ROZDZIAŁ VIII.

SIŁY CHWILOWE.

94. Odkształcalność ciał. Już we wstępie do statyki była mowa o tem, że ciała odkształcają się pod działaniem sił, i że ciało sztywne jest abstrakcyą, do której niektóre ciała tylko mniej więcej się zbliżają. Że odkształcalność jest ogólną właściwością ciał, tego dowodzą badania doświadczalne; można to również uzasadnić, przynajmniej do pewnego stopnia, przy pomocy rozumowania, które przytoczyliśmy już w par. 15 cz.I, a obecnie powtórzymy.

Niech będzie prosta sztaba AB, zrobiona z ciała które zwykle uważamy za sztywne, np. z żelaza. Przypuśćmy, że leży ona na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Przeprowadźmy w wyobraźni przekrój C, dzielący sztabę na części AC i CB. Możemy uważać te części za odrębne ciała, które mogą wywierać jedna na drugą siły. Obecnie część CB jest w równowadze, a ponieważ ciężar jej równoważy się z reakcyą płaszczyzny wnioskujemy przeto, że część AC nie wywiera na nią żadnej siły.

Przyłóżmy teraz do końca A siłę P, działającą w kierunku BA. Pod działaniem jej sztaba zacznie się przesuwać z odpowiedniem przyśpieszeniem. Skoro część CB posiada obecnie przyśpieszenia, możemy więc uważać, że część AC wywiera na nią pewną siłę. Wyciągamy stąd wniosek, że w AC zaszła jakaś zmiana w chwili, gdy zaczęła działać siła P, i intuicyjnie czujemy, że zmiana ta mogła jedynie polegać na pewnem odkształceniu, a mianowicie na wydłużeniu.

Jeżeli tak jest, to rozciągalność stanowi zasadniczą mechaniczną właściwość ciała; bez niej ciała nie mogłyby przenosić działania sił z jednej części na inne, i cały świat zjawisk mechanicznych wyglądałby zupełnie inaczej, niż obecnie.

W dynamice musimy przyjmować przenoszenie sił nie tylko dlatego, że siła przyłożona do jednego elementu, wywołuje ruch całego ciała, ale i dlatego, że w ruchu obrotowym różne punkty ciała posiadają szybkości różne, a wówczas, jak widzieliśmy w par. 77 występują naprężenia, innemi słowy jedne części wywierają siły na inne.

Nawija się przeto pytanie, czy już w samych podstawach dynamiki ciał sztywnych nie tkwi sprzeczność polegająca na tem, że jednocześnie przypisujemy ciałom takim zdolność przenoszenia sił i sztywność czyli nieodkształcalność. Ażeby na to pytanie odpowiedzieć potrzeba szczegółowiej rozważyć pojęcie ciała sztywnego.

Według definicyi w ciele sztywnem odległości pomiędzy punktami lub pomiędzy elementami nie ulegają zmianom. Stąd wynikają dwie następujące właściwości;

charakteryzujące ciało sztywne pod względem dynamicznym:

(1) szkielet dynamiczny /t.j. momenty bezwładności względem osi głównych/ pod działaniem sił nie ulega zmianom,

(2) siły wewnętrzne nie pracują.

Zobaczymy, o ile właściwości te dadzą się pogodzić z odkształcalnością. Naturalnie skoro wszystkie ciała się odkształcają pod działaniem sił, to właściwości pierwszej żadne z nich w całej pełni nie posiada, ale są ciała, które przy bardzo drobnem, prawie niedostrzegalnem, odkształceniu są w stanie przenosić bardzo wielkie siły. Możemy przeto uważać, że ciała takie pomimo odkształcalności posiadają pierwszą właściwość w przybliżeniu, jeżeli tylko siły nie przekraczają pewnej granicy.

Drugą właściwość nawet takie ciała, jak surowiec stal, granit i t.d. zachowują tylko w pewnych warunkach, a przedewszystkiem wtedy, gdy ruch jest postępowy, i działające na nie siły nie ulegają zmianom. Gdy dany układ sił zaczął działać na ciało, to w pierwszej chwili nastąpiło pewne odkształcenie, i wówczas siły wewnętrzne wykonały pewną pracę. Dalej jednak już ciało się nie odkształca, zachowuje się, jak sztywne w ścisłem tego słowa znaczeniu, i siły wewnętrzne nie pracują.

Jeżeli ciało jest słabo odkształcalne, i siły, działające na nie zmieniają się niezbyt gwałtownie, to praca, wykonana w pewnym czasie przez siły wewnętrzne jakkolwiek wogóle różna od zera, może być bardzo mała w stosunku do pracy sił zewnętrznych w tymże czasie, i wówczas możemy uważać, że ciało posiada drugą właściwość w przybliżeniu.

Przypuśćmy teraz, że ciało uległo działaniu siły chwilowej, t.j. uderzeniu lub szarpnięciu. Siła taka jest bardzo wielka w porównaniu z siłami zwykłemi i zmienia się bardzo gwałtownie. Z tego wynika, że i odkształcenie jest w tym razie daleko większe, niż podczas działania sił zwykłych. Swoją drogą, jeżeli ciało należy do mało odkształcalnych i siła chwilowa nie była tak wielka, aby wywołać skruszenie lub rozerwanie, to jeszcze i teraz możemy przyjmować z dużem przybliżeniem, że ciało zachowało pierwszą właściwość sztywności, t.j. że jego szkielet dynamiczny nie uległ wyraźnym zmianom.

