Jeżeli na punkt materyalny działa większa liczba sił, to każda z nich wytwarza w czasie dt przyrost ilości ruchu równy jej popędowi i wszystkie te przyrosty dodają się geometrycznie do poprzedniej ilości ruchu punktu.

Oczywiście $d(mv_x)=P_x dt$ t.j. przyrost elementarny ilości ruchu w dowolnym kierunku jest równy popędowi elementarnemu siły w tymże kierunku.

Można byłoby nadać na zasadzie powyższej postać całkową, ale nie przyniosłoby to wyraźnej korzyści.

31. Wektor $\mathcal{G}$. Zasada ilości ruchu jest szczególnie użyteczną w tym razie, gdy mamy do czynienia nie z jednym, lecz z większą ilością punktów materyalnych. Niech będzie układ punktów materyalnych $m_1, m_2, \ldots$ posiadających w danej chwili szybkości $v_1, v_2, \ldots$. Obrawszy dowolnie w przestrzeni punkt O /nazwiemy go środkiem redukcyi/, utwórzmy układ wektorów, posiadających początek w O i zgodnych z ilościami ruchu punktów $m_1, m_2, \ldots$ zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku.

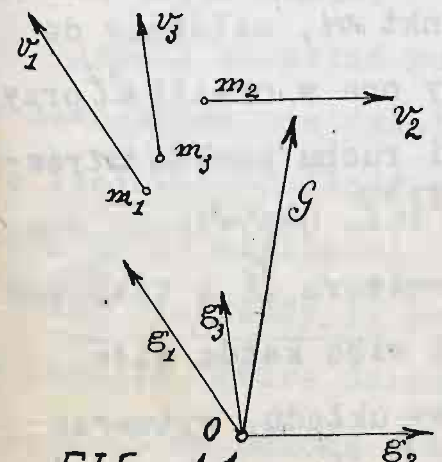


FIG.41.

Mamy teraz wektory $m_1 v_1, m_2 v_2 \ldots$ posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wypadkową. Oznaczymy ją literą $\mathcal{G}$ i będziemy nazywali ilością ruchu układu m_1, m_2 ...lub krócej wektorem $\mathcal{G}$. Oczywiście ani wielkość ani kierunek, wektora $\mathcal{G}$ nie zależy od położenia środka redukcji.

Z biegiem czasu wektor $\mathcal{G}$ zmienia się co do wielkości i kierunku i ze zmian tych można wyciągnąć pewne wnioski, dotyczące ruchu układu. Możnaby porównać ten wektor do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne zmiany, które zachodzą w układzie punktów. Zobaczymy, jaki wpływ wywierają na wektor $\mathcal{G}$ siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy więc, że na punkt m, należący do układu działa siła P. Wytworzy ona w chwili dt przyrost geometryczny $\delta(mv)$ ilości ruchu punktu m równy jej popędowi elementarnemu Pdt. Oczywiście sam przyrost otrzyma składowa mv wektora $\mathcal{G}$ i taki sam przyrost otrzyma wektor $\mathcal{G}$. Tak więc każda siła, działająca na którykolwiek punkt układu, wytwarza co dt sek. pewien przyrost wektora $\mathcal{G}$ i te wszystkie przyrosty dołączają się geometrycznie do dotychczasowej wartości $\mathcal{G}$. W ten sposób zmienia się ten wektor z biegiem czasu.

Wiadomo /p. par   cz.I/, że siły wewnętrzne czyli siły, jakie jedne z punktów układu wywierają na drugie, występują zawsze parami. Jeżeli punkt m_1 wywiera pewną siłę na m_2, to m_2 wywiera na m_1 siłę równą i odwrotną. Oczywiście takie dwie siły wytworzą w czasie dt przyrpsty równe i odwrotne wektora $\mathcal{G}$, a suma takich przyrostów jest zerem. Z tego wynika, że siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor $\mathcal{G}$. Wektor ten może się zmieniać co do wielkości i kierunku tylko pod działaniem sił zewnętrznych.

Twierdzenie to posiada bardzo doniosłe znaczenie; jemu właśnie zasada ilości ruchu zawdzięcza swą ogromną użyteczność.

Jeżeli na układ punktów materyalnych żadne siły zewnętrzne nie działają, to układ taki nazywa się izolowanym. Ilość ruchu układu izolowanego jest stała co do wielkości i kierunku.

32 Przykłady 1ʸ. Zastosujmy zasadę ilości ruchu do zadania, które usiłowaliśmy napróżno rozwiązać w par. 29 za pomocą zasady siły żywej.

Siły wewnętrzne, działające w okresie przejściowym nie wywrą wpływu na ilość ruchu układu. Ilość ta w pierwszym okresie wynosi $m_1 v$, a w drugim $/m_1+m_2/ u$, a zatem

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad \ldots\ldots (1)$$

skąd

$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \;;$$

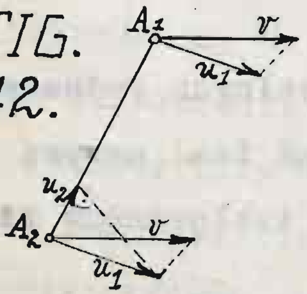
Z tego wynika, że w okresie drugim siła żywa układu wynosiła $\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)}$, a więc zmniejszyła się w okresie przejściowym o

$$\frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

Jeżeli np. $m_2 = m_1$, to układ traci połowę siły żywej.

X 2. Dwa jednakowe punkty materyalne, połączone nicią nierozciągalną, leżą na gładkim stole. Jeden z nich otrzymał szybkość v i w chwili wyprostowania nici punkty zajmują położenia A_1 i A_2. Wyznaczyć wykreślenie szybkości u_1 i u_2 tych punktów po wyprostowaniu.

FIG. 42.



Ponieważ masy punktów są równe, możemy przeto wyrażać ilości ruchu tymi samymi odcinkami, co i szybkości.

Obieramy za środek redukcyi punkt A_2 i wykreślamy wektor G, który jest oczywiście co do wielkości i kierunku zgodny z v. Po wyprężeniu nici wektor G się nie zmieni. Będzie on miał wówczas dwie składowe, zgodne z szybkościami punktów A_1 i A_2. Szybkość drugiego ma kierunek A_2A_1 a rzuty obydwóch szybkości na A_2A_1 muszą być równe. Szukane szybkości są przeto bokami równoległoboku, którego przekątnią jest v; jeden bok jego leży na A_2A_1 i druga przekątnia jest prostopadła do A_2A_1

3.[W] Nieraz stosujemy, w tem samem zadaniu zasadę sił żywych i zasadę ilości ruchu. Wyjaśnia to przykład następujący: Do końców sznura przechodzącego przez blok są przywiązane ciężary M i m. Z nich większy M spoczywa na podłodze, a mniejszy m wisi na pewnej wysokości nad podłogą. Ciągnąc za sznur po stronie ciężaru M podnosimy m jeszcze o h wyżej. Jak wysoko uniesie się M po wyswobodzeniu sznura?

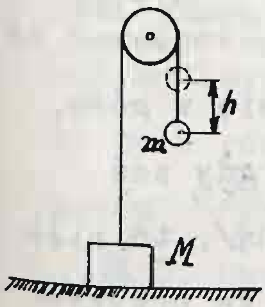


FIG. 43.

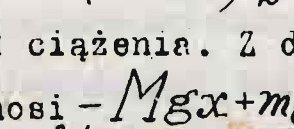
Przed samem wyprężeniem sznura ciężar m posiada szybkość $\sqrt{2gh}$. Potem następuje szarpnięcie, z którego zawsze wynika strata siły żywej. Po wyprężeniu sznura obydwa ciężary posiadają szybkość v; ze względu na wzmiankowaną stratę nie mamy prawa do wyznaczenia tej szybkości stosować zasady sił żywych natomiast nadaje się tu zasada ilości ruchu.

W okresie przejściowym t.j. podczas wyprężania sznura, ciężar m stracił ilość ruchu $m(\sqrt{2gh}-v)$ a M zyskał Mv.

