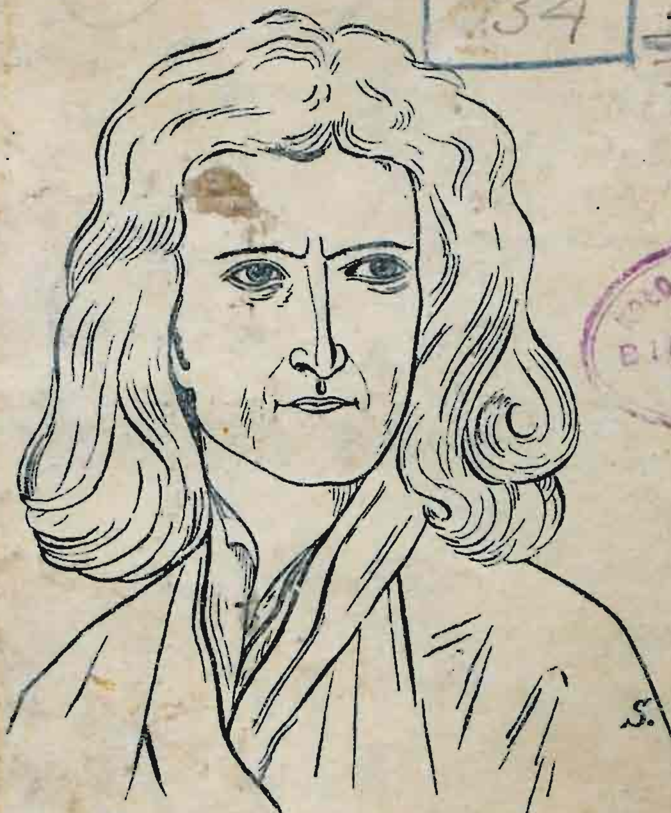


ISAACVS NEWTONVS

MECHANIKA.

CZĘŚĆ III.

DYNAMIKA.

WEDŁUG WYKŁADÓW
ZYGMUNTA STRASZEWICZA
W POLITECHNICE WARSZAWSKIEJ
1917 ROKU.

DYNAMIKA PUNKTU MATERYALNEGO.

ROŹDZIAŁ I.

PRAWA NEWTONA.

1.Punkt materyalny. Mówiliśmy już w par.13 /cz.I/ o zadaniach dynamiki. Nauka ta bada, jak poruszają się ciała pod wpływem ciał innych, czyli pod działaniem sił. Nie można dać kategorycznie twierdzącej odpowiedzi na nasuwające się tu pytanie, czy każdą siłę wywiera jakieś ciało, czy zawsze, gdy na ciało A działa siła, to możemy wskazać jakieś ciało B, od którego ta siła pochodzi? Dobrze jest jednak przyjąć, przynajmniej, jako regułę praktyczną, że tak jest istotnie. Gdy więc myślimy o sile, to trzeba zaraz zdać sobie sprawę z tego od jakiego ciała siła ta pochodzi. Reguła taka może uchronić od wielu błędów.

Dynamika, podobnie jak cynematyka, dzieli się na dwie części: dynamikę punktu materyalnego i dynamikę układu. Mówimy punktu materyalnego, gdyż chodzi tu nie o ruch punktu geometrycznego, jak było w cynematyce.

Punktem materyalnym nazywamy ciało, którego położenie w przestrzeni daje się określić z dokładnością, wystarczającą w taki sam sposób, jak położenie punktu geometrycznego, np. za pomocą trzech współrzędnych Kartezyusza.

A więc punktem materyalnym jest przedewszystkiem ciało bardzo małych rozmiarów, albo drobna cząsteczka ciała większego. Nieraz jednak i ciało bardzo wielkie uważamy za punkt materyalny, zwłaszcza, gdy wymiary jego są drobne w stosunku do wymiarów toru. Gdy np. badamy roczny ruch ziemi, to możemy ziemię uważać za punkt materyalny.

Nazwę punkt materyalny można określić i w inny sposób, ściślejszy i dający jednocześnie głębsze pojęcie o podziale dynamiki. Wiemy z cynematyki, że ruch ciała składa się z ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Ciało nazywamy punktem materyalnym, jeżeli, badając ruch jego, nie zwracamy uwagi na ruch obrotowy. Tym sposobem można powiedzieć, że pierwsza część dynamiki, dynamika punktu materyalnego dotyczy ruchu postępowego ciał, a część druga, dynamika układu, ruchu obrotowego, albo raczej ruchu kulistego.

2. Prawa NEWTONA. Cały gmach dynamiki jest oparty na pewnych twierdzeniach zasadniczych, tak zw. prawach, podobnie jak geometrya opiera się na aksyomatach. Prawa dynamiki sformułował NEWTON we wstępie do dzieła „Philosophiae naturalis principia mathematica", wydanego w r.1687. Te prawa NEWTONA stanowią zazwyczaj punkt wyjścia wykładów dynamiki, jakkolwiek zapewne możnaby wykazać, że nie wystarczają one całkowicie na podwaliny tej nauki i że zawiera ona jeszcze inne twierdzenia, wprowadzone ubocznie bez dowodów i uważane za prawdy

intuicyjnie.

Podajemy tu prawa NEWTONA w wysłowieniu, przystosowanem do naszych celów:

Prawo pierwsze /prawo bezwładności/. Punkt materyalny pozostaje w stanie spokoju lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeżeli nie działa nań żadna siła.

Prawo drugie. Siła, działająca na punkt materyalny, udziela mu przyśpieszenia, które jest z nią zgodne co do kierunku i proporcyonalne do niej co do wielkości.

Prawo trzecie /prawo akcyi i reakcyi/. Siły, które dwa punkty materyalne wywierają jeden na drugi, mają wspólną linię działania, są równe i odwrotnie skierowane.

Pierwsze z tych praw jest oczywiście następstwem lub raczej szczególnym przypadkiem drugiego, bo jeżeli na punkt materyalny żadne siły nie działają, to w myśl drugiego prawa nie może on mieć przyśpieszenia, a zatem ruch jego musi być prostoliniowy i jednostajny. Swoją drogą właśnie w tem pierwszem prawie najłatwiej dostrzedz pewne braki, czy niedomówienia, które dotyczą w równej mierze drugiego.

Niedomówienia te dotyczą wyrazów prostoliniowy i jednostajny; bez dalszych wyjaśnień są to wyrazy o znaczeniu nieokreślonem.

Wyobraźmy sobie dwie stacye kolei żelaznej na równinie. Możemy twierdzić, że linia kolei pomiędzy niemi jest prosta i twierdzenie takie będzie słuszne, o ile pominiemy pewne niezbędne niedokładności. Czy jednak jest prostoliniowy ruch pociągu pomiędzy temi stacyami? Tak jest niewątpliwie względem ziemi, ale względem innego układu np. względem słońca, ruch pociągu nie będzie prostoliniowy, bo pociąg bierze udział w ruchu kuli ziemskiej.

