ła; a zatem płaszczyzna główna ciała jest płaszczyzną główną każdego ze swych punktów.

Przypuśćmy wreszcie, że prosta z jest osią główną ciała. W tym razie $I_{yz} = I_{zx} = 0$, oraz $a = b = 0$ i równaniom /1/ i /2/ czyni zadość każda wartość współrzędnej c. Z tego wynika, że oś główna ciała jest osią główną każdego ze swych punktów. Innemi osiami głównemi jakiegokolwiek punktu Q, położonego na osi głównej ciała, są dwie proste odpowiednio równoległe do dwóch pozostałych osi głównych ciała, gdyż punkt Q jest na każdej z tych prostych rzutem środka ciężkości.

ROZDZIAŁ IV.

ZASADY DYNAMIKI CIAŁA SZTYWNEGO.

48. **Model ciała.** Zasadnicze zagadnienie dynamiki jest następujące: mając dane ciało oraz siły na nie działające wyznaczyć ruch jego. Widzieliśmy w rozdziale I, jak się rozwiązuje to zagadnienie w przypadku, gdy można uważać ciało za punkt materjalny; będziemy usiłowali sprowadzić przypadek ogólny do tego przypadku ogólnego.

W tym celu zbudujemy model ciała, złożony z punktów materialnych. Wyobraźmy sobie dwa układy współrzędnych I i II, zajmujące różne okolice przestrzeni. Do I-go będziemy odnosili dane ciało, które może być jakiekolwiek, a więc niekoniecznie sztywne, w II-im będziemy budowali model.

Dzielimy ciało na drobne elementy o masach m_1, m_2.... Dla skrócenia będziemy mówili tylko o typowym elemencie m . Każdy z tych elementów posiada pewną objętość różną od zera; jeżeli jednak są one dostatecznie małe, to położenie każdego z nich będzie określone z dokładnością wystarczającą, gdy będą dane współrzędne jednego z jego punktów, np. środka ciężkości. Współrzędne takie będziemy nazywali współrzędnemi elementu.

Niech współrzędne elementu m w układzie I będą x, y, z . Wyznaczmy w układzie II punkt /geometryczny/, posiadający takie same współrzędne i przypisujemy mu masę m . Tym sposobem elementowi m ciała będzie odpowiadał punkt geometryczny o równej masie.

Uczyniwszy to samo dla każdego elementu ciała, otrzymamy rój punktów materjalnych,przypominający pod wieloma względami dane ciało. Będzie to właśnie model, o który chodziło. Różni się on od ciała pod tym względem, że punkty jego nie są związane jedne z drugimi, że są to punkty swobodne, gdy tymczasem w danem ciele wszystkie elementy są połączone razem i stanowią jedną całość.

Chodzi teraz o to, aby model i w ruchach naśladował dane ciało. W tym celu nadajemy każdemu punktowi modelu taką szybkość /co do wielkości i kierunku/, jaką w chwili danej posiada odpowiadni element ciała. Ale i w przyszłości szybkości te powinny być jednakowe, a więc trzeba starać się o to, aby przyspieszenia punktów modelu były zgodne z przyspieszeniami elementów ciała. Tak np. składowe przyspieszenia elementu typowego ciała są $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; otóż trzeba, aby i punkt m modelu posiadał takie przyspieszenia. Osiągniemy ten skutek przykładając do każdego elementu modelu stosowne siły.

Na dane ciało działa pewna liczba sił, z których każda jest przyłożona do jakiegoś elementu. Przypuśćmy np. że do elementu m jest przyłozona siła P. Przyłóżmy takie same siły do odpowiednich punktów modelu, a więc do punktu m przyłóżmy siłę P. Będą to siły zewnętrzne modelu.

Przyśpieszenie, które skutkiem tego otrzymają punkty modelu, nie będą takie, jak przyspieszenia odpowiednich elementów ciała. Widać to choćby z tego, że np. siła P, działająca na punkt m modelu, udziela tylko jemu jednemu przyśpieszenie, gdy tymczasem taka sama siła, działając na odpowiedni element ciała, wywiera wpływ na ruch całego ciała, t.j. udziela przyśpieszeń wszystkim innym elementom. Aby więc cel osiągnąć, trzeba jeszcze do punktów modelu przyłożyć inne

punktów – n
na jeden p. sił wewn. – $(n-1)$
na n punk. $n(n-1)$ sił wew.

siły.

. Założymy w tym celu, że każdy punkt modelu wywiera siły na punkty pozostałe, że punkty te przyciągają się nawzajem lub odpychają. Będą to siły wewnętrzne i powinny czynić zadość trzeciemu prawu Newtona /akcyi i reakcyi/. Jeżeli wszystkich punktów jest n, to na każdy z nich działa $(n-1)$ sił a więc wszystkich takich sił wewnętrznych jest $n(n-1)$. Ponieważ jednak siły te występują parami a siły każdej pary są równe i odwrotne, przeto sił różnych co do wielkości i kierunku będzie wszystkiego $\frac{n(n-1)}{2}$.

Otóż te siły wewnętrzne trzeba dobierać w taki sposób, aby wraz z zewnętrznemi nadawały punktom modelu przyśpieszenia żądane. Zobaczymy, czy jest to rzecz możliwa.

Przypuśćmy, że punkty $m_1, m_2, \ldots$ wywierają na m odpowiednio siły $Q_1, Q_2, \ldots$ i że kąty kierunkowe tych sił są $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots$ Są to również kąty kierunkowe prostych $mm_1, mm_2, \ldots$, a więc określa je obecne położenie ciała. Równania ruchu punktu m będą

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P_x + Q_1 . \cos\alpha_1 + Q_2 . \cos\alpha_2 + \ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = P_y + Q_1 . \cos\beta_1 + Q_2 . \cos\beta_2 + \ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = P_z + Q_1 . \cos\gamma_1 + Q_2 . \cos\gamma_2 + \ldots$$

Każdemu punktowi modelu odpowiadają takie trzy równania, mamy więc wszystkiego $3n$ równań i wielkości $\cancel{Q}$

$Q_1, Q_2, \ldots$ powinny być tak dobrane, aby czyniły im wszystkim zadość. Będzie to można uczynić różnymi sposobami, jeżeli liczba tych wielkości jest większa od liczby równań, lub jeżeli $\frac{n(n-1)}{2} > 3n$. Z tego wynika, że n powinno być większe od 7.

Warunkowi temu wogóle łatwo uczynić zadość, i wówczas model będzie dokładnie naśladował ruch ciała, a więc zamiast badać ruch ciała, możemy badać ruch modelu, czyli ruch układu punktów materyalnych. Tym sposobem osiągnęliśmy cel zamierzony, ale za to do zadania wszedł cały układ sił wewnętrznych; zobaczymy jednak, że można ich nie wprowadzać do rachunku. Aby ułatwić sprawę, budowaliśmy model w odrębnym układzie współrzędnych, jest to jednak zbyteczne. Ponieważ chodzi tylko o konstrukcję myślową, można przeto zbudować go w tym samym układzie, do którego odnosimy ciało, zajmie on wówczas tę samą przestrzeń, którą zajmuje ciało, można zapomnieć o istnieniu ciała, a myśleć tylko o modelu. Tak też będziemy czynili w dalszym ciągu. Mówiąc o ciele, będziemy mieli na myśli model jego.

