57. Ilość ruchu. Każde ciało, albo układ ciał, możemy uważać za układ punktów materyalnych, a zatem wszystkie twierdzenia, dotyczące wektora G, które poznaliśmy w par. 31 są słuszne ogólnie. Pozostaje jedynie okazać, jak wyznacza się ten wektor.

Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne, poruszające się w jakikolwiek sposób. Obieramy dowolny punkt O za środek redukcji, a zarazem za początek prostokątnego układu współrzędnych x, y, z. Szukany wektor G rozkładamy z góry na 3 składowe G_x, G_y, G_z w kierunkach osi. Oczywiście składowa G_x jest równa sumie ilości ruchu wszystkich elementów ciała w kierunku osi x, czyli

$$G_x = \Sigma m \frac{dx}{dt}$$

Oznaczmy masę ciała przez M, a współrzędne środka ciężkości przez x_0, y_0, z_0. W takim razie $\Sigma mx = Mx_0$. Uwzględniając ten związek przekształcimy powyższe równanie oraz dwa analogiczne na

$$G_x = M\frac{dx_0}{dt} \quad ; \quad G = M\frac{dy_0}{dt} \quad ; \quad G_z = M\frac{dz_0}{dt} \qquad (1.)$$

Tak więc przy wyznaczaniu wektora G możemy uważać, że cała masa ciała, lub układu jest skoncentrowana w środku ciężkości.

58. Przykłady. 1. Wyznaczmy reakcyę, jaką w prz. 2 par. 56 oś wywiera na sztabę. Rozłóżmy tę reakcyę na składowe R_1 i R_2 w kierunku sztaby i w kierunku pro-

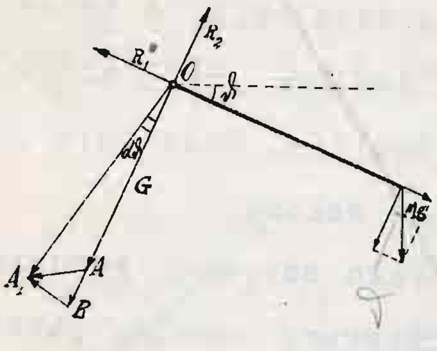


FIG. 74.

stopadłym. Za początek wektora G obierzemy punkt O, w którym sztaba łączy się z osią. Wektor ten jest równoległy do szybkości środka ciężkości, czyli prostopadły do sztaby; przypuśćmy, że wyraża go odcinek OA. W czasie dt sztaba obróci się o kąt $d\vartheta$ i wektor G przybierze wartość OA_1, t.j. otrzyma przyrost elementarny AA_1. Przyrost ten rozkładamy na dwie składowe AB i BA_1 w kierunku G i w kierunku prostopadłym. Pierwsza jest równa dG a druga $Gd\vartheta$. Pierwszą wytworzyła reakcya R_2 i składowa $Mg.\cos\vartheta$ siły ciążenia, drugą reakcya R_1 i $Mg.\sin\vartheta$, a zatem będzie

$$\left.\begin{aligned} dG &= (M.g.\cos\vartheta - R_2)\,dt \\ G\,d\vartheta &= (-M.g.\sin\vartheta + R_1)\,dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Lecz $G = Ma\omega$ i $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, a zatem równania powyższe przekształcą się na

$$\left.\begin{aligned} M.a\frac{d\omega}{dt} &= M.g.\cos\vartheta - R_2 \\ M.a\,\omega^2 &= -M.g.\sin\vartheta + R_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Wprowadzając wartość ω z par. 56 znajdziemy, że

$$R_1 = \frac{5M.g.\sin\vartheta}{2};\ R_2 = \frac{M.g.\cos\vartheta}{4}.$$

Wypada zwrócić uwagę, że równania $(2.)$ wynikają bezpośrednio z zasady ruchu środka ciężkości i wogóle zasada ilości ruchu, o ile dotyczy wektora G różni się od tamtej jedynie pod względem formy.

2. Szklany sześcian o masie M zawiera kulistą próżną przestrzeń o promieniu a i w tej przestrzeni mieści się punkt materyalny o masie m. Sześcian stoi na gładkiej płaszczyźnie poziomej; jaką szybkość początkową v_0 należy nadać przez popchnięcie, aby punkt m obiegł kulę naokoło, pozostając wciąż w zetknięciu ze szkłem.

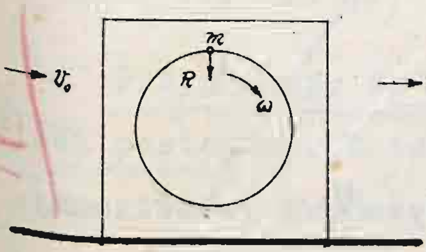


FIG. 75.

Szybkość ta winna być conajmniej taka, aby reakcya kuli na punkt znikła dopiero w wierzchołku.

Zastosujemy zasadę sił żywych. Siła żywa sześcianu wynosi $\frac{Mv^2}{2}$, a siła żywa punktu m, gdy znajduje się on w wierzchołku kuli, jest równa $\frac{m(v+a\omega)^2}{2}$, gdyż składowe unoszenia i względna szybkości tego punktu są odpowiednio $= v$ i $a\omega$, a kierunek ich jest jednakowy. Początkowa siły żywa układu była $= \frac{Mv_0^2}{2}$. Gdy punkt obiegł powierzchnię kuli od najniższego punktu do wierzchołka, to siła ciążenia wykonała pracę $-mg.2a$, zatem

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m(v+a\omega)^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -mg.2a \quad . \; . \; . \; (1)$$

Drugie równanie ułożymy za pomocą zasady ilości ruchu. Gdy punkt będzie w wierzchołku, to ilość ruchu układu wyniesie $Mv + m(v + a\omega)$; początkowa ilość ruchu była $= Mv_0$, więc $Mv + m(v + a\omega) = Mv_0$ . . . . (2)

Wreszcie weźmiemy pod uwagę przyśpieszenie punktu w wierzchołku. Rozłóżmy je na dwie składowe: względną i unoszenia. Lecz składowa druga jest zerem, a pierwsza wynosi $a\omega^2$. Jedyną siłą, która działa na punkt w wierzchołku jest siła ciążenia, a zatem $ma\omega^2 = mg$, skąd : $a\omega^2 = g$ . . . . (3)

Z (2) mamy $v_1 = \dfrac{Mv_0 - ma\omega}{M+m}$. Podstawiamy to w (1) i uwzględniamy (3).

Wypadnie

$$v_0^2 = \frac{a.g(5M+4m)}{M}$$

W przypadku szczególnym, gdy $M = m$, otrzymamy $v_0 = 3\sqrt{a.g}$.

