Podobnie dla drugiego drutu będzie:

$H_1 = m(a_1^2 - b_1^2)\omega + mr^2\omega$, gdzie a_1 i b_1 mają znaczenia analogiczne do a i b, a r = odległości środka ciężkości drutu (C_1) od punktu B

Uwzględniając związki:

$r^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cdot \cos 45°$, $a_1 = 2a$, oraz $b_1 = \dfrac{a_1 \sin 45°}{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

znajdziemy że

$$\frac{H}{H_1} = \frac{\pi}{4(\pi - 2)} \cong \frac{11}{16}.$$

ROZDZIAŁ VII.

RUCH KULISTY.

79. Ruch bez udziału sił. Dajmy na to, że punkt O ciała sztywnego jest osadzony nieruchomo, a zatem może ono mieć ruch kulisty około środka O

Przypuśćmy, że początkowo ciało pozostawało w spokoju, a następnie zostało uderzone przez ciało inne. Uderzenie to wytworzy moment ilości ruchu H względem punktu O, prostopadłej do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez linię działania siły chwilowej. Jeżeli w dalszym ciągu na ciało żadne siły nie działają, oprócz reakcyi w O, to wektor H zachowa stałą wielkość i kierunek, gdyż moment owej reakcyi względem O jest zerem, a więc nie wytwarza ona żadnych przyrostów wektora H.

Przytem reakcya ta oczywiście nie pracuje a zatem siła żywa ciała będzie również stała. Oznaczymy tę siłę żywą przez $\frac{T}{2}$, czyli podwójną siłę żywą przez T

Aby zdać sobie sprawę z ruchu ciała, trzeba zbadać jeszcze szybkość kątową ω co do wielkości i kierunku. Jeżeli wektor H powstał w kierunku jednej z osi głównych punktu O, to taki sam kierunek przybrał i wektor ω. Wiemy, że i w dalszym ciągu ciało będzie wciąż wirowało około tejże prostej, gdyż ta jest osią swobodną. Wektor ω posiada w tym razie stałą wielkość i kierunek.

Jeżeli wektor H powstanie nie na osi głównej punktu O, to ω przybierze kierunek odmienny. Gdybyśmy chcieli aby ω zachowało stale ten kierunek w ciele i w przestrzeni, t.j. aby ciało wciąż wirowało około tejże prostej, to trzebaby je do tego zmusić, przykładając odpowiednie siły. ponieważ siły takie nie działają, przeto ω będzie wciąż zmieniało kierunek i w ciele i w przestrzeni, będzie więc istnieć stożek stały i stożek ruchomy osi chwilowych.

Oznaczmy momenty bezwładności ciała względem osi głównych punktu O przez A, B, C i przypuśćmy, że w chwili t składową szybkości kątowej w kierunkach tych osi wynoszą $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. W takim razie momenty ilości ruchu względem tychże osi, albo składowe wektora H w ich kierunkach będą $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$ a zatem

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

niezmienniki

Dalej będzie

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pomnóżmy (2) przez A i odejmijmy od tego (1)

$A\omega_x^2$

$$B(A-B)\omega_y^2 + C(A-C)\omega_z^2 = AT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

W podobny sposób otrzymamy dwa inne równania analogiczne.

$$C(B-C)\omega_z^2 + A(B-A)\omega_x^2 = BT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$A(C-A)\omega_x^2 + B(C-B)\omega_y^2 = CT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Założymy, że momenty A, B, C są nierówne, i że

$$A > B > C$$

W takim razie, jak widać z (3), $AT - H^2$ jest dodatnie, gdyż różnice $A-B$ oraz $A-C$ są dodatnie, a wszystkie wielkości, występujące w rownaniach t.j. momenty bezwładności, siła żywa oraz kwadraty szybkości kątowych i momentu ilości ruchu są dodatnie z natury rzeczy. Tak samo wynika z (5), że $CT - H^2$ jest ujemne, bo obydwie różnice $C-A$ i $C-B$ są ujemne. Natomiast $BT - H^2$ w pewnych razach bywa dodatnie, w innych ujemne, gdyż pierwszy wyraz lewej strony równania (4) jest dodatni, a drugi ujemny.

Pomnóżmy równania (3), (4) i (5) odpowiednio przez $A\omega_x^2$, $B\omega_y^2$, $C\omega_z^2$ i dodajmy stronami. Wypadnie:

$$A(AT-H^2)\omega_x^2 + B(BT-H^2)\omega_y^2 + C(CT-H^2)\omega_z^2 = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

Moglibyśmy dojść do tego samego bezpośrednio, mnożąc (1.) przez T, (2.) przez H^2 i odejmując.

Obierzmy osi główne punktu O za osi współrzędnych. Osi te są wprawdzie ruchome, ale z okolicznością tą możemy się nie liczyć, gdyż chodzi tu jedynie o stan cynematyczny ciała w chwili t. Oznaczmy współrzędne końca wektora ω przez x, y, z. Są one oczywiście proporcjonalne do ω_x, ω_y, ω_z, a więc na zasadzie (6.) napiszemy

$$A(AT-H^2)x^2+B(BT-H^2)y^2+C(CT-H^2)z^2=0$$

Wszystkie trzy współczynniki są tu stałe, a więc równaniu temu odpowiada powierzchnia związana z ciałem, albo poprowadzona w ciele; jest to stożek drugiego stopnia, symetryczny względem płaszczyzny współrzędnych i posiadający wierzchołek w początku układu. Początek wektora ω leży w wierzchołku tego stożka, a koniec musi zawsze leżeć na powierzchni; z tego wynika, że jest to stożek ruchomy osi chwilowych.

Wprowadzimy dla krótkości oznaczenia następujące:

$$A(AT-H^2)=m^2\ ;\ B(BT-H^2)=\pm n^2\ ;\ C(CT-H^2)=-p^2\ .$$

Tym sposobem równanie stożka ruchomego osi chwilowych w odniesieniu do osi głównych punktu O przybierze jedną z postaci następujących:

$$m^2x^2+n^2y^2-p^2z^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.)$$

$$m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.)$$

Przypuśćmy, że zachodzi pierwszy z tych wypadków. Poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi z w odległości z_1 od O, czyli płaszczyznę $z = z_1$. Przetnie ona stożek według linii, której rzut na płaszczyznę xy będzie miał równanie

$$m^2x^2 + n^2y^2 = p^2z_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Jest to oczywiście elipsa, której środek leży w początku układu.