Z tego widać, że pierwsze prawo jest niejasne, gdyż nie zawiera wskazówek względem jakiego układu ruch punktu, nie podlegającego działaniu sił, jest prostoliniowy.

Przymiotnik jednostajny ma oznaczać, że punkt w równych, dowolnie krótkich odstępach czasu przebiega równe drogi. Jest to także niejasne, dopóki nie umówiliśmy się, co mamy nazywać równymi odstępami czasu.

Człowiek posiada zdolność szeregowania wydarzeń w czasie. Jeżeli dostrzegliśmy trzy wydarzenia A, B i C, to odczuwamy bezpośrednio, że np. B nastąpiło po A i C po B. Musimy uznać, że czas, który upłynął od A do C jest dłuższy od czasu AB lub BC, ale żadna logika nie narzuca nam sądu, że np. czas AB był dłuższy od BC, dopóki nie zapadła umowa co do sposobu mierzenia czasu. O długości odstępu czasu sądzimy według doniosłości zmian, które podczas tego odstępu zachodzą w otaczającym nas świecie i w naszym organizmie, możliwy więc jest tylko jeden sposób mierzenia czasu. Obieramy jakieś zjawisko, powtarzające się ustawicznie i umawiamy się uważać za równe - odstępy czasu pomiędzy pewnemi fazami jego. W wyborze takiego zjawiska - zegara mamy zupełną swobodę; kierujemy się tu pewnymi względami praktycznymi, lecz nie logiką, która nie stawia tu żadnych norm obowiązujących. Umówiono się uważać za równe dwa odstępy czasu, w których ziemia w ruchu obrotowym względem gwiazd stałych obraca się o jednakowe kąty, ale można by zawrzeć i jakąś inną umowę; możnaby np. uznać za równe takie dwa odstępy, w których ziemia w swym ruchu postępowym w układzie słonecznym przebiega równe drogi. Ten drugi sposób byłby mniej dogodny od pierwszego, ale nie doprowadziłby do żadnych sprzeczności logicznych. Wiadomo, że drogi, które przebiega ziemia w ruchu postępowym nie są proporcyonalne do kątów, o które się jednocześnie obraca.

Równym kątom odpowiadają wogóle nierówne drogi, a zatem dwa okresy czasu, równe przy jednej umowie, byłyby nierówne przy drugiej; ruch, który uważalibyśmy za jednostajny przy jednej, nie byłby jednostajny przy drugiej.

Z uwag tych wynika, że pierwsze prawo, albo raczej ogół tych praw wymaga jeszcze drugiego uzupełnienia. Powinien być wskazany sposób mierzenia czasu.

Trudnościom tym możnaby zejść z drogi, uważając pierwsze prawo za połączone definicye ruchu prostoliniowego oraz równych odstępów czasu. Definicye te w postaci rozwiniętej byłyby takie: ruch punktu nazywamy prostoliniowym, jeżeli torem jego może biedz punkt materyalny, na który żadne siły nie działają; nazywamy równymi takie odstępy czasu, w których punkt materyalny, nie podlegający działaniu sił, przebiega równe drogi.

Zdaje się jednak, że ogół ludzi, mających do czynienia z mechaniką, nie przypisuje pierwszemu prawu takiego znaczenia.

Kierując się wskazówkami praktyki stosowania twierdzeń dynamicznych do poszczególnych zjawisk, dopełnimy w następujący sposób pierwsze prawo ruchu. Gdy chodzi o zjawiska ziemskie, to najczęściej rozumiemy ruch prostoliniowy, o którym mowa w pierwszem prawie w odniesieniu do ziemi, gdy chodzi o zjawiska astronomiczne, to rozumiemy ten ruch w odniesieniu do pewnego układu, związanego z naszym systemem planetarnym. W obydwóch przypadkach przyjmować należy sposób mierzenia czasu według ruchu obrotowego ziemi względem gwiazd stałych.

Dynamika jest nauką przyrodniczą. Zawiera ona teoryę, czyli opis naukowy, pewnego rodzaju zjawisk natury i opis ten powinien być możliwie wierny, możliwie bliski rzeczywistości. Z tego wynika konieczność sprawdzenia, czy prawa NEWTONA, stanowiące podwalinę całej budowy, są zgodne z istotnym przebiegiem zjawisk w przyrodzie. Sprawdzanie takie można uskutecznić jedynie na drodze doświadczalnej, ale stosowne doświadczenia nie zostały dotychczas wykonane w sposób dostatecznie dokładny i przekonywający.

Nie mamy więc dowodów bezpośrednich słuszności praw NEWTONA, lecz natomiast istnieje olbrzymia liczba dowodów pośrednich. Dowodami takimi jest w pierwszej linii zgodność różnych zjawisk astronomicznych z przepowiedniami astronomów, których rachunki są oparte na prawach dynamiki, w drugiej linii dobre funkcyonowanie maszyn, których konstruktorzy posługiwali się poprawnie twierdzeniami tej nauki. Można więc twierdzić, że prawa NEWTONA, przynajmniej w dziedzinie zjawisk, w której je dotychczas stosowano, z dostatecznym przybliżeniem oddają istotny przebieg zjawisk natury.

3. Masa. Według drugiego prawa przyśpieszenie punktu materyalnego jest wprost proporcyonalne do siły. Współczynnik proporcyonalności jest wielkością, charakteryzującą całkowicie punkt materyalny pod względem dynamicznym; odwrotność jego nazywa się masą punktu.

Dajmy na to, że dla pewnego punktu współczynnik ten wynosi $\frac{1}{m}$, czyli że masa tego punktu jest równa m. Działająca nań siła P nada mu takie przyśpieszenie p, że $p=\frac{1}{m}P$, albo $P=mp$.

Weźmy ciało, ważące Q kilogramów. Gdy pozwolimy temu ciału spadać swobodnie w próżni, to ta siła Q udzieli mu przyśpieszenie ziemskie $g=9,81$ w metrach i sekundach, a zatem $Q=mg$. Jeżeli $Q=g$ kg., to $m=1$, a zatem masę jednostkową posiada ciało, ważące 9,81 kg. Taka też jednostka masy jest ogólnie używana w technice w krajach, które przyjęły system metryczny. W fizyce wprowadzono jednostkę <u>gram</u>, należącą do systemu CGS, o którym można znaleźć wyczerpujące wiadomości w podręcznikach fizyki.

Niech będą dwa punkty materyalne, o masach m_1, m_2 i przypuśćmy, że drugi wywiera na pierwszy pewną siłę, a mianowicie nadaje mu przyśpieszenie p_1. Według trzeciego prawa, jednocześnie pierwszy punkt musi działać z siłą równą, lecz odwrotną na drugi, a zatem: $m_1 p_1 = m_2 p_2$, gdzie p_2 oznacza przyśpieszenie drugiego.

4. <u>Przykłady.</u> Podajemy tu szereg przykładów, zawierających zastosowania praw NEWTONA. Nie będzie może zbyteczna pewna uwaga ogólna.

