Oznaczmy tę szybkość przez v_0, a kąt, który ona tworzy z poziomem przez α, jak wiadomo z cynematyki, będzie $x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

W chwili uderzenia pocisk otrzymuje w kierunku pionowym impuls $\int N dt$, znoszący składową pionową szybkości, oraz w kierunku poziomym impuls $f\int N dt = \int N dt$ zmniejszający odpowiednio składową poziomą.

Tak więc $\int N dt = m v_0 \sin \alpha$ i zatem szybkość pocisku zaraz po uderzeniu wyniesie $u_0 = v_0 \cos\alpha - f v_0 \sin\alpha$, albo $u_0 = v_0 \cos\alpha - v_0 \sin\alpha$, bo $f = 1$.

W dalszym ruchu na pocisk będzie działała odwrotna do jego szybkości siła tarcia $= mg$, która wywoła przyśpieszenie $= -g$. Z tego wynika, że szybkość ta wyczerpie się gdy pocisk przebędzie drogę

$$x_2 = \frac{u_0^2}{2g} = \frac{v_0^2 (\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{2g}.$$

Szukana odległość od O wynosi zatem

$$x_1 + x_2 = \frac{v_0^2}{2g}(1 + \sin 2\alpha)$$

Wzór ten jest słuszny tylko pod warunkiem, że tarcie jest całkowicie rozwinięte, to zaś zachodzi, gdy u_0 jest > 0, czyli gdy $v_0 \cos\alpha - v_0 \sin\alpha > 0$, t.j. $\alpha < 45°$

ROZDZIAŁ IX.

O PODOBIEŃSTWIE W MECHANICE.

103. Podobieństwo geometryczne. Niech będą dwa prostokątne układy współrzędnych; osi ich oznaczymy odpowiednio przez x, y, z i x', y', z', a początki przez

O i O'. Przypuśćmy, że do każdego z tych układów odniesiono pewną figurę geometryczną, przyczem każdemu punktowi (x,y,z) pierwszej figury odpowiada punkt (x',y',z') figury drugiej.

Jeśli pomiędzy współrzędnemi x i x', y i y', z i z' zachodzą związki następujące

$$x' = \lambda x \quad ; \quad y' = \lambda y \quad ; \quad z' = \lambda z$$

gdzie λ jest liczbą oderwaną, stałą dla wszystkich punktów rozważanych figur, to powiemy, że figury te są <u>geometrycznie podobne.</u>

Niech będą teraz w pierwszej figurze punkty $A_1(x_1.y_1.z_1)$ i $A_2(x_2.y_2.z_2)$ i dajmy na to, że odpowiadają im w drugiej figurze punkty $A_1'(x_1',y_1',z_1')$ i $A_2'(x_2',y_2',z_2')$. Odległości A_1A_2 i $A_1'A_2'$ oznaczmy przez r i r'

Z geometryi analitycznej wiadomo, że

$$r = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \quad \ldots \quad (1)$$

$$r' = \sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2} \quad \ldots \quad (2)$$

Ale $x_1' = \lambda . x_1$; $x_2' = \lambda . x_2$; $y_1' = \lambda . y_1$; i t.d; gdy podstawimy to w $(2.)$ i porównamy z (1), to wypadnie

$$r' = \lambda r$$

<u>Tak więc stosunek odpowiadających sobie odcinków jest równy λ.</u>

Przypuśćmy dalej, że w pierwszej figurze mamy powierzchnię, o równaniu $F(x,y,z) = 0$. Każdemu punktowi tej powierzchni odpowiada pewien punkt figury drugiej i miejsce geometryczne tych punktów odpowiadających będzie znowu pewną powierzchnią. Dowiedziemy, że równaniem jej będzie $F(x', y', z')=0$. Istotnie: x, y, z są to liczby, wyrażające, ile jednostek długości jest zawartych we współrzędnych pewnego punktu powierzchni F. Jest rzeczą oczywistą, że postać równania tej powierzchni jest niezależna od obranych przez nas jednostek i długości. Obierzmy jednostkę λ razy mniejszą od poprzedniej, wówczas zamiast x, y, z napiszemy w równaniu $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ i te wartości uczynią mu zadość.

Tak więc: $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=0$.

Lecz $\lambda x = x', \lambda y = y', \lambda z = z'$, więc $F(x', y', z')=0$.