W tym okresie na ciężary działały przedewszystkiem naprężenia sznura; były to siły zmienne i bardzo wielkie. Prócz tego działały jeszcze siły ciężenia oraz w pierwszej chwili reakcja podłogi na M, są to siły stosunkowo małe i w okresie przejściowym, trwającym niezmiernie krótko, nie mogą wywrzeć wyraźnego wpływu na ilości ruchu ciężarów, możemy je przeto pominąć.

Przyjmujemy, że blok jest zupełnie gładki, a sznur doskonale giętki, a zatem naprężenie w obydwóch końcach sznura są jednakowe. Wytwarzają one w okresie przejściowym równe ilości ruchu, zatem $m(\sqrt{2gh}-v)=Mv$. Stąd znajdziemy, że $v=\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$; Do wyznaczenia wysokości żądanej możemy zastosować zasadę sił żywych. Gdy M zaczyna podnosić się w górę, to siła żywa układu wynosi $(M+m)\frac{v^2}{2}$, gdy zaś wzniesie się o x /czyli o wysokość szukaną/, to siła żywa układu będzie zerem. Z tego wynika, że przyrost siły żywej jest równy $-(M+m)\frac{v^2}{2}$ i temuż jest równa praca całkowita sił ciążenia. Z drugiej strony wiadomo, że praca ta wynosi $-Mgx+mgx$ zatem $-\frac{M+m}{2}v^2=-Mgx+mgx$ skąd $x=\frac{m^2h}{M^2-m^2}$.

4. Trzy jednakowe punkty A, B, C połączone nierozciągalną nicią tak, że AB = BC, leżą na gładkim stole na linii prostej i nić jest wyciągnięta. Nadajemy jednocześnie punktom skrajnym A i C szybkości u prostopadłe do nici; jaką szybkość będzie miał każdy punkt przed samą chwilą spotkania tych punktów skrajnych?



W tym razie nie zmieni się ani ilość ruchu,

$\frac{m v_1^2}{2} + 2\frac{m(v_1^2+v_2^2)}{2} = 2\frac{mu^2}{2}$; $3v_1^2+2v_2^2=2u^2$

ani siła żywa. Oznaczmy przez v szybkość punktu B a przez W szybkość punktów skrajnych w chwili, o którą chodzi.

Składowy ostatniej szybkości w kierunku prostopadłym do pierwotnego położenia AC jest także równa v. Początkowa ilość ruchu układu wynosi $2mu$ gdzie m oznacza masę każdego z punktów A, B, C. W chwili, gdy punkty A i C schodzą się ilość ruchu jest równa $3mv$. Stąd $2mu = 3mv$ i $v = \frac{2u}{3}$. Stosujemy teraz zasadę sił żywych. Na początku siła żywa była równa $\frac{2mu^2}{2}$, a w końcu $= \frac{mv^2}{2} + \frac{2mw^2}{2}$. Zatem $\frac{2mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mw^2}{2}$. Skąd wypadnie $W = \frac{u\sqrt{7}}{3}$.

5. Masa M jest połączona sznurami z dwiema masami m; sznury te przechodzą przez bloki, urządzone na jednym poziomie w odległości $2a$, a masa M pozostaje w spokoju na linii bloków, w środku pomiędzy nimi. Jak głęboko zatrzyma się masa M, gdy pozwolimy jej spadać?

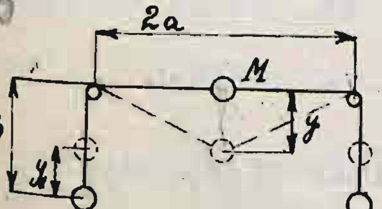


FIG. 44.

Rozważmy układ złożony ze wszystkich trzech mas. W położeniu początkowem układ ma tylko energję potencjalną i tak samo będzie, gdy masa M zatrzyma się.

Przypuśćmy, że masa M opuści się o y. Obierając początek pola na poziomie bloków, otrzymamy równanie $-2mgh = -Mgy - 2mg(h-y_1)$ lub $My - 2my_1 = 0$ ....(1).

Drugie równanie wypada w zależności geometrycznej:

$$\sqrt{a^2+y^2} - a = y_1$$

Z /1/ i /2/ wypada $y = \frac{4Mma}{4m^2-M^2}$;

33 Siły chwilowe. Powróćmy jeszcze do przykładu, który rozważaliśmy w par. 29 i 32. W okresie przejściowym, trwającym bardzo krótko, nić wywiera na obydwa punkty materyalne siły bardzo wielkie. Tego rodzaju siły, bardzo wielkie, lecz trwające bardzo krótko nazywamy chwilowemi.

Siły chwilowe w czasie swego krótkiego trwania zmieniają się zwykle w rozległych granicach. Tak np. w przykładzie naszym siły chwilowe w samym początku okresu przejściowego są zerami, następnie gwałtownie wzrastają w miarę tego, jak nić się wydłuża, i odrazu schodzą znowu prawie do zera, gdy szybkości punktów się wyrównają, czyli z końcem okresu przejściowego. x/

---

x/ Uważamy nić wciąż za zupełnie niesprężystą, jak już było zaznaczone w par. 29. Jeżeli nić taka wydłuży się pod działaniem sił, to zachowuje to wydłużenie na stałe i nie kurczy się, gdy siły przestają działać.

O wielkości takich sił możemy sądzić jedynie ze środków ich działania, a głównym skutkiem, dającym się łatwo wymierzyć są zmiany, zachodzące w ilościach ruchu.

W danym razie ilość ruchu punktu m_1 zmniejszyła się o m_1v-m_1u czyli otrzymała przyrost m_1v-m_1u skierowany do m_2. Mówimy, że taki właśnie był impuls albo popęd siły chwilowej, która w okresie przejściowym działała na m_1. Impuls siły, działający na m_2, wynosił oczywiście m_2u i był skierowany do m_1.

Suma ilości ruchu punktów m_1 i m_2 nie uległa zmianie, a więc przyrosty tych wektorów musiałyby być równe i odrotne; innemi słowy impulsy sił chwilowych, które wywierają na siebie nawzajem punkty m_1 i m_2 są równe i odwrotnie. Twierdzenie to odpowiada trzeciemu prawu /akcyi i reakcyi/ Newtona. Zobaczymy zaraz, że jest ono słuszne i w przypadku ogólniejszym.

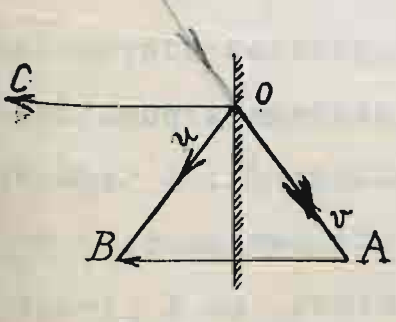


FIG. 45

Przypuśćmy naprzód, że punkt materyalny m, poruszający się z szybkością v uderzył w nieruchomą przeszkodę, np. w ścianę w punkcie O i odbił się od niej z szybkością u.

I tu zetknięcie punktu m ze ścianą trwało pewien czas, jakkolwiek bardzo krótką i ściana wywierała w tym czasie siłę bardzo wielką czyli siłę chwilową.