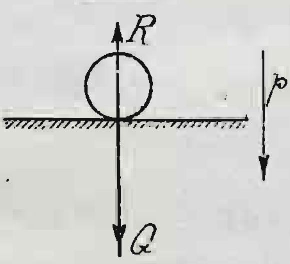
Przypuśćmy, że na punkt materyalny o masie m działają siły $P_1, P_2, \ldots\ldots$ Siły te nadają punktowi pewne przyśpieszenie, które można wyznaczyć w sposób dwojaki. Wyznaczamy wypadkową R tych wszystkich sił. Możemy uważać, że działa tylko ta jedna siła R, nada więc ona punktowi przyśpieszenie, zgodne z nią co do kierunku, a co do wielkości równe $\frac{R}{m}$.—

Drugi sposób jest następujący. Siła P_1 działając sama jedna nadałaby punktowi przyśpieszenie $\frac{P_1}{m}$, również siła P_2 nadałaby mu sama przyśpieszenie $\frac{P_2}{m}$, i t.d. Układ przyśpieszeń $\frac{P_1}{m}, \frac{P_2}{m}$, ... jest oczywiście podobny do układu sił $P_1, P_2, \ldots\ldots$, a zatem wyznaczając wypadkową tych przyśpieszeń, otrzymamy również przyśpieszenie, które istotnie posiada punkt.

Odwrotnie, jeżeli rozłożylibyśmy przyśpieszenie na pewną liczbę składowych, to możemy uważać, że każdą z nich wytwarza odpowiednia składowa siły.

1.) Na poziomej płycie leży ciało, ważące Q kg., a płyta posiada przyśpieszenie pionowe p. Wyznaczyć siłę, którą ciało wywiera na płytę.

FIG. 1.



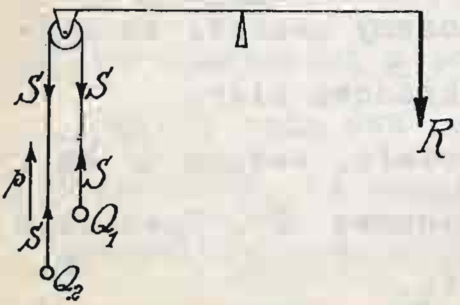
Przyśpieszenie dodatnie będziemy mierzyli na dół, a szukaną siłę oznaczymy przez R. Takąż samą siłę, ale zwróconą ku górze, płyta wywiera na ciało, a więc działa na nie siła wypadkowa $Q-R$, nadając mu przyśpieszenie p. Masa ciała $= \frac{Q}{g}$, zatem będzie $Q-R=\frac{Q}{g}p$, a stąd $R=\frac{Q(g-p)}{g}$.

Jeżeli $p=g$, to $R=0$. Gdyby więc klatka windy osobowej schodziła z przyśpieszeniem ziemskiem, to jadący mieliby wrażenie, że siła ciążenia przestała działać, np. ciężki przedmiot, niepodtrzymywany, nie spadałby na podłogę windy.

2.) Do jednego końca belki wagowej przyczepiono lekki bloczek, przez bloczek przerzucono sznur, a na końcach sznura zawieszono ciężary Q_1 i Q_2. Jaki ciężar R należy zawiesić na przeciwległym końcu belki, aby ta pozostawała w równowadze podczas ruchu ciężarów Q_1 i Q_2?

Przyjmujemy, że tarcie bloczka o oś jest znikomo małe, oraz że sznur jest lekki i doskonale wiotki.

FIG. 2.



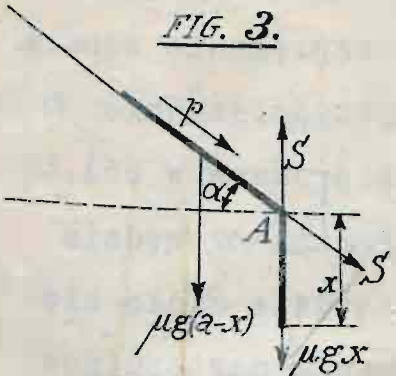
W tych warunkach naprężenia we wszystkich punktach są jednakowe. Jeżeli naprężenie sznura S, to na każdy koniec belki działa siła $2S$. Oczywiście szukany ciężar R jest równy $2S$. Znajdziemy go, wyznaczając S w funkcyi Q_1 i Q_2.—

Przypuśćmy, że ciężar Q_2 podnosi się z przyśpieszeniem p, a zatem Q_1 spada z tem samem przyśpieszeniem.

Wypadkowa sił, działających na ciężar Q_1 będzie oczywiście $Q_1 - S$, zatem $Q_1 - S = \frac{Q_1}{g} p$. Tak samo dla ciężaru Q_2 otrzymamy $S - Q_2 = \frac{Q_2}{g} p$. Rugując z tych równań p znajdziemy $S = \frac{2Q_1Q_2}{Q_1 + Q_2}$, a więc $R = \frac{4Q_1Q_2}{Q_1 + Q_2}$; Zbadajmy, która część belki opadnie, gdy zamiast R wisi ciężar $Q_1 + Q_2$. Zależy to od tego, jaki znak posiada wyrażenie $(Q_1 + Q_2) - R$ albo $Q_1 + Q_2 - \frac{4Q_1Q_2}{Q_1 + Q_2}$. Możemy przedstawić to wyrażenie w postaci takiej: $\frac{(Q_1 - Q_2)^2}{Q_1 + Q_2}$ a stąd widać, że jest ono dodatnie, czyli że R jest mniejsze od $Q_1 + Q_2$. Znaczy to, że opadnie prawa strona belki. lewa

3.) Łańcuch jednorodny, którego waga $= Q$, a długość $= a$, leży wzdłuż linii największego spadku gładkiej równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α; początkowo dolny koniec łańcucha znajduje się na samym brzegu równi. Gdy wyswobodzimy łańcuch i już x metrów zsunie się z równi, to jakie będzie naprężenie w punkcie A, który właśnie przechodzi przez brzeg?

FIG. 3.



Punkt wskazany dzieli łańcuch na dwie części, które możemy uważać za dwa odrębne ciała; każde z nich wywiera na drugie siłę S, równą szukanemu naprężeniu.

Ciężar części łańcucha, pozostającej na równi wynosi $\mu g(a-x)$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości.