Należy dodać, że w tem przedstawieniu rzeczy nie czynimy żadnych przypuszczeń co do wewnętrznej budowy ciał. Nie dotykamy np. pytania, czy materya wypełnia przestrzeń w sposób ciągły, czy też posiada budowę molekularną.

49. Zasada D'Alemberta. W jaki sposób można usunąć

siły wewnętrzne ciała z rachunku, wskazał D'Alembert /r. 1742/, od niego też rozpoczyna się istnienie dynamiki ciał sztywnych, jako odrębnej gałęzi wiedzy. Wypada jednak zaznaczyć, że twierdzenie, odkryte przez D'Alemberta, czyli tak zwana zasada D'Alemberta dotyczy nietylko ciał sztywnych. Ma ono znaczenie ogólne; podlegają mu wszystkie ciała, jakie dostrzegamy w przyrodzie.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił $P_1, P_2, \ldots$

Zwróćmy uwagę na pewien element o masie m, albo raczej na odpowiedni punkt modelu. Wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na ten element oznaczymy przez P, wypadkową wszystkich sił wewnętrznych przez Q, a przyśpieszenie elementu przez p. Przyśpieszenie to nadaja elementowi właśnie te siły P i Q, a zatem wypadkowa ich jest zgodna z p co do kierunku, a co do wielkości jest równa mp. Nazwiemy tę siłę mp siłą czynną elementu m.

Gdybyśmy przyłożyli do elementu m siłę odwrotną do czynnej, to zrównoważylibyśmy obydwie siły P i Q. Przyłóżmy do każdego elementu ciała taką siłę, odwrotną do jego siły czynnej. Oczywiście w ten sposób zrównoważymy wszystkie siły zarówno zewnętrzne, jak i wewnętrzne i już żaden element nie będzie miał przyśpieszenia.

Tak więc obecnie na ciało działają trzy układy sił, a mianowicie: (1) siły zewnętrzne, (2) siły wewnętrzne i (3) siły odwrotne do czynnych; układy te równoważą się nawzajem.

Używamy tu wyrazy "równoważą się" dla krótkiego wysłowienia, lecz należy zauważyć, że wyraz ten posiada w tym razie inne lub przynajmniej obszerniejsze znaczenie, niż w statyce. Te różne siły działają tu na punkty swobodne modelu, a w takim razie w sensie statycznym nie możnaby wcale mówić o równowadze. Tak np. dwie siły, z któremi dwa punkty materyalne się przyciągają lub odpychają, nie równoważą się w sensie statycznym, jakkolwiek działają na jednej prostej, są równe i odwrotne . Mówiąc w tym wykładzie o równowadze, mamy na myśli to jedynie, że suma rzutów sił na każdy kierunek oraz sumą ich momentów względem każdej prostej są zerami.

Z owych trzech układów sił, działających na elementy ciała, drugi to jest siły wewnętrzne równoważy się sam przez się, gdyż składają go pary sił równych i odwrotnych. Z tego wynika, że dwa układy pozostałe równoważą się nawzajem, mianowicie równoważą się w sensie wyżej określonym.

Tak więc siły zewnętrzne, działające na ciało, równoważą się z siłami odwrotnemi do czynnych. Jest to właśnie zasada D'Alemberta.

Mówiliśmy już, że zasada ta jest ogólna. Dotyczy ona zarówno ciał sztywnych, jak niesztywnych, a także układów, złożonych z większej liczby ciał, bo każdy taki układ można uważać za jedno ciało niesztywne. Wypada uczynić jeszcze jedną uwagę.

Te siły odwrotne do czynnych, które gdyby działały, to sprowadziłyby równowagę, nazywają się w większości wykładów mechaniki siłami bezwładności. Z punktu widzenia czystej logiki nie można nazwie tej zrobić żadnego zarzutu; pomimo to jednak nie użyliśmy jej w tym wykładzie i będziemy jej unikali również nadal, gdyż wywołała ona wiele nieporozumień, a nawet błędów; zwłaszcza była powodem do całkiem jałowych dyskusji na temat istnienia lub nieistnienia tych sił bezwładności.

50. Przykłady. 1) Wahadło składa się z prostego lekkiego pręta i dwóch punktów materyalnych, o masach m_1 i m_2 przymocowanych do pręta w odległościach r_1 i r_2 od osi obrotu O. Wyznaczyć okres wahań.

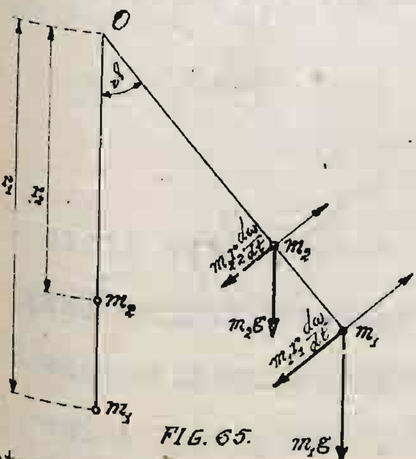

FIG. 65.

Dajmy na to, że po upływie t sek. wahadło utworzyło z pionem kąt ϑ. Siły zewnętrzne działające nań wówczas były: — reakcja osi O

 $\vartheta = \sin\omega t$

i siły ciążenia $m_1 g$ i $m_2 g$. Siły odwrotne do czynnych rozłożymy na składowe, styczną i normalną. Weźmiemy momenty względem O, więc składowych normalnych możemy nie brać pod uwagę. Składowe styczne będą równe $m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt}$ i $m_2 r_2 \frac{d\omega}{dt}$, albo $m_1 r_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ i $m_2 r_2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$. $\frac{dv}{dt}$ m $v = r\omega$ $m\frac{d r\omega}{dt} = mr\frac{d\omega}{dt}$

Biorąc zatem momenty względem wymienionego punktu otrzymamy równanie $\frac{d\omega}{dt}$ $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

$$m_1 . r_1^2 . \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + m_2 . r_2^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + m_1 . g . r_1 . \sin\vartheta + m_2 . g . r_2 . \sin\vartheta = 0$$

albo $$(m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g(m_1 r_1 + m_2 . r_2)\sin\vartheta$$

W przypadku szczególnym, gdy $m_2 = 0$, $m_1 = m$ $r_1 = l$, wypadnie $l . \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g . \sin\vartheta$, czyli równanie ruchu prostego wahadła, o długości $= l$. W naszym zadaniu rolę l gra wyrażenie $\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 . r_1 + m_2 . r_2}$, a więc ruch naszego wahadła będzie taki sam, jak ruch wahadła prostego o tej długości. Zatem szukany okres będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2}{(m_1 . r_1 + m_2 . r_2) g}}$$

$\vartheta = \sin\omega t$, $y = \sin\omega t$; $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\omega t = \omega^2\vartheta$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

2. Cylinder o masie nm może obracać się około osi poziomej O. Na jego najwyższej tworzącej leży punkt materyalny o masie m, a współczynnik tarcia pomiędzy punktem i cylindrem $= f$. Odchylamy układ cokolwiek od położenia pierwotnego; o jaki kąt obróci się cylinder, zanim punkt m zacznie się zsuwać?

