zatem $\Omega . d\Omega = -\omega^2 \sin\vartheta d\vartheta$, a całkując otrzymamy

$$\frac{\Omega^2}{2} = \omega^2 . \cos\vartheta + A \quad , \ldots\ldots\ldots (2.)$$

gdzie A jest stałą całkowania. Gdy $\vartheta = o$, to szybkość względna była równa $2a.\omega$ i $\Omega = 2\omega$, zatem $A = \omega^2$. — Podstawiając to do $(2.)$ będziemy mieli $\Omega = 2\omega . \cos\frac{\vartheta}{2}$, a stąd $R = m(4a.\omega^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} + 2a.\omega^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} - 4a.\omega^2 \cos\frac{\vartheta}{2})$ lub po uproszczeniu $R = 2am.\omega^2 \cos\frac{\vartheta}{2}(3\cos\frac{\vartheta}{2} - 2)$. Reakcya ta jest początkowo dodatnia, następnie zmniejsza się, gdy $\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3}$, to staje się zerem, poczem przybiera wartości ujemne.

[Gdyby torem przepisanym punktu materyalnego była wewnętrzna strona gładkiej obręczy i gdyby pozostałe warunki były takie same, jak w poprzedzającym przykładzie, to od chwili, w której $\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3}$, punkt przestałby się stykać z obręczą i poszedłby w myśl pierwszego prawa Newtona po linji prostej.]

Znajdźmy, po jakim czasie paciórka dojdzie do O. Z równania $\frac{d\vartheta}{dt} = 2\omega\cos\frac{\vartheta}{2}$, otrzymamy po zcałkowaniu

$$\log . tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{4}\right) = \omega t + B \ldots\ldots\ldots (1.)$$

gdzie B oznacza stałą całkowania. Gdy $t = o$, to $\vartheta = o$ zatem $B = o$. Paciórka dojdzie do O, gdy będzie $\vartheta = \pi$, co podstawiając w $(1.)$ znajdziemy $t = \infty$. Paciórka zbliża się więc asymptotycznie do O. —

9. Spadek na torze przepisanym. Rozważymy oddzielnie przypadek, w którym ciało porusza się na gładkim torze przepisanym pod działaniem siły ciążenia. Układ współrzędnych obierzemy inaczej, niż w paragrafie 7. Początek możemy wziąć dowolnie, a oś z skierujemy pio

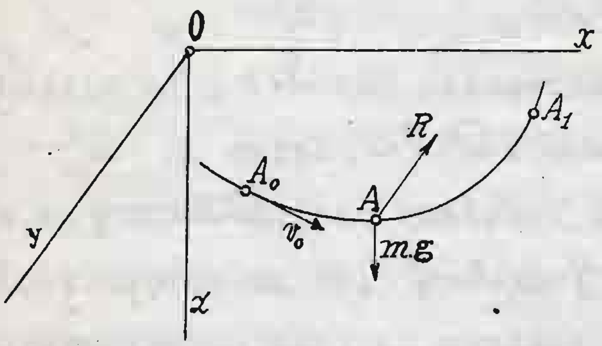

FIG. 19.

nowo na dół.

Przypuśćmy, że punkt o masie m wyruszył z położenia $A_0(x_0,y_0,z_0)$ z szybkością v_0, a w chwili t znalazł się w położeniu $A(x,y,z)$; szybkość jego była wówczas równa v, a reakcya toru R tworzyła z osiami kąty α, β, γ.—

W takim razie będzie $m\frac{d^2x}{dt^2}=R\cos\alpha$; $m\frac{d^2y}{dt^2}=R\cos\beta$ $m\frac{d^2z}{dt^2}=R\cos\gamma+mg$. Mnożymy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz i dodajemy stronami

$$m\frac{dx.d^2x+dy.d^2y+dz.d^2z}{dt^2}=R(dx.\cos\alpha+dy.\cos\beta+dz\cos\gamma)+mg.dz$$

Lewą stronę możemy przekształcić na

$$\frac{m}{2}.\frac{d(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}=\frac{m}{2}.\frac{d(ds^2)}{dt^2}=\frac{m}{2}\,d\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)=\frac{m\,d(v^2)}{2},$$

gdzie ds oznacza element toru. Współczynnik przy R po prawej stronie jest oczywiście równy rzutowi elementu ds na kierunek reakcyi R; lecz reakcja jest normalna do toru, a więc rzut ten jest zerem. Tym sposobem równanie nasze przekształci się na $\frac{d(v^2)}{2}=g\,dz$. Całkując w granicach od z_0 do z otrzymamy $v^2=v_0^2+2g(z-z_0)$. Z równania tego wynika wniosek bardzo ważny, że szybkość punktu w położeniu A nie zależy wcale od kształtu toru A_0A, lecz jedynie od szybkości początkowej v_0 i od $z-z_0$, czyli od różnicy poziomów punktów A i A_0. Odwrotnie jeżeli punkt materyalny wyruszy z A z szybkością v w stronę A_0, to dojdzie do tego ostatniego z szybkością v_0. W przypadku szczególnym, gdy $v_0=0$ i $z-z_0=h$, $v^2=2gh$.

