Siła żywa sztaby po uderzeniu wynosi

$$L = \frac{M(k^2+x^2)F^2(a+x)^2}{2M^2(k^2+x^2)^2} = \frac{F^2(a+x)^2}{2M(k^2+x^2)^2} \quad . \; . \; . \; (1.)$$

Chodzi o maksymum wartości L. Aby je wyznaczyć różniczkujemy (1.) względem x i przyrównywujemy pochodną do zera. Wypadnie

$$(a+x)(k^2-ax) = 0$$

Stąd albo $x = a$, czyli oś obrotu przechodzi przez A; odpowiada to minimum L, albo też $k^2-ax=0$; stąd $x = \frac{k^2}{a} = \frac{a}{3}$. Odpowiada to oczywiście szukanemu maksymum.

ROZDZIAŁ VI.

RUCH PŁASKI CIAŁA SZTYWNEGO.

75. Równania zasadnicze. Przypuśćmy, że ruch ciała sztywnego jest wciąż równoległy do płaszczyzny F. Będziemy uważali, że płaszczyzna ta przechodzi przez środek ciężkości ciała i że w niej działają na ciało siły $P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots$

Ruch ciała rozłożymy na dwa ruchy składowe, postępowy, odbywający się wciąż z szybkością środka ciężkości i obrotowy około tego środka. Aby wyznaczyć ruch postępowy czyli ruch środka ciężkości, obierzmy w płaszczyźnie F prostokątny układ współrzędnych, współrzędne środka ciężkości oznaczymy przez x_0, y_0, a masę ciała przez M. W myśl zasady ruchu środka ciężkości otrzymamy

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2}=\Sigma P_x \quad ; M\frac{d^2y_0}{dt^2}=\Sigma P_y \quad \ldots\ldots (1.)$$

Celem zbadania ruchu środka ciężkości można także brać rzuty na styczną i normalną do toru jego, albo na promień wodzący oraz na kierunek prostopadły.

Aby wyznaczyć ruch obrotowy obieramy w płaszczyźnie F dowolny punkt A i prowadzimy przezeń prostą u prostopadłą do tej płaszczyzny. Moment ilości ruchu ciała względem u oznaczmy przez H. W takim razie

$$dH=\Sigma N dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.)$$

gdzie N oznacza moment typowej siły P względem prostej u albo względem punktu A.

Wektor H składa się z dwóch części; pierwsza jest zależna tylko od ruchu środka ciężkości, druga tylko od ruchu obrotowego około środka ciężkości. Pierwsza zależy od położenia punktu A, druga jest jednakowa dla wszystkich punktów płaszczyzny F. Dlatego też równanie (2) jest wogóle ważne tylko w tym razie, gdy punkt A jest nieruchomy. Gdyby punkt A był ruchomy gdyby należał np. do ciała, którego ruch badamy, to w czasie dt pierwsza część wektora H przybrałaby przyrost już skutkiem samej zmiany położenia tego punktu, niezależnie od sił $P_1, P_2, \ldots$.

Możemy jednak obierać A w środku ciężkości, jakkolwiek punkt ten jest ruchomy. W tym razie pierwsza część wektora H jest stale równa zeru, a zatem wektor ten przybiera przyrosty tylko dzięki działaniu sił $P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots$

Jeżeli A jest środkiem ciężkości, i ω oznacza szybkość kątową ciała, a k ramię bezwładności względem prostej u, to $H = Mk^2\omega$; $dH = Mk^2 d\omega$,

a zatem M

$$M.k^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.)$$

(216 str.)

Równania $(1.)$ i $(3.)$ określają całkowicie ruch ciała jeśli dane są warunki początkowe. $\frac{dv_2}{dt} = 0$; $\frac{dv_4}{dt} = 0$

Jeżeli siły $P_1, P_2 \ldots$ sprowadzają się do pary, to środek ciężkości nie posiada przyśpieszenia, a zatem ruch jego jest prostoliniowy i jednostajny. Jeżeli suma momentów sił $P_1, P_2 \ldots$ względem środka ciężkości jest równa zeru, to jak widać z $(3.)$ $d\omega = 0$, a więc ω jest stałe. Jeżeli wreszcie na ciało żadne siły nie działają, to środek ciężkości biegnie w linii prostej ze stałą szybkością v , a ciało obraca się około środka ciężkości ze stałą szybkością kątową ω . Linią stałą środków chwilowych jest w tym razie prosta, a linią ruchomą koło, zatoczone ze środka ciężkości promieniem $\frac{v}{\omega}$.

1426r

76. Przykłady. 1. Część sznura jest nawinięta na ciężki cylindryczny bęben, część pozostała ma położenie pionowe, a koniec jest przymocowany do sufitu. Bę-

$M \frac{dx}{dt} = \Sigma P$ (Pkt) $Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N$

ben ma takie położenie, że płaszczyzna, poprowadzona przez środek ciężkości prostopadle do osi, przechodzi przez sznur. Jakie przyśpieszenie będzie miał ten środek ciężkości, gdy pozwolimy bębnowi spadać?

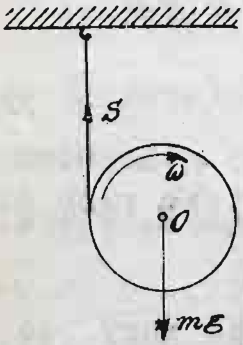

FIG. 102.