59. Wektor H ciała sztywnego. Bez porównania ważniejszą rolę od wektora G odgrywa w dynamice ciała sztywnego wektor H, czyli moment ilości ruchu. I w tym razie wszystkie twierdzenia, które dowiedliśmy w par. 36, dla układu punktów materyalnych są ważne ogólnie dla ciał sztywnych i niesztywnych pozostaje tylko wskazać sposoby wyznaczania wektora H w różnych przypadkach.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, albo układ ciał.

i jakikolwiek punkt redukcyi O. Pragniemy wyznaczyć moment ilości ruchu względem tego punktu. Obieramy punkt O za początek prostokątnego układu współrzędnych i rozkładamy szukany wektor H na składowe H_x, H_y, H_z w kierunkach osi. Składowe ilości ruchu elementu $m(x, y, z)$ ciała są $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, a zatem moment ilości ruchu tego elementu względem osi z wynosi $m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ — i wypadnie

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ H_y &= \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\ H_z &= \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Przypuśćmy, że ciało jest sztywne i że ruch jest postępowy. W takim razie szybkości wszystkich elementów są jednakowe co do wielkości i kierunku a zatem $H_x = \sum my\frac{dz}{dt} - \sum mz\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}\sum my - \frac{dy}{dt}\sum mz.$

Oznaczmy masę ciała przez M, a współrzędne środka ciężkości przez x_0, y_0, z_0. Możemy napisać $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt}$; $\sum my = My_0$ i t.d., wówczas równania (1) przekształcą się na

$\frac{dy}{dt} = \text{const} = v$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= M\left(y_0\frac{dz_0}{dt} - z_0\frac{dy_0}{dt}\right) \\ H_y &= M\left(z_0\frac{dx_0}{dt} - x_0\frac{dz_0}{dt}\right) \\ H_z &= M\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1 Jeżeli więc ruch jest postępowy, to wektor H

gdy szybkości wszystkich punktów ciała są równe i równoległe względem dowolnego punktu jest taki, jakgdyby cała masa ciała była skoncentrowana w środku ciężkości.

Dajmy na to, że w chwili, dla której wyznaczamy moment ilości ruchu, właśnie środek ciężkości przechodzi przez O. W takim razie $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, a zatem $H_x = H_y = H_z = 0$. Możemy powiedzieć, że w ruchu postępowym wektor H względem środka ciężkości jest zerem.

Rozważymy teraz inny ważny przypadek szczególny. Przypuśćmy, że ruch ciała sztywnego jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową ω około prostej u.

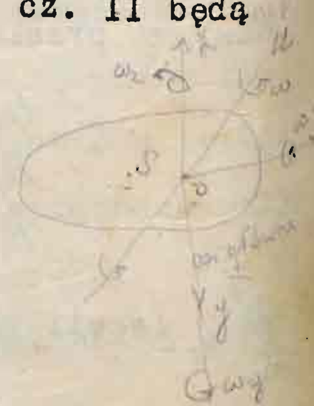
Pragniemy wyznaczyć wektor H względem jakiegoś punktu O, położonego na osi obrotu.

Za osi współrzędnych x, y, z obierzemy te proste na których w chwili danej leżą osi główne punktu O; przypuśćmy, że oś obrotu u tworzy z niemi kąty α, β, γ i rozłóżmy szybkość kątową ω na składowe $\omega_x = \omega \cos\alpha$, $\omega_y = \omega \cos\beta$, $\omega_z = \omega \cos\gamma$. Składowe szybkości elementu $m(x, y, z)$ według par.161 cz. II będą

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega_y . z - \omega_z . y$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \omega_z . x - \omega_x . z$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \omega_x . y - \omega_y . x$$



Wstawiając to w (1), znajdziemy, że

$$H_x = \Sigma m[\omega_x(y^2+z^2) - \omega_y . xy - \omega_z . zx] =$$
$$= \omega_x \Sigma m(y^2+z^2) - \omega_y . \Sigma m xy - \omega_z . \Sigma m . zx .$$

Lecz $\Sigma m(y^2+z^2)$ jest to moment bezwładności względem osi x, a $\Sigma m . x . y$ i Σmzx, jako momenty odśrodkowe względem osi głównych, są zerami; zatem wypadnie

$$H_x = A . \omega_x \quad , \quad H_y = B . \omega_y \quad , \quad H_z = C . \omega_z \quad . \; . \; . \quad (3.),$$

gdzie $A, B, C,$ oznaczają momenty bezwładności względem osi x, y, z, czyli momenty główne punktu O. Mając składowe H_x, H_y, H_z znamy wektor H, co do wielkości i kierunku, a mianowicie $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$

czyli $$H = \omega \sqrt{A^2 . \cos^2\alpha + B^2 . \cos^2\beta + C^2 . \cos^2\gamma}$$

Jeżeli λ, μ, ν oznaczają kąty kierunkowe wektora H, to

$$\cos\lambda = \frac{H_x}{H} = \frac{A . \cos\alpha}{\sqrt{A^2 . \cos^2\alpha + B^2 . \cos^2\beta + C^2 . \cos^2\gamma}}$$

Dla μ i ν otrzymamy wzory analogiczne.

Widzimy, że kąty kierunkowe nie zależą od szybkości kątowej ω, a zatem wektor H względem punktu O leży na prostej, zajmującej w ciele położenie stałe. Gdy zmienia się ω, to wektor ten zmienia się co do wielkości, ale kierunek jego względem ciała pozostaje bez zmiany. Możemy powiedzieć, że wiruje on wraz z ciałem w około prostej u.

Wyznaczymy teraz moment ilości ruchu ciała wzglę-

Wektor H wogóle nie leży na osi u

dem osi obrotu.

Będzie to rzut wektora H na prostą u , albo suma rzutów składowych H_x, H_y, H_z . Wypadnie

$$H_u = H_x \cos\alpha + H_y \cos\beta + H_z \cos\gamma = \omega(A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest to moment bezwładności ciała względem prostej u . Oznaczmy go przez I , napiszemy

$$H_u = I\omega .$$

Można łatwo otrzymać równanie to bezpośrednio. Jeżeli r oznacza odległość elementu m od osi u to szybkość tego elementu $= \omega r$, a moment ilości ruchu $= m\omega r^2$,zatem $H_u = \omega \sum m r^2 = I\omega$.

Zobaczymy, w jakich razach wektor H punktu O leży na osi obrotu. H_x, H_y, H_z — t.j. momenty ilości ruchu względem osi x, y, z są rzutami wektora H na te osi, a zatem w przypadku, o którym mowa $A\omega_x = I\omega\cos\alpha$, czyli $A\omega\cos\alpha = I\omega\cos\alpha$; powinny więc istnieć związki

$$A\cos\alpha = I\cos\alpha, \quad B\cos\beta = I\cos\beta, \quad C\cos\gamma = I\cos\gamma .$$

Równanie to jest możliwe w dwóch przypadkach. Przedewszystkiem wtedy, gdy dwa z kątów kierunkowych np. α i β są proste; w takim razie $I = C$ i prosta u jest osią główną punktu O . Powtóre równania powyższe są spełnione, jeżeli wszystkie trzy momenty główne punktu O są równe. W tym razie, jak wiemy, temuż samemu jest równy moment bezwładności względem u, a więc można znowu tę prostą uważać za oś główną punktu O.

Powiemy wogóle, że wektor H względem punktu O, wziętego na osi obrotu u, leży tylko wtedy na tej osi, gdy O jest punktem głównym prostej U

Jeżeli oś obrotu jest osią główną ciała, to, jak wiemy, jest ona osią główną każdego ze swych punktów; z tego wynika bezpośrednio, że na niej leżą wektory H względem wszystkich jej punktów i że wektory te są równe.