Suma rzutów sił, działających na ową część, na kierunek linii największego spadku wywołuje przyśpieszenie p, z którym łańcuch zsuwa się z równi. Stąd wynika równanie $\mu g(a-x)\sin\alpha + S = \mu(a-x)p \ldots\ldots (1)$

Ciężar zwisającej części łańcucha jest równy $\mu g x$, a przyśpieszenie wynosi takśamo p, zatem

$$\mu g x - S = \mu x p \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Rugując z równań (1) i (2) p, otrzymamy:

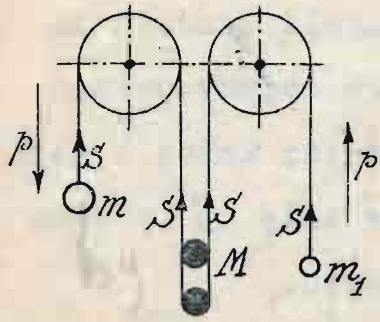
$S = \frac{\mu g x(a-x)(1-\sin\alpha)}{a}$, a ponieważ i $\mu g a = Q$, przeto:

$$S = \frac{Qx(a-x)(1-\sin\alpha)}{a^2}.-$$

Znajdziemy łatwo, że S osiągnie maksymum przy $x = \frac{a}{2}$ i będzie wówczas równe $\frac{Q(1-\sin\alpha)}{4}.-$ Łatwe

4) Sznur przechodzi przez dwa nieruchome bloki, jego część zawarta pomiędzy blokami, dźwiga nawleczony gładki pierścień o masie M, a na jego końcu lewym wisi masa m. Wszystkie części sznura mają kierunek pionowy. Jaka masa m_1 powinna wisieć na prawym końcu sznura, aby pierścień pozostawał w spokoju?

FIG. 4.



Warunkiem równowagi pierścienia jest $2S = Mg$ . . . . (1) gdzie S oznacza naprężenie sznura. Przypuśćmy, że przyśpieszenie p punktu m jest skierowane w dół, to przyśpieszenie punktu m_1 będzie także równe p i będzie miało kierunek odwrotny. Łatwo otrzymamy równania następujące:

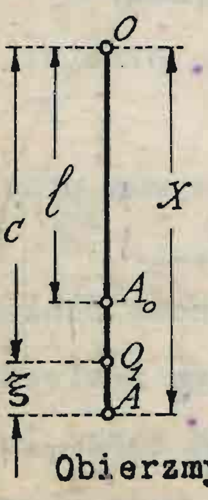
$mg - S = mp$, $m_1 g - S = -m_1 p$. Stąd $2mm_1 g - S(m+m_1) = 0$, lub gdy uwzględnimy (1) $m_1 = \dfrac{Mgm}{2(2mg - \frac{Mg}{2})}$, lub

$$m_1 = \frac{Mm}{4m-M}.—$$

Urządzenie jest możliwe, gdy $m > \dfrac{M}{4}$.—

5.) Ciało o masie m wisi na sprężystym sznurze, którego współczynnik sprężystości $= \varepsilon$, a naturalna długość $OA_0 = l$. Podnosimy je na taką wysokość, aby sznur przybrał tę długość naturalną i następnie pozostawiamy je samemu sobie. Wyznaczyć ruch ciała.

FIG. 5.



Przypuśćmy, że po t sek. długość sznura będzie równa $OA = x$, a więc przyśpieszenie $= \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Będzie je wywoływał ciężar ciała $= mg$ i naprężenie sznura $= \dfrac{x-l}{l}\varepsilon$. Zatem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{x-l}{l}\varepsilon \text{ . . . . . (1)}$$

Obierzmy tak nowy początek toru O_1, o odciętej C, aby prawa strona (1) nie zawierała wyrazów stałych. Nową współrzędną punktu A oznaczmy przez ξ.

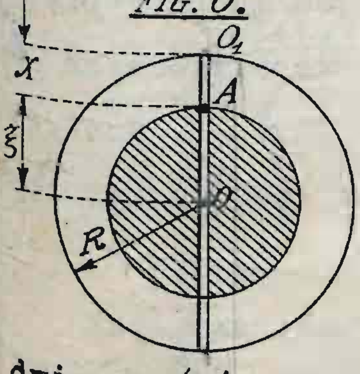
Zatem $x = \xi + c$; gdy podstawimy to w równanie (1), to otrzymamy $m\frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - \frac{\xi+c-l}{l}\varepsilon$ .... (2)

Dobierzmy c tak, aby było $mg - \frac{(c-l)\varepsilon}{l} = 0$ czyli: $c = \frac{(mg+\varepsilon)l}{\varepsilon}$; Równanie (2) przybierze postać $m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{l}\xi$, albo $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{lm}\xi$ .... (3)

Z (3) widać, że ruch ciała jest prosty harmoniczny, i okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{\varepsilon}}$, środkiem jest O_1, a amplituda $s = 2(c-l) = \frac{2mgl}{\varepsilon}$.—

6.) Przypuśćmy, że w kuli ziemskiej przebito prosty tunel, zupełnie gładki, w kierunku średnicy. Uważając, że ziemia jest kulą jednorodną i nieuwzględniając oporu powietrza, wyznaczyć czas, w ciągu którego ciało wpuszczone do tunelu bez początkowej szybkości dojdzie do końca przeciwległego.

FIG. 6.



Dajmy na to, że ciało znalazło się w odległości x od punktu wyjścia O_1. Poprowadźmy przez nie w wyobraźni powierzchnię kulistą, współśrodkową z powierzchnią ziemską; tym sposobem podzielimy ziemię na dwie części, zewnętrzną i wewnętrzną. Wiadomo, że pierwsza nie wywiera na ciało żadnej siły, a druga przyciąga je tak, jak gdyby cała jej masa była skoncentrowana w środku.

Oznaczmy masę kuli ziemskiej przez M, promień owej powierzchni współśrodkowej przez ξ, a współczynnik proporcyonalności przez λ. W takim razie, według prawa ciążenia, siła z jaką punkt A jest przyciągany ku O jest równa $P=\frac{\lambda m \frac{4}{3}\pi \xi^3}{\xi^2}=\frac{4}{3}\lambda m \pi \xi$ ......(1)

W położeniu początkowem $\xi=R$, a więc

$$mg=\frac{4}{3}\lambda m \pi R \text{ ....(2)}$$

Dzieląc (1) przez (2) otrzymamy $\frac{P}{mg}=\frac{\xi}{R}$, skąd

$$P=\frac{\xi m g}{R}.-$$

Przyśpieszenie ciała w położeniu A wywołuje ta siła P, zatem $m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\xi m g}{R}$ skąd $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g\xi}{R}$, a ponieważ $x=R-\xi$, więc $\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{g\xi}{R}$.-

Ruch ciała jest więc harmoniczny, o środku O i okresie $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Gdy podstawimy tu wartości liczbowe wielkości R i g, to otrzymamy, że połowa okresu wynosi około 42 minut.

5. Równania ruchu. Niech będzie punkt materyalny m, na który działa siła P, udzielająca mu przyśpieszenie p. Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktu m przez x, y, z. Rzuty siły na osi niech będą P_x, P_y, P_z, a rzuty przyśpieszenia $p_x=\frac{d^2x}{dt^2}$, $p_y=\frac{d^2y}{dt^2}$, $p_z=\frac{d^2z}{dt^2}$.-

Oczywiście stosunek p_x do P_x jest taki sam, jak stosunek p do P, a zatem $P_x=mp_x$; toż samo dotyczy rzutów pozostałych. Będzie więc $m\frac{d^2x}{dt^2}=P_x$; $m\frac{d^2y}{dt^2}=P_y$; $m\frac{d^2z}{dt^2}=P_z$. Całkując otrzymamy równania ruchu punktu.

