II. POLE SZYBKOŚCI.

21. Układ sztywny. W cynematyce nazywamy ciałem sztywnem, albo układem sztywnym, zbiór punktów ruchomych, któremu przypisujemy tylko dwie właściwości następujące: po pierwsze punkty układu dają się indywidualizować, to znaczy, że, mając jakiś punkt dany w jednem z położeń układu, możemy odróżnić ten punkt i w położeniach innych; powtóre odległość pomiędzy jakimikolwiek dwoma punktami podczas ruchu pozostaje bez zmiany. Na żadne własności fizyczne układu w cynematyce nie zwracamy uwagi, nie przypisujemy mu nawet zwykle żadnych określonych kształtów i wymiarów; dzięki temu mamy prawo zaliczyć do układu każdy punkt przestrzeni, jeżeli uznamy to za korzystne.

Badanie ruchu takiego układu może się odbywać w dwóch kierunkach. Przedewszystkiem może chodzić o to, jak się poruszają różne punkty układu w ciągu pewnego okresu. Ruchy te oczywiście pozostają w zależności jedne od drugich, i gdy mamy dostateczną liczbę danych, dotyczących ruchu układu, to powinniśmy być w stanie wyznaczyć położenie dowolnego z jego punktów w każdej chwili badanego okresu.

Tak np. ruch całego układu jest określony, gdy są dane ruchy trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej. Przypuśćmy, że punktami takimi są A_1, A_2 i A_3. Weźmy dowolnie czwarty punkt B układu; odległości jego od trzech pierwszych niech będą odpowiednio r_1, r_2, r_3. Pragniemy wyznaczyć położenie punktu B w jakiejś chwili t.

Położenia A_1', A_2', A_3' punktów A_1, A_2, A_3 w chwili t są znane, bo ruchy tych punktów są dane, a punkt B znajdzie się w punkcie przecięcia trzech kul, zatoczonych z A_1', A_2', A_3' promieniami r_1, r_2, r_3. Będą wprawdzie dwa takie punkty przecięcia B' i B'', ale okoliczność ta nie może wywołać wątpliwości, bo z dwóch czworościanów symetrycznych $A_1'A_2'A'_3B'$ i $A_1'A_2'A_3'B''$ jeden tylko jest przystający z czworościanem $A_1A_2A_3B$.

Tym sposobem daje się wyznaczyć położenie punktu B w każdej chwili badanego okresu, a zatem ruch tego punktu jest całkowicie określony. Toż samo dotyczy wszystkich innych punktów układu.

22. Pole szybkości. Drugi kierunek, jaki można nadać badaniom ruchu układu sztywnego, daje się określić, jako badanie stanu cynematycznego układu w pewnej chwili. Powiemy to jeszcze inaczej.

W pewnej chwili każdemu punktowi układu odpowiada wektor szybkość, i te wszystkie wektory razem tworzą tak zwane *pole szybkości*. Otóż chodzi o zbadanie pola szybkości*).

W rozdziale niniejszym będzie nas głównie zajmowało to zadanie drugie.

Teorja pola szybkości opiera się na następującem twierdzeniu zasadniczem: *rzuty szybkości dwóch punktów układu sztywnego na prostą, łączącą te punkty, są równe.*

Niech będą dwa dowolne punkty układu A i B, posiadające w danej chwili szybkości u i v, a w niech oznacza szybkość punktu B względem A. Torem względnym punktu B jest jakaś krzywa sferyczna, t. j. linja, położona na powierzchni kuli, zatoczonej z A promieniem AB, a szybkość w, jako styczna do tej linji, musi być prostopadła do promienia AB.

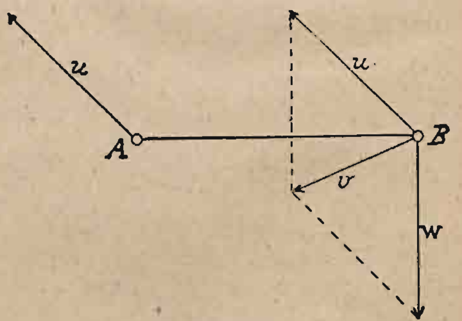


Fig. 10.

Szybkość bezwzględna v punktu B jest wypadkową szybkości względnej w i szybkości unoszenia u, a rzut tej wypadkowej na prostą AB jest równy sumie rzutów składowych w i u. Lecz rzut składowej w jest równy zeru, zatem rzuty szybkości u i v są równe.

*) A także w dalszym ciągu pola przyśpieszeń.

Twierdzenie to daje się równie łatwo dowieść analitycznie.

Niech będą w prostokątnym układzie współrzędnych dwa punkty $A_1(x_1y_1z_1)$ i $A_2(x_2y_2z_2)$ układu sztywnego; stałą odległość A_1A_2 oznaczymy przez l, a kąty kierunkowe prostej A_1A_2 przez α, β, γ. Wówczas będzie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2.$$

Różniczkujemy to równanie i wprowadzamy $x_1 - x_2 = l \cos \alpha$ i t. d. Wypadnie

$$\frac{dx_1}{dt}\cos\alpha + \frac{dy_1}{dt}\cos\beta + \frac{dz_1}{dt}\cos\gamma = \frac{dx_2}{dt}\cos\alpha + \frac{dy_2}{dt}\cos\beta + \frac{dz_2}{dt}\cos\gamma.$$

Oczywiście lewa i prawa strony tego równania są odpowiednio równe rzutom szybkości punktów A_1 i A_2 na prostą A_1A_2.

Z twierdzenia powyższego wynika, że szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, określają całkowicie stan cynematyczny układu w danej chwili; innemi słowy, gdy mamy dane szybkości u, v, w trzech takich punktów A, B, C, to możemy wyznaczyć szybkość każdego z pozostałych punktów.

Rozumie się, owe szybkości dane nie mogą być całkowicie dowolne. Muszą one same być w zgodzie z twierdzeniem, a więc rzuty szybkości u i v na prostą AB muszą być równe i t. d.

Weźmy naprzód jakiś punkt P, nie leżący w płaszczyźnie ABC. Znamy rzuty szybkości tego punktu na proste PA, PB, PC, gdyż są one odpowiednio równe rzutom szybkości u, v, w na te proste, a tem samem szybkość punktu P jest określona.

Można szybkość tę wyznaczyć w. sposób następujący. Prowadzimy z P trzy odcinki równe i równoległe do u, v, w; końce ich oznaczmy przez A', B', C'. Następnie przez te końce przesuwamy płaszczyzny, odpowiednio prostopadłe do prostych PA, PB, PC; punkt przecięcia tych płaszczyzn będzie końcem szukanej szybkości punktu P.

Mając szybkość punktu P, możemy wyznaczyć szybkość dowolnego punktu Q, położonego w płaszczyźnie ABC, użytkując w tym celu w wyżej opisany sposób punkt P i dwa z punktów A, B, C.

Powróćmy jeszcze do szybkości punktu P i rozważmy ten przypadek szczególny, gdy szybkości u, v, w są równe i równoległe. W takim razie oczywiście wszystkie trzy punkty, które oznaczyliśmy przez A', B', C', będą leżały razem w jednym punkcie, i punkt ten będzie końcem szybkości punktu P. Z tego wynika, że szybkość punktu P musi być zgodna z szybkościami punktów A, B, C co do wielkości i kierunku.

Jeżeli szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, są zgodne co do wielkości i kierunku, to toż samo dotyczy wszystkich punktów układu. Mówimy, że w rozważanej chwili ruch układu jest *postępowy.*

Jeżeli szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, są równe zeru, to cały układ jest w danej chwili nieruchomy.

Prz. Dwie sztaby AB i BC, połączone w B zapomocą przegubu, poruszają się w płaszczyźnie. Wyznaczyć wykreślnie szybkość przegubu B, mając dane szybkości końców A i C.

23. Ruch prostej. Zobaczymy teraz, jaka zależność istnieje pomiędzy szybkościami punktów prostej a, należącej do układu sztywnego.

Przedewszystkiem w myśl paragrafu poprzedzającego rzuty tych wszystkich szybkości na prostą a są równe. Dajmy na to, że szybkość jednego z punktów prostej a jest do niej prostopadła. Rzut tej szybkości na prostą a jest równy zeru, a zatem i szybkości wszystkich punktów prostej a muszą być do niej prostopadłe. Taka prosta nazywa się *prostą zerową.*

Również jeżeli na prostej istnieje punkt, którego szybkość jest równa zeru, to szybkości wszystkich innych punktów prostej są do niej prostopadłe, i prosta jest zerową.

Niech będzie jakaś linja l, należący do układu ruchomego, i inna linia p, stanowiąca miejsce geometryczne końców szybkości punktów linji l. Nazwiemy p *linją przewodnią pierwszego rzędu* lub wprost *linją przewodnią* linji l, gdyż l wciąż podąża za p. Wyznaczymy linję przewodnią prostej.

Obierzmy na prostej układu dwa punkty A_1 i A_2, których współrzędne Kartezjusza oznaczymy przez $(x_1 y_1 z_1)$ i $(x_2 y_2 z_2)$. Weźmy na tej prostej jakikolwiek punkt trzeci $A(xyz)$, którego stosunek podziału względem A_1 i A_2 niech będzie równy λ *).

---

*) Tak nazywa się stosunek $\frac{A_1 A}{AA_2}$, gdzie porządek liter odpowiada kierunkowi odcinka, a więc $A_1 A + AA_1 = 0$ i $A_1 A = - AA_1$. Gdy λ zmienia się

W takim razie będzie

$$(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Różniczkujemy to równanie względem t; zważyć przytem należy, że λ nie zmienia się z biegiem czasu, bo odległości pomiędzy A_1, A_2 i A są stałe. Wypadnie więc

$$(1+\lambda)\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \lambda\frac{dx_2}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \quad (2).$$

Dodając (1) i (2), otrzymamy

$$(1+\lambda)\left(x+\frac{dx}{dt}\right) = x_1 + \frac{dx_1}{dt} + \lambda\left(x_2+\frac{dx_2}{dt}\right) \quad . \; . \quad (3)\ ^{*}).$$

Oznaczmy przez $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$, $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$, $(\xi\,\eta\,\zeta)$ współrzędne końców szybkości punktów A_1, A_2, A. Oczywiście

$$\xi_1 = x_1 + \frac{dx_1}{dt}, \quad \xi_2 = x_2 + \frac{dx_2}{dt}, \quad \xi = x + \frac{dx}{dt}.$$

Podstawiając to w (3), otrzymamy

$$(1+\lambda)\xi = \xi_1 + \lambda\xi_2,$$

oraz dwa równania analogiczne

$$(1+\lambda)\eta = \eta_1 + \lambda\eta_2, \quad (1+\lambda)\zeta = \zeta_1 + \lambda\zeta_2.$$

Równania te wskazują, że koniec szybkości punktu A leży na prostej, przechodzącej przez końce szybkości punktów A_1 i A_2, czyli, że *linją przewodnią prostej jest prosta.* Równania tej linji można łatwo otrzymać w postaci zwykłej, rugując z trzech równań ostatnich zmienny parametr λ.

Prosta ruchoma, zawierająca szybkość jednego ze swych punktów, przecina swą linję przewodnią, i szybkości wszystkich jej punktów leżą w jednej płaszczyźnie. Tak samo się dzieje, gdy szybkość jednego z punktów prostej jest równa zeru.

---

od $+\infty$ do $-\infty$, to A obiega całą prostą A_1A_2. Oznaczmy przez B_1, B_2, B rzuty punktów A_1, A_2, A na oś x, to oczywiście $\frac{B_1B}{BB_2} = \lambda$, czyli $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$. Z tego otrzymamy $(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2$, wzór zużytkowany w tekście w dalszym ciągu.

*) $x + \frac{dx}{dt}$ nie jest tu sumą długości i szybkości, bo to nie miałoby sensu. Należy to uważać za sumę odciętej x i rzutu odcinka, wyrażającego szybkość, na oś x, albo sumę dwóch odcinków, z których jeden ma x, a drugi $\frac{dx}{dt}$ jednostek długości.

Z twierdzenia o prostej przewodniej wynika jeszcze jeden ważny wniosek, do którego zresztą prowadzi bezpośrednio intuicja.

Przypuśćmy, że w układzie ruchomym istnieje prosta z, zawierająca szybkości dwóch swych punktów. W takim razie prosta przewodnia leży na z, a zatem ta prosta z zawiera również szybkości wszystkich innych swych punktów. Szybkości te muszą być równe, gdyż są one swemi własnemi rzutami na prostą z. Ruch układu nazywamy w tym razie *śrubowym*, a prostą z *osią ruchu śrubowego.*

Jeżeli szybkości owych dwóch punktów prostej z są równe zeru, to i szybkości jej punktów pozostałych są zerami; ruch układu nazywa się w tym razie *obrotowym*, a prosta z jego *osią.*

Prz. 1. Dane są w rzutach (poziomym i pionowym) szybkości v_1 i v_2 dwóch punktów A_1 i A_2, położonych w danej chwili w płaszczyźnie poziomej rzutów. Wyznaczyć szybkość punktu A, danego na A_1A_2. Odp. Wyznaczamy naprzód prostą przewodnią, następnie prowadzimy z A odcinek równy i równoległy do v_1 lub v_2, a przez koniec tego odcinka płaszczyznę prostopadłą do A_1A_2. W przecięciu tej płaszczyzny z prostą przewodnią leży koniec szybkości szukanej.

Prz. 2. Z punktu O, obranego dowolnie w przestrzeni, prowadzimy odcinki równe i równoległe do szybkości punktów prostej ruchomej. Dowieść, że końce tych odcinków leżą na prostej. Odp. Obieramy O za początek układu współrzędnych, i niech będą na prostej ruchomej punkty $A_1(x_1y_1z_1)$ i $A_2(x_2y_2z_2)$. Rzuty szybkości tych punktów na osi oznaczymy odpowiednio przez $(u_1\, v_1\, w_1)$, $(u_2\, v_2\, w_2)$. Weźmy na A_1A_2 jakikolwiek trzeci punkt A, którego stosunek podziału względem A_1, A_2 niech będzie λ, i poprowadźmy z O odcinek równy i równoległy do szybkości punktu A. Znajdziemy łatwo, że współrzędne końca tego odcinka będą

$$\xi = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1+\lambda}, \quad \eta = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1+\lambda}, \quad \zeta = \frac{w_1 + \lambda w_2}{1+\lambda},$$

a po wyrugowaniu λ otrzymamy równania prostej.

24. Ruch płaszczyzny. Jak linja ruchoma posiada linję przewodnią, tak powierzchnia ruchoma posiada *powierzchnię przewodnią.* Tak nazywa się miejsce geometryczne końców szybkości punktów, leżących na powierzchni ruchomej.

Dowiedziemy łatwo, że powierzchnią przewodnią płaszczyzny jest płaszczyzna. Weźmy na tej powierzchni dwa dowolne punkty B_1 i B_2; są one końcami szybkości dwóch punktów A_1 i A_2 płaszczyzny ruchomej, a zatem prosta B_1B_2 jest przewodnią prostej

A_1A_2 i musi leżeć całkowicie na powierzchni przewodniej. Z tego wynika, że owa powierzchnia jest płaszczyzną.

Przypuśćmy, że w układzie istnieje płaszczyzna **F**, zawierająca szybkości trzech swych punktów, nie leżących na jednej prostej. W takim razie płaszczyzna przewodnia leży na płaszczyźnie **F**, i ta zawiera szybkości wszystkich swych punktów. Weźmy poza płaszczyzną **F** jakikolwiek punkt układu A, i niech B będzie jego rzutem prostokątnym na **F**. Szybkość punktu B jest prostopadła do AB, a zatem i szybkość punktu A musi być prostopadła do tej prostej, czyli równoległa do płaszczyzny **F**. Widzimy więc, że szybkości wszystkich punktów układu są równoległe do płaszczyzny **F**. Taki ruch układu nazywamy *płaskim*.

Prz. Dowieść, że w płaszczyźnie ruchomej istnieje zawsze prosta, której wszystkie punkty mają szybkości położone w tejże płaszczyźnie. Prosta taka nazywa się *charakterystyką płaszczyzny*.

25. Ruch postępowy. Mówimy, że układ posiada ruch postępowy, gdy szybkości wszystkich punktów jego są równe i równoległe. O tym rodzaju ruchu była już mowa w par. 22; widzieliśmy tam, że gdy trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, mają szybkości równe i równoległe, to ruch układu jest postępowy.

Ruch postępowy posiada np. pudło wagonu, przebiegającego prostą linję kolejową. W tym razie ruchy wszystkich punktów są prostolinjowe, ale to nie jest konieczne. Sztaba, która łączy koła wiodące lokomotywy, posiada również ruch postępowy, ale torami punktów (względem pudła lokomotywy) są tu okręgi.

Niech będą dwa punkty A i B układu, którego ruch wciąż jest postępowy. Weźmy pod uwagę położenia ich w chwili t. Po dt sekundach zajmą one położenia A', B'; oczywiście nieskończenie krótkie drogi AA' i BB' są równe i równoległe, a zatem i proste AB, $A'B'$ są równoległe. Po upływie nowych dt sek. rozważane punkty zajmą położenia A'', B'', i znowu elementy $A'A''$, $B'B''$ będą równe i równoległe, a prosta $A''B''$, jako równoległa do $A'B'$, będzie także równoległa do AB i t. d. Widzimy, że punkty A, B obiegają tory jednakowe, a prosta AB pozostaje wciąż równoległą do położenia pierwotnego.

Skoro wszystkie punkty układu posiadają szybkości zgodne co do wielkości i kierunku, to możemy mówić wprost o szybkości układu, albo ciała, czyli o tak zw. *szybkości postępowej.* Szybkość postępowa jest to wektor swobodny, bo początek jego możemy obierać w dowolnym punkcie układu.

26. Ruch obrotowy. Jeżeli jedna z prostych układu jest nieruchoma, to ruch układu nazywamy obrotowym, a ową prostą *osią ruchu obrotowego* (par. 23). Tory wszystkich punktów układu są oczywiście łukami kół, położonymi w płaszczyznach prostopadłych do osi; środki tych kół leżą na osi.

Szybkość każdego punktu jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez oś obrotu. Prawdę tę odczuwamy intuicyjnie, ale i dowód ścisły nie nastręcza trudności. Weźmy dowolny punkt A układu oraz punkty B_1 i B_2, położone na osi. Proste AB_1 i AB_2 są zerowe, a zatem szybkość punktu A musi być do nich prostopadła, jest więc prostopadła do płaszczyzny AB_1B_2.

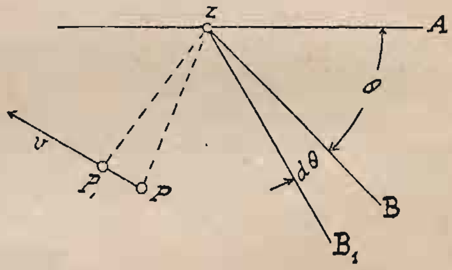


Fig. 11.

Jak ruch postępowy układu sztywnego w danej chwili określa wektor, który nazwaliśmy szybkością postępową, podobnie i ruch obrotowy w danej chwili określa wektor, zwany *szybkością kątową.* Wektor ten jest według definicji związany z osią obrotu i zwrócony w taki sposób, że dla patrzącego z jego końca w stronę początku układ obraca się zgodnie z biegiem wskazówki zegara. Tak np. na fig. 11, na której oś obrotu z jest prostopadła do płaszczyzny papieru, a punkt P posiada wskazaną szybkość v, szybkość kątowa jest zwrócona w stronę czytelnika.

Pod względem wielkości określamy szybkość kątową w sposób następujący. Prowadzimy przez oś obrotu z płaszczyznę **A**; ma to być płaszczyzna nieruchoma, nie biorąca udziału w ruchu układu. Prócz tego prowadzimy przez z inną płaszczyznę **B**, należącą do układu i poruszającą się wraz z nim. Dajmy na to, że w chwili t płaszczyzna **B** tworzyła z **A** kąt ϑ, a w chwili $t + dt$ kąt $\vartheta + d\vartheta$. Otóż szybkość kątowa ma być równa $\dfrac{d\vartheta}{dt} = \omega$.

Jeżeli szybkość kątowa jest stała, to ruch obrotowy nazywa się *jednostajnym*. W tym przypadku z równania $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ wynika, że $\vartheta = \omega t + C$, gdzie C oznacza stałą całkowania. Jeżeli początek rachuby czasu przypadł w chwili, gdy płaszczyzna **B** przystawała do **A**, to $C = 0$ i $\omega = \frac{\vartheta}{t}$.

Mając daną szybkość kątową, znamy położenie osi, wiemy, w którą stronę obraca się układ, a prócz tego możemy wyznaczyć szybkość linjową każdego punktu układu. Weźmy dla przykładu punkt P na fig. 11. Szybkość jego v jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez P i z. W czasie dt punkt ten oczywiście przebiegł drogę $r d\vartheta$, gdzie r oznacza jego odległość od osi, a zatem $v = r\frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$.

