$C.\lg \omega_z = -kt + E$, /gdzie E oznacza stałą całkowania/ albo $C.\lg(\omega \cos\gamma) = -kt + E$, bo $\omega_z = \omega.\cos\gamma$. Rugując podobnie, jak poprzednio stałą E otrzymamy, że

$$\omega.\cos\gamma = \omega_0 \cos\gamma_0 . e^{-\frac{kt}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dzieląc wreszcie (3.) przez (4.) znajdziemy

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_0 . e^{kt\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)}$$

Jeżeli $A > C$, to oś chwilowa odchyla się coraz bardziej od osi z, zbliżając się asymptotycznie do płaszczyzny równych momentów. Jeżeli $A < C$ to oś chwilowa zbliża się do asymptotycznie do osi z. Jeżeli wreszcie $A = C$, to kąt pomiędzy temi osiami jest stały

87. Precesya regularna. Na fig.119 prosta OC wyobraża oś symetryi jednorodnej bryły obrotu, a zarazem wałek, wystający z tej bryły w obydwuch końcach. Koniec dolny wałka jest osadzony w łożysku kulistem nieruchomem O, a koniec górny w łożysku ruchomem cylindrycznem C. To ostatnie łączy się zapomocą sztywnego ścięgna CD z łożyskiem D, nasadzonem na nieruchomą oś pionową OD, przechodzącą przez łożysko O. Ścięgno to niech będzie prostopadłe do OC. Przy takiem urządzeniu ciało może obracać się około swej osi OC i jednocześnie wraz z ostatnią

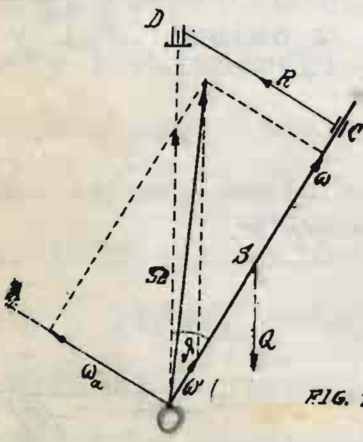

FIG. 119.

około prostej OD.

Przypuśćmy, że środkiem ciężkości ciała jest punkt S, i że ciężar jego jest równy Q. Moment bezwładności względem osi OC oznaczymy przez C, a względem prostych, poprowadzonych przez O, prostopadle do OC przez A. Prócz tego niechaj będzie kąt $\sphericalangle COD = \vartheta$; $OS = a$; $OC = b$.

Nadajmy teraz ciału ruch obrotowy około OC i około OD ; pragniemy zbadać reakcję R, którą łożysko D wywiera za pośrednictwem ścięgna na koniec osi ciała C.

Jest rzeczą prawie oczywistą, że szybkości kątowe obydwóch ruchów obrotowych, które posiada ciało, są stałe. Można to uzasadnić ściśle w sposób następujący.

Całkowita szybkość kątowa ciała leży w płaszczyźnie OCD ; rozłóżmy ją na składowe ω_c i ω_a w kierunkach prostych OC i OA, z których druga jest poprowadzona prostopadle do OC w płaszczyźnie OCD. W takim razie podwójna siła żywa ciała wyniesie

$$A\omega_a^2 + C\omega_c^2 = T$$

Jest to oczywiście wielkość stała. Z drugiej strony dowiedziemy łatwo, że ω, t.j. rzut szybkości kątowej na oś OC jest stały.

W tym celu poprowadźmy w ciele przez O, prostopadle do OC dwie proste, tworzące kąt prosty. Możemy je wraz z OC uważać za osi główne punktu O i zasto-

$C\frac{d\omega}{dt} - (A-B)\omega_a\omega_b = N$

sować do nich równania Eulera */. W trzecim z nich, dotyczącem osi OC, $A=B$, a oprócz tego $N=0$, gdyż momenty wszystkich sił, działających na ciało względem OC są zerami. Wypada więc, że $\frac{d\omega}{dt}=0$; z tego wynika, że ω, a więc i ω_a są stałe.

Rozłóżmy teraz całkowitą szybkość kątową na składowe Ω i ω' w kierunkach OD i OC. Biorąc ich rzuty na OC i OA, znajdziemy, że

Rozkł. wekt. H w kier. pion. i ... II ma przyrost ...

$$\omega = \omega' + \Omega\cos\vartheta \quad ; \quad \omega_a = \Omega\sin\vartheta$$

$H_x = C\omega\sin\theta$ ...

Z tego wynika, że Ω i ω' są również stałe. Przyrost H ...

Moment ilości ruchu ciała względem O czyli wektor H posiada w kierunku OC składową $C\omega$, a w kierunku OA składową $A.\Omega.\sin\vartheta$.

Składowe te w czasie dt obrócą się wraz z płaszczyzną OCD o kąt Ωdt około pionu OD, a zatem pierwsza otrzyma przyrost $C\omega\sin\vartheta.\Omega.dt$, prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony w stronę widza, a druga przyrost $A.\Omega.\sin\vartheta\cos\vartheta\,\Omega.dt$, również prostopadły do tej płaszczyzny, lecz zwrócony w stronę odwrotną. Całkowity przyrost wektora H, mierzony w stronę widza wyniesie $\Omega(C\omega - A\Omega\cos\vartheta)\sin\vartheta\,dt.$

Przyrost ten wytwarzają momenty sił G i R względem O. Moment wypadkowy, mierzony w stronę wi-

*/ Prosta OA jest ruchomo w ciele, a więc do niej równań tych stosować nie wolno.

dza wynosi $Qa\sin\vartheta - R.b$, a zatem

$$\Omega(C\omega - A\Omega\cos\vartheta)\sin\vartheta\, dt = (Qa\sin\vartheta - Rb)\,dt$$

$$R = \frac{[Qa + \Omega(A\Omega\cos\vartheta - C\omega)]\sin\vartheta}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Taka wiec siła powinna działać w płaszczyźnie pionowej na punkt C , prostopadle do osi OC , aby wskazany ruch mógł trwać stale. Siła ta jest równa zeru w dwóch przypadkach; po pierwsze, gdy $\sin\vartheta = 0$, czyli, gdy kąt ϑ jest równy zeru lub π ; a więc w tym razie oś OC zajmuje położenie pionowe, a środek ciężkości może znajdować się wyżej lub niżej od O . Było to oczywiste z góry. Przypadek drugi jest daleko ciekawszy. Zachodzi on wówczas, gdy

$$Qa + \Omega(A\Omega\cdot\cos\vartheta - C\omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ponieważ w tym razie ścięgno CD nie wywiera reakcji, możemy więc je usunąć, nie wywołując tem żadnej zmiany w ruchu ciała. Będzie ono w dalszym ciągu wirowało około osi symetrji OC z szybkością kątową $\omega' = \omega - \Omega\cos\vartheta$. /względem płaszczyzny OCD /, obracając się jednocześnie z szybkością Ω około osi pionowej OD . Taki

Rostfeld Inna – estońska [illegible]

ruch pp. Klein i Sommerfeld w swem obszernem dziele o bąku */ nazwali precesją regularną. W podobny sposób porusza się w stosownych warunkach bąk dziecinny lub

---

*/ F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels, Lipsk 1897-1910.

żyroskop.

Precesja regularna należy do najdziwniejszych zjawisk mechanicznych. Wydaje się ona czemś paradoksalnem, zwłaszcza gdy kąt ϑ jest bliski prostego. Wygląda tak, jakgdyby ciało nie podlegało działaniu siły ciążenia, bo nie spada, jakkolwiek jest podparte tylko w punkcie O, położonym zdala od środka ciężkości.