Jeśli w pierwszej figurze mamy płaszczyznę, to powierzchnią odpowiadającą w figurze drugiej jest również płaszczyzna, bo skoro równanie pierwszej jest liniowe, to i równ. drugiej musi być liniowe.

Dajmy na to, że w pierwszej figurze mamy linię, wyrażającą się równaniami $f(x,y,z)=0$ i $g(x,y,z)=0$. Można dowieść taksamo, jak poprzednio, że linii tej odpowiada w figurze drugiej linia, o równaniach $f(x',y',z')=0$ i $g(x',y',z')=0$. Z tego wynika, że np. prostej odpowiada prosta.

Niech będzie w pierwszej figurze prosta OA, tworząca z osiami kąty α, β, γ i przypuśćmy, że odpowiada jej w drugiej figurze prosta $O'A'$ której kąty kierunkowe są równe α', β', γ'.

Chodzi o wyznaczenie związków, zachodzących pomiędzy odpowiednimi kątami kierunkowymi.

Gdy oznaczymy OA przez r, a $O'A'$ przez r', to będzie

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}\ ,\ \cos\alpha' = \frac{x'}{r'}$$

ale $x' = \lambda x,\ r' = \lambda r$, zatem $\cos\alpha = \cos\alpha'$ i $\alpha = \alpha'$.

Tak samo otrzymamy $\beta = \beta'.\ \gamma = \gamma'$.

Widzimy zatem, że kąty kierunkowe odpowiadających sobie prostych są równe, a z tego wynika, że wogóle kąty pomiędzy odpowiadającemi sobie prostemi są równe.

Dajmy na to, że pole jakiejś części figury pierwszej jest równe F, a pole odpowiadającej cześci figury drugiej wynosi F'. Mamy wyznaczyć związek F i F'

Pole F można przedstawić, jako sumę wyrazów, zawierających iloczyny dwóch długości, a więc wyrazów typu $\alpha r_1 r_2$ gdzie α jest liczbą oderwaną; tak więc

$$F = \Sigma\, \alpha r_1 r_2\ .$$

Tak samo będzie

$$F' = \Sigma\, \alpha r_1' r_2'\ .$$

Ale $r_1' = \lambda r_1\ ;\ r_2' = \lambda r_2$, zatem $F' = \lambda^2 \Sigma\, \alpha r_1 r_2$, albo

$$F' = \lambda^2 . F\ .$$

Widzimy więc, że stosunek dwóch odpowiadających sobie pól jest równy λ^2.

Przypuśćmy wreszcie objętość pewnej części figury pierwszej jest $= V$, a objętość odpowiedniej części figury drugiej $= V'$

Dowiedlibyśmy zupełnie tak samo, jak poprzednio że $V' = \lambda^3 . V$, że więc stosunek dwóch odpowiadających sobie objętości jest równy λ^3.

104. Podobieństwo cynematyczne. Niech będą znowu dwa prostokątne układy współrzędnych; ich osi i początki oznaczymy jak poprzednio.

Przypuśćmy, że do każdego z tych układów odniesiono pewną figurę geometryczną ruchomą, albo układ ruchomy, sztywny, lub nie sztywny.

Dajmy na to, że w początku rachuby czasu układy owe były geometrycznie podobne, i że współczynnik podobieństwa był $=\lambda$. Przypuśćmy dalej, że układ pierwszy w dowolnej chwili t jest podobny do układu drugiego w chwili $\tau.t$, gdzie τ jest liczbą stałą, oderwaną, przyczem współczynnik podobieństwa geometrycznego jest wciąż $=\lambda$. Powiemy, że rozważane układy są podobne cynematycznie, a liczby λ i τ nazwiemy współczynnikami tego podobieństwa.

Niech będą dwa układy cynematycznie podobne. Obierzmy w pierwszym z nich jakiś punkt A, który w chwili t posiada współrzędne x, y, z i szybkość v. Przypuśćmy, że punktowi temu odpowiada w drugim układzie punkt A' posiadający w chwili τt współrzędne x', y', z' i szybkość v'. Chodzi o związek szybkości v i v'.