Aby wyznaczyć równanie ruchu, czyli związek pomiędzy drogą, przebytą na torze i czasem trzeba mieć dany tor punktu. Przypuśćmy, że torem przepisanym jest linia prosta, nachylona do poziomu pod kątem α. W tym razie siła styczna jest równa $mg\sin\alpha$, a siła normalna $m.g.\cos\alpha$. Krzywizna toru jest zerem, a więc i przyspieszenie normalne jest zerem. Z tego wynika, że reakcya toru jest wciąż równa sile normalnej $m.g.\cos\alpha$.

Ruch punktu jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony, a mianowicie przyspieszenie wynosi $g\sin\alpha$ Według par. 134 cz. II równanie ruchu będzie $x=\frac{g\sin\alpha . t^2}{2}+v_0 t+x_0$, gdzie v_0 i x_0 oznaczają szybkość i odległość od początku toru w chwili $t=0$.

W przytoczonych niżej przykładach użyto dla krótkości terminu cięciwa najprędszego spadku. Tak nazywa się pewna prosta, przechodząca przez dany punkt A i przecinająca daną linię α; po niej punkt materyalny, który wyruszył z A bez początkowej szybkości, dochodzi w najkrótszym czasie do α pod działaniem siły ciążenia.

10. Przykłady. 1. Punkt materyalny położono w punkcie B, na zewnętrznej stronie gładkiej obręczy kołowej; promień, przechodzący przez B tworzy z pionem kąt α. W którym punkcie obręczy punkt materyal-

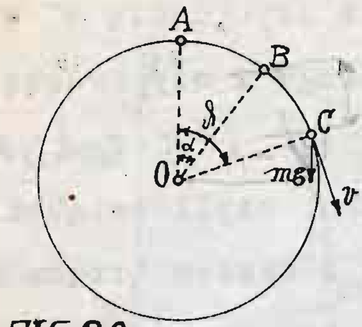

FIG. 20.

ny z niej zejdzie? /por.prz. 4 par. 8/.

Punkt szukany C można poznać po tem, że w nim reakcya obręczy znika. Oznaczmy kąt AOC przez ϑ, a szybkość punktu w położeniu C przez v. Przyspieszenie normalne w tem położeniu jest równe $\frac{v^2}{a}$ i wywołuje je jedynie składowa normalna siły ciążenia bo reakcya $= 0$.— Stąd $\frac{mv^2}{a} = mg.\cos\vartheta$, a ponieważ na zasadzie par. 9 $v^2 = 2g.a(\cos\alpha - \cos\vartheta)$, zatem wypadnie po uproszczeniu $\cos\vartheta = \frac{2}{3}\cos\alpha$ i $\vartheta = \arccos\frac{2}{3}\cos\alpha$.—

2. Ciężki punkt może się poruszać na okręgu, położonym w płaszczyźnie pionowej. Punktowi temu nadano taką szybkość w położeniu B, że mógłby on dojść do najwyższego punktu A okręgu. W jakim czasie punkt ten dojdzie do położenia P jeżeli kąt $BOA = \alpha$ i $AOP = \vartheta$. Szybkość niezbędna do tego, by punkt doszedł do A jest $v_0 = \sqrt{2g.a(1-\cos\alpha)}$ gdzie a oznacza promień koła. Przypuśćmy, że po t sekundach punkt doszedł do położenia P. Szybkość w tem położeniu jest równa $v = \sqrt{v_0^2 - 2g.a(\cos\vartheta - \cos\alpha)} = \sqrt{2g.a(1-\cos\vartheta)} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{ga}$. Z drugiej strony ta sama szybkość jest równa $v = -\frac{d\vartheta}{dt}\cdot a$, a zatem $a\frac{d\vartheta}{dt} = -2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{g\cdot a}$ skąd $\frac{d\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} = -\sqrt{\frac{g}{a}}dt$ a po zcałkowaniu $\log tg\frac{\vartheta}{4} + C = -\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$, gdzie C jest stałą całkowania.

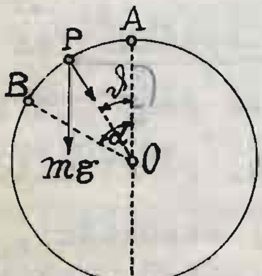

FIG. 21.