Przed uderzeniem punkt materyalny posiadał ilość ruchu $mv = OA$, a po uderzeniu $mu = OB$ a zatem podczas uderzenia jego ilość ruchu otrzymała przyrost geometryczny AB albo OC. Odcinek OC wyraża także co do wielkości i kierunku impuls siły chwilowej. Dajmy teraz na to, że nastąpiło uderzenie pomiędzy dwoma punktami materyalnymi m_1 i m_2. Punkty te poruszały się przed samem uderzeniem przypuśćmy z szybkościami v_1 i v_2, a bezpośrednio po uderzeniu z szybkościami u_1 i u_2. Wyznaczymy, jak poprzednio, przyrost geometryczny ilości ruchu punktu m_1, czyli impuls siły chwilowej, którą wywierał punkt m_2 na m_1 i uczyńmy toż samo dla siły chwilowej, którą punkt m_1 wywierał na m_2. Łatwo się przekonać, że impulsy te są równe i odwrotne:

Siły chwilowe, działające podczas uderzenia, są siłami wewnętrznemi układu, złożonego z punktów m_1 i m_2 nie mogą więc zmieniać wektora G. Z tego wynika, że ilości ruchu z przed uderzeniem t.j. $m_1 v_1$ i $m_2 v_2$ posiadają tę samą wypadkową, co i ilości ruchu po uderzeniu, czyli $m_1 u_1$ i $m_2 u_2$. Skor

Siły wewnętrzne, działające w obrębie miejscowym – nie wywierają wpływu na ilość ruchu

zaś wypadkowa się nie zmieniła, to przyrosty geometryczne składowych musiały być równe i odwrotne.

Wypada dodać, że i w tym razie siła żywa układu podczas uderzenia t.j. w okresie, gdy trwa zetknięcie pomiędzy punktami, wogóle ulega zmianie.

34. Przykłady. 1. Punkt materyalny o masie m jest połączony nierozciągalnemi nićmi z dwoma innymi punktami o masach m_1 i m_2. Punkty te leżały na poziomym gładkim stole, a nici były wyciągnięte prostopadle jedna do drugiej. Punkt m otrzymał uderzenie zwrócone nazewnątrz owego kąta prostego i skierowane według dwusiecznej. Wyznaczyć stosunek szybkości początkowych punktów m_1 i m_2.

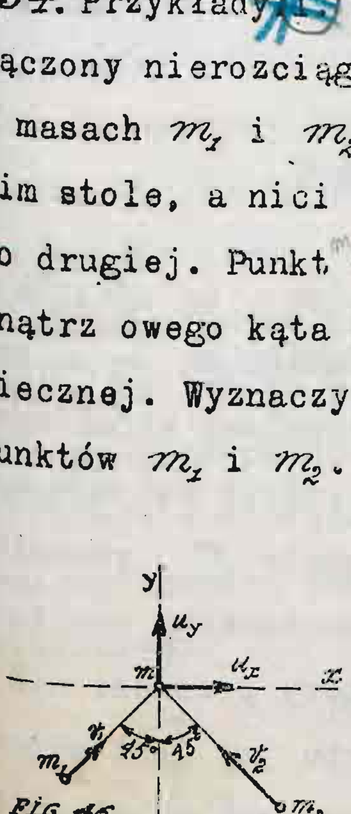


FIG. 46.

Podczas uderzenia na m działają trzy siły chwilowe mianowicie siła uderzenia i dwa impulsywne naprężenia nici, a zatem początkowa szybkość u tego punktu utworzy z dwusieczną kąt różny od zera. Jednocześnie na m_1 i m_2 działają naprężenia, a więc szybkości v_1 i v_2 tych punktów będą skierowane według nici. Siła uderzenia działała w kierunku dwusiecznej, a przeto całemu układowi mogła ona nadać tylko ilość ruchu w tym samym kierunku; z tego wynika, że suma rzutów

Układ sztywny - rzuty szybk. na odpow. kier. są =; $v_1 = \frac{u_x+u_y}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{-u_x+u_y}{\sqrt{2}}$

ilości ruchu wszystkich trzech punktów na dwusieczną zewnętrzną musi być zerem. Należy jeszcze wziąć pod uwagę, że po uderzeniu długości nici pozostają bez zmiany, a więc punkty m i m_1 /lub m i m_2/ poruszają się tak, jakby należały do ciała sztywnego.

Opierając się na uwagach powyższych otrzymamy równania

$$m u_x + \frac{m_1 v_1}{\sqrt{2}} - \frac{m_2 v_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} = v_1 \quad ; \quad \frac{-u_x + u_y}{\sqrt{2}} = v_2$$

Stąd wypada: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m + m_2}{m + m_1}$

Gdy m jest małe w stosunku do m_1 i m_2, to $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$

2. Trzy punkty materyalne o masach m_1, m_2, m_3 połączone nierozciągalnemi i wyprostowanemi nićmi m_1m_2 i m_2m_3 leżą na gładkim stole i rozwarty kąt $m_1m_2m_3 = \pi - \alpha$. Pierwszy punkt otrzymuje impuls F, równoległy do m_3m_2; wyznaczyć szybkość początkową punktu m_3

Oznaczmy przez G impuls, który przenosi nić m_1m_2. Początkowa ilość ruchu punktu m_1 jest wypadkową impulsów F i G, a ilość ruchu tego punktu w kierunku m_2m_1 wynosi $F\cos\alpha - G$, zatem rzut szybkości na ten kierunek $= \frac{F\cos\alpha - G}{m_1}$

Tak samo otrzymamy, że składowe szybkości punktu m_2 w kierunkach m_2m_1 i m_2m_3 wynosza $\frac{G - H\cos\alpha}{m_2}$ i $\frac{G\cos\alpha - H}{m_2}$ gdzie H oznacza naprężenie nici m_2m_3. Wreszcie szybkość

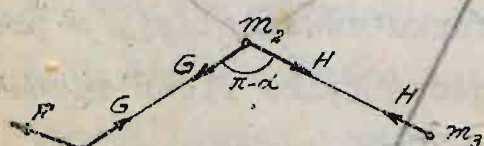


FIG. 47.

punktu m_3 ma kierunek $m_3 m_2$ i jest równa $\frac{H}{m_3}$. Oczywiście

$$\frac{F\cos\alpha - G}{m_1} = \frac{G - H\cos\alpha}{m_2}, \quad \frac{G\cos\alpha - H}{m_2} = \frac{H}{m_3}$$

Rugując z tych równań G i H otrzymamy

$$\frac{H}{m_3} = \frac{F\, m_2 \cdot \cos^2\alpha}{m_1 m_3 \sin^2\alpha + m_2(m_1 + m_2 + m_3)}$$

3. Dwie jednakowe masy M są przyczepione do końców sznura maszyny Atwooda i początkowo pozostają w spokoju w odległości $2a$ jedna od drugiej. Na jedną z mas kładziemy płytkę dodatkową o masie m. Masy M przechodzą jednocześnie przez nieruchome pierścienie urządzone na jednym poziomie, przyczem pierwsza pozostawia na pierścieniu swą płytkę dodatkową, gdy druga jednocześnie zabiera z pierścienia taką samą płytkę. Wyznaczyć szereg kolejnych odchyleń mas M od poziomu pierścieni.

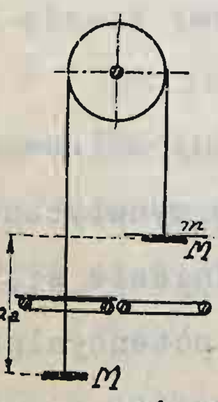


FIG. 48.

Początek pola obieramy na poziomie pierścieni. W położeniu początkowem układ posiada tylko energję potencjalną, równą $(M+m)g.a - Mg.a$, gdy zaś ciężary znajdą się na poziomie pierścieni, to układ będzie miał wyłącznie siłę żywą; wynosi ona $\frac{(2M+m)u^2}{2}$, gdzie u oznacza szybkość, z którą ciężary osiągną linię pierścieni. Oczywiście

$$(M+m)g.a - Mga = \frac{(2M+m).u^2}{2}$$

Równania [illegible]

a stąd $u^2 = \dfrac{2mga}{2M+m}$ . . . . (1)

W dalszym ciągu zjawisko będzie miało przebieg taki: Wskutek uderzenia między lewym ciężarem a płytką w sznurze powstanie naprężenie impulsywne $-F$, a ilość ruchu układu, złożonego z tego ciężaru i tej płytki wzrośnie od Mu do $(M+m)v$,gdzie v oznacza nową szybkość układu. Stąd

$$-(M+m)v + Mu = F \;. \;.\; .\; .\; .\; .\; (2)$$ [mamy]

Ilość ruchu prawego ciężaru przed uderzeniem była $= Mu$, a po tem wynosiła Mv. Działało tu naprężenie impulsywne F , skierowane odwrotnie, zatem

$$\cancel{Mv = Mu - F} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

$(M+m)v - Mu = -F$ [lewy]

Z /1/, /2/ i /3/ mamy

$$v^2 = \frac{8M^2 m g . a}{(2M+m)^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Wyznaczmy teraz wysokość x , na którą podniesie się ciężar lewy. W tym celu zastosujemy zasadę sił żywych.