60. Przykłady. 1. Tarcza kołowa o promieniu a i masie M obraca się z szybkością kątową ω około cięciwy OA, którą widać ze środka pod kątem prostym. Wyznaczyć wektor H względem punktu O, w którym oś obrotu przecina obwód.

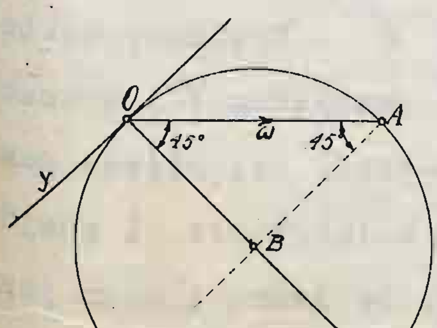


FIG. 76.

Wyznaczmy naprzód osi główne punktu O. Osiami głównemi środka tarczy B są dwie dowolne prostopadłe średnice i prostopadła, wzniesiona do tarczy w B. Obierzemy te średnice tak, aby jedna z nich (x) przechodziła przez O, to będzie to również oś główna punktu O, bo oś taka jest osią główną każdego ze swych punktów /par. 47/. Druga oś główna y punktu O będzie styczna do tarczy, w tym punkcie, wreszcie trzecią (z) będzie prostopadła w O do tarczy.

Rozkładamy ω na składowe w kierunkach tych trzech osi. Składowa w kierunku osi x jest zerem, a każda z dwóch pozostałych jest $= \frac{\omega}{\sqrt{2}}$. Moment bezwładności tarczy /uważanej za cienki cylinder/ względem osi x wynosi $\frac{Ma^2}{4}$ /par. 42, c /, a względem osi $y \ldots = M\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right) = \frac{5}{4} Ma^2$.

Zatem składowe wektora H w kierunkach osi x, y, z są równe $H_x = \frac{Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$, $H_y = \frac{5Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$, $H_z = 0$. Z tego wynika, że wektor H leży w płaszczyźnie tarczy, jest równy $\frac{Ma^2\omega\sqrt{13}}{4}$ i tworzy z osią x kąt $\operatorname{arctg} 5$.

2. Kula o masie M i promieniu a obraca się z szybkością kątową ω około średnicy, a średnica z szybkością 2ω około prostej, która tworzy z nią kąt 60° i przechodzi przez koniec O . Wyznaczy wektor H względem O. Wyznaczymy naprzód osi główne punktu O. Jak w prz. 1 znajdujemy, że jedną z nich jest średnica z kuli, drugą styczna x w punkcie O do kuli, a trzecia (y) jest prostopadła do dwóch pozostałych. Składowe szybkości kątowej ω w kierunkach

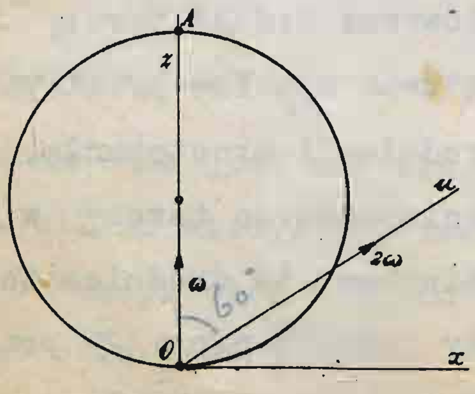


FIG. 77.

osi głównych wynoszą odpowiednio

$$\omega_x = \omega\sqrt{3} \quad , \quad \omega_y = 0 \quad , \quad \omega_z = 2\omega \quad ,$$

a momenty bezwładności kuli względem osi x i z są /par. 42,e/

$$A = \frac{7Ma^2}{5} \qquad C = \frac{2Ma^2}{5}$$

Stąd otrzymamy, rozkładając wektor H na składowe H_x; H_y, H_z:

$$H_x = \frac{7Ma^2\sqrt{3}\,\omega}{5} \quad ; \quad H_y = 0 \quad ; \quad H_z = \frac{4Ma^2\omega}{5}$$

$$H = \frac{Ma^2\omega\sqrt{163}}{5}$$

Widzimy, że wektor H leży w płaszczyźnie xz i tworzy z osią x kąt $\operatorname{arctg}\frac{4}{7\sqrt{3}}$

61. Ciało jakiekolwiek. Dowiedziemy tu pewne twierdzenie, bardzo ważne i zupełnie ogólne. W tym celu przekształcimy równania /1/, które otrzymaliśmy w par. 59 dla jakiegokolwiek ciała i dla dowolnego punktu redukcji.

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała nowe osi współrzędnych ξ, η, ζ odpowiednio równoległe do x, y, z. Dla elementu m będzie

$$x = \xi + x_0 \quad ; \quad y = \eta + y_0 \quad ; \quad z = \zeta + z_0$$

Wstawiamy to w wyżej wspomniane równanie i wykonywamy przekształcenia zupełnie podobne do tych, które opisaliśmy w par. 55. Wypadnie

$$H_x = \sum m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) + M\left(y_0\frac{dz_0}{dt} - z_0\frac{dy_0}{dt}\right)$$

$$H_y = \sum m\left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right) + M\left(z_0\frac{dx_0}{dt} - x_0\frac{dz_0}{dt}\right)$$

$$H_z = \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + M\left(x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt}\right)$$

Prawa strona każdego z tych równań zawiera dwa wyrazy; oznaczmy odpowiednio wyrazy postawione na pierwszem miejscu przez H_x', H_y', H_z', a wyrazy stojące na drugim miejscu, przez H_x'', H_y'', H_z''.

Pierwsze są momentami ilości ruchu względem osi ξ, η, ζ, a drugie momentami ilości ruchu masy skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x, y, z. Będzie zatem

$$H_x = H_x' + H_x'' \quad , \quad H_y = H_y' + H_y'' \quad , \quad H_z = H_z' + H_z''$$

Wogóle moment ilości ruchu ciała względem prostej jest sumą algebraiczną dwóch składników, a mianowicie momentu ciała względem prostej równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości i momentu masy ciała skoncentrowanej w środku ciężkości, względem prostej danej.

Oznaczmy jeszcze przez H' i H'' odpowiednio wypadkowe wektorów H_x', H_y', H_z' i H_x'', H_y'', H_z''. Oczywiście H' jest momentem ilości ruchu ciała względem środka ciężkości, a H'' momentem masy ciała skoncentrowanej w środku ciężkości względem punktu O. Wektor H jest wypadkową momentów H' i H''.

Tak więc moment ilości ruchu ciała względem punktu jest sumą geometryczną dwóch składowych, a mianowicie momentu ciała względem środka ciężkości i momentu masy ciała skoncentrowanej w tym środku, względem punktu danego.

1) Pierwsza z tych składowych jest oczywiście jedna i ta sama dla wszystkich punktów redukcyi, druga zależy od położenia punktu redukcyi. 2) Jeżeli środek ciężkości jest w spokoju, to druga składowa jest zerem, a zatem ciało względem wszystkich punktów posiada jednakowe momenty ilości ruchu zarówno co do wielkości jak i kierunku.

Wypada tu rozważyć pewną kwestję, która przy stosowaniu zasady ilości ruchu może nieraz wywoływać trudności.