Natomiast nie mamy prawa przypuszczać, że podczas uderzenia zachowała się i druga właściwość ciała sztywnego, t.j. że siły wewnętrzne nie pracowały. Wprawdzie odległości między elementami ciała zmieniły się w wymienionych warunkach bardzo mało, ale siły działające pomiędzy tymi elementami, czyli siły wewnętrzne były bardzo wielkie, a zatem suma ich prac, wykonanych podczas odkształcenia mogła być duża. Widzieliśmy też poprzednio, że pominięcie pracy sił wewnętrznych tak zw. nici nierozciągalnej prowadzi do zupełnie błędnego wyniku. Streszczając wywody powyższe powiemy, że niektóre ciała można uważać w przybliżeniu za sztywne w pełnem znaczeniu tego słowa t.j posiadające obydwie wyżej wymienione właściwości, tylko w tym razie, gdy mamy do czynienia z siłami zwykłemi. Jeżeli natomiast wchodzą w grę siły chwilowe, to przymiotnik sztywny oznacza obecność właściwości pierwszej. t. j. siły nie prącej

95. Uderzenie proste centralne. Dajmy na to, że pomiędzy dwoma ciałami nastąpiło uderzenie, i że powierzchnie ich zetknęły się w pierwszej chwili w jednym punkcie, a mianowicie, że weszły w zetknięcie punkt A_1 jednego ciała i punkt A_2 drugiego. Wspólną normalną do obydwóch powierzchni w tym punkcie nazwiemy linią uderzenia. Jest rzeczą oczywistą, że szybkość punktu A_1 względem A_2 jest równa i odwrotna do szybkości punktu A_2 względem A_1. Jeżeli w chwili zetknięcia się powierzchni te szybkości względne leżały na linii uderzenia, to uderzenie nazywamy prostem, w razie przeciwnym ukośnem. Gdy uderzenie jest proste, to oczywiście siły chwilowe działają na linii uderzenia. Jeżeli linia uderzenia przechodzi przez środek ciężkości ciała, to mówimy, że dla tego ciała uderzenie jest centralne, w razie przeciwnym uderzenie nazywa się ekscentrycznem.

Będziemy rozważali ten przypadek szczególny, gdy uderzenie dla obydwóch ciał jest proste i centralne; prócz tego założymy, że ruchy obydwóch ciał były przed uderzeniem postępowe. Siły chwilowe przechodzą przez środki ciężkości, nie wytworzą więc momentów ilości ruchu względem tych punktów, a zatem i po uderzeniu obydwa ruchy będą postępowe.

Najprościej będzie wyobrażać sobie, że ciała są kulami, jakkolwiek rozważania następne będą miały znaczenie ogólne.

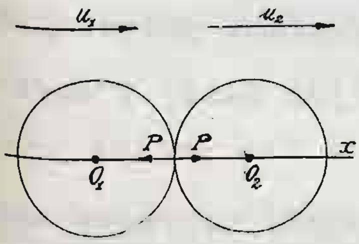

FIG. 131.

Mamy więc dwie kule, których środki O_1, O_2 biegły na linji uderzenia x z szybkościami u_1, u_2; naturalnie pierwsza z nich jest większa. Oznaczmy jeszcze masy kul przez m_1 i m_2.

Zjawisko, zwane uderzeniem ma przebieg bardzo szybki, musimy jednak uważać, że czas trwania jego jest skończony i podzielimy ten czas na dwa okresy. W ciągu pierwszego okresu ciała odkształcają się coraz bardziej, dzięki czemu środki O_1 i O_2 zbliżają się do siebie. Na ciała działają siły równe i odwrotne na prostej x; oznaczymy każdą z nich literą P. Siły te są zmienne, a mianowicie wzrastają bardzo gwałtownie w miarę tego, jak postępuje odkształcenie. Pod ich wpływem zmniejsza się szybkość kuli O_1, a wzrasta szybkość kuli O_2. Musi zatem nadejść chwila taka, gdy szybkości te się wyrównają. Mówimy, że wówczas kończy się okres pierwszy, a rozpoczyna drugi.

Tak więc w końcu pierwszego okresu odkształcenie jest największe i szybkości ciał są równe. Oznaczmy wspólną szybkość przez W. Ponieważ ilość ruchu układu złożonego z obydwóch kul w kierunku osi x nie ulega zmianie, przeto

$$W = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (1.)$$

(G)

W pewnych razach z końcem pierwszego okresu kończy się i całe zjawisko. Bywa to przedewszystkiem wtedy, gdy podczas uderzenia wytwarza się pomiędzy ciałami połączenie, skutkiem czego muszą one poruszać się już dalej z szybkością wspólną.

Mamy np. taki przypadek, gdy łańcuch, tworzący stos na stole, prostuje się pod działaniem siły, przyłożonej do końca. Co moment zachodzi tu uderzenie pomiędzy ostatniem ogniwem, będącem już w ruchu, a pierwszem ogniwem, pozostającem jeszcze w spokoju; dalej ogniwa te poruszają się z jednakową szybkością.