Sama krzywa przekroju nie różni się niczem od tego rzutu, a środek jej leży na osi z. Widzimy z tego, że osią stożka jest oś z czyli oś najmniejszego momentu punktu O.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi przypadek drugi. Prowadzimy płaszczyznę $x = x_1$, prostopadłą do osi x. Równanie rzutu przekroju na płaszczyznę yz będzie

$$n^2y^2 + p^2z^2 = m^2x_1^2$$

Stąd widać, że w tym razie osią stożka jest prosta x, czyli oś największego momentu punktu O.

Tak więc stożek ruchomy osi chwilowych jest zawsze eliptyczny, czyli drugiego stopnia osią jego jest albo oś najmniejszego momentu, albo oś największego momentu punktu O. W żadnym razie osią tego stożka nie może być oś średniego momentu. Wynika stąd pewien ważny wniosek, jak zobaczymy w par. 81.

80. Przykłady. 1. Ciało sztywne może poruszać

się swobodnie około punktu O i posiada momenty bezwładności A, B, C względem jego osi głównych. Wymierzamy uderzenie w punkt P, którego współrzędne w odniesieniu do osi głównych są (x, y, z).—

Okazać, że jeżeli szybkość kątowa ciała ma być jaknajwiększa, to: 1° kierunek uderzenia powinien być prostopadły do OP; 2° kosynusy kierunkowe a, b, c tego kierunku powinny czynić zadość równaniu:

$$\frac{x}{a}\left(\frac{1}{B^2}-\frac{1}{C^2}\right)+\frac{y}{b}\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right)+\frac{z}{c}\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{B^2}\right)=0$$

Wyrazimy naprzód ω w funkcji a, b, c. W tym celu oznaczmy wymierzony impuls przez F, a składowe wektora ω w kierunkach osi przez ω_x, ω_y i ω_z.—

Rzut wektora H na oś z czyli H_z jest równy $C\omega_z$ albo momentowi impulsu F względem owej osi. Stąd mamy $x.F.b - y.F.a = C\omega_z$

$$\omega_z = \frac{F(x.b - y.a)}{C}$$

Tak samo będzie

$$\omega_x = \frac{F(y.c - z.b)}{A}$$

$$\omega_y = \frac{F(z.a - x.c)}{B}$$

a więc

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = F^2\left[\frac{(yc-zb)^2}{A^2} + \frac{(za-xc)^2}{B^2} + \frac{(xb-ya)^2}{C^2}\right]$$

Pomiędzy wielkościami a, b, c zachodzi przytem znany związek: $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$

Aby wyznaczyć maksymum ω tworzymy funkcyę

$$u = F^2\left[\frac{(yc-zb)^2}{A^2} - \frac{(za-xc)^2}{B^2} - \frac{(xb-ya)^2}{C^2}\right] - \lambda(a^2+b^2+c^2-1) ,$$

gdzie λ nie zależy od a, b, c. Funkcya ta osiąga, jak wiadomo, maksymum dla tych samych wartości zmiennych a, b, c, co i ω^2 i możemy uważać u za funkcye trzech zmiennych niezależnych. Stąd otrzymamy równania

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez x, y, z i dodając otrzymamy $ax + by + cz = 0$, co jest dowodem pierwszej części twierdzenia. Aby dowieść część drugą mnożymy równania powyższe odpowiednio przez $cy - bz$, $az - cx$, $bx - ay$ i dodajemy.

2. Ciało sztywne może się obracać około punktu O i wiadomo, że $A > B > C$. Jak powinien być skierowany moment pary chwilowej H, aby siła żywa była jaknajwiększa?

Wyprowadzając oznaczenia, stale przez nas stosowane będziemy mieli

$$T = A\omega_x^2 + B.\omega_y^2 + C.\omega_z^2$$

a ponieważ

$$\omega_x = \frac{H_x}{A} \quad ; \quad \omega_y = \frac{H_y}{B} \quad ;; \omega_z = \frac{H_z}{C}$$

więc

$$T = \frac{H_x^2}{A} + \frac{H_y^2}{B} + \frac{H_z^2}{C}$$

Wiemy dalej, że $H_z^2 = H^2 - H_x^2 - H_y^2$, zatem

$$T = \frac{H_x^2}{A} + \frac{H_y^2}{B} + \frac{H^2}{C} - \frac{H_x^2}{C} - \frac{H_y^2}{C} = H_x^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) + H_y\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) + \frac{H^2}{C}$$

Z tego wynika, że T jest największe, gdy $H_x = H_y = 0$ t.j. gdy moment pary ma kierunek osi najmniejszego momentu.

81. Trwałość ruchu. Widzieliśmy w par. 79, że trzecia oś główna punktu O, czyli oś średniego momentu, nie może być osią stożka ruchomego osi chwilowych. Wiąże się z tem inna właściwość dynamiczna, odróżniająca tę oś od dwóch pozostałych. W równaniu /3/ par. 79 obydwa wyrazy lewej strony są dodatnie, a zatem $AT-H^2$, jak również m^2 tylko w takim razie jest zerem gdy $\omega_y = \omega_z = 0$, t.j. gdy ciało wiruje około osi największego momentu. W przypadku takim, jak widać z /4/ $BT-H^2$ jest ujemne, a zatem równanie stożka osi chwilowych sprowadzi się do

1.

największy moment

$$n^2y^2+p^2z^2=0 \quad (1)$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny urojone, przecinające oś x, albo powierzchnia stożkowa, której wszystkie tworzące leżą na osi x. Wiedzieliśmy z góry, że tak być musi, bo oś x pozostaje stale osią obrotu.

2.

Również $-p^2$, a także $CT-H^2$ może być zerem tylko wtedy, gdy $\omega_x = \omega_y = 0$. W tym przypadku równanie stożka ruchomego osi chwilowych sprowadza się do

najmniejszy moment

$$m^2x^2+n^2y^2=0 \quad (2)$$

MN

i trzeba uważać, że stożkiem tym jest oś z, czyli oś najmniejszego momentu.

3.