3) Wektor H, wzięty względem punktu nieruchomego może się zmieniać jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, działających na ciało. Ale oczywiście może być mowa i o wektorze H względem punktu ruchomego, czy i wówczas twierdzenie powyższe zachowuje moc obowiązującą?

Weźmy wektor H względem ruchomego punktu A, który w czasie dt przeszedł z położenia A_1 do A_2. Składowa H' jest w każdej chwili taka sama dla A_1, jak i dla A_2, a więc w czasie dt mogła ona się zmienić jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, natomiast składowa H'' jest dla A_2 inna, niż dla A_1 a zatem przybrała w czasie dt przyrost już skutkiem tego, że punkt A zmienił położenie, niezależnie od sił zewnętrznych. Z tego wynika, że na pytanie powyższe, należy dać odpowiedź przeczącą.

Wyjątkowe stanowisko pod tym względem zajmuje środek ciężkości ciała. Dla niego składowa H'' jest zawsze zerem, a zatem wektor H względem środka ciężkości zmienia się jedynie pod działaniem sił zewnętrznych zupełnie tak samo, jak dla punktu nieruchomego. Jeżeli na ciało żadne siły zewnętrzne nie działają, albo jeżeli układ ciał jest izolowany, to wektor H względem środka ciężkości nie zmienia się ani co do kierunku, ani co do wielkości.

Takim układem izolowanym jest nasz system planetarny. Siły przyciągania, które wywierają na siebie nawzajem słońce, planety i księżyce są siłami wewnętrznemi. Siły zewnętrzne mogłyby pochodzić jedynie od gwiazd stałych, ale odległości tych ciał od naszego układu są tak olbrzymie, że ich siły przyciągania muszą być nieznaczne i można ich nie brać w rachubę.

Z tego wynikają dwa wnioski: po pierwsze, że ruch środka ciężkości systemu słonecznego jest prostoliniowy i jednostajny, i powtóre, że wektor H względem środka ciężkości jest stały co do wielkości i kierunku. Płaszczyzna, poprowadzona przez środek ciężkości prostopadle do wektora H, nazywa się płaszczyną niezmienną.

Wypada jednak zaznaczyć, że wyżej użyte wyrazy "ruch prostoliniowy i jednostajny" i "stały kierunek" dopiero wtedy miałyby znaczenie ściśle określone, gdyby było wskazane, do jakiego układu odnosimy ruch słońca i planet.

Wszystkie twierdzenia, które poznaliśmy w paragrafie niniejszym, dotyczą w równej mierze ciała sztywnego jak i niesztywnego. Wektor H ciała sztywnego względem dowolnego punktu posiada takie dwie składowe H' i H''. Pierwsza z nich pochodzi oczywiście z ruchu kulistego około środka ciężkości, a druga z ruchu postępowego.

Jest to przypadek szczególny pewnego prawie oczywistego twierdzenia ogólnego. Gdy rozłożymy ruch ciała sztywnego na dwa ruchy składowe, to wektor H względem dowolnego punktu O rozłoży się na dwa wektory składowe, odpowiedające owym ruchom.

Niechaj v' i v'' będą szybkościami elementu m, pochodzącemi z tych ruchów składowych. W takim razie ilość ruchu tego elementu posiada składowe mv', mv'', i moment tej ilości ruchu względem O składa się z momentów wektorów mv' i mv'; oznaczmy te momenty odpowiednio przez h' i h''. Wektor H będzie wypadkową wszystkich h' i wszystkich h'', albo wypadkową H' i H'', jeżeli przez H' oznaczymy wypadkową wszystkich h', a przez H'' wszystkich h''.

Twierdzenie to daje się z łatwością rozciągnąć do dowolnej liczby ruchów składowych. Jeżeli rozkładamy ruch ciała sztywnego na ruch kulisty około środka ciężkości i na odpowiedni ruch postępowy, i obierzemy moment ilości ruchu względem środka ciężkości, to składowa, odpowiadająca drugiemu z tych ruchów, jest zerem, a zatem wyznaczamy wektor H, jakgdyby ciało posiadało tylko ruch kulisty około środka ciężkości.

62. Przykłady 1. Dwie bardzo cienkie banie kuliste o masach m_1 i m_2 mogą się obracać około wspólnego środka. Promienie ich są prawie jednakowe, a zatem stykają się one na całej powierzchni. Udzielamy pierwszej bani szybkości kątowej ω_1 około osi u_1, posiadającej w nieruchomym układzie współrzędnych kąty kierunkowe $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i jednocześnie udzielamy drugiej szybkości ω_2 około osi u_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Około jakiej osi i z jaką szybkością kątową będą wirowały banie, gdy tarcie zniszczy ich ruch względny?

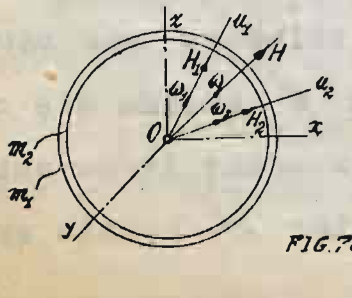


FIG.78.

Wyznaczmy wektory H dla każdej z bań względem O i oznaczmy je odpowiednio przez H_1 i H_2; przypuśćmy, wreszcie, że H jest wypadkową składowych H_1 i H_2. Na układ działają następujące siły.

1/ siły ciężkości bań; są one przyłożone w środku O, a więc nie mają wpływu na moment ilości ruchu względem tego punktu,

2/ reakcye punktu O; momenty ich względem O są także $= 0$.

3/ tarcie między baniami - jest to siła wewnętrzna, więc i ona nie wywiera wpływu na wektor H. Inne siły nie działają, więc wektor H nie ulega zmianie, jest zatem taki sam, jak w pierwszej chwili. Wyznaczmy rzuty wektora H na osi x, y, z. Są one równe sumom rzutów składowych H_1 i H_2 na odpowiednie osi. Oś x jest osią główną punktu O, zatem rzut H_1 na nią jest równy iloczynowi momentu bezwładności bani przez składową szybkości kątowej czyli $m_1 k^2 \omega_1 \cos\alpha_1$, gdzie k oznacza ramię bezwładności bani względem średnicy. Tak samo rzut H_2 na oś x wynosi $m_2 k^2 \omega_2 . \cos\alpha_2$, zatem

$$H_x = (m_1 \omega_1 \cos\alpha_1 + m_2 \omega_2 \cos\alpha_2) k^2,$$

Tak samo znajdziemy $H_y = (m_1 \omega_1 . \cos\beta_1 + m_2 \omega_2 . \cos\beta_2) k^2,$

$H_z = (m_1 \omega_1 . \cos\gamma_1 + m_2 \omega_2 . \cos\gamma_2) k^2$. Stąd zaś:

$$H = k^2 \sqrt{m_1^2 \omega_1^2 + m_2^2 \omega_2^2 + 2 m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 (\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 . \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)}$$

Ruch wypadkowy będzie się odbywał około prostej wektora H, z szybkością kątową $\omega = \frac{H}{I}$, gdzie I jest momentem bezwładności obydwóch bań względem O, czyli $(m_1 + m_2) k^2$. Stąd

$$\omega=\frac{H}{(m_1+m_2)k^2}=\frac{\sqrt{m_1^2\omega_1^2+m_2^2\omega_2^2+2m_1m_2\omega_1\omega_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}}{m_1+m_2}.$$

Jeśli oznaczymy kąty kierunkowe tej szybkości kątowej przez α, β, γ, to będzie: $\cos\alpha=\frac{H_x}{H}$, $\cos\beta=\frac{H_y}{H}$, $\cos\gamma=\frac{H_z}{H}$

2. Gładkie, poziome ramię AB o długości $2a$ i masie M jest w końcu A przymocowane do pionowej osi z, a w B posiada małą nasadę. Na ramieniu może się swobodnie przesuwać ciężarek m, ale nasada w B nie pozwoliłaby mu zejść z ramienia. Początkowo ciężarek jest przywiązany do osi nicią o długości a i wszystko obraca się z szybkością kątową ω_0. Jaką szybkość kątową będzie miał układ, gdy nić się zerwie i ciężarek dojdzie do B ?