W dalszym ciągu poznamy inny ważny przypadek, w którym również istnieje tylko pierwszy okres uderzenia, wogóle jednak, jeżeli ciała są swobodne, to po pierwszym okresie następuje drugi. Ciała usiłują powrócić do poprzednich kształtów, a więc się rozprężają. Siły P działają w dalszym ciągu, zmniejszając się gwałtownie; pod ich działaniem szybkość kuli Q maleje dalej, a szybkość

Q_2 wzrasta. Ostatecznie powierzchnie ciał muszą się rozejść, i na tem kończy się drugi okres, a zarazem całe zjawisko.

Nie należy uważać, że odkształcenia, które powstały w ciągu pierwszego okresu, zniknęły całkowicie w ciągu drugiego. Przedewszystkiem po uderzeniu mogą pozostać pewne odkształcenia trwałe, powtóre jeżeli nawet ciała powracają całkowicie do poprzednich kształtów, to w chwili rozejścia się powierzchni wyrównanie mogło nie być jeszcze skończone, tak że w końcu drugiego okresu jeszcze pewne odkształcenia istnieją.

Niechaj v_1 i v_2 oznaczają szybkość kul w końcu drugiego okresu lub zaraz po uderzeniu. Ponieważ ilość ruchu układu w kierunku osi x i teraz pozostaje bez zmiany, przeto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (G) \qquad (2)$$

Jestto jedyny związek, wynikający z zasad dynamiki, bo nie mamy prawa zakładać, że zachowała się siła żywa układu. Drugiego związku może dostarczyć tylko doświadczenie.

Wyniki odnośnych doświadczeń streszczają się w tak zw. regule Newtona, która głosi, że stosunek szybkości względnych ciał po uderzeniu i przed uderzeniem jest dla dwóch danych materyałów wielkością stałą, niezależną, ani od kształtu ciał, ani od tych szybkości. Regułę tę wyrazimy wzorem

$$v_1 - v_2 = -\varepsilon (u_1 - u_2) \qquad (3)$$

gdzie ε oznacza ów stały stosunek, czyli tak zwany współczynnik restytucyi; jest to zawsze ułamek właściwy dodatni, tak np. jeżeli obydwa ciała są ze szkła, to $\varepsilon = 0,94$, dla kości słoniowej $\varepsilon = 0,81$, dla żelaza lanego $0,66$, dla ołowiu $0,2$, i t.d.

Znak minus po prawej stronie wskazuje, że szybkości względne przed uderzeniem i po uderzeniu mają kierunki odwrotne, a mianowicie przed uderzeniem ciała się zbliżają, a po uderzeniu oddalają.

Z równań (2.) i (3.) wypada, że

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \varepsilon m_2 (u_2 - u_1)}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \varepsilon m_1 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . (4.)$$

Podczas uderzenia każde z ciał otrzymuje impuls, wytwarzający odpowiedni przyrost wektora G. Impulsy obydwóch ciał są równe i odwrotne; każdy z nich co do wielkości wynosi $\int P\,dt$, gdzie całkowanie rozciąga się na obydwa okresy. Dla pierwszego ciała całka ta jest równa $m_1 (v_1 - u_1)$, a po wstawieniu wartości v_1, otrzymamy

$$\frac{m_1 . m_2 (u_1 - u_2)(1 + \varepsilon)}{m_1 + m_2}$$

Będzie może nie od rzeczy powtórzyć tu uwagę, uczynioną już poprzednio, a mianowicie, że siły zwykle działające na ciało podczas uderzenia nie wywierają wyraźnego wpływu na przebieg zjawiska, a zatem wzory powyższe są ważne bez względu na te siły.

$v = gt$

96. Przykład. Ciało spada na płaszczyznę poziomą z wysokości h ; po jakim czasie ruch ustanie całkowicie? Współczynnik restytucyi wynosi ε.

Przypuśćmy, że ciało dochodzi do płaszczyzny z szybkością $= v$, że więc czas spadania wynosi $\frac{v}{g}$. $v = gt$

Ciało odbije się od tej płaszczyzny z szybkością, skierowaną w górę i równą εv i będzie się poruszało w tym kierunku $\frac{\varepsilon v}{g}$ sek., poczem zacznie znowu spadać. Po upływie następnych $\frac{\varepsilon v}{g}$ sek. zajdzie ponowne uderzenie. Tak więc czas pomiędzy temi dwoma uderzeniami wynosi $\frac{2\varepsilon v}{g}$. Łatwo znajdziemy, że okres pomiędzy drugiem a trzeciem uderzeniem trwa $\frac{2\varepsilon^2 v}{g}$, pomiędzy trzeciem a czwartem $\frac{2\varepsilon^3 v}{g}$, i t.d.