Warto zauważyć, że szybkość linjowa v punktu P jest to moment szybkości kątowej ω względem tego punktu.

Przy rozwiązywaniu wykreślnem zagadnień cynematycznych często bywa użyteczna okoliczność następująca. Dajmy na to, że figura płaska obraca się w swej płaszczyźnie około punktu O z szybkością kątową ω. Szybkość linjowa pewnego punktu A tej figury jest równa $r\omega$, gdzie $r = OA$; dajmy na to, że wyraża ją odcinek AB. Z trójkąta OAB wynika, że $AB = r \tan\vartheta$, gdzie $\vartheta = AOB$, a zatem *szybkość kątowa jest liczbowo równa* $\tan\vartheta$. Możemy także powiedzieć, że szybkości kątowe wszystkich punktów układu widać z O pod kątem $\operatorname{arctan}\omega$.

Prz. 1. Koło rozpędowe maszyny parowej robi 120 obrotów na min. Wyznaczyć jego szybkość kątową. Odp. 12,56.

Prz. 2. Wyznaczyć szybkość kątową ziemi i wskazać, w którą stronę jest zwrócona na osi ziemskiej NS. Odp. $\omega = 0{,}00007$.

Prz. 3. Dwie proste obracają się około środków O_1 i O_2, przyczem ich punkt przecięcia obiega okrąg, przechodzący przez te środki. Szybkość kątowa pierwszej prostej $= \omega$; wyznaczyć szybkość kątową drugiej.

Prz. 4. Prosta a obraca się w płaszczyźnie rysunku około punktu O z szybkością kątową ω. Wyznaczyć kąt, który ta prosta tworzy ze swą linją przewodnią.

Prz. 5. Okrąg o promieniu a obraca się w swej płaszczyźnie około punktu O z szybkością kątową ω. Wyznaczyć linję przewodnią w dwóch przypadkach: (1) gdy O leży w środku, (2) gdy leży na okręgu. Odp. Okrąg o promieniu $a\sqrt{1+\omega^2}$.

Prz. 6. Punkty A i B należą do układu, którego ruch jest obrotowy. W danej chwili punkty je zajmują w układzie prostokątnym położenia $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, a rzuty ich szybkości na osi współrzędnych wynoszą odpowiednio $(u_x\, u_y\, u_z)$, $(v_x v_y v_z)$. Wyznaczyć równania osi. Odp. $u_x(x - x_1) + u_y(y - y_1) + u_z(z - z_1) = 0$ i $v_x(x - x_2) + v_y(y - y_2) + v_z(z - z_2) = 0$.

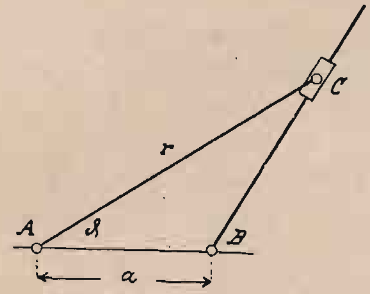


Fig. 12.

Prz. 7. Sztaba obraca się około końca nieruchomego B, a na niej przesuwa się swobodnie pochwa C, połączona przegubowo z korbą AC o długości r. Odległość środków $AB = a$. W pewnej chwili korba tworzy z AB kąt ϑ, a jej szybkość kątowa $= \omega$. Wyznaczyć szybkość kątową sztaby. Odp. $\dfrac{r\omega(r - a\cos\vartheta)}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\vartheta}$.

27. Ruch płaski. Ruch układu nazywamy płaskim, jeżeli szybkości wszystkich punktów są równoległe do pewnej płaszczyzny **F**. O ruchu takim była już mowa w par. 24. Widzieliśmy tam, że gdy szybkości trzech punktów płaszczyzny **F**, nie leżących na jednej prostej, są zawarte w tej płaszczyźnie, to ruch całego układu jest płaski.

Poprowadźmy płaszczyznę **F**′ równoległą do **F** i uważajmy dwa punkty układu A i A', położone odpowiednio w **F** i **F**′ na wspólnej prostopadłej do tych płaszczyzn. Po dt sekundach punkty owe będą również leżały w **F** i **F**′, gdyż w płaszczyznach tych są zawarte ich szybkości, a zatem odcinek AA' i w nowem położeniu będzie prostopadły do **F**, czyli równoległy do położenia poprzedzającego. Z tego wynika, że elementy torów, które przebiegają w dt sek. A i A', są równe i równoległe, a szybkości tych punktów są zgodne co do wielkości i kierunku. Jeżeli więc zbadaliśmy stan cynematyczny punktów układu, zawartych w płaszczyźnie **F**, to znamy stan cynematyczny całego układu.

Powiemy, że punkty układu, zawarte w płaszczyźnie **F**, tworzą *układ płaski*, i chodzi obecnie o zbadanie ruchu takiego układu płaskiego.

28. Środek chwilowy. Dajmy na to, że punkty A_1, A_2 (fig. 13) układu płaskiego posiadają w danej chwili szybkości v_1, v_2. Poprowadźmy przez A_1, A_2 proste a_1, a_2 odpowiednio prostopadłe do tych szybkości. Będą to oczywiście proste zerowe, a szybkość ich punktu przecięcia C musi być równa zeru, bo w razie przeciwnym musiałaby być prostopadłą do a_1 i a_2.

Wznieśmy w punkcie C prostopadłą do płaszczyzny **F**, czyli w danym razie do płaszczyzny papieru. Wszystkie punkty układu ruchomego, położone na tej prostopadłej mają szybkości równe zeru, a zatem ruch układu jest obrotowy, i osią jest owa prostopadła. Nazywamy ją *osią chwilową*, a punkt C *środkiem chwilowym*. Przymiotnik „chwilowy" ma wskazywać, że punkt C tylko w obecnej chwili jest środkiem obrotu. W chwili następnej punkt ten może mieć szybkość różną od zera, a środkiem obrotu będzie jakiś inny punkt układu, zajmujący inne położenie.

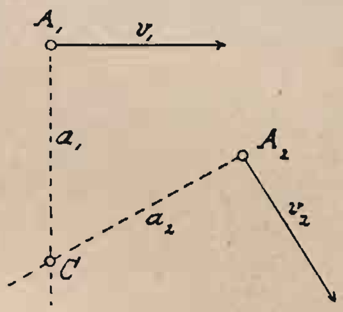


Fig. 13.

Szybkości v_1, v_2 są styczne do torów punktów A_1, A_2, a zatem proste a_1, a_2 są normalnemi. Widzimy więc, że normalne do torów punktów układu, wzniesione w tych punktach, przechodzą wszystkie przez środek chwilowy. Jeżeli więc mamy tory dwóch punktów, a także mamy ich położenia na torach w pewnej chwili, to możemy wyznaczyć środek chwilowy, jako punkt przecięcia normalnych.

Prz. 1. Punkty A, B układu poruszają się na prostych a, b i zajmują w danej chwili położenia dane. Wyznaczyć środek chwilowy. Odp. Szukany środek leży w punkcie przecięcia prostopadłych do a i b w A i B.

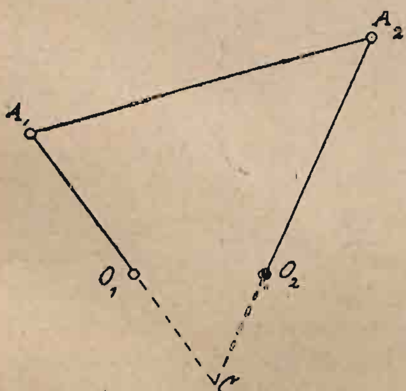


Fig. 14.

Prz. 2. Dwie korby O_1A_1, O_2A_2 obracają się około środków O_1, O_2, a końce ich są połączone przegubowo sztabą A_1A_2. Szybkość kątowa korby O_1A_1 jest równa ω_1; wyznaczyć szybkość kątową korby O_2A_2. Odp. Środek chwilowy sztaby A_1A_2 leży w C. Możemy uważać, że punkt A_1, jako należący do korby, obraca się około O_1, a jako należący do sztaby około C. Szukana szybkość kątowa

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot O_1A_1 \cdot CA_2}{CA_1 \cdot O_2A_2}.$$

Prz. 3. Torem punktu A układu płaskiego jest okrąg, którego środek leży w O, a promień jest równy r, torem zaś punktu B jest prosta, przechodząca przez O (mechanizm korbowy). Wyznaczyć szybkość punktu B w funkcji kąta $AOB = \varphi$, oraz szybkości kątowej ω promienia OA. Odp. $\frac{r\omega(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi})\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$, gdzie $l = AB$.

29. Ruch prostej w płaszczyźnie. Niech będzie prosta a, należąca do układu płaskiego, i dajmy na to, że w danej chwili środkiem chwilowym jest punkt C, którego odległość CA od a wynosi r. Szybkość punktu A leży na a i jest równa $AB = r\omega$, gdzie ω oznacza obecną szybkość kątową układu.

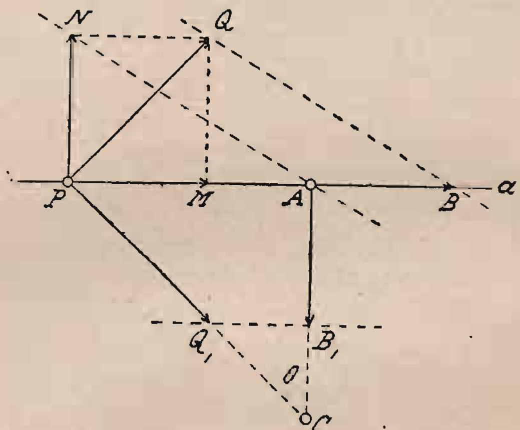


Fig. 15.

Weźmy jeszcze jakiś punkt P prostej a; jego szybkość

$$PQ = CP \,.\, \omega = \frac{r\omega}{\cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

gdzie ϑ oznacza kąt ACP. Prosta BQ będzie oczywiście linją przewodnią prostej a.

Rozłóżmy szybkość PQ na dwie składowe w kierunku prostej a i w kierunku prostopadłym. Pierwsza z nich $PM = AB = r\omega$, druga $PN = PQ\sin\vartheta = r\omega\tan\vartheta = AP \,.\, \omega$. Gdyby prosta a obracała się około punktu A z szybkością kątową ω, to punkt P miałby właśnie taką szybkość $AP \,.\, \omega$. Można powiedzieć, że prosta a posiada dwa ruchy: że przesuwa się w swym własnym kierunku z szybkością $r\omega$, (jest to ruch postępowy) i jednocześnie obraca się około punktu A z szybkością kątową ω.

Gdyby prosta a posiadała tylko ten ruch drugi, to linją przewodnią byłaby prosta AN. Tworzy ona z a kąt $NAP = \operatorname{arctan}\omega$.

Prosta BQ jest równoległa do AN, bo odcinki AB i NQ są równe i równoległe, a zatem tworzy ona również z a kąt arctan ω (por. par. 26, prz. 4).

Obróćmy szybkości punktów A i P, albo raczej odcinki AB i PQ około punktów A i P w kierunku ruchu wskazówki zegara o $90°$. Powstałe tym sposobem wektory AB_1 i PQ_1 nazwiemy *szybkościami skręconemi* punktów A i P. Z (1) wynika, że $AB_1 = PQ_1 \cos\vartheta$, czyli że odcinek AB_1 jest rzutem odcinka PQ_1, a zatem prosta Q_1B_1 jest prostopadła do AC lub równoległa do a. Możemy przeto wygłosić twierdzenie: *końce szybkości skręconych punktów ruchomej prostej a leżą na równoległej do tej prostej.* Wynika to zresztą wprost stąd, że szybkości skręcone leżą na promieniach, łączących punkty prostej ze środkiem chwilowym, i są proporcjonalne do tych promieni. Twierdzenie to bywa często użyteczne przy rozwiązywaniu wykreślnem zagadnień cynematycznych.

Rozważymy jeszcze pewien przypadek szczególny. Przypuśćmy, że podczas ruchu układu należąca doń prosta a przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt O. Dowiedziemy łatwo, że punkt O odgrywa stale tąką rolę, jak na fig. 15 punkt A, czyli że jest on wciąż rzutem środka chwilowego na prostą a.

W tym celu zwrócimy uwagę na ruch punktu O względem układu ruchomego. Oczywiście torem względnym jest prosta a, a zatem i szybkość względna leży na a. Szybkość bezwzględna jest równa zeru, a z tego wynika, że szybkość unoszenia musi być równa i odwrotna do szybkości względnej; innemi słowy szybkość tego punktu prostej a, który w danej chwili przebiega przez punkt O, leży na tejże prostej.

Prz. 1. Wykreślić styczną w dowolnym punkcie krzywej, która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = a\varphi$ (spiralna Archimedesa). Odp. Można uważać, że linję tę kreśli punkt prostej, która sunie ze stałą szybkością w swym własnym kierunku i jednocześnie obraca się ze stałą szybkością około bieguna (por. prz. 1, par. 17). Środek chwilowy pozostaje stale w odległości a od bieguna.

Prz. 2. Wykreślić styczną w dowolnym punkcie konchoidy Nikomedesa. Konchoidę kreśli punkt prostej, która wciąż przechodzi przez nieruchomy punkt i której jeden punkt posiada ruch prostoliniowy.

Prz. 3. Dowieść, że obwiednią szybkości punktów prostej ruchomej jest parabola, której styczną wierzchołkową jest owa prosta, a ogniskiem środek chwilowy.

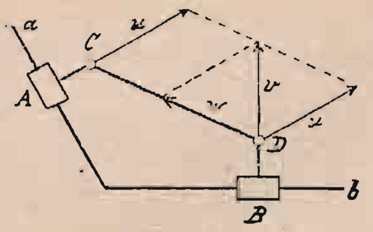


Fig. 16.

Prz. 4. Suwaki A i B (fig. 16) mogą się poruszać po nieruchomych prostych a i b; łączy je przegubowo sztaba CD. Dana jest szybkość u suwaka A, wyznaczyć wykreślnie szybkość kątową sztaby CD. Odp. Na fig. wyznaczono szybkość skręconą v przegubu D, a następnie jego szybkość, również skręconą, w względem przegubu C. Szukana szybkość kątowa $= \frac{w}{CD}$.

Prz. 5. Sztaba AB przechodzi przez suwak A i łączy się przegubem B ze sztabą BC. Dane są szybkości u i w suwaka A i końca C, wyznaczyć wykreślnie szybkość v przegubu B.

Na fig. 17 wykreślono tylko szybkości skręcone. Koniec szukanej szybkości v musi leżeć na równoległej do BC przez koniec szybkości w. Rozważając ruch przegubu B względem suwaka A, znajdziemy, że szybkość unoszenia $= u$, a szybkość względna leży na prostej AB.

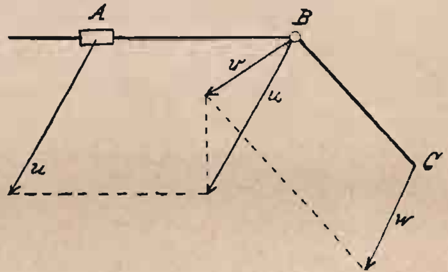


Fig. 17.

Prz. 6. Trzy sztaby A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 łączą się przegubowo z wierzchołkami sztywnego trójkąta $A_1A_2A_3$. Dane są szybkości u_1, u_2, u_3 końców B_1, B_2, B_3, wyznaczyć wykreślnie szybkości v_1, v_2 i v_3 wierzchołków A_1, A_2, A_3.

Na fig. 18 wykreślono jedynie szybkości skręcone. Z początku pomijamy zupełnie szybkość u_3, i obrawszy dowolnie szybkość w_1 wierzchołka A_1, wyznaczamy szybkość w_3 wierzchołka A_3. Miejscem geometrycznem końca tej ostatniej jest linja prosta, która łatwo daje się wyznaczyć. Wynika to z twierdzenia Desargues'a *).

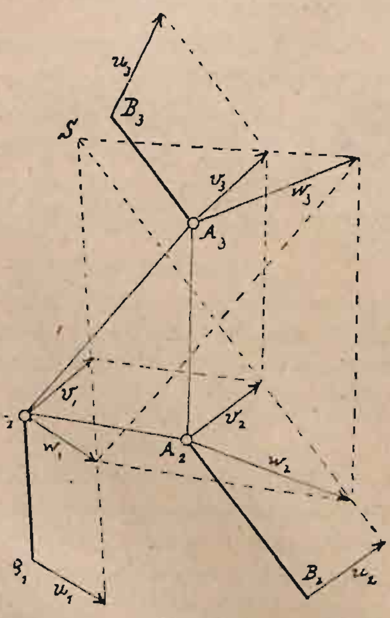


Fig. 18.

*) Twierdzenia Desargues'a są następujące: Niech będą dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, i przypuśćmy że pary odpowiednich wierzchołków, t. j. A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 leżą na trzech prostych wychodzących z jednego punktu; w takim razie pary odpowiednich boków, t. j. A_1B_1 i A_2B_2, B_1C_1 i B_2C_2, C_1A_1 i C_2A_2 przecinają się na jednej prostej. Odwrot-

Prz. 7. Dwa sztywne trójkąty ABC i CDE są połączone przegubem C a prócz tego sztabami AF i FE, oraz BG i GD (fig. 19). Wszystkie połączenia są przegubowe. Przegub F jest nieruchomy, a szybkość przegubu G jest dana. Wyznaczyć wykreślnie szybkość przegubu C.

Postępujemy podobnie, jak w prz. poprzedzającym, ale wypadnie dwa razy stosować twierdzenie Desargues'a. Obieramy np. szybkość przegubu B i wyznaczamy miejsce geometryczne końców szybkości punktu C. Następnie znajdziemy łatwo miejsce geometryczne końca szybkości punktu D.

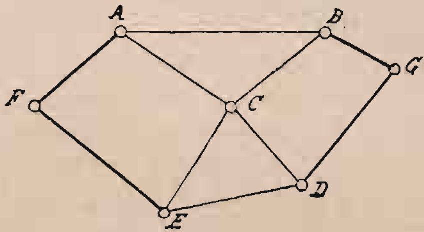


Fig. 19.

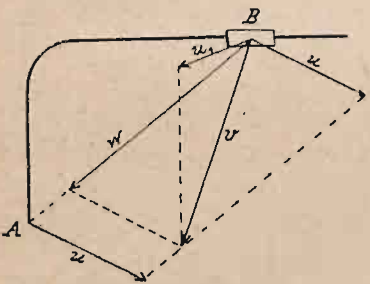


Fig. 20.

Prz. 8. Na zgiętą sztabę jest nasunięty suwak B. Dane są szybkość u końca A (fig. 20) oraz szybkość u_1 suwaka B. Wyznaczyć szybkość kątową sztaby.

Wyznaczamy naprzód szybkość v tego punktu sztaby, który w chwili obecnej zajmuje suwak. Koniec jej musi leżeć na równoległej, poprowadzonej przez koniec szybkości u do prostej AB, oraz na prostopadłej przez koniec u_1 do sztaby. Szukana szybkość kątowa $= \frac{w}{AB}$. Na fig. wszystkie szybkości są skręcone.

30. Linje środków chwilowych. Badając ruch układu, odróżniamy punkty jego od punktów przestrzeni nieruchomej. W danej chwili każdy punkt układu przypada w pewnym określonym punkcie przestrzeni, ale należy uważać, że są to dwa punkty różne, i już w chwili następnej nie będą leżały razem. Dotyczy to zarówno ruchu układu w przestrzeni, jak ruchu układu płaskiego w jego płaszczyźnie.

Wyobraźmy sobie naprzykład, że cienka płyta porusza się na nieruchomym stole. Odróżniamy ruchome punkty płyty od nieruchomych punktów stołu. W każdej chwili istnieje środek chwilowy. Jest nim pewien określony punkt płyty, zajmujący podówczas pewien określony punkt stołu. Wogóle z biegiem

---

nie, jeżeli pary odpowiednich boków przecinają się na jednej prostej, to pary odpowiednich wierzchołków leżą na prostych, wychodzących z jednego punktu.

czasu punkty te się zmieniają. Coraz inny punkt płyty staje się środkiem chwilowym, zajmując coraz nowy punkt stołu.

Tym sposobem z pośród punktów płyty wyróżniamy te, które były lub będą środkami chwilowymi, a z pośród punktów stołu te, które zajmował lub zajmie środek chwilowy.

Wyobraźmy sobie punkt M, ruchomy, lecz nie należący do płyty. Przypuśćmy, że podąża on za środkiem chwilowym i w każdej chwili znajduje się właśnie w tym środku. Ten punkt M zatacza na stole pewną linję, która jest jego torem bewzględnym. Oznaczymy ją literą σ i nazwiemy *linją stałą środków chwilowych*. Na niej leżą te wszystkie punkty stołu, które z biegiem czasu zajmuje środek chwilowy.