W równaniu /4/ par. 79 wyrazy lewej strony mają znaki odwrotne, a zatem $BT-H^2$, a także n^2 może być zerem chociaż ω_z i ω_x nie są zerami. Równanie stoż-

KOŁO BIBLJOTEK S.P.W.

ka ruchomego sprowadza się w tym razie do

$$m^2x^2 - p^2z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny rzeczywiste, przechodzące przez oś y i trzeba uważać je za zdegenerowany stożek. Nazwiemy je płaszczyznami granicznemi. Są one położone symetrycznie względem płaszczyzn xy i yz; innemi słowy dwie ostatnie płaszczyzny są dwusiecznemi kąta płaszczyzn granicznych. Równanie płaszczyzn granicznych możemy napisać w postaci

$$A(AT - H^2)x^2 + C(CT - H^2)z^2 = 0$$

a ponieważ w przypadku, który właśnie rozważamy

$BT - H^2 = 0$ czyli $H^2 = BT$, przeto będzie

$$A(A - B)x^2 + C(C - B)z^2 = 0 \qquad (2)$$

Występują tu jedynie momenty bezwładności względem osi głównych, a zatem położenie płaszczyzn granicznych nie zależy od ruchu, który posiada ciało. Są to pewne płaszczyzny stale związane z ciałem, albo istniejące w ciele.

Jeżeli wektor ω znajdzie się w pewnej chwili na jednej z płaszczyzn granicznych i następnie żadne siły na ciało nie działają, to pozostanie on i nadal w tejże płaszczyźnie, gdyż ta w tym razie stanowi powierzchnię stożka osi chwilowych. Z tego wynika, że wektor ω bez pomocy sił zewnętrznych nie może przedostać się przez żadną z płaszczyzn granicznych: są one dla tego wektora nieprzenikalne.

Płaszczyzny graniczne dzielą przestrzeń na cztery wycinki klinowe. W dwóch z nich, przeciwległych, przebiega oś x ; powiemy, że tworzą one obszar x dwa pozostałe, w których przebiega oś z , nazwiemy obszarami z.

Dajmy na to, że pod działaniem pierwotnego impulsu, który otrzymało ciało, oś chwilowa w pierwswej chwili utworzyła się w obszarze x . Pozostanie ona i nadal w tym samym obszarze, bo od obszaru z odgradzają płaszczyzny graniczne. Z tego wynika, że osią stożka ruchomego będzie oś x , czyli oś największego momentu. Jeżeli oś chwilowa znajduje się w obszarze z , to osią owego stożka będzie oś najmniejszego momentu.

Przypuśćmy teraz, że ciało wiruje około osi x , na tej więc prostej leżą obydwa wektory H i ω . Dajmy ciału bardzo mały impuls, skierowany jakkolwiek ale nie w płaszczyźnie yz . Skutkiem tego wektor H otrzyma drobny przyrost geometryczny i opuści oś x , tworząc z nią mały kąt. Składowe jego w kierunkach osi będą teraz H_x , H_y , H_z ; z nich pierwsza jest prawie równa wypadkowemu wektorowi H , a dwie pozostałe są bardzo małe.

Również wektor ω zejdzie z osi x . Składowe jego w nowem położeniu będą

$$\omega_x = \frac{H_x}{A} \quad ; \quad \omega_y = \frac{H_y}{B} \quad ; \quad \omega_z = \frac{H_z}{C} .$$

w-lipy nie w obrotach ale w obrotach najlepszy
na osiach głównych ciała

Związki te wskazują, że ω_y i ω_z są małe, a zatem i ω tworzy z osią x kąt mały. Jeżeli tylko impuls był dostatecznie słaby, to ω znajdzie się w obszarze x, osią stożka osi chwilowych pozostanie prosta x, a jeżeli przytem stożek ruchomy różni się niezbyt wiele od kołowego, to będzie on bardzo ostry. Tak więc położenie osi obrotu zmieni się w ciele nieznacznie, a łatwo zrozumieć, że zmienia się ono niewiele i w przestrzeni. Jeżeli ϑ oznacza kąty pomiędzy ω i H, to

$$\cos\vartheta = \frac{H_x \cdot \omega_x + H_y \cdot \omega_y + H_z \cdot \omega_z}{H\omega}$$

Pierwszy wyraz licznika różni się niewiele od $H\omega$, a dwa wyrazy pozostałe są małe, a zatem $\cos\vartheta$ mało różni się od jedności i wektor ω niewiele odchyla się od H. Z drugiej strony wektor H odchylił się nieznacznie od położenia pierwotnego.

Z tego widać, że wogóle ruch zmieni się niewiele, i mówimy, że ruch około osi największego momentu jest trwały.

Jeżeli nowy impuls jest zbyt wielki, to wektor ω przebije jedną z płaszczyzn granicznych i znajdzie się w obszarze z. Osią stożka stanie się prosta z i ruch ciała zmieni się w dużym stopniu, a mianowicie oś chwilowa będzie odchylała się bardzo znacznie od położenia pierwotnego czyli od osi x.

Oczywiście większa lub mniejsza trwałość ruchu około osi x zależy od tego, czy obszar x, czyli kąt dwuścienny, zawierający oś x, jest duży czy mały. Jeżeli obszar ten jest duży, to nawet znaczny stosunkowo impuls nie wyprze wektora ω z obszaru x, a więc nie zaburzy zasadniczo ruchu ciała. Ten kąt dwuścienny można do pewnego stopnia uważać za miarę trwałości ruchu około osi x.

To samo mutatis mutandis można powiedzieć o ruchu obrotowym około osi z, czyli około osi najmniejszego momentu punktu O. Ruch ten jest trwały, i tem trwalszy, im większy jest obszar z.

Oznaczmy przez α połowę tego kąta dwuściennego, który stanowi obszar x, albo kąt, który jedna z płaszczyzn granicznych tworzy z osią x. Z równania (2) znajdziemy z łatwością, że

$$tg^2\alpha = \frac{A(A-B)}{C(B-C)}.$$

Wzór ten wskazuje, od czego zależy trwałość ruchu obrotowego około osi największego i najmniejszego momentu. Jeżeli B tyleż się różni od A, co i od C t.j. jeżeli $A-B=B-C$, to $tg\,\alpha > 1$, czyli $\alpha > 45°$.

W tym więc razie obszar x jest większy od obszaru z, a zatem ruch około osi największego momentu posiada większą trwałość, niż ruch około osi najmniejszego momentu. W przypadku ogólnym ruch pierwszy jest tem trwalszy, a drugi tem mniej trwały, im w przedziale $A-C$ moment B leży dalej od A i bliżej do C.