Gdy mamy dane ω i ϑ, to możemy z /2/ wyznaczyć taką szybkość kątową Ω przy której zachodzi precesja regularna. Wypadnie

$$\Omega = \frac{C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4A.Q.a.\cos\vartheta}}{2A\cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /3/$$

Widzimy, że istnieją dwie wartości szybkości Ω, przy której w danych warunkach zachodzi precesja regularna. Jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, inaczej mówiąc, gdy środek ciężkości ciała znajduje się niżej od O, to wartości te są w każdym razie rzeczywiste. Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, a więc środek ciężkości leży nad O, to Ω jest rzeczywiste, jeżeli wyrażenie, stojące pod znakiem pierwiastka jest większe od zera, czyli jeżeli

$$\omega^2 > \frac{A}{C} \cdot \frac{4Q.a.\cos\vartheta}{C}$$

Warunek ten wskazuje, że tem łatwiej jest doprowadzić ciało do precesji regularnej, w położeniu wskazanem na fig. 119, im mniejszy jest stosunek $\frac{A}{C}$. Ołówek, oparty na zaostrzonym końcu, mógłby poruszać się w ten sposób tylko przy bardzo wielkiej szybkości kątowej około osi. W nim C, t.j. moment bezwładności względem osi jest bardzo mały w stosunku do A. Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ to w /3/ licznik jest dodatni, jakikolwiek znak położymy przed pierwiastkiem, a więc obydwie wartości Ω są dodatnie; znaczy to, że obydwie szybkości kątowe Ω i ω podczas precesji regularnej mają kierunki takie, jak wskazują strzałki na fig. 119, albo obydwie odwrotne. Jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to licznik w /3/ jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy przed pierwiastkiem stoi plus czy minus, mianownik zaś jest w każdym razie ujemny; znaczy to, że dwie szybkości przy których zachodzi precesja regularna posiadają kierunki odwrotne.

Jeżeli $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, to precesji regularnej odpowiada tylko jedna /skończona/ wartość Ω, a mianowicie

$$\Omega = \frac{Q.a}{C.\omega}$$

jak widać z /2/.

Nie wyk. I. wr. 1921/22

88. Inny dowód. Rozważymy jeszcze innym sposobem ten przypadek precesji regularnej, gdy oś ciała pozostaje poziomą.

Wyobraźmy sobie żyroskop, złożony z ciężkiego pierścienia, o promieniu r, osadzonego na lekkiej osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego płaszczyzny. Przypuśćmy, że koniec tej osi jest osadzony w nieruchomem łożysku kulistem fig.120

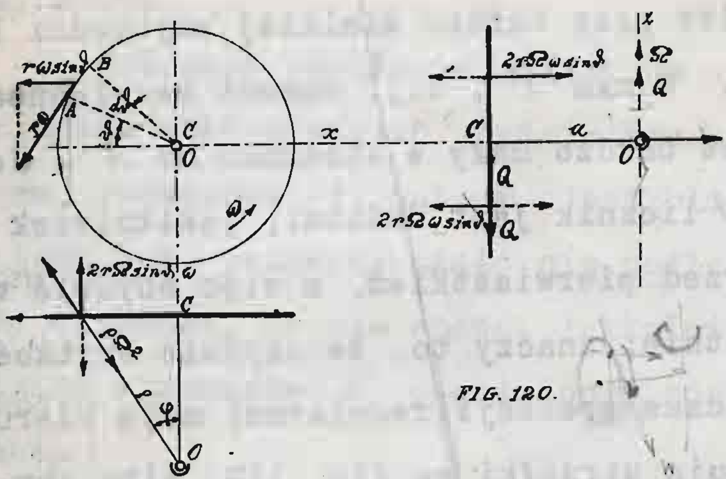

FIG. 120.

że oś ta zajmuje położenie poziome, że żyroskop obraca się z szybkością kątową ω i że wykonywa on precesję regularną około osi pionowej z, przechodzącej przez O. Chodzi o wyznaczenie szybkości owej precesji Ω.

Na żyroskop działa siła ciążenia pierścienia $= Q$ i nieznana reakcya w O. Rozłożymy tę ostatnią odrazu w kierunkach poziomym i pionowym i wyznaczymy każdą z nich zosobna.

W tym celu zwróćmy uwagę na ruch środka masy pierścienia czyli punktu C /fig 120/. Torem jego jest koło poziome, o promieniu $= CO$ i o środku O. Z tego wynika, że rozważany punkt nie posiada przyśpieszenia w kierunku pionowym, że więc składowe pionowe wszystkich sił, działających na żyroskop, przeniesione do punktu O powinny się równoważyć. Widzimy stąd, że składowa pionowa reakcji łożyska O jest skierowana w górę i równa ciężarowi pierścienia, czyli $= Q$.

Składową poziomą tej reakcji oznaczymy przez R nadaje ona punktowi C przyśpieszenie w kierunku CO, wynoszące $a\Omega^2$ /gdzie $a = CO$ /, a więc

$$R = \frac{Q}{g} a . \Omega^2.$$

Mamy już obecnie wyznaczone wszystkie siły, działające na żyroskop.

Aby teraz znaleźć szybkość precesji Ω zastosujmy zasadę d'Alemberta.

Podzielmy obwód pierścienia na nieskończenie małe elementy i punkty podziału połączmy ze środkiem C. Niech AB będzie jednym z takich elementów, a kąt utworzony przez promień AC z prostą poziomą x oznaczmy literą ϑ. Jeśli μ wyraża masę jednego cm. obwodu, to masa owego elementu wynosi $\mu . r d\vartheta$ gdzie r jest to promień pierścienia.

Wyznaczmy teraz siły odwrotne do czynnych, które działają na rozważany element. Znajdziemy osobno każdą z trzech takich sił, odpowiadających przyśpieszeniu względnemu, unoszenia i Coriolisa.

1/ Ruch względny żyroskopu, czyli ruch względem układu S, obracającego się z szybkością kątową Ω około osi z, jest obrotowy, przyczem osią jest prosta OC, a szybkość kątowa jest stała i wynosi ω.

Z tego wynika, że przyśpieszenie względne nie posiada składowej stycznej, a tylko normalną, czyli skierowaną wzdłuż promienia ku C. Każdy element obwodu pierścienia posiada takie same przyśpieszenie względne, a więc siły, odpowiadające tym przyśpieszeniom, równoważą się same przez się.

2/ Rozważmy teraz ruch unoszenia , czyli ruch tego punktu układu S, który zajmuje obecnie rozważany element. Jest to, jak powiedzieliśmy, ruch obrotowy około osi z z szybkością kątową Ω. Szybkość ta jest stała, a więc przyśpieszenie unoszenia nie posiada składowej stycznej. Składowa normalna wynosi $\rho\Omega^2$, gdzie ρ oznacza odległość elementu od osi z, a więc siła odwrotna do czynnej która odpowiada przyśpieszeniu unoszenia jest równa $\mu.\rho.\Omega^2.r.d\vartheta$. Na różne elementy obwodu działają podobne siły rozłożone symetrycznie względem osi CO, a zatem wypadkowa ich posiada kierunek tej osi, jest równa sumie ich rzutów na ową oś i równoważy się z reakcją R.

Oznaczając przez φ kąt, utworzony przez kierunek przyśpieszenia $\rho\Omega^2$ z osią OC, otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi}\mu\rho\,\Omega^2 r\,d\vartheta\cos\varphi = R$$

albo, ponieważ $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$:

$$\mu.a.\Omega^2.r\int_0^{2\pi}d\vartheta = R.$$

Po zcałkowaniu i podstawieniu $2\pi.r.\mu = \frac{Q}{g}$ wypadnie

$$\frac{Q}{g}\cdot a.\Omega^2 = R$$

czyli to samo, co otrzymaliśmy poprzednio.