Rozłóżmy te szybkości w kierunkach osi i składowe oznaczymy odpowiednio przez $v_x, v_y, v_z; v_x', v_y', v_z'$. Oczywiście będzie

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_x' = \frac{dx'}{d(\tau t)} ,$$

a ponieważ $x' = \lambda x$ i $dx' = \lambda dx$, a także $d(\tau t) = \tau dt$, więc

$$v_x' = \frac{\lambda dx}{\tau dt} \quad , \quad v_x' = \qquad v_x' = \frac{\lambda}{\tau} v_x$$

Tak samo

$$v_y' = \frac{\lambda}{\tau} v_y$$

$$v_z' = \frac{\lambda}{\tau} v_z$$

i $$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2} = \frac{\lambda}{\tau} v$$

Zatem stosunek odpowiadających sobie szybkości jest równy $\frac{\lambda}{\tau}$.

Oznaczmy kąty kierunkowe szybkości v i v' odpowiednio przez $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$. Otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \; ; \; \cos\alpha' = \frac{v_x'}{v'} = \frac{v_x}{v} \; ,$$

więc $\alpha = \alpha'$. Tak samo $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$.

Widzimy więc, że odpowiadające sobie szybkości tworzą z osiami kąty równe.

Wyznaczymy teraz zależność, zachodzącą pomiędzy przyśpieszeniem p punktu A w chwili t i przyśpieszeniem p' punktu A' w chwili τt.

Wprowadzając oznaczenia analogiczne do poprzednich, będziemy mieli

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad p_x' = \frac{d^2x'}{d(\tau t)^2}$$

a wprowadzając tu $x' = \lambda x$ albo $d^2x' = \lambda d^2x$ otrzymamy

$$p_x' = \frac{\lambda d^2x}{\tau^2 dt^2} \quad \text{lub} \quad p_x' = \frac{\lambda}{\tau^2} p_x \, ,$$

Tak samo

$$p_y' = \frac{\lambda}{\tau^2} p_y \, ,$$

$$p_z' = \frac{\lambda}{\tau^2} p_z$$

i

$$p' = \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} p$$

Stosunek odpowiadających sobie przyśpieszeń jest więc równy $\frac{\lambda}{\tau^2}$ i łatwo dowiść, każde z tych przyśpieszeń tworzy z osiami jednakowe kąty.

105. Podobieństwo dynamiczne. Niech będą znowu dwa układy współrzędnych; osi i początki oznaczymy jak poprzednio.

Przypuśćmy, że w każdym z nich znajduje się układ punktów materjalnych, przyczem każdemu punktowi pierwszego układu odpowiada punkt układu drugiego.

Załóżmy, że pomiędzy owymi układami zachodzi podobieństwo cynematyczne, przyczem współczynnikami są λ i τ. Jeśli prócz tego elementowi pierwszego układu o masie m odpowiada element układu drugiego, o masie μm, gdzie μ oznacza współczynnik stały dla wszystkich elementów, to mówimy: układy są podobne dynamicznie, a λ, τ i μ nazywamy współczynnikami tego podobieństwa.

Chodzi o rozwiązanie następującego zadania: na układ pierwszy działają pewne siły zewnętrzne i wewnętrzne; jakie siły zewnętrzne i wewnętrzne powinny działać na drugi układ, aby zachodziło podobieństwo dynamiczne?

Pytanie, tak postawione jest nieokreślone, bo jak wiemy z teoryi modelu ciała można różnymi sposobami uczynić temu zadość.

Aby mieć do czynienia z czemś określonem, postawimy jeszcze ten warunek, żeby każdej sile /zewnętrznej lub wewnętrznej/, działającej na pierwszy układ odpowiadała siła /zewnętrzna lub wewnętrzna/, działająca na układ drugi; przyczem punktami przyłożenia odpowiadających sił powinny być odpowiadające elementy i odpowiednie kąty kierunkowe takich dwóch sił mają być równe.

Przypuśćmy więc, że na punkt materyalny o masie m w układzie pierwszym działa pewien układ sił zewnętrznych i wewnętrznych. Wypadkową pierwszych z nich oznaczymy przez Q, wypadkową pozostałych przez S, a wypadkową sił Q i S przez P. Ta ostatnia jest siłą czynną; nada ona punktowi m w swym własnym kierunku przyśpieszenie p.

Podobne rozważania dotyczą punktu m', który odpowiada m w układzie drugim; odpowiednie wielkości oznaczymy dlań literami Q', S', P', p.

Wyznaczymy zależność przyśpieszeń p i p':

Zgodnie z założeniem odpowiadające sobie siły tworzą z osiami jednakowe kąty, a więc równoległobok, zbudowany na siłach Q i S jest podobny do równoległoboku, utworzonego na Q' i S', a z tego znów wynika, że stosunek sił Q i Q', S i S', P i P' są równe. Oznaczmy je przez π.