Punkt M i na płycie zatacza pewną linję czyli tor względny. Oznaczymy ją przez ϱ i nazwiemy *linją ruchomą środków chwilowych*. Na niej leżą te wszystkie punkty płyty, które były lub będą środkami chwilowemi.

W dowolnej chwili linje ϱ i σ posiadają wspólny punkt C, ówczesny środek chwilowy. Szybkość bezwzględna punktu M jest styczna w C do linji σ, a szybkość względna do ϱ. Szybkość unoszenia jest zerem, bo szybkość środka chwilowego jest równa zeru. Z tego wynika, że szybkość bezwzględna jest zgodna z względną zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości. Widzimy więc, że linie ϱ i σ posiadają w punkcie C wspólną styczną, a więc się stykają w tym punkcie.

Z rozważań powyższych wynika jeszcze inny ważny wniosek. Ponieważ szybkość bezwzględna punktu M jest wciąż równa szybkości względnej, przeto punkt ten w pewnym czasie obiega równe łuki na obydwóch torach, bezwzględnym i względnym. Przypuśćmy, że w chwilach t_1 i t_2 środkami chwilowymi były odpowiednio punkty R_1 i R_2 linji ϱ, i środki te zajmowały odpowiednio punkty S_1 i S_2 linji σ. W takim razie długości łuków R_1R_2 i S_1S_2 są równe.

Ruch linji ϱ możemy scharakteryzować krótko, mówiąc, że toczy się ona bez poślizgu po linji σ.

Prz. 1. Parabola toczy się po linji prostej; wyznaczyć tor ogniska. Odp. Za oś odciętych obieramy tę prostą, po której parabola się toczy, czyli linję stałą środków chwilowych, a za początek układu ten jej punkt przez który przechodził wierzchołek. W obecnej chwili ognisko przypada w $F(xy)$, oś paraboli zajmuje położenie BF, a środkiem chwilowym jest C. Promień wodzący paraboli CF jest normalną do szukanej krzywej; dajmy na to, że tworzy on z osią y kąt ϑ. Średnica paraboli przechodząca, przez C, przecina kierownicę w A, i wiadomo, że $AC = CF$, a pamiętając, że styczna do paraboli jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniem wodzącym i średnicą, dojdziemy z łatwością, że $AF = 2y$. Oznaczywszy parametr paraboli BF przez $2p$, otrzymamy $y = \frac{p}{\cos\vartheta}$.

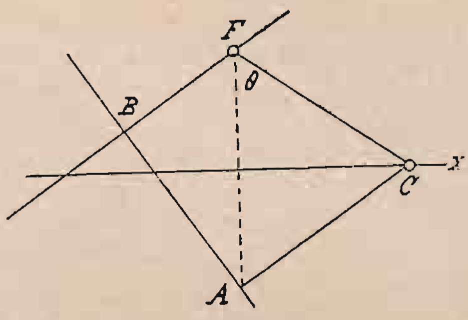


Fig. 21.

Lecz $\cos\vartheta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, i zatem będzie $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - p^2}}{p}$. Jest to równanie różniczkowe krzywej łańcuchowej, której parametr jest równy p.

Prz. 2. Prosta, należąca do układu, toczy się po okręgu. Wyznaczyć tor punktu, który przechodził przez środek okręgu. Odp. Spiralna Archimedesa.

Prz. 3. Dwie jednakowe parabole stykają się wierzchołkami; jaki będzie tor ogniska jednej z nich, gdy zacznie ona toczyć się po drugiej? Odp. Linja prosta.

Prz. 4. Środkiem chwilowym jest wciąż jeden i ten sam punkt układu ruchomego; dowieść, że punkt ten zajmuje stałe położenie na płaszczyźnie nieruchomej.

Prz. 5. Spiralna logarytmiczna toczy się po linji prostej; wyznaczyć tor jej bieguna. Odp. Linja prosta.

Prz. 6. Linją stałą środków chwilowych jest parabola, a torem jednego z punktów układu ruchomego oś paraboli. Wyznaczyć linję ruchomą środków chwilowych. Odp. Spiralna Archimedesa.

Ów punkt ruchomy A był środkiem chwilowym, gdy znajdował się w wierzchołku paraboli. Obieramy w układzie ruchomym biegunowy układ współrzędnych, mianowicie za biegun obieramy punkt A, a za oś biegunową tę prostą, która przystawała do stycznej wierzchołkowej paraboli. Znajdziemy wówczas łatwo równanie różniczkowe krzywej szukanej i jego całkę $r = p\varphi$, gdzie p jest odległością pomiędzy ogniskiem paraboli i kierownicą.

31. Tory punktów układu. Znajomość obydwóch krzywych środków chwilowych jest wielce użyteczna przy badaniu ruchu układu płaskiego, zwłaszcza, jeżeli chodzi o tory różnych punktów. W wielu przypadkach, mając linje środków, możemy w sposób bardzo prosty wykreślić tor dowolnego punktu układu.

Przypuśćmy, że krzywa σ na fig. 22 jest linją stałą, a ϱ linją ruchomą środków chwilowych. W chwili obecnej krzywe te stykają się w O, i punkt ten jest środkiem chwilowym. Pragniemy wykreślić tor punktu, który obecnie zajmuje położenie A.

Obierzmy na linji σ pewną liczbę punktów I, II, III... . Dajmy na to, że umiemy w sposób ścisły lub przybliżony wyznaczyć na linji ϱ takie punkty 1. 2, 3..., aby łuki 01, 12, 23... były odpowiednio równe łukom 0I, I II, II III...

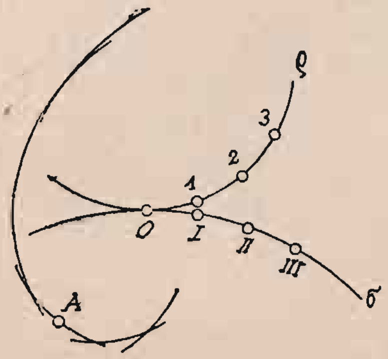


Fig. 22.

Zatoczmy z punktu O okrąg, przechodzący przez A. Okrąg ten będzie zawierał element toru punktu A, bo w chwili obecnej A obraca się około O; innemi słowy okrąg będzie styczny do toru. Po pewnym czasie punkt 1 znajdzie się w położeniu I i stanie się wówczas środkiem chwilowym; gdy więc z punktu I zatoczymy okrąg promieniem $1A$, to okrąg ten będzie znowu styczny do szukanego toru. Zataczamy następnie okrąg z punktu II promieniem $2A$ i t. d. Obwiednią tych wszystkich okręgów będzie szukany tor punktu A.

Prz. 1. Koło toczy się po linji prostej; wykreślić tor któregokolwiek punktu układu.

Prz. 2. Prosta toczy się po okręgu; wykreślić tor jednego z punktów tej prostej (rozwijająca koła), a także tor innego punktu, przechodzący przez środek okręgu (spiralna Archimedesa, por. prz. 2, par. 30).

Prz. 3. Wykreślić przy pomocy metody powyższej epicykloidę, albo hipocykloidę.

32. Wyznaczanie linij środków. Okażemy na przykładzie, jak można wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych, gdy mamy dostateczną liczbę danych określających ruch układu.

Dajmy na to, że torami punktów A i B układu są proste a i b, przecinające się w punkcie O (por. prz. 1, par. 28). Obecnie środkiem chwilowym jest punkt C, w którym przecinają się prostopadłe, poprowadzone w A i B do torów a i b.

Czworobok $OABC$ ma dwa kąty proste, a więc może być wpisany w koło, i w myśl twierdzenia Ptolomeusza będzie

$$AC\,.\,OB + OA\,.\,BC = OC\,.\,AB \qquad (1)$$

Lecz $AC = OC \sin\alpha$, $OB = OC \cos\beta$, $OA = OC \cos\alpha$, $BC = OC \sin\beta$, gdzie α i β oznaczają kąty AOC i COB. Podstawiając te wartości w (1), otrzymamy

$$OC(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = AB,$$

czyli
$$OC = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

AB jest to odległość pomiędzy dwoma punktami układu sztywnego, a $\alpha + \beta$ jest kątem pomiędzy prostemi nieruchomemi. Obydwie te wielkości są stałe, a zatem i OC jest wielkością stałą.

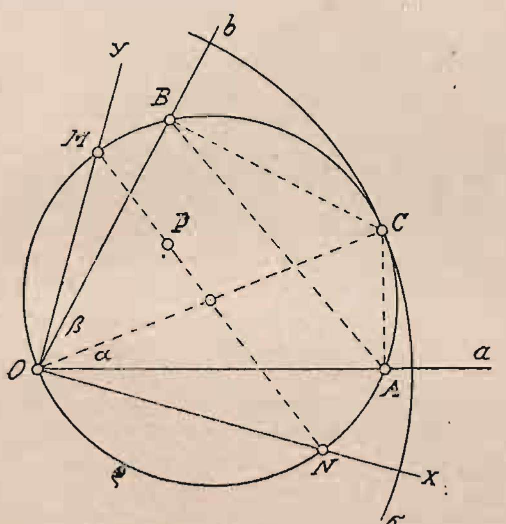


Fig. 23.

Tak więc środek chwilowy pozostaje w stałej odległości od O, i zatem linją stałą środków chwilowych jest okrąg σ, zatoczony z O promieniem OC.

Ze środka chwilowego widać ruchomy odcinek AB pod kątem ACB. Kąt ten wynosi $\pi - \alpha - \beta$, jest więc stały. Tylko te punkty układu mogą stać się środkami chwilowymi, z których odcinek AB widać pod takim kątem (albo pod kątem $\alpha + \beta$). Miejscem geometrycznem takich punktów jest okrąg ϱ, opisany na trójkącie ABC; przechodzi on oczywiście również przez punkt O. Promień okręgu ϱ jest dwa razy mniejszy od promienia okręgu σ.

Zobaczymy teraz, jakie tory obiegają różne punkty układu. Weźmy naprzód jakikolwiek punkt M okręgu ϱ. Szybkość jego jest prostopadła do CM, a więc leży na prostej OM. Skoro szybkość punktu M jest wciąż skierowana do punktu O, albo od tego punktu, to torem M może być tylko prosta OM. Toż samo dotyczy wszystkich punktów układu, położonych na okręgu ϱ. Torami ich są proste, przechodzące przez O.

Weźmy teraz jakibądź punkt P. Poprowadźmy przezeń średnicę koła ϱ. Torami jej końców M i N są prostopadłe proste OM i ON. Obierzmy te proste za osi y i x układu współrzędnych, oznaczmy stałe odcinki MP i NP odpowiednio przez m i n, a zmienny kąt MNO przez ϑ. Znajdziemy, że

$$x = m \cos \vartheta, \quad y = n \sin \vartheta,$$

gdzie x i y oznaczają współrzędne punktu P. Są to równania parametryczne elipsy, a zatem torem punktu P jest elipsa, której osi leżą na prostych ON i OM.

Prz. 1. Proste a i b układu płaskiego przechodzą wciąż odpowiednio przez stałe punkty A i B. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych. Odp. Odcinek AB widać ze środka chwilowego pod kątem stałym, a zatem linją stałą jest koło σ, przechodzące przez A, B i punkt przecięcia O prostych a i b. Linją ruchomą jest koło, zatoczone z punktu O promieniem dwa razy większym. Łatwo sprawdzić, że każda prosta układu, przechodząca przez O, czyli należąca do pęka O, przechodzi wciąż przez stały punkt, położony na kole σ.

Ruch ten jest jakby odwrotnością ruchu, opisanego szczegółowo w paragrafie niniejszym. Jeżeli tam uznamy dotychczasową płaszczyznę nieruchomą za układ ruchomy, a dotychczasowy układ ruchomy będziemy uważali za płaszczyznę nieruchomą, innemi słowy jeżeli będziemy uważali ruch względny płaszczyzny nieruchomej względem układu ruchomego, to punkty A i B (fig. 23) staną się dla nas nieruchomymi, a proste a i b ruchomemi, i otrzymamy ruch, o którym mowa w tym przykładzie.

Prz. 2. Dwie jednakowe korby MP i NQ (fig. 24) obracają się około punktów M i N, a ich końce łączy przegubowo sztaba PQ, której długość jest równa MN. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych. Odp. Są to jednakowe elipsy, których ogniska leżą odpowiednio w M,N i P,Q.

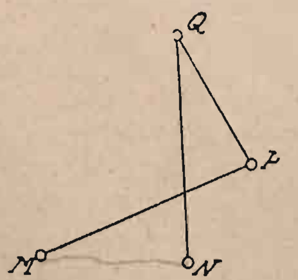


Fig. 24.

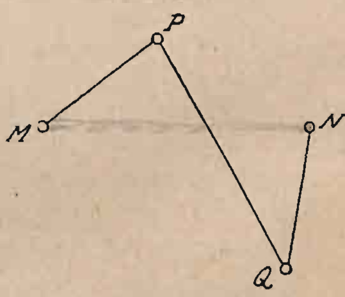


Fig. 25.

Prz. 3. Dwie jednakowe korby MP i NQ, jak na fig. 25, obracają się około punktów M i N, a ich końce łączy przegubowo sztaba $PQ = MN$. Wyznaczyć linje środków. Odp. Jednakowe hiperbole; wykreślić asymptoty.

Prz. 4. Układ obraca się około punktu A ze stałą szybkością kątową ω, a ten punkt A biegnie prostą a ze stałą szybkością v. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych. Odp. Punkt układu, położony w odległości r od A, posiada szybkość $r\omega$ względem A i szybkość unoszenia v. Środkiem chwilowym będzie taki punkt, którego szybkość bezwzględna $= 0$. Linią stałą jest prosta równoległa do a, a ruchomą koło.

Prz. 5. Punkt M układu płaskiego obiega spiralną Archimedesa, której biegun leży w O, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = a\varphi$, a prosta m układu, zawierająca punkt M, przechodzi wciąż przez O. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych. Odp. Linją stałą jest koło o promieniu a, ruchomą zaś prosta, równoległa do m (prz. 1 par. 29).

Prz. 6. Punkt M układu obiega spiralną logarytmiczną, której biegun leży w O, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = ae^{\varphi}$, a prosta m układu, zawierająca punkt M, przechodzi wciąż przez O. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych. Odp. Linją stałą jest spiralna logarytmiczna, odchylona od danej o 90^0, a linją ruchomą prosta, tworząca z OM kąt 45^0 (por. prz. 2 par. 17).

Prz. 7. Sztaby OA, AB, BC, CO, połączone przegubami, tworzą równoległobok; wierzchołek O jest nieruchomy, a boki OA i OC obracają się z szybkościami kątowemi ω_1 i ω_2. Jaki jest tor wierzchołka B?

Wyznaczamy obydwie krzywe środków chwilowych dla sztaby AB, a w tym celu wykreślamy naprzód szybkość punktu B. Jego szybkość względem punktu A (lecz nie sztaby OA) i szybkość unoszenia są odpowiednio równe $\omega_2 \, . \, OC$ i $\omega_1 \, . \, OA$, albo $\omega_2 r_2$ i $\omega_1 r_1$, jeżeli OA i OC oznaczymy przez r_1 i r_2. Normalna do toru punktu B przetnie OA w punkcie D; gdy porównamy trójkąt ABD z trójkątem szybkości, to wypadnie, że $AD = \frac{r_1 \omega_1}{\omega_2}$, a zatem punkt D zajmuje położenie stałe na sztabie OA.

Z tego wynika, że krzywą stałą jest koło o promieniu OD, ruchomą koło o promieniu AD. Torem punktu B będzie epicykloida lub hipocykloida (trochoida) stosownie do tego, czy szybkości kątowe mają kierunki zgodne, czy odwrotne.

Ta sama krzywa powstaje przy toczeniu się innego koła po innem kole stałem. Koła te otrzymamy, wyznaczając środek chwilowy dla sztaby BC.

Prz. 8. Jeden bok ruchomego kąta prostego ABC przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt A, a punkt C, położony na drugim boku, pozostaje na nieruchomej prostej x, przyczem odległość punktu A od x jest równa BC. Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych. Odp. Dwie jednakowe parabole.

33. **Obwiednie.** Niech będzie jakaś linia λ, należąca do układu ruchomego, i przypuśćmy, że normalna do tej linji, poprowadzona przez środek chwilowy, przecina ją w punkcie A. Oczywiście szybkość punktu A leży na stycznej do λ.

Wyobraźmy sobie teraz punkt M ruchomy, ale nie należący do układu. Niech ruch jego będzie taki, aby zajmował on wciąż punkt przecięcia linji λ z normalną, przechodzącą przez środek chwilowy, a więc w danej chwili punkt A. Ten punkt M zakreśla na płaszczyźnie nieruchomej pewną linję, którą oznaczmy przez μ. Dowiedziemy, że linje λ i μ są styczne.

W tym celu uważajmy ruch punktu M względem układu ruchomego. Torem względnym jest linja λ, a zatem szybkość względna jest styczna do tej linji. Szybkość unoszenia, czyli szybkość punktu A, jest, jak widzieliśmy, również styczna do λ. Skoro obydwie szybkości składowe leżą na stycznej do λ, to na tejże prostej musi leżeć i szybkość wypadkowa, czyli bezwzględna. Lecz torem bezwzględnym punktu M jest linja μ, a zatem szybkość bezwzględna musi być styczna i do tej linji. Widzimy, że linje λ i μ mają w A wspólną styczną, a więc stykają się w tym punkcie.

Linja λ jest w każdej chwili styczna do linji μ, a zatem μ jest obwiednią wszystkich położeń linji λ. Warto zwrócić uwagę, że linja λ nie toczy się po linji μ. Szybkość unoszenia jest tu różna od zera, i szybkość względna punktu M nie jest równa szybkości bezwzględnej.

Z rozważań tych wynika, że *wspólna normalna do dowolnej linji λ, należącej do układu ruchomego, i do jej obwiedni μ przechodzi w każdej chwili przez środek chwilowy.*

W paragrafie 29 rozważaliśmy ruch prostej, która wciąż przechodzi przez stały punkt O, i widzieliśmy, że prostopadła do niej, wystawiona w punkcie O, przechodzi w każdej chwili przez środek chwilowy. Jest to szczególny przypadek tylko co dowiedzionego twierdzenia. Prosta ruchoma jest w tym razie linją λ, a punkt O można uważać za zdegenerowaną linję μ.

Prz. 1. Torem punktu A układu płaskiego jest prosta m, a obwiednią prostej a, należącej do układu i przechodzącej przez A, jest koło styczne do m. Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych. Odp. Dwie jednakowe parabole.

Prz. 2. Punkty A i B układu płaskiego poruszają się na prostych x i y, prostopadłych jedna do drugiej. Wyznaczyć obwiednię prostej AB. Odp. Obieramy proste x, y za osi współrzędnych i oznaczamy przez (xy) współrzędne punktu zetknięcia prostej AB z obwiednią. Znajdziemy łatwo, że $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, gdzie $a=AB$. Jest to równanie astroidy.

Prz. 3. Koło o promieniu a toczy się po prostej x; wyznaczyć obwiednię średnicy. Odp. Cykloida, którą zatacza punkt okręgu o promieniu $\frac{a}{2}$, toczącego się po prostej x.

Prz. 4. Boki AB i BC ruchomego trójkąta ABC pozostają stycznemi odpowiednio do kół O_1 i O_2. Wyznaczyć obwiednię boku CA. Odp. Łatwo się przekonać, że normalna do obwiedni szukanej przecina stałą linię środków chwilowych wciąż w jednym i tym samym punkcie, a krzywą, której wszystkie normalne przechodzą przez jeden punkt, jest koło.

Prz. 5. Wierzchołek kąta prostego porusza się na prostej y, a jeden bok przechodzi wciąż przez punkt F. Wyznaczyć obwiednię drugiego boku. Odp. Parabola, której ogniskiem jest F, a styczną wierzchołkową y.

Prz. 6. Wierzchołek kąta α obiega spiralną $r = ae^{\varphi}$, a jeden z jego boków przechodzi przez biegun. Wyznaczyć obwiednię drugiego boku.

Łatwo okazać, że styczna do szukanej krzywej tworzy z promieniem wodzącym kąt 45°, a zatem krzywa ta jest taką samą spiralną. Interesujące są dwa przypadki szczególne. Zakładając $\alpha = \frac{\pi}{4}$, znajdziemy, że rozwijaną spiralnej logarytmicznej jest taka sama spiralna (par. 34), a zakładając $\alpha = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy obwiednię promieni światła, wydawanych przez punkt świecący w biegunie, po odbiciu od spiralnej danej.

34. Rozwijane i rozwijające. Niech będzie jakakolwiek krzywa α. Wyobraźmy sobie układ ruchomy, którego punkt M obiega tę krzywą, a prosta m, przechodząca przez M, jest wciąż do niej normalna. Środek chwilowy będzie oczywiście w każdej chwili leżał na prostej m. Zbadamy bliżej położenie jego.