Na układ działają reakcye łożysk, w których jest osadzona oś z, oraz siła ciążenia. Momenty tych sił względem osi z są zerami, a zatem moment ilości ruchu, względem tej osi nie może się zmienić.

Będzie więc: $Mk^2\omega_0+ma^2\omega_0=Mk^2\omega+4ma^2\omega$,

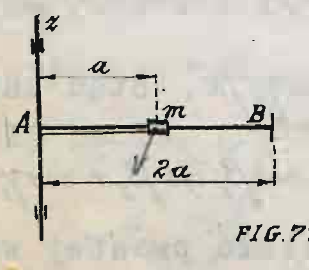


FIG. 79.

gdzie k oznacza ramię bezwładności ramienia AB względem osi z, a ω ostateczną szybkość kątową. Z tego wypada, że

$$\omega=\frac{(4M+3m)\omega_0}{4(M+3m)}.$$

W przypadku szczególnym, gdy $M=m$ mamy $\omega=\frac{7}{16}\omega_0$

3. Belka o długości $2a$ i masie M może się swobodnie obracać około osi poziomej, przechodzącej

przez jej środek ciężkości. Początkowo belka zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, gdy na koniec jej spadł pionowo z wysokości h, kawałek wilgotnej gliny o masie m i przylgnął. Wyznaczyć szybkość kątową, którą otrzyma belka.

Uważamy układ złożony z belki i gliny. W niezmiernie krótkim czasie, w którym glina uderza o belkę, moment ilości ruchu tego układu wzgkędem osi się nie zmieni, bo występujące podówczas siły chwilowe są jego siłami wewnętrznemi, a moment reakcyi osi jest zerem. Wprawdzie podczas uderzenia działa siła zewnętrzna, której moment względem osi nie jest zerem, a mianowicie ciężar gliny, ale wytworzony przez nią w ciągu tak krótkiego okresu przyrost momentu ilości ruchu jest znikomo mały i możemy go pominąć.

Moment bezwładności układu względem osi wynosi oczywiście Mk^2+ma^2, gdzie k jest ramieniem bezwładności belki względem tej osi.

Zatem moment ilości ruchu układu po uderzeniu jest $-(Mk^2+ma^2).\omega$. Przed uderzeniem moment ilości ruchu belki był zerem, a glina miała szybkość $\sqrt{2gh}$, zatem moment jej ilości ruchu wynosił $m\sqrt{2gh}.a$. Stąd $(Mk^2+ma^2)\omega = m\sqrt{2gh}\ .a$.

Gdy podstawimy tu $k^2=\frac{a^2}{3}$, to wypadnie

$$\omega = \frac{3m\sqrt{2gh}}{(M+3m).a}.$$

63. Siły chwilowe. Wektor H stanowi wybitną ce-

chę charakterystyczną ruchu obrotowego i dzięki temu znajduje bardzo rozległe zastosowanie w dynamice ciał sztywnych; wyobrażenie o roli jego dają przytoczone w par. 62 i niżej przykłady, jakkolwiek wyjaśnienia, o które chodzi, wynikają w sposób oczywisty z paragrafów poprzedzających.

Dajmy na to, że ciało jakiekolwiek pozostające w ruchu lub spokoju, doznało uderzenia lub szarpnięcia, czyli wogóle uległo działaniu siły chwilowej. Chodzi o to, jak zmieni się stan dynamiczny ciała czyli jakie przyrosty geometryczne otrzymają wektory G i H.

Podczas działania siły chwilowej na ciało działają zazwyczaj i inne siły zwykłe, ale całe zjawisko uderzenia lub szarpnięcia ma przebieg tak szybki, że, podczas trwania jego, siły zwykłe nie mogą wywrzeć na żaden z wektorów wyraźnego wpływu. Z tego wynika, że rozwiązując podane tu zagadnienie, potrzeba rachować się jedynie z siłą chwilową, wszelkie zaś inne siły możemy pomijać.

Przypuśćmy, że pod działaniem siły chwilowej szybkość środka ciężkości otrzymała przyrost geometryczny u ; w takim razie przyrost geometryczny ilości ruchu ciała, czyli wektora G , wyniesie oczywiście Mu, gdzie M oznacza masę ciała. Temu właśnie jest równy impuls siły chwilowej; oznaczmy go przez F.

Czas działania siły chwilowej oznaczmy przez τ. W ciągu tego czasu siła zmienia się co do wielkości w bardzo rozległych granicach, ale możemy uważać, że kierunek jej i położenie w przestrzeni nie ulega zmianie. Bierzemy moment ilości ruchu względem punktu O. W czasie dt moment ten otrzyma przyrost $P.p.dt$, gdzie P oznacza siłę, a p odległość jej od O. Całkowity przyrost wektora H możemy wyrazić w postaci $\int_0^\tau P.p.dt$, czyli $p\int_0^\tau P.dt$. Lecz $\int_0^\tau P dt = F$, zatem przyrost szukany $= F.p$

Tak więc przyrost wektora G jest równy impulsowi, a przyrost wektora H momentowi impulsu. Wyraz równy oznacza tu zgodność co do wielkości i kierunku.

Można to wypowiedzieć, w nieco odmienny sposób. Przenosimy siłę chwilową do środka redukcyi O, wprowadzając odpowiednią parę. Tę ostatnią nazwiemy parą chwilową; moment jej jest bardzo wielki, lecz działa przez czas bardzo krótki. Para nie wywrze oczywiście wpływu na wektor G, lecz wytworzy przyrost wektora H, równy jej momentowi co do wielkości i kierunku. Można także powiedzieć, że miarą momentu pary chwilowej jest wytworzony przez nią przyrost wektora H.

64. Przykłady 1. Sześcian posiada ruch postępowy na płaszczyźnie poziomej, przyczem cztery jego krawędzie są prostopadłe do szybkości. Środek przedniej krawędzi, pozostającej na płaszczyźnie uderza o nieruchomą przeszkodę i zatrzymuje się. Wyznaczyć kierunek uderzenia. ilość ruchu po uderzeniu

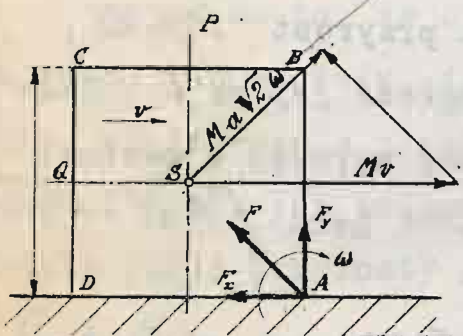


FIG. 80.