Gdy mamy do czynienia ze współrzędnemi biegunowemi, to rozkładamy siłę i przyśpieszenie w kierunku promienia wodzącego oraz w kierunku prostopadłym. Oznaczając składowe siły przez P_r i P_φ a współrzędne punktu

przez r, φ otrzymamy $m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=P_r$,
$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=P_\varphi$ Często wypada rozkładać w kierunku stycznej i normalnej do toru. Składowe siły w tych kierunkach oznaczymy przez P_t, P_n i nazwiemy siłą styczną i siłą normalną. Będzie więc $m\cdot\frac{dv}{dt}=P_t$, $m\cdot\frac{v^2}{\varrho}=P_n$
Wypada dodać, że gdy tor nie jest płaski, to całkowite przyśpieszenie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, a zatem całkowita siła leży w tejże płaszczyźnie. Z tego wynika, że ostatnie dwa równania dotyczą zarówno ruchu płaskiego, jak i niepłaskiego.

6. Przykłady. 1. Na gładki drążek, umocowany poziomo nawleczono pierścień O, o masie m, do pierścienia przyczepiono sznur, o długości a, a na końcu sznura zawieszono ciężar również o masie m. Unieruchomiwszy pierścień, odchylamy ciężar od pionu o kąt α, a następnie wyswobadzamy pierścień i ciężar. Wyznaczyć tor ciężaru.

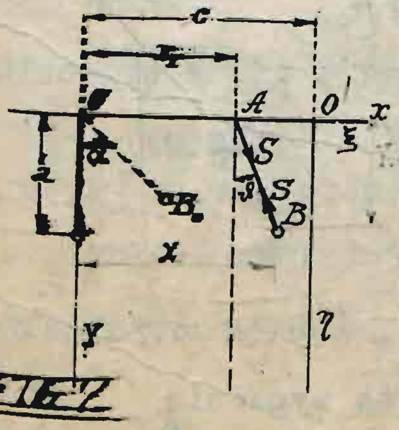


FIG. 7.

Obierzmy za oś x linię drążka, za oś y linię sznura w położeniu pierwotnem i przypuśćmy, że po t sek. pierścień znalazł się w położeniu A, w odległości x_1 od O, że współrzędne ciężaru B są x, y i że sznur tworzy z pionem kąt ϑ.

Na pierścień w nowem położeniu działają trzy siły: siła ciężkości, reakcya drążka i naprężenie sznura S.

Z tych tylko ostatnia wywołuje przyśpieszenie pierścienia w kierunku osi x czyli $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ Zatem

$$m\cdot\frac{d^2x_1}{dt^2}=S.\sin\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Rozłóżmy przyśpieszenie ciężaru B na składowe w kierunkach osi x i y czyli na $\frac{d^2x}{dt^2}$ i $\frac{d^2y}{dt^2}$. Na B działa siła ciężkości i naprężenie sznura S. Zatem będzie

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-S.\sin\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dodając równania (1) i (2) otrzymamy $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2x_1}{dt^2}=0 \ldots (3)$ a całkując będziemy mieli

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dx_1}{dt}=A$$

gdzie A jest stałą całkowania.

W początku rachuby czasu szybkości ciężaru i pierścienia były zerami, czyli było $\frac{dx}{dt}=0$ i $\frac{dx_1}{dt}=0$ Z tego wynika, że $A=0$ Całkując (3), otrzymamy

$x+x_1=B$ gdzie B jest stałą całkowania. W chwili początkowej x_1 było zerem, a odcięta punktu B_0, czyli x była równa $a.\sin\alpha=B$. Zatem

$$x+x_1=a.\sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Znajdziemy jeszcze inny związek x i x_1. W tym celu weźmy rzuty AB na osi x i y. Otrzymamy

$$x-x_1=a.\sin\vartheta \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$y=a.\cos\vartheta \ldots\ldots\ldots (6)$$

a dodając (4) i (5) znajdziemy

$$(7) \ldots\ldots 2x-a.\sin\alpha=a.\sin\vartheta$$

Gdy wyrugujemy ϑ z (6) i (7), to wypadnie

$4x^2-4a.x.\sin\alpha+y^2-a^2\cos^2\alpha=0$. Jest to szukane równanie toru. Widać wprost, że torem tym jest stożkowa, mianowicie elipsa, której oś wielka leży na osi x. Obierając punkt O_1 o odciętej c, za początek nowego układu współrzędnych ξ, η, równoległego do poprzedniego otrzymamy równanie szukanego toru w postaci

$4\xi^2+\eta^2=a^2$, jeżeli $c=\frac{a}{2}\sin\alpha$. Widzimy, że środkiem elipsy jest punkt O_1 a półówki osi są odpowiednio równe $\frac{a}{2}$ i a. Kąt α wpływa wyłącznie na położenie środka elipsy.

x 2. Dwa punkty o masach m_1 i m_2 leżą na poziomym gładkim stole i są połączone wyprężonym, nierozciągalnym sznurem o długości a. Nadajemy punktowi m_1 szybkość v prostopadłą do sznura. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu m_1 w początkowem położeniu.

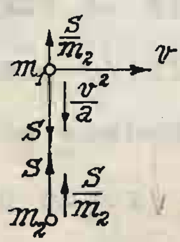


FIG. 8.

Punkt m_2 posiada szybkość początkową równą zeru, ale już w pierwszej chwili ma przyśpieszenie, mianowicie $\frac{S}{m_2}$ gdzie S oznacza naprężenie sznura. Rozpatrzmy ruch punktu m_1 względem m_2.

Przyśpieszenie punktu m_1 ma dwie składowe: unoszenia i względną. Pierwsza jest równa $\frac{S}{m_2}$ i ma kierunek m_2m_1 druga jest zwrócona do m_2 i równa $\frac{v^2}{a}$, bo torem względnym jest koło o promieniu a, a szybkość względna $=v$. Zatem przyśpieszenie całkowite wynosi $\frac{v^2}{a}-\frac{S}{m_2}$ i wywołuje je siła S, więc

$$m_1\cdot\left(\frac{v^2}{a}-\frac{S}{m_2}\right)=S \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Zwróćmy teraz uwagę na ruch bezwzględny punktu m_1. Jego przyśpieszenie styczne jest zerem, a przyśp. normalne wynosi $\frac{v^2}{\rho}$, gdzie ρ jest szukanym promieniem

xx , bo w chwili przed ruchem, żadna siła tam (w kier. v) nie działa.

krzywizny. Przyśpieszenie to wywołuje siła S, zatem

$$m_1 \cdot \frac{v^2}{\varrho} = S \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Rugując S z (1) i (2) otrzymamy $\varrho = \frac{a.(m_1+m_2)}{m_2}$

W wypadku szczególnym, gdy $m_1 = m_2$ wypadnie $\varrho = 2a$.

3. Z równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α zsuwa się naczynie z wodą. Współczynnik tarcia pomiędzy dnem naczynia i równią jest równy $tg\,\varphi$. Wyznaczyć kąt, który powierzchnia wody tworzy z równią.