Na linii pierścieni układ, złożony z lewego ciężaru i płytki, ma wyłącznie energję cynetyczną, równą $\dfrac{(2M+m)v^2}{2}$. Gdy ten układ podniesie się o x, to będzie posiadał tylko energję potencjalną. Wynosi ona $(M+m)xg - Mgx$, a więc

$$\frac{(2M+m).v^2}{2} = (M+m)x.g - M.x.g$$

stąd: $x = \dfrac{4M^2 . a}{(2M+m)^2} = \left(\dfrac{2M}{2M+m}\right)^2 . a$

Przy następnym odchyleniu, równym, dajmy na to x_1, x będzie grało rolę a, zaś x_1 – rolę x. Zatem

$$x_1=\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^2 x=\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^4 a \text{ i.t.d.}$$

4. Dwa jednakowe punkty materyalne A, B są połączone nierozciągalną nicią o długości a. Punkt A leży na gładkim stole, nić jest wyciągnięta prostopadle do biegu, a punkt B wysuwamy też po za brzeg stołu. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu A zaraz po zejściu tegoż ze stołu.

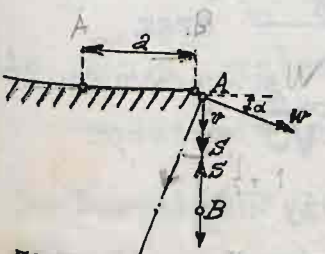


FIG. 49.

Rozważmy ruch układu w dwóch chwilach bezpośrednio poprzedzającej zejście punktu A ze stołu i zaraz następnej.

$2mv = mu$

W pierwszej z tych chwil szybkość punktu A jest pozioma, a szybkość B pionowa i każda z nich jest równa, dajmy na to u. Energja cynetyczna układu jest $\frac{2m.u^2}{2}$, a energja potencjalna /początek pola obieramy na powierzchni stołu/ wynosi $-m.a.g$; a stąd

$$\frac{2m.u^2}{2}-m.a.g=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

2

bo energja całkowita układu się nie zmienia, a w położeniu początkowem jest $=0$.

Z /1/ wypada $\quad u=\sqrt{a.g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$

Gdy punkt A zejdzie już ze stołu, to dajmy na to, że

Zadanie na pamięć!!

szybkość jego będzie $= w$ i utworzy z poziomem kąt α, zaś szybkość punktu B będzie $= v$.

W chwili zejścia A ze stołu w nici powstało naprężenie chwilowe, ale ilość ruchu się nie zmieniła. Przed zejściem jej składowa pozioma wynosiła mu i teraz równa się temu samemu. Tak samo ilość ruchu w kierunku pionowym wynosiła mu, teraz $= mv + mv = 2mv$ i oczywiście $mu = 2mv$, skąd $v = \frac{u}{2}$. Punkty A i B /po zejściu A ze stołu/ mogą być uważane, jako należące do ciała sztywnego, zatem v jest rzutem w na AB. Stąd

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{u}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5ag}}{2} \quad \text{oraz}$$

$$v = \frac{\sqrt{a.g}}{2}; \quad \cos\alpha = \frac{u}{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Szukany promien krzywizny ρ leży na normalnej do w.

Przyspieszenie normalne p_n punktu A jest równe $p_n = \frac{w^2}{\rho} = \frac{5a.g}{4\rho}$ . . . . (4)

Wyznaczymy to samo przyspieszenie w inny sposób. Na punkt A działają: naprężenie sznura $= S$ i siła ciężkości mg; obydwie te siły są pionowe i taki sam kierunek ma przyśpieszenie bezwzględne punktu A. Wynosi ono $\frac{S}{m} + g$, zatem

$$p_n = \left(\frac{S}{m} + g\right)\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

a porównując z /4/, będziemy mieli

$$\left(\frac{S}{m}+g\right)\cos\alpha = \frac{5ag}{4\rho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Wyznaczmy wreszcie naprężenie S. Rozważmy w tym celu ruch punktu A względem B.

Przyśpieszenie punktu A w tym ruchu ma tylko dwie składowe: unoszenia i względną. Pierwsze czyli przyśpieszenie punktu B jest równe $-\frac{S}{m}+g$; torem względnym punktu A jest koło, zatoczone z B promieniem równym a, i szybkość względna $= u$, a zatem przyśpieszenie normalne względne, a zarazem przyśpieszenie całkowite względne $= \frac{u^2}{a}$. Przyśpieszenie bezwzględne wyniesie przeto $-\frac{S}{m}+g+\frac{u^2}{a}$, a zatem

$$-\frac{S}{m}+g+\frac{u^2}{a}=\frac{S}{m}+g$$

$u = \sqrt{ag}$

ale $\frac{u^2}{a}=g$, zatem $\frac{S}{m}=\frac{g}{2}$.

Podstawiając to w /6/ otrzymamy: $\rho = \frac{5\sqrt{5}}{12}.a.$

5. Cztery jednakowe punkty materyalne, połączone nierozciągalnemi nićmi o długości a, tworzą romb $ABCD$, w którym kąt ostry $=2\alpha$. Cały ten układ poruszał się na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością u w kierunku większej przekątni AC. Wstrzymujemy wierzchołek A; z jaką szybkością kątową zaczną się obracać boki AB i AD?

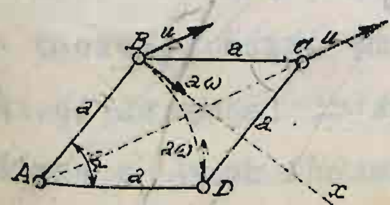


FIG. 50.

Rozpatrujemy układ, złożony z punktów B i C. Rzut ilości ruchu tego układu na prostą x prostopadłą do DC wynosi przed zatrzymaniem punktu A : $2mu\sin\alpha$. Po zatrzymaniu zaś jest on równy : $mv\sin\alpha + ma\omega$, gdzie v oznacza szybkość punktu C , po zatrzymaniu, a ω szukaną szybkość kątową. Oczywiście

$$2mu\sin\alpha = mv\sin\alpha + m.a.\omega \;, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

bo ilość ruchu w kierunku prostej x zmianie nie uległa /naprężenia impulsywne działają tylko w niciach AB i CD , a naprężenie w BC jest siłą wewnętrzną/

Gdy będziemy uważali punkty B i C , jako należące do układu sztywnego, to otrzymamy równanie

Punkt na BC

$$a.\omega.\sin 2\alpha = v.\cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Z /1/ i /2/ wypadnie

$$\omega = \frac{2u.\sin\alpha}{a(1+2\sin^2\alpha)}$$

6. Kula dęta o masie m leży na płaszczyźnie poziomej. Wewnątrz kuli znajduje się punkt materyalny o masie m , przywiązany sprężystym sznurem do górnego końca / A / pionowej średnicy, a niesprężystym do punktu przeciwległego / B / tejże. W pewnej chwili sznur mB pękł, punkt m podniósł się do góry, doszedł aż do A i tu przylgnął do powierzchni kuli. Zauważono przytem, że kula podskoczyła o h . Wyznaczyć współczynnik sprężystości sznura.

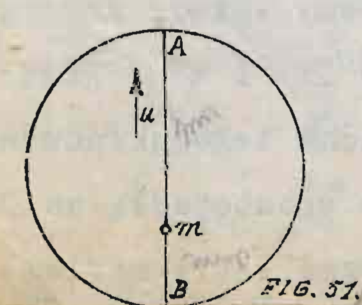


FIG. 51.