3/ Wyznaczymy wreszcie siły odwrotne do czynnych, odpowiadające przyśpieszeniu Coriolisa.

Szybkość względna rozważanego elementu jest styczna do pierścienia i równa $r.\omega$; przy wyznaczaniu przyśpieszenia Coriolisa w grę wchodzi tylko składowa tej szybkości, równoległa do płaszczyzny, prostopadłej do osi x , czyli $r\omega \sin\vartheta$. Przy obrocie około osi x koniec tej składowej będzie się poruszał w stronę odwrotną do widza patrzącego na pierścień z przodu, a więc przyśpieszenie Coriolisa, jest prostopadłe do płaszczyzny pierścienia, i odwrócone od widza. Wynosi ono: $2r\Omega\omega \sin\vartheta$. Siła odwrotna do czynnej, która odpowiada temu przyśpieszeniu jest równa $2r^2\Omega . \omega . \sin\vartheta . \mu . d\vartheta$. Rozpatrzmy jeszcze inny element, symetryczny do poprzedniego względem prostej x . Jego przyśp. Coriolisa jest równe co do wielkości tak samo $2r\Omega . \omega . \sin\vartheta$, ale kierunek jest odwrotny do poprzedniego. $2r\omega$.

Siły odwrotne do czynnych, odpowiadające przyśpieszeniom Coriolisa tej pary elementów symetrycznych, tworzą więc parę sił o ramieniu $-2r\sin\vartheta$. Moment tej pary wynosi zatem $2r^2\Omega . \omega . \sin\vartheta . \mu . d\vartheta . 2r\sin\vartheta$, i każdej innej parze elementów symetrycznych odpowiada taki sam moment, a suma tych wszystkich momentów powinna zrównoważyć moment pary Q.

Będzie więc

$$\int_0^\pi 2r^3\Omega . \omega . \sin\vartheta . \mu . d\vartheta - Qa = 0$$

Całkując otrzymamy

$$(2r . \pi . \mu . r^2)\Omega\omega = Q . a$$

Czynnik, ujęty w nawias, wyraża moment bezwładności żyroskopu względem jego osi, bo $2r . \pi . \mu$ jest to masa pierścienia, a r jego ramię bezwładności. Oznaczając ten moment przez C otrzymamy:

$$\Omega = \frac{Q . a}{C . \omega} ,$$

czyli to samo co w par.87.

89. Przykłady. 1. Żyroskop, złożony z ciężkiego krążka, osadzonego na lekkiej osi, jest zawieszony na nici o długości l; nić ta jest przyczepiona do osi w odległości a od środka ciężkości żyroskopu, a ramię bezwładności krążka względem osi jest równe k. Krążek wiruje z szybkością kątową ω około osi x, a oś pozostaje poziomą. Wyznaczyć kąt ϑ, który nić tworzy z pionem.

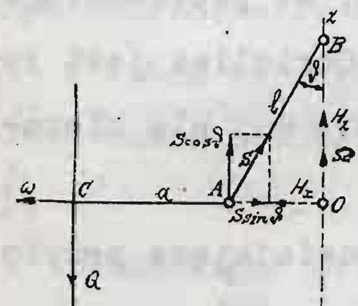

FIG.121.

Zwróćmy przedewszystkiem uwagę na to, że na żyroskop działają dwie siły, mianowicie: ciężar krążka $= Q$ i naprężenie nici $= S$; to ostatnie rozłożymy na składowe: poziomą $(S \sin\vartheta)$ i pionową $(S.\cos\vartheta)$.

Rozpatrzmy ruch środka ciężkości krążka. Torem jego jest koło, położone w płaszczyźnie poziomej i posiadające środek O na osi z, a ponieważ szybkość precesji Ω jest stała, więc jego przyśpieszenie styczne jest zerem; przyśpieszenie całkowite jest zatem skierowane do O i równe $(a + l \sin\vartheta)\Omega^2$. Przyśpieszenie to wywołuje składowa $S.\sin\vartheta$, a więc

$$\frac{Q}{g}(a + l\sin\vartheta)\Omega^2 = S\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Punkt C nie posiada przyśpieszenia w kierunku pionowym, a więc siła Q musi równoważyć składową $S.\cos\vartheta$ czyli

$$S.\cos\vartheta = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Utwórzmy teraz wektor H względem punktu O. Jego składowa pionowa H_z nie ulega zmianie ani pod względem wielkości, ani pod względem kierunku, a składowa pozioma H_x zmienia tylko kierunek. Koniec jej w czasie dt zatacza mianowicie drogę $H_x \cdot \Omega \cdot dt$, temu więc jest równy przyrost owej składowej. Z drugiej strony jest on równy momentowi pary sił Q pomnożonemu przez dt, zatem

$$H_x \cdot \Omega \cdot dt = Q a \cdot dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Wreszcie H_x jako rzut wektora H na oś żyroskopu wynosi $\frac{Q}{g} k^2 \omega$, podstawiając więc to wyrażenie zamiast H_x w (3), otrzymamy

$$\frac{Q}{g} \cdot k^2 \omega \cdot \Omega = Q \cdot a$$

albo

$$k^2 \omega \cdot \Omega = a g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Gdy wyrugujemy z (1),(2) i (4) s i Ω, to wypadnie równanie

$$(a + l \sin\vartheta) a^2 g = k^4 \omega^2 \operatorname{tg}\vartheta$$

określające szukany kąt ϑ.

2. Okrągła tarcza o promieniu a pozostaje w ruchu precesyi regularnej na zupełnie chropowatej płaszczyźnie poziomej. Płaszczyzna tarczy tworzy z pionem kąt α, a szybkość kątowa precesyi jest równa Ω. Wyznaczyć promień koła, które zatacza środek tarczy.

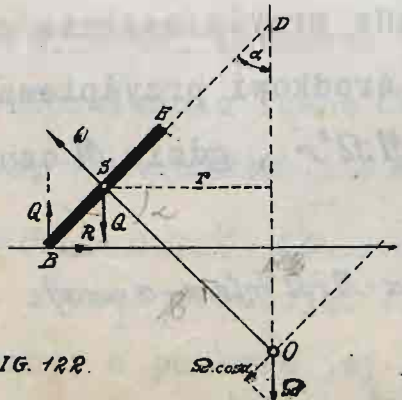

FIG. 122.

Przypuśćmy, że osią precesyi jest prosta OD ;oś tarczy OS przecina ją w punkcie O. Punkt ten jest nieruchomy i przez niego przechodzi zawsze oś chwilowa, obecnie OB. Tworzymy wektor H względem tego punktu O. W tym celu rozkładamy całkowitą szybkość kątową według prostej OS oraz według równoległej przez O do średnicy BE. Znajdziemy, że pierwsza $\omega = \frac{\Omega r}{a}$ . . . . (1). Otrzymamy to mianowicie rozpatrując ruch punktu B względem S. Szybkość względna jest $= -a\omega$, szybkość unoszenia $= r\Omega$, a szybkość bezwzględna $= 0$, zatem $r\Omega - a\omega = 0$, stąd wynika (1.)