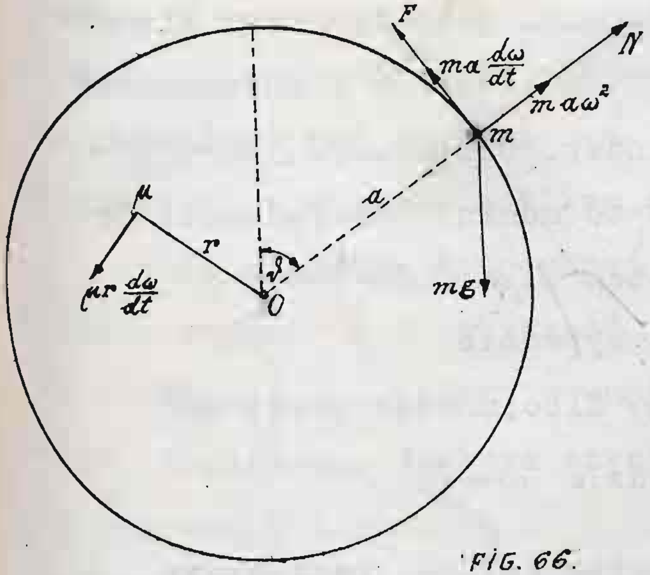

FIG. 66.

Ruch układu dzieli się na dwa okresy; w pierwszym punkt m pozostaje w spokoju względem cylindra, i tarcie nie jest całkowicie rozwinięte. Chwilę przejścia do drugiego okresu, w którym punkt się zsuwa po cylindrze, charakteryzuje ta okoliczność, że tarcie osiąga wartość graniczną, t.j. $F=f.N$ gdzie F oznacza siłę tarcia, a N reakcyę normalną cylindra na punkt.

Przypuśćmy, że w czasie t w obrębie pierwszego okresu, cylinder obrócił się o kąt ϑ i posiada szybkość kątową ω. Stosując zasadę D'Alemberta do punktu m otrzymamy

Rzuty

$$F+m.a.\frac{d\omega}{dt}-m.g.\sin\vartheta=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$N+m.a.\omega^2-m.g.\cos\vartheta=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Stosujemy następnie tę samą zasadę do całego układu, a mianowicie bierzemy momenty wszystkich sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych względem osi cylindra. Wypadnie:

$$-\Sigma\mu.r^2\frac{d\omega}{dt}-m.a^2\frac{d\omega}{dt}+m.g.a\sin\vartheta=0 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

W równaniu tem μ oznacza masę typowego elementu cylindra, r jego odległość od osi O, a sumowanie rozciąga się na cały cylinder. Oczywiście $\Sigma \mu r^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\Sigma\mu r^2$, lecz $\Sigma\mu . r^2$ jest to moment bezwładności cylindra względem osi, a zatem $\Sigma \mu r^2 = Mk^2 = \frac{n.m.a^2}{2}$

Podstawimy to w $(3.)$, wypadnie

$(n+2).a.\frac{d\omega}{dt} = 2g.\sin\vartheta$. . . . $(4.)$ albo, mnożąc przez $d\vartheta$

$(n+2)a\omega.d\omega = 2g.\sin\vartheta . d\vartheta$, gdzie $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$.

Całkując i uwzględniając warunki początkowe otrzymamy $(n+2)a\omega^2 = 4g(1-\cos\vartheta)$ skąd $a\omega^2 = \frac{4g(1-\cos\vartheta)}{n+2}$ . . . $(5.)$

Podstawiając $(4.)$ w $(1.)$, a (5) w $(2.)$ znajdziemy, że

$$(n+2)F - n.m.g.\sin\vartheta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.)$$

$$(n+2).N - (n+6).m.g.\cos\vartheta + 4m.g = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7.)$$

W chwili gdy punkt m zacznie się zsuwać będzie, jak powiedziano, $F = f.N$, zatem z $(6.)$ i $(7.)$ otrzymamy

$$-f.(n+6)\cos\vartheta + 4f + n.\sin\vartheta = 0$$

Równanie to określa kąt ϑ.

W przypadku szczególnym, gdy masa cylindra jest mała w porównaniu z masą punktu, możemy przyjąć, że $n=0$, a wtedy wypadnie $\cos\vartheta = \frac{2}{3}$, czyli, że w tym razie ϑ nie zależy od f.

Gdy zaś masa punktu jest mała w porównaniu z masą cylindra, to założywszy $n = \infty$ otrzymamy $tg\,\vartheta = f$, czyli ϑ = kątowi tarcia. Należy jednak zwrócić uwagę, że w tym przypadku $\omega = 0$ /wynika to z (5)/ , a więc cylinder nie będzie się obracał i punkt się nie zsunie.

3/Wagon biegnie na łuku o promieniu r. Wysokość środka ciężkości nad szynami $= h$ i szerokość toru $= a$. Wyznaczyć największą możliwą szybkość wagonu.

Siła odwrotna do czynnej $\frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$ gdzie Q oznacza ciężar wagonu, a v szybkość, jest przyłożona w środku ciężkości S. Siłami zewnętrznemi są Q i reakcye szyn. Rozkładamy reakcye szyny wewnętrznej na składową poziomą H i pionową N i bierzemy moment względem szyny zewnętrznej. Otrzymamy

$$-N.2a + Q.a - \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot h = 0$$

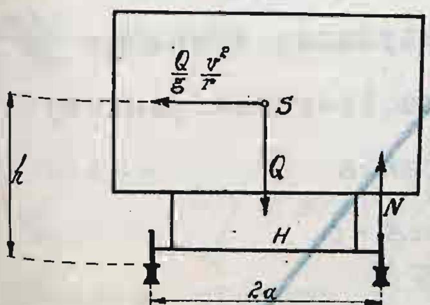

FIG. 67.

Wagon osiągnie największą szybkość gdy będzie $N = 0$. Wtedy

$Q.a - \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} h = 0$ skąd $v = \sqrt{\frac{a.g.r}{h}}$

Gdy $\frac{v^2 h}{g.r} < a$, to wagon się przewróci, bo szyna nie może wywierać reakcyi skierowanej na dół.

Gdy założymy, że np. $2a = 1,4m., r = 100m., h = 1m.$, to wypadnie, że owa szybkość krytyczna wynosi około 90 km/na godz.-

4/Ciężką kulkę osadzono na lekkim pręcie o długości a i pręt oparto drugim końcem w punkcie C zupełnie chropowatej płaszczyzny poziomej, przyczem tworzył on z pionem kąt α. Następnie pozostawiono układ samemu sobie. Wyznaczyć kąt, przy którym znika reakcya płaszczyzny.

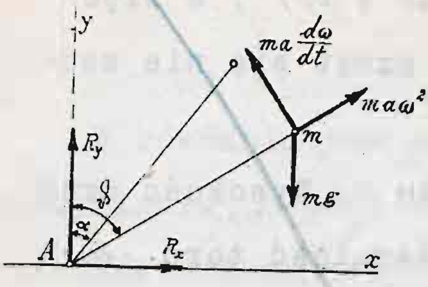

FIG. 68.