Moment ilości ruchu względem krawędzi zatrzymanej nie ulegnie zmienie i znajdziemy łatwo, że sześcian zacznie się obracać z szybkością $\frac{3v}{8a}$ ...(1) gdzie v oznacza szybkość ruchu postępowego, a $2a$ długość krawędzi. Wynika to stąd, że po zatrzymaniu moment ilości ruchu względem przedniej krawędzi był równy $Mk^2\omega$, gdzie k oznacza ramię bezwładności względem tej krawędzi, ω szybkość kątową i M - masę sześcianu. Przed zatrzymaniem moment ten wynosił Mva, zatem $Mk^2\omega = M.v.a$ skąd $\omega = \frac{a.v}{k^2}$ . . . (2)

[Aby wyznaczyć k dzielimy sześcian na cienkie sztaby np. równoległe do krawędzi AD i przez środek ciężkości S prowadzimy płaszczyznę P, prostopadłą do owych sztab. Kwadrat ramienia bezwładności każdej sztaby względem tej płaszczyzny wynosi $\frac{a^2}{3}$, a kwadrat ramienia bezwładności całego sześcianu jest równy temu samemu. Poprowadźmy jeszcze przez S płaszczy-

$ma\omega - mv = -F_x$ $\left\{ mva = m(k^2+2a^2)\omega \right.$

$ma\omega = F_y$ $\quad J = m(k^2+2a^2)$

znę Q prostopadłą do P. Kwadrat ramienia bezwładności sześcianu względem niej jest równy także $\frac{a^2}{3}$ a więc względem osi, przechodzącej przez S i równoległej do przedniej krawędzi wynosi on $2\frac{a^2}{3}$, zaś względem owej krawędzi jest on równy $\frac{2a^2}{3}+2a^2=\frac{8a^2}{3}$]

Podstawiając to w (2) otrzymamy (1).

Przed zatrzymaniem wektor G sześcianu był poziomy i równy Mv, po zatrzymaniu wektor ten tworzy z poziomem kąt 45° i wynosi $\frac{3Mv\sqrt{2}}{8}$.

Składowa pozioma impulsu wynosi $F_x=\frac{5mv}{8}$, a pionowa $F_y=\frac{3mv}{8}$, a stąd wynika, że kierunek uderzenia tworzy z poziomem kąt $arctg\,\frac{3}{5}$.

dla p. wyż.

2. Okrągła tarcza obraca się z szybkością kątową ω_0 około punktu A, swego obwodu. Wyswobadzamy punkt A i jednocześnie zatrzymujemy inny punkt B obwodu; kąt $AOB=\vartheta$, gdzie O oznacza środek tarczy.

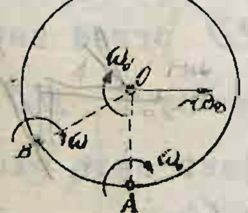


FIG. 81.

Wyznaczyć szybkość kątową ω tarczy około B.

Weźmiemy momenty ilości ruchu względem B przed zatrzymaniem i po tem. Oczywiście te momenty są sobie równe. Po zatrzymaniu moment ilości ruchu wynosił $I.\omega$, gdzie I oznacza moment bezwładności tarczy względem B. Moment ten jest równy $M(k^2+a^2)$, gdzie k jest ra-

H – Ma'(a+)

mieniem bezwładności względem środka tarczy. Zatem $I.\omega = M(k^2+a^2).\omega$. Moment ilości ruchu przed zatrzymaniem składa się z dwóch części:

1/ momentu ilości ruchu względem O czyli $Mk^2\omega_0$

2/ moment ilości ruchu masy tarczy, skoncentrowanej w O względem B czyli $M.a^2.\omega_0.\cos\vartheta$. Zatem przed zatrzymaniem wektor H był $= Mk^2\omega_0 + Ma^2\omega_0.\cos\vartheta$ zatem $M(k^2+a^2)\omega = Mk^2\omega_0 + Ma^2\omega_0.\cos\vartheta$. Podstawiając tu $k^2 = \frac{a^2}{2}$, otrzymamy $\omega = \frac{\omega_0(1+2\cos\vartheta)}{3}$

3. Swobodna płyta kwadratowa $ABCD$ wiruje około przekątni BD z szybkością kątową ω_0. Zatrzymujemy jeden z wierzchołków /A, nieleżący na tej przekątni; wyznaczyć nową szybkość kątową ω.

Należy przedewszystkiem zdać sobie sprawę z tego, jaki kierunek przybierze nowa oś obrotu, a w tym celu trzeba wyznaczyć wektor H względem wierzchołka, który mamy zatrzymać, co do wielkości i kierunku.

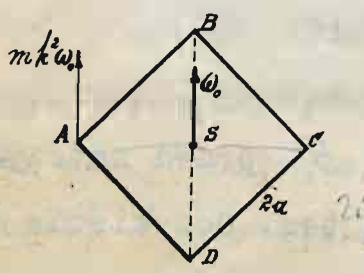


FIG. 82.

Kierunek momentu ilości ruchu względem BD przed zatrzymaniem był zgodny z BD /gdyż ta prosta jest osią główną/ i równy $mk^2\omega_0$, gdzie k oznacza ramię bezwładności względem BD.

Ponieważ środek ciężkości S jest nieruchomy, przeto momenty ilości ruchu względem wszystkich punktów są

równe i wektor H względem A będzie miał kierunek prostej, przechodzącej przez A i równoległej do BC; jest to oś główna punktu A, a więc będzie ona nową osią obrotu. Moment bezwładności względem tej prostej wynosi $m(k^2+2a^2)$, a moment ilości ruchu względem niej po zatrzymaniu $= m\omega(k^2+2a^2)$.
Oczywiście $$mk^2\omega_0 = m\omega(k^2+2a^2),$$
gdyż podczas zatrzymywania moment ilości ruchu względem A się nie zmienił.

Podstawiamy tu $k^2 = \frac{a^2}{3}$.
Otrzymamy $$\omega = \frac{\omega_0}{7}.$$

4. Dwie jednakowe sztaby AB i A_1B_1 leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc kwadrat ABB_1A_1, przyczem końce A i A_1 są połączone nierozciągalnym sznurem. Za pomocą uderzenia, wymierzonego w koniec B w kierunku BB_1 nadajemy temu końcowi szybkość v. Wyznaczyć szybkość początkową W końca B_1.

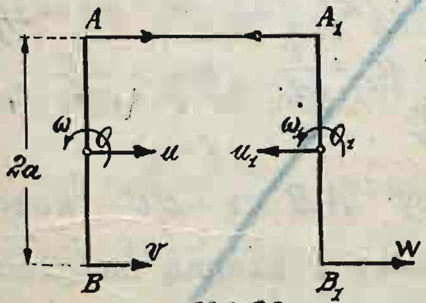


FIG. 83.

Oznaczmy szybkości kątowe sztab około ich środków ciężkości O i O_1 odpowiednio przez ω i ω_1, a szybkości postępowe tych środków przez u i u_1.