Druga składowa szybkości kątowej całkowitej wynosi $\Omega \cos\alpha$. Stosownie do tego wektor H posiada składowe $C\omega$ i $A\Omega\cos\alpha$, gdzie C i A oznaczają odpowiednie momenty bezwładności. Wektor ten w czasie dt otrzyma przyrost

$$\Omega(C\omega\cos\alpha + A.\Omega.\sin\alpha.\cos\alpha)dt\ .$$

Przyrost ten wytwarzają: ciężar tarczy Q i reakcya w punkcie zetknięcia B. Ostatnią rozkładamy na składowe pionową i poziomą; pierwsza jest równa Q, bo środek ciężkości nie posiada przyśpieszenia pionowego, a druga R nadaje temu środkowi przyśpieszenie normalne, a więc jest równa $M\Omega^2 r$, gdzie M oznacza masę tarczy. Stąd

$$\Omega(C\omega.\cos\alpha + A\Omega\sin\alpha.\cos\alpha)dt = Mg.a.\sin\alpha + Mr\Omega^2(r\,tg\alpha - a.\cos\alpha)\ . \ . \ . (2)$$

Łatwo otrzymamy, że

$$C = \frac{a^2}{2}M \quad ; \quad A = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{\cos^2\alpha}\right)M \quad ,$$

a gdy podstawimy to w 2 i weźmiemy pod uwagę 1 to wypadnie

$$r = \frac{tg\alpha\,(4g - \Omega^2 a.\cos\alpha)}{6.\Omega^2}$$

3.Jednorodny prosty stożek kołowy toczy się na płaszczyźnie poziomej doskonale chropowatej, i ruch jest jednostajny; promień podstawy stożka jest równy a, a kąt wierzchołkowy 2α. Jaka powinna być conajwyżej szybkość precesyi, aby stożek się nie podniósł?

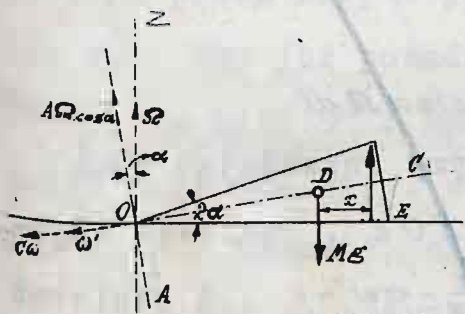

FIG. 123.

Oznaczmy szybkość kątową stożka około pionu z przechodzącego przez wierzchołek O przez Ω, a szybkość względną /względem płaszczyzny COz stożka około jego osi OC przez ω'. Rzut szybkości kątowej wypadkowej na ową oś jest równy sumie rzutów tamtych dwóch, a więc wynosi $\omega = \omega' - \Omega\sin\alpha$. Rzut tejże szybkości wypadkowej na OA jest $= \Omega\cos\alpha$.

Wyznaczamy teraz przyrosty wektora H w kierunkach prostych OC i OA. Składowe tego wektora w tych kierunkach są odpowiednio równe $C\omega$ i $A\Omega.\cos\alpha$, a więc przyrosty wynoszą $C\omega.\cos\alpha\,\Omega dt$ i $A\Omega\cos\alpha.\sin\alpha\,\Omega dt$ i

$$dH = C\omega\cos\alpha\,\Omega\,dt + A\Omega\cos\alpha.\sin\alpha\,\Omega\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Na stożek działają: siła ciążenia $= Mg$ i reakcya płaszczyzny; o punkcie jej przyłożenia wiemy tylko tyle, że leży on na tworzącej, wzdłuż której stożek styka się z płaszczyzną.

Rozłożymy tę reakcyę na trzy składowe w kierunkach 1/ prostopadłym do płaszczyzny rysunku, 2/ poziomym i 3/ pionowym. Pierwsza z nich jest równa zeru, bo Ω nie ulega zmianie; drugiej możemy nie brać w rachubę, bo moment jej względem O jest zerem; pozostaje składowa normalna, równa oczywiście sile ciążenia Mg i wraz z tą ostatnią tworzy parę, o momencie $=Mg.x$, gdzie x oznacza ramię.

Tak więc $dH=Mgx\,dt$ albo

$$Mgx\,dt=C\omega\cos\alpha\,\Omega\,dt+A\Omega\cos\alpha.\sin\alpha\,\Omega\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Szybkość ω w funkcyi Ω wyznaczymy rozważając ruch punktu E względem płaszczyzny EOz. Ponieważ szybkość E jest zerem, przeto $\frac{\Omega a}{\sin\alpha}-a\omega'=o$, a ponieważ $\omega'=\omega+\Omega.\sin\alpha$, więc ostatecznie

$$\omega=\Omega\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

Podstawiając to w (2) otrzymamy

$$A\Omega^2\cos\alpha.\sin\alpha+C\Omega^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=Mg.x$$

Widzimy, że Ω osiąga maksymum, gdy x przybiera wartość największą. Gdy przez b oznaczymy tworzącą stożka, to owa wartość wyniesie $b-\frac{3}{4}b\cos^2\alpha$, gdyż punkt przyłóżenia reakcyi nie może wyjść po za E, a więc odpowiadająca temu wartość Ω jest pierwiastkiem równania

$$A\Omega^2\cos\alpha.\sin\alpha+C\Omega^2\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}=Mg\left(b-\frac{3}{4}b\cos^2\alpha\right)$$

Gdy Ω będzie większe od tej wartości, to stożek się podniesie.

90. Trwałość precesyi regularnej. Przypuśćmy, że w urządzeniu wyobrażonem na fig. 119 ścięgno CD wydłuża się lub skraca, przyczem łożysko D powinno tak przesuwać się na pionie OD, aby ścięgno pozostawało prostopadłem do osi OC. Podczas tego wydłużania lub skracania oczywiście na koniec C osi ciała musiała działać prócz siły R jakaś nowa siła P w kierunku DC lub CD. Gdy już pożądana zmiana długości nastąpiła, usuńmy tę siłę P. Naturalnie zmienił się kąt ϑ, a zatem zmieniła się i siła R; zbadamy, czy R ze wzrostem kąta ϑ wzrasta, czy maleje.

Naprzód zobaczymy, jak zmieniają się szybkości kątowe ω i Ω gdy ϑ zmienia się w opisany sposób. Moment siły P względem osi OC jest zerem, a zatem dowiedziemy z łatwością przy pomocy trzeciego równania Eulera, jak w par. 88, że szybkość ω pozostaje stałą.

Siła P działała wciąż w płaszczyźnie OCD, podobnie jak siły Q i R, a zatem moment jej względem O był poziomy i wektor H względem O otrzymywał wciąż przyrosty poziome.

Z tego wynika, że koniec tego wektora pozostaje stale w nieruchomej płaszczyźnie poziomej, a więc rzut jego H' na pion OD jest wielkością stałą.

Ponieważ składowe wektora H w kierunkach OC i OA wynoszą odpowiednio $C\omega$ i $A\Omega \sin\vartheta$ - otrzymamy przeto

Ruch wektora H w pion. ??

$$C\omega.\cos\vartheta + A\Omega\sin^2\vartheta = H' = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy ϑ i Ω. Różniczkując je otrzymamy

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{C\omega - 2A\Omega\cos\vartheta}{A\sin\vartheta} \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Z drugiej strony z $(1.)$ w par. ~~88~~ 87 mamy

$$Rb = (Qa - C\Omega\omega + A\Omega^2\cos\vartheta).\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

a stąd

$$b\frac{dR}{d\vartheta} = -(C\omega - 2A\Omega\cos\vartheta)\sin\vartheta\frac{d\Omega}{d\vartheta} - A\Omega^2\sin^2\vartheta +$$
$$+ (Qa - C\omega\Omega + A\Omega^2\cos\vartheta)\overset{\cos\vartheta}{\cancel{\sin\vartheta}} .$$

Gdy wprowadzimy $\frac{d\Omega}{d\vartheta}$ z $(2.)$ i uwzględnimy $(3.)$, to wypadnie

$$\frac{dR}{d\vartheta} = -\frac{(2A\Omega\cos\vartheta - C\omega)^2}{Ab} - \frac{A\Omega^2\sin^2\vartheta}{b}$$

Widzimy, że przy tej wartości kąta ϑ, przy której ciało posiada ruch precesyi regularnej, $\frac{dR}{d\vartheta}$ jest ujemne; znaczy to, że ze wzrostem kąta ϑ, R się zmniejsza i odwrotnie.