Ruch układu dzieli się na dwa okresy: w pierwszym koniec pręta pozostaje w O i płaszczyzna wywiera nań reakcyę R, w drugim kulka porusza się, jak punkt swobodny.

A więc w pierwszym okresie torem kulki jest okręg koła w drugim parabola styczna do tego okręgu.

Stosujemy zasadę d'Alemberta. Na układ działają następujące siły zewnętrzne: ciężar kulki mg i reakcya płaszczyzny R. Tę ostatnią rozłożymy na składowe: poziomą R_x i pionową R_y. Siłę odwrotną do czynnej rozłożymy też na dwie składowe: styczna, równą $ma\frac{d\omega}{dt}$ i normalną $ma\omega$. Bierzemy rzuty na kierunek pionowy i momenty względem A wypadną równania

$$R_y + ma\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta + ma\omega^2\cos\vartheta - mg = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = g.a.\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Całkując (2) i zwracając uwagę na warunki początkowe znajdziemy $a\omega^2 = 2g(\cos\alpha - \cos\vartheta)$. Podstawiamy to w (1) i zakładamy $R_y = 0$ x/. Wypadnie $\cos\vartheta = \frac{2}{3}\cos\alpha$.

5/ Jednorodny łańcuch przechodzi przez dwa gładkie poziome kołki położone na jednym poziomie. Ogniwa poruszają się z szybkością stałą, przenosząc się ze stosu położonego pionowo pod lewym kołkiem o h niżej do stosu położonego pod prawym kołkiem o $h+b$ niżej, przy-

x/ Łatwo sprawdzić biorąc rzuty na kierunek poziomy że gdy $R_y = 0$ to i $R_x = 0$, a więc $R = 0$.

czem część łańcucha, zawarta pomiędzy kołkami, nie zmienia postaci. Jaką krzywą tworzy łańcuch pomiędzy kołkami i jaka jest owa stała szybkość ogniw?

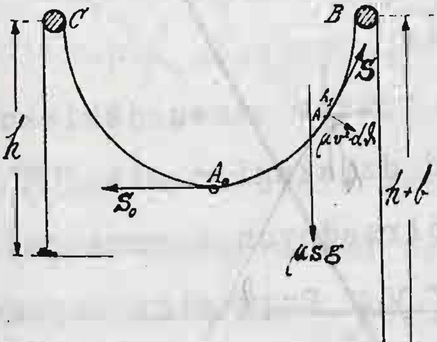

FIG. 69.

Niechaj S_0 oznacza naprężenie w najniższym punkcie A_0 łańcucha, a S w jakimkolwiek punkcie A. Wyznaczamy wypadkową sił, odwrotnych do czynnych działających na część $AA_0 = s$. Na element $AA_1 = ds$ działa siła normalna $\frac{v^2 ds}{\rho}\mu$ lub $\mu v^2 d\vartheta$ gdzie ρ oznacza promień krzywizny, a ϑ kąt, który styczna tworzy z poziomem. Składowa pozioma szukanej siły =

$$= \int_0^{\vartheta} v^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \mu \cdot v^2 (1-\cos\vartheta)$$

a składowa pionowa $\int_0^{\vartheta} v^2 \cos\vartheta\, d\vartheta = \mu v^2 \sin\vartheta$

Równania równowagi będą

$$S_0 - \mu \cdot v^2 (1-\cos\vartheta) - S \cdot \cos\vartheta = 0$$
$$\mu \cdot g \cdot s + \mu \cdot v^2 \sin\vartheta - S \cdot \sin\vartheta = 0$$

Rugując stąd S otrzymamy

$$s = \frac{S_0 - \mu \cdot v^2}{\mu g} \cdot tg\,\vartheta$$

Równanie to dowodzi, że szukaną krzywą jest katenoida, której parametr $a = \frac{S_0 - \mu v^2}{\mu g}$ /p. par.33 cz.I/.

Naprężenie łańcucha w punkcie B wynosi $\mu(h+b) \cdot g$, a w punkcie C jest ono równe $\mu h g + \mu v^2$. Drugi składnik tego wyrażenia pochodzi stąd, że co chwila element łańcucha $v.dt$ otrzymuje ilość ruchu $\mu.v.dt.v$, a do tego potrzebne jest naprężenie $\mu.v^2$ /p.prz.7 par.34/. Oczywiście naprężenia w punktach katenoidy, leżących na jednym poziomie są równe, zatem $\mu(h+b)g=\mu hg+\mu v^2$ a stąd szukana szybkość $v=\sqrt{b.g}$.

51. Równania ruchu. Niech będzie znowu jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił $P_1, P_2, \dots$ Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne elementu m przez x, y, z. Rzut siły czynnej elementu m na oś x jest równy $m\frac{d^2x}{dt^2}$, a siły odwrotnej do czynnej $-m\frac{d^2x}{dt^2}$. Suma takich rzutów wyrazi się przez $-\sum m\frac{d^2x}{dt^2}$, a suma rzutów sił zewnętrznych na tę samą oś przez $\sum P_x$. Suma rzutów sił odwrotnych do czynnych i zewnętrznych według zasady d'Alemberta musi być zerem, zatem:

$$-\sum m.\frac{d^2x}{dt^2}+\sum P_x=0$$

czyli

również

$$\left.\begin{aligned}\sum m.\frac{d^2x}{dt^2}&=\sum P_x\\ \sum m.\frac{d^2y}{dt^2}&=\sum P_y\\ \sum m.\frac{d^2z}{dt^2}&=\sum P_z\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (1)$$

Suma momentów sił odwrotnych do czynnych i sił zewnętrznych musi być także zerem. Znajdziemy z łatwością według par.12 cz.I, że względem osi z pierwsza wynosi $-\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, a druga $\sum(xP_y-yP_x)$, a zatem

$$\left.\begin{aligned}\sum m.\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\sum(xP_y-yP_x)\\ \sum m.\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\sum(yP_z-zP_y)\end{aligned}\right\} \quad \dots (2)$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma\left(zP_x-xP_z\right)$$

Obydwie grupy równań są ważne dla wszelkich ciał sztywnych i niesztywnych, ale w przypadku ciała sztywnego te sześć równań określają ruch całkowicie, jeżeli są dane warunki początkowe. Przekonamy się zaraz, że tak jest istotnie.

Obierzmy w ciele sztywnem, którego ruch mamy zbadać, prostokątny układ współrzędnych ξ, η, ζ związany stale z tem ciałem i poruszający się wraz z niem. Jeżeli np. ciało jest sześcianem, to układ taki mogą tworzyć trzy krawędzie, wychodzące ze wspólnego wierzchołka. Gdy dane jest położenie uładu ξ, η, ζ w układzie nieruchomym x, y, z to oczywiście położenie ciała jest całkowicie określone. Ileż do tego potrzeba wielkości niezależnych?

Przedewszystkiem potrzebne są współrzędne początku układu ξ, η, ζ w układzie xyz ; oznaczmy je przez x_0, y_0, z_0. Prócz tego potrzeba mieć kąty kierunkowe osi ξ, η, ζ Kątów tych jest dziewięć, ale nie są one niezależne jedne od drugich. Zachodzą pomiędzy nimi trzy związki typu

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1 ,$$

oraz trzy związki typu

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2=0$$

te ostatnie warunkują prostokątność układu.