Gdy $t=0$, to $\vartheta=\alpha$, skąd wypadnie $C=-\lg tg\frac{\alpha}{4}$. Zatem

$$\lg\frac{tg\frac{\alpha}{4}}{tg\frac{\vartheta}{4}}=\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot t \quad \text{skąd} \quad t=\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\lg\frac{tg\frac{\alpha}{4}}{tg\frac{\vartheta}{4}}\,.-$$

Zakładając $\vartheta=0$ znajdziemy, że punkt dojdzie do położenia A po czasie $t=\infty$.–

Znajdźmy jeszcze reakcję toru w funkcji kąta ϑ. Biorąc rzuty sił na kierunek PO otrzymamy $m\frac{v^2}{a}=R+mg\cos\vartheta$ albo $m2g(1-\cos\vartheta)=R+mg\cos\vartheta$, skąd $R=mg(2-3\cos\vartheta)$.–

3. Z punktu O wychodzi w płaszczyźnie pionowej wielka liczba prostych i po tych prostych zsuwają się ciężkie punkty materyalne, które wyruszyły jednocześnie z A bez początkowej szybkości. Znaleźć miejsce geometryczne tych punktów po upływie t sek.

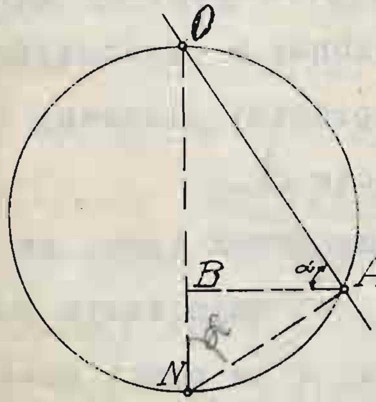

FIG. 22.

Niech prosta OA będzie torem jednego z tych punktów i dajmy na to, że po upływie t sek. doszedł on do A. Poprowadźmy przez O prostą pionową, a przez A poziomą. Z figury wynika, że $ON=\frac{OA}{\sin\alpha}$, gdzie α oznacza kąt OAB. Ponieważ $OA=\frac{g.\sin\alpha.t^2}{2}$, zatem $ON=\frac{g.t^2}{2}$. Widzimy, że ON nie zależy od kąta α a więc ON w chwili t widać ze wszystkich punktów materyalnych pod kątem prostym. Z tego wynika, że szukanym miejscem geometrycznym jest okrąg koła o średnicy $\frac{g.t^2}{2}$, przechodzący przez O.

4. Wyznaczyć cięciwę najprędszego spadku, mając

dany punkt O i krzywą α.

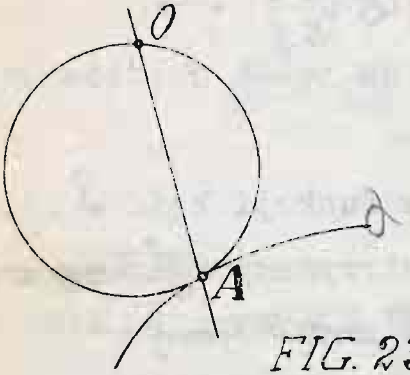

FIG. 23.

W płaszczyźnie $O\alpha$ zataczamy koło, styczne do α i posiadające najwyższy punkt w O. Wszystkie punkty wychodzące z O i zsuwające się po prostych w płaszczyźnie $O\alpha$ dojdą jednocześnie do obwodu tego koła, a z tego wynika, że prosta łącząca O z punktem styczności koła i krzywej α jest linią najprędszego spadku.

11. Wahadło kołowe. Przypuśćmy, że punkt materyalny, na który działa jedynie siła ciążenia musi pozostawać na krzywej płaskiej, położonej w płaszczyźnie pionowej, symetrycznej względem prostej pionowej i przecinającej oś symetryi w punkcie A.

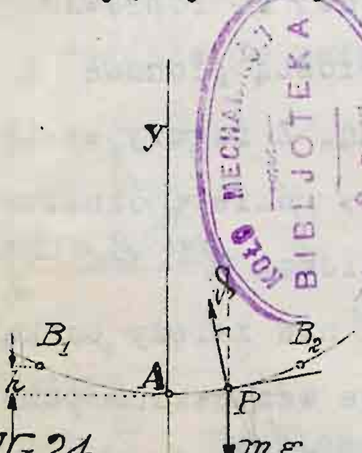

FIG.24.

Przypuścimy prócz tego, że punkt A jest najniższym punktem krzywej i że punkt materyalny nie wychodzi poza część toru zwróconą wypukłością ku dołowi.