Wyznaczymy wektor H przed uderzeniem i po uderzeniu względem B. Wektor ten nie mógł się zmienić, bo moment siły chwilowej względem B jest zerem, a więc ma po uderzeniu taką samą wartość, jak przedtem, czyli zero.

Moment ilości ruchu względem B po uderzeniu będzie miał dwie części: 1/ pochodzącą z ruchu sztaby AB, 2/ z ruchu A_1B_1. Pierwsza jest równa $mua - mk^2\omega$, gdzie k jest ramieniem bezwładności względem O; drugi wynosi $-mu_1a - mk^2\omega_1$. W myśl powiedzianego wyżej otrzymamy, podstawiając $k^2 = \frac{a^2}{3}$:

$$mua - \frac{ma^2\omega}{3} - mu_1a - \frac{ma^2\omega_1}{3} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Podobnie biorąc mom. ilości ruchu względem A_1 sztaby A_1B_1 będziemy mieli

$$mu_1a - \frac{ma^2}{3}\omega_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Trzecie równanie dostarczy nam oczywisty związek między równemi szybkościami punktów A i A_1

$$a\omega - u = a\omega_1 + u_1 \quad \ldots\ldots \quad (3.)$$

Wreszcie szybkość punktu B jest równa:

$$a\omega + u = v \quad \ldots\ldots \quad (4.)$$

Gdy wyrugujemy z równań $(1.), (2.), (3.), (4.)$ niewiadome ω i u, to znajdziemy, że $u_1 = \frac{v}{14}$, $a\omega_1 = \frac{3v}{14}$. Szukana szybkość $W = a\omega_1 - u_1 = \frac{v}{7}$.

5. Dwie jednakowe sztaby AB i BC każda o długości a tworzą linię prostą i biegną na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością v, prostopadłą do AC. Jakie szybkości kątowe będą miały w pierwszej

chwili sztaby, gdy zatrzymamy koniec A ?

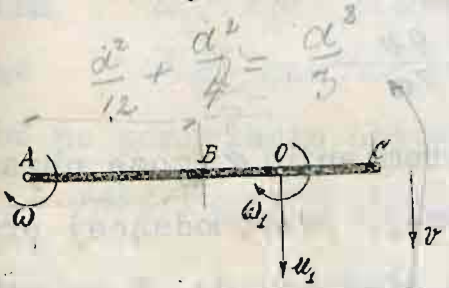


FIG. 84.

Ruch sztaby AB będzie obrotowy około A z szybkością kątową, równą dajmy na to ω. Ruch sztaby BC rozkładamy na postępowy, zgodny z ruchem jej środka ciężkości O - szybkość tego ruchu oznaczymy przez u_1, i obrotowy około O z szybkością kątową ω_1. Moment ilości ruchu sztab względem końca A nie zmienił się. Przed zatrzymaniem był on równy $2m.v.a$, a potem $\frac{ma^2}{3}\omega + \frac{ma^2}{12}\omega_1 + mu_1\frac{3}{2}a$, zatem

$$2m.v.a = \frac{ma^2}{3}\omega + \frac{ma^2}{12}\omega_1 + mu_1\cdot\frac{3}{2}a \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Weźmiemy jeszcze moment ilości ruchu sztaby BC względem B. Przed zatrzymaniem wynosił on $mv\frac{a}{2}$, zaś po tem $\frac{ma^2}{12}\omega_1 + \frac{mu_1a}{2}$, a stąd

$$m.v.\frac{a}{2} = \frac{ma^2}{12}\omega_1 + \frac{m.u_1.a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.)$$

Szybkość punktu B, jako należącego do sztaby AB wynosi $a\omega$, zaś gdy zaliczymy go do sztaby BC, to szybkość ta będzie równa:

$$u_1 - \frac{a}{2}\omega_1 \quad , \text{więc} \quad a\omega = u_1 - \frac{a}{2}\omega_1 \quad \ldots \quad (3.)$$

Mamy tu trzy równania, mianowicie: (1.), (2.), (3.), zawierające trzy niewiadome: ω, ω_1, u_1.

Gdy rozwiążemy je, to wypadnie

$$\omega_1 = -\frac{3v}{7a} \quad \text{i} \quad \omega = \frac{9v}{7a}$$

6. Kółko o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około osi poziomej, przechodzącej przez środek i prostopadłej do jego płaszczyzny. W najniższym punkcie kółka A siedzi mucha o masie m; w pewnej chwili wyrusza ona po obwodzie i wędruje z szybkością względną stałą. Jaka powinna być co najmniej ta szybkość, aby mucha doszła do najwyższego punktu kółka?

Dajmy na to, że po t sek. mucha znajdzie się w punkcie B, a szybkość kątowa kółka będzie równa ω.

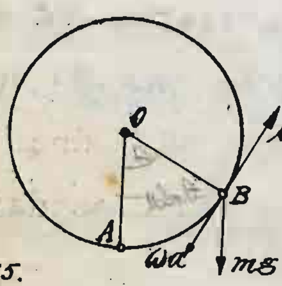


FIG. 85.

Nieznaną szybkość względną oznaczmy literą u, to szybkość bezwzględna muchy będzie $= u - \omega . a$.

Żeby mucha doszła do wierzchołka kółka, to trzeba, aby było wciąż $u > \omega a$. W owym najwyższym punkcie może być jednak $u = \omega a$. Wyrazimy ω w funkcji ϑ.

W tym celu bierzemy momenty ilości ruchu względem środka kółka O. Wynosi on $Mk^2\omega - mu(u-\omega a)$, gdzie k oznacza ramię bezwładności kółka względem środka. Przyrost tego momentu w ciągu dt sek. jest równy momentowi ciężaru muchy, pomnożonemu przez dt.

Zatem $d[Mk^2\omega - ma(u-\omega a)] = mg.a.\sin\vartheta.dt$;

stąd $(Mk^2+ma^2)d\omega = mg.a.\sin\vartheta\, dt$

albo po pomnożeniu obydwóch stron przez $\frac{d\vartheta}{dt}$

$$(Mk^2+ma^2)\omega.d\omega = mg.a\sin\vartheta.d\vartheta$$

Całkując i uwzględniając warunki początkowe otrzymamy: $\omega^2(Mk^2+ma^2) = 2mg.a(1-\cos\vartheta)$.

Gdy mucha dojdzie do najwyższego punktu, to $\cos\vartheta=-1$.

wypadnie $\omega = 2\sqrt{\frac{mg.a}{Mk^2+ma^2}}$.

Szukana szybkość jest $= u = a\omega = 2a\sqrt{\frac{mg.a}{Mk^2+ma^2}}$.

7. Na gładkim stole leży sztywny kwadrat $ABCD$ zrobiony z czterech jednakowych prętów. W wierzchołku B siedzi mucha, której masa jest równa masie jednego pręta i kwadrat może się swobodnie obracać około wierzchołka A . W pewnej chwili mucha zaczyna wędrować po pręcie BC ze stałą szybkością względną v. O jaki kąt obróci się kwadrat, zanim mucha dojdzie do wierzchołka C ?