Przypuśćmy wreszcie, że ciało wiruje około osi średniego momentu. Udzielmy mu impuls, skierowany dowolnie, ale nie w płaszczyźnie zx. Jakkolwiek mały będzie ten impuls, to w każdym razie wektor ω zejdzie z osi y i znajdzie się w obszarze x albo w obszarze z. W pierwszym przypadku osią stożka ruchomego stanie się oś x, a zatem ruch ciała zmieni się w sposób zasadniczy. To samo stanie się w przypadku drugim, gdy wektor ω wkroczy do obszaru z. Widzimy, że ruch około osi średniej czyli ruch około osi średniego momentu jest chwiejny. Najdrobniejsze wstrząśnienie może zburzyć go całkowicie.

Pozostaje jeszcze rozważyć, jak ukształtuje się ruch ciała, jeżeli wektor ω znajdzie się w jednej z płaszczyzn granicznych, ale nie na osi y. Uczynimy to w dalszym ciągu.

82. Polodya. Poinsot dał inny obraz ruchu ciała, obracającego się dookoła nieruchomego punktu O. Podajemy obraz ten w zarysie w paragrafie niniejszym i następnym.

Widzieliśmy par. 79, że składowe $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ wektora ω czynią zadość równaniu $A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T$.
Współrzędne x, y, z końca wektora ω są proporcyonalne do $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; rezygnując z jednorodności wzo-

rów, obierzemy za współczynnik proporcyonalności jednostkę; wówczas

$$x = \omega_x \quad ; \quad y = \omega_y \quad ; \quad z = \omega_z \quad ,$$

i z równania powyższego otrzymamy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Równaniu temu odpowiada elipsoida, której środkiem jest punkt O, a osi leżą na osiach głównych tego punktu.

Połówki osi elipsoidy, położonych na x, y, z wynoszą odpowiednio

$$\sqrt{\frac{T}{A}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{T}{B}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{T}{C}} \quad .$$

Z tych wielkości pierwsza jest najmniejsza, trzecia największa, zatem mała oś leży na osi największego momentu, a duża na osi najmniejszego momentu. Oś średnia leży na trzeciej osi głównej.

Tak więc koniec wektora ω musi pozostawać na elipsoidzie (1). Kształt tej elipsoidy zależy jedynie od momentów A, B, C, a wymiary od siły żywej. Gdy zmienia się siła żywa, to wszystkie trzy osi zmieniają się proporcjonalnie do $\sqrt{T}$, lecz elipsoida pozostaje podobną do pierwotnej. Jeżeli podwójna siła żywa jest równa jednostce, to koniec wektora ω pozostaje na elipsoidzie.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Elipsoida taka nazywa się elipsoidą bezwładności punktu O. Posiada on następującą własność zasadniczą.

Poprowadźmy przez O dowolną prostą, oznaczmy jej punkt przecięcia z elipsoidą bezwładności przez P, a moment bezwładności ciała względem niej przez I. Jeżeli podwójna siła żywa ciała jest równa jednostce, a osią chwilową jest owa prosta OP, to w myśl definicji elipsoidy bezwładności szybkość kątowa wynosi OP, a zatem podwójna siła żywa powinna być równa $I.(OP)^2$. Tak więc $I(OP)^2=1$, czyli

$$I=\frac{1}{(OP)^2}.$$

Widzimy, że odwrotność kwadratu połowy średnicy położonej na dowolnej prostej, jest równa momentowi bezwładności względem tej prostej albo raczej proporcyonalna do tego momentu.

Oś chwilowa w danej chwili przecina elipsoidę bezwładności w dwóch punktach. Jeden z nich leży po tej stronie środka O, w którą jest skierowana szybkość kątowa, a drugi po stronie odwrotnej. Poinsot nazywa - pierwszy z nich (P) biegunem, a miejsce geometryczne biegunów na elipsoidzie bezwładności polodyą.

Z poprzedniego wynika, że OP jest $\sqrt{T}$ razy mniejsze od ω, a zatem współrzędne bieguna wynoszą odpowiednio $\frac{\omega_x}{\sqrt{T}}$; $\frac{\omega_y}{\sqrt{T}}$; $\frac{\omega_z}{\sqrt{T}}$.

Tak więc polodya jest to krzywa, położona na elipsoidzie bezwładności i poruszająca się wraz z nią; prócz tego polodya leży również na stożku ruchomym osi chwilowych, gdyż biegun jest punktem osi chwilowej, jest to zatem linia przecięcia tych dwóch powierzchni. Jeżeli osią stożka jest oś x , to polodya okala wierzchołek elipsoidy, położony na tej osi i jest symetryczna względem płaszczyzn xy i zx . Jest to następstwem tej okoliczności, że obydwie powierzchnie są symetryczne względem owych płaszczyzn.

Jeżeli oś stożka ruchomego stanowi prosta z ,to polodya okala wierzchołek, leżący na tej osi i jest symetryczna względem płaszczyzn yz i zx.

Linia przecięcia elipsoidy ze stożkiem składa się z dwóch odrębnych gałezi, symetrycznych jedna do drugiej odpowiednio względem płaszczyzn yz lub xy , gdy osią stożka jest prosta x lub z . Z tych dwóch gałezi tylko jedna stanowi polodyę, a obydwie razem tworzą krzywą algebraiczną czwartego stopnia o podwójnej krzywiźnie. Za równania jej można uważać równanie elipsoidy bezwładności oraz równanie stożka ruchomego osi chwilowych.

83. Herpolodya. Z geometrji analitycznej wiadomo, że równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_1, y_1, z_1) do elipsoidy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

czyli do elipsoidy bezwładności jest takie:

$$Ax_1x + By_1y + Cz_1z = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wyznaczymy równanie płaszczyzny stycznej w biegunie.

Współrzędne tego punktu, jak wiemy z par. poprzedzającego, są:

$$\frac{\omega_x}{\sqrt{T}} \; ; \; \frac{\omega_y}{\sqrt{T}} \; ; \; \frac{\omega_z}{\sqrt{T}} \; .$$

Wprowadzając je do (1) otrzymamy:

$$A\omega_x \cdot x + B\omega_y \cdot y + C\omega_z \cdot z = \sqrt{T} \; .$$

Lecz $A\omega_x = H_x = H\cos\alpha$, jeżeli α, β, γ oznaczają kąty kierunkowe wektora H. Przekształcając analogicznie $B\omega_y$ i $C\omega_z$, nadamy równaniu płaszczyzny stycznej postać

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = \frac{\sqrt{T}}{H} \; . \quad (2$$

Jest to tak zw. postać normalna równania płaszczyzny. Wiadomo, że prostopadła do płaszczyzny tworzy z osiami kąty α, β, γ i że odległość płaszczyzny od początku układu wynosi $\frac{\sqrt{T}}{H}$. Z tego wynika, że płaszczyzna styczna w biegunie do elipsoidy bezwładności jest wciąż prostopadła do wektora H i pozostaje w stałej odległości od nieruchomego punktu O, a ponieważ kierunek wektora H nie ulega zmianom, zatem płaszczyzna styczna jest nieruchoma. Oznaczmy ją dla krótkości literą F.