Przypuśćmy, że w pewnej chwili punkt M zajął położenie M' na α, a prosta m położenie CM', gdzie C ma oznaczać ówczesny środek chwilowy. W ciągu następnych dt sek. cały układ razem z prostą m obraca się około C, i w końcu tego okresu m zajmie położenie CM'', gdzie M'' oznacza nowe położenie punktu M na krzywej α, nieskończenie blizkie do M'. Tak więc środek chwilowy leży na przecięciu normalnych, poprowadzonych w nieskończenie blizkich punktach krzywej α. Lecz z drugiej strony wiemy, że takie dwie normalne przecinają się w środku krzywizny krzywej α; w danym razie jest to środek krzywizny, odpowiadający punktowi M'.

Widzimy, że środek chwilowy leży w każdej chwili w środku krzywizny, należącym do tego punktu krzywej α, który właśnie zajmuje punkt M. Oczywiście linją ruchomą środków chwilowych jest tu prosta m, a linją stałą miejsce geometryczne środków krzywizny krzywej α. Oznaczmy to miejsce geometryczne literą β.

Możemy teraz powstanie krzywej α wyobrażać sobie w sposób taki: prosta m toczy się bez poślizgu po krzywej β, i jeden z punktów tej prostej zatacza krzywą α.

Można to opisać jeszcze inaczej. Wyobraźmy sobie, że jeden koniec nici nierozciągalnej jest umocowany w jakimś punkcie krzywej β, i że nić opasuje ściśle tę krzywą. Gdy ujmiemy za swobodny koniec nici i będziemy ją nawijali na krzywą β, lub odwijali, przyczem nić powinna być wciąż wyprężona, to oczywiście ruch wyprostowanej części nici będzie taki sam, jak ruch prostej m, i jeden z punktów nici zakreśli krzywą α.

Krzywa β zowie się *rozwijaną* krzywej α, a krzywa α *rozwijającą* krzywej β. Rozwijana jest obwiednią normalnych rozwijającej.

35. Szybkość środka chwilowego. Dajmy na to, że krzywe α_1 i α_2 na fig. 26 są linjami środków chwilowych stałą i ruchomą, a M oznacza ów punkt ruchomy, który, nie należąc do układu ruchomego, podąża wciąż za środkiem chwilowym. O tym punkcie M była już mowa w par. 30. Widzieliśmy tam, że szybkość jego względem układu ruchomego jest zgodna z szybkością bezwzględną co do wielkości i kierunku. Szybkość ta nazywa się powszechnie szybkością *środka chwilowego*. Nazwa ta, trudna do zastąpienia, wydaje się w pierwszej chwili niedorzeczną, bo środek chwilowy, jeżeli uważamy go za punkt układu ruchomego, posiada szybkość zero. Oznaczmy ową szybkość punktu M przez c, a szybkość kątową układu ruchomego przez ω.

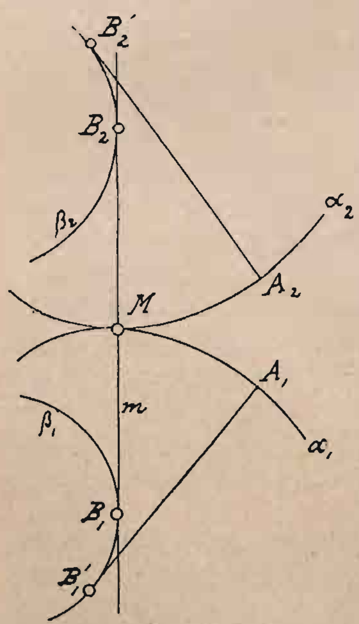


Fig. 26.

Wyobraźmy sobie teraz prostą m, ruchomą, lecz nie należącą do do rozważanego układu ruchomego; przypuśćmy, że zawiera ona punkt M i pozostaje wciąż normalną do krzywej α_1. Według paragrafu poprzedzającego środek chwilowy B_1 tej prostej jest środkiem krzywizny krzywej α_1 w punkcie M. Jeżeli promień krzywizny B_1M jest równy R_1, to szybkość kątowa prostej m wyniesie $\frac{c}{R_1}$.

Rozważmy teraz ruch prostej m względem układu ruchomego. Torem względnym punktu M jest krzywa α_2, i prosta m pozostaje wciąż normalną do tej krzywej; z tego wynika, że środek chwilowy dla prostej m w tym ruchu względnym jest zarazem środkiem krzywizny linji α_2 w punkcie M. Oznaczmy ten środek przez B_2, a promień krzywizny B_2M przez R_2.

Szybkość bezwzględna punktu B_2 (jako należącego do prostej m) jest równa $\frac{c}{R_1}(R_1 + R_2)$, a szybkość unoszenia $R_2\omega$. Ponieważ szybkość względna jest zerem, przeto

$$\frac{c}{R_1}(R_1 + R_2) = R_2\,\omega$$

lub

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Aby wzór był zupełnie ogólny, będziemy uważali R_1, R_2 za dodatnie, gdy mierzymy je w strony odwrotne od środka chwilowego, czyli, gdy B_1 i B_2 leżą po różnych stronach punktu M. Jeżeli B_1 i B_2 leżą po jednej stronie, to R_1 i R_2 powinny mieć znaki odwrotne, dobrane w taki sposób, aby wielkość $\frac{\omega}{c}$ była dodatnia.

Przy pomocy tego wzoru można wyznaczyć szybkość środka chwilowego, mając krzywizny obydwóch linij środków oraz szybkość kątową układu.

Fig. 26 zasługuje jeszcze na chwilę uwagi.

Prosta m podczas ruchu układu toczy się bez poślizgu po rozwijanej krzywej α_1, a także po rozwijanej krzywej α_2, przyczem ta ostatnia także się porusza, gdyż należy do układu ruchomego. Na fig. oznaczono te rozwijane odpowiednio literami β_1 i β_2.

Wyobraźmy sobie, że na β_1 i β_2 są nawinięte dwa końce nici, i że nić ta jest wyprężona. Podczas ruchu układu pozostanie ona wciąż w naprężeniu i będzie się jednocześnie odwijała z krzywych β_1 i β_2 lub nawijała na nie; zresztą przy innej dyspozycji nić może się nawijać na jedną z nich, a odwijać z drugiej.

36. Krzywizny torów. Na fig. 27 M ma być owym punktem ruchomym, który nie należy do układu, lecz wędruje wciąż razem ze środkiem chwilowym, a więc M oznacza również położenie obecne środka chwilowego; niech c będzie szybkością punktu M, albo szybkością środka chwilowego, a m wspólną normalną do obydwóch linij środków chwilowych. Szybkość c, jako leżąca na wspólnej stycznej, jest prostopadła do m. Przypuśćmy, że w chwili obecnej układ obraca się około M z szybkością kątową ω.

Weźmy dowolny punkt układu P, którego odległość od M oznaczymy przez p. Szybkość jego $v = p\omega$. Prosta, łącząca koniec P' szybkości v z M jest linją przewodnią prostej MP; tworzy ona z MP kąt $\alpha = \text{arctan}\,\omega$ (par. 29).

Wyobraźmy sobie prostą n ruchomą, lecz nie należącą do układu. Dajmy na to, że jeden jej punkt jest umocowany w punkcie P, a zatem wędruje torem puntu P i w każdej chwili posiada z P wspólną szybkość; w chwili obecnej ta szybkość jest równa v. Przypuśćmy dalej, że ta prosta n pozostaje wciąż normalną do toru punktu P. Z tego wynika, że przechodzi ona wciąż przez środek chwilowy układu, czyli przez punkt M, i toczy się bez poślizgu po nieruchomej rozwijanej toru punktu P.

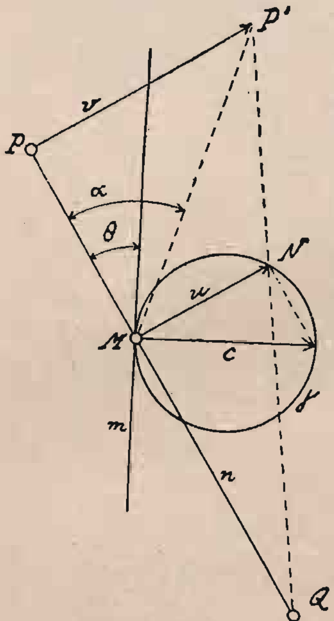


Fig. 27.

Zwróćmy uwagę na ruch punktu M względem prostej n, albo raczej względem nowego układu, związanego z tą prostą. Torem względnym jest prosta n, a więc na niej leży szybkość względna; szybkość unoszenia jest prostopadła do n, jako do prostej zerowej, Gdy rozłożymy szybkość bezwzględną c w tych dwóch kierunkach, to składowa prostopadła u będzie szybkością tego punktu prostej n, w którym obecnie znajduje się punkt M.

Połączmy końce N i P' szybkości u i v. Otrzymamy linję przewodnią prostej n; ich punkt przecięcia Q jest środkiem chwilowym prostej n, albo środkiem krzywizny toru punktu P.

Zapomocą tej konstrukcji (podanej przez W. Hartmanna) można wyznaczyć środek krzywizny dla punktu P, mając szybkość tego punktu, oraz szybkość środka chwilowego. Rozwiążemy również bez trudności zadanie odwrotne: mając szybkości oraz środki krzywizny torów dwóch punktów, wyznaczyć szybkość środka chwilowego; następnie można już wyznaczyć środek krzywizny dla każdego dalszego punktu układu.

Trzeba jeszcze zauważyć, że z końca N składowej u widać szybkość c pod kątem prostym, a więc koniec ten leży na obwodzie koła, którego średnicą jest c. O tem kole wypadnie nieraz mówić w dalszym ciągu; nazwiemy je dla krótkości kołem γ albo kołem Hartmanna.

Powyższa konstrukcja środka krzywizny pozwala łatwo uzasadnić pewne twierdzenia rzutowe. Niech będą na prostej MP prócz punktu P jeszcze punkty P_1, P_2.... Prowadzimy przez nie promienie prostopadłe do MP; w przecięciu z prostą przewodnią MP' otrzymamy punkty P_1', P_2'.... Prowadzimy następnie promienie $P_1'N$, $P_2'N$..., które przetną prostą MP w punktach Q_1, Q_2.... Punkty Q, Q_1, Q_2... są środkami krzywizny torów punktów P, P_1, P_2....

Mamy teraz na prostej MP dwa szeregi punktów P, P_1, P_2... i Q, Q_1, Q_2...; każdy z nich jest w perspektywie do szeregu P', P_1', P_2',..., a zatem są to szeregi rzutowe. Ich punkty podwójne są połączone w M. Gdy dany jest ten punkt M oraz para odpowiadających sobie punktów, np. P i Q, to szeregi są określone i możemy łatwo wyznaczyć środek krzywizny toru każdego punktu, danego na prostej MP.

W tym celu prowadzimy przez M dowolną prostą i obieramy na niej dwa dowolne punkty A i B. Promienie, łączące pierwszy z P, P_1, P_2..., oraz promienie, łączące drugi z Q, Q_1, Q_2..., tworzą pęki rzutowe; pęki te leżą w perspektywie, bo połączone promienie AM i BM odpowiadają sobie. Z tego wynika, że punkty przecięcia odpowiadających sobie promieni leżą na prostej, przechodzącej przez M. Prostą tę otrzymamy, łącząc M z punktem przecięcia promieni AP i BQ, a następnie już będziemy mogli wyznaczyć dowolną liczbę par punktów.

Prz. 1. Dwie korby O_1A_1 i O_2A_2, których końce łączy przegubowo sztaba A_1A_2, obracają się około O_1, O_2; wyznaczyć środek krzywizny toru pewnego punktu A, danego na sztabie, przy danem położeniu mechanizmu.

Wyznaczamy naprzód środek chwilowy C i szybkość v_1 punktu A_1. Szybkość tę powinno być widać z C pod kątem $\alpha = \operatorname{arctan} \omega$, gdzie ω oznacza szybkość kątową sztaby A_1A_2; ale oczywiście ani tor punktu układu, ani jego środek krzywizny nie zależą od szybkości kątowej, możemy więc tę szybkość albo kąt α obrać dowolnie. Środkiem krzywizny toru punktu A_1 jest O_1, gdy więc połączymy koniec v_1 z O_1, to otrzymamy linję przewodnią korby O_1A_1, i na tej linji będzie leżał koniec szybkości u_1. W danym razie jest to szybkość, którą miałby punkt, należący do korby i zajmujący położenie C. Tak samo otrzymamy dla punktu A_2 szybkość u_2. Koło γ przejdzie przez C i przez końce szybkości u_1 i u_2. Mając koło γ, znajdziemy już łatwo środek krzywizny O toru punktu A (fig. 28).

Prz. 2. Okazać, że w cykloidzie promień krzywizny jest dwa razy większy, niż odległość punktu od środka chwilowego.

Torem środka koła tworzącego jest prosta, środek krzywizny leży nieskończenie daleko, a zatem składowa u musi być równa szybkości środka. Korzystając z tego, można odrazu wykreślić koło γ. Dogodnie będzie obrać $\omega = 1$.

Prz. 3. Punkty A i B układu płaskiego poruszają się na prostych a i b, tworzących kąt prosty; wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru dowolnego punktu układu.

Obrawszy dowolnie szybkość środka odcinka AB, można odrazu wykreślić koło γ.

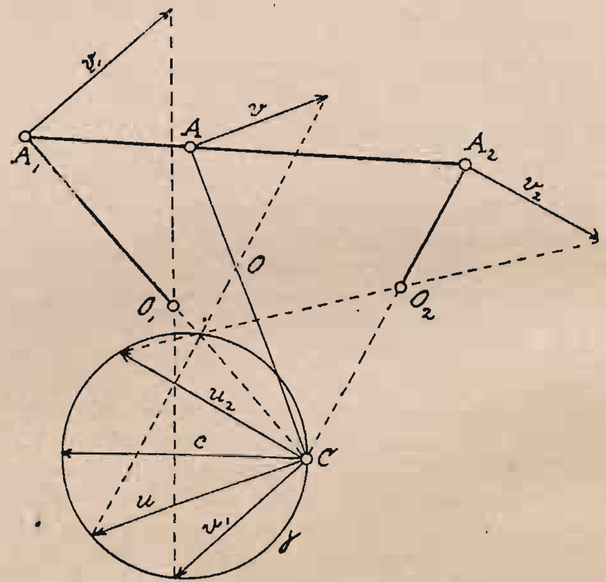


Fig. 28.

Prz. 4. Wyznaczyć promienie krzywizny w wierzchołkach elipsy, której osi wynoszą $2a$ i $2b$. Odp. $\frac{a^2}{b}$ i $\frac{b^2}{a}$. Elipsę należy tu uważać za tor punktu prostej, której dwa punkty poruszają się na osiach.

Prz. 5. Ruchoma prosta m przechodzi wciąż przez punkt O, a jej punkt A pozostaje wciąż na nieruchomej prostej n. Odległość punktu O od n wynosi a, i na m dany jest punkt B w odległości b od A. Wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru punktu B dla jakiegokolwiek położenia prostej m i obrachować promień krzywizny, gdy prosta m jest prostopadła do n.

Obrawszy O za początek układu współrzędnych i prostopadłą do n za oś x, znajdziemy łatwo równanie linji stałej środków chwilowych, a mianowicie $y^2 = ax$. Jest to parabola, której wierzchołek leży w O, a oś na osi x. Wiadomo, że rzut punktu paraboli na oś i przecięcie stycznej z osią leżą w jednakowych odległościach od wierzchołka; korzystając z tego twierdzenia, wyznaczymy wspólną styczną do krzywych środków chwilowych, a następnie koło γ.. Promień krzywizny w szczególnem położeniu wskazanem wynosi $\frac{(a \pm b)^2}{b}$.

37. Koło przegięć. Na fig. 29 widzimy znowu środek chwichwilowy M, wspólną normalną do linji środków m i koło γ. Poprowadźmy w układzie ruchomym przez środek chwilowy dowolną prostą MP, tworzącą z m kąt ϑ, i niech MP' będzie jej linją przewodnią. Prowadzimy następnie przez koniec N szybkości u prostą równoległą do MP i przez punkt S', w którym ta równoległa przecina linję przewodnią, prostopadłą $S'S$ do MP. Środek krzywizny toru punktu S leży w przecięciu prostych NS' i MS, a więc jest punktem nieskończenie odległym; z tego wynika, że punkt S przypada obecnie w przegięciu swego toru.

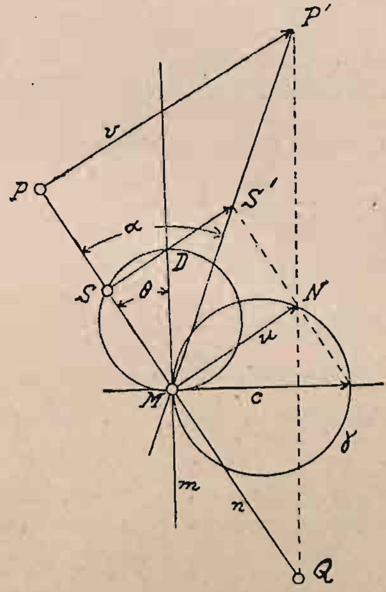


Fig. 29.

Z figury widać, że

$MS = SS' \cot \alpha = c \,.\, \cos \vartheta \,.\, \cot \alpha$,

gdzie $\alpha = \operatorname{arctan} \omega$ oznacza kąt PMP'. Ostatecznie

$$MS = \frac{c}{\omega} \cos \vartheta.$$

Oznaczmy przez d odcinek MD wspólnej normalnej, zawarty pomiędzy środkiem chwilowym i prostą SS'. Oczywiście

$$MS = d \cos \vartheta, \quad \text{zatem } d = \frac{c}{\omega}.$$

Z punktu S widać stały odcinek MD pod kątem prostym, a więc *miejscem geometrycznem punktów układu ruchomego, przebiegających w danej chwili przez przegięcia swych torów, jest okrąg koła, zatoczonego na średnicy* $MD = \frac{c}{\omega}$. Koło to zowie się *kołem przegięć*, a punkt D *biegunem przegięć.*

Koło przegięć jest oczywiście styczne do obydwóch linij środków chwilowych. Szybkości wszystkich punktów, przebiegających w danej chwili przez przegięcia swych torów, są skierowane do bieguna przegięć, albo od niego.

Niech Q będzie środkiem krzywizny toru punktu P. Wyprowadzimy ważny związek, który zachodzi pomiędzy długościami odcinków MP i MQ; oznaczmy je odpowiednio przez p i q.

W tym celu uciekniemy się znowu do prostej n, o której była już mowa w paragrafie poprzedzającym. Jej środkiem chwilowym jest Q, a szybkość tego z jej punktów, który przypada obecnie w M, wynosi $u = c \cos \vartheta$, zatem szybkość kątowa tej prostej $= \frac{c \cos \vartheta}{q}$, a punkt P posiada szybkość $\frac{(p+q)\, c \,.\, \cos \vartheta}{q}$. Lecz ta ostatnia szybkość $v = p\omega$, wypada więc $\frac{(p+q) c \,.\, \cos \vartheta}{q} =$ $= p\omega$, czyli

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cos \vartheta = \frac{1}{d},$$

gdyż $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{d}$.

Równanie powyższe zowie się zwykle *wzorem Savarego.* Uważamy w niem p za dodatnie, gdy punkt P leży po tej samej stronie środka chwilowego, co i punkt S, natomiast q uważamy za dodatnie, gdy Q leży po stronie odwrotnej. Badając przy pomocy rysunku różne położenia możliwe punktów P i Q, znajdziemy, że przy umowie powyższej lewa strona równania pozostaje zawsze dodatnią, a zatem d uważać należy zawsze za dodatnie.

Średnicę d koła przegięć można wyznaczyć z wzoru, który poznaliśmy w par. 35, pisząc tylko $\frac{1}{d}$ zamiast $\frac{\omega}{c}$. Będzie wówczas

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

gdzie R_1 i R_2 oznaczają promienie krzywizny linij stałej i ruchomej środków chwilowych. Co do znaków należy tu trzymać się umowy, zawartej we wzmiankowanym paragrafie.

Punkt Q leży zawsze po tej samej stronie punktu P, co i punkt S. Można się o tem przekonać, śledząc na figurze położenia pierwszego przy różnych położeniach drugiego, wynika to również ze wzoru Savarego. Pisząc tam MS zamiast $d \cos \vartheta$, otrzymamy

$$q = \frac{p \,.\, MS}{p - MS}.$$

Rozważymy trzy przypadki następujące:

1) $p > MS$; w takim razie q jest dodatnie, i położenie punktów P, Q jest takie, jak na fig. 29.

2) $MS > p > 0$; q jest ujemne, a więc Q leży po stronie S i $MQ = MP \,.\, \frac{MP}{PS}$. Z tego wynika, że $MQ > MP$.