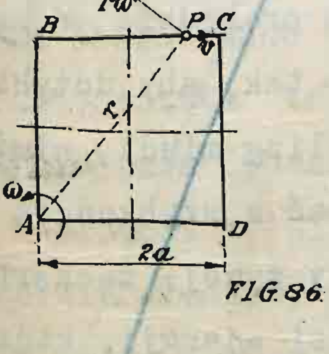


FIG. 86.

Dajmy na to, że po upływie t sek. mucha dojdzie do punktu P i szybkość jej będzie wtedy równa v. Ówczesny moment ilości ruchu układu względem A wynosi

$$4mk^2\omega - mv.2a + m.r.\omega.r ,$$

gdzie k oznacza ramiona bezwładności kwadratu względem A . Moment ten jest zerem, bo nie ulega on zmianie, a takąż wartość miał na początku. Zatem

$$4mk^2\omega - mv\cdot 2a + mr\cdot\omega r = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Moment bezwładności kwadratu względem A jest =

$$= 2m\left(\frac{4}{3}a^2 + \frac{16}{3}a^2\right) = \frac{40}{3}a^2 m,$$

a więc kwadrat ramienia wynosi $k^2 = \frac{10}{3}a^2$.

Ponieważ $BP = v.t$, więc $r^2 = v^2t^2 + 4a^2$.

Gdy podstawimy to w (1), to wypadnie

$$(52a^2 + 3v^2t^2)\omega = 6\,v.a$$

albo $$(52a^2 + 3v^2t^2)\frac{d\vartheta}{dt} = 6\,v.a$$

Całkując to równanie i biorąc pod uwagę warunki początkowe oraz zakładając $r = 2a$ znajdziemy, że szukamy kąt jest równy

$$\vartheta = \sqrt{\frac{3}{13}}\ arctg\sqrt{\frac{3}{13}}.$$

8. Pas bez końca otacza dwa cylindry ustawione w płaszczyźnie pionowej. Pas ten posiada stałą szybkość, równą v. Ustawiamy tarczę o promieniu a na osi równoległej do dwóch pozostałych — tak, aby dotykała się ona pasa. Po pewnym czasie poślizg między nimi ustanie i tarcza zacznie się obracać z szybkością kątową stałą. Wyznaczyć stosunek siły żywej, zaczerpniętej w tym czasie przez tarczę do tej energji, która w tym samym czasie przeszła skutkiem tarcia w ciepło.

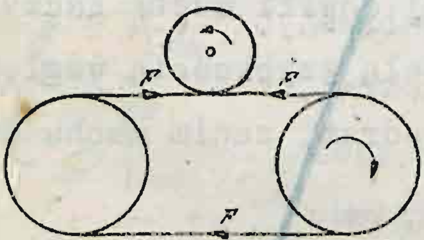


FIG. 87

Oznaczmy tę siłę tarcia między tarczą a pasem przez F ; moment bezwładności tarczy względem jej środka pomnożony przez przyśpieszenie kątowe $\frac{d\omega}{dt}$ jest równy momentowi siły tarcia, zatem

$$\frac{ma^2}{2}\cdot\frac{d\omega}{dt} = F\cdot a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

Całkując to równanie otrzymamy $ma\omega = 2Ft$, skąd $t = \frac{ma\omega}{2F}$ lub $= \frac{mv}{2F}$, bo $a\omega = v$

Aby pas zachował szybkość v, to trzeba działać nań z siłą F, której punkt przyłożenia przejdzie drogę vt, a jej praca wynosi $F.v.t$, czyli $\frac{ma\omega.v}{2F}.F = \frac{mv^2}{2}$. W siłę żywą przeszła tylko część pracy, mianowicie $\frac{ma^2}{4}\omega = \frac{m.v^2}{4}$. Tyleż energji przeszło w ciepło.

65. Ruch istot żyjących. Jeżeli na istotę żyjącą nie działają żadne siły zewnętrzne, to nie może ona nadać swemu środkowi ciężkości przyśpieszenia, czyli nie może zmienić swego wektora G . Nie zmieni ona również swego wektora H np. względem środka ciężkości jeżeli więc pozostawała w spokoju, to nie może nadać swemu ciału ruchu obrotowego. Z tego jednak nie wynika, aby istota taka nie mogła zmienić swego położenia względem środka ciężkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że człowiek stoi na zupełnie gładkiej płaszczyźnie poziomej. Działają nań dwie siły, zewnętrzne, a mianowicie: siła ciążenia i reakcya płaszczyzny, która w tym razie posiada zawsze kierunek pionowy. Obydwie te siły przechodzą przez środek ciężkości, momenty ich względem tego punktu są zerami, nie mogą więc one wywierać wpływu na moment ilości ruchu względem środka ciężkości. Człowiek jest zwrócony, dajmy na to twarzą na północ, a chciałby zwrócić się na wschód. Da się to uskutecznić różnymi sposobami.

Przypuśćmy, że człowiek ten posiada jakiś ciężki przedmiot, np. sztabę. Może on nadać jej nad głową ruch obrotowy względem swego ciała w kierunku od prawej ręki ku lewej, czyli dla patrzącego z góry w stronę odwrotną do biegu wskazówki zegara. Gdyby ciało pozostało przytem w spokoju, to układ, złożony z człowieka i sztaby, zyskałby względem środka ciężkości wektor H, skierowany na dół. Jest to niemożliwe, gdyż siły, wywołujące ruch sztaby są siłami wewnętrznemi układu. Z tego wynika, że ciało musi się zacząć jednocześnie obracać w kierunku odwrotnym, przyczem oczywiście twarz będzie się zwracała w stronę żądaną. Obróciwszy sztabę dostateczną liczbę razy, człowiek mógłby obrócić swe ciało o kąt dowolny.

W braku odrębnego przedmiotu ciężkiego człowiek osiągnie ten sam rezultat, czyniąc ruchy analogiczne rękami, głową lub tułowiem. Opiszemy jeszcze inny sposób. Człowiek wyciąga ręce przed siebie i skręca górną część tułowia w lewo względem dolnej o kąt jaki największy. Jednocześnie dolna część ciała obróci się o pewien kąt w prawo. Następnie człowiek zwiesza ręce wzdłuż ciała i powraca do położenia normalnego. Podczas tego ruchu powrotnego dolna część ciała obróci się znowu o pewien kąt w lewo, lecz o mniejszy, niż poprzednio w prawo, gdyż moment bezwładności górnej części względem osi obrotu się zmniejszył. Wynikiem obydwóch ruchów będzie oczywiście obrót całego ciała, o jakiś kąt w prawo. Powtarzając tę operację dostateczną ilość razy, człowiek może obrócić się o kąt dowolny.

W podobny sposób postępuje spadający kot, aby odwrócić się łapami do dołu. Wyciąga on prostopadle do ciała przednie łapy, a kurczy tylne i skręca przednią część tułowia względem tylnej o kąt jaknajwiększy. Następnie kurczy przednie łapy, wyciąga tylne i nadaje ciału ruch odwrotny do poprzedniego, powtarzając tę czynność, dopóki ciało jego nie przybierze żądanego położenia.

ROZDZIAŁ V

RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO.

66. Równanie zasadnicze. Rozważymy teraz rozmaite rodzaje ruchów ciała sztywnego, przy pomocy twierdzeń, wyłożonych w rozdziale poprzedzającym.

Ruch postępowy stanowi przedmiot dynamiki punktu