Z rozważań powyższych wynika wniosek następujący: Przypuśćmy, że ścięgna niema, i że ciało posiada ruch p precesyi regularnej. Wymierzny w koniec osi C lekkie uderzenie skierowane do D. Skutkiem tego oś zbliży się cokolwiek do pionu t.j. kąt ϑ się zmniejszy. Poprzedniej wartości kąta ϑ odpowiadała wartość zero reakcyi R, nowej wartości odpowiada wartość większa t.j. dodatnia. Znaczy to, że pragnąc utrwalić nowe położenie osi w płaszczyźnie OCD, musielibyśmy przyłożyć w C siłę skierowaną do D.

Jeżeli pozostawimy ciało samemu sobie, to oś podąży do położenia pierwotnego, przy którem odbywała się precesya regularna.

Gdyby uderzenie nastąpiło w kierunku DC, to siła R przybrałaby wartość ujemną, a więc byłaby zwrócona od D do C, a oś pozostawiona samej sobie, podążałaby do pionu OD, czyli znowu do położenia pierwotnego. Ze względu na takie właściwości preces regularnej mówimy zwykle, że jest to ruch trwały.

91. Precesya pseudoregularna. Usuńmy w urządzeniu wyobrażonem na fig. 119 ścięgno CD, ustawmy oś ciała OC pod kątem ϑ_0 do pionu, nadajmy następnie ciału szybkość kątową ω około OC, skierowaną od O do C, jak wskazuje strzałka, i pozostawmy ciało samemu sobie. Pragniemy zbadać ruch dalszy.

Oprócz reakcyi w O na ciało działa jedynie siła ciążenia Q. Z trzeciego równania Eulera wynika, jak wiemy, że rzut całkowitej szybkości kątowej na OC pozostanie i nadal równym ω.

Moment ilości ruchu względem O może przybierać jedynie przyrosty poziome, a zatem rzut jego H' na pion OD będzie stale równy $C\omega.\cos\vartheta_0$. Pod siłą Q.

W pierwszej chwili wektor H posiada kierunek OC. Pod działaniem siły Q oś ta zacznie odchylać się od pionu i gdyby nie powstał jeszcze jakiś ruch inny, to by rzut H' się zmniejszał. H' zachowa wartość stałą tylko w takim razie, jeżeli jednocześnie z opadaniem OC powstanie na OA odpowiednia składowa wektora H czyli jeżeli ciało zacznie się obracać około pionu OD z odpowiednią szybkością kątową Ω ; szybkość ta będzie skierowana od O do D jak wskazuje strzałka.

Gdy oś OC odchyli się od pionu o kąt ϑ, to rzut H' będzie równy $C\omega\cos\vartheta + A\Omega\sin^2\vartheta$. , a zatem

$$C\omega\cos\vartheta + A\Omega\sin^2\vartheta = C\omega\cos\vartheta_0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wówczas szybkość kątowa ciała będzie miała składowe $\omega, \Omega\sin\vartheta$ i $\frac{d\vartheta}{dt}$ na prostych OC, OA oraz na prostopadłej OB do płaszczyzny OCD ,a więc siła żywa ciała wyniesie

$$\frac{1}{2}\left[C\omega^2 + A\Omega^2\sin^2\vartheta + A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right],$$

3 składowe szybkości

gdy w pierwszej chwili wynosiła $\frac{C\omega^2}{2}$ Przyrost

$$\frac{1}{2}\left[A\Omega^2\sin^2\vartheta + A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]$$

jest równy pracy $Q.a(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$ siły Q , zatem

$$A\Omega^2\sin^2\vartheta + A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\,Q.a\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) \quad (2)$$

Równania (1) i (2) określają ruch ciała; aby wytworzyć sobie wyobrażenie o tym ruchu należy zbadać, jak zmieniają się szybkości kątowe Ω i $\frac{d\vartheta}{dt}$, gdy wzrasta kąt ϑ. Wyrazimy naprzód Ω w funkcji ϑ. Z (1) mamy

$$\Omega = \frac{C\omega}{A}\cdot\left(\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right)$$

Ponieważ $\frac{C\omega}{A}$ jest wielkością stałą, zatem wystarczy zbadać zmienność wyrażenia, zawartego w nawiasie, czyli

$$u = \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

Tworząc pochodną względem ϑ - otrzymamy po przekształceniu

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta . \cos\vartheta_0 + \cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta_0}{\sin^3\vartheta} = \frac{\sin^2\vartheta_0 + (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2}{\sin^3\vartheta} \qquad (3)$$

Kąt ϑ zawiera się w granicach od o do π a więc $\sin\vartheta$ posiada w każdym razie wartość dodatnią, zatem i mianownik w (3) jest zawsze dodatni. Chodzi tylko o znak licznika.

Aby to roztrzygnąć zwróćmy uwagę na ten przypadek gdy $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ czyli $\cos\vartheta_0 > o$. Gdy przytem mamy $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, a więc $\cos\vartheta < o$, to trzeci wyraz licznika jest dodatni a ponieważ dwa pierwsze są również dodatnie, zatem i cały licznik jest $> o$.

Gdy zaś jest $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ to ów trzeci wyraz jest ujemny i gdy zamiast $\cos\vartheta$ napiszemy w nim jednostkę, to oczywiście będzie

$$\frac{du}{d\vartheta} > \frac{1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$$

Lecz $1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta = (1 - \cos\vartheta)^2$, a więc $\frac{du}{d\vartheta} > \frac{(1-\cos\vartheta)^2}{\sin^3\vartheta}$

Widzimy stąd, że i w tym razie jest $\frac{du}{d\vartheta} > o$. Tak samo można okazać, że pochodna ta jest większa od zera i wówczas, gdy $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$, a z tego wynika, że szybkość kątowa Ω wzrasta, gdy kąt ϑ rośnie, czyli, gdy oś ciała, odchyla się od pionu.

Aby zdać sobie sprawę z tego, jak zmienia się szybkość $\frac{d\vartheta}{dt}$, wyznaczymy naprzód skrajne położenie osi OC, czyli te wartości kąta ϑ, przy których oś przestaje odchylać się od pionu i zaczyna się zbliżać lub odwrotni

Oczywiście w takim położeniu osi, $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, a zatem z (2) wypada, że wówczas

$$A\Omega^2 \sin^2\vartheta = 2Qa(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Rugując stąd i z (1.) szybkość Ω otrzymamy

$$(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\left[C^2\omega^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) - 2AQ.a\sin^2\vartheta\right]=0$$

Z tego równania wynika przedewszystkiem, że $\frac{d\vartheta}{dt}=0$ gdy $\vartheta=\vartheta_0$ t.j. w położeniu początkowem i wogóle wówczas, gdy oś tworzy z pionem kąt ϑ_0. Aby otrzymać inne położenia skrajne, należy założyć, że drugi czynnik lewej strony jest zerem.