Tak więc $P' = \pi P$.

ale $P = mp$, $P' = m'p'$, zatem $m'p' = \pi mp$,

a ponieważ $p' = \frac{\lambda}{\tau^2} p$, $m' = \mu m$, więc:

$$\pi . P = \mu . m . \frac{\lambda}{\tau^2} p$$

albo

$$\pi = \mu . \frac{\lambda}{\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cztery liczby λ, τ, μ, π są to współczynniki podobieństwa dynamicznego.

Współczynniki te nie są, jak widzimy, od siebie niezależne; trzy z nich można wybrać dowolnie, czwarty wypadnie z wzoru (1.).

106. Przykłady. 1. Przypuśćmy, że punkt O jest środkiem słońca, a m oznacza planetę, o masie m, przyczem odległość mO jest $= r$. Na planetę działa, jak wiadomo, siła skierowana do słońca i wynosząca $P = \frac{\alpha m}{r^2}$, gdzie α jest współczynnikiem proporcyonalności. Pragniemy zbudować model tego układu, podobny doń dynamicznie, przyczem współczynnikami tego podobieństwa mają być liczby λ, μ, τ, π.

W tym celu obieramy nieruchomy punkt O' i punkt materyalny, o masie m', odległy od O' o r'. Siła, działająca na ten punkt materyalny powinna być skierowana do O' i równa $P' = \frac{\alpha m'}{r'^2}$, jeśli współcz. prop. wynosi znowu α.

Lecz $m' = \mu m$; $r' = \lambda r$; $P' = \pi P$, zatem $\pi P = \frac{\alpha \mu . m}{\lambda^2 r^2}$, lub

$$\pi = \frac{\mu}{\lambda^2} .$$

z drugiej strony $\pi = \frac{\lambda\mu}{\tau^2}$, więc $\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{\lambda\mu}{\tau^2}$ skąd

$$\tau^2 = \lambda^3$$

Z tego wynika, że stosunek kwadratów odpowiednich czasów jest równy stosunkowi sześcianów odpowiednich długości.

Torami planet /oryginału i modelu/, są elipsy podobne, możemy więc powiedzieć, że stosunek kwadratów czasów obiegów jest taki sam, jak stosunek sześcianów wielkich osi odpowiednich elips. Lecz jest to drugie prawo Kepplera które dotyczy wszystkich planet układu słonecznego.

Widzimy więc, że każdą planetę można uważać za model dynamiczny którejkolwiek innej, a z tego znów wynika, że α jest dla wszystkich planet wielkością stałą, czyli że materya z której są złożone te planety, posiada jednakowe własności grawitacyjne.

2. Dajmy na to, że mamy dwie maszyny parowe dynamicznie podobne, przyczem współczynnikami podobieństwa są liczby λ, μ, τ, π.

Wyznaczyć stosunek szybkości i sprawności tych maszyn.

Jeżeli maszyny te są zrobione z takiego materyału, to stosunek mas odpowiednich elementów jest równy stosunkowi odpowiednich objętości, czyli $\mu = \lambda^3$. Przypuśćmy dalej, że obydwie maszyny są zasilane parą z tego samego kotła, czyli że stosunek sił działających na tłok i jest równy stosunkowi odpowiednich pól t.j. $\pi = \lambda^2$.

Na każdą z maszyn działa jeszcze siła zewnętrzna, mianowicie opór, który dana maszyna ma pokonać. Stosunek tych oporów musi być też $=\lambda^2$, bo maszyny są podobne dynamicznie.

Dalej mamy $\pi = \frac{\lambda\mu}{\tau^2}$; gdy podstawimy tu $\mu=\lambda^3$ i $\pi=\lambda^2$, to wypadnie $\frac{\lambda}{\tau}=1$; lecz $\frac{\lambda}{\tau}$ jest to stosunek odpowiednich szybkości, a więc szybkości liniowe odpowiednie obydwóch maszyn powinny być równe.

Stosunek odpowiednich szybkości kątowych wynosi $\frac{1}{\lambda}$ bo jest on odwrotnością stosunku promieni odpowiednich kół rozpędowych.

Maszyna mniejsza posiada więc $\frac{1}{\lambda}$ razy większą szybkość kątową /i liczbę obrotów/, niż maszyna większa.