Na bęben działają dwie siły, mianowicie: siła ciężkości $- mg$ gdzie m oznacza masę bębna, oraz naprężenie sznura $- S$. Obydwie te siły są pionowe, a więc ruch środka ciężkości bębna jest prostoliniowy. Przypuśćmy, że szybkość tego ruchu po upływie t sek. wynosi v, że zatem przyśpieszenie jest równe $\frac{dv}{dt}$. Otrzymamy stąd równanie następujące

$$m\frac{dv}{dt} = mg - S \qquad \ldots\ldots\ldots /1/$$

Wyznaczmy teraz ruch obrotowy bębna około środka ciężkości. Biorąc sumę momentów wszystkich sił, działających na bęben względem jego osi, albo względem środka ciężkości O, otrzymamy, zgodnie z równaniem /3/ par. poprzedzającego

$$\frac{m.a^2}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = S.a \qquad \ldots\ldots\ldots /2/$$

przyczem ω oznacza szybkość kątową rozważanego ruchu, a a - promień bębna.

Z /1/ i /2/ będzie : $\frac{dv}{dt} + \frac{a}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = g \qquad \ldots\ldots /3/$

Aby wyznaczyć zależność $\frac{dv}{dt}$ i $\frac{d\omega}{dt}$ zwróćmy uwagę na tę okoliczność, że punkt zetknięcia sznura z bębnem jest środkiem chwilowym, a więc $v = a\omega$ i $\frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt}$

Podstawiając to w /3/ otrzymamy $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g$.

2. Cylinder kołowy o promieniu a, wirujący około osi z szybkością kątową ω_0 położono ostrożnie na podłodze; współczynnik tarcia $= f$. Zbadać dalszy ruch cylindra. Ruch cylindra składa się z dwóch okresów. W pierwszym zachodzi poślizg po podłodze, a więc najniższy punkt cylindra posiada szybkość, różną od zera; tarcie jest wówczas całkowicie rozwinięte. Okres drugi zaczyna się wtedy, gdy szybkość owego punktu staje się zerem.

1928

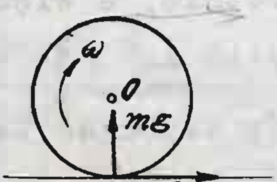

FIG. 103.

W pierwszym okresie na cylinder działa siła ciężkości $= mg$ i reakcya podłogi. Tę ostatnią rozłożymy na składowe normalną i styczną. Pierwsza wynosi mg, a druga fmg i jest skierowana w prawo, jeśli cylinder obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara.

Ruch środka ciężkości cylindra jest prostoliniowy. Przypuśćmy, że w chwili t szybkość jego wynosi v, że więc przyspieszenie jest $= \frac{dv}{dt}$. Równanie tego ruchu będzie zatem $\frac{m\,dv}{dt} = fmg$, gdzie m oznacza masę cylindra. Po zcałkowaniu wypadnie stąd

$$v = f.g.t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wyznaczmy teraz ruch obrotowy około środka ciężkości.

Gdy oznaczymy szybkość kątową cylindra w chwili t przez ω, to otrzymamy $\frac{m.a^2}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -f.m.g.a$, albo po skróceniu przez ma i zcałkowaniu $a\omega = -2fg.t + C$, gdzie C jest stałą całkowania.

Przy $t=0$ mamy $\omega = \omega_0$, zatem $C = a\omega_0$ i ostatecznie będzie $a\omega = a\omega_0 - 2f.g.t$ . . . . . . (2)

Szybkość najniższego punktu cylindra posiada dwie składowe v i $a\omega$, skierowane odwrotnie, a więc szybkość wypadkowa tego punktu jest $= a\omega - v = a\omega_0 - 2fgt - fgt$.

Toczenie cylindra rozpocznie się, gdy szybkość ta stanie się zerem, gdy więc $a\omega_0 - 3f.g.t = 0$ albo $t = \frac{a\omega_0}{3f.g}$. Owczesna szybkość środka ciężkości O wyniesie $v = \frac{a\omega_0}{3}$

O tem jaki będzie dalszy ruch cylindra rachunek nic nie powie. Nie możemy go nawet zastosować, bo nie wiemy jakie siły działają na cylinder. Niewiadomo, mianowicie jakie jest tarcie w najniższym jego punkcie, czy jest ono całkowicie rozwinięte, czy też nie. Wobec tego musimy uciec się do doświadczenia. To ostatnie wskazuje, że cylinder toczy się w dalszym ciągu; że więc szybkość najniższego punktu jest wciąż zerem i $a\omega = v$.

Gdyby siła tarcia w rozważanym okresie była skierowana w prawo, to szybkość postępowa v wzrastałaby, szybkość kątowa ω - zmniejszała, a więc związek $a\omega = v$ nie mógłby zachodzić. Tak samo dowiedlibyśmy, że również i w lewo siła tarcia nie może być zwrócona, a z tego wynika, że jest ona zerem. Tak więc z chwilą, gdy rozpoczyna się toczenie tarcie znika, a v i ω zachowują wartości stałe.

4. Jednorodną belkę AB ustawiono w płaszczyźnie pionowej, opierając koniec A o pionową ścianę, a koniec B o gładką podłogę. Początkowo belka była nachylona do podłogi pod kątem α ; jakie było to nachylenie w chwili, gdy koniec A przestał dotykać ściany? 1926 r.

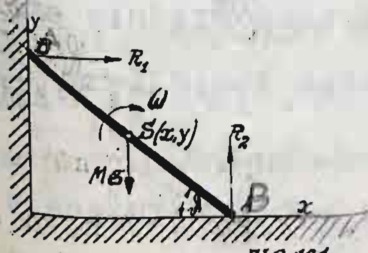

FIG. 104.

Obieramy za osi x, y przecięcia podłogi i ściany z płaszczyzną pionową, poprowadzoną przez belkę; tworząc wektor H względem środka ciężkości belki, otrzymamy :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = R_1 \; ; M\frac{d^2y}{dt^2} = R_2 - Mg \; ; Mk^2\frac{d\omega}{dt} = a(R_1 \sin\vartheta - R_2 \cos\vartheta) . (1)$$

gdzie x, y oznaczają współrzędne środka ciężkości, $2a$ długość belki, a R_1, R_2 reakcye ściany i podłogi. Prócz tego mamy

$$x = a . \cos\vartheta \; ; \; y = a . \sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (2)$$

gdzie ϑ oznacza nachylenie belki w chwili t .