Z tego wynika, że ruch ustanie po czasie

$$T = \frac{v}{g} + \frac{2\varepsilon v}{g} + \frac{2\varepsilon^2 v}{g} + \ldots\ldots$$

albo

$$T = \frac{v}{g}\left[1 + 2\varepsilon\left(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots\ldots\right)\right]$$

Suma postępu, zawartego w małym nawiasie jest równa $\frac{1}{1-\varepsilon}$, a więc

$$T = \frac{v}{g} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Ponieważ, wreszcie, $v = \sqrt{2gh}$, zatem $T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

97. Przypadki szczególne. Niektóre ciała po odkształceniu przejawiają bardzo słabą tendencyę do powrotu do formy pierwotnej; należą do nich ołów, żelazo miękkie, a jeszcze w wyższym stopniu wosk, glina wilgotna i t.d. Ciała takie nazywamy plastycznemi. Dla ciał pla-

stycznych współczynnik restytucyi jest bardzo mały, innemi słowy w drugim okresie uderzenia impulsy sił chwilowych są bez porównania słabsze, niż w pierwszym, i szybkość względna po uderzeniu stanowi drobny ułamek takiejże szybkości z przed uderzenia.

Jeżeli współczynnik restytucyi jest zerem, to uderzenie nazywamy doskonale plastycznem; jest to przypadek idealny, do którego mniej lub więcej zbliżają się uderzenia ciał wyżej wpomnianych. W uderzeniu plastycznem drugi okres nie istnieje wcale, i po uderzeniu w przypadku, który rozważaliśmy w par. 94 obydwa ciała poruszają się ze wspólną szybkością W . Widzieliśmy, że

$$W = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

Otrzymamy to samo, zakładając w (4.) par. 95 $\varepsilon = 0$.

Są inne ciała, które znowu po odkształceniu bardzo energicznie dążą do odzyskania postaci pierwotnej. Takiemi są np. szkło, ebonit, kość słoniowa i t.d. Dla nich współczynnik restytucyi jest blizki jedności.

W przypadku idealnym, gdy współczynnik ten jest równy jedności, mówimy, że uderzenie jest doskonale sprężyste. W tym razie drugi okres, ma ten sam przebieg co i pierwszy, lecz odbywa się w odwrotnym porządku, a szybkości względne przed i po uderzeniu są równe i odwrotnie.

Zakładając w (4.) par. 94 $\varepsilon = 1$, otrzymamy dla uderzenia doskonale sprężystego

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad v_2 = \frac{(m_2 - m_1)u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad \ldots (1)$$

Z wzorów tych wynika, że jeżeli $m_1 = m_2$, to $v_1 = u_2$ i $v_2 = u_1$; znaczy to, że kule zamieniają się na szybkości. Jeżeli np. kula Q_2 była nieruchoma, to skutek uderzenia jest taki, że Q_1 się zatrzymuje, a Q_2 odskakuje z taką szybkością jaką przed uderzeniem miała kula Q_1. Ten wynik teoretyczny daje się łatwo sprawdzić doświadczalnie.

Warto wspomnieć jeszcze o innym przypadku szczególnym, gdy jedno z ciał, np. Q_2 posiada bardzo wielką masę i jest nieruchome, gdy jest to np. ściana, związana z budynkiem i gruntem. Wzory (1) napiszemy w postaci takiej

$$v_1 = \frac{u_1\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) + 2u_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad ; \quad v_2 = \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)u_2 + 2\frac{m_1}{m_2}u_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Ponieważ m_2 jest bardzo wielkie w porównaniu z m_1, możemy przeto założyć $\frac{m_1}{m_2} = 0$, prócz tego $u_2 = 0$. Wypadnie $v_1 = -u_1$ i $v_2 = 0$. Znaczy to, że ciało Q_1 odskakuje z szybkością równą i odwrotną do szybkości początkowej.

98. Przykład. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej kładziemy trzy kule doskonale sprężyste w linii prostej. Udzielamy następnie jednej ze skrajnych szybkości tak, aby uderzyła centralnie środkową, a środkowa uderzy drugą skrajną. Masy skrajnych kul wynoszą odpowiednio m_1

u_1 – [illegible] przed uderzeniem u_2 – [illegible] = 0.

m_2 : jaka powinna być masa środkowej, aby druga skrajna otrzymała szybkość największą.

Oznaczmy szybkość kuli m_1 przed uderzeniem przez u_1 szybkość kuli środkowej po uderzeniu przez v, masę nieznaną przez m i szybkość kuli m_2 po uderzeniu przez v_2.

Z wzorów (1) par. 97 otrzymamy dla ε=1.

$$v = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m} \qquad v_2 = \frac{2mv}{m + m_2}$$

a więc

$$v_2 = \frac{2m_1}{m + m_2} \cdot \frac{2m u_1}{m_1 + m} = \frac{4m_1 m u_1}{(m + m_2)(m_1 + m)}$$

v_2 osiąga maksymum dla tych samych wartości m, co i funkcya

$$x = \frac{m}{m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1 m_2}$$

Znajdziemy zwykłym sposobem, że zachodzi to dla $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

29. Strata siły żywej. Podczas pierwszego okresu uderzenia cząsteczki ciał się zbliżają do siebie, siły wewnętrzne wykonywują pracę ujemną, i siła żywa układu się zmniejsza; podczas drugiego okresu ciała się rozprężają, siły wewnętrzne pracują dodatnio i siła żywa wzrasta. Ale ten zysk siły żywej w drugim okresie jest wogóle mniejszy od straty w pierwszym, i koniec końców siła żywa podczas całego uderzenia się zmniejsza. Naturalnie nie ma tu mowy o znikaniu siły żywej, przekształca się ona jedynie w inne postaci energii. Z punktu widzenia energetycznego przebieg zjawiska wygląda w ogólnych zarysach jak następuje.