Tak więc biegun pozostaje wciąż w nieruchomej płaszczyźnie F. Jego miejsce geometryczne w tej płaszczyźnie Poinsot nazwał herpolodyą. Jest to oczywiście krzywa nieruchoma; gdy połączymy wszystkie jej punkty ze środkiem O to powstanie stożek stały osi chwilowych.

Herpolodya przebiega pomiędzy dwoma okręgami, posiadającymi wspólny środek w rzucie środka elipsoidy O na płaszczyznę F. Okręg zewnętrzny odpowiada punktowi herpolodyi najbardziej odległemu od O, a wewnętrzny punktowi najbliższemu. Herpolodya jest to krzywa przestępna.

Polodya i herpolodya posiadają w każdej chwili wspólny punkt, a mianowicie ówczesny biegun. Wyobraźmy sobie ruchomy punkt M, który nie należy do badanego ciała, ale podąża za biegunem i znajduje się wciąż w tym punkcie. Torem bezwzględnym punktu M jest herpolodya, a względnym do badanego ciała polodya; zatem szybkość bezwzględna jest styczna do pierwszej z tych krzywych, a względna do drugiej. Szybkość unoszenia jest zerem, bo biegun leży na osi chwilowej. Z tego wynika, że krzywe posiadają wspólną styczną i polodya toczy się po herpolodyi bez poślizgu. Mówi się także, że elipsoida bezwładności toczy się po nieruchomej płaszczyźnie F, jakkolwiek ruch jej niezupełnie odpowiada pojęciu toczenia się.

Wytworzył się więc taki obraz ruchu i ciała: W ciele istnieje pewna elipsoida, elipsoida bezwładności, której środek O pozostaje w spokoju, i ta elipsoida toczy się po nieruchomej płaszczyźnie F.

84. Przypadki szczególne. Rozważymy oddzielnie ten przypadek szczególny, w którym momenty bezwładno-

ści względem dwóch osi głównych środka O, mianowicie A i B są równe. Przypadek taki zachodzi naprzykład w tym razie, gdy ciało jest jednorodną bryłą obrotu, i punkt O leży na osi symetryi.

Oznaczmy tę oś główną punktu O, której odpowiada moment bezwładności C, nie równy A, przez z. Wiemy, że w płaszczyźnie dwóch prostopadłych osi głównych, czyli w płaszczyźnie, prostopadłej do z, wszystkim prostym, przechodzącym przez O, odpowiadają momenty równe A i każdą z tych prostych można uważać za oś główną.

Poprowadźmy przez oś z i przez wektor ω płaszczyznę i oznaczmy jej prostą przecięcia z ową płaszczyzną równych momentów przez x. Rozłóżmy następnie ω na składowe ω_z i ω_x, w kierunkach z i x. Wektor H posiada w tych kierunkach składowe $C\omega_z$, $A\omega_x$ i oczywiście leży w płaszczyźnie zx.

Podobnie, jak w par. 79, otrzymamy tu równania

$$\left.\begin{aligned} C^2\omega_z^2 + A^2\omega_x^2 &= H^2 \\ C\omega_z^2 + A\,\omega_x^2 &= T \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1.)$$

Z równań tych wynika, że ω_z i ω_x są stałe, a zatem i szybkość wypadkowa $\omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2}$ jest stała.

Tak więc w rozważanym przypadku szczególnym szybkość kątowa nie zmienia się co do wielkości.

Wektor ω tworzy z osią z kąt $\operatorname{arctg} \dfrac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten jest stały, gdyż ω_x i ω_z są stałe. Z tego wynika, że prosta z jest osią stożka ruchomego osi chwilowych, i że stożek ten jest kołowy.

Wektor H tworzy z osią z kąt $\operatorname{arc\,tg} \frac{A\omega_x}{C\omega_z}$, a pomiędzy wektorami H i ω wynosi $\operatorname{arc\,tg} \frac{A\omega_x}{C\omega_z} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten jest także stały, a ponieważ linja wektora H zajmuje niezmienne położenie w przestrzeni, przeto jest ona osią stożka stałego osi chwilowych, i stożek ten jest również kołowy.

Sprawa więc w rozważanym przypadku jest szczególnie prosta. Ruchomy stożek kołowy, którego osią jest prosta z, toczy się po również kołowym stożku stałym, którego osią jest linja wektora H. W cynematyce nazwaliśmy ruch taki precesją.

2) Przypuśćmy, że z jest osią najmniejszego momentu. W takim razie $\frac{A}{C} > 1$ i

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{A\omega_x}{C\omega_z} > \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega_x}{\omega_z}$$

a zatem ω leży pomiędzy H i z i stożek ruchomy toczy się zewnętrzną stroną po stożku stałym. Przypadek ten wyobraża fig. 115 na której stożek bardziej ostry należy uważać za stały.

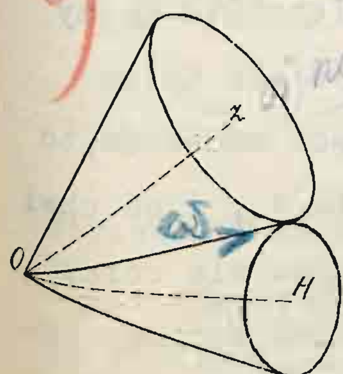

FIG. 115.

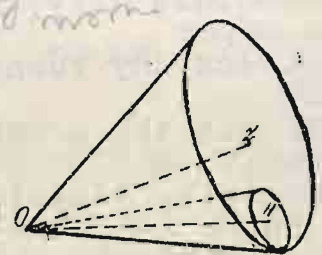

FIG. 116.

Jeżeli z jest osią największego momentu, to H leży pomiędzy z i ω, i stożek ruchomy obejmuje stożek stały, stykając się z nim stroną wewnętrzną. Przypadek taki widzimy na fig. 116 gdzie znowu stożek ostry ma być stałym.