Celem skrócenia rachunku założymy, że $\cos\vartheta = x$, a więc $\sin^2\vartheta = 1-x^2$ i $\frac{C^2\omega^2}{2AQa}=2n$. Wypadnie wówczas

$$x^2 - 2nx + 2n\cos\vartheta_0 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

Wyróżnik tego równania kwadratowego wynosi $n^2-2n\cos\vartheta_0+1$ Najmniejsza wartość jego wypada w tym razie, gdy $\cos\vartheta_0=1$, czyli gdy początkowo oś ciała miała położenie pionowe, lecz i wówczas jest on równy $(n-1)^2$ czyli dodatni.

Wnioskujemy stąd, że obydwa pierwiastki równania (5.) są rzeczywiste.

Dajmy niewiadomej x wratość -1 wówczas lewa strona równania przybiera wartość $2n(1+\cos\vartheta_0)$, oczywiście dodatnią. Następnie dajmy x wartość $\cos\vartheta_0$; po lewej stronie wypadnie $\cos^2\vartheta-1$, co jest znowu ujemne. Tak więc, gdy x wzrasta od -1 do $\cos\vartheta_0$, to lewa strona zmienia znak, a więc równanie posiada pierwiastek, zawarty pomiędzy -1 i $\cos\vartheta_0$; innemi słowy szybość kątowa $\frac{d\vartheta}{dt}$ staje się zerem dla pewnej wartości ϑ, zawartej pomiędzy π i ϑ_0. Oznaczmy tę wartość przez ϑ_1.

Przypuśćmy teraz, że x wzrasta dalej poczynając od $\cos\vartheta_0$. Gdy x przybierze wartość $+1$, to lewa strona stanie się równa $-2n(1-\cos\vartheta_0)$; jest to ujemne, podobnie jak dla $x=\cos\vartheta_0$, a zatem pomiędzy $\cos\vartheta_0$ i $+1$ niema pierwiastka. Gdy x wzrasta w dalszym ciągu i przekroczy $2n$, to suma dwóch pierwszych wyrazów x^2-2nx, czyli $x(x-2n)$, staje się dodatnią, i następnie z dalszym wzrostem x wzrasta nieograniczenie. musi więc ostatecznie cała lewa strona stać się dodatnią. Z tego wynika, że równanie posiada pierwiastek większy od 1; nie wchodzi on w rachubę, bo x, czyli $\cos\vartheta$ nie może być większe od 1.

Tak więc szybkość kątowa $\frac{d\vartheta}{dt}$ staje się zerem dla dwóch położeń osi ciała, a mianowicie, gdy ta oś tworzy z pionem kąty ϑ_0 i ϑ_1. Widzieliśmy, że $\cos\vartheta_1$ zawiera się pomiędzy -1 i $\cos\vartheta_0$, jest więc mniejszy od $\cos\vartheta_0$, a zatem kąt ϑ_1 jest większy od ϑ_0.

$\vartheta_1 > \vartheta_0$

Możemy teraz zdać sobie sprawę z ruchu ciała. W tym celu wyobraźmy sobie kulę /Fig.124/ zatoczoną z punktu O promieniem $a^2 = b$, obierzmy za biegun jej punkt najwyższy i przeprowadźmy na powierzchni dwa równoleżniki, których średnice widać z O odpowiednio pod kątami $2\vartheta_0$ i $2\vartheta_1$; pierwszy z nich

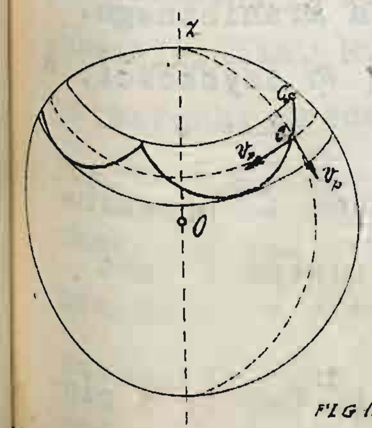

FIG 124

leży oczywiście wyżej od drugiego. Otóż ruch punktu C odbywa się na powierzchni kuli pomiędzy tymi równoleżnikami granicznymi.

W każdej chwili szybkość punktu C daje się rozłożyć na dwie składowe; jedna v_p w kierunku południka, lub raczej w kierunku stycznej do tegoż, jest równa $b\frac{d\vartheta}{dt}$, druga $v_r = b\Omega\sin\vartheta$ w kierunku równoleżnika.

Punkt C wyruszy z pewnego położenia C_0 na górnym równoleżniku granicznym w kierunku południka. Szybkość kątowa Ω, a zatem i składowa v_r szybkości linjowej punktu C, powstają dopiero skutkiem odchylania się osi od pionu.

W dalszym ciągu wzrastają obydwie składowe v_p i v_r a więc punkt C odbiega coraz prędzej i coraz dalej od początkowego południka, jak również od górnego równoleżnika granicznego.

Podczas tego ruchu ku dolnemu równoleżnikowi granicznemu składowa v_r wzrasta wciąż. Natomiast składowa v_p wraz z szybkością kątową $\frac{d\vartheta}{dt}$ wzrasta tylko do pewnego maksymum, następnie maleje i staje się zerem, gdy punkt C doszedł do dolnego równoleżnika granicznego. Wówczas punkt C posiada tylko składową v_r szybkości, a więc biegnie w kierunku równoleżnika.

Z rozważań tych wynika, że tor punktu C przecina górny równoleżnik graniczny pod kątem prostym i jest styczny do równoleżnika dolnego.

Oznaczmy przez α kąt, który oś ciała tworzy z pionem w chwili, gdy v_p lub $\frac{d\vartheta}{dt}$ osiąga maksymum. Łatwo się domyśleć, że kąt ten odpowiada precesyi regularnej; znaczy to, że przy ówczesnej wartości Ω zachodziłaby precesya regularna, gdyby nie istniała wielkość $\frac{d\vartheta}{dt}$. Można się o tem przekonać w sposób następujący.

Różniczkując równania (1) i (2) względem t i rugując $\frac{d\Omega}{dt}$, otrzymamy

$$C\Omega\omega \sin\vartheta - A\Omega^2 \sin\vartheta . \cos\vartheta + A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Q\alpha \sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Do tego równania moglibyśmy z łatwością dojść bezpośrednio. W tym celu należy tylko napisać, że przyrost elementarny wektora H jest równy momentowi popędu elementarnego siły Q względem punktu O.

Dajmy w (6) zmiennej ϑ wartość α; wówczas $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=0$, gdyż przy tej wartości $\frac{d\vartheta}{dt}$ osiąga maksymum, i wypadnie

$$\Omega(C\omega - A\Omega\cos\alpha) = Q\alpha$$

Taki właśnie warunek powinien być spełniony, aby zachodziła precesya regularna, przekonamy się o tem, gdy porównamy to równanie z (2) par.87.

Gdy punkt C znajdzie się na dolnym równoleżniku granicznym, to jak widzieliśmy porusza się wzdłuż tego równoleżnika. Ruch taki jednak nie może trwać dłużej, bo warunki precesyi regularnej nie są tu spełnione. Punkt C przeto zaczyna podnosić się w górę, i ruch przechodzi przez wszystkie fazy, przez które przechodził poprzednio, w porządku odwrotnym. A więc v_p wciąż się zmniejsza, gdy v_s wzrasta, dopóki C nie dojdzie do równoleżnika precesyi regularnej, potem maleje i staje się zerem na górnym równoleżniku granicznym.