Odkształcenia, których doznają ciała w pierwszym okresie dadzą się podzielić na dwie części; pierwszej części ciała pozbędą się w drugim okresie lub później, druga część pozostaje na trwałe. Siła żywa, zużyta na część pierwszą przekształca się na energię potencjalną, jak w ściskanej sprężynie, siła żywa zużyta na część drugą, przechodzi w ciepło. W drugim okresie energia potencjalna przechodzi z powrotem w siłę żywą. Zwykle jednak zetknięcie pomiędzy ciałami zostaje, zanim to przekształcenie powrotne dobiegło do kresu. W takim razie pozostała energia potencjalna przekształca się w inny rodzaj siły żywej, a mianowicie w energię ruchu drgającego. Ostatecznie przechodzi ona częściowo w energię fal dźwiękowych w powietrzu, a częściowo w ciepło.

Niechaj T oznacza siłę żywą układu przed uderzeniem, R siłę żywą pozostałą po uderzeniu, a S stratę. Oczywiście

$$T=\frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{2} \quad \text{i} \quad R=\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2}$$

a zatem

$$S=T-R=\frac{m_1(u_1^2-v_1^2)+m_2(u_2^2-v_2^2)}{2}$$

Ostatnie wyrażenie daje się przekształcić w sposób następujący:

$$S=\frac{m_1(u_1+v_1)(u_1-v_1)+m_2(u_2+v_2)(u_2-v_2)}{2}$$

Lecz z (2) w par. 95 wynika, że $m_2(u_2-v_2)=m_1(u_1-v_1)$ wstawiając to otrzymamy:

$$S = \frac{m_1(u_1 - v_1)(u_1 - u_2 + v_1 - v_2)}{2}$$

Wprowadzając zamiast $v_1 - v_2$ z $(3.)$ we wzmiankowanym paragrafie $-\varepsilon(u_1 - u_2)$, a zamiast v_1 jego wartość z (4) otrzymamy ostatecznie

$$S = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 (1 - \varepsilon^2)}{2(m_1 + m_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Reszta R jest równa $T - S$, czyli

$$R = \frac{(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2)(m_1 + m_2) - m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 + m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 \varepsilon^2}{2(m_1 + m_2)}$$

ostatecznie

$$R = \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2 + m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2 \varepsilon^2}{2(m_1 + m_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

W przypadku uderzenia doskonale plastycznego, gdy $\varepsilon = 0$

$$S = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad ; \quad R = \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (3.)$$

W przypadku uderzenia doskonale sprężystego $S = 0$ i $R = T$ w tym razie strata siły żywej w pierwszym okresie całkowicie wyrównywa się w okresie drugim.

<u>100. Przykłady.</u> Powyższe rozważania mają często zastosowania praktyczne, z których dwa tutaj przytoczymy.

1. Przypuśćmy, że żelaznym młotkiem wbijamy gwóźdź w ścianę. Żelazo młotka i gwoździa jest miękkie, a więc uderzenie może być w przybliżeniu uważane za plastyczne.

Po uderzeniu młotek i gwóźdź zachowają siłę żywą i dzięki temu gwóźdź zagłębi się w ścianę. Chodzi o to, aby to zagłębienie było jaknajwiększe; będzie ono takiem wtedy, gdy reszta siły żywej R będzie jaknajwiększa, więc innemi słowy, gdy stosunek $\frac{R}{T}$, zwany współczynnikiem użytecznego skutku będzie największy. Z wzorów par.99 wypadnie wprost, że ów skutek użyteczny wynosi

$$\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

gdzie m_1 oznacza masę młotka, m_2 - masę gwoździa. Widzimy, że wartość η jest tem bliższa jedności, im większa jest masa młotka.

2. Przy kuciu żelaza mamy inne zadanie; chodzi mianowicie o to, aby odkształcenie materyału było jaknajwiększe, a więc aby $\eta = \frac{S}{T}$ miało wartość możliwie wielką. Otrzymamy, jak poprzednio, że

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

gdzie m_2 oznacza masę przedmiotu kutego, a m_1 - masę młotka. Widzimy, że aby osiągnąć pożądany skutek, trzeba możliwie zmniejszyć m_1 albo możliwie powiększyć m_2. Lecz masy młotka nie można zmniejszać po za pewną normę bo wprawdzie η byłoby wtedy duże, ale zato T miałoby wartość nieznaczną. Wobec tego należy powiększyć m_2. Robi się to tak, że kładzie się przedmiot na kowadle, które posiada stosunkowo wielką masę; w tym razie pod m_2 należy rozumieć sumę mas kowadła i przedmiotu kutego, które można uważać jako całość.

<u>IOI. Uderzenie ukośne i ekscentryczne.</u> Dajmy na to, że pomiędzy dwoma ciałami swobodnemi, których powierzchnie są zupełnie gładkie nastąpiło uderzenie jakiekol-

wiek. Ciała te nie mogą wywierać jedno na drugie reakcyi stycznych, czyli sił tarcia, a zatem siły chwilowe działają w kierunku wspólnej normalnej.