3) $p < 0$; q dodatnie, przeto Q po stronie odwrotnej do S i, jak poprzednio, $MQ = MP \,.\, \frac{MS}{PS}$. Z tego widać, że $MQ < MP$.

Z powyższych roztrząsań wynika, że tor punktu P zawsze zwraca się do S wklęsłością, *jeżeli więc punkt ruchomy leży nazewnątrz koła przegięć, to tor jego jest zwrócony do środka chwilowego wklęsłością, jeżeli wewnątrz, to wypukłością.*

Rozważymy jeszcze dwa ważne przypadki szczególne. Przypuśćmy naprzód, że P jest nieskończenie odległym punktem prostej MS. W takim razie $p = \infty$, i z wzoru Savarego wynika, że $q = d \cos \vartheta = MS$. A więc środek krzywizny toru punktu nieskończenie odległego, oznaczmy go literą T, jest symetryczny do S względem środka chwilowego. Można do tego samego dojść bezpośrednio. Koniec szybkości nieskończenie odległego punktu P jest nieskończenie odległym punktem linji przewodniej MS', a więc znajdziemy środek krzywizny T, prowadząc przez N równoległą do MS'. Oczywiście otrzymamy punkt symetryczny do S względem M. Z tego wynika, że *miejscem geometrycznem środków krzywizny torów punktów nieskończenie odległych układu jest koło symetryczne względem środka chwilowego do koła przegięć.* Nazwiemy je *kołem ostrzy* ze względów, które będą wyjaśnione w dalszym ciągu.

Przypuśćmy następnie, że punkt P leży na wspólnej stycznej do linij środków chwilowych. W takim razie $\cos \vartheta = 0$, i równaniu Savarego czyni zadość tylko $q = 0$, z czego wnioskujemy, że dla punktów, położonych na wspólnej stycznej, środek chwilowy jest środkiem krzywizny torów.

Do tego samego można dojść bezpośrednio. Przypuśćmy, że jakikolwiek punkt układu ruchomego zajmował w chwili t położenie P, a w chwili $t+dt$ położenie P_1. W pierwszej z tych chwil środek chwilowy był, dajmy na to, w M, a w drugiej w M_1. Obydwa te punkty leżą na wspólnej stycznej. Oczywiście proste PM i P_1M_1, jako normalne w nieskończenie blizkich punktach toru punktu P, przecinają się w środku krzywizny. Jeżeli P leży na wspólnej stycznej, to owym punktem przecięcia będzie punkt M_1 albo M.

Oprócz punktów P i Q, o których mówiliśmy dotychczas, i które leżą na prostej n, weźmy jeszcze na wspólnej normalnej m do linij środków chwilowych punkt P' oraz środek krzywizny jego toru Q', i niechaj p' i q' oznaczają ich odległości od M. W takim razie $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{d}$, a zatem

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cos\vartheta=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'},\quad \text{lub}\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p'\cos\vartheta}+\frac{1}{p'\cos\vartheta}.$$

Jeżeli P jest rzutem prostokątnym punktu P', to $p=p'\cos\vartheta$. Z równania powyższego wynika, że wówczas i $q=q'\cos\vartheta$, a więc i Q jest rzutem punktu Q'.

Niech będzie dana wspólna normalna m do linij środków chwilowych oraz środek krzywizny Q toru danego punktu P. Naturalnie prosta PQ, oznaczymy ją literą n, przechodzi przez środek chwilowy M. Przy pomocy metody, podanej w paragrafie poprzedzającym, możemy dla punktów P_1, P_2... na prostej n wyznaczyć środki krzywizny Q_1, Q_2...; poprowadziwszy następnie przez P, P_1, P_2... Q, Q_1, Q_2... prostopadłe do n, znajdziemy na m szeregi P', P_1', P_2'..., Q', Q_1' Q_2'..., i punkty drugiego są środkami krzywizny punktów pierwszego. Rzutując te szeregi na jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez M, znajdziemy z łatwością środek krzywizny toru punktu dowolnego na tej prostej.

Prz. 1. Punkty O_1 i O_2 są środkami krzywizny linij środków chwilowych stałej i ruchomej w punkcie zetknięcia; okazać, że O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu O_2.

Prz. 2. Koło toczy się po linji prostej; wyznaczyć koło przegięć.

Prz. 3. Koło o promieniu a toczy się po takiem samem kole stałem i obecnie styka się z niem w punkcie C. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu A, położonego na okręgu ruchomym tak, że łuk AC wynosi 60^0. Odp. $\frac{4a}{3}$.

Prz. 4. Jeden punkt układu obiega koło, a drugi prostą, przechodzącą przez środek tego koła. Wykreślić koło przegięć w jednem z położeń układu.

Prz. 5. Okazać, że promień krzywizny w jakimkolwiek punkcie spiralnej logarytmicznej ($r=ae^{\varphi}$) wynosi $r\sqrt{2}$, (prz. 6, par. 32).

Prz. 6. Wyznaczyć promień krzywizny w jakimkolwiek punkcie spiralnej Archimedesa $r=a\varphi$ (prz. 5, par. 32). Odp. $\frac{a(1+\varphi^2)^{3/2}}{2+\varphi^2}$.

W tym razie $d=a$, i łatwo można się przekonać, że krzywa w samym biegunie nie tworzy przegięcia, z czego wynika, że p we wzorze Savarego będzie ujemne.

Prz. 7. Punkty A_1, A_2 układu obiegają jednakowe koła, przecinające się pod kątem prostym (znaczy to, że styczne w punkcie przecięcia tworzą kąt prosty), pozostając wciąż po odwrotnych stronach linji środków. Promień każdego koła $=a$, a odległość pomiędzy środkami $=A_1A_2$. Wyznaczyć tor środka odcinka A_1A_2 oraz promień krzywizny tego toru w dowolnym punkcie.

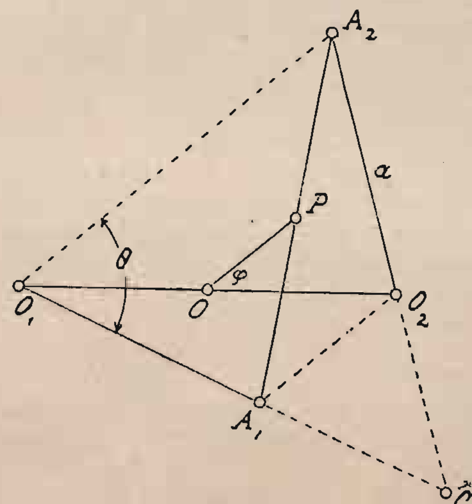


Fig. 30.

Oznaczmy środki odcinków O_1O_2 i A_1A_2 przez O i P, a środek chwilowy przez C; niech dalej będzie kąt $CO_1A_2=\vartheta$, $POO_2=\varphi$ i $OP=r$. Znajdziemy, że $O_1O_2=A_1A_2=a\sqrt{2}$, a z trójkąta $A_1A_2O_1$ wypadnie, że $\sin\vartheta=\sqrt{2}\sin\varphi$. Dalej będzie $A_2O_1-A_1O_2=2r$ i $A_2O_1-A_1O_2=2a\cos\vartheta$; stąd wynika, że $r=a\cos\vartheta$, a uwzględniając związek poprzedzający, otrzymamy $r^2=a^2\cos 2\varphi$. Jest to równanie toru punktu P we współrzędnych biegunowych. Wiadomo, że równaniu temu odpowiada lemniskata, której osią jest prosta O_1O_2.

Żądany promień krzywizny wyznaczymy przy pomocy wzoru Savarego. Z prz. 3, par. 32 wiemy, że linją stałą środków chwilowych jest hiperbola, której ogniskami są O_1 i O_2, a styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi. Punkt O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu A_1; położenie tych punktów wskazuje, że koło przegięć leży po tej samej stronie wspólnej stycznej, co A_1, i będzie

$$\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{CA_1}-\frac{1}{CO_1}\right)\cos\vartheta=\frac{a\cos\vartheta}{CA_1 \cdot CO_1}.$$

Odcinki CA_1 i CO_1 wyznaczymy z trójkąta CO_1O_2, i wówczas wypadnie, że $\frac{1}{d} = \frac{Ar^3}{a^4}$.

Odległość prostej OP od środka chwilowego, równa różnicy rzutów odcinków CO_1 i OO_1 na wspólną styczną, wynosi $\frac{a \tan \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{2}}$; przy pomocy tego wyniku znajdziemy łatwo, że prosta CP tworzy z wspólną normalną do krzywych środków chwilowych kąt 2φ. Dalszy rachunek jest prosty, należy tylko unikać błędu w znakach. Szukany promień krzywizny równa się $\frac{a^2}{3r}$.

Prz. 8. Wiadomo, że promień krzywizny katenoidy jest równy długości odcinka normalnej, zawartego pomiędzy tą krzywą i jej kierownicą. Posługując się tem twierdzeniem oraz wynikami prykładu 1, par. 30, dowieść, że promień krzywizny paraboli wynosi $\frac{2r^{3/2}}{p^{1/2}}$, gdzie r jest promieniem wodzącym, a $2p$ oznacza odległość pomiędzy ogniskiem i kierownicą paraboli.

Prz. 9. Prostopadła ze środka chwilowego M do prostej a, należącej do układu, przecina koło przegięć w punkcie B i prostą a w punkcie A. Dowieść, że promień krzywizny obwiedni prostej a w punkcie A jest równy $AB + 2BM$.

Na fig. 31 δ oznacza koło przegięć, a γ koło znane z par. 36. Niech MD będzie linją przewodnią prostej AB, należącej do układu. W takim razie

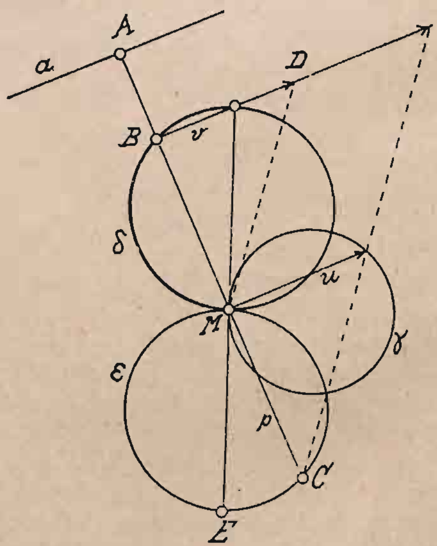


Fig 31.

$BD = v$ jest szybkością punktu B. Ponieważ ten punkt leży na kole przegięć, przeto $v = u$. Wyobraźmy sobie prostą p ruchomą, lecz nie należącą do układu. Dajmy na to, że pozostaje ona wciąż normalną do obwiedni prostej a, a jeden jej punkt przypada zawsze w punkcie zetknięcia prostej a z obwiednią. Oczywiście prosta p jest w każdej chwili prostopadła do a, a zatem obraca się około swego środka chwilowego C z taką samą szybkością kątową, jak dany układ około M. Z tego wynika, że linja przewodnia prostej p musi być równoległa do MD. Zauważymy jeszcze, że szybkość tego punktu prostej p, który przypada obecnie w M, jest równa u, i że C jest środkiem krzywizny obwiedni. Z tego wszystkiego daje się łatwo wywnioskować, że $MC = BM$.

38. Krzywizna obwiedni. Niech będzie krzywa λ, należąca do układu ruchomego, i jej obwiednia μ. Wyobraźmy sobie prostą n ruchomą, lecz nie należącą do układu ruchomego; przypuśćmy, że pozostaje ona normalną do obwiedni μ, a jej punkt N przypada w każdej chwili w zetknięciu λ i μ. Z tego wynika, że ta prosta n przechodzi wciąż przez środek chwilowy układu, a jej środek chwilowy M jest środkiem krzywizny linji μ. Rozważmy teraz ruch prostej n względem danego układu ruchomego. Jej środek chwilowy L w tym ruchu względnym jest środkiem krzywizny linji λ. Szybkość względna punktu L jest równa zeru, możemy przeto uważać, że należy on także do układu ruchomego; środek krzywizny jego toru leży w M. Tak więc *tor środka krzywizny linji ruchomej i obwiednia posiadają wspólny środek krzywizny.*

Tak np. krzywa stała środków chwilowych jest obwiednią krzywej ruchomej, jeżeli więc O_1 i O_2 są odpowiednio ich środkami krzywizny, to O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu O_2 (par. 37 prz. 1).

Przypuśćmy, że linią ruchomą jest prosta; jej środek krzywizny jest nieskończenie odległy, a zatem tor jego posiada środek krzywizny na okręgu koła, które nazwaliśmy w paragrafie poprzedzającym kołem ostrzy. Widzimy, że *obwiednie prostych posiadają środki krzywizny na okręgu ostrzy.* (Toż samo wynika z twierdzenia, dowiedzionego w par. poprzedzającym, prz. 9). Gdy więc pragniemy wyznaczyć środek krzywizny obwiedni prostej a (fig. 31), to prowadzimy ze środka chwilowego prostopadłą do a, i w przeciąciu jej z okręgiem ostrzy ε leży szukany środek krzywizny.

Niechaj E będzie punktem przecięcia wspólnej normalnej do obydwóch krzywych środków chwilowych z okręgiem ostrzy, i niech będzie jakaś prosta, przechodząca przez ten punkt E. Prostopadła do niej ze środka chwilowego przetnie ją na okręgu E; z tego wynika, że promień krzywizny obwiedni jest w tym razie równy zeru, a zatem owa prosta ruchoma przechodzi w danej chwili przez ostrze, albo punkt zwrotu, swej obwiedni. Stąd pochodzi nazwa koła ε.

Prz. 1. Okazać, że promień krzywizny w dowolnym punkcie astroidy jest równy $\frac{3a \sin 2\vartheta}{2}$, gdzie a oznacza długość odcinka stycznej, zawartego pomiędzy osiami, a ϑ kąt, który ta styczna tworzy z jedną z osi.

Prz. 2. Ruchoma prosta m przechodzi wciąż przez punkt O, a jej punkt A pozostaje wciąż na nieruchomej prostej n. Wyznaczyć ten punkt prostej m, który znajduje się w danym położeniu w przegięciu swej konchoidy.

Należy wykreślić koło przegięć, korzystając z tej okoliczności, że O leży na okręgu ostrzy.

Prz. 3. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków krzywizny torów punktów, położonych na linji prostej.

Niechaj P_1, P_2... oznaczają położenia punktów prostej w chwili t, a P'_1, P'_2... w chwili t'; środki chwilowe w owych chwilach oznaczmy przez C i C'. Łącząc C z P_1, P_2... i C' z P'_1, P_2'..., otrzymamy dwa pęki rzutowe. Jeżeli $t'=t+dt$, to punkty przecięcia odpowiednich promieni są właśnie szukanymi środkami krzywizny. Z tego wynika, że szukanem miejscem geometrycznem jest stożkowa. Przechodzi ona przez wierzchołki pęków C i C', jest więc styczna do wspólnej stycznej i do okręgu ostrzy. Ma ona z tym okręgiem jeszcze punkt wspólny R, środek krzywizny toru nieskończenie odległego punktu prostej a. Taki punkt jest tylko jeden, bo prosta ma tylko jeden punkt nieskończenie odległy. Lecz stożkowa i okrąg, mając trzy punkty wspólne C, C' i R, muszą mieć i czwarty, a z poprzedniego wynika, że ten czwarty może tylko znajdować się w zetknięciu. Istnieje więc tu zetknięcie trójpunktowe, innemi słowy koło ostrzy jest kołem krzywizny stożkowej.

W jaki sposób można przewidzieć rodzaj stożkowej, mając prostą a oraz koło przegięć?

39. Zastosowanie statyczne. Wyobraźmy sobie ruchome ciało A, oparte w punkcie C o nieruchome ciało B. Powierzchnie tych ciał są tak chropowate, że A może tylko toczyć się po B bez poślizgu. Dajmy na to, że na fig. 32 mamy przekrój tych ciał w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkt C, i że ciało A może poruszać się jedynie równolegle do tej płaszczyzny.

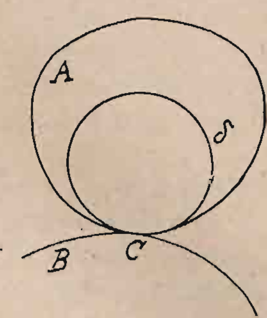


Fig. 32.

Podczas ruchu ciała A jego środek ciężkości zataczałby pewną linję. Ciało pozostaje w równowadze, jeżeli styczna do tego toru w położeniu obecnem środka ciężkości jest pozioma, innemi słowy, jeżeli środek ciężkości zajmuje na swym torze położenie najwyższe lub najniższe. W pierwszym przypadku równowaga jest chwiejna, w drugim trwała.

Wobec założeń, poczynionych wyżej, kontury ciał, nakreślone na fig. 32, są linjami środków chwilowych, a punkt C środkiem obecnym. Niechaj δ będzie kołem przegięć. Jeżeli środek ciężkości leży nazewnątrz koła δ, to, jak wiemy z par. 37, tor jego jest zwrócony do punktu oparcia C wklęsłością, a zatem środek ciężkości zajmuje położenie najwyższe, i równowaga jest chwiejna, jeżeli zaś środek ciężkości leży wewnątrz koła przegięć, to równowaga jest trwała. Tym sposobem koło przegięć może służyć do rozróżniania tych dwóch rodzajow równowagi.

Prz. 1. Jednorodna belka o grubości a ma być oparta o kołowy cylinder poziomy. Jaki powinien być promień cylindra, aby równowaga była trwała. Odp. Promień powinien być większy od $\frac{a}{2}$.

Prz. 2. Półkula jednorodna o promieniu a jest oparta o kulę powierzchnią krzywą. Jaki powinien być promień kuli, aby równowaga była trwała? (Odległość środka ciężkości półkuli od podstawy wynosi $^3/_8$ promienia). Odp. Większy od $\frac{5a}{3}$.

40. Ruch kulisty. Jeżeli w układzie sztywnym istnieje punkt O, którego szybkość jest równa zeru, to ruch układu nazywa się kulistym, punkt O *środkiem* tego ruchu, a każda prosta, przechodząca przez O, *promieniem*. Oczywiście promień jest prostą zerową, a zatem szybkości wszystkich jego punktów są doń prostopadłe.

Jeżeli punkt O pozostaje stale nieruchomym, to torem każdego punktu układu jest krzywa sferyczna, położona na kuli, której środkiem jest O. Stąd pochodzi nazwa ruchu.

Przypuśćmy, że punkty A_1 i A_2 układu, nie leżące na jednym promieniu, posiadają w chwili obecnej szybkości v_1 i v_2. Poprowadźmy przez A_1 płaszczyznę $\mathbf{F}_1$ prostopadłą do v_1; przejdzie ona przez promień OA_1, a więc i przez środek O. Weźmy w tej płaszczyźnie dowolny punkt B. Proste BA_1 i BO są oczywiście zerowe, a zatem szybkość punktu B musi być prostopadła do płaszczyzny BOA_1 czyli do $\mathbf{F}_1$. Szybkości wszystkich punktów płaszczyzny $\mathbf{F}_1$ są do niej prostopadłe.

Poprowadźmy również przez A_2 płaszczyznę $\mathbf{F}_2$ prostopadłą do v_2. Przejdzie ona przez O, i szybkości jej punktów będą także do niej prostopadłe.

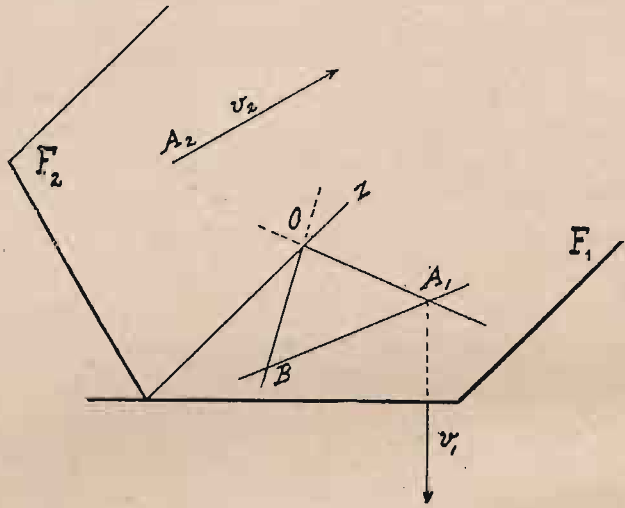


Fig 33.

Płaszczyzny $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ przecinają się według prostej z, przechodzącej przez środek O, i szybkości punktów tej prostej muszą być zerami, bo inaczej musiałyby być prostopadłe do $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$. Widzimy więc, że w układzie istnieje prosta nieruchoma, a zatem ruch jest obrotowy, i prosta z jest osią jego. Nazywamy ją *osią chwilową*, gdyż wogóle w chwili następnej już inna prosta układu, zajmująca inne położenie w przestrzeni, będzie osią obrotu.