Fig. 125 wyobraża tor punktu C, widziany z góry. Taki ruch pp. Klein i Sommerfeld nazwali precesyą pseudoregularną. Mówimy, że wywołuje ją siła Q. Jeżeli równoleżniki graniczne są zbliżone do siebie, to oko nie dostrzega prawie drobnych wahań osi ω w kierunku pionowym, i wygląda tak jak gdyby siła Q wywoływała ruch w kierunku do niej prostopadłym.

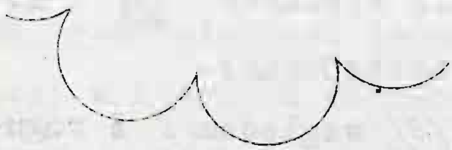

FIG. 125.

Jeżeli oś ciała pozostaje podczas precesyi prawie poziomą, to mówi się, że wektor ω goni moment siły Q. Słuszność tej reguły, która bywa nieraz użyteczna można łatwo sprawdzić przy pomocy figury 119.

92. Przykłady. 1. Obręcz toczyła się wprost od nas na chropowatej płaszczyźnie poziomej i z jakiejś przyczyny pochyliła się cokolwiek na prawo. W którą stronę zboczy ona z linji prostej?

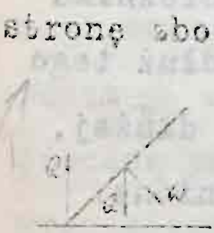

FIG. 126

Na obręcz działa siła ciężkości i reakcya płaszczyzny. Gdy obręcz pochyli się, to te dwie siły utworzą parę, o momencie skierowanym do nas i para ta wywoła precesyę. Wektor ω powinien przytem gonić moment owej pary, a tego wynika, że obręcz musi zboczyć w prawo.

2. Względem lotnika [illegible] aeroplanu, umie-

szczony na przedzie, obraca się w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara. Jaki ruch wykona aeroplan w płaszczyźnie pionowej, gdy lotnik, pragnąc skręcić na prawo zwróci ster w stosowną stronę?

Na ster będzie działała prostopadle doń siła P. Przyłóżmy w środku ciężkości aeroplanu S dwie siły równe i odwrotne do P; jedna z nich wywoła nieznaczny ruch postępowy aeroplanu, a druga wraz z siłą P, działającą na ster utworzy parę, o momencie, zwróconym w górę.

Wektor ω czyli szybkość kątowa propeleru jest skierowana naprzód, a ponieważ powinna ona gonić wzmiankowany moment, więc przednia część aeroplanu podniesie się do góry.

3. Oś OO' ciała obrotu jest tak osadzona w punkcie O, że mogłaby się około niego obracać w każdym kierunku. Na końcu O' oś ta posiada ucho, przez które przechodzi gładki pałąk kołowy, umocowany w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez O. Tym sposobem oś OC może się poruszać tylko w tej płaszczyźnie. Ciężar ciała Q, jego momenty bezwładności względem osi obrotu i względem prostopadłej do niej przez O są równe C i A, odległości środka ciężkości S i ucha O' od O wynoszą l i l' /ten jest także równy promieniowi pałąka/. Ustawiamy oś OO' pod kątem ϑ do pionu, nadajemy ciału szybkość kątową ω około te-

że i pozostawiamy je samemu sobie. Jaki będzie ruch

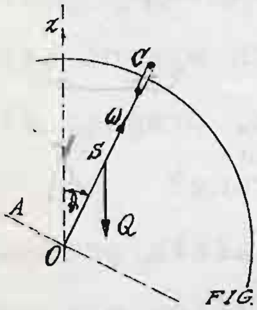

FIG.128.

dalszy, i jaką reakcyę pałąk będzie wywierał na ucho?

Gdyby nie było pałąka, to ciało wykonywałoby precesyę pseudoregularną; jednocześnie z opadaniem osi OC zachodziłby obrót ciała około prostej pionowej z i dzięki temu drugiemu ruchowi rzut wektora H na pion nie ulegałby zmianie. W danym jednak razie - pałąk przeszkadza temu ruchowi i wywiera na oś OC reakcyę P, prostopadłą do płaszczyzny rysunku i skierowaną od widza. Pod wpływem tej reakcyi rzut wektora H na pion będzie się zmniejszał. Gdy oś OC utworzy z pionem kąt ϑ, to rzut ów wyniesie $C\omega\cos\vartheta$; w ciągu następnych dt sek przybierze on przyrost $= d(C\omega\cos\vartheta)$ i temuż jest równy moment reakcyi pałąka względem punktu O pomnożony przez dt. Otrzymamy

$$-d(C\omega\cos\vartheta) = P.b.\sin\vartheta\, dt$$

Różniczkując i skracając przez $\sin\vartheta$ będziemy mieli

$$C\omega\frac{d\vartheta}{dt} = Pb \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aby wyznaczyć $\frac{d\vartheta}{dt}$ stosujemy zasadę sił żywych. W chwili t całkowita podwójna siła żywa ciała wynosi $C\omega^2 + A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Początkowa jej wartość była równa $C\omega^2$, a więc w ciągu czasu t wzrosła o $A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Przyrost ten jest równy podwójnej pracy siły ciężenia /reakcya w O i w C nie pracuje/, a więc

$$A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2Qa\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)$$

skąd

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2Qa}{A}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}$$

Gdy podstawimy to w $(1.)$, to wypadnie

$$P = \frac{C\omega}{b}\sqrt{\frac{2Qa}{A}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}$$

Gdy $\vartheta = \vartheta_0$ to $P = 0$; potem P wtrasta i osiąga wartość $\frac{C\omega}{b}\sqrt{\frac{2Qa}{A}\cos\vartheta_0}$, gdy oś OC zajmuje położenie poziome.

4. Dwie jednakowe gładkie sztaby AO i OB każda o długości $2a$ są połączone luźno z nieruchomym punktem O, a trzecia taka sama sztaba CD może przesuwać się po nich przy pomocy pierścieni, umocowanych w końcach C, D. Ustawiamy wszystkie sztaby na prostej poziomej tak, aby pierścienie przypadały w środkach sztab AO i OB, a następnie nadajemy temu układowi szybkość kątową ω_0 około pionu. Jaka powinna być ta szybkość, aby sztaba CD nie zsunęła się z dwóch pozostałych.

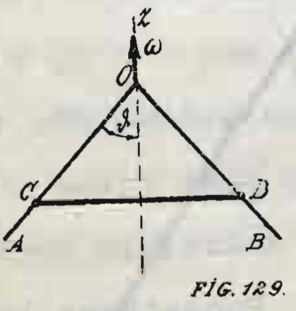

FIG. 129.

Wektor H układu względem pionu z nie ulega zmianie, bo wszystkie siły działające na ten układ leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez oś z, a więc ich momenty względem tej osi są zerami. Przypuśćmy, że sztaba CD zajęła położenie krańcowe, że więc punkt C doszedł do A, a D do B i kąt ϑ osiągnął minimum, a więc $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Wyznaczmy w tem położeniu wektor H sztaby OB, a raczej składowe jego w kierunku tej sztaby i w kierunku prostopadłym. Lecz pierwsza z nich jest zerem, bo moment bezwładności sztaby względem jej osi $=0$, a więc cały moment H jest prostopadły do OB. Wynosi on $m\frac{4}{3}a^2\omega.\sin\vartheta$ gdzie m oznacza masę sztaby.