Przypuśćmy, że punkt A_1 pierwszego ciała w samym początku uderzenia wchodzi w zetknięcia z punktem A_2 drugiego. Rozłóżmy szybkość każdego z tych punktów przed uderzeniem na dwie składowe, a mianowicie w kierunku wspólnej normalnej oraz w kierunku odpowiedniej stycznej do powierzchni ciał. Otóż składowe normalne podlegają regule Newtona, a zatem stosunek szybkości względnych punktów A_1 i A_2 po uderzeniu i przed uderzeniem w kierunku wspólnej normalnej jest równy $-\varepsilon$, gdzie ε oznacza współczynnik restytucyi.

Wyjaśni się to w przykładzie następującym.

Kula, której ruch był postępowy, uderzyła w ścianę. Przed uderzeniem szybkość jej u tworzyła ze wspólną normalną kąt α, a współczynnik restytucyi jest równy ε. Pragniemy wyznaczyć ruch kuli po uderzeniu.

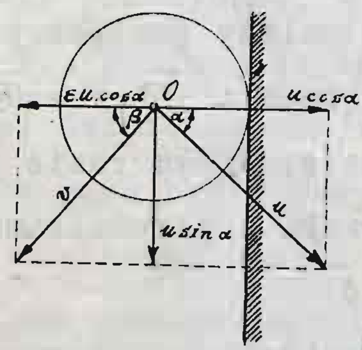

FIG. 132.

Uderzenie jest dla kuli centralne, a zatem siła chwilowa nie wytworzy momentu ilości ruchu względem środka i ruch po uderzeniu będzie również postępowy. Rozkładamy szybkość u na składowe normalną $u\cos\alpha$ i styczną $u\sin\alpha$. Pierwsza podczas uderzenia przekształca się na $\varepsilon.u.\cos\alpha$ w kierunku odwrotnym, a druga pozostanie bez zmiany. Tak więc szybkość po uderzeniu będzie $u\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$. Niech β oznacza kąt który ta szybkość tworzy z normalną, to $tg\beta = \frac{tg\alpha}{\varepsilon}$ Jeżeli uderzenie jest sprężyste, to szybkość co do wielkości pozostaje bez zmiany, i $\beta=\alpha$. Możemy powiedzieć, że w tym razie kąt odbicia jest równy kątowi padania.

Jeżeli uderzenie jest ekscentryczne, to wytworzy ono przyrosty zarówno wektora G, jak i wektora H.

Jeżeli powierzchnie ciał nie są gładkie, to siły chwilowe tworzą ze wspólną normalną kąt różny od zera; innemi słowy na każde z ciał oprócz chwilowej reakcyi normalnej działa jeszcze chwilowa siła tarcia. Oznaczmy reakcyę normalną działającą na ciało przez N. W kierunku wspólnej normalnej ciało otrzymuje impuls $\int N dt$. Jeżeli tarcie jest całkowicie rozwinięte, to siła tarcia wynosi $f.N$, gdzie f oznacza współczynnik tarcia, i w kierunku stycznej ciało otrzyma impuls $\int fN dt = f\int N dt$ czyli impuls f razy większy od normalnego. Obydwa te impulsy wytworzą przyrosty wektorów G i H.

102. Przykłady 1. Pomiędzy dwiema gładkiemi kulami Q_1 i Q_2 zachodzi zetknięcie; jedna z nich była przedtem w spoczynku, a szybkość drugiej tworzyła kąt $30°$ z linią środków. Współczynnik restytucyi $=\varepsilon$. Ile razy masa pierwszej powinna być większa od masy drugiej

aby ta ostatnia pobiegła po uderzeniu w kierunku prostopadłym do szybkości poprzedniej? Oznaczmy szukany stosunek mas przez n, a masę kuli drugiej przez m. Oznaczmy dalej szybkość kuli O_1 przed uderzeniem przez u_1, szybkość jej po uderzeniu przez v_1. Szybkość kuli

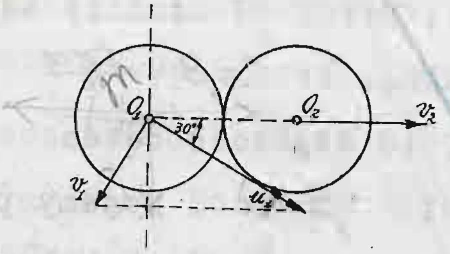

FIG. 133.

$\frac{m_1}{m} = n$

$m_1 = nm$

O_2 po uderzeniu niech będzie równa v_2.

Te trzy szybkości, które wchodzą tu w grę muszą czynić zadość trzem warunkom:

1/ Rzuty szybkości kuli O_1 na kierunek prostopadłej do linii środków muszą być równe. Stąd mamy

kuli gładkiej

$$\frac{u}{2} = \frac{v_1\sqrt{3}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2/ Ilość ruchu układu w kierunku linii środków pozostaje bez zmiany, a więc

$$n m v_2 - \frac{m v_1}{2} = \frac{m u \sqrt{3}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3/ Szybkości względne kul w kierunku linii środków podlegają regule Newtona.