41. Stożki osi chwilowych. Badając ruch układu w przestrzeni, musimy odróżniać punkty, proste i płaszczyzny, należące do układu ruchomego, od punktów, prostych i płaszczyzn przestrzeni nieruchomej, tak jak odróżnialiśmy w ruchu płaskim punkty i proste układu ruchomego od punktów i prostych płaszczyzny nieruchomej.

Z pośród wszystkich promieni układu, który pozostaje w ruchu kulistym, wyróżniają się te, które były lub będą osiami chwilowemi; ich miejscem geometrycznem jest oczywiście powierzchnia stożkowa, której wierzchołek leży w środku ruchu kulistego. Powierzchnia ta zowie się *stożkiem ruchomym osi chwilowych*.

Z pośród wszystkich prostych przestrzeni nieruchomej, przechodzących przez środek O, musimy wyróżniać te, w których przypadała lub przypadać będzie oś chwilowa. Miejscem geometrycznem takich prostych jest znowu oczywiście powierzchnia stożkowa, której wierzchołek leży w O. Nazywamy ją *stożkiem stałym osi chwilowych*.

Zatoczmy z punktu O kulę dowolnym promieniem. Stożek ruchomy osi chwilowych przetnie jej powierzchnię według pewnej krzywej sferycznej, którą oznaczmy przez ϱ. Krzywa ta porusza się na kuli, nie zmieniając jednak z biegiem czasu ani kształtu ani wymiarów. Stożek stały przetnie tę samą powierzchnię według krzywej nieruchomej σ.

Linie ϱ i σ posiadają w każdej chwili wspólny punkt C, w którym oś chwilowa przebija powierzchnię kuli. Wziąwszy do pomocy ruchomy punkt M, podążający za tym punktem C, dowiedziemy, że linja ϱ toczy się bez poślizgu po linji σ, tak jak dowiedliśmy w paragrafie 30 analogiczne twierdzenie o ruchu płaskim. Dowód byłby prawie dosłownem powtórzeniem odnośnego ustępu ze wzmiankowanego paragrafu, i z tego względu pomijamy go tutaj.

Z rozważań powyższych wynika bezpośrednio, że stożek ruchomy toczy się bez poślizgu po stożku stałym, i tworząca zetknięcia jest w każdej chwili osią chwilową.

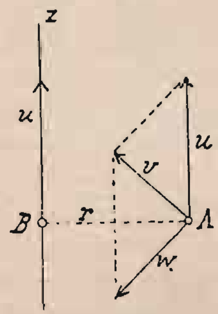
Dajmy na to, że obydwa stożki osi chwilowych są kołowe, i że szybkość kątowa układu jest stała. Ruch taki nazywa się *ruchem precesyjnym*, albo wprost *precesją*.

Prz. 1. W ruchu precesyjnym szybkość kątowa układu $= \omega$, osi stożków tworzą kąt α, a kąt wierzchołkowy stożka stałego $= 2\beta$, przyczem stożek ruchomy leży nazewnątrz stałego. Z jaką szybkością kątową oś stożka ruchomego obraca się około osi stożka stałego? Odp. $\frac{\omega \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$.

Prz. 2. Oś ziemska tworzy z prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki (czyli drogi ziemskiej) stały kąt $23\frac{1}{2}^0$ i obraca się koło niej bardzo wolno, a mianowicie wykonywa całkowity obrót mniej więcej w 26.10^3 lat. Ruch ten odbywa się w stronę odwrotną do ruchu ziemi naokoło osi. Abstrahując od ruchu rocznego, możemy uważać ruch ziemi za kulisty. Wyznaczyć promień koła, według którego stożek ruchomy przecina powierzchnię ziemi.

Oznaczywszy przez 2β kąt wierzchołkowy stożka ruchomego, znajdziemy z łatwością, że $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{365 \,.\, 26 \,.\, 10^3}$, gdzie $\alpha = 23\frac{1}{2}^0$. Ponieważ kąt β jest bardzo mały, przeto $\beta = \sin\beta$, i szukany promień $r = \frac{\sin\alpha \,.\, 4 \,.\, 10^9}{365 \,.\, 26 \,.\, 10^3 \,.\, 2\pi}$ cm. $= 27$ cm.

42. Ruch śrubowy. Dajmy na to, że do układu należy prosta z, zawierająca szybkości dwóch swych punktów. O przypadku tym była już mowa w par. 23. Widzieliśmy tam, że na z leżą szybkości wszystkich punktów tej prostej i, że szybkości te są równe. Taki ruch układu nazywamy śrubowym, a prostą z osią tego ruchu.



Fib. 34.

Będziemy rozważali ruch układu względem któregokolwiek punktu, należącego do osi (par. 20). Szybkości unoszenia wszystkich punktów układu są tu zgodne co do kierunku i wielkości z szybkością punktów osi. Oznaczmy tę szybkość przez u; będziemy ją nazywali *szybkością postępową ruchu śrubowego.*

Szybkość bezwzględna każdego punktu osi jest równa szybkości unoszenia, a więc szybkość względna jest równa zeru. Z tego wynika, że ruch względny układu jest obrotowy około osi z. Oznaczmy szybkość kątową przez ω.

Weźmy teraz jakikolwiek punkt A układu, położony w odległości r od osi z. Jego szybkość względna $w = r\omega$ i jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez A i z. Tak więc szybkość bezwzględna v punktu A posiada dwie składowe prostopadłe $w = r\omega$ i u.

Możemy powiedzieć, że ruch układu składa się z dwóch ruchów: z ruchu obrotowego około osi z i z ruchu postępowego w kierunku osi z. Pierwszy z tych ruchów składowych odbywa się z szybkością kątową ω, drugi z szybkością postępową u. Inaczej mówiąc, pole szybkości układu w danej chwili daje się całkowicie określić zapomocą dwóch wektorów: wektora ω, związanego z osią z, i wektora swobodnego u, równoległego do osi. Takie połączenie dwóch wektorów zowie się *skrętnikiem.* W statyce mamy do czynienia ze skrętnikiem, złożonym z siły i momentu pary.

Jeżeli wektory ω i u są stałe co do wielkości i kierunku, i oś nie zmienia położenia w przestrzeni, to torem każdego punktu układu jest linja śrubowa. Okoliczność ta usprawiedliwia nazwę tego rodzaju ruchu.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę, że obydwie składowe szybkości v są prostopadłe do promienia AB (B oznacza rzut punktu

A na oś), a zatem i szybkość v jest do niego prostopadła. Prócz tego oczywiście rzut szybkości v na oś jest równy u, a więc *w ruchu śrubowym rzuty szybkości wszystkich punktów układu na oś są równe.*

Dowiedziemy teraz twierdzenie odwrotne. Przypuśćmy, że szybkości wszystkich punktów układu na pewien kierunek (nazwiemy go kierunkiem k) są równe u; dowiedziemy, że do układu należy prosta, zawierająca szybkości swych punktów, czyli że ruch jest śrubowy.

W tym celu uważajmy ruch układu względem jakiegoś punktu, posiadającego szybkość u. Tym sposobem szybkość bezwzględna dowolnego punktu A układu rozkłada się na szybkość unoszenia u i szybkość względną w. Pierwsza z nich jest rzutem prostokątnym szybkości v na kierunek k, a zatem druga jest prostopadła do k. Z tego wynika, że szybkości względne wszystkich punktów są równoległe do płaszczyzny, prostopadłej do kierunku k, czyli że ruch względny układu jest płaski.

Ruch płaski jest zawsze ruchem obrotowym. Niechaj osią będzie prosta z, która oczywiście musi być równoległa do k. Szybkość względna każdego punktu tej osi jest zerem, a zatem jego szybkość bezwzględna jest co do wielkości i kierunku zgodna z szybkością unoszenia, czyli z szybkością u, położoną oczywiście na z. Widzimy, że w ruchu bezwzględnym prosta z zawiera szybkości wszystkich swych punktów, a zatem ruch bezwzględny układu jest śrubowy.

Prz. 1. Ruch układu jest śrubowy, przyczem obydwie szybkości ω i u są stałe. Wyznaczyć tor rzutu jednego z punktów układu na płaszczyznę nieruchomą, przechodzącą przez oś. Odp. Synusoida.

Prz. 2. Dane są obydwie szybkości ω i u ruchu śrubowego i na prostopadłej do osi punkt A w odległości r od osi. Wyznaczyć na tejże prostopadłej taki punkt, aby szybkość jego była prostopadła do szybkości punktu A. Odp. Szukany punkt leży na odwrotnej stronie osi w odległości $\frac{u^2}{r\omega^2}$.

43. Ruch jakikolwiek. Rozważymy teraz przypadek najogólniejszy, usuwając wszelkie ograniczenia, które dotychczas krępowały ruch układu sztywnego. Uważamy więc, że układ porusza się jakkolwiek, i dajmy na to, że A, jeden z jego punktów, posiada w obecnej chwili szybkość u.

Będziemy rozważali ruch układu względem tego punktu A. Oczywiście ruch ten jest kulisty, bo szybkość względna punktu

A jest zerem. Lecz ruch kulisty jest zawsze obrotowy, a oś tego ruchu obrotowego przechodzi przez środek A. Niech tą osią będzie prosta z.

Weźmy teraz jakiś inny punkt B układu, posiadający szybkość v. Szybkość ta rozkłada się na szybkość unoszenia u i na szybkość względną w, a rzut wypadkowej v na prostą z jest równy sumie rzutów składowych u i w. Lecz szybkość względna w jest prostopadła do z, jako do osi obrotu, a zatem rzut jej jest zerem. Z tego wynika, że rzuty szybkości u i v na prostą z są równe.

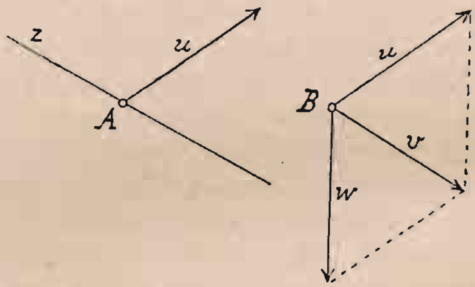


Fig. 35.

Tak samo dowiedziemy, że rzut szybkości każdego innego punktu na prostą z jest równy rzutowi szybkości punktu A na tę prostą, a zatem ruch układu jest śrubowy; oś tego ruchu śrubowego, oczywiście równoległa do prostej z, nazywa się *osią chwilową ruchu śrubowego*, bo w chwili następnej już wogóle inna prosta układu, zajmująca inne położenie w przestrzeni, będzie osią.

Istnieją powierzchnie ruchoma i stała osi chwilowych, ale ta sprawa przekracza już zakres tej książki.

Z rozważań powyższych wynika, że najogólniejszym ruchem układu sztywnego jest ruch śrubowy. Określają go w danej chwili całkowicie, jak widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, wektory ω i u. Ruchy postępowy i obrotowy możemy uważać za szczególne przypadki ruchu śrubowego. Jeżeli $\omega = 0$, to ruch układu jest postępowy, jeżeli $u = 0$, to mamy ruch obrotowy.

Użyteczny bywa i odwrotny sposób patrzenia na tę sprawę. Możemy powiedzieć, że istnieją tylko dwa zasadniczo odmienne rodzaje ruchu układu sztywnego, postępowy i obrotowy. Jeżeli układ posiada jednocześnie obydwa te ruchy, to ruch jego nazywa się śrubowym.

G. Koenigs w dziele p. t. „Leçons de Cinématique" dowodzi twierdzenie powyższe w sposób uderzająco prosty. Przytaczam dowód jego w przekładzie. „Udzielmy ciału sztywnemu nieskończenie małego przesunięcia. Jakiś punkt M, obrany w ciele dowolnie, przejdzie do nieskończenie bliskiego położenia M_1; M_1, uważany za punkt ciała w położeniu pierwotnem, przejdzie do sąsiedniego położenia M_2; M_2, uważany znowu za punkt ciała, wzięty w chwili początkowej, zajmie położenie sąsiednie M_3 i t. d. Tym sposobem wyznaczymy w położeniu pierwotnem ciała szereg punktów M, M_1, M_2.... Podczas ruchu M przejdzie do M_1, M_1 do M_2, M_2 do M_3 i t. d., jednem słowem linja, na której te punkty leżą, przesunie się nieskończenie mało sama po sobie.

Obierzmy na tej krzywej dowolny punkt P, i niechaj R oznacza promień krzywizny w tym punkcie, a T promień skręcenia*). Podczas ruchu punkt P przesunie się do P' na krzywej. Promienie krzywizny i skręcenia w tym sąsiednim punkcie P' muszą być znowu równe R i T, gdyż element krzywej, do którego należy P, przystał do elementu, zawierającego P'. Tak więc gdy obiegamy krzywą, to różniczki promieni R i T są zerami, a więc promienie te są stałe. Istnieją trzy linje, posiadające obydwie krzywizny stałe, a mianowicie prosta, koło i śrubowa.

W przypadku śrubowej nieskończenie mały ruch ciała jest tego rodzaju, że pewna śrubowa przesuwa się po samej sobie. Jest to nieskończenie mały ruch śrubowy.

W przypadku koła nieskończenie mały ruch ciała jest taki, że pewne koło przesuwa się po samem sobie; jest to więc obrót chwilowy około osi koła.

Pozostaje przypadek linji prostej. W tym razie pewna prosta, należąca do ciała, przesuwa się po samej sobie; jeżeli ciało nie obraca się jednocześnie około tej prostej, to mamy zwykły ruch postępowy. Jeżeli ciało się obraca, to należy połączyć ruch postępowy z obrotowym, i otrzymujemy znowu nieskończenie mały ruch śrubowy".

Prz. 1. Z punktu O, obranego dowolnie w przestrzeni, prowadzimy odcinki równoległe do szybkości różnych punktów układu sztywnego i równe tym szybkościom. Dowieść, że końce tych odcinków leżą w jednej płaszczyźnie.

Prz. 2. Dane są szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej. Wyznaczyć kierunek osi ruchu śrubowego.

Prz. 3. Okazać, że linja układu sztywnego, stanowiąca obwiednię szybkości swych punktów, jest śrubową.

---

*) Oznaczmy przez ds łuk elementarny krzywej przestrzennej, przez $d\vartheta$ kąt pomiędzy stycznemi (albo normalnemi) w końcach tego łuku i przez $d\tau$ kąt pomiędzy płaszczyznami ściśle stycznemi (albo pomiędzy binormalnemi) w tych samych punktach; w takim razie $\frac{ds}{d\vartheta} = R$ nazywa się promieniem pierwszej krzywizny, a $\frac{ds}{d\tau} = T$ promieniem drugiej krzywizny, albo promieniem skręcenia. Jeżeli wszędzie $R = \infty$, to linja jest prosta, jeżeli $T = \infty$, to linja jest płaska.

Gdyby wektory ω i u przestały od danej chwili się zmieniać, to linja taka stałaby się torem swych punktów.

Prz. 4. Punkty A_1, A_2, A_3 układu sztywnego posiadają szybkości v_1, v_2, v_3 prostopadłe do płaszczyzny $A_1A_2A_3$. Określić rodzaj ruchu i wyznaczyć wykreślnie oś chwilową.

44. Układ zerowy. Oś ruchu śrubowego nazywa się także *osią centralną pola szybkości.* Podajemy tu jeszcze jeden dowód istnienia osi centralnej interesujący pod względem geometrycznym.

Weźmy w polu szybkości układu sztywnego dowolny punkt A i poprowadźmy przezeń prostopadle do jego szybkości płaszczyznę **A**. Płaszczyzna **A** nazywa się *płaszczyzną zerową* punktu A; punkt A nazywa się *punktem zerowym* płaszczyzny **A**. Wszystkie proste, położone w płaszczyźnie i przechodzące przez jej punkt zerowy, są zerowe.

Szybkość punktu przecięcia dwóch prostych zerowych jest prostopadła do płaszczyzny tych prostych, a zatem ten punkt przecięcia jest punktem zerowym płaszczyzny prostych.

Każda płaszczyzna posiada punkt zerowy. Aby go wyznaczyć obieramy w płaszczyźnie dwa dowolne punkty i prowadzimy przez nie w płaszczyźnie proste, prostopadłe do szybkości tych punktów. Będą to proste zerowe, i ich punkt przecięcia jest szukanym punktem zerowym.

Tym sposobem w polu szybkości każdemu punktowi odpowiada płaszczyzna, przechodząca przez ten punkt, i każdej płaszczyźnie odpowiada punkt, położony w tej płaszczyźnie. Ogół punktów wraz z ich płaszczyznami zerowemi nazywa się układem zerowym. Zobaczymy zaraz, że istnieje prócz tego odpowiedniość pomiędzy prostemi pola.

Niech będzie punkt A oraz jego płaszczyzna zerowa **A**. Poprowadźmy przez A dowolną płaszczyznę **B**; przetnie ona płaszczyznę **A** według prostej zerowej, i na tej ostatniej musi leżeć punkt zerowy płaszczyzny **B**. Tak więc *punkty zerowe wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez dany punkt, leżą w jego płaszczyźnie zerowej.*

Weźmy w płaszczyźnie **A** dowolny punkt B; prosta, łącząca go z A, jest zerowa, a więc leży w płaszczyźnie zerowej punktu B. *Płaszczyzny zerowe wszystkich punktów, położonych w danej płaszczyźnie, przechodzą przez jej punkt zerowy.*

Weźmy na prostej *a* dwa dowolne punkty *M* i *N*. Ich płaszczyzny zerowe **M**, **N** przecinają się, dajmy na to, na prostej *b*. Poprowadźmy przez *a* dowolną płaszczyznę; jej punkt zerowy leży na każdej z płaszczyzn **M** i **N**, a zatem leży na prostej *b*. Punkty zerowe wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez *a*, leżą na *b*. Odwrotnie punkty zerowe płaszczyzn, przechodzących przez *b*, leżą na *a*, jako na prostej, łączącej punkty *M* i *N*. Proste *a* i *b* nazywają się *sprzężonemi*.

W polu szybkości każdej prostej odpowiada inna prosta z nią sprzężona. Prosta zerowa zawiera punkt zerowy każdej płaszczyzny, przez nią przechodzącej, a więc jest sprzężona sama ze sobą.

Sprzężone prostych, położonych w jednej płaszczyźnie, przechodzą oczywiście przez punkt zerowy tej płaszczyzny, a sprzężone prostych, przechodzących przez jeden punkt, leżą w płaszczyźnie zerowej tego punktu.

W polu szybkości szczególnie ważną rolę odgrywa punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej. Proste, przechodzące przez ten punkt, zowią się *średnicami* pola. Naturalnie wszystkie średnicy są równoległe; ich proste sprzężone leżą w płaszczyźnie nieskończenie odległej, a więc są nieskończenie odległe. Odwrotnie każda prosta, sprzężona z prostą nieskończenie odległą, przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a więc jest średnicą.

Punkty zerowe płaszczyzn równoległych, t. j. przechodzących przez jedną prostą nieskończenie odległą, leżą na średnicy, sprzężonej z tą prostą. Odwrotnie płaszczyzny zerowe wszystkich punktów średnicy są równoległe, bo przechodzą przez nieskończenie odległą prostą, sprzężoną z tą średnicą. Z tego wynika, że szybkości wszystkich punktów średnicy, jako prostopadłe do owych płaszczyzn, są równoległe.

Szczególnie są ważne płaszczyzny prostopadłe do średnic. Średnica, na której leżą ich punkty zerowe, zawiera oczywiście szybkości swych punktów, a więc jest to oś centralna.

Płaszczyzny równoległe do średnic nazywamy *płaszczyznami średnicowemi*. Płaszczyzna taka przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a zatem w tej ostatniej leży jej punkt zerowy, inaczej mówiąc, punkty zerowe płaszczyzn średnicowych są nieskończenie odległe. Odwrotnie każda płaszczyzna, posiadająca punkt zerowy w nieskończoności, przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a więc jest średnicowa.

Połączmy linją prostą punkty A, B, wzięte dowolnie odpowiednio na sprzężonych prostych a, b. Punkt B jest zerowym płaszczyzny, przechodzącej przezeń i przez a, a zatem prosta AB jest zerowa. Tak więc każda prosta, przecinająca dwie proste sprzężone, jest zerowa.

Niech będzie prosta zerowa m, przecinająca jedną z prostych sprzężonych np. a. Punkt zerowy płaszczyzny, przechodzącej przez a i m, musi leżeć na m i na b, a więc jest ich punktem przecięcia. Z tego wynika, że każda prosta zerowa, przecinająca jedną z prostych sprzężonych, przecina i drugą.

Zastosujemy te twierdzenia do osi centralnej i do prostej z nią sprzężonej. Oznaczmy tę ostatnią literą n. Jest to prosta nieskończenie odległa płaszczyzn, prostopadłych do średnic. Każda prosta zerowa, przecinająca oś centralną, przecina również prostą n, a więc jest prostopadła do osi centralnej. Odwrotnie każda prosta zerowa, prostopadła do osi centralnej, przecina prostą n, a zatem musi przecinać i oś centralną.