W chwili, gdy koniec A przestaje dotykać ściany $R_1 = 0$, czyli $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$.

Różniczkując (2) otrzymamy $\frac{d^2x}{dt^2} = -a\left(\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta + \omega^2\cos\vartheta\right)$ (3)

a zatem w chwili, o którą chodzi :

$$-a\left(\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta + \omega^2\cos\vartheta\right) = 0$$

Wyznaczymy $\frac{d\omega}{dt}$ i ω^2 z /1/ i /2/. W tym celu rugujemy x, y, R_1, R_2.

Wypadnie $\frac{4a}{3} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -g.\cos\vartheta$. Mnożąc obydwie strony przez $d\vartheta$ i całkując, otrzymamy

$$\frac{2a\omega^2}{3} = g.(\sin\alpha - \sin\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /4/$$

Gdy wyznaczone wartości $\frac{d\omega}{dt}$ i ω^2 podstawimy w /3/, to znajdziemy ostatecznie, że belka przestaje opierać się o ścianę, gdy $\sin\vartheta = \frac{2\sin\alpha}{3}$

Równanie /4/ można otrzymać bezpośrednio stosując zasadę sił żywych; w takim razie znajdziemy $\frac{d\omega}{dt}$ za pomocą różniczkowania.

5. Obręcz kołową o promieniu a, wirującą w płaszczyźnie pionowej około swego środka z szybkością kątową ω_0, ustawiono na równi pochyłej, stycznie do linii największego spadku; kierunek szybkości kątowej jest taki, że siła tarcia jest zwrócona w górę. Zbadać ruch obręczy w przypadku, gdy kąt nachylenia równi jest równy kątowi tarcia φ.

Na obręcz działają: siła ciężkości $= mg$ /m - oznacza masę obręczy/ i reakcya równi. Reakcyę tę rozłożymy na składowe: normalną /N/ i styczną /fN/.

Gdy za osi x, y obieramy odpowiednią linię największego spadku równi i prostopadłą do niej, to równania ruchu środka ciężkości obręczy będą

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = fN - mg.\sin\varphi \ldots\ldots (1)$$

$$0 = m\frac{d^2y}{dt^2} = N - mg.\cos\varphi \ldots\ldots (2)$$

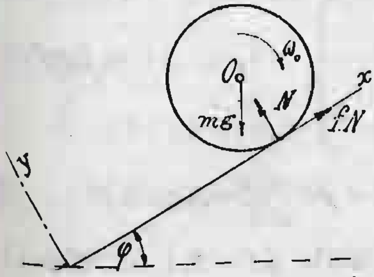

FIG. 105.

Ponieważ przyśpieszenie obręczy w kierunku osi y jest zerem więc z (2) wypadnie $N = mg.\cos\varphi$. Podstawiając tę wartość w (1.) otrzymamy $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, więc $\frac{dx}{dt} = 0$ = stałej. Stała ta jest zerem, bo obręcz nie posiadała początkowej szybkości postępowej.

Tak więc w ciągu pewnego okresu czasu ruch obręczy był wyłącznie obrotowy. Wyznaczmy jak długo to trwało. W tym celu tworzymy wyrażenie wektora H względem srodka ciężkości obręczy. Otrzymamy

$$mk^2\frac{d\omega}{dt} = -fNa \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ponieważ $k = a$, $N = mg\cos\varphi$, zatem wypadnie stąd

$$ma\frac{d\omega}{dt} = -mg.\sin\varphi$$

a po zcałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych będzie $a\omega = -g.t.\sin\varphi + a\omega_0$

Podstawiając tu $\omega = 0$, otrzymamy, że szybkość kątowa obręczy wyczerpie się po upływie czasu t , $= \frac{a\omega_0}{g.\sin\varphi}$

O tej chwili rozpocznie się nowy okres ruchu obręczy, mianowicie toczenie. W okresie tym na obręcz będą działały takie same siły, jak poprzednio, z wyjątkiem siły tarcia, o którem nie możemy zgóry powiedzieć, czy będzie całkowicie rozwinięte, czy też nie. Gdy ową siłę tarcia oznaczymy przez F, to otrzymamy następujące równania ruchu

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= m.g.\sin\varphi - F \\ m.a^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right) &= F.a \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Rugując stąd F znajdziemy, że $\frac{dv}{dt} + a\frac{d\omega}{dt} = g.\sin\varphi \ldots (5)$

Punkt zetknięcia obręczy z równią jest środkiem chwilowym, a więc pomiędzy szybkościami v i ω zachodzi znany związek: $v = a\omega$.

Stąd $a\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$. Podstawiając to w (5) otrzymamy $\frac{dv}{dt} = \frac{g.\sin\varphi}{2}$. Z (4) wypadnie $F = \frac{1}{2}m.g.\sin\varphi$, a więc w rozpatrywanym okresie tarcie zmniejszyło się o połowę.

5. Kulę jednorodną postawiono prawie na samym wierzchołku innej kuli nieruchomej i zupełnie chropowatej. Jaki kąt będzie tworzyć z pionem linia środków w chwili, gdy kule przestaną się stykać?

Ruch kuli składa się z dwóch okresów: w pierwszym kule się stykają i torem kuli swobodnej jest koło, zatoczone ze środka kuli stałej. W okresie drugim kule się już nie stykają i torem owego środka jest parabola.

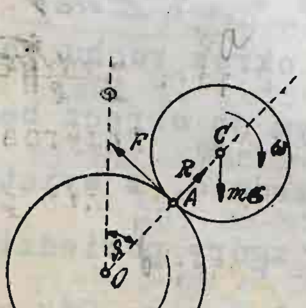

FIG. 106.