Odsuńmy punkt materyalny do punktu B_1 i pozostawmy go samemu sobie. Oczywiście pod działaniem siły ciążenia zacznie on zsuwać się po torze i dojdzie do A z szybkością $\sqrt{2gh}$, gdzie h oznacza wysokość punktu B_1 nad A. Dzięki nabytej szybkości punkt materyalny pobiegnie dalej i szybkość jego wyczerpie się dopiero w punkcie B_2, położonym o h wyżej nad A, a więc symetrycznym do B_1. Od tej chwili zjawisko zacznie się powtarzać. Punkt materyalny będzie wciąż przebiegał drogę B_1B_2 to w jedną, to w drugą stronę. Ruch taki nazywa się wahadłowym, całe urządzenie nazywamy wahadłem płaskiem, łuk B_1B_2 amplitudą wahań i czas, w którym punkt materyalny obiega swą drogę w jedną i drugą stronę, okresem wahań.

Wogóle okres wahań zależy od amplitudy; im większa jest amplituda, tem dłuższy okres. Możliwe jest wszakże i takie wahadło, które posiada dla wszelkich amplitud jednakowy okres wahań. Mówimy, że w tym razie istnieje izochronizm wahań, a wahadło nazywamy izochronicznem.

Dajmy na to, że punkt materyalny w chwili t znalazł się w położeniu P pomiędzy A i B_2, dąży w stronę B_2, posiada szybkość v i że normalna do toru w P tworzy z pionem kąt ϑ. Oczywiście siła styczna wynosi $mg\sin\vartheta$ i ma kierunek odwrotny do szybkości. Będzie więc $m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\vartheta$, a jeżeli s oznacza łuk AP, to $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ i

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\vartheta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pragnąc znaleźć okres wahań, należy wyrazić $\sin\vartheta$ w funkcyi łuku s i wyznaczyć całkę powyższego równania.

Najłatwiej jest urządzić wahadło kołowe, w którem torem punktu materyalnego jest łuk okręgu. W tym celu przywiązujemy ciężarek do końca sznura, którego drugi koniec jest umocowany w punkcie nieruchomym. Gdy odchylimy takie wahadło od położenia pionowego i pozostawimy je samemu sobie, to oczywiście ciężarek będzie obiegał łuk koła, położony w płaszczyźnie pionowej. Jeżeli możemy uważać ciężarek za punkt materyalny, to nazywamy jeszcze wahadło takie prostem. Oznaczmy długość sznura czyli długość prostego wahadła przez l. Kąt ϑ we wzorze (1) oznacza tu oczywiście odchylenie sznura od pionu, zatem $\vartheta = \frac{s}{l}$ i w tym razie będzie $\frac{d^2s}{dt^2} = -g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right)$.

Całkowanie tego równania prowadzi do funkcyi eliptycznych. Ograniczymy się przeto do tego szczególnego przypadku, w którym amplituda jest mała w stosunku do l, tak mała, że nie przekraczając granic dozwolonego błędu możemy napisać $\frac{s}{l}$ zamiast $\sin\left(\frac{s}{l}\right)$.*) Otrzymamy więc równanie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego, znane już z

---

*) Wiadomo, że $\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \ldots$ Jeżeli największe odchylenie wahadła od pionu wynosi 18°, to największa wartość ϑ będzie $\frac{\pi . 18}{180} = 0{,}1\pi$ Łatwo obliczyć, że w tym razie drugi wyraz szeregu powyższego nie przenosi $\frac{1}{60}$ a trzeci $\frac{1}{12000}$ pierwszego.

par.135 cz.II, możemy więc powiedzieć, że ruch jest harmoniczny, jakkolwiek torem jest tu okręg, a nie linia prosta. Oznaczmy okres przez T. Znaleźliśmy w paragrafie wzmiankowanym, że okres jest równy $\frac{2\pi}{\omega}$ ponieważ w danym razie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, przeto

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Widzimy, że okres nie zależy tu od amplitudy, a zatem wahadło jest izochroniczne; twierdzenie to jest jednak słuszne tylko dla małych amplitud w granicach dozwolonego błędu.

12. Przykłady. 1. Punkt materyalny P o masie m może się poruszać po łańcuchowej i jest przyciągany do kierownicy z siłą, skierowaną prostopadle do tej prostej i wprost proporcjonalną do masy punktu i do odległości /wsp.prop $= k^2$/. Dowieść że wahadło takie jest izochroniczne i wyznaczyć okres wahań.

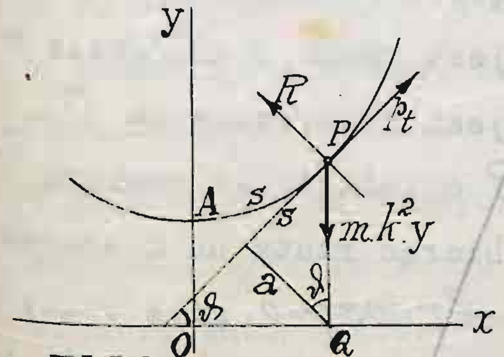

FIG.25.