Na cząsteczkę wody o masie m, położoną na samej powierzchni działa siła ciążenia mg oraz reakcya R pozostałej masy wody. Jeżeli woda pozostaje w spokoju względem naczynia, to ta reakcya jest prostopadła do powierzchni wody, a obydwie siły mg i R nadają cząsteczce przyśpieszenie p równe przyśpieszeniu naczynia, czyli $p = \frac{g\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$ jak to wynika z fig.10. Z drugiej strony, z trójkąta AMB /fig.9/ otrzymamy $\frac{mp}{mg} = \frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta}$ skąd: $p = \frac{g.\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta}$. Oczywiście szukany kąt $\vartheta = \varphi$.

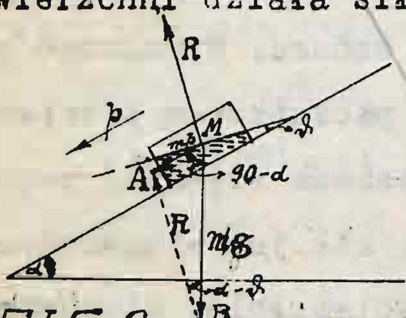


FIG.9.

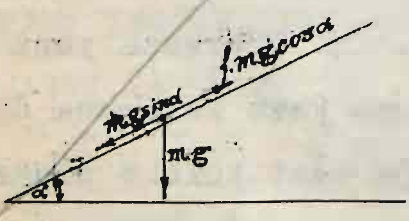


FIG 10.

4. Najwyższe naprężenie w obwodzie koła rozpędowego o promieniu r i ciężarze Q wynosi S. Wyznaczyć największą liczbę obrotów, którą może robić to koło. Oznaczmy przez n szukaną liczbę. Oczywiście największa szybkość obwodowa będzie równa: $v = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi r n}{30}$ ... (1)

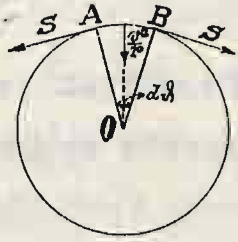


FIG. 11.

Rozpatrzmy element obwodu AB o masie m. Działają nań naprężenia S pozostałej części koła i wywołują przyśpieszenie normalne $\frac{v^2}{r}$ skierowane do O. Biorąc rzuty na kierunek tego przyśpieszenia otrzymamy $m\frac{v^2}{r}=2S\sin\frac{d\vartheta}{2}$ gdzie $d\vartheta$ oznacza kąt AB. Pomijając nieskończenie małe drugiego rzędu, podstawiając $m=\frac{Q.r.d\vartheta}{g.2\pi.r}=\frac{Q.d\vartheta}{2\pi.g}$ oraz uwzględniając (1) otrzymamy $\frac{Q.d\vartheta.\pi^2.r^2n^2}{r.2\pi.g.30^2}=S.d\vartheta$ skąd $n=30\sqrt{\frac{2.g.S}{\pi.Q.r}}$.

5. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej stoi umocowana w płaszczyźnie pionowej gładka obręcz o masie M. Na obręczy leży punkt materyalny o masie m przywiązany do końca sznura A. Sznur ten dochodzi po obręczy do jej najwyższego punktu B, następnie idzie poziomo i w drugim końcu jest umocowany nieruchomo. Kąt $AOB=\vartheta$ gdzie O oznacza

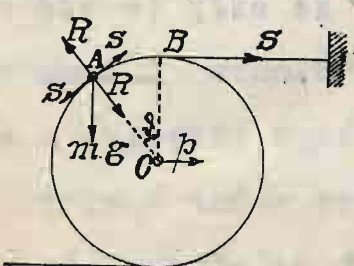


FIG. 12.

środek obręczy. Jaki powinien być kąt ϑ, aby w pierwszej chwili po wyswobodzeniu obręczy reakcya R była równa zeru? Po wyswobodzeniu ruch obręczy będzie postępowy, bo tarcia niema. W pierwszej chwili szybkość obręczy i punktu m są jeszcze zerami, ale już każde z tych ciał posiada przyśpieszenie. Przyśpieszenie obręczy $=p$; w takim razie obydwie składowe przyśpieszenia punktu m t.j. przyśpieszenie względne i unoszenia są także równe p.

Na obręcz działa reakcya punktu m oraz reakcye elementów sznura AB. Wyznaczymy naprzód wypadkową tych ostatnich.

Przypuśćmy, że pewien układ sił działa na ciało o drobnej masie. Jeżeli przyśpieszenie tej masy jest niezbyt wielkie, to siły są prawie w równowadze; znaczy to, że ich suma rzutów na dowolny kierunek lub suma momentów względem dowolnej prostej różni się niewiele od zera. Jeżeli nie uwzględniamy wcale masy owego ciała, to możemy uważać, że siły się równoważą.

W danym przypadku na sznur AB działają naprężenia S w A i B oraz reakcye, które obręcz wywiera na różne elementy. Możemy uważać, że siły te się równoważą, bo nie uwzględniamy masy sznura. Z tego wynika, że naprężenia S równoważą reakcye obręczy, a więc są równoważne z reakcyami, które sznur wywiera na obręcz. Rzuty sił, działających na obręcz, na styczną w B do obręczy dadzą równanie

$$M.p = S(1-\cos\vartheta) + R.\sin\vartheta \ldots\ldots\ldots (1.)$$

Rozpatrując ruch punktu m będziemy mieli równania następujące

$$m.p(1-\cos\vartheta) = m.g.\sin\vartheta - S \ldots\ldots\ldots (2.)$$

$$m.p.\sin\vartheta = -R + m.g.\cos\vartheta \ldots\ldots\ldots (3.)$$

Z równań $(1.)$, $(2.)$, $(3.)$ możemy wyrugować p i S.

Otrzymamy $\frac{M+m(1-\cos\vartheta)^2}{m.\sin\vartheta} = \frac{m.g.\sin\vartheta.(1-\cos\vartheta)+R\sin\vartheta}{m.g.\cos\vartheta-R}$

a zakładając $R=0$ będziemy mieli po uproszczeniu

$M.\cos\vartheta - m(1-\cos\vartheta)^2 = 0$ stąd $\cos\vartheta = \frac{M+2m-\sqrt{M^2+4Mm}}{2m}$

6. Dwa punkty materyalne A, B o masach m_1, m_2 są połączone nierozciągalną nicią, przewleczoną przez małe gładkie kółko C. Kółko to jest osadzone nieruchomo u szczytu równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α. Początkowo punkt A spoczywa na równi, część nici AC równa a leży na linii największego spadku, a część CB wisi pionowo. Nadajemy punktowi A szybkość v prostopadłą na równi do AC. Zbadać czy punkt B zacznie się wznosić, czy opadać.