Przypuśćmy, że po upływie t sek. od rozpoczęcia ruchu ale jeszcze w pierwszym okresie, kula ruchoma zajęła położenie, wskazane na fig. 106. Dajmy na to, że w owej chwili linia środków

OC tworzy z pionem kąt ϑ, że obraca się ona około środka kuli nieruchomej z szybkością kątową Ω i że szybkość kątowa kuli ruchomej wynosi ω. Oznaczając promienie kuli ruchomej i stałej odpowiednio przez a i b otrzymamy łatwo, że $(a+b)\Omega = a\omega$.

Oznaczmy prócz tego przez R reakcyę normalną, przez F siłę tarcia i przez m masę kuli ruchomej. Otrzymamy z łatwością następujące równania ruchu kuli.

$$m(a+b)\frac{d\vartheta}{dt} = m.g.\sin\vartheta - F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$m(a+b)\Omega^2 = m.g.\cos\vartheta - R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\frac{2ma^2}{5}\cdot\frac{d\omega}{dt} = F.a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Z pierwszego i ostatniego wypadnie, że

$$\Omega^2 = \frac{10g.(1-\cos\vartheta)}{7(a+b)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

To samo równanie możnaby otrzymać bezpośrednio przy pomocy zasady sił żywych. Siła ta będzie równa sumie dwóch składników, z których pierwszy pochodzi z ruchu postępowego, zgodnego z ruchem środka ciężkości, i wynosi $\frac{m(a+b)^2\Omega^2}{2}$, a drugi z ruchu obrotowego około tego środka i jest równy $\frac{ma^2\omega^2}{5}$.

Początkowo siła żywa była zerem, a więc $\frac{m(a+b)^2\Omega^2}{2} + \frac{ma^2\omega^2}{5}$ wyraża całkowity przyrost tej siły. Przyrost ten jest równy pracy siły ciążenia /inne siły nie pracują/, czyli $m.g.(a+b)(1-\cos\vartheta)$. Stąd będzie

$$\frac{m(a+b)^2\Omega^2}{2} + \frac{m.a^2\omega^2}{5} = mg(a+b)(1-\cos\vartheta)$$

Gdy podstawimy tu $\omega = \frac{(a+b)\Omega}{a}$ to wypadnie /4./.

Wstawiwszy otrzymaną wartość w równanie /2/ i zakładając $R=0$, znajdziemy, że w chwili rozejścia się kul $\cos\vartheta = \frac{10}{17}$. Widzimy, że kąt ϑ nie zależy od promieni kul.

6. Do gładkiej płaszczyzny poziomej jest przybita listwa w kształcie pewnej krzywej, a po jej stronie wklęsłej leży pierścień o promieniu a, stykając się w punkcie A. Promień krzywizny listwy jest wszędzie większy od a, a współczynnik tarcia pierścienia o listwę $= f$. Pierścień otrzymuje szybkość v_0 w kierunku wspólnej stycznej i zaczyna się toczyć, gdy punkt zetknięcia znalazł się w B. Wyznaczyć kąt pomiędzy normalnemi do listwy w punktach A i B. Przypuśćmy, że po upływie czasu t od rozpoczęcia ruchu, ale jeszcze przed dojściem do punktu B, pierścień stykał się z listwą w punkcie P.

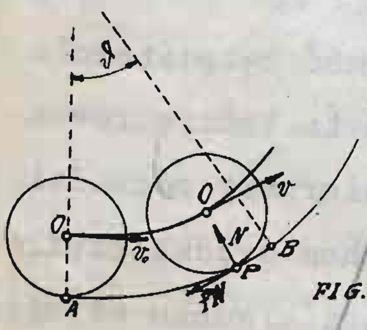

FIG. 107.

Reakcyę listwy w owej chwili rozłożymy na dwie składowe, na normalną N i na styczną fN /tarcie jest całkowicie rozwinięte/. Oznaczmy ówczesną szybkość środka ciężkości pierścienia przez v, masę pierścienia przez m, a promień krzywizny listwy w punkcie P przez ρ. Otrzymamy następujące równania ruchu

$f = a^2$

$$m\frac{dv}{dt} = -fN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$m\,a^2\frac{d\omega}{dt} = afN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Z (1.) i (3) wypada $\frac{dv}{dt} = -a\frac{d\omega}{dt}$, a stąd $v = -a\omega + C$, gdzie C jest stałą całkowania. Gdy $t = 0$ to $\omega = 0$, $v = v_0$, wypadnie więc $v = v_0 - a\omega$ . . . (4.) Toczenie rozpocznie się wtedy, gdy szybkość punktu zetknięcia będzie zerem. Wtedy zacznie być ważny związek $a\omega = v$. Podstawiając to w (4.) otrzymamy $v = \frac{v_0}{2}$.

Z równań (1.) (2) jest $\frac{dv}{dt} = -f\frac{v^2}{\rho}$; dalej mamy $\rho = \frac{ds}{d\vartheta}$, gdzie ds oznacza element listwy, $d\vartheta$ kąt, utworzony przez normalne do listwy w końcach tego elementu. Ponieważ wreszcie $ds = vdt$ więc $\rho = \frac{vdt}{d\vartheta}$ i $\frac{dv}{dt} = -f\frac{v^2}{\left(\frac{vdt}{d\vartheta}\right)}$, albo $\frac{dv}{v} = -f\,d\vartheta$.

Całkując i biorąc pod uwagę warunki początkowe otrzymamy stąd $\log_e \frac{v_0}{v} = f\vartheta$. Lecz w chwili rozpoczęcia toczenie mamy $v = \frac{v_0}{2}$, albo $\frac{v_0}{v} = 2$ więc $\vartheta = \frac{\log_e 2}{f}$.