Siła, z jaką jest przyciągany punkt P wynosi mk^2y, gdzie y jest rzędną punktu P. Przyśpieszenie styczne $p_t = \frac{d^2s}{dt^2}$ wywołuje rzut siły mk^2y na styczną.

Gdy oznaczymy kąt, zawarty między tą styczną a kierownicą przez ϑ, to będzie $m\frac{d^2s}{dt^2} = -m.k^2y\sin\vartheta$, a podstawiając $y\sin\vartheta = s$ otrzymamy: $\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s$

Jest to równanie ruchu harmonicznego o okresie $T = \frac{2\pi}{k}$ niezależnym od amplitudy.

2. Gładki drut, posiadający kształt okręgu o promieniu a obraca się w płaszczyźnie poziomej około punktu O ze stałą szybkością kątową ω. Odległość środka C okręgu od punktu O jest równa b. Wyznaczyć okres drobnych wahań paciórki, nawleczonej na drut.

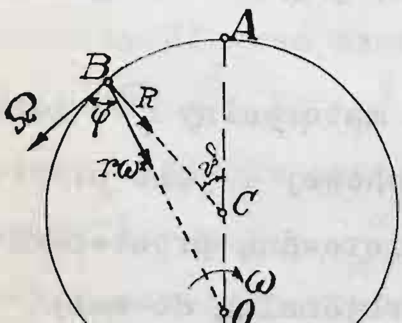

FIG. 26.

W pewnej chwili paciórka zajmie położenie B, przyczem promień BC utworzy ze średnicą CO kąt $BCA = \vartheta$. Zbadajmy ruch paciórki względem drutu. Przyśpieszenie całkowite paciórki ma trzy składowe: 1/ względną, 2/ unoszenia i 3/ Coriolisa. Składowa styczna przyśp. względnego wynosi $\frac{d\Omega}{dt}$ gdzie $\Omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ oznacza szybkość kątową promienia BC. Przyśpieszenie unoszenia jest równe $r.\omega^2$ /gdzie r oznacza odległość BO/ i jest skierowane do O. Na paciórkę w położeniu B działa tylko reakcya normalna drutu R, zatem biorąc rzuty na kierunek stycznej otrzymamy $a\frac{d\Omega}{dt} + \omega^2 r \cos\varphi = 0$ gdyż rzuty pozostałych składowych są zerami; φ oznacza tu kąt stycznej z cięciwą BO.

Podstawmy tu $\frac{d\vartheta}{dt}$ zamiast Ω i zwróćmy uwagę, że $r\cos\varphi = b.\cos(90° - \vartheta)$, to otrzymamy $a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 b \sin\vartheta$

Zateczmy z C koło promieniem l dowolnym i niech s oznacza łuk tego koła, odpowiadający kątowi ϑ. Tak więc $\vartheta = \frac{s}{l}$ i równanie powyższe przekształci się na

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{bl.\omega^2}{a}$$

Możemy tak dobrać l, aby było $\frac{bl\omega^2}{a} = g$, a zatem ruch względny promienia, łączącego paciórkę z C jest taki, jak ruch sznura wahadła o długości $l = \frac{a.g}{b.\omega^2}$

__13.__ __Wahadło cykloidalne.__ Niech torem wahadła będzie cykloida. Promień koła tworzącego oznaczymy przez a i dajmy na to, że koło to obróciło się o kąt φ od chwili, gdy punkt P, kreślący cykloidę przechodził przez wierzchołek A. Normalna PQ

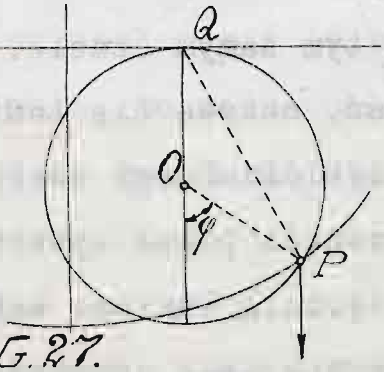

FIG.27.

tworzy oczywiście z pionem QO kąt $\frac{\varphi}{2}$, a zatem w równaniu (1) par. 11 należy zamiast ϑ napisać $\frac{\varphi}{2}$ i będzie $\frac{d^2s}{dt^2} = -g.\sin\frac{\varphi}{2}$

Z geometrji wiadomo, że łuk $AP = s = 4a.\sin\frac{\varphi}{2}$ *), a zatem

---

*) W podręcznikach zazwyczaj mierzy się łuk cykloidy od ostrza i w takim razie łuk $= 4a.(1-\cos\frac{\vartheta}{2})$, gdzie ϑ oznacza kąt, o który obróciło się koło tworzące od chwili, gdy punkt P był w ostrzu. Pragnąc mierzyć od wierzchołka, trzeba od tego odjąć $4a$ /łuk pomiędzy ostrzem i wierzchołkiem/ i na miejsce ϑ postawić $\pi + \varphi$.