Przy pomocy tych sześciu związków można sześć nowych kątów kierunkowych wyrazić w funkcyach trzech pozostałych. Wypada więc, że są niezbędne tylko trzy kąty kierunkowe, które wraz ze współrzędnemi x_0, y_0, z_0. całkowicie określają położenie układu ξ, η, ζ. Te sześć wielkości są niezależne jedne od drugich i nazywają się współrzędnemi ciała sztywnego. Współrzędne każdego elementu ciała w układzie ξ, η, ζ nie zmieniają się podczas ruchu i można je uważać za znane, a mając je możemy wyznaczyć współrzędne tego elementu w układzie x, y, z w funkcyach owych sześciu współrzędnych ciała. Gdy następnie wstawimy te funkcye w równania (1) i (2) to otrzymamy sześć równań, zawierających siedem wielkości zmiennych, a mianowicie sześć współrzędnych ciała oraz zmienną t. Równania te pozwalają wyrazić każdą ze współrzędnych ciała w funkcyi t, a zatem określają ruch ciała.

Opisany sposób postępowania byłby wysoce niedogodny i dlatego też równań (1) i (2) nie używamy do rozwiązywania poszczególnych zagadnień dynamicznych. Są one ważne tylko pod tym względem, że można z nich wyciągnąć pewne wnioski ogólne o ruchu ciał, jak zobaczymy w paragrafach najbliższych.

52. Ruch środka ciężkości. Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne lub niesztywne, albo nawet układ złożony z większej liczby ciał. Obierzmy prostokątny, nieruchomy układ współrzędnych i oznaczmy

 $M x_0 = \Sigma m x$

współrzędne środka ciężkości ciała, albo układu przez x_0, y_0, z_0. Wiemy, że $M x_0 = \Sigma m x$ gdzie M oznacza masę całkowitą. Jeżeli ciało się porusza, to x_0 oraz wszystkie x są zmienne, natomiast M i wszystkie m są stałe. Różniczkując to równanie, otrzymamy

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

oraz dwa analogiczne związki dla y_0 i z_0.

Przy pomocy tych związków równania (1.) paragrafu poprzedzającego przekształcić tak

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \Sigma P_x \quad ; \quad M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \Sigma P_y \quad ; \quad M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \Sigma P_z$$

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została skoncentrowana w środku ciężkości i siły $P_1, P_2, \ldots$, to jest wszystkie siły zewnętrzne, przeniesione równolegle do tego punktu. Trzy ostatnie równania są właśnie równaniami ruchu takiego wyobrażalnego punktu. Możemy więc powiedzieć, że środek ciężkości ciała albo układu porusza się tak, jakby cała masa była w nim skoncentrowana i wszystkie siły zewnętrzne przeniesione doń równolegle.

C. ważne

Twierdzenie to nazywa się zwykle zasadą ruchu środka ciężkości. Wynika z niego bezpośrednio, że siły wewnętrzne układu nie wywierają wpływu na ruch środka ciężkości, jakkolwiek mogą wywołać ruch poszczególnych części układu względem środka ciężkości.

Podajemy tu parę zwykle przytaczanych ilustracyi.

Przypuśćmy, że pocisk wybuchowy został wyrzucony w próżni. Jego środek ciężkości porusza się tak, jakgdyby był swobodnym punktem materyalnym, a więc zatacza parabolę. Jeżeli podczas tego ruchu nastąpi eksplozya, to odłamki rozlecą się na wszystkie strony, ale wciąż będzie istniał środek ciężkości wszystkich odłamków. Punkt ten będzie w dalszym ciągu obiegał parabolę, gdyż siły, wywołujące eksplozyę, jako wewnętrzne nie wywierają wpływu na ruch jego. Ruch środka ciężkości ulegnie zmianie dopiero wtedy, gdy pierwszy odłamek upadnie na ziemię; zmiana ta będzie następstwem działania nowej siły zewnętrznej, a mianowicie reakcyi gruntu.

Wyobraźmy sobie, że człowiek znalazł się w przestrzeni, w której żadne siły nań nie działają. Może on poruszać kończynami i głową, ale siły, wywołujące te ruchy, są siłami wewnętrznemi ciała, a zatem nie będzie on w stanie przesunąć swego środka ciężkości.

Gdy istota żyjąca pragnie nadać przyśpieszenie swemu środkowi ciężkości, to wywiera siłę na jedno z ciał otaczających; reakcya tego ciała wywołuje pożądane przyśpieszenie środka ciężkości.

Przypuśćmy, że człowiek stojący na podłodze poziomej chce uczynić krok naprzód. W tym celu wysuwa naprzód prawą nogę. Gdyby podłoga była doskonale gładka, to środek ciężkości musiałby pozostać w spokoju, gdyż nie byłoby tu żadnej zewnętrznej siły poziomej, a więc lewa noga przesunęłaby się w tył. Na podłodze chrppowatej lewa noga również usiłuje przesunąć się w tył,t.j. wywiera na podłogę siłę poziomą, czyli siłę tarcia, skierowaną w tył. Podłoga działa na stopę z siłą równą i odwrotną, skierowaną naprzód; jest to siła zewnętrzna i pod jej działaniem środek ciężkości otrzymuje przyśpieszenie.

Ptak podczas lotu, poruszając skrzydłami, wywiera siły na otaczające powietrze, a reakcya powietrza nadaje przyśpieszenie jego środkowi ciężkości. W podobny sposób ryba porusza się w wodzie. Para sił, działająca na ciało sztywne, nie może nadać przyśpieszenia środkowi ciężkości tego ciała. Jeżeli zatem na ciało żadne siły nie działają, to wynikiem będzie ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek ciężkości, albo raczej ruch kulisty około tego punktu.

Magnetyzm ziemski wywiera na magnes parę sił, a zatem magnes, umieszczony w magnetycznem polu ziemskiem przybiera ruch obrotowy.

53. Przykład. Człowiek stoi na zupełnie gładkim stole. Wskazać w jaki sposób mógłby on zejść na podłogę.

Może on to uczynić, rzucając jakiś przedmiot w kierunku poziomym. Wtedy bowiem wystąpi siła zewnętrzna /względem człowieka/ mianowicie reakcya wyrzuconego przedmiotu i nada ona przyśpieszenie środkowi ciężkości człowieka.

54. Ruch ciała sztywnego. Zastosujemy wyniki, osiągnięte w ostatnich paragrafach do ciała sztywnego. Ruch jego rozłożymy na ruch postępowy, odbywający się wciąż z szybkością środka ciężkości i na ruch kulisty którego środkiem ma być środek ciężkości. Innemi słowy będziemy rozważali oddzielnie ruch środka ciężkości oraz ruch ciała względem środka ciężkości. W tym celu obierzmy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy x, y, z i drugi ruchomy ξ, η, ζ. Początkiem drugiego niech będzie środek ciężkosci i układ ten ma brać udział jedynie w ruchu postępowym ciała; jeżeli zatem obierzemy w początku rachuby czasu osi ξ, η, ζ równolegle do x, y, z to pozostaną one równoległemi i nadal.

Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości w układzie nieruchomym, a przez x, y, z i ξ, η, ζ współrzędne jakiegoś elementu m ciała w układach nieruchomych i ruchomym. W takim razie będzie

$$x = \xi + x_0 \quad ; \quad y = \eta + y \quad ; \quad z = \zeta + z_0 \quad . \; . \; . \; (1.)$$

Składowe szybkości względnej elementu m w kierunkach osi będą $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, szybkości unoszenia $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$ i szybkości bezwzględne $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Również przyśpieszenie względne posiada składowe $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, przyśpieszenie unoszenia $\frac{d^2x_0}{dt^2}, \frac{d^2y_0}{dt^2}, \frac{d^2z_0}{dt^2}$, a przyśpieszenie bezwzględne $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. Przyśpieszenie Coriolisa jest zerem, gdyż ruch unoszenia jest postępowy.

Przekształcimy prócz tego układ sił zewnętrznych $P_1, P_2, P_3, \ldots$ działających na ciało. Mianowicie obierzemy środek ciężkości za punkt redukcyi i zredukujemy wszystkie siły do jednej siły wypadkowej, przyłożonej w środku ciężkości i do jednej pary. Siłę oznaczymy przez R, a moment pary przez N. Ten ostatni jest równy geometrycznej sumie momentów sił $P_1, P_2, \ldots$ względem środka ciężkości /par.10 cz.I/.

Sprawę ruchu postępowego rozstrzyga całkowicie zasada ruchu środka ciężkości, którą poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym. Para N nie wywiera tu żadnego wpływu, a zatem będzie

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=R_x \quad ; \quad M\frac{d^2y}{dt^2}=R_y \; ; M\frac{d^2z}{dt^2}=R_z \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Chodzi teraz o ruch względem środka cieżkości. Łatwo jest zrozumieć, że do określenia jego potrzebne są trzy nowe równania. Wiemy mianowicie, że sześć równań określa całkowicie ruch ciała sztywnego, trzy równania ostatnie są niezbędne do określenia ruchu środka ciężkości, a więc do określenia ruchu względnego pozostają trzy.

Otrzymamy je, przekształcając odpowiednio równania (2) par. W tym celu zastąpimy w nich x przez $x_0+\xi$ i t.d. stosownie do (1) w par.niniejszym. Wówczas lewa strona równania pierwszego przybiera postać taką:

$$\Sigma m\left[(\xi+x_0)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d^2y_0}{dt^2}\right)-(\eta+y_0)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2x_0}{dt^2}\right)\right]$$

do d. ruchu względnego

Gdy wykonamy wskazane działania i przed każdym wyrazem napiszemy znak sumy, to otrzymamy osiem wyrazów. Przedewszystkiem będą dwa wyrazy, zawierające same współrzędne ξ, η, ζ; łącząc je otrzymamy

$$\Sigma m\left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2}\right)$$

Dalej będą cztery wyrazy, zawierające współrzędne ξ, η, ζ łącznie z x_0, y_0, z_0. Łatwo okazać, że każdy z nich jest zerem. Tak np.

$$\Sigma m \xi \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m \xi = 0$$

gdyż $\Sigma m \xi$ jest momentem statycznym względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości. Również

$$\Sigma m x_0 \frac{d^2\eta}{dt^2} = x_0 \Sigma m \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \text{ gdyż } \Sigma m\eta = 0 \quad \text{i.t.d.}$$

Wreszcie wypadną dwa wyrazy, zawierające tylko współrzędne $x_0 . y_0 . z_0$, a mianowicie

$$\Sigma m x_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} - \Sigma m y_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = x_0 M \frac{d^2 y_0}{dt^2} - y_0 M \frac{d^2 x_0}{dt^2};$$

uwzględniając (2) w par. niniejszym przekształcimy te wyrazy na $x_0 R_y - y_0 R_x$. Po prawej stronie równania należy napisać moment siły R względem osi z oraz rzut momentu N na oś z albo oś ζ.

Wypadnie $\quad x_0 . R_y - y_0 . R_x = N_\xi$

Gdy przeprowadzimy analogiczne przekształcenia również w dwóch równaniach pozostałych, to otrzymamy trzy równania następujące:

$$\left.\begin{aligned}
\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt}\right)&=N_\zeta\\
\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)&=N_\xi\\
\sum m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)&=N_\eta
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(3.)$$

Są to szukane równania ruchu kulistego.

Możemy teraz wypowiedzieć dwa następujące twierdzenia z których pierwsze jest tylko powtórzeniem zasady ruchu środka ciężkości:

1) Ruch postępowy ciała sztywnego jest niezależny od ruchu kulistego; nie zależy on od pary wypadkowej N lecz tylko od siły wypadkowej R.

2) Ponieważ równania (3.) nie zawierają wcale szybkości, ani przyśpieszenia środka ciężkości, przeto ruch kulisty jest niezależny od ruchu postępowego. Prócz tego z równań tych wynika, że na ruch kulisty nie wywiera wpływu siła wypadkowa R, lecz tylko para wypadkowa N albo momenty sił zewnętrznych względem środka ciężkości.

Twierdzenia te zawierają tak zwaną zasadę niezależności ruchów postępowego i kulistego. W myśl tej zasady zagadnienie ruchu ciała sztywnego rozpada się na dwa zagadnienia odrębne i od siebie niezależne; jedno z nich dotyczy ruchu postępowego, drugie ruchu kulistego. Rozwiązując pierwsze możemy uważać, że ruch kulisty nie istnieje t.j. że całkowity ruch ciała jest postępowy, rozwiązując drugie możemy nie zwracać uwagi na ruch postępowy albo uważać, że środek ciężkości jest nieruchomy. Pierwsze zagadnienie stanowi przedmiot dynamiki punktu, drugie dynamiki ciał sztywnych.

55. Siła żywa ciała sztywnego. Nazywamy siłą żywą ciała, albo układu ciał, sumę sił żywych wszystkich elementów, czyli $\sum \frac{m.v^2}{2}$, gdzie m - oznacza masę elementu, a v jego szybkość. Wiemy już, że przyrost elementarny tej siły żywej jest równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na ciało, zarówno zewnętrznych, jak i wewnętrznych.

W ciele sztywnem odległości pomiędzy elementami się nie zmieniają, a w takim razie, jak widzieliśmy we wspomnianym paragrafie, suma prac sił wewnętrznych jest zerem, i przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych sił zewnętrznych. Z tego wynika, że i przyrost całkowity siły żywej w pewnym czasie jest równy sumie prac całkowitych sił zewnętrznych.

Istnieją pewne proste wzory na siłę żywą ciała sztywnego, które w dużym stopniu ułatwiają stosowanie zasady sił żywych. Jeżeli ruch ciała jest postępowy, to szybkości wszystkich elementów są równe i wówczas

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m = \frac{M.v^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

gdzie M oznacza masę całego ciała. Tak więc w przypadku ruchu postępowego siła żywa ciała wyznacza się tak, jakgdyby ciało było punktem materjalnym.