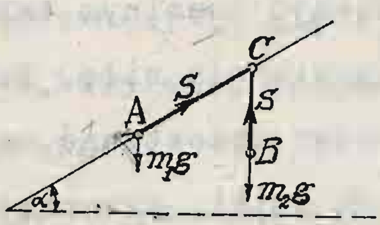


FIG. 13.

Oczywiście zależy to od tego, czy $S > m_2 g$ czy też $S < m_2 g$ gdzie S oznacza naprężenie sznura. Należy tylko wyznaczyć S.

Na ciężar m_1 działają: siła ciężkości $m_1 g$ i naprężenie sznura S. Wywołują one przyśpieszenie, którego składowa w kierunku promienia wodzącego CA wynosi $g.\sin\alpha - \frac{S}{m}$. Z drugiej strony wiadomo /par.140 cz.II/, że wogóle składowa ta wyraża się wzorem $p_r = \frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, gdzie r_1 oznacza promień wodzący w jakimkolwiek położeniu punktu m_1. W chwili początkowej $r_1 = a$ i szybkość kątowa punktu A wynosi $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{a}$ zatem $\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2}\right)_0 - \frac{v^2}{a} = g.\sin\alpha - \frac{S}{m}$ ....(1.) ,

gdzie $\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2}\right)_0$ oznacza wartość $\frac{d^2 r_1}{dt^2}$ w owej chwili po-

$v = r\,d\varphi$

czątkowej. Tak samo dla punktu B będzie

$$\left(\frac{d^2 r_2}{dt^2}\right)_0 = g - \frac{S}{m_2} \dots\dots\dots\dots\dots (2),$$

gdzie r_2 oznacza długość zwisającej części sznura.

Ponieważ: $r_1 + r_2 =$ stałej długości sznura, więc

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} = 0 : \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Dodając (1.) i (2.) i uwzględniając (3.) otrzymamy łatwo $S = \frac{v^2 + a.g.(\sin\alpha + 1)}{a.(m_1 + m_2)} \cdot m_1 . m_2$ Warunek, jaki powinien być spełniony, aby punkt B podnosił się jest $S > m_2 g$ lub $\frac{v^2 + ag.(1 - \sin\alpha)}{a(m_1 + m_2)} m_1 m_2 > m_2 g$; inaczej $\frac{m_2}{m_1} < \frac{v^2}{ag} + \sin\alpha$.

7. Ruch na torze przepisanym. Dotychczas mówiliśmy o ruchu punktu swobodnego t.j. takiego, który z każdego położenia mógłby ruszyć dowolnym torem, gdyby tylko przyłożyć doń odpowiednią siłę. Rozważymy teraz ruch punktu, zmuszonego pozostawać na pewnym określonym torze, np. ruch kulki, zawartej w sztywnej rurze, albo ruch paciórki, nawleczonej na sztywny drut. Tymczasem będziemy pomijali tarcie punktu o tor /o ściany rurki albo o powierzchnię drutu/, innemisłowy będziemy uważali tor za doskonale gładki.

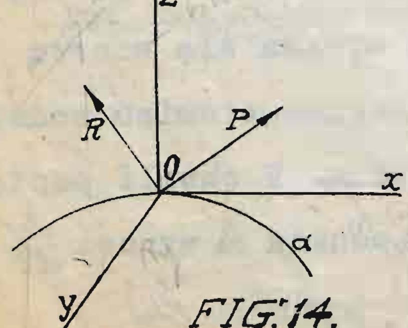


FIG.14.

Przypuśćmy więc, że punkt materyalny o masie m musi pozostawać na torze α i że działa nań siła P. W chwili t punkt m zajmuje na torze położenie O.

Obieramy układ współrzędnych w sposób następujący: początkiem będzie punkt O, osią x styczna do toru, kierunek dodatni w stronę szybkości, osią y główna normalna w stronę środka krzywizny; dyspozycya ta określa również stosownie do przyjętej umowy /par.11 cz.I/ i oś z. Oczywiście płaszczyzna xy jest ściśle styczna do krzywej α, płaszczyzna yz normalna, a oś z jest binormalną tej krzywej.

Rola mechaniczna ciała, które zmusza punkt materyalny do pozostawania na krzywej α, albo które tworzy tor α /np. rurki lub drutu/, polega tylko na tem, że wywiera ono na punkt materyalny pewną reakcyę. Jeżeli uwzględnimy tę reakcyę w rachunku, to możemy zapomnieć o istnieniu owego ciała t.j. uważać punkt m za swobodny.

Oznaczmy reakcyę toru przez R; ponieważ tor jest gładki, przeto leży ona w płaszczyźnie normalnej, czyli w płaszczyźnie yz.

Rzuty sił P na osi x,y,z oznaczymy odpowiednio przez P_x, P_y i P_z rzut reakcyi R na oś x jest zerem, a dwa rzuty pozostałe oznaczymy R_y i R_z. Przyśpieszenie leży w płaszczyźnie xy i rzuty jego na osi będą odpowiednio $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\varrho}$, 0, gdzie v oznacza szybkość punktu, a ϱ promień krzywizny toru w punkcie O. Tym sposobem otrzymamy następujące trzy równania:

$$m\frac{dv}{dt}=P_x\,,\quad \frac{mv^2}{\varrho}=P_y+R_y\,,\quad 0=P_z+R_z$$

Związki te są ważne dla każdej chwili; trzeba tylko uważać, że w każdej chwili następnej rzuty są brane na styczną, normalną główną i binormalną w tym punkcie toru, który wówczas zajmuje punkt materyalny, a nie na osi obrane pierwotnie. Jeżeli tor jest płaski i siła P działa w jego płaszczyźnie, to $P_z = R_z = 0$ i R_y oznacza reakcyę całkowitą.

Równania powyższe określają całkowicie ruch punktu, jeżeli dane jest jeszcze położenie jego i szybkość w pewnej chwili. Można z nich także wyznaczyć reakcyę toru R.

Rurka może wywierać na zawarty w niej punkt materyalny reakcyę w każdym kierunku w płaszczyźnie normalnej; toż samo dotyczy drutu z nawleczoną paciórką. W innych razach kierunek reakcyi toru musi czynić zadość pewnym warunkom. Wyobraźmy sobie np., że kulka porusza się nie w rurce, lecz w żłobie lub rowku. Oczywiście reakcya nie może tu przekroczyć granic pewnego kąta w płaszczyźnie normalnej.

Albo przypuśćmy, że torem jest skrawek kołowej powierzchni cylindrycznej, czyli obręcz kołowa, a punkt materyalny znajduje się po stronie wewnętrznej. Oczywiście reakcya może tylko działać na promieniu obręczy w kierunku środka.

Równania powyższe są ważne tylko dopóty, dopóki określony przez nie kierunek reakcyi czyni zadość postawionym warunkom. Jeżeli znajdziemy, że w pewnym miejscu reakcya wyszła ze wskazanych granic, to wnioskujemy, że dalszy ruch na przepisanym torze był nie-możliwy, a zatem punkt materyalny tor ten opuścił. Dalszy ruch punktu odbywa się już w innych warunkach a zatem i równania ruchu będą inne.