Rozpatrzmy układ, złożony z kuli i punktu. Dajmy na to, że punkt doszedł do A z szybkością u . Ówczesna ilość ruchu układu wynosiła zatem mu.

$mu = 2mv$ $v = \frac{1}{2}u$.

Gdy i kula zaczęła się podnosić, to poruszająca się masa wzrosła o m, a ilość ruchu się nie zmieniła. Z tego wynika, że początkowa szybkość układu była równa $\frac{u}{2}$. Temu samemu będzie równa owa szybkość, gdy kula spadając znów dotknie płaszczyzny zatem /par.9/ $\frac{u}{2} = \sqrt{2gh}$, skąd $u^2 = 8gh$. Zastosujmy zasadę sił żywych. Siła żywa punktu m w chwili, gdy dochodził on do A wynosiła $\frac{mu^2}{2}$ i temuż jest równy przyrost tej siły, bo początkowo była ona zerem. W rozważanym okresie pracowało naprężenie sznura mA i siła ciążenia. Pierwsza z tych prac wynosi $\frac{\varepsilon c^2}{2a}$. /p.prz. 1 par. 28/, gdzie a oznacza naturalną długość sznura, c - wydłużenie, ε - szukany współczynnik sprężystości. Praca siły ciążenia jest $= -mg(a+c)$ zatem

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{\varepsilon c^2}{2a} - mg(a+c)$$

$\int_0^c \varepsilon \frac{x}{a}\,dx = \left|\varepsilon \frac{x^2}{2a}\right|_0^c$

Skąd i z /1/ wynika, że

$$\varepsilon = \frac{2a.m.g.(4h+a+c)}{c^2}$$

Praca odrzystk.

7. Zamieszczone niżej przykłady dotyczą ruchu łańcuchów i wymagają pewnych wyjaśnień wstępnych. Łańcuch możemy w przybliżeniu uważać za szereg jednakowych punktów materyalnych, połączonych krótkiemi niesprężystemi nićmi.

Przypuśćmy, że łańcuch o długości l leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Część jego $BA = a$ jest wyciągnięta na płaszczyźnie, a część pozostała tworzy stos, leżący na płaszczyźnie w najbliższych okolicach punktu B. Możemy przyjmować w przybliżeniu, że cały ten stos znajduje się w punkcie B. Przyłóżmy do końca A siłę P, działającą stale w kierunku BA. Dopóki łańcuch nie wyprostuje się całkowicie, ruch jego będzie odbywał się w sposób następujący. W każdej chwili dzieli się on na dwie części, część pierwsza, już wyprostowana, posiada szybkość v w kierunku siły P, część druga tworzy jeszcze stos w punkcie B i jest nieruchoma. Co moment nowy element łańcucha przechodzi z części drugiej do pierwszej, przybierając w ciągu niezmiernie krótkiego czasu szybkość v. Oczywiście powtarza się tu wciąż zjawisko, które rozważaliśmy szczegółowo w par. 33. Element, który właśnie rusza w danej chwili, przebywa okres, który tam nazywaliśmy przejściowym. Z tego wynika, że siła żywa łańcucha będzie zawsze mniejsza od pracy całkowitej wykonanej przez siłę P.

Dajmy na to, że w chwili t część pierwsza ma długość x, a zatem ilość ruchu, czyli wektor G, całego łańcucha wynosi $\mu.x.v$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości /wymiar ML^{-1}/. W czasie dt ta ilość ruchu wzrośnie o $d(\mu x v)$, gdzie zarówno x jak i v należy uważać za zmienne. Jedyną siłą zewnętrzną działającą na łańcuch jest P, a zatem

$$d(\mu x v) = P.dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (1)$$

Jest to równanie zasadnicze, z którego dadzą się wywnioskować różne okoliczności, dotyczące zjawiska.

Wyznaczmy np. naprężenie S, które panuje w punkcie łańcucha, stanowiącym granicę pomiędzy częścią ruchomą i nieruchomą. Z /1/ otrzymamy

$$\mu x dv + \mu . v dx = P.dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Warto zauważyć, że wyraz $\mu x dv$ wyraża przyrost ilości ruchu tej części łańcucha, która już się poruszała w chwili t, a wyraz $\mu v dx$ jest przyrostem ilości ruchu tego elementu, który ruszył w czasie dt

Dzieląc /2/ przez dt, otrzymamy

$$\mu . x . \frac{dv}{dt} + \mu v^2 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\frac{dv}{dt}$ jest to przyspieszenie części ruchomej, której masa wynosi μx i na którą działają w kierunkach odwrotnych siły P i S, a zatem $\mu x \frac{dv}{dt} = P - S$. Wprowadzając to do /3/, znajdziemy, że

$$S = \mu . v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Do tego samego można dojść bezpośrednio. Pod działaniem siły S element dx w czasie dt przybiera szybkość v, innemi słowy siła S w czasie dt wytwarza ilość ruchu $\mu v dx$, a zatem $S.dt = \mu . v . dx$. Dzieląc przez dt, otrzymamy znowu (4).

Znajdziemy jeszcze, w jakim czasie łańcuch wyprostuje się całkowicie. W tym celu pomnożymy /1/ przez $x.v$, otrzymamy

$$\mu . x . v . d(xv) = P . x . v . dt$$

Lecz $v.dt = dx$, zatem $\mu . x . v . d(x.v) = P . x . dx$

Całkując znajdziemy, że

$\int d(x.v)^2 = \int 2xv(v\,dx + x\,dv) = \int xv.d(x.v)$

$$\mu\frac{x^2 v^2}{2} = P\cdot\frac{x^2}{2} + c$$

gdzie c jest stałą całkowania. Dla $x = a$ mamy $v = 0$, zatem $c = -Pa^2$ i

$$\mu x^2 v^2 = P(x^2 - a^2) \quad \ldots\ldots\ldots (5.)$$

Gdy podstawimy tu l zamiast x, to otrzymamy szybkość, którą osiągnie łańcuch już całkowicie wyprostowany.

Wypadnie $v = \sqrt{\frac{P(l^2-a^2)}{\mu l^2}}$

Z /1/ mamy $\mu x v = Pt$ /stała całkowania jest $= 0$/, a stąd $t = \frac{\mu x v}{P}$; czas szukany wynosi zatem

$$t = \frac{\mu l. v}{P} = \sqrt{\frac{\mu(l^2-a^2)}{P}}$$

Wyznaczymy wreszcie stratę T siły żywej łańcucha, innemi słowy znajdziemy, ile wyniesie różnica pomiędzy pracą, wykonaną przez siłę P, a siłą żywą wyprostowanego łańcucha.

Gdy już x metrów łańcucha się wyprostuje, to praca ta będzie równa $P(x-a)$, a siła żywa łańcucha wyniesie $\frac{\mu x v^2}{2}$, zatem strata jest $= P(x-a) - \frac{\mu x v^2}{2}$

Stąd i z /5/ wypadnie $T = P(x-a) - \frac{P(x^2-a^2)}{2x} = \frac{P(x-a)^2}{2x}$

Dla $x = l$ będzie $T = \frac{P(l-a)^2}{2l}$

8. Łańcuch ważący Q jest zawieszony za jeden koniec nad stołem w punkcie O, a drugi koniec dotyka stołu. Wyswabadzamy koniec górny; wyznaczyć reakcję, którą stół wywiera na łańcuch w chwili, gdy ostatnie ogniwo dochodzi do stołu. Dajmy na to, że po

9a + R - Ob

upływie t sekund górny koniec łańcucha znalazł się w punkcie A, że $OA = x$ i że ówczesna szybkość łańcucha wynosiła v. Ilość ruchu tej części łańcucha, która jeszcze nie spadła na stół była wtedy równa $\mu(l-x)v$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości, a l całkowitą długość łańcucha.