Przypuśćmy teraz, że ruch ciała jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową ω około osi z . Jeżeli r oznacza odległość elementu m od z, to $v=r.\omega$ i

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}=\sum\frac{mr^2\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2=\frac{I\omega^2}{2}\quad . . . (2)$$

I oznacza tu moment bezwładności ciała względem osi z . Ponieważ $I=Mk^2$, gdzie k jest ramieniem bezwładności, można przeto nadać także ostatniemu wyrażeniu postać $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$ Siła żywa

Nieraz bywa użyteczne jeszcze inne wyrażenie siły żywej w ruchu obrotowym. Obierzmy na osi z dowolny punkt O. Dajmy na to, że osi główne punktu O tworzą z z kąty α,β,γ i że momenty bezwładności ciała względem tych osi są A, B, C . W takim razie $I=A.\cos^2\alpha+B.\cos^2\beta+C.\cos^2\gamma$ a zatem siła żywa będzie

$$T=\frac{A\omega^2\cos^2\alpha+B\omega^2\cos^2\beta+C\omega^2\cos^2\gamma}{2}$$

Lecz $\omega.\cos\alpha$, $\omega.\cos\beta$, $\omega.\cos\gamma$ są to rzuty wektora ω na osi główne punktu O, albo składowe w kierunkach tych osi. Oznaczając te składowe przez $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ znajdziemy, że

$$T'=\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{A.\omega_x^2+B.\omega_y^2+C.\omega_z^2}{2}$$

Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym ciało sztywne posiada ruch jakikolwiek, znaczy to, że ruch jego jest śrubowy. Osią tego ruchu niech będzie w danej chwili prosta z , szybkość postępową oznaczymy przez u, a kątową przez ω . Jeżeli odległość elementu m od z jest równa r , to $v^2=u^2+r^2\omega^2$ i

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{Mu^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2=\frac{Mu^2}{2}+\frac{Mk^2\omega^2}{2}$$

gdzie k oznacza ramię bezwładności względem osi z.

Ponieważ w zjawiskach dynamicznych szczególną rolę odgrywa środek ciężkości, dobrze więc będzie zamiast u wprowadzić szybkość środka ciężkości. Niech a oznacza jego odległość od z, v_0 - szybkość, a k_0 ramię bezwładności ciała względem osi z_0, przechodzącej przez ten środek i równoległej do z. W takim razie $k^2=a^2+k_0^2$ i wyrażenie powyższe przekształci się na $\frac{M}{2}(u^2+a^2\omega^2+k_0^2\omega^2)$. Lecz $u^2+a^2\omega^2=v_0^2$, zatem będzie

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{Mv_0^2}{2}+\frac{Mk_0^2\omega^2}{2}$$

Widzimy, że siła żywa składa się z dwóch części, pierwsza pochodzi z ruchu postępowego z szybkością środka ciężkości, a druga z ruchu kulistego około środka ciężkości.

1436 56. Przykłady 1. Sztaba OA wirująca na gładkiej płaszczyźnie poziomej około końca O osadzonego na osi, z szybkością kątową ω pękła w środku B. Jaki był ruch dalszy każdej części.

Siła żywa żadnej z tych części nie mogła uledz zmianie, bo nie działają na nie żadne siły zewnętrzne /niepionowe/. Ruch części OB będzie obrotowy /około O/ z początkową szybkością kątową ω. Aby zbadać ruch pozostałej części AB zwróćmy uwagę na jej środek ciężkości C.

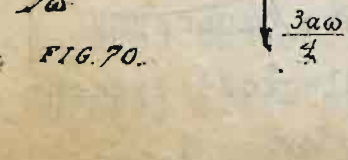

FIG. 70.

Przed pęknięciem szybkość tego punktu była prostopadła do AO i również Ω $\frac{3a\omega}{4}$, gdzie a oznacza długość sztaby. Z taką samą szybkością musi poruszać się środek C po pęknięciu, gdyż wówczas żadne siły na część AB nie działają. Możemy rozłożyć dalszy ruch części AB na postępowy z szybkością punktu C i obrotowy około C. Ponieważ pierwszy nie uległ zmianie, a również siła żywa nie mogła się zmienić, przeto i ruch obrotowy pozostał bez zmiany, a zatem część AB obraca się około C z szybkością kątową ω.

2.) Sztaba o długości $2a$ może się obracać w płaszczyźnie pionowej około osi poziomej przechodzącej przez koniec sztaby. Nadajemy sztabie położenie poziome i następnie pozostawiamy ją samej sobie. Wyznaczyć szybkość kątową sztaby w funkcji jej nachylenia do poziomu: Przypuśćmy, że sztaba posiada szybkość kątową ω, gdy tworzy z poziomem kąt ϑ. Całkowity przyrost siły żywej wynosi $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$ gdzie M oznacza masę sztaby, a k ramię bezwładności względem osi obrotu. Na sztabę działa tylko reakcja osi i siła ciężenia. Pierwsza nie pracuje, a

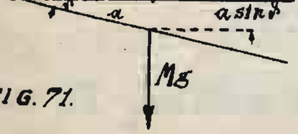

FIG. 71.

całkowita praca drugiej $= M.g.a.\sin\vartheta$, gdyż środek ciężkości sztaby opadł o $a.\sin\vartheta$. A zatem

$$\frac{Mk^2\omega^2}{2} = Mg.a.\sin\vartheta$$

Ponieważ $k^2 = \frac{4a^2}{3}$, przeto ostatecznie wypadnie, że

$$\omega^2 = \frac{3g.\sin\vartheta}{2a}.$$

3. Na zupełnie chropowatej płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem α kładziemy kulę jednorodną i pozwalamy jej staczać się swobodnie. Wyznaczyć szybkość środka kuli w funkcyi drogi.

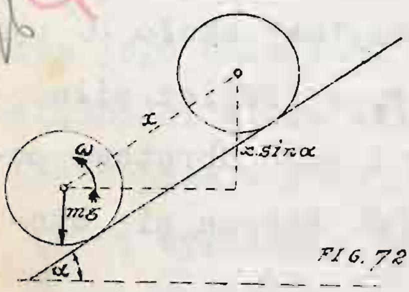

FIG. 72

Przypuśćmy, że środek przebiegł drogę x i posiada obecnie szybkość v. Siła żywa kuli wynosi $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2}$, gdzie ω oznacza szybkość kątową około średnicy poziomej, a k ramię bezwładności względem średnicy. Na kulę działa siła ciążenia, reakcja normalna płaszczyzny i siła tarcia. Praca pierwszej wynosi $Mg\sin\alpha x$, dwie siły pozostałe są wciąż przyłożone w punkcie kuli, którego szybkość jest zerem, a zatem ich prace są równe zeru. Wypadnie przeto

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2} = Mg.x.\sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Kula się toczy bez poślizgu, z czego wynika, że $\omega = \frac{v}{a}$, gdzie a oznacza promień. Uwzględniając prócz tego, że $k^2 = \frac{2a^2}{5}$, znajdziemy $v^2 = \frac{10g.x.\sin\alpha}{7}$ . . (2)

Gdyby płaszczyzna była zupełnie gładka i kula się zsuwała, to kwadrat szybkości byłby równy $2g.x.\sin\alpha$. / ω wtedy jest $= 0$ /. Widzimy, że w przypadku rozważanym ruch jest wolniejszy.