$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{s}{4a}$. Wprowadzając to do powyższego równania otrzymamy $\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{gs}{4a}$.

Jest to znowu równanie ruchu harmonicznego. W tym razie $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$, a więc okres

$$T=4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad \text{..............} \quad (1.)$$

Widzimy, że okres nie zależy od amplitudy, a zatem wahadło cykloidalne jest dokładnie izochroniczne, innemi słowy, z jakiegokolwiek położenia punkt materyalny zaczął spadać po cykloidzie, to zawsze dojdzie do wierzchołka w jednym i tym samym czasie. Krzywa, posiadająca taką właściwość, nazywa się <u>tautochroną</u>.

Izochronizm wahadła cykloidalnego odkrył Huygens /przed r.1673/; on również podał sposób zrealizowania takiego wahadła.

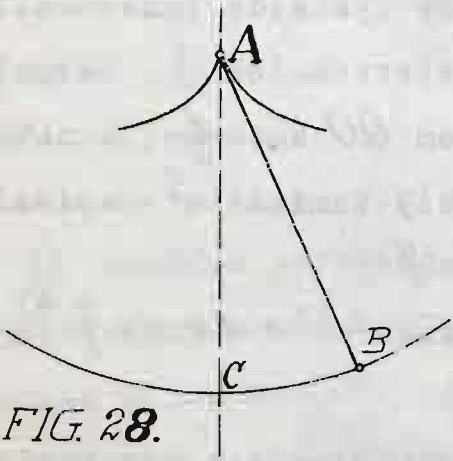

FIG. 28.

W tym celu sporządza się sztywną ramę w kształcie dwóch gałęzi cykloidy, posiadających wspólne ostrze A. Ramę ustawia się w płaszczyźnie pionowej tak, aby podstawa cykloidy była pozioma. W ostrzu A jest umocowany koniec taśmy AB dźwigającej w drugim końcu ciężarek B. Jeżeli koło tworzące obydwie cykloidy ma promień a, to długość taśmy wynosi $4a$. Gdy owiniemy taśmę na jednej z cykloid, to ciężarek znajdzie się w wierzchołku. Pozostawmy następnie wahadło samemu sobie; taśma zacznie się odwijać, pozostając wciąż wyprężoną, a więc ciężarek będzie obiegał rozwijającą cykloidy; wiadomo z geometryi, że jest to cykloida, równa cykloidom ramy.

Punkt A jest środkiem krzywizny toru ciężarka w wierzchołku C, a koło zatoczone z A promieniem $4a$ jest kołem krzywizny. Zetknięcie tego koła z cykloidą jest bardzo ścisłe i na znacznym obszarze, po obydwóch stronach punktu C, można z dobrem przybliżeniem zastąpić łuk cykloidy przez łuk koła. Wynika stąd wniosek taki: jeżeli amplituda wahadła kołowego jest mała, to można uważać je w przybliżeniu za cykloidalne, a zatem wahadło kołowe przy małych amplitudach jest izochroniczne. Gdy oznaczymy długość taśmy przez l, to $a = \frac{l}{4}$; podstawiając to we wzorze (1) par. niniejszego, znajdziemy, że okres drobnych wahań wahadła kołowego wynosi $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ co jest zgodne z (3) w par. 11 .

14. Brachistochrona. Okażemy tu jeszcze inną ciekawą właściwość mechaniczną cykloidy. Naprzód wypada dowieść pewne twierdzenie pomocnicze.

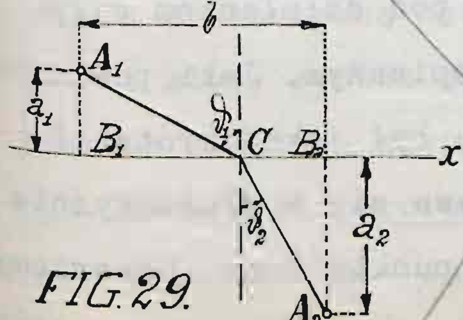

FIG. 29.

Punkt ruchomy wyszedł z punktu A_1 położonego po jednej stronie prostej x i doszedł do punktu A_2, położonego po drugiej; ruchy po obydwóch stronach były prostoliniowe i jednostajne, ale szybkość po jednej stronie wynosiła v_1, a po drugiej v_2. Dajmy na to że punkt ruchomy przeciął prostą x w punkcie C, i że drogi A_1C i CA_2 tworzą odpowiednio z prostopadłą do prostej x kąty ϑ_1 i ϑ_2. W takim razie całą drogę od A_1 do A_2 punkt ruchomy odbył w czasie

$$t = \frac{a_1}{v_1 . \cos\vartheta_1} + \frac{a_2}{v_2 . \cos\vartheta_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Prócz tego zachodzi związek

$$a_1 . tg\,\vartheta_1 + a_2 . tg\,\vartheta_2 = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Znaczenie liter wyjaśnia dostatecznie fig.29.