W ciągu dt sekund ta ilość ruchu otrzyma przyrost $d[\mu(l-x)v]$, wytworzony przez wypadkową ciężaru łańcucha Q i reakcji stołu R. Zatem

$$\mu(l-x)dv - \mu.v.dx = (Q-R)dt$$

albo $$\mu(l-x)\frac{dv}{dt} - \mu.v\frac{dx}{dt} = Q-R$$

Ładne bardzo

Lecz $\frac{dv}{dt} = g$; $\frac{dx}{dt} = v$ więc

$$\mu(l-x)g - \mu v^2 = Q-R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Górny koniec łańcucha spadł o x, zatem /par.9/ $v^2 = 2gx$ i z /1/ wypadnie $\mu.l.g - \mu.x.g - 2\mu g x = Q - R$

Ponieważ, wreszcie $Q = \mu.l.g$, więc $R = 3\mu g.x$. Zakładając tu $x = l$ otrzymamy, że szukana reakcya wynosi $3\mu g l$ lub $3Q$.

9. Łańcuch tworzy stos nad samym brzegiem stołu, którego wysokość $= h$, a koniec łańcucha zwisa, aż do podłogi. Wyznaczyć szybkość, którą osiągnie łańcuch, gdy pozwolimy mu swobodnie schodzić ze stołu na podłogę.

Dajmy nato, że po upływie t sekund łańcuch posiada szybkość v. Porusza się tylko część łańcucha, mianowicie ta, która jest zawarta między stołem a podłogą, zatem ilość ruchu łańcucha wynosi $\mu h v$, gdzie μ oznacza masę jedn. długości.

Tak samo, jak w prz. 8, otrzymamy równanie

$$(\mu h g - R)dt = d(h.\mu.v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie R oznacza przewagę reakcji podłogi nad ciężarem części łańcucha już leżącej na podłodze. W ciągu dt sekund spada na ziemię element $v.dt$ łańcucha, o masie $\mu.v.dt$, posiadający ilość ruchu $\mu v^2 dt$. Ta ilość ruchu niknie pod działaniem siły R, a zatem

$$R.dt = \mu.v^2.dt \quad , \qquad \text{skąd} \qquad R = \mu.v^2.$$

Podstawiając to w /1/ otrzymamy

$$d(hv) = (hg - v^2)dt \quad , \qquad \text{albo} \qquad h.dv = (hg - v^2)dt .$$

Gdy oddzielimy w tem równaniu zmienne i zcałkujemy, to wypadnie

$$v = c.\frac{e^{t\sqrt{\frac{g}{h}}} - e^{-t\sqrt{\frac{g}{h}}}}{e^{t\sqrt{\frac{g}{h}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{h}}}}$$

gdzie $c = \sqrt{hg}$. Z biegiem czasu v wzrasta, dążąc asymptotycznie do c.

10. Końce łańcucha A i B są umocowane prawie pionowo jeden nad drugim i łańcuch jest wyprostowany. W pewnej chwili wyswobodzono górny koniec B; w t_1 sek. doszedł on do poziomu końca A, a wówczas wyswobodzono i ten drugi. W jakim czasie łańcuch wyprostuje się znowu?

Przypuśćmy, że w chwili t końce łańcucha znajdą się w punktach A_1 i B_1, przyczem odległość piono-

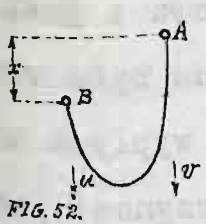


FIG. 52.

wa tych punktów wynosi x. Ilość ruchu łańcucha będzie wtedy równa $\frac{l-x}{2l}\mu.u+\frac{l+x}{2l}\mu v$. gdzie l oznacza długość całego łańcucha, u - szybkość części lewej, a v - prawej. Przyrost element. tej ilości ruchu jest równy popędowi siły ciążenia, $\mu.lg$ zatem $d\left(\frac{l-x}{2l}\mu.u+\frac{l+x}{2l}\mu v\right)=\mu.lg.dt$

Stąd $d[(l-x)u+(l+x)v]=2lg.dt$ . . . . (1)

Szybkość bezwzględna u punktu B jest równa sumie szybkości względnej /względem A/ czyli $\frac{dx}{dt}$, oraz szybkości unoszenia, czyli v. Zatem $u=v+\frac{dx}{dt}$, ale $u=g.t$, bo koniec B spada swobodnie, więc $v=u-\frac{dx}{dt}=$ $=gt-\frac{dx}{dt}$. Podstawiając to w /1/ otrzymamy $d\left[(l+x)\frac{dx}{dt}\right]=0$ a całkując $(l+x)\frac{dx}{dt}=c$, gdzie c jest stałą całkowania. W chwili t_0 mamy $x=0$, $\frac{dx}{dt}=g_0t$, skąd wypadnie $(l+x)\frac{dx}{dt}=lgt_0$.

Całkujemy to równanie; będzie

$$lx+\frac{x^2}{2}=lg.t_0.t+A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

gdzie A jest stałą całkowania. Przy $t=t_0$, $x=0$; z /2/ wypadnie $0=l.g.t_0^2+A$, więc $l.x+\frac{x^2}{2}=l.g.t_0.t-l.g.t_0^2$. (3)

Gdy łańcuch znowu się wyprostuje, to będzie $x=l$, a więc z (3) $\frac{3}{2}l=gt_0t-gt_0^2$ . . . (4). . . . . (4)

W ciągu t_0 sek. punkt B spadł o l, zatem $l=\frac{gt_0^2}{2}$.

Stąd i z /4/ otrzymamy $t=\frac{7}{4}t_0$.

~~11. Otwarty zbiornik, zawierający pewną ilość wody wtswiono na wózku kolejowym. Wózkowi nadano szybkość v_0 i przyłożono siłę pociągową, która do-~~

kładnie równoważy w każdej chwili opory toru i powietrza. W pierwszej chwili masa całego układu była równa M_0, ale przez otwór w dnie zbiornika wypływa na sekundę masa wody μ, a deszcz pionowy przynosi jednocześnie masę m. Jaką szybkość będzie miał wózek za t sek.

Dajmy na to, że po upływie t sek. masa wody w wózku była równa M, a szybkość wózka wynosiła v. Ówczesna ilość ruchu jest zatem $=Mv$, a jej przyrost w ciągu dt sek. $=d(Mv)$. W tym samym czasie z wózka wypłynęła woda o masie $\mu.dt$, a więc układ stracił ilość ruchu $\mu.dt.v$. Oczywiście $d(Mv)=-\mu.dt.v\ .\ .\ (1)$ /Deszcz, który spadł w tym okresie do wózka nie zmienił ilości ruchu układu/. Ponieważ $M=M_0+mt-\mu t=M_0+(m-\mu)t$

więc z /1/ będzie $d\{[M_0+(m-\mu)t].v\}=-\mu.dt.v$;

stąd $M_0 dv-(m-\mu)[dt.v+dv.t]=-\mu.v.dt$,

albo $dv[M_0+(m-\mu)t]=-m.v.dt\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$

Oddzielając w tem równaniu zmienne i całkując otrzymamy $\lg v=-\frac{m}{m-\mu}\lg[M_0+(m-\mu)t]+C\ .\ .\ .\ (3)$

gdzie C jest stałą całkowania; gdy $t=0$, to $v=v_0$ uwzględniając to w /3/ znajdziemy, że

$$(m-\mu)\lg\frac{v}{v_0}=m\lg\frac{M_0}{M_0+(m-\mu)t}$$

Stąd można łatwo otrzymać szukaną wartość v.

W przypadku szczególnym, gdy $m=\mu$ wypadnie z /2/

$M_0\,dv = -m.v.dt$, skąd całkując i biorąc pod uwagę warunki początkowe otrzymamy $M_0 \lg\frac{v}{v_0} = -mt$,

a z tego $v = v_0 e^{-\frac{mt}{M_0}}$

Gdy czas upływa, to v zmniejsza się, zbliżając się asymptotycznie do zera.