Niech będą znowu dwie jakiekolwiek proste sprzężone a, b, i niechaj m będzie prostą ich najkrótszej odległości. Ta ostatnia jest zerowa, bo przecina dwie proste sprzężone. Poprowadźmy przez a płaszczyznę prostopadłą do m, czyli równoległą do b. Posiada ona nieskończenie odległy punkt zerowy, a zatem jest średnicowa. Widzimy, że prosta m jest prostopadła do płaszczyzny średnicowej, a więc i do osi centralnej; z tego wynika że prosta m przecina oś centralną. Wszystkie proste najkrótszych odległości par prostych sprzężonych przecinają oś centralną i są do niej prostopadłe.

Prz. 1. Dane są dwie pary prostych sprzężonych; wyznaczyć punkt zerowy jakiejkolwiek płaszczyzny, płaszczyznę zerową jakiegokolwiek punktu i oś centralną pola.

Prz. 2. Mając dwie pary prostych sprzężonych, wyznaczyć sprzężoną z piątą prostą dowolną.

Prz. 3. Okazać, że dwie pary prostych sprzężonych leżą na hiperboloidzie jednopowłokowej.

Wynika to stąd, że każda prosta, przecinająca trzy z owych czterech prostych sprzężonych, przecina również i czwartą.

Prz. 4. Dowieść, że charakterystyka płaszczyzny (par 24, prz.) jest sprzężona z prostopadłą do płaszczyzny w jej punkcie zerowym.

Prz. 5. Charakterystyka płaszczyzny średnicowej jest średnicą pola.

Prz. 6. Dowieść, że obwiednią szybkości punktów charakterystyki jest parabola, której ogniskiem jest punkt zerowy płaszczyzny, a styczną wierzchołkową charakterystyka (par. 33, prz. 5).

Prz. 7. Przez każdy punkt pola przechodzi prosta, prostopadła do swej sprzężonej.

Prz. 8. Charakterystyka płaszczyzny jest rzutem prostokątnym średnicy na tę płaszczyznę.

Prz. 9. Rzuty prostokątne dwóch prostych sprzężonych na dowolną płaszczyznę przecinają się na charakterystyce tej płaszczyzny.

Prz. 10. Krawędź dwuściennego kąta prostego przecina oś centralną i jest do niej prostopadła; okazać, że iloczyn odległości od osi punktów zerowych ścian takich kątów jest dla danego pola wielkością stałą (par. 42, prz. 2).

45. **Ruch względny układu.** Nieraz już była mowa o ruchu układu względem punktu, lub raczej względem innego układu, zawierającego ów punkt i posiadającego ruch postępowy. Wypada teraz bliżej rozważyć ruch układu względem układu innego, posiadającego ruch jakikolwiek.

Zadanie, które się tu nastręcza, możnaby sformułować tak: dany jest ruch układu S_1 względem układu S_2, czyli ruch względny, oraz ruch układu S_2 względem układu S_3 (możemy go uważać za nieruchomy), czyli ruch unoszenia; chodzi o wyznaczenie ruchu układu S_1 względem S_3, czyli ruchu bezwzględnego. Rozważania nasze zawrą się jednak w ciaśniejszych granicach. Będzie nam chodziło nie o ruch wogóle układu S_1, lecz o jego stan cynematyczny, a więc zadanie, które sobie postawimy będzie takie: dane jest pole szybkości układu S_1 względem S_2 oraz pole szybkości układu S_2 względem S_3, wyznaczyć pole szybkości układu S_1 względem S_3.

Sposób rozwiązania takiego zagadnienia narzuca się sam przez się. Weźmy jakikolwiek punkt M układu S_1, zajmujący w danej chwili punkt A układu S_2; przypuśćmy, że szybkość tego punktu M względem S_2, czyli szybkość względna, wynosi w, a szybkość punktu A, czyli szybkość unoszenia, u. Wiemy, że szybkość punktu M względem S_3, czyli szybkość bezwzględna v, będzie wypadkową szybkości w i u. Możemy zatem wyznaczyć szybkość bezwzględną każdego punktu układu S_1, a tem samem i szukane pole szybkości.

Tak więc postawione zagadnienie rozwiązuje się przy pomocy dodawania geometrycznego szybkości względnych i szybkości unoszenia. W działaniu tem obydwie szybkości składowe w i u są równouprawnione, i niema potrzeby czynić pomiędzy niemi różnicy. Dzięki tej okoliczności utarł się zwyczaj nazywania ruchów względnego i unoszenia *ruchami składowemi*, a ruchu bezwzględnego *ruchem wypadkowym*. Można zatem zagadnienie nasze sformułować jeszcze tak: dane są składowe pola szybkości, wyznaczyć pole wypadkowe.

Taki sposób mówienia jest dogodny i zupełnie poprawny, ale tylko w tym razie, gdy mamy na widoku stan cynematyczny ciała w pewnej chwili; gdy jednak chodzi o ruch układu w ciągu pewnego okresu, choćby nawet bardzo krótkiego, to niezbędną jest rzeczą odróżniać ruch względny od ruchu unoszenia. W razie przeciwnym możemy wpaść w ciężkie błędy.

46. Równoległobok szybkości kątowych. Mamy teraz rozważyć z kolei wszelkie możliwe kombinacje różnych rodzajów ruchów składowych.

Gdy ruchy składowe są postępowe, to oczywiście ruch wypadkowy będzie również postępowy, a jego szybkość będzie sumą geometryczną szybkości ruchów składowych. Dotyczy to nietylko dwóch, ale i dowolnej liczby ruchów składowych. Przypadek ten można uważać za wyczerpany, i przejdziemy odrazu do innego, w którym ruchami składowymi są ruchy obrotowe.

Przypuśćmy więc, że układ sztywny posiada dwa ruchy obrotowe. Tymczasem rozważymy tylko ten przypadek, gdy osi tych ruchów się przecinają, i przypuśćmy, że w chwili rozważanej obydwie leżą w płaszczyźnie papieru. Niech odcinki OA_1 i OA_2 wyrażają szybkości kątowe ω_1 i ω_2 pod względem wielkości i kierunku według umowy, zawartej w par. 26.

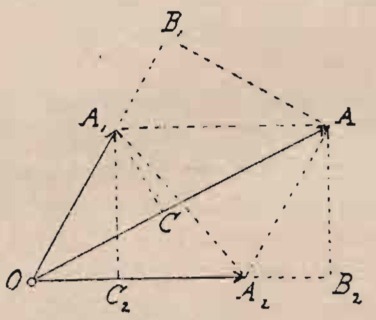


Fig. 36.

Weźmy jakikolwiek punkt P układu, położony, dajmy na to, w odległościach p_1 i p_2 od osi OA_1 i OA_2. Szybkość tego punktu ma dwie składowe: jedna pochodzi z ruchu obrotowego około OA_1 i wynosi $p_1\omega_1$, druga, pochodząca z ruchu około OA_2, wynosi $p_2\omega_2$. Jeżeli P leży na jednej z osi, to odpowiednia składowa jest zerem; dla punktu O obydwie składowe są zerami, a zatem i szybkość wypadkowa jest zerem.

Z tego wynika, że ruch wypadkowy jest obrotowy, i oś jego przechodzi przez punkt O. Dowiedziemy, że szybkość kątową ruchu wypadkowego wyraża co do wielkości i kierunku przekątnia OA równoległoboku, którego bokami są OA_1 i OA_2, czyli że *szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest wypadkową szybkości ruchów składowych.*

Obydwie składowe szybkości punktu A są prostopadłe do płaszczyzny papieru. Jedna z nich, pochodząca z ruchu obrotowego około OA_1, jest zwrócona w stronę widza i równa $\omega_1 \,.\, AB_1$, druga, pochodząca z ruchu około OA_2, jest zwrócona w stronę odwrotną i wynosi $\omega_2 . AB_2$, gdzie AB_1 i AB_2 oznaczają odległości punktu A od osi. Lecz iloczyny $\omega_1 . AB_1$ i $\omega_2 . AB_2$ są liczbowo równe podwójnym polom trójkątów AA_1O i AA_2O, a te trójkąty są równe. Z tego wynika, że szybkość wypadkowa punktu A jest równa zeru, a zatem punkt ten leży na osi ruchu wypadkowego.

Zwróćmy teraz uwagę na punkt A_1. Szybkość jego posiada tylko jedną składową, pochodzącą z ruchu około osi OA_2. Składowa ta jest odwrócona od widza, a zatem około osi OA układ obraca się dla patrzącego od A do O w kierunku ruchu wskazówki zegara. Tak więc szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest zwrócona od O do A. Pozostaje jeszcze wyznaczyć tę szybkość co do wielkości; oznaczmy ją przez Ω.

Szybkość punktu A_1 można wyrazić jako $\Omega . A_1C$, lub $\omega_2 . A_1C_2$, gdzie A_1C i A_1C_2 są odległościami punktu A_1 od OA i OA_2. Zatem

$$\Omega . A_1C = \omega_2 . A_1C_2.$$

Iloczyn $\omega_2 . A_1C_2$ jest to podwójne pole trójkąta A_1A_2O, a ponieważ trójkąt ten oraz AA_1O mają pola równe, przeto

$$\omega_2 . A_1C_2 = OA . A_1C.$$

Z tych dwóch równań wynika, że $\Omega = OA$, a więc przekątnia OA wyraża szybkość kątową ruchu wypadkowego zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości.

Uważałem za potrzebne podać tu powyższy dowód bezpośredni i poglądowy, należy jednak zwrócić uwagę, że twierdzenie to jest tylko szczególnym przypadkiem twierdzenia ogólnego, które poznaliśmy w par. 11, a mianowicie, że moment wektora wypadkowego jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych. Istotnie składowe szybkości punktu P są momentami wektorów ω_1 i ω_2 względem tego punktu (par. 26), a zatem szybkość wypadkowa jest momentem wypadkowego wektora Ω względem P. Z tego wynika bezpośrednio, że ruch wypadkowy układu jest obrotowy o szybkości kątowej Ω.

Gdy układ posiada większą liczbę ruchów obrotowych, i osi tych ruchów przechodzą przez jeden punkt, to ruchem wypadkowym będzie znowu ruch obrotowy, którego szybkość kątowa jest sumą geometryczną szybkości ruchów składowych.

Możemy także rozkładać daną szybkość kątową, jak każdy wektor, na składowe, i można uważać te składowe za szybkości kątowe ruchów składowych. Robimy z tego często użytek, rozkładając szybkość kątową układu na składowe w kierunkach osi współrzędnych i uważając następnie, że w danej chwili układ obraca się jednocześnie około wszystkich trzech osi.

47. Szybkość punktu. Wyprowadzimy tu pewne proste wzory, które będą nam nieraz użyteczne w dalszym ciągu, rozwiążemy mianowicie zagadnienie następujące: oś ruchu obrotowego przechodzi przez punkt $O'(\xi\eta\zeta)$, a szybkość kątowa posiada w kierunkach osi współrzędnych składowe ω_x, ω_y, ω_z; wyznaczyć szybkość punktu $A(xyz)$.

Oznaczmy szybkość szukaną przez v; wyznaczymy ją naprzód w tem przypuszczeniu, że $\xi=\eta=\zeta=0$, czyli że oś ruchu obrotowego przechodzi przez początek współrzędnych.

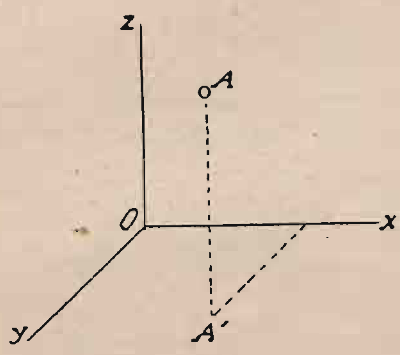


Fig. 37.

Szybkość punktu A posiada trzy składowe, pochodzące z ruchów obrotowych około osi x, i z, a rzut tej szybkości na jakąkolwiek prostą jest równy sumie rzutów tych trzech składowych. Wyznaczymy rzut na oś z. Składowa, pochodząca z ruchu około tejże osi, jest do niej prostopadła, i rzut jej jest zerem, potrzeba więc wyznaczyć tylko rzuty dwóch składowych pozostałych.

Dajmy na to, że układ obraca się tylko około osi x z szybkością kątową ω_x. W takim razie szybkość punktu A', t. j. rzutu punktu A na płaszczyznę xy, jest skierowana według prostej $A'A$ i równa $y\omega_x$. Temuż samemu jest równy rzut szybkości punktu A na prostą $A'A$, albo na prostą z, gdyż rzuty szybkości punktów A' i A na prostą, łączącą te punkty, muszą być równe.

Zupełnie tak samo znajdziemy, że rzut szybkości drugiej składowej, pochodzącej z ruchu obrotowego około osi y, jest równy $-x\omega_y$. Kładziemy tu znak —, bo gdy składowa ω_y jest zwrócona w kierunku dodatnim osi y i współrzędna x jest dodatnia, to rzut, o którym mowa, ma kierunek ujemny na osi z.

Będzie więc

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Napiszemy analogicznie

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z.$$

Do tych samych wzorów doszlibyśmy, opierając się na tem, że szukana szybkość punktu A jest to moment wektora ω względem A. Wiemy (par. 12, prz. 3), że moment ten jest równy i odwrotny do momentu wektora ω, posiadającego początek w A, względem O.

Mając rzuty szybkości v na osi, znamy tę szybkość pod względem wielkości i kierunku.

W przypadku ogólnym, gdy ξ, η, ζ nie są zerami, wypadnie tylko we wzorach powyższych zamiast x, y, z napisać x', y', z', czyli współrzędne punktu A w układzie, którego początek leży w O', a osi są odpowiednio równoległe do x, y, z; zatem $x' = x - \xi$, $y' = y - \eta$, $z' = z - \zeta$.

Prz. 1. Układ obraca się około osi, przechodzącej przez punkt (ξ, η, ζ), a składowe szybkości w kierunkach osi wynoszą $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Wyznaczyć punkt, w którym oś przecina płaszczyznę xy. Odp. $\frac{\omega_z \xi - \omega_x \zeta}{\omega_z}$, $\frac{\omega_z \eta - \omega_y \zeta}{\omega_z}$.

Prz. 2. Wyznaczyć w przykładzie poprzedzającym równanie miejsca geometrycznego punktów, których szybkości są równoległe do płaszczyzny xy.

48. Szybkości kątowe równoległe. Musimy oddzielnie rozważyć przypadek, w którym osi ruchów składowych są równoległe; podobnie w statyce traktujemy oddzielnie wypadkową sił równoległych.

Przypuśćmy, że obydwie osi ruchów składowych są prostopadłe do płaszczyzny papieru i przecinają tę płaszczyznę w punktach O_1 i O_2. Będziemy uważali za typowy ten przypadek, w którym obydwie szybkości kątowe mają kierunki zgodne, są np. zwrócone do widza, a zatem obydwa ruchy składowe odbywają się w stronę ruchu wskazówki zegara.

Weźmy w płaszczyźnie papieru jakikolwiek punkt P, w odległościach p_1 i p_2 od O_1 i O_2. Punkt ten posiada szybkości składowe $p_1\omega_1$ i $p_2\omega_2$, położone obydwie w płaszczyźnie papieru, a zatem i szybkość wypadkowa leży w tejże płaszczyźnie. Z tego wynika, że ruch wypadkowy układu jest płaski, czyli obrotowy, i wypada wyznaczyć środek chwilowy.

Dla środka chwilowego obydwie szybkości składowe powinny mieć kierunki odwrotne, a takie punkty istnieją oczywiście tylko na prostej O_1O_2. Weźmy na tej prostej jakikolwiek punkt O pomiędzy punktami O_1 i O_2 w odległościach r_1 i r_2 od tychże. Jego szybkość wypadkowa wynosi oczywiście $r_1\omega_1 - r_2\omega_2$. Punkt ten będzie środkiem chwilowym, jeżeli $r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0$, t. j. jeżeli

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \qquad (1).$$

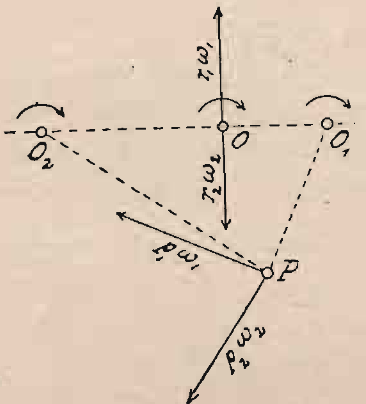


Fig. 38.

Widzimy, że w tym razie środek chwilowy dzieli odcinek O_1O_2 w stosunku odwrotnym do szybkości kątowych składowych.

Punkt O_1 układu posiada tylko jedną szybkość składową, skierowaną na naszym rysunku na dół; z tego wynika, że około punktu O układ obraca się w stronę biegu wskazówki zegarowej, a więc szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest zgodna co do kierunku z szybkościami ruchów składowych.

Można uważać, że punkt O_1 obraca się w chwili obecnej około O, albo około O_2; stosownie do tego szybkość jego wyrazi się przez Ωr_1 albo przez $\omega_2(r_1 + r_2)$, gdzie Ω oznacza szybkość ruchu wypadkowego. Zatem $\Omega r_1 = \omega_2 r_1 + \omega_2 r_2$, a podstawiając zamiast $\omega_2 r_2$ z równania poprzedzającego $\omega_1 r_1$, otrzymamy

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad (2),$$

czyli, że szybkość ruchu wypadkowego jest sumą algebraiczną szybkości składowych.

Widzimy, że wszystkie trzy środki chwilowe O_1, O_2 i O leżą na jednej prostej. Twierdzenie to w nieco zmienionej postaci daje się z pożytkiem zastosować w wielu zagadnieniach cynematycznych.

Niech będzie nieruchoma płaszczyzna $\mathbf{P}_1$ i przypuśćmy, że w niej porusza się inna płaszczyzna $\mathbf{P}_2$. Ruch ten jest obrotowy, i obecny środek chwilowy oznaczmy przez O_{21}. Jest to środek chwilowy ruchu płaszczyzny $\mathbf{P}_2$ względem $\mathbf{P}_1$, ale możemy również mówić o ruchu płaszczyzny $\mathbf{P}_1$ względem $\mathbf{P}_2$; środek chwiłowy w tym drugim ruchu oznaczmy przez O_{12}. Jest rzeczą oczywistą, że obydwa te punkty leżą razem; wynika to wprost stąd, że ten punkt płaszczyzny $\mathbf{P}_1$, w którym przypada środek chwilowy ruchu pierwszego, posiada szybkość zero względem płaszczyzny $\mathbf{P}_2$.

Niechaj teraz będą trzy płaszczyzny $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, które przystają do siebie i poruszają się jakkolwiek. Mamy teraz trzy środki chwilowe O_{12}, O_{23} i O_{31}; odpowiadają one ruchom płaszczyzny $\mathbf{P}_1$ względem $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2$ względem $\mathbf{P}_3$ i $\mathbf{P}_3$ względem $\mathbf{P}_1$. Otóż te trzy środki leżą na jednej prostej. Istotnie, nie zmniejszając wcale ogólności rozważań, możemy jedną z owych płaszczyzn, np. $\mathbf{P}_3$, uważać za nieruchomą, a w takim razie mamy prawo uważać ruch $\mathbf{P}_1$ względem $\mathbf{P}_3$ za wypadkowy, a ruchy $\mathbf{P}_1$ względem $\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{P}_2$ względem $\mathbf{P}_3$ za składowe, z czego wprost wynika powyższe twierdzenie. Nazywa się ono niekiedy *twierdzeniem Aronholda*.

Niech będą dla przykładu cztery sztaby, połączone przegubami i poruszające się jakkolwiek. Sztaby oznaczmy cyframi 1, 2, 3, 4, a przeguby literami O_{12}, O_{23}, O_{34}, O_{41}. Zwróćmy uwagę na trzy sztaby 1, 2, 3. W ruchu sztaby 1 względem 2 środkiem chwilowym jest przegub O_{12}, bo gdyby sztaba 1 była nieruchoma, to 2 obracałaby się około O_{12}. Również w ruchu sztaby 3 względem 2 środkiem chwilowym jest O_{23}, a z tego wynika, że w ruchu sztaby 3 względem 1 środek chwilowy, czyli O_{31}, musi leżeć na prostej $O_{12}O_{23}$. Tak samo dowiedziemy, że O_{31} leży również na prostej $O_{41}O_{34}$. Jest to zresztą oczywiste i skądinąd, bo gdyby sztaba 1 była nieruchoma, to środkiem chwilowym dla sztaby 3 byłby punkt przecięcia prostych 2 i 4 (par. 28, prz. 2). Również w ruchu sztaby 4 względem 2 (lub 2 względem 4), środek chwilowy O_{42} leży w przecięciu prostych 1 i 3.