Jeżeli ciało obraca się około prostej z, to na tej prostej leży również wektor H , i oś obrotu jest stała. Dajmy w tym razie wektorowi H mały przyrost geometryczny. Odchyli się on cokolwiek od osi z i powstanie mała składowa H_x na osi x . Skutkiem tego powstanie także na tej osi mała składowa $\omega_x = \frac{H_x}{A}$ wektora ω , a zatem wektor ten utworzy mały kąt z osią z , który pozostanie już nadal bez zmiany. Z tego widać że ruch zmieni się w małym stopniu, i można uważać ruch około osi z za trwały.

Przypuśćmy teraz, że ciało obraca się około prostej x , prostopadłej do z . I w tym razie wektor H leży na osi obrotu, która nie zmienia się z biegiem czasu, ale ruch taki jest nietrwały. Istotnie dajmy wektorowi H przyrost dowolnie mały. Jeżeli tylko wektor ten wyjdzie z płaszczyzny równych momentów, to osią stożka ruchomego stanie się prosta z , i oś chwilowa zacznie wędrować w ciele, odchylając się coraz bardziej od położenia pierwotnego. Stożek ruchomy będzie w tym razie bardzo rozwarty, a stożek stały bardzo ostry. Osią tego drugiego jest wektor H , który zmienił bardzo mało położenie w przestrzeni, a zatem w przestrzeni oś obrotu będzie zmieniała położenie bardzo mało.

Rozważania powyższe wyjaśniają znany fakt, że szybki ruch obrotowy do pewnego stopnia utrwala położenie osi obrotu w przestrzeni.

Wyobraźmy sobie bryłę obrotu, której środek cięż kości S jest unieruchomiony. Możemy uważać, że żadne siły na nią nie działają, gdyż moment siły ciążenia względem S jest zerem. Nadajemy takiemu ciału bardzo szybki ruch obrotowy około osi symetrji; skutkiem tego powstanie bardzo duży wektor H w kierunku tejże osi.

Wymierzmy bryle uderzenie skierowane np. prostopadle do osi symetrji, i niechaj h oznacza moment impulsu względem S. Oczywiście wektor H otrzyma przyrost geometryczny h i odchyli się od dotychczasowego położenia o $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{H}$. Ponieważ H było duże, przeto kąt ten jest mały, a więc wektor H zmieni nieznacznie położenie w przestrzeni.

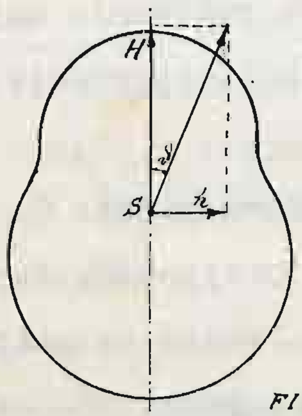

FIG. 117.

W dalszym ciągu oś symetrji będzie tworzyła z tym wektorem mały kąt stały, zataczając w przestrzeni stożek bardzo ostry. Będzie się wydawało, że bryła i dalej wiruje około nieruchomej osi symetrji.

Oś symetrji tem mniej zmienia położenie pod działaniem uderzenia, im większy jest wektor H, lub im większa jest szybkość kątowa bryły.

Gdyby szybkość początkowa była mała lub równa zeru, to nawet słabe uderzenie odchyliłoby znacznie wektor H od osi symetrji, a zatem ta oś zmieniałaby bardzo znacznie położenie w przestrzeni, i dalszy ruch ciała byłby na pozór zupełnie nieregularny.

Przypuśćmy wreszcie, że $A = B = C$. W takim razie ciało jest kuliste; znaczy to, że momenty bezwładności jego względem wszystkich prostych, przechodzących przez O są równe, i każdą z nich można uważać za oś główną.

4) Gdy wprawimy w ruch takie ciało, to w każdym razie wektory H i ω znajdą się na jednej prostej, a zatem oś obrotu nie będzie zmieniała położenia ani w ciele ani w przestrzeni. Ruch ten jest oczywiście trwały.

85. Równania Eulera. Niechaj znowu punkt O ciała sztywnego będzie nieruchomy, ale przypuśćmy teraz, że na ciało działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Jeżeli te siły sprowadzają się do jednej wypadkowej, przechodzącej wciąż przez O, czyli jeżeli suma geometryczna ich momentów względem O jest stale zerem, to nie wytwarzają one żadnych przyrostów wektora H, wektor ten nie zmienia się ani co do kierunku ani co do wielkości, a zatem ruch ciała całkowicie odpowiada teorji, wyłożonej w par. 79 i następnych. Od sił $P_1, P_2, \ldots$ zależy jedynie reakcya w punkcie O, lecz na ruch ciała nie wywierają one żadnego wpływu.

W przypadku ogólnym, gdy suma momentów sił $P_1, P_2, \ldots$ względem O nie jest zerem, badanie ruchu ciała jest wogóle trudniejsze. Często bywają tu użyteczne tak zw.

dynamiczne równania Eulera, które właśnie mamy teraz poznać.

Niech A, B, C oznaczają, jak poprzednio, główne momenty bezwładności względem punktu O ; osi główne oznaczymy tym razem przez a, b, c . Oznaczymy dalej te proste przestrzeni, na których w chwili t przypadają osi a, b, c odpowiednio przez x, y, z .

Rzuty wektora H na osi główne będziemy oznaczali przez H_a, H_b, H_c , a na x, y, z przez H_x, H_y, H_z. W chwili t pierwsze nie różnią się od drugich, ale już w chwili następnej, gdy osi a, b, c zajmą nowe położenia, zaznaczy się różnica zarówno co do wielkości jak i kierunku.

W analogiczny sposób będziemy oznaczali rzuty wektora ω . Pragniemy wyrazić przyrosty dH_x, dH_y, dH_z, które w czasie dt otrzymują składowe H_x, H_y, H_z w funkcjach $\omega_a, \omega_b, \omega_c$.

Współrzędne końca Q wektora H w układzie a, b, c są równe H_a, H_b, H_c , a w układzie x, y, z , H_x, H_y, H_z , jeśli współczynnik proporcjonalności jest równy jedności.

W chwili t współrzędne te są odpowiednio równe.

Wektor H zmienia się z czasem zarówno co do wielkości, jak i kierunku, a zatem koniec jego Q jest ruchomy. Szybkość /bezwzględna/ punktu Q posiada dwie składowe, a mianowicie szybkość W względem ciała, czyli względem układu a, b, c i szybkość unoszenia u , t.j. szybkość tego punktu ciała, w którym w chwili t przypada punkt Q. Wyznaczymy rzut szybkości bezwzględnej na oś x, czyli $\frac{dH_x}{dt}$.