Czas t jest funkcyą kątów ϑ_1 i ϑ_2. Jeżeli punkt ruchomy ma w jaknajkrótszym czasie dojść do A_2 to kąty te powinny być takie, aby $\frac{a_1 . \sin\vartheta_1 . d\vartheta_1}{v_1 . \cos^2\vartheta_1} + \frac{a_2 . \sin\vartheta_2 . d\vartheta_2}{v_2 . \cos^2\vartheta_2} = 0$

Prócz tego mamy z (2) że $\frac{a_1 . d\vartheta_1}{\cos^2\vartheta_1} + \frac{a_2 . d\vartheta_2}{\cos^2\vartheta_2} = 0$

Z tych dwóch równań wynika, że

$$\frac{\sin\vartheta_2}{v_2} - \frac{\sin\vartheta_1}{v_1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Taki warunek powienien być spełniony, aby czas osiągnął minimum.

Rozwiążemy teraz zagadnienie następujące. Dane są punkty O i A, z których pierwszy leży wyżej od drugiego. Punkt materyalny wyszedł z O bez początkowej szybkości i biegnie do A pod działaniem siły ciążenia po gładkim torze przepisanym. Jaki powinien być ten tor, aby czas spadania był jaknajkrótszy? Będziemy uważali, że ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkty dane. Obierzemy punkt O za początek współrzędnych; oś x poprowadzimy poziomo, a oś y pionowo nadół. Niech będą na szukanej linii trzy punkty nieskończenie bliskie P_1, P, P_2. Elementy P_1P i PP_2 tworzą z pionem kąty ϑ i $\vartheta + d\vartheta$, a punkt materyalny przebiega je z szybkościami v i $v + dv$. Droga P_1PP_2 musi być taka, aby punkt materyalny doszedł z P_1 do P_2 w czasie jaknajkrótszym a zatem na zasadzie tylko co dowiedzionego twierdzenia będzie $\frac{\sin(\vartheta + d\vartheta)}{v + dv} - \frac{\sin\vartheta}{v} = 0$, czyli $d\left(\frac{\sin\vartheta}{v}\right) = 0$

Z tego wynika, że $\frac{\sin\vartheta}{v}$ jest wielkością stałą. Oznaczymy tę stałą przez $\frac{1}{\sqrt{4.a.g}}$, a ponieważ $v = \sqrt{2g.y}$ gdzie y jest rzędną punktu y, przeto $y = 2a.\sin^2\vartheta$. Wprowadźmy jeszcze kąt $\varphi = 2\vartheta$; w takim razie ostatnie równanie przybierze postać $y = a(1 - \cos\varphi)$. Jest to znane równanie cykloidy, której ostrze leży w punkcie O, a podstawa na osi x, a więc linią najprędszego spadku, czyli brachistochroną jest cykloida, której ostrze leży w O, a podstawa jest pozioma.

15. Tarcie o tor. Uważaliśmy dotychczas, że reakcya toru na punkt materyalny leży w płaszczyźnie normalnej; w rzeczywistości reakcya tworzy zawsze z płaszczyzną normalną kąt, różny od zera; innemi słowy oprócz składowej normalnej posiada jeszcze składową styczną, którą nazywamy siłą tarcia lub wprost tarciem.

Doświadczenie wskazuje, że podczas ruchu punktu materyalnego tarcie jest zawsze odwrotne do szybkości i zmniejsza się ze wzrostem tej ostatniej, jak to widać z wykresu /fig.30/, w którym na osiach odmierzane są szybkości (v) i odpowiednie siły tarcia (F).

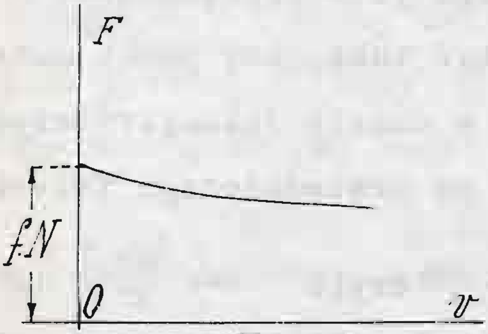

FIG. 30.

Jednakże to zmniejszanie się tarcia jest niewielkie i bez znacznego błędu można przyjąć, że podczas ruchu ciała siła tarcia ma wartość stałą i jest równa tarciu granicznemu fN gdzie f oznacza współczynnik tarcia, a N reakcyę normalną toru.