7. Na gładkim stole leży gładka kula. Kładziemy na niej ostrożnie prawie na samym wierzchołku drugą kulę taką samą; okazać, że tor środka O_2 kuli górnej składa się z łuku eliptycznego oraz łuku parabolicznego, i wyznaczyć kąt, który linia środków $O_1 O_2$ tworzy z pionem w chwili, gdy kule przestają-

się stykać.

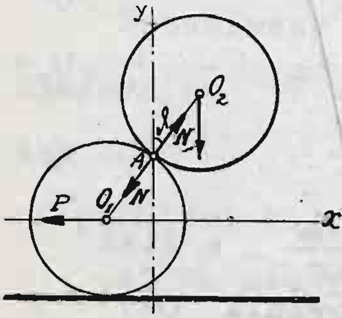

FIG. 108.

Aby rozwiązać pierwszą część zadania zwróćmy uwagę na to, że środek ciężkości układu, złożonego z obydwóch kul /czyli ich punkt zetknięcia A / porusza się po prostej pionowej, bo siły zewnętrzne, działające na ten układ są wszystkie pionowe. Torem środka O_1 kuli dolnej jest prosta pozioma; widzimy zatem, że dwa punkty prostej O_1O_2 poruszają się po prostych, a z tego wynika, że ruch tej prostej jest ruchem Cardana, że więc punkt O_2 zatacza elipsę. Gdy kule przestaną się stykać, to punkt ten zacznie obiegać parabolę.

Aby wyznaczyć szukany kąt, rozpatrzmy ruch punktu O_2 względem O_1 w chwili t, gdy zetknięcie pomiędzy kulami jeszcze zachodziło.

Oznaczmy masę i promień każdej kuli odpowiednio przez m i a, reakcyę jednej kuli na drugą przez N i przyśpieszenie kuli dolnej przez p. Torem względnym punktu O_2 względem O_1 jest okrąg koła, zatoczony z punktu O_1 promieniem, równym $2a$, a więc składowa normalna przyśpieszenia względnego jest skierowana do O_1 i wynosi $2a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Przyśpieszenie unoszenia jest równe p i ma kierunek poziomy, a przyśpieszenie

Coriolisa jest zerem, bo ruch unoszenia jest postępowy.

Biorąc rzuty na normalną, czyli na linię środków O_1O_2 otrzymamy równanie

$$\left[2a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + p.\sin\vartheta\right].m = m.g.\cos\vartheta - N$$

W chwili, gdy ustaje zetknięcie mamy $p=0$ i $N=0$, a więc jest wówczas

$$2a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = g.\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Drugi związek pomiędzy ϑ i $\frac{d\vartheta}{dt}$, ważny aż do rozejścia się wyznaczymy zapomocą zasady sił żywych.

Obierając osie x, y zgodnie z fig 108 mamy, że szybkość kuli dolnej wynosi $v=\frac{dx}{dt}=-\frac{d(a\sin\vartheta)}{dt}=$ $=-a.\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$, a więc siła żywa tej kuli jest $=\frac{ma^2\cos^2\vartheta}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$

Składowe szybkości kuli górnej w kierunkach osi są równe

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{d(a\sin\vartheta)}{dt}=a\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt};\quad \frac{dy_1}{dt}=\frac{d(2a\cos\vartheta)}{dt}.\frac{d\vartheta}{dt},$$

gdzie x_1, y_1 oznaczają współrzędne punktu O_2. Stąd siła żywa kuli górnej wyraża się przez

$$\frac{ma^2(\cos^2\vartheta+4\sin^2\vartheta)}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

a siła żywa całego układu wynosi

$$\frac{ma^2\cos^2\vartheta}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\frac{ma^2(\cos^2\vartheta+4\sin^2\vartheta)}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Początkowo siła żywa była zerem, a więc temu samemu jest równy całkowity przyrost tej siły w ciągu czasu t. Przyrost ten jest równy pracy siły ciążenia, działającej na kulę górną /inne siły nie pracują/ czyli $2mga(1-\cos\vartheta)$. Stąd wypadnie, że

$$2a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2(\cos^2\vartheta+2\sin^2\vartheta)=4g\,(1-\cos\vartheta)$$

Podstawiając tu zamiast $2a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ wyrażenie z (1.) otrzymamy równanie $\cos^3\vartheta-6\cos\vartheta+4=0$ Z pierwiastków tego równania jest przydatny tylko jeden mianowicie $\cos\vartheta=\sqrt{3}-1$.

8. Trzy jednakowe jednorodne sztaby AB, BC, CD, łączą się przegubami w B i C, a końce A, D są przymocowane do gładkich pierścieni, nawleczonych na poziomy nieruchomy pręt. Cały układ pozostaje w płaszczyźnie pionowej i początkowo utrzymujemy pierścienie w takim położeniu, że sztaby AB i CD tworzą z prętem kąty α. Wyznaczyć reakcye pręta w pierwszej chwili po wyswobodzeniu. Rozpatrzmy naprzód ruch sztaby AB. Ponieważ całe urządzenie jest symetryczne względem pionu więc punkt B porusza się po prostej pionowej y /Fig. 109/. Torem punktu A jest pręt AD albo prosta pozioma x. Z tego wynika, że sztaba AB porusza się ruchem Cardana i że zatem środek jej (E) zatacza koło, o promieniu $= OE$.

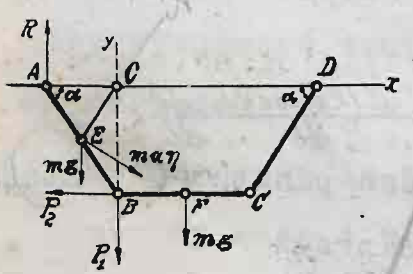

FIG. 109

Wyznaczmy równania ruchu owego środka. Przyśpieszenie jego rozłożymy na składowe normalną i styczną

$v = a\omega \quad \frac{dv}{dt} = \frac{a\,d\omega}{dt} = a\eta$

Pierwsza z nich w chwili wyswobodzenia jest zerem, a druga wynosi $a\eta$, gdzie a oznacza odległość OE albo połowę długości sztaby i η - początkowe przyśpieszenie kątowe.