Oczywiście rzut ten jest równy sumie rzutów składowych w i u, czyli

$$\frac{dH_x}{dt} = W_x + u_x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

W chwili t $W_x = W_a = \frac{dH_a}{dt} = A\frac{d\omega_a}{dt}$; u_x znajdziemy z wzorów, które mieliśmy w cynematyce. Mianowicie

$$u_x = \omega_y \cdot H_z - \omega_z \cdot H_y .$$

Lecz $\omega_y = \omega_b$, $\omega_z = \omega_c$, $H_z = H_c = C\omega_c$ i wreszcie $H_y = H_b = B\omega_b$, a zatem $u_x = \omega_b C\omega_c - \omega_c B\omega_b$

$$u_x = (C-B)\cdot\omega_b \cdot \omega_c .$$

Wprowadzając to do (1), otrzymamy

$$\frac{dH_x}{dt} = A\frac{d\omega_a}{dt} - (B-C)\omega_b \cdot \omega_c ,$$

a ponieważ z drugiej strony $\frac{dH_x}{dt} = \frac{L\,dt}{dt}$, przeto wypadnie

b. ważne

$$A\frac{d\omega_a}{dt} - (B-C)\omega_b \cdot \omega_c = L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Przytem przez L, M, N oznaczamy odpowiednie sumy momentów sił $P_1, P_2 \ldots$ względem osi x, y, z.

Tak samo otrzymamy

$$B\frac{d\omega_b}{dt} - (C-A)\omega_c \cdot \omega_a = M \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$C\frac{d\omega_c}{dt} - (A-B)\omega_a \cdot \omega_b = N \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

(1), (2), (3) są to właśnie równania Eulera.

Równania Eulera ściągają się do osi nieruchomych, ale do coraz innych, a mianowicie w każdej chwili do tych, na których przypadają wówczas osi główne punktu

0 . W tym sensie można uważać, że równania te dotyczą osi głównych, t.j. prostych, należących do ciała i poruszających się wraz z niem.

86. Przykłady. 1. Dowieść, że równania (1.) i (2.) par. 79 wynikają z równań Eulera. W przypadku, gdy na ciało żadne siły nie działają, $L = M = N = 0$.

Mnożąc równania Eulera odpowiednio przez $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ i dodając, otrzymamy

$$A\omega_a d\omega_a + B\omega_b d\omega_b + C\omega_c d\omega_c = 0 \quad ,$$

a mnożąc przez $A.\omega_a$, $B.\omega_b$, $C.\omega_c$ i dodając znajdziemy, że

$$A^2.\omega_a . d\omega_a + B^2\omega_b d\omega_b + C^2\omega_c . d\omega_c = 0$$

Gdy równania te zcałkujemy, to wypadną (1.) i (2.) par.79.

2. Punkt O ciała jest nieruchomy, i żadne siły z wyjątkiem reakcji nie działają. Początkowo wektor ω leżał na przecięciu jednej z płaszczyzn granicznych i płaszczyzny zx . Wyznaczyć ω w funkcji t .

Wyznaczamy naprzód ω_y w funkcji t . Według drugiego równania Eulera będzie

$$B\frac{d\omega_y}{dt} = -(A - C)\omega_z . \omega_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Dalej z (3.) i (5.) par. 79, uwzględniając $H^2 = BT$ /oś chwilowa leży w płaszczyźnie granicznej/ otrzymamy

$B(A-C)\omega_y^2 + C(A-C)\omega_z^2 = AT - H^2$

$$C(A - C)\omega_z^2 = (A - B)T - B(A - B)\omega_y^2 \quad . \quad . \quad (2.)$$

$$A(C - A)\omega_x^2 = (C - B)T - B(C - B)\omega_y^2 \quad . \quad . \quad (3.)$$

Zakładamy $T = B\omega_1^2$. Znaczenie stałej ω_1 jest jasne taką wartość przybierze szybkość kątowa, gdy osią obrotu stanie się prosta y.

Poddtawiając tę wartość w (2) i (3.) otrzymamy po przekształceniu

$$\omega_z^2 \omega_x^2 = \frac{B^2 n^2 (\omega_1^2 - \omega_y^2)^2}{(A - C)^2}$$

gdzie $n^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC}$. Przyjmiemy, że początkowo ω leży w tej ćwiartce płaszczyzny zx, w której współrzędne z i x są dodatnie. W takim razie ω_z, ω_x, a więc i $\omega_z \omega_x$ muszą być dodatnie, i

$$\omega_z \omega_x = \frac{B.n.(\omega_1^2 - \omega_y^2)}{A - C}$$

Wprowadzając to do (1) znajdziemy

$$\frac{d\omega_y}{dt} = - n.(\omega_1^2 - \omega_y^2) \quad ,.$$

skąd po zcałkowaniu

$$\omega_y = \frac{-\omega_1 (e^{n\omega_1 t} - e^{-n\omega_1 t})}{e^{n\omega_1 t} - e^{-n\omega_1 t}}$$

Z tego równania wynika, że ω_y zbliża się asymptotycznie do $-\omega_1$.

Znajdziemy już teraz łatwo, że $\omega^2 = \omega_1^2 + n^2(\omega_1^2 - \omega_y^2)$, gdy ω_y zbliża się do ω_1, to i ω zbliża się do ω_1

3. Prostopadłościan, posiadający krawędzie $2a$, $2a$, $2c$, obraca się około swego środka; działa nań jedynie siła ciążenia wraz z reakcyą, a składowa szybkości kątowej w kierunku osi symetryi $= \omega_1$. Dowieść,

że szybkość kątowa około każdej z pozostałych osi głównych zmienia się okresowo, i wyznaczyć długość okresu.

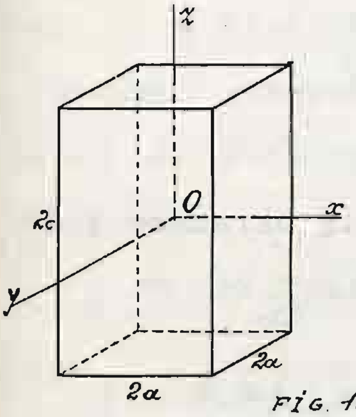

FiG. 118

Obierzmy oś symetrji za óś z, a dwie inne osie główne punktu O, prostopadłe do ścian prostokątnych - za osie x i y. Momenty bezwładności względem tych ostatnich są równe; oznaczmy je przez A. Moment względem osi z niech będzie $= C$.