12. W obłokach powstała kulista kropla wody o promieniu a i zaczęła spadać, przyczem dzięki dalszemu skraplaniu pary wodnej masa kropli wzrasta proporcjonalnie do powierzchni. Wyznaczyć szybkość v, którą osiągnie kropla w czasie t, gdy promień jej stanie się równy r. Masa kropli w chwili t wynosi $\frac{4}{3}\pi.r^3.\mu$, gdzie μ oznacza gęstość wody, zatem ilość ruchu jest równa $\frac{4}{3}\pi.r^3.\mu.v$. W ciągu dt sekund ta ilość ruchu otrzyma przyrost $d\left(\frac{4\pi.r^3.\mu.v}{3}\right)$, temu więc będzie równy popęd elementarny siły ciążenia czyli $\frac{4\pi.r^3.\mu}{3}.g.dt$. Stąd

$$d\left(\frac{4\pi.r^3.\mu.v}{3}\right) = \frac{4\pi.r^3.\mu}{3}\,g.dt$$

albo $d(r^3v) = g\,r^3 dt$ . . . . (1)

Wyznaczmy teraz dt w funkcji r. W ciągu dt sekund objętość kropli wzrośnie o $d\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$ albo o $\lambda.4\pi r^2 dt$ gdzie λ oznacza wsp. proporcjonalności. Zatem $d\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = \lambda.4\pi r^2.dt$, skąd $dt = \frac{dr}{\lambda}$ . . . (2). Podstawiając to w /1/ otrzymamy $d(r^3v) = g.r^3.\frac{dr}{\lambda}$

skąd przez całkowanie wypadnie

$$r^3v = g.\frac{r^4}{4\lambda} + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Gdy $r=a$,to $v=0$ i $0=\frac{ga^2}{4\lambda}+C$

Odejmując tę równość od /3/ otrzymamy

$$r^3v=\frac{g}{4\lambda}(r^4-a^4)$$

lub rozwiązując względem v

$$v=\frac{g}{4\lambda r^3}(r^4-a^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Z /2/ mamy $r=\lambda t+A$, gdzie A jest stałą całkowania. Przy $t=0$, $r=a$ zatem $A=a$ i wypadnie $\lambda=\frac{r-a}{t}$.

Stąd i z /4/ otrzymamy

$$v=\frac{gt}{4}\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^3}{r^3}\right)$$

W przypadku szczególnym będzie: 1/ gdy $a=0$,to $v=\frac{gt}{4}$, 2/ gdy kondensacja nie zachodzi,to $r=a$ i $v=gt$.

35. Moment ilości ruchu. Niech będzie punkt materyalny o masie m , którego szybkość w chwili t jest równa v , a ilość ruchu $m.v$.

Obierzmy jakikolwiek w przestrzeni punkt O i wyznaczmy moment wektora mv względem tego punktu O . Oznaczymy ten moment ilości ruchu literą H . Posiada on wymiar ML^2T^{-1} i jest liczbowo równy podwójnemu polu trójkąta, którego podstawą jest odcinek, reprezentujący mv , a wierzchołek leży w O .

Przypuśćmy naprzód, że na m żadna siła nie działa. W takim razie punkt ten biegnie ze stałą szybkością na prostym torze x. Oczywiście wektor H, prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez O i x, nie zmienia się z czasem co do kierunku; nie zmieni się on również co do wielkości, gdyż pole owego trójkąta jest stałe pomimo ruchu punktu m. Przypuśćmy teraz, że na m działa siła P. W czasie dt ilość ruchu otrzyma przyrost geometryczny $\delta(mv)$ zgodny co do wielkości i kierunku z $P.dt$, a zatem moment ilości ruchu w chwili $t+dt$ będzie posiadał dwie składowe, a mianowicie moment wektora mv i moment wektora $\delta(mv)$ lub wektora $P.dt$. Widzimy, że wektor H w czasie dt otrzyma przyrost geometryczny δH równy momentowi $P.dt$ względem O. Lecz moment $P.dt$ względem O jest to oczywiście to samo, co moment siły P względem tego punktu, pomnożony przez dt.

Tak więc co dt sekund siła P wytwarza przyrost geometryczny wektora H, zgodny co do kierunku z jej momentem względem O, a co do wielkości dt razy większy. W ten sposób zmienia się ten wektor.

Użyteczność tych prostych rozważań okażemy na przykładzie następującym. Przypuśćmy, że siła P działająca na punkt O jest centralna, a środkiem jej niech będzie punkt O. Moment siły P względem O jest stale równy zeru, a zatem wektor H nie otrzymuje żadnych przyrostów i jest stały co do wielkości

i kierunku.

Z tego wynikają bezpośrednio dwa wnioski następujące. Przedewszystkiem oczywistą jest rzeczą, że szybkość punktu m musi stale pozostawać w płaszczyźnie, przechodzącej przez O i prostopadłej do H, a więc ruch pod działaniem siły centralnej, czyli ruch centralny jest zawsze płaski /prz.4 par.133 cz.II/.

Aby dojść do wniosku drugiego oznaczmy przez r odległość szybkości v punktu m, czyli ramię momentu ilości ruchu. W takim razie $H = mvr$, a zatem iloczyn vr, równy $\frac{H}{m}$ jest wielkością stałą. Wyjaśnimy w krótkości znaczenie cynematyczne tego iloczynu.

Przypuśćmy, że w początku rachuby czasu punkt m zajmował położenie A_0, w chwili t położenie A, w chwili $t+dt$ położenie A_1. Oznaczmy pole wycinka A_0OA przez S a pole wycinka AOA_1 przez dS.

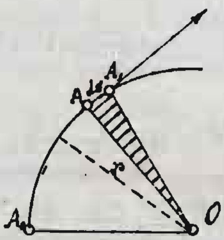


FIG.53.

Nazwaliśmy /p.par.140 cz.II/ $\frac{dS}{dt}$ szybkością wycinkową punktu m. Oczywiście $dS = \frac{r\,ds}{2}$, gdzie $ds = AA_1$, a zatem $\frac{dS}{dt} = \frac{r}{2}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{rv}{2}$. Widzimy, że rv jest podwójną szybkością wycinkową punktu m i drugi wniosek, tylko co otrzymany, wyrazimy tak: w ruchu centralnym szybkość wycinkowa jest wielkością stałą.

Powróćmy do przypadku ogólnego, w którym siła P działająca na punkt m, jest jakakolwiek. Poprowadźmy przez O dowolną prostą x i oznaczmy przez H_x rzut wektora H na tę prostą. Będzie to moment ilości ruchu względem prostej x /par. 10 cz. I/.

Gdy wektor H otrzyma przyrost geometryczny δH, to rzut H_x otrzyma przyrost dH_x i wiemy, że dH_x jest rzutem przyrostu δH na prostą x. Lecz δH jest to moment siły P względem O, pomnożony przez dt a zatem dH_x będzie rzutem tego momentu siły na prostą x, albo jej momentem względem prostej x, pomnożonym przez dt.

Tak więc siła P wytwarza co dt sek. przyrost wektora H_x równy jej momentowi względem x pomnożonemu przez dt.

36. Wektor H układu. Niech będzie układ, złożony z punktów $m_1, m_2, \ldots$, które w chwili t posiadają szybkości $v_1, v_2, v_3, \ldots$. Obierzmy dowolnie w przestrzeni środek redukcji O i wyznaczmy względem niego momenty ilości ruchu wszystkich punktów układu. Oznaczymy je przez $h_1, h_2, h_3, \ldots$ Ponieważ wektory te posiadają wspólny początek, istnieje przeto ich wypadkowa, którą oznaczymy przez H; nazywamy ją momentem ilości ruchu układu względem punktu O, albo wprost wektorem H.

Z biegiem czasu wektor H zmienia się co do wielkości i kierunku, i zmiany te dają nam ważne wskazania przy badaniu ruchu układu. Wektor ten, podobnie, jak wektor G, możnaby porównać do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne wydarzenia w przebiegu zjawiska. Zobaczymy, jaki wpływ na wektor H wywierają siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy, więc, że na punkt m działa siła P. Wytworzy ona w czasie dt przyrost geometryczny składowej h, równy jej momentowi względem O, pomnożonemu przez dt. Oczywiście taki sam przyrost otrzyma wypadkowa H. Tym sposobem każda siła, działająca na układ, wytwarza co dt sek. nowy przyrost wektora H.