4. Mamy dwie kule o jednakowych średnicach i jednakowych wagach. Jedna z nich jest złota dęta, a druga srebrna pozłacana. Jak odróżnić złotą od srebrnej.

Masa kuli złotej jest rozłożona w większej odległości od środka, niż kuli srebrnej, a więc ramię bezwładności pierwszej jest większe, niż drugiej. Z równania (1) przyk.3. po podstawieniu $\omega = \frac{v}{a}$ mamy

$$v^2 = \frac{2a^2 g . x . \sin\alpha}{a^2 + k^2},$$

a z tego wynika, że kula, mająca większe ramię bezwładności będzie się staczała wolniej. Gdy więc ustawimy obydwie kule na chropowatej równi na jednym poziomie, a następnie wyswobodzimy jednocześnie, to ta, która zostanie w tyle jest złota.

5. Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy kulą i płaszczyzną w przykładzie 3, aby nie było poślizgu.

W myśl zasady ruchu środka ciężkości możemy uważać środek kuli za punkt materyalny o masie M, na który działają trzy wyżej wymienione siły. Zatem będzie $M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\alpha - F$, gdzie F oznacza siłę tarcia. Z tego otrzymamy $F = \frac{2Mg.\sin\alpha}{7}$, bo $\frac{dv}{dt}$, czyli przyśpieszenie środka ciężkości wynosi $\frac{5}{7}g.\sin\alpha$, co wynika z (2) przyk. 3. Taka powinna być siła tarcia, aby nie było poślizgu. W kierunku prostopadłym do płaszczyzny środek ciężkości nie posiada przyśpieszenia, a zatem reakcya normalna $N = M.g.\cos\alpha$. Najmniejszy możliwy współczynnik tarcia $f = \frac{F}{N} = \frac{2\,tg\,\alpha}{7}$. Jeżeli współczynnik tarcia przewyższa tę wartość, to kula się toczy przy tarciu mniejszym od granicznego. Jeżeli płaszczyzna jest pozioma, to $\sin\alpha = 0$ i $F = 0$. Znaczy to, że podczas toczenia się kuli sztywnej na płaszczyźnie poziomej siła tarcia nie występuje. Jeżeli kula w pewnej chwili się toczy i żadne siły prócz ciążenia i reakcyi płaszczyzny na nią nie działają, to będzie ona toczyła się czas nieograniczony z szybkością stałą.

5. Sztaba jednorodna i gładka o długości a i masie m obracała się około jednego ze swych końców z szybkością kątową ω_0 na gładkiej płaszczyźnie poziomej.

W pewnej chwili przed sztabą bardzo blizko nieruchomego końca, położono punkt materyalny, którego masa jest równa masie sztaby. Jaką szybkość osiągnie punkt doszedłszy do drugiego końca sztaby.

Obieramy początkowe położenie sztaby za oś biegunową, a jej koniec nieruchomy za biegun. Ponieważ na punkt w kierunku promienia wodzącego żadna siła nie działa, przeto $\frac{d^2r}{dt^2} = r\omega^2 \ldots (1)$, gdzie r oznacza promień wodzący punktu a ω szybkość kątową sztaby w chwili t.

$F_r = 0$

$\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) = F$

Prócz tego wyrazimy, że przyrost elementarny siły żywej układu jest zerem. W chwili t siła żywa sztaby wynosi $\frac{m\cdot k^2\cdot\omega^2}{2}$ gdzie k oznacza ~~moment~~ ramię bezwładności sztaby względem jej końca. Aby wyznaczyć siłę żywą punktu m rozłóżmy jego szybkość v na składowe v_r i v_φ. Będzie $v_\varphi = \omega r$, $v_r = \frac{dr}{dt}$ zatem $v^2 = \omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, a więc siła żywa punktu jest równa

$$\frac{m\left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}{2}$$

a siła żywa układu wynosi

$$\frac{mk^2\omega^2}{2} + \frac{m\left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}{2}$$

Na początku siła żywa była $= \frac{mk^2\omega_0^2}{2}$, a ponieważ nie uległa zmianie więc

$$\frac{mk^2\omega^2}{2} + \frac{m\left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}{2} = \frac{m\cdot k^2\cdot\omega_0^2}{2} \quad \ldots (2).$$

Gdy zróżniczkujemy równanie (2) i uprościmy, uwzględniając (1), to wypadnie $(k^2+r^2)d\omega + 2\omega r\,dr = 0$,

a stąd

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2r\cdot dr}{k^2+r^2}$$

Całkując i biorąc pod uwagę warunki początkowe otrzymamy $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{k^2}{k^2+r^2}$ i $\omega = \frac{\omega_0 k^2}{k^2+r^2}$ . . . $(3.)$

Nam chodzi o szybkość punktu w chwili, gdy $r = a$. Podstawiamy więc tę wartość r w $(3.)$, a zamiast k^2 piszemy $\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3}$ Znajdziemy wówczas łatwo, że $\omega = \frac{\omega_0}{4}$, zatem $v_\varphi = a\omega = \frac{a\omega_0}{4}$; $v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{a\omega_0}{2}$ i $v = \frac{a\omega_0}{4}\sqrt{5}$.

6. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej ustawiono sztabę długości $2a$ tak, że odległość jej środka od tej płaszczyzny $=h$. Z jaką szybkością środek sztaby dojdzie do płaszczyzny poziomej?

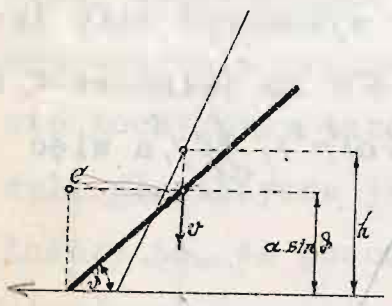

FIG. 73.

Sztaba będzie się poruszała ruchem Cardana, bo torami jej środka i punktu zetknięcia z płaszczyzną są proste. W celu wyznaczenia szukanej szybkości zastosujemy zasadę sił żywych. Siła żywa sztaby będzie się składała z dwóch części. Pierwsza pochodzi z ruchu postępowego środka ciężkości i wynosi $\frac{mv^2}{2}$, gdzie v jest szybkością tego środka, druga pochodzi z ruchu obrotowego około środka ciężkości i $=\frac{mk^2\omega^2}{2}$ gdzie ω oznacza odpowiednią szybkość kątową, a k ramię bezwładności sztaby względem środka. Całkowita siła żywa wynosi $\frac{mv^2}{2}+\frac{mk^2\omega^2}{2}$ i temu samemu jest równy przyrost owej siły, bo początkowo była ona zerem. Przyrost ten jest z drugiej strony równy pracy siły ciążenia, czyli $mg(h-a.\sin\vartheta)$

Zatem

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mk^2\omega^2}{2}=m.g.(h-a\sin\vartheta) \qquad (1)$$

Gdy wyznaczymy środek chwilowy C ruchu sztaby, to z łatwością otrzymamy zależność $\omega=\frac{v}{a.\cos\vartheta}$. Podstawiamy tę wartość w (1) i uwzględniamy, że $k^2=\frac{a^2}{3}$; dla. $\vartheta=0$ wypadnie

$$v^2=\frac{\sqrt{3g.h}}{2}$$