Moment ilości ruchu względem osi z jest równy rzutowi $m\frac{4}{3}a^2\omega.\sin\vartheta$ na tę oś czyli $=m\frac{4}{3}a^2\omega.\sin^2\vartheta$. Moment sztaby OA jest równy temu samemu, a moment trzeciej sztaby wynosi $m\frac{a^2}{3}\omega$. Tak więc całkowity wektor H względem osi z jest $=2m\frac{4}{3}a^2\omega.\sin^2\vartheta+m\frac{a^2}{3}\omega$; początkowo był on równy $2m\frac{4}{3}a^2\omega_0+m\frac{a^2}{3}\omega_0$, a więc

$$2m\frac{4}{3}a^2\omega.\sin^2\vartheta+m\frac{a^2}{3}\omega=2m\frac{4}{3}a^2\omega_0+m\frac{a^2}{3}\omega_0$$

skąd wypada

$$(1+8\sin^2\vartheta)\omega=9\omega_0 \qquad . \qquad . \qquad (1)$$

Stosujemy teraz zasadę sił żywych.

Wyznaczając części siły żywej sztaby OB, pochodzące z ruchów obrotowych około OB i około prostej prostopadłej, zobaczymy, że pierwsza z nich jest $=0$ / mom. bezwł. sztaby względem jej osi $=0$ /, a druga wynosi $m\frac{4a^2}{3}\frac{\omega^2\sin^2\vartheta}{2}$. Toż samo będzie dla sztaby OA, a siła żywa trzeciej sztaby jest równa $m\frac{a^2}{3}\frac{\omega^2}{2}$. Całkowita siła żywa w rozważanem położeniu wynosi zatem $2m\frac{4a^2}{3}\frac{\omega^2\sin^2\vartheta}{2}+m\frac{a^2}{3}\frac{\omega^2}{2}$. Początkowo była ona równa $2m\frac{4a^2}{3}\omega_0^2+m\frac{a^2}{3}\frac{\omega^2}{2}$, a więc różnica tych wartości stanowi jej przyrost. Przyrost ten jest równy sumie prac sił ciążenia, czyli

$2mga\cos\vartheta + mga\cot g\vartheta$, zatem

$$2m\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{\omega^2\sin^2\vartheta}{2}+m\frac{a^2}{3}\frac{\omega^2}{2}-2m\frac{4a^2}{3}\omega_0^2+m\frac{a^2}{3}\frac{\omega^2}{2}=2mga\cos\vartheta+mga\cot g\vartheta$$

Po uproszczeniu otrzymamy stąd

$$(1+8\sin^2\vartheta)a\omega^2-9a\omega_0^2=6g\cos\vartheta\left(2+\frac{1}{\sin\vartheta}\right)$$

Stąd oraz z (1) rugujemy ω. Wypadnie

$$6a\omega_0^2=\frac{g.(1+2\sin\vartheta)}{\sin 2\vartheta}(1+8\sin^2\vartheta)\quad .\quad .\quad .\quad (2)$$

W skrajnem położeniu sztaby CD, $\vartheta=30^\circ$, a więc z (2) będzie

$$\omega_0^2=\frac{2g}{a\sqrt{3}}\quad .\quad .\quad .\quad (3)$$

Nam chodzi o to, aby sztaba CD się nie zsunęła, zatem ω_0^2 powinno się choćby cokolwiek różnić od wyznaczonej wartości. Pytanie tylko, czy powinno być od niej większe, czy też mniejsze?

Aby na to odpowiedzieć należy zbadać, jak się zmienia ω ze zmianą ϑ.

Z (2) mamy

$$\omega_0^2=\frac{g(1+2\sin\vartheta)}{6a}\cdot\frac{1+8\sin^2\vartheta}{\sin 2\vartheta}$$

Pierwszy czynnik tego wyrażenia wzrasta napewno, gdy ϑ rośnie, chodzi tylko o czynnik drugi. Oznaczmy go przez u i utwórzmy pochodną $\frac{du}{d\vartheta}$.

Otrzymamy

$$\frac{du}{d\vartheta}=\frac{8\sin^2 2\vartheta-(1+8\sin^2\vartheta).2\cos 2\vartheta}{\sin^2 2\vartheta}$$

Dla $\vartheta=30^\circ$ pochodna ta jest dodatnia, a więc ω jest w owym położeniu funkcyą rosnącą kąta ϑ . Tak więc ω_0 powinno być większe od wartości określonej w (3/9)

93. Ruch kuli na płaszczyźnie poziomej. Zupełnie chropowata płaszczyzna pozioma obraca się ze stałą szybkością kątową Ω około osi ~~poziomej~~ pionowej. W spadku tej osi położono kulę i nadano jej impuls poziomy, skutkiem czego środek otrzymał szybkość v_0 . Chodzi o wyznaczenie toru bezwzględnego środka.

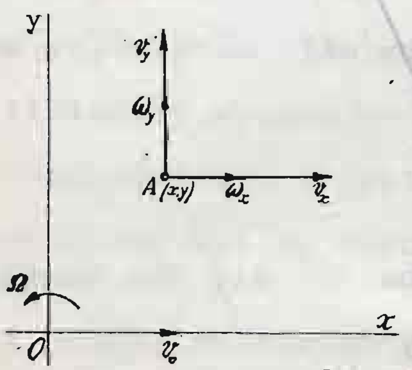

FIG. 130.

Niechaj początkowe położenie środka będzie początkiem prostokątnego układu współrzędnych; osi x, y - obieramy w płaszczyźnie poziomej, a mianowicie pierwszą w kierunku szybkści v_0. Skutkiem początkowego pchnięcia, czy uderzenia kula otrzymuje ilość ruchu $G = Mv_0$ w kierunku osi x oraz moment ilości ruchu względem środka $H_0 = -\frac{Mk^2}{a} v_0$ w kierunku osi y ; M oznacza w tem masę kuli, a promień i k ramię bezwładności względem średnicy. Dalsze przyrosty wektorów G i H wytwarza pozioma siła tarcia, a zatem przyrosty te są poziome, i obydwa wektory pozostają stale w płaszczyźnie xy . Z tego wynika, że całkowita szybkość kątowa kuli jest zawsze pozioma.

Siła tarcia F wytworzy w czasie dt przyrost Fdt wektora G oraz przyrost $Fadt$ wektora H . Przyrosty te są do siebie prostopadło, a stosunek pomiędzy ich wielkościami wynosi $\frac{1}{a}$, a więc i całkowity przyrost jaki otrzyma wektor G w czasie t, jest prostopadły do całkowitego przyrostu wektora H i pozostaje doń w tym samym stosunku.

Opierając się na wynikach powyższych, można zadanie to rozwiązać w sposób bardzo prosty.

W chwili t środek kuli zajmie położenie (x,y). Składowe szybkości liniowej /bezwzględnej/ środka w kierunkach osi oznaczymy przez v_x, v_y, a składowe szybkości kątowej przez ω_x, ω_y. Ponieważ poślizg jest wyłączony, przeto

$$v_x + a\omega_y = -\Omega y \quad ; \quad v_y - a\omega_x = \Omega x .$$

Całkowity przyrost wektora G w kierunku osi x pomnożony przez a musi być taki sam jak całkowity przyrost wektora H w kierunku osi y i odwrotnie. Stąd wynikają dwa inne równania

$$a(Mv_x - G_0) = Mk^2\omega_y - H_0 \quad ; \quad aMv_y = -Mk^2\omega_x$$

Rugując z tych czterech równań ω_x, ω_y i całkując, otrzymamy równanie toru

$$\Omega(x^2+y^2) - 7v_0 y = 0$$

Jest to koło, o promieniu $= \frac{7v_0}{2\Omega}$

Gdy wyznaczymy z równań poprzedzających v_x i v_y, to okaże się, że szybkość środka kuli $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ jest stale równa v_0.