Zatem

$$-\frac{v_1}{2} - v_2 = \varepsilon \frac{u\sqrt{3}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Z równań (1), (2), (3) wypadnie

$$n = \frac{4}{3\varepsilon - 1}$$

Rzecz jest możliwa tylko w tym razie, gdy ε jest większe od $\frac{1}{3}$.

2\. Punkt materyalny o masie m spada na koniec poziomej belki, osadzonej na poziomej osi; oś ta przechodzi przez środek ciężkości belki. Współczynnik restytucyi $= \varepsilon$. Jaka powinna być masa belki, aby punkt materyalny odskoczył? Przypuśćmy, że po uderzeniu belka zacznie się obracać około osi O z szybkością

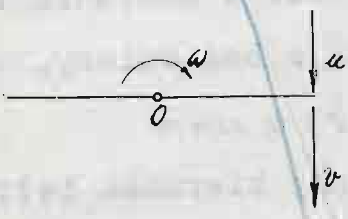

FIG. 134.

kątową ω. Długość belki oznaczymy przez $2a$, szukaną masę przez M, szybkość punktu przed uderzeniem przez u i wreszcie szybkość jego po uderzeniu przez v. Moment ilości ruchu całego układu względem O jest stały; przed uderzeniem wyniósł on $m.u.a$, po niem zaś $M\frac{a^2}{3}\omega + mva$ i więc

$$M\frac{a^2}{3}\omega + mva = mua \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Z reguły Newtona mamy

$$v - a\omega = -\varepsilon u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Z $(1.)$ i $(2.)$ wypada: $v = \frac{(3m - \varepsilon M)u}{M + 3m}$.

Punkt odskoczy, gdy v będzie ujemne, gdy więc będzie

$3m - \varepsilon M < 0$ albo $M > \frac{3m}{\varepsilon}$.

3\. Dwie jednakowe gładkie kule leżą na płaszczyźnie poziomej w zetknięciu. W jakim kierunku należy uderzyć jedną z nich, aby ta po uderzeniu w drugą poszła w kierunku, tworzącym z linią środków kąt α.

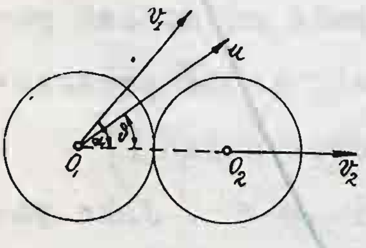

FIG. 135.

Niechaj impuls udzielony pierwszej kuli będzie równy mu, a szybkości kul po uderzeniu niech będą odpowiednio v_1 i v_2. Szybkość pierwszej kuli w kierunku stycznym pozostaje bez zmiany, zatem

Dla cup: bo kule gładkie $f = 0$

$$u \sin\vartheta = v_1 \sin\alpha \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie ϑ oznacza kąt, który szukany kierunek tworzy z linią środków.

Również pozostaje bez zmiany ilość ruchu układu w kierunku linii środków, zatem

$$m v_1 \cos\alpha + m v_2 = m u \cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wreszcie z reguły Newtona wynika, że

$$v_1 \cos\alpha - v_2 = -\varepsilon u \cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Z równań (1), (2) i (3) wypadnie $tg\,\vartheta = \frac{1-\varepsilon}{2}\, tg\,\alpha$.

4. Gładka jednorodna półkula o masie M sunie z szybkością v na płaszczyźnie poziomej, opierając się na niej całą podstawą. W płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek półkuli O i przez v spada punkt materyalny o masie m, mniejszej od M i uderza o półkulę w punkcie A, położonym z przodu tak, że prosta AO tworzy z pionem kąt $= 45°$. Współczynnik restytucyi pomiędzy punktem i półkulą $= \varepsilon$, a pomiędzy półkulą i płaszczyzną $= o$. Z jakiej wysokości powinien spaść punkt, aby półkula się zatrzymała?

Ilość ruchu całego układu w kierunku poziomym nie ulega zmianie, więc

$$m\left(\frac{v_1}{\sqrt{2}}+\frac{u}{\sqrt{2}}\right)=Mv\ .\ .\ .\ (1)$$

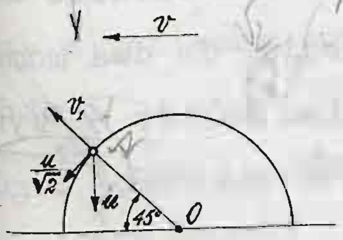

FIG. 136.

gdzie u oznacza szybkość punktu materyalnego przed uderzeniem a v_1 składową jego szybkości po uderzeniu w kierunku promienia. Z reguły Newtona mamy

$$v_1=\varepsilon\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right).\ .\ .\ (2)$$

stąd zaś i z (1) wypada

$$u=\frac{v(2M-m\varepsilon)}{m(1+\varepsilon)}$$

Ponieważ wreszcie $u=\sqrt{2gh}$, gdzie h oznacza szukaną wysokość, więc

$$h=\frac{v^2(2M-m\varepsilon)^2}{2gm^2(1+\varepsilon)^2}\ .$$

5. Sztaba jednorodna spada pionowo bez ruchu obrotowego i uderza jednym końcem w gładką płaszczyznę poziomą. Jaki kąt powinna sztaba tworzyć z poziomem, aby jej szybkość kątowa była po uderzeniu jak największa? Oznaczmy szybkość sztaby przed uderzeniem przez u, jej szybkość postępową po uderzeniu przez v, szybkość kątową około środka ciężkości S przez ω i szukany kąt przez ϑ. W takim razie z reguły Newtona otrzymamy $a\omega\cos\vartheta-v=\varepsilon u\ .\ .\ .\ (1)$