Sprawności maszyn są proporcyonalne do szybkości liniowych i sił. Lecz szybkości liniowe obydwóch maszyn są równe, a z tego wynika, że stosunek sprawności jest taki sam jak stosunek odpowiednich sił, czyli wynosi λ^2. Tak więc naprz. gdy $\lambda=\frac{1}{2}$, to mniejsza maszyna posiada liczbę obrotów dwa razy większą, a sprawność 4 razy mniejszą od sprawności maszyny większej.

3. Projektowanie okrętu odbywa się zwykle tak: obiera się wymiary i kształt kadłubu i szybkość v z jaką okręt ma płynąć, poczem należy obliczyć sprawność motoru.

Sprawność ta jest równa iloczynowi z oporu R, który woda stawia ruchowi okrętu przez szybkość v. Rzecz cała sprowadza się więc do wyznaczenia owego oporu.

Jedną z metod, która prowadzi do tego podał Froude. Buduje się model okrętu w skali λ, mierzy się opór, jaki ten model napotyka podczas ruchu w wodzie i z tego wyznacza się opór

Jeśli materyały oryginału i modelu są jednakowe, to odpowiednie masy są proporcjonalne do odpowiednich objętości, a więc $\mu = \lambda^3$.

W danym razie ważną rolę odgrywają siły ciążenia. Stosunek tych sił w okręcie i modelu jest równy stosunkowi mas, a zatem: $\pi = \mu = \lambda^3$. Z drugiej strony $\pi = \frac{\lambda\mu}{\tau^2}$ więc $\frac{\lambda\mu}{\tau^2} = \lambda^3$, skąd $\tau = \sqrt{\lambda}$.

Stosunek odpowiednich szybkości wynosi $\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$ gdy więc naprz. model jest zbudowany w skali $\lambda = \frac{1}{25}$, to szybkość jego powinna być 5 razy mniejsza od szybkości oryginału.

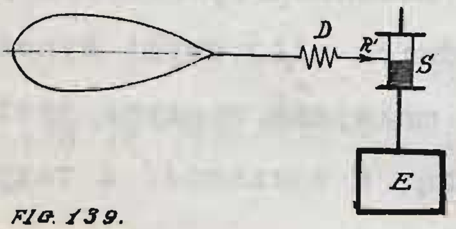

FIG. 139.

Doświadczenie może być np. wykonywane tak: model umieszczamy w basenie z wodą, do modelu przywiązujemy linkę, w którą wtrącamy dynamometr D. Z drugiej strony linka jest nawinięta na bęben S, który jest obracany przez motor elektryczny E. Gdy puścimy motor ze stosowną szybkością, to linka będzie się nawijała na bęben, ciągnąc model i w lince powstanie naprężenie równe oporowi, który woda stawia modelowi. Wielkość tego oporu odczytamy więc wprost na dynamometrze. Przypuśćmy, że wynosi on R'.

Lecz $R' = \pi R$, a ponieważ $\pi = \lambda^3$ więc $R' = \lambda^3 R$, skąd :

$R = \frac{R'}{\lambda^3}$ Temu jest więc równy szukany opór.

W rozumowaniu powyższem popełniliśmy pewną nieścisłość.

Założyliśmy, że $R' = \lambda^3 R$, ale to nie jest à priori pewne, bo może pomiędzy okrętem a takim modelem podobieństwo dynamiczne nie istnieje. Trzeba sprawdzić, że istotnie stosunek odpowiednich sił jest $= \lambda^3$. Z gruba można się o tem przekonać tak: opór, napotykany przez okręt jest w przybliżeniu wprost proporcyonalny do powierzchni F, którą okręt przeciwstawia wodzie i do kwadratu szybkości. Tak więc $R = \alpha F v^2$, gdzie α oznacza współczynnik proporcyonalności, a : $R' = \alpha . F' v'^2 =$

$= \alpha . \lambda^2 . F . v^2 . \lambda$. Dzieląc R' przez R zobaczymy, że istotnie $\frac{R'}{R} = \lambda^3$.

Widzimy zatem, że mamy prawo założyć, że okręt i model są podobne dynamicznie.

KONIEC.

BIBLIOTEKA
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

KOŁO MECHANIKÓW
BIBLJOTEKA
S. P. W.

SPIS RZECZY.

DYNAMIKA PUNKTU MATERYALNEGO.

ROZDZIAŁ I.

PRAWA NEWTONA.-