Na sztabę AB działają: 1/ siła ciężenia $= mg$ gdzie m jest to masa sztaba, 2/ reakcya R pręta AD, jest ona pionowa, i 3/ reakcya sztaby BC; rozkładamy ją na składowe P_1 i P_2 w kierunkach osi y i x.

Gdy weźmiemy rzuty tych sił na kierunek przyśpieszenia stycznego, to wypadnie równanie następujące:

$$ma\eta = mg.\cos\alpha + P_1\cos\alpha - P_2.\sin\alpha - R.\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1.)$$

Drugie równanie otrzymamy, rozważając ruch obrotowy sztaby AB około jej środka E. Będzie

$$m\frac{a^2}{3}\eta = P_1 a\cos\alpha + P_2 a\sin\alpha + R a\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2.)$$

Zwróćmy dalej uwagę, że rzut przyśpieszenia punktu E na oś x wynosi: $\frac{d^2(a\cos\vartheta)}{dt^2} = -a.\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - a.\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt}$, ponieważ odciętą tego punktu jest $= a\cos\vartheta$. W pierwszej chwili $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, $\frac{d^2\vartheta}{dt} = \eta$, zatem owa składowa wyraża się przez $-a\sin\alpha.\eta$. Wywołuje ją składowa P_2 reakcyi sztaby BC, więc $-ma.\sin\alpha.\eta = P_2$ . . . (3.)

Rozpatrzmy wreszcie ruch sztaby BC. Rzędna jej środka ciężkości F jest równa $2a\sin\vartheta$, zatem przyśpieszenie tego punktu wynosi $-2a\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + 2a\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

W pierwszej chwili mamy znowu $\vartheta = \alpha$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ i $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \eta$ a więc przyśpieszenie to jest $= 2a\cos\alpha.\eta$. Biorąc rzuty na oś y otrzymamy

$$m.2a.\cos\alpha.\eta = mg - 2P_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Gdy z równań (1), (2), (3), (4) wyrugujemy nieznane P_1, P_2 i η, to wypadnie, że szukana reakcya

$$R = \frac{3mg(2-\cos^2\alpha)}{2(3\cos^2\alpha+2)}$$

Gdy $\alpha = 0$, to $R = \frac{3mg}{10}$ gdy zaś $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to $R = \frac{3mg}{2}$

77. Naprężenia sztab. Niech będzie sztaba AB, poruszająca się w jakikolwiek sposób pod działaniem sił. Wyobraźmy sobie, że w pewnej chwili sztaba ta się zerwała lub złamała w punkcie C. Fakt ten wogóle wywrze wpływ na dalszy ruch części AC i CB. Części te będą od owej chwili poruszały się inaczej, niż by się poruszały gdyby zerwanie nie nastąpiło.

Aby się o tem przekonać przypuśćmy, że sztaba tworzy linię płaską, i że porusza się w swojej płaszczyźnie, przyczem żadne siły na nią nie działają. W takim razie środek ciężkości porusza się po linii prostej z szybkością stałą, a sztaba obraca się około tego środka ze stałą szybkością kątową. Oczywiście torem środka ciężkości części CB jest cyklóida wydłużona lub skrócona, a szybkość zmienia się co do wielkości i kierunku; gdy sztaba się zerwie w punkcie C, to ruch ~~tego punktu~~ środka ciężkości tej [illegible] stanie się odrazu prostoliniowym i jednostajnym.

Z tego wynika że przed zerwaniem część AC wywierała wpływ na ruch części CB, czyli wywierała na nią pewne siły. Siły te są przyłożone w punktach zetknięcia tych części, t.j. w punktach przekroju C nazywają się zazwyczaj naprężeniami w przekroju C.

Doświadczenie wskazuje, że naprężenia nie mogą przekraczać pewnych granic, zależnych od wielkości przekroju oraz od materjału sztaby. Gdy naprężenia dochodzą do tych granic, to sztaba się łamie lub zrywa. Każdy mechanizm powinien być tak zbudowany, aby w każdej z jego części podczas biegu naprężenia trzymały się zdala od owych granic, a zatem wyznaczanie naprężeń, powstających podczas ruchu jest sprawą pierwszorzędnej doniosłości w technice.

Rozważymy to zagadnienie jedynie dla tego przypadku, w którym sztaba jest płaska, i ruch jej jest płaski, przyczem mogą na nią działać jakiekolwiek siły w płaszczyźnie ruchu.

Siły, które część AM wywiera na MB dadzą się sprowadzić do siły wypadkowej oraz pary wypadkowej; za środek redukcyi obiera się zazwyczaj jeden z punktów przekroju M. Siłę wypadkową rozkładamy na dwie składowe S_t i S_n, w kierunku stycznej do sztaby i w kierunku normalnej. Pierwsza nazywa się siłą rozciągającą, druga siłą ścinającą. Para wypadko-

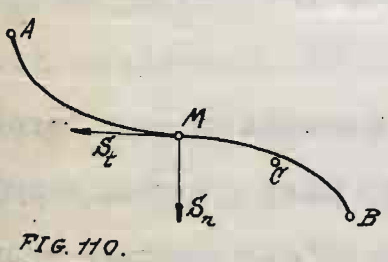

FIG. 110.

S_t S_n

wa zowie się parą zginającą, moment jej oznaczymy przez N. Tak więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia sił S_n i S_t i momentu N.

Ponieważ ruch sztaby jest znany, możemy przeto wyznaczyć przyśpieszenie środka ciężkości C części MB. Przyśpieszenie to wywołują oczywiście siły S_t i S_n wraz z temi siłami zewnętrznemi, których punkty przyłożenia należą do części MB. Biorąc rzuty na dwa kierunki, otrzymamy dwa równania, z których dadzą się wyznaczyć niewiadome S_t i S_n. Dojdziemy do tego samego, rozważając przyrosty, które przybiera wektor G części MB.