Stosując równania Eulera będziemy mieli

$$A\frac{d\omega_x}{dt} - (A-C)\omega_y\cdot\omega_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

$$A\frac{d\omega_y}{dt} - (C-A)\omega_z\cdot\omega_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)$$

Z (3.) równania wynika, że ω_z czyli składowa szybkości kątowej w kierunku osi z jest stała, co zresztą było wiadome zgóry. Podzielmy (1.) przez (2.); wypadnie

$$\frac{d\omega_x}{d\omega_y} = -\frac{\omega_y}{\omega_x}$$

Gdy oddzielimy tu zmienne i zcałkujemy, to otrzymamy

$$\omega_x^2 = -\omega_y^2 + \omega_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

gdzie ω_0^2 oznacza stałą całkowania.

Wyraźmy teraz z (4.) ω_y w funkcji ω_x i podstawmy w (1.). Będziemy mieli

$$A\frac{d\omega_x}{dt} = (A-C)\omega_1\sqrt{\omega_0^2-\omega_x^2}$$ albo $$\frac{d\omega_x}{\sqrt{\omega_0^2-\omega_x^2}} = \frac{A-C}{A}\omega_1\, dt$$

skąd przez całkowanie

$$\omega_x = \omega_0 \sin\left(\frac{A-C}{A}\omega_1 t + D_1\right),$$

przyczem D jest stałą całkowania.

Widzimy więc, że ω_x zmienia się okresowo i że okres wynosi

$$T = \frac{2\pi A}{(A-C)\omega_1}.$$

Ponieważ

$$A = M\frac{a^2+c^2}{3} \quad ; \quad C = \frac{2Ma^2}{3}$$

gdzie M oznacza masę prostopadłościanu więc

$$T = \frac{2\pi(a^2+c^2)}{(c^2-a^2)\cdot\omega_1}$$

Toż samo dotyczy składowej ω_y.

4. Punkt O ciała sztywnego jest nieruchomy, a momenty bezwładności względem jego osi głównych x, y, z wynoszą odpowiednio A, A i C. Ciało otrzymało szybkość kątową około osi, tworzącej z osią z kąt γ_0, a dalej działa na nie para opóźniająca /np. opór powietrza/, której moment jest skierowany zawsze według osi chwilowej i proporcjonalny do szybkości kątowej /współczynnik proporcjonalności $= k$ /. Jak zmienia się z czasem kąt γ pomiędzy osią chwilową i osią z.

Równania Eulera będą w danym razie następujące

$$A\frac{d\omega_x}{dt} - (A-C)\omega_z\cdot\omega_y = -k\omega_x$$

$$A\frac{d\omega_y}{dt} - (C-A)\omega_z\cdot\omega_x = -k\omega_y$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt} = -k\cdot\omega_z \ ,$$

przyczem ω_x , ω_y , ω_z oznaczają składowe szybkości kątowej ω w kierunkach osi współrzędnych.

Pomnóżmy pierwsze u tych równań przez ω_x , drugie przez ω_y i dodajmy je stronami.

Wypadnie

$$A\frac{\omega_x\, d\omega_x + \omega_y\, d\omega_y}{dt} = -k(\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

albo
$$\frac{A}{2}\frac{d(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{dt} = -k.(\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

Oddzielając zmienne i całkując będziemy mieli

$$\frac{A}{2} \lg(\omega_x^2 + \omega_y^2) = -kt + D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie D jest stałą całkowania, którą zaraz wyznaczymy. Ponieważ $\omega_x = \omega\cos\alpha$, $\omega_y = \omega\cos\beta$, gdzie α, β oznaczają kąty utworzone przez wektor ω z osiami x i y więc

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) ,$$

a ponieważ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$

zatem $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2 \sin^2\gamma$

Podstawiamy to w $(1.)$; będzie

$$A \lg(\omega\sin\gamma) = -kt + D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Przypuśćmy, że w pierwszej chwili szybkość kątowa wynosi ω_0 i tworzy z osią z kąt γ_0 . W takim razie $A\lg(\omega_0 \sin\gamma_0) = D$ a stąd i z (2) mamy

$$\omega.\sin\gamma = \omega_0.\sin\gamma_0.e^{-\frac{kt}{A}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zcałkujmy teraz trzecie równanie Eulera. Otrzymamy

$C.\lg\omega_z = -kt + E$, /gdzie E oznacza stałą całkowania/ albo $C.\lg(\omega\cos\gamma) = -kt + E$, bo $\omega_z = \omega.\cos\gamma$. Rugując podobnie, jak poprzednio stałą E otrzymamy, że

$$\omega.\cos\gamma = \omega_0\cos\gamma_0.e^{-\frac{kt}{C}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Dzieląc wreszcie (3.) przez (4.) znajdziemy

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_0.e^{kt\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)}$$

Jeżeli $A > C$, to oś chwilowa odchyla się coraz bardziej od osi z, zbliżając się asymptotycznie do płaszczyzny równych momentów. Jeżeli $A < C$ to oś chwilowa zbliża się do asymptotycznie do osi z. Jeżeli wreszcie $A = C$, to kąt pomiędzy temi osiami jest stały

87. Precesya regularna. Na fig.119 prosta OC wyobraża oś symetryi jednorodnej bryły obrotu, a zarazem

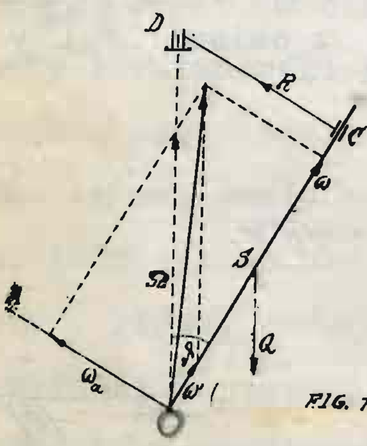

FIG. 119.

wałek, wystający z tej bryły w obydwuch końcach. Koniec dolny wałka jest osadzony w łożysku kulistem nieruchomem O, a koniec górny w łożysku ruchomem cylindrycznem C. To ostatnie łączy się zapomocą sztywnego ścięgna CD z łożyskiem D, nasadzonem na nieruchomą oś pionową OD, przechodzącą przez łożysko O. Ścięgno to niech będzie prostopadłe do OC. Przy takiem urządzeniu ciało może obracać się około swej osi OC i jednocześnie wraz z ostatnią