Dwie siły wewnętrzne, które dwa punkty układu wywierają na siebie nawzajem są równe i odwrotne, a zatem momenty ich względem O są także równe i odwrotne. Z tego wynika, że siły takie wytworzą w czasie dt przyrosty równe i odwrotne wektora H, czyli w sumie nie wytworzą żadnego przyrostu, a zatem siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor H, jak i na G.

Wektor H układu izolowanego jest stały co do wielkości i kierunku. Poprowadźmy przez punkt O dowolną prostą x. Rzut H_x wektora H na tę prostą nazywa się momentem ilości ruchu układu względem prostej x. Jest on równy sumie rzutów składowych h_1, $h_2, h_3, \ldots$, czyli sumie momentów ilości ruchu punktów $m_1, m_2, m_3, \ldots$ względem prostej x.

Siła, działająca na jeden z punktów układu, wytworzy oczywiście w czasie dt przyrost wektora H_x równy jej momentowi względem x, pomnożonemu przez dt. Siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na H_x podobnie jak i na H.

37. **Przykłady.** 1. Dwa punkty materyalne A, B leżą na gładkim stole i są połączone wyciągniętą niesprężystą nicią, przechodzącą przez gładkie kółko O, umocowane na stole. Masa punktu A jest dwa razy mniejsza od masy B, a odległości punktów od O są równe. Nadajemy punktowi A szybkość v_0, skierowaną prostopadle do nici OA; z jaką szybkością dojdzie do kółka punkt B.

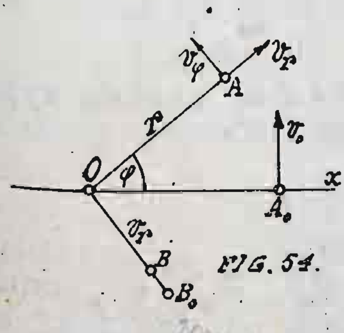


FIG. 54.

Po upływie t sek. punkt pierwszy dojdzie do położenia A, odległego o r od O. Oznaczmy przez φ kąt biegunowy i rozłóżmy ówczesną szybkość punktu A na składowe v_r i v_φ.

Jest rzeczą jasną, że szybkość punktu drugiego który w chwili t ma położenie B, wynosi v_r i jest skierowana ku O.

Weźmy momenty ilości ruchu układu względem O. Oczywiście będzie on równy $m.v_\varphi r$. Jest to wielkość stała, bo na punkt A działa tylko naprężenie sznura, a więc siła wciąż przechodząca przez O czyli siła centralna. Ta wielkość stała jest równa momentowi ilości ruchu układu w chwili początkowej to jest $m.v_0.a$, gdzie $2a$ oznacza długość nici.

Stąd $m v_\varphi r = m v_0 a$ i $v_\varphi = \dfrac{v_0 . a}{r}$ . . . . . . /1./

Aby wyznaczyć v_r zastosujemy zasadę siły żywej. Naprężenie nici nie pracuje, bo jest ona nierozciągalna. Po zatem na układ żadne siły /nie pionowe/ nie działają, a więc siła żywa jest stała i równa wartości początkowej czyli $\dfrac{m.v_0^2}{2}$. W chwili t siły żywe punktów A i B wynoszą odpowiednio $\dfrac{m(v_\varphi^2 + v_r^2)}{2}$, i $\dfrac{2 m v_r^2}{2}$

zatem

$$\frac{m(v_\varphi^2 + v_r^2)}{2} + \frac{2 m.v_r^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}$$

Jasne

Stąd i z /1/ otrzymamy

$$v_r^2 = \frac{v_0^2 (r^2 - a^2)}{3 r^2}$$

Gdy B dojdzie do O, to będzie $r = 2a$, zatem wypadnie $v_r = \dfrac{v_0}{2}$.

Jest to szybkość szukana.

2. Trzy punkty materyalne A_1, A_2, A_3 o jednakowych masach, osadzone na lekkim sztywnym pręcie na końcach i w środku leżą na gładkim stole. Punkt A_1 otrzymał uderzenie w kierunku prostopadłym do pręta; wyznaczyć stosunek szybkości początkowych wszystkich trzech punktów.

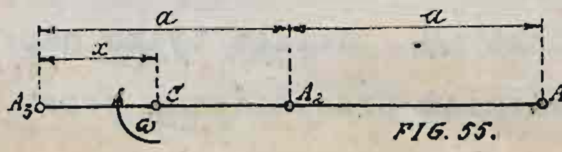


FIG. 55.

Ilość ruchu układu musi być prostopadła do linji pręta, bo taki kierunek miało uderzenie. Z tego wynika, że szybkości punktów będą także prostopadłe do tej linji, a więc na niej leży początkowy środek chwilowy.

Dajmy na to, że jest nim punkt C, odległy o x od A_3 i że szybkość kątowa układu wynosi ω. Zatem $v_1 = (2a - x)\omega$, $v_2 = (a - x)\omega$, $v_3 = x\omega$ gdzie v_1, v_2, v_3 oznaczają odpowiednio szybkości punktów A_1, A_2, A_3.

Moment siły chwilowej względ. p. $A_1 = 0$ z czego przyrost momentu ilości ruchu $= 0$

Momenty ilości ruchu układu względem A_1 przed uderzeniem i po niem są równe; lecz przed uderzeniem układ był w spokoju i moment ten równał się zeru. Zatem $mx\omega . 2a - m(a - x)\omega . a = 0$ Stąd $x = \frac{a}{3}$ oraz

$$v_1 = \frac{5a\omega}{3} \quad ; \quad v_2 = \frac{2a\omega}{3} \quad ; \quad v_3 = \frac{a\omega}{3}$$

Szukany stosunek wynosi więc

$$v_1 : v_2 : v_3 = 5 : 2 : 1$$

Zwrócimy tu uwagę na dwie okoliczności następujące: 1/ Braliśmy tu w danym przykładzie momenty względem punktu A_1 czyli względem punktu ruchomego. Łatwo dowieść, że w tym razie można było tak postąpić. Istotnie, rozważmy dwa momenty: pierwszy, poprzedzający uderzenie i drugi, bezpośrednio po uderzeniu. W ciągu tego krótkiego okresu czasu punkt A_1 nie zmienił wyraźnie położenia, możemy go więc uważać za punkt nieruchomy. 2/ Bezpośrednio po uderzeniu cały układ zaczyna się obracać około C . Możemy go osadzić na osi pionowej, przechodzącej przez C i ruch początkowy nie ulegnie zmianie. Z tego wynika, że pręt nie wywrze na swą oś żadnej reakcyi. Punkt C nazywamy środkiem uderzenia. Wrócimy do niego w rozdziale V.

ROZDZIAŁ III.

SZKIELET DYNAMICZNY CIAŁA.

38. Przedmiot rozdziału. Zasadnicze zagadnienie dynamiki ciał sztywnych jest takie: mając dane ciało sztywne oraz siły na nie działające wyznaczyć ruch tego ciała. Aby zagadnienie takie rozwiązać trzeba przedewszystkiem wiedzieć, jak jest w ciele rozłożona masa, czyli znać jego budowę dynamiczną.

Wśród ciał sztywnych możliwa jest nieograniczona rozmaitość kształtów, a wśród ciał niejednorodnych o jednakowych kształtach możliwa jest jeszcze nieograniczona różnorodność w rozkładzie mas. Pomimo to jednak wszystkie ciała sztywne wykazują w swej budowie dynamicznej pewne wspólne rysy. Możnaby powiedzieć, że każde ciało sztywne posiada jakby szkielet dynamiczny i szkielety wszystkich ciał są zbudowane na jedną modłę jak na jedną modłę są zbudowane szkielety wszystkich zwierząt kręgowych.

Przedmiotem niniejszego rozdziału ma być właśnie opis budowy dynamicznej ciała sztywnego. Punktem