Pragnąc uwzględnić w rachunku tarcie musimy zmodyfikować albo raczej dopełnić równania, do których doszliśmy w par. 7. Pozostawimy oznaczenia bez zmiany z tą tylko różnicą, że R ma oznaczać nie reakcyą całkowitą, lecz jej składową normalną. W takim razie reakcya styczna, czyli siła tarcia będzie równa fR, jest ona, jak powiedziano wyżej, zawsze skierowana odwrotnie do szybkości, a w punktach, w których szybkość jest zerem, tarcie ma kierunek odwrotny do siły stycznej.

Wprowadzając siłą tarcia, otrzymamy zamiast rownan par. następujące:

$$m\frac{dv}{dt}=P_x-fR \; ; \; \frac{mv^2}{\rho}=P_y+R_y \; ; \; 0=P_z+R_z$$

Wypada uczynić tu pewną uwagę, o której trzeba pamiętać zawsze, gdy w zagadnieniu dynamicznem pragniemy uwzględnić siłę tarcia. Przypuśćmy już, że szybkość punktu materyalnego się zmniejsza, schodzi do zera w pewnem położeniu A_0, a następnie zmienia kierunek. Oczywiście siła tarcia w A_0 nie staje się zerem, jeżeli tylko w położeniu tem nie znika reeakcya normalna, ale tarcie jest zawsze odwrotne do szybkości, a zatem w A_0 kierunek jego zmienia się na odwrotny. Widzimy, że wektor tarcie zmienia się w owej chwili w sposób nieciągły.

W chwili, gdy punkt materyalny przechodzi przez położenie A_0 pierwsze z trzech równań powyższych przestaje być ważnem, a mianowicie znak wyrazu, zawierającego f już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Należy więc ułożyć nowe równania, stosownie do zmienionych okoliczności.

16. Przykłady. 1/ Przypuśćmy, że punkt materyalny musi pozostać na prostej x i że przyciąga go nieruchomy punkt C odległy od x o $OC=h$, a siła przyciągania jest wprost proporcjonalna do odległości. Gdy więc punkt materyalny zajmuje położenie P, to działa nań siła $\omega^2 r$, gdzie $r=CP$, a ω^2 oznacza współczynnik proporcjonalności. Siła styczna jest oczywiście równa $\omega^2 r \sin \vartheta$ i zawsze jest zwrócona do punktu O czyli rzutu punktu C.

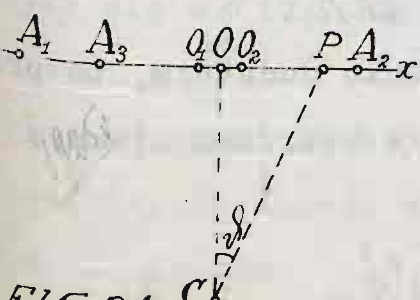

FIG. 31.

Siła normalna $= \omega^2 . r . \cos \vartheta$, gdzie ϑ oznacza kąt OCP. Lecz $r \sin \vartheta = OP = x$, a $r \cos \vartheta = h$, zatem siła styczna $= \omega^2 x$, a normalna $= \omega^2 . h$. Widzimy, że siła normalna, a więc i reakcya normalna są stałe dla wszelkich położeń punktu materyalnego.

Obierzmy kierunek dodatni toru w prawo na fig. 34 i przypuśćmy, że punkt materyalny został odsunięty od położenia A_1 w lewo od O, i pozostawiony samemu sobie. Pod działaniem siły przyciągania wyruszy on w stronę punktu O, a jeżeli tor jest gładki, to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

z czego wynika, że ruch jest harmoniczny i połowa okresu wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.

Dajmy teraz na to, że tor jest chropowaty i oznaczmy współczynnik tarcia przez f. Ponieważ reakcya normalna jest stale równa $\omega^2 h$, przeto siła tarcia będzie stała co do wielkości i równa $f . \omega^2 . h$.
Gdy punkt materyalny dąży w kierunku dodatnim, to prócz siły przyciągania działa jeszcze w kierunku ujemnym siła tarcia, a zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - f . \omega^2 h \quad \ldots\ldots\ldots (2.)$$

---

*) założono tu, że punkt materyalny posiada masę jednostkową, co wcale nie ogranicza ogólności rozważań.

Przenieśmy początek toru do punktu O_1, którego odcięta niech będzie równa b, i oznaczmy nową odciętą punktu materyalnego przez ξ. Będzie więc $x = \xi + b$, i równanie powyższe przekształci się na

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi - \omega^2(b + f.h).$$

Obierzmy b w taki sposób, aby było $b + f.h = 0$ czyli $b = -f.h$

W takim razie równanie przybierze postