany, wyrazimy tak: *w ruchu centralnym szybkość wycinkowa jest wielkością stałą.*

Powróćmy do przypadku ogólnego, w którym siła P, działająca na punkt m, jest jakakolwiek. Poprowadźmy przez O dowolną prostą x, i oznaczmy przez H_x rzut wektora H na tę prostą. Będzie to moment ilości ruchu względem prostej x (par. 10).

Gdy wektor H otrzyma przyrost geometryczny δH, to rzut H_x otrzyma przyrost dH_x, i wiemy, że dH_x jest rzutem przyrostu δH na prostą x. Lecz δH jest to moment siły P względem O, pomnożony przez dt, a zatem dH_x będzie rzutem tego momentu siły na prostą x, albo jej momentem względem prostej x, pomnożonym przez dt.

Tak więc siła P wytwarza co dt sek. przyrost wektora H_x, równy jej momentowi względem x, pomnożonemu przez dt.

95. **Wektor H układu.** Niech będzie układ złożony z punktów m_1, m_2..., które w chwili t posiadają szybkości v_1, v_2.... Obierzmy dowolnie w przestrzeni środek redukcji O i wyznaczmy względem niego momenty ilości ruchu wszystkich punktów układu. Oznaczmy je przez h_1, h_2.... Ponieważ wektory te posiadają wspólny początek, istnieje przeto ich wypadkowa, którą oznaczymy przez H; nazywamy ją *momentem ilości ruchu układu względem punktu O*, albo wprost *wektorem H.*

Z biegiem czasu wektor H zmienia się co do wielkości i kierunku, i zmiany te dają nam ważne wskazania przy badaniu ruchu układu. Wektor ten, podobnie jak wektor G, możnaby porównać do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne wydarzenia w przebiegu zjawiska. Zobaczymy, jaki wpływ na wektor H wywierają siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy więc, że na punkt m działa siła P. Wytworzy ona w czasie dt przyrost geometryczny składowej h, równy jej momentowi względem O, pomnożonemu przez dt. Oczywiście taki sam przyrost otrzyma wypadkowa H. Tym sposobem każda siła, działająca na układ, wytwarza co dt sek. nowy przyrost wektora H.

Dwie siły wewnętrzne, które dwa punkty układu wywierają na siebie nawzajem, są równe i odwrotne, a zatem momenty ich względem O są także równe i odwrotne. Z tego wynika, że siły takie wytworzą w czasie dt przyrosty równe i odwrotne wektora H, czyli w sumie nie wytworzą żadnego przyrostu, a zatem siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor H podobnie, jak na wektor G.

Wektor H układu izolowanego jest stały co do wielkości i kierunku.

Poprowadźmy przez punkt O dowolną prostą x. Rzut H_x wektora H na tę prostą nazywa się *momentem ilości ruchu układu względem prostej x*. Jest on równy sumie rzutów składowych h_1, h_2... czyli sumie momentów ilości ruchu punktów m_1, m_2... względem prostej x.

Siła, działająca na jeden z punktów układu, wytworzy oczywiście w czasie dt przyrost wektora H_x równy jej momentowi względem x, pomnożonemu przez dt. Siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na H_x podobnie, jak i na H.

Prz. 1. Dwa punkty materjalne A, B leżą na gładkim stole i są połączone wyciągniętą niesprężystą nicią, przechodzącą przez gładkie kółko O, umocowane na stole. Masa punktu A jest dwa razy mniejsza od masy B, a odległości punktów od O są równe. Nadajemy punktowi A szybkość v_0. skierowaną prostopadle do nici OA; z jaką szybkością dojdzie do kółka punkt B? Odp. $\frac{v_0}{2}$.

Podczas ruchu ani moment ilości ruchu względem O, ani siła żywa układu się nie zmieniają, z czego wynikają dwa równania. Dogodnie będzie rozłożyć szybkość punktu A na składowe v_r i v_φ.

Prz. 2. Dwa jednakowe punkty materjalne A, B leżą na gładkim stole, połączone wyciągniętą niesprężystą nicią o długości l; nić ta przechodzi przez gładkie kółko O, umocowane na stole. Punktowi A nadano szybkość prostopadłą do OA, i punkt B doszedł do kółka właśnie w chwili, gdy nić OA zatoczyła kąt prosty. Wyznaczyć początkową odległość OA. Odp. $l \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Tworzymy dwa równania, jak w przykładzie poprzedzającym; rugując z nich $\frac{d\varphi}{dt}$, otrzymamy równanie, które się łatwo całkuje.

Prz. 3. Punkty materjalne A i B na gładkim stole są przyczepione do nierozciągalnej nici OAB, której koniec O jest przymocowany do stołu. Masa punktu A jest dwa razy większa od masy B, nić jest wyciągnięta, i $OA = AB$. Nadajemy punktowi B szybkość prostopadłą do prostej OB; w jakich granicach będzie się zmieniał kąt, zawarty pomiędzy AB i przedłużeniem OA?

Znajdziemy, że szybkość punktu A jest rzeczywista, jeżeli $\cos\vartheta(3-\cos^2\vartheta) > 0$, gdzie ϑ oznacza kąt, o który chodzi. Drugi czynnik jest zawsze dodatni, a zatem $\cos\vartheta > 0$, z czego wynika, że ϑ zmienia się od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć prócz tego stosunki szybkości obydwóch punktów w położeniach skrajnych.

Prz. 4. Lekki cylinder o promieniu a i osi pionowej może się swobodnie obracać około tej osi. Na cylinder są nawinięte w kierunkach odwrotnych dwie nici, których części swobodne leżą wyprężone na gładkich płaszczyznach poziomych, a do końców są przyczepione jednakowe punkty materjalne. Jeden z punktów, przyczepiony do nici, której część wyprostowana posiada długość c, otrzymuje szybkość v_0 w kierunku prostopadłym do nici. Wyznaczyć długość części wyprostowanej tejże nici po upływie czasu t. Odp. Kwadrat długości szukanej wynosi $c^2 + 2av_0t + \frac{v_0^2t^2}{2}$.

Prz. 5. Trzy punkty materjalne o jednakowych masach, osadzone na lekkim sztywnym pręcie na końcach i w środku, leżą na gładkim stole. Jeden z punktów końcowych otrzymał uderzenie w kierunku prostopadłym do pręta; wyznaczyć stosunek szybkości początkowych wszystkich trzech punktów. Odp. 5 : 2 : 1. Szybkość początkowa punktu uderzonego będzie oczywiście prostopadła do pręta, a stąd wynika, że środek chwilowy leży na linji pręta. Prócz tego należy wziąć pod uwagę, że moment siły chwilowej względem punktu, który zajmuje masa uderzona, jest równy zeru, a zatem moment ilości ruchu całego układu względem tego punktu się nie zmieni podczas uderzenia.

Prz. 6. Cztery jednakowe punkty materjalne A_1, A_2, A_3, A_4 leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc połowę sześcioboku foremnego; łączą je wyprężone nierozciągalne nici A_1A_2, A_2A_3 i A_3A_4. Punkt A_1 otrzymuje w kierunku A_4A_1 impuls F; jaki impuls sznur A_2A_3 przeniesie na punkt A_3?

Gdyby ten impuls szukany wywrzeć bezpośrednio na A_3, to ruch początkowy punktów A_3 i A_4 byłby taki sam, jak obecnie. Dogodnie będzie początkową szybkość każdego punktu rozłożyć na składowe w kierunku A_4A_1 i w kierunku prostopadłym. Wypadnie $\frac{F}{14}$.

Prz. 7. Prosta rurka wewnątrz gładka może się obracać około końca O w płaszczyźnie poziomej i zawiera w odległości a od O punkt materjalny. Masa rurki jest znikoma w porównaniu z masą punktu. Nadajemy rurce szybkość kątową i pozostawiamy ją samej sobie. Wyznaczyć tor punktu materjalnego. Odp. Prosta prostopadła do pierwotnego położenia rurki.