Aby otrzymać moment N wyznaczamy naprzód wektor H części MB względem jej środka ciężkości C, albo raczej względem prostej przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Przyrost elementarny tego wektora wytwarza szukany moment N oraz momenty sił, działających na MB, włączając w to znane już naprężenia S_t i S_n, względem środka ciężkości C. Z równania momentów znajdziemy moment N.

Przypuśćmy, dla przykładu, że sztaba jest prosta i żadne siły na nią nie działają. Masę jej oznaczmy przez M, długość przez $2a$ i szybkość kątową przez ω. Przekrój M obierzmy w odległości x od końca A. Znajdziemy łatwo, że masa części BM wynosi

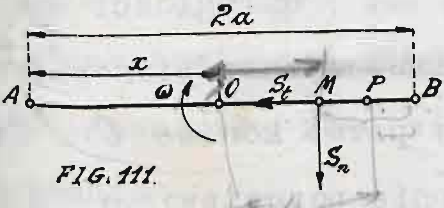

FIG. 111.

$\frac{M}{2a}\cdot(2a-x)$, a odległość jej środka ciężkości P od środka sztaby $=\frac{x}{2}$. Wyznaczmy naprzód przyśpieszenie środka części BM. W tym celu rozważamy ruch jego względem środka sztaby. Jest to ruch obrotowy o stałej szybkości kątowej ω, a zatem przyśpieszenie względne styczne jest zerem; istnieje tylko przyśpieszenie normalne, wynoszące $x\cdot\frac{\omega^2}{2}$. Przyśpieszenie unoszenia, a także przyśpieszenie Coriolisa są zerami, a zatem przyśpieszenie całkowite wynosi $\frac{x\omega^2}{2}$ i jest skierowane wzdłuż sztaby do jej środka.

Z tego widać, że naprężenie ścinające jest zerem, a rozciągające

$$S_t = \frac{M.x.(2a-x).\omega^2}{4a}$$

Znajdziemy bez trudności, że naprężenie to jest największe dla $x=a$, czyli w środku sztaby. Wynosi ono tam $Ma\frac{\omega^2}{4}$

Aby wyznaczyć parę zginającą N rozkładamy ruch części BM na ruch obrotowy około jej środka i na ruch postępowy. Pierwszy odbywa się ze stałą szybkością kątową, zatem wektor H nie przybiera żadnych przyrostów, a ponieważ moment siły S_t względem środka ciężkości BM jest równy zeru, przeto i moment N jest zerem. Tak więc w sztabie panują jedynie naprężenia styczne, a z tego wynika, że opisany ruch mogłaby mieć także wiotka linka albo łancuch.

78. Przykłady. I. Sztaba OA, odległości $2a$ i masie M może się obracać w płaszczyznie pionowej około osi poziomej, przechodzącej przez koniec O. Ustawiamy sztabę poziomo, a następnie pozostawiemy ją samej sobie. Wyznaczyć naprężenia w dowolnym punkcie P. Oznaczmy odległość OP przez x, a środek części PA przez C. W takim razie masa części AP wynosi $\frac{M}{2a}(2a-x)$, a $OC=\frac{x+2a}{2}$. Gdy sztaba tworzy z poziomem kąt ϑ, to równania ruchu środka C są następujące:

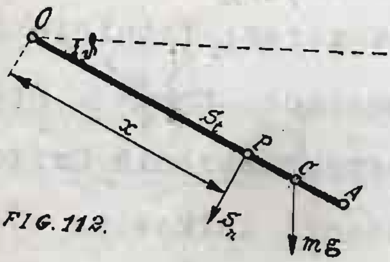

FIG. 112.

$$\frac{M}{2a}(2a-x)\cdot\frac{x+2a}{2}\,\omega^2=S_t-\frac{Mg}{2a}(2a-x)\sin\vartheta \qquad (1.)$$

$$\frac{M}{2a}(2a-x)\cdot\frac{x+2a}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt}=S_n+\frac{Mg}{2a}(2a-x)\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Aby wyznaczyć ω i $\frac{d\omega}{dt}$ stosujemy zasadę sił żywych. Początkowo siła żywa sztaby była $=0$, w położeniu rozważanem wynosi ona $\frac{2Ma^2.\omega^2}{3\cdot 2}$, a więc temu samemu jest równy jej przyrost. Przyrost ten wywołuje jedynie siła ciążenia $=Mg$. Praca jej wynosi $Mga\sin\vartheta$ więc $\frac{2Ma^2\omega^2}{3}=Mga\sin\vartheta$; stąd $\omega^2=\frac{3g\sin\vartheta}{2a}$ Różniczkując, otrzymamy stąd $\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g.\cos\vartheta}{4a}$ Podstawiamy te wartości na ω^2 i $\frac{d\omega}{dt}$ w (1.) i (2.); będziemy mieli po uproszczeniu:

$$S_n=\frac{Mg.(2a-x)(3x-2a).\cos\vartheta}{16a^2};\ S_t=\frac{Mg.(2a-x)(3x+10a)\sin\vartheta}{8a^2}\ \ldots(3)$$

Piszemy następnie równanie ruchu obrotowego części PA /uważanej za ciało odrębne/ około jej środka C

Wypadnie:

$$\frac{M}{2a}\cdot(2a-x)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2a-x}{2}\right)^2\cdot\frac{d\omega}{dt}=-S_n\cdot\frac{2a-x}{2}+N$$

Gdy podstawimy tu zamiast S_n odpowiednią wartość z $(3.)$ to będzie:

$$N=\frac{Mg.(2a-x)^2x.\cos\vartheta}{16a^2}$$

Zakładając $\frac{dN}{dx}=0$, znajdziemy, że N osiąga maksymum dla $x=\frac{2a}{3}$. Tak więc największa para zginająca działa w przekroju, odległym od O o trzecią część długości sztaby. Tutaj też prawdopodobnie sztaba się złamie. Moment zginający jest największy, gdy $\vartheta=0$, czyli gdy sztaba zajmuje jeszcze położenie poziome. Wówczas w owym przekroju niebezpiecznym $N=\frac{2}{27}Mga$, a $S_t=S_n=0$

2. Sztywna obręcz kołowa, przecięta w punkcie A toczy się na chropowatej płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć położenie średnicy AB, w którem moment zginający w przekroju B obręczy jest największy.