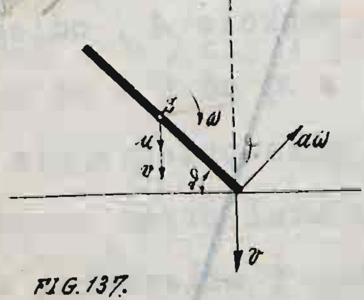

FIG. 137.

Weźmiemy następnie moment ilości ruchu przed uderzeniem i po nim względem dolnego końca sztaby, który chod jest ruchomy, to jednak w bardzo krótkim okresie uderzenia, nie zmienia wyraźnie położenia. Te dwa momenty są równe, a ponieważ przed uderzeniem wektor H wynosił $-m.u.a.\cos\vartheta$, po uderzeniu zaś $-m\frac{a^2}{3}\omega - m.v.a\cos\vartheta$, gdzie m oznacza masę sztaby, więc

$$-m.u.a.\cos\vartheta = -m\frac{a^2}{3}\omega - m.v.a\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

Stąd i z (1.) otrzymamy

$$\omega = \frac{3u.\cos\vartheta(1+\varepsilon)}{a(1+3\cos^2\vartheta)}$$

Funkcja ta osiąga maksymum dla $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, szukany kąt winien być więc równy $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Pocisk niesprężysty wybiegł z punktu O, położonego na chropowatej płaszczyźnie poziomej, z szybkością taką, jaką nabył, spadając z wysokości h. Szybkość ta tworzyła z poziomem kąt α, a współczynnik tarcia $=f$. W jakiej odległości od O pocisk się zatrzyma?

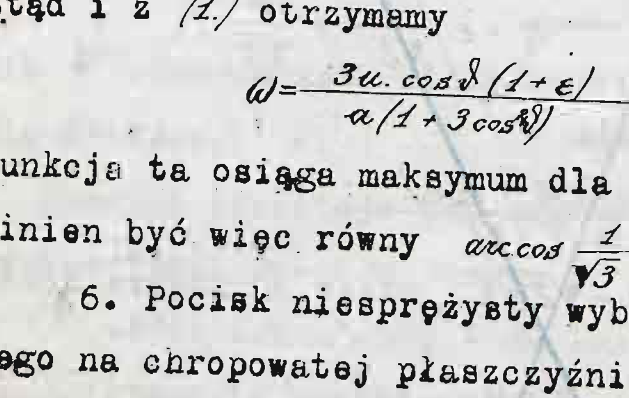

FIG. 138.

Przypuśćmy, że pocisk upadnie na ziemię w punkcie A, odległym o x_1 od O i że następnie przebiegnie jeszcze drogę x_2. Pocisk ten będzie miał przed samym uderzeniem szybkość, równą początkowej i skierowaną w dół według stycznej do toru parabolicznego w punkcie A.

Oznaczmy tę szybkość przez v_0, a kąt, który ona tworzy z poziomem przez α, jak wiadomo z cynematyki, będzie $x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

W chwili uderzenia pocisk otrzymuje w kierunku pionowym impuls $\int N dt$, znoszący składową pionową szybkości, oraz w kierunku poziomym impuls $f\int Ndt = \int Ndt$ zmniejszający odpowiednio składową poziomą.

Tak więc $\int Ndt = m v_0 \sin\alpha$ i zatem szybkość pocisku zaraz po uderzeniu wyniesie $u_0 = v_0 \cos\alpha - f v_0 \sin\alpha$, albo $u_0 = v_0 \cos\alpha - v_0 \sin\alpha$, bo $f = 1$.

W dalszym ruchu na pocisk będzie działała odwrotna do jego szybkości siła tarcia $= mg$, która wywoła przyśpieszenie $= -g$. Z tego wynika, że szybkość ta wyczerpie się gdy pocisk przebędzie drogę

$$x_2 = \frac{u_0^2}{2g} = \frac{v_0^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{2g}.$$

Szukana odległość od O wynosi zatem

$$x_1 + x_2 = \frac{v_0^2}{2g}(1 + \sin 2\alpha)$$

Wzór ten jest słuszny tylko pod warunkiem, że tarcie jest całkowicie rozwinięte, to zaś zachodzi, gdy u_0 jest $> o$, czyli gdy $v_0 \cos\alpha - v_0 \sin\alpha > o$, t.j. $\alpha < 45°$

ROZDZIAŁ IX.

O PODOBIEŃSTWIE W MECHANICE.

103. Podobieństwo geometryczne. Niech będą dwa prostokątne układy współrzędnych; osi ich oznaczymy odpowiednio przez x, y, z i x', y', z', a początki przez