8. Przykłady. 1. Dajmy na to, że na punkt materyalny o masie m, poruszający się po okręgu koła o promieniu r działa tylko reakcya toru R. Reakcya ta jest zwrócona do środka koła O, a co do wielkości $= m\cdot\frac{v^2}{r}$ gdzie v oznacza szybkość punktu.

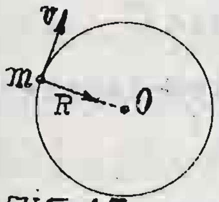


FIG.15.

2. Po moście kolejowym porusza się z szybkością v wagon o ciężarze Q. Wyznaczyć reakcyę R mostu na wagon lub wagonu na most. Przyśpieszenie wagonu w kierunku pionowym wynosi $\frac{v^2}{\rho}$ gdzie ρ oznacza promień krzywizny odkształconego mostu. Zatem

$$R = Q + \frac{Q}{g}\cdot\frac{v^2}{\rho} = Q\left(1 + \frac{v^2}{g\cdot\rho}\right)$$

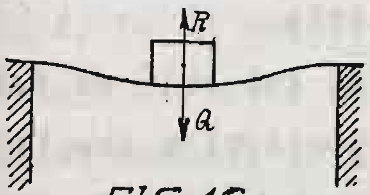


FIG. 16.

Widzimy stąd, że reakcya mostu wzrasta wraz z szybkością wagonu, a także z krzywizną $\frac{1}{\rho}$, czyli w miarę odkształcania mostu.

3. Dwa jednakowe punkty materyalne o masach m umieszczono w dwóch gładkich prostych rurkach, przecinających się pod kątem prostym. Punkty się przyciągają i ruszają ze stanu spokoju. Okazać, że dojdą one jednocześnie do punktu przecięcia rurek, jakiekolwiek jest prawo przyciągania.

Obieramy rurki za osi współrzędnych, współrzędne punktów materyalnych w chwili t oznaczamy przez

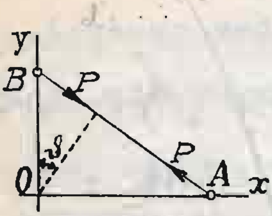


FIG.17.

$(x,0)$ i $(0,y)$ a kąt, który prosta łącząca tworzy z osią x przez ϑ. Będzie wówczas $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-P\cos\vartheta$, $m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=-P\sin\vartheta$

Z tego otrzymamy łatwo $x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0$ czyli $d\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$, ostatecznie $y=C.x$ gdzie C jest stałą całkowania. Gdy więc $x=0$, to i $y=0$ niezależnie od prawa przyciągania.

4. Paciórka o masie m jest nawleczona na drut, tworzący koło o promieniu a. W początku paciórka pozostawała w spokoju w położeniu A, gdy drut zaczął się obracać ze stałą szybk. kątową ω około punktu położonego na przeciwległym końcu średnicy przez A. Wyznaczyć reakcyę R drutu na paciórkę.

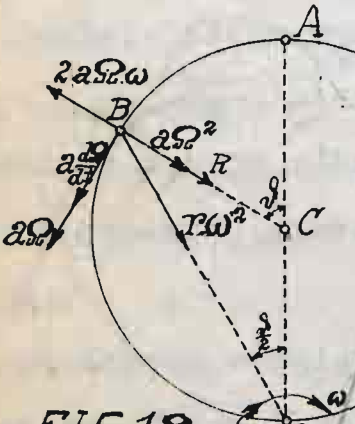


FIG.18.

Oznaczmy łuk od A do położenia paciórki w chwili t B przez $a\vartheta$ i jej szybkość względną przez $a.\Omega$. Przyśpieszenie bezwzględne paciórki posiada składowe następujące: 1/ przyśpieszenie unoszenia $r.\omega^2$, 2/ dwa przyśpieszenia względne /normalne i styczne/ $a.\Omega^2$ oraz $a\cdot\frac{d\Omega}{dt}$ 3/ przyśpieszenie Coriolisa $2a\Omega\omega$.

Biorąc rzuty na promień koła i styczną, otrzymamy równania: $R=m(a.\Omega^2+r.\omega^2\cos\frac{\vartheta}{2}-2a\Omega)$.....(1), $a\frac{d\Omega}{dt}+r.\omega^2\sin\frac{\vartheta}{2}=0$

Ponieważ $r=2a.\cos\frac{\vartheta}{2}$ zatem z równania drugiego wypadnie $\frac{d\Omega}{dt}=-\omega^2\sin\vartheta$. Stąd $\frac{d\vartheta}{dt}\cdot d\Omega=\omega^2\sin\vartheta\,d\vartheta$ Ale $\frac{d\vartheta}{dt}=\Omega$, zatem $\Omega . d\Omega = -\omega^2 \sin\vartheta d\vartheta$, a całkując otrzymamy

$$\frac{\Omega^2}{2} = \omega^2 . \cos\vartheta + A \;, \ldots\ldots\ldots (2.)$$

gdzie A jest stałą całkowania. Gdy $\vartheta = o$, to szybkość względna była równa $2a\omega$ i $\Omega = 2\omega$, zatem $A = \omega^2$.

Podstawiając to do $(2.)$ będziemy mieli $\Omega = 2\omega . \cos\frac{\vartheta}{2}$, a stąd $R = m(4a.\omega^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} + 2a.\omega^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} - 4a.\omega^2 \cos\frac{\vartheta}{2})$ lub po uproszczeniu $R = 2am.\omega^2 \cos\frac{\vartheta}{2}(3\cos\frac{\vartheta}{2} - 2)$. Reakcya ta jest początkowo dodatnia, następnie zmniejsza się, gdy $\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3}$, to staje się zerem, poczem przybiera wartości ujemne.

[Gdyby torem przepisanym punktu materyalnego była wewnętrzna strona gładkiej obręczy i gdyby pozostałe warunki były takie same, jak w poprzedzającym przykładzie, to od chwili, w której $\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3}$, punkt przestałby się stykać z obręczą i poszedłby w myśl pierwszego prawa Newtona po linji prostej.]

Znajdźmy, po jakim czasie paciórka dojdzie do O. Z równania $\frac{d\vartheta}{dt} = 2a.\omega\cos\frac{\vartheta}{2}$, otrzymamy po zcałkowaniu

$$\log . tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{4}\right) = \omega t + B \ldots\ldots\ldots (1.)$$

gdzie B oznacza stałą całkowania. Gdy $t = o$, to $\vartheta = o$ zatem $B = o$. Paciórka dojdzie do O, gdy będzie $\vartheta = \pi$, co podstawiając w $(1.)$ znajdziemy $t = \infty$. Paciórka zbliża się więc asymptotycznie do O.

9. Spadek na torze przepisanym. Rozważymy oddzielnie przypadek, w którym ciało porusza się na gładkim torze przepisanym pod działaniem siły ciążenia. Układ współrzędnych obierzemy inaczej, niż w paragrafie 7. Początek możemy wziąć dowolnie, a oś x skierujemy pio