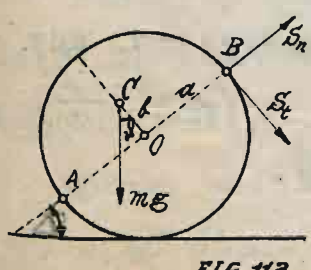

FIG. 113

Przypuśćmy, że średnica AB w rozważanej chwili tworzy z poziomem kąt ϑ i oznaczmy środek ciężkości górnego półkola, opartego na AB, przez C, a środek obręczy przez O.

Szybkość kątowa obręczy jest stała, a zatem przyśpieszenie punktu C wynosi $OC.\omega^2$ i ma kierunek CO.

Równania ruchu środka ciężkości C będą więc następujące

$$S_n - mg.\sin\vartheta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$S_t + mg.\cos\vartheta = mb\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gdzie $b = OC$, a m oznacza masę półobręczy.

Moment ilości ruchu /wektor H / półkola AB względem C nie przybiera żadnych przyrostów, a zatem suma momentów sił S_n i S_t względem C wraz z momentem N jest zerem; stąd

$$S_t.a - S_n.b + N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Podstawiając tu zamiast S_t i S_n ich wartości z (1) i (2) otrzymamy

$$N = mg.\sin\vartheta.b - m(b\omega^2 - g.\cos\vartheta)a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[Można także wyznaczyć N bezpośrednio. Wypadkową sił S_n, S_t, mg oraz pary N jest $mb\omega^2$; zatem moment ostatniej siły względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił S_n. S_t. mg wraz z momentem N. Biorąc momenty względem B, nie wprowadzimy sił S_n i S_t.]

Moment zginający w B jest największy, gdy $\frac{dN}{d\vartheta} = 0$. Różniczkując, otrzymamy $tg\,\vartheta = -\frac{b}{a}$, a ponieważ $b = \frac{2a}{\pi}$ więc $tg\,\vartheta = \frac{2}{\pi}$.

3. Końce dwóch drutów, o jednakowych długościach i masach są przytwierdzone do osi w punktach A i B. Jeden drut ma kształt półkola, a drugi ćwiartki okręgu i obydwie te krzywe są położone w płaszczyznach, prostopadłych do osi AB, która obraca się wraz z drutami z szybkością kątową ω. Wyznaczyć stosunek momentów gnących, które występują w końcu A i B w chwili gwałtownego zatrzymania układu.

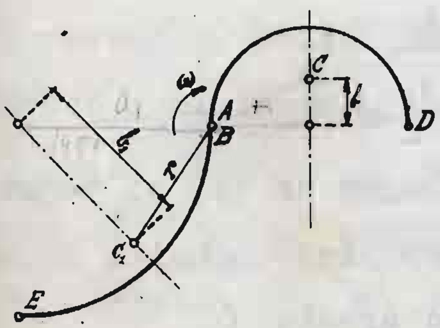

FIG. 111.

W A wystąpią siły chwilowe S_t i S_n oraz para chwilowa o momencie N. Siły zniweczą wektor G drutu a para wektor H; z tego wynika, że miara momentu N jest wektor H i szukany stosunek jest równy stosunkowi momentów ilości ruchu.

Wektor H drutu AD względem A jest równy sumie mom ilości ruchu drutu względem środka ciężkości C i momentu masy drutu, skoncentrowanej w C względem A.

Pierwszy z tych składników wynosi $m(a^2-b^2)\omega$, gdzie m oznacza masę drutu, a jego promień i b odległość punktu C od środka półkola.

Drugi składnik jest równy $m(a^2+b^2)\omega$ a więc

$$H = m(a^2-b^2)\omega + m\omega(a^2+b^2) = 2ma^2\omega$$

$Mva = H$ $\quad v = a.\omega.$

Podobnie dla drugiego drutu będzie:

$H_1 = m(a_1^2 - b_1^2)\omega + m r^2 \omega$, gdzie a_1 i b_1 mają znaczenia analogiczne do a i b, a r = odległości środka ciężkości drutu (C_1) od punktu B

Uwzględniając związki:

$r^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 . \cos 45°$, $a_1 = 2a$, oraz $b_1 = \frac{a_1 \sin 45°}{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

znajdziemy że

$$\frac{H}{H_1} = \frac{\pi}{4(\pi-2)} \backsimeq \frac{11}{16} .$$

ROZDZIAŁ VII.

RUCH KULISTY.

79. Ruch bez udziału sił. Dajmy na to, że punkt O ciała sztywnego jest osadzony nieruchomo, a zatem może ono mieć ruch kulisty około środka O

Przypuśćmy, że początkowo ciało pozostawało w spokoju, a następnie zostało uderzone przez ciało inne. Uderzenie to wytworzy moment ilości ruchu H względem punktu O , prostopadłej do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez linię działania siły chwilowej. Jeżeli w dalszym ciągu na ciało żadne siły nie działają, oprócz reakcyi w O , to wektor H zachowa stałą wielkość i kierunek, gdyż moment owej reakcyi względem O jest zerem, a więc nie wytwarza ona żadnych przyrostów wektora H.

Przytem reakcya ta oczywiście nie pracuje a za-