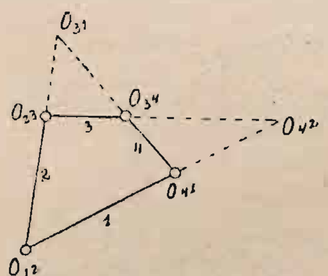


Fig. 39.

Powracając do fig. 38, oznaczmy długość odcinka O_1O_2 przez a. Pisząc w (1) $a-r_1$ zamiast r_2, znajdziemy

$$r_1 = \frac{a\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \qquad (3).$$

Ważny jest przypadek szczególny, gdy szybkości kątowe ruchów składowych są równe i odwrotne. Szybkości takie stanowią tak zw. *parę szybkości kątowych.* Zakładając w (2) i (3) $\omega_1 = \omega$ i $\omega_2 = -\omega$, otrzymamy $\Omega = 0$, a $r_1 = \infty$, z czego można wnioskować, że ruch wypadkowy jest postępowy.

Możemy się o tem przekonać wprost. W tym celu weźmy na prostej O_1O_2, np. pomiędzy punktami O_1 i O_2, jakikolwiek punkt A. Znajdziemy, że jego szybkość wypadkowa wynosi $\omega \,.\, O_1A + \omega \,.\, AO_2 = \omega a$. Tak więc szybkość punktu A nie zależy od jego położenia na prostej O_1O_2, albo raczej na płaszczyźnie, przechodzącej przez osi ruchów składowych. Szybkości wszystkich punktów tej płaszczyzny są jednakowe, a zatem ruch układu jest postępowy, i szybkość tego ruchu wynosi $a\omega$. Szybkość ta nazywa się nieraz *momentem szybkości kątowych.*

Prz. 1. Szybkości kątowe równoległe ω_1 i ω_2 są stałe co do wielkośc i kierunku; pierwsza z nich określa ruch względny, a druga ruch unoszenia. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych w dwóch przypadkach: (1) gdy kierunki obydwóch szybkości są zgodne (2) gdy są odwrotne.

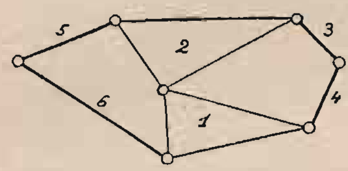


Fig. 40.

Prz. 2. Dwa sztywne trójkąty 1 i 2 łączą się przegubowo sztabami 3,4 i 5,6, oraz przegubem w wierzchołku (fig. 40). Wyznaczyć środek chwilowy sztaby 3 względem 6.

Szukany środek O_{36} leży na prostych $O_{31}O_{16}$ i $O_{62}O_{23}$.

Prz. 3. Dwa sztywne trójkąty 1 i 2 są połączone ze sobą sztabą 3, a prócz tego łączą się z nieruchomemi punktami A, B, C i D zapomocą sztab 4, 5, 6 i 7. Wszystkie połączenia są przegubowe. Wyznaczyć wykreślnie środek chwilowy dla sztaby 3.

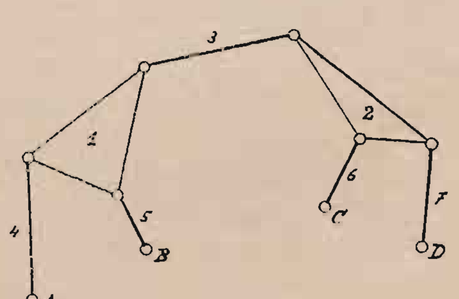


Fig. 41.

Należy uważać płaszczyznę nieruchomą na której są umocowane przeguby A, B, C i D za jedno z ogniw mechanizmu, np. 8, i wyznaczyć środek chwilowy sztaby 3 względem 8.

Prz. 4. Na fig. 42 widzimy układ kół zębatych lub ciernych, złożony z kół 1 i 3, a prócz tego z dwóch kół, oznaczonych cyfrą 2, osadzonych na jednej osi i połączonych ze sobą sztywno. Mniejsze z tych ostatnich zazębia się z 1, a większe z 3. Wyznaczyć środek chwilowy koła 3 względem 1.

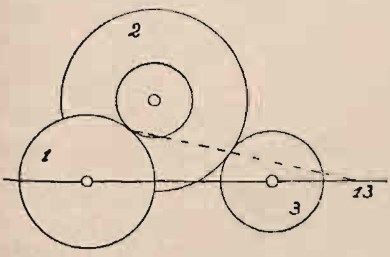


Fig. 42.

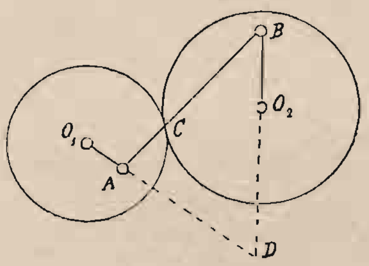


Fig. 43.

Prz. 5. Koła podziałowe dwóch kół zębatych O_1 i O_2 stykają się w punkcie C. Prowadzimy przez ten punkt dowolną prostą i obieramy na niej dwa punkty A i B, z których pierwszy należy do koła O_1 (lub jest z niem sztywno połączony), a drugi do O_2 (fig. 43). Dowieść, że rzuty szybkości tych punktów na prostą AB są równe.

Koła podziałowe kół zębatych toczą się jedno po drugiem bez poślizgu, zatem punkt C jest środkiem chwilowym w ruchu jednego koła względem drugiego. Rozważamy ruch punktu B względem koła O_1; szybkość względna jest prostopadła do AB, a z tego wprost wynika żądane twierdzenie.

Widzimy, że prosta AB porusza się tak, jak ciało sztywne. Jest to okoliczność ważna. Wyobraźmy sobie mechanizm, złożony z korb O_1A i O_2B oraz łączącej je sztaby AB. Gdyby korba O_1A miała w danem położeniu taką samą szybkość kątową jak koło O_1, to korba O_2B miałaby taką szybkość kątową, jak koło O_2.

Do tego samego można dojść inną drogą. Przypuśćmy, że koła O_1 i O_2 posiadają odpowiednio szybkości ω_1 i ω_2. Stawiamy pytanie, jak należy w owym mechanizmie, złożonym z dwóch korb i sztaby, obrać przeguby A i B, aby korba O_2B posiadała szybkość kątową ω_2, gdy korba O_1A obraca się z szybkością ω_1.

Jeżeli O_1A ma szybkość ω_1, to szybkość O_2B wynosi $\dfrac{O_1A \,.\, BD}{AD \,.\, O_2B} \,.\, \omega_1$, i to powinno być równe ω_2, czyli $\dfrac{O_1C}{O_2C}\,\omega_1$. Z tego wynika warunek

$$O_1A \,.\, BD \,.\, O_2C = O_1C \,.\, O_2B \,.\, AD.$$

Lecz według twierdzenia Menelaosa warunek ten jest spełniony zawsze, jakkolwiek leżą punkty A i B, a więc przeguby te można obrać dowolnie na sztabie.

Prz. 6. W układzie kół zębatych, wyobrażonym na fig. 44, wszystkie trzy środki leżą na jednej prostej. Wyznaczyć wykreślnie środek chwilowy koła 3 względem 1.

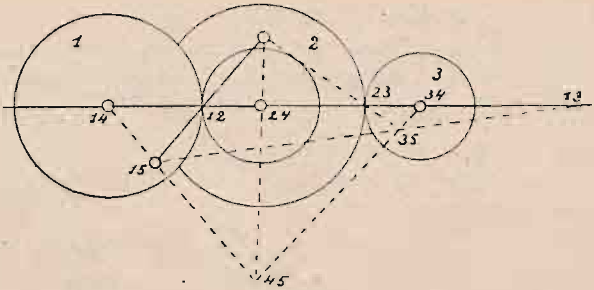


Fig. 44.

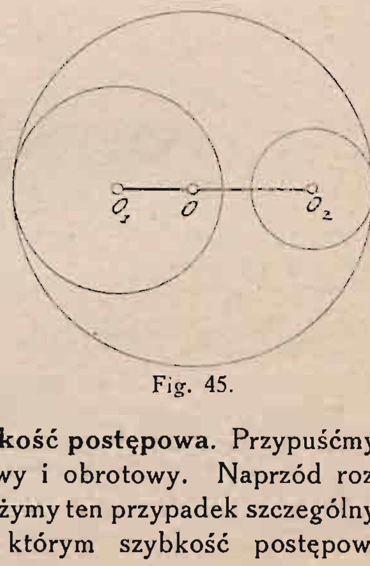


Fig. 45.

W tym razie nie da się zastosować wprost tego samego sposobu, co w prz. 4. Natomiast łatwo dojdziemy do celu, gdy zastąpimy jedno z danych kół zębatych przez mechanizm, złożony z dwóch korb i sztaby.

Prz. 7. Sztaba O_1O_2 obraca się około punktu O, stanowiącego środek koła nieruchomego o uzębieniu wewnętrznem. Z kołem tem zazębiają się dwa inne koła O_1 i O_2, osadzone na końcach sztaby, jak wskazuje fig. 45. Wyznaczyć wykreślnie środek chwilowy koła O_2 względem koła O_1.

49. Szybkość kątowa i szybkość postępowa. Przypuśćmy, że ruchami składowemi są postępowy i obrotowy. Naprzód rozważymy ten przypadek szczególny, w którym szybkość postępowa jest prostopadła do osi ruchu obrotowego.

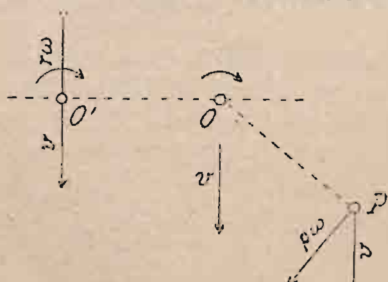


Fig. 46.

Dajmy na to, że oś ta jest prostopadła do płaszczyzny papieru i przecina ją w punkcie O; szybkość kątową oznaczymy przez ω i przyjmiemy, że jest zwrócona do widza, a szybkość postępową oznaczymy przez v. Punkt P, położony w płaszczyźnie papieru w odległości p od O, posiada szybkości składowe $p\omega$ i v, zawarte w płaszczyźnie papieru, zatem ruch wypadkowy jest płaski, i trzeba wyznaczyć środek chwilowy.

Środek ten znajdzie się oczywiście na prostej OO', poprowadzonej przez O prostopadle do v, na naszym rysunku po lewej stronie od O, bo tylko tam leżą punkty, których szybkości składowe mają kierunki odwrotne. Szybkość jakiegoś punktu O', położonego na owej prostej w odległości r od O, wynosi $r\omega - v$. Punkt ten będzie środkiem chwilowym, jeżeli $r\omega - v = 0$, czyli jeżeli

$$r = \frac{v}{\omega}.$$

Punkt O posiada oczywiście szybkość v, a stąd wynika, że szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest skierowana zgodnie z szybkością składową ω. Oznaczmy tę szybkość wypadkową przez Ω; w takim razie szybkość punktu O można wyrazić przez Ωr, a zatem $v = \Omega r$; z tego wynika, że $\Omega = \omega$.

Zagadnienie, któreśmy tu rozwiązali, jest tylko przypadkiem szczególnym zagadnienia z par. poprzedzającego, gdyż ruch postępowy można uważać za ruch obrotowy około nieskończenie odległego środka. Środek ten leży na prostopadłej do szybkości v, a zatem środek O' ruchu wypadkowego musi leżeć na prostopadłej z O do v.

Tak więc, gdy z ruchem obrotowym łączy się ruch postępowy w kierunku prostopadłym do osi, to skutek jest tylko ten, że ta oś przesuwa się równolegle o $\frac{v}{\omega}$ w płaszczyźnie prostopadłej do szybkości postępowej. Stronę, w którą następuje przesunięcie, można rozpoznać przy pomocy prawidła następującego: zwróćmy prawą dłoń przeciwko szybkości postępowej w taki sposób, aby palce były wyciągnięte w kierunku szybkości kątowej; w takim razie wielki palec wskaże, w którą stronę przesunie się oś. Ale i bez tego prawidła daje się łatwo wyznaczyć nowe położenie osi.

Jeżeli szybkość postępowa jest równoległa do kątowej, to oczywiście ruch układu jest śrubowy.

Przypuśćmy teraz, że szybkość postępowa v tworzy z osią ruchu obrotowego, którą oznaczmy literą z, jakikolwiek kąt α. Rozkładamy szybkość v na składowe $v \sin\alpha$ i $v \cos\alpha$, z których pierwsza jest prostopadła do osi z, a druga do niej równoległa. Odpowiednio do tego i ruch postępowy układu rozłoży się na dwa ruchy postępowe o szybkościach $v \sin\alpha$ i $v \cos\alpha$. Dodajemy pierwszy z tych ruchów do ruchu obrotowego. Wypadkowym będzie ruch obrotowy, odbywający się z daną szybkością kątową około osi równoległej do z. Ruch ten wraz z drugim ruchem postępowym daje ruch śrubowy.

Zwróćmy jeszcze uwagę na prostą z, czyli na oś danego ruchu obrotowego. Wszystkie punkty tej prostej posiadają szybkości równe i równoległe, a mianowicie szybkości v. Z paragrafu 44 wiemy, że taka prosta jest średnicą pola szybkości, a zatem jest równoległa do osi centralnej, czyli do osi wypadkowego ruchu śrubowego; wynika to zresztą bezpośrednio z rozważań poprzedzających.

Niech będzie układ sztywny, poruszający się jakkolwiek. Stosownie do uwagi powyższej możemy ruch ten rozłożyć na dwa ruchy składowe postępowy i obrotowy w sposób następujący. Obieramy dowolnie punkt układu A, posiadający, dajmy na to, w rozważanej chwili szybkość v. Szybkość składowego ruchu postępowego będzie zgodna z v co do wielkości i kierunku, a osią ruchu obrotowego będzie średnica pola z, przechodząca przez A. Szybkość kątowa składowego ruchu obrotowego jest niezależna od obioru punktu A; jest ona zawsze równa szybkości kątowej, z jaką układ obraca się około osi centralnej.

W dynamice bardzo często rozkładamy w ten sposób ruch ciała, przyczem zwykle punkt A jest środkiem masy.

Prz. 1. Szybkość postępowa ruchu śrubowego $= u$, a szybkość kątowa $= \omega$. Dodajemy do tego ruchu ruch obrotowy, którego oś przecina oś centralną pod kątem prostym, a szybkość kątowa $= \omega$. Wyznaczyć oś centralną ruchu wypadkowego i jego obydwie szybkości.

Prz. 2. Szybkość postępowa ruchu śrubowego $= u$, a szybkość kątowa $= \omega$. Dodajemy ruch postępowy, którego szybkość v tworzy z osią centralną kąt α. Wyznaczyć oś centralną ruchu wypadkowego i jego obydwie szybkości.

Prz. 3. Układ posiada trzy równe szybkości kątowe ω; dwie z nich są równoległe i zwrócone w strony odwrotne, a trzecia przecina je pod kątem danym. Wyznaczyć ruch wypadkowy.

Prz. 4. Punkt układu, przebiegający obecnie przez początek współrzędnych O, posiada szybkość, której rzuty na osi wynoszą v_x, v_y, v_z, a rzuty szybkości kątowej na osi są ω_x, ω_y, ω_z. Wyznaczyć równania osi centralnej oraz obydwie szybkości ruchu śrubowego. Odp. Szybkość kątowa ruchu śrubowego $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$, i $\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}$, $\cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}$, $\cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}$, gdzie α, β, γ są kątami kierunkowemi osi centralnej. Szybkość postępowa u ruchu śrubowego jest równa rzutowi szybkości punktu O na oś centralną, a zatem

$$u = v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma \quad \text{lub} \quad u = \frac{v_x\omega_x + v_y\omega_y + v_z\omega_z}{\omega}.$$

Szybkość dowolnego punktu układu $P(xyz)$ posiada składowe w kierunkach osi współrzędnych (par. 47) $v_x + \omega_y z - \omega_z y$, $v_y + \omega_z x - \omega_x z$, $v_z + \omega_x y - \omega_y x$. Jeżeli P leży na osi centralnej, to szybkość jego $= u$, i te składowe są odpowiednio równe $u \cos\alpha$, $u \cos\beta$, $u \cos\gamma$. Stąd otrzymamy równania osi

$$\frac{v_x + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_y + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}.$$

Prz. 5. Dwa suwaki A i B mogą się posuwać na nieruchomych prostych a i b. Z nimi są połączone dwie sztywne krzywe, pozostające w zetknięciu, jak wskazuje fig. 47. Znając szybkość suwaka A, wyznaczyć wykreślnie szybkość suwaka B.

Przy pomocy twierdzenia Aronholda dowiedziemy, że środek chwilowy w ruchu B względem A jest nieskończenie odległy; wiemy przytem, że leży on na wspólnej normalnej obydwóch krzywych.

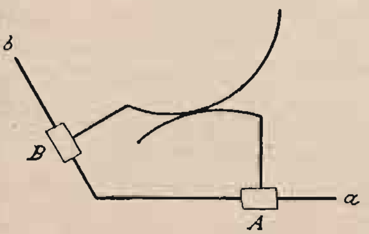


Fig. 47.

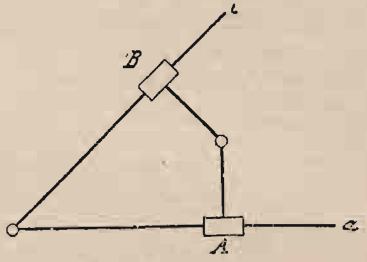


Fig. 48.

Prz. 6. Sztaby a i b są połączone przegubem; pierwsza z nich jest nieruchoma. Na tych sztabach mogą się przesuwać suwaki A i B, połączone przegubowo, jak wskazuje fig. 48. Dana jest szybkość suwaka A, wyznaczyć wykreślnie szybkość kątową sztaby b.

50. Szybkości kątowe wichrowate. Możemy teraz rozwiązać zagadnienie ogólne: układ posiada n ruchów obrotowych, których osi są położone jakkolwiek; mamy wyznaczyć ruch wypadkowy. Oznaczmy szybkości kątowe tych ruchów przez ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_n$ i obierzmy w przestrzeni dowolnie punkt O, który jak w statyce nazwiemy środkiem redukcji.

Poprowadźmy przez ten punkt O prostą z_1 równoległą do osi pierwszego ruchu obrotowego. Możemy uważać, że układ prócz ruchów danych posiada jeszcze dwa ruchy obrotowe około osi z_1, których szybkości kątowe są równe i odwrotne, gdyż oczywiście ruchy takie są równoważne spoczynkowi, a więc dodając je, nie zmieniamy stanu cynematycznego układu. Szybkości kątowe tych ruchów niech będą ω_1 i $-\omega_1$.

Szybkość $-\omega_1$ tworzy z szybkością pierwszego ruchu danego parę szybkości kątowych, a więc daje ruch postępowy. Tym sposobem rozłożyliśmy pierwszy ruch składowy na ruch postępowy i na ruch obrotowy około osi z_1, przechodzącej przez O. Uczyńmy toż samo z pozostałemi ruchami składowemi. Otrzymamy n ruchów postępowych oraz n ruchów obrotowych około osi z_1, $z_2 \ldots z_n$. Dodając te wszystkie ruchy postępowe, a następnie wszystkie ruchy obrotowe (możemy to uczynić, gdyż wszystkie osi przechodzą przez środek redukcji), otrzymamy jeden ruch postępowy i jeden ruch obrotowy. Ostatecznie wypadnie ruch śrubowy, którego oś i obydwie szybkości umiemy wyznaczyć.

Prz. Dowieść, że ruch układu sztywnego można rozłożyć na dwa ruchy obrotowe, których osiami będą dwie dowolnie obrane proste sprzężone.

Obierzmy na jednej z tych prostych (oznaczymy ją literą a) dowolny punkt A, który posiada, dajmy na to, szybkość v. Rozkładamy następnie ruch układu na ruch postępowy o szybkości v i na ruch obrotowy; szybkość kątową tego ostatniego oznaczmy przez ω. Rozkładamy wreszcie szybkość ω na dwie składowe ω_1 i ω_2, z których pierwsza leży na a, a druga jest prostopadła do szybkości postępowej v. Szybkości v i ω_2 są równoważne szybkości kątowej ω_2 na jakiejś prostej b.

Rozłożyliśmy więc ruch układu na dwa ruchy obrotowe; osią jednego z nich jest jedna z obranych prostych, trzeba tylko jeszcze okazać, że oś drugiego jest z nią sprzężona. W tym celu poprowadźmy przez prostą a dowolną płaszczyznę. Przetnie ona prostą b w punkcie B, którego szybkość jest oczywiście prostopadła do owej płaszczyzny, a więc jest to jej punkt zerowy. Z tego wynika, że prosta b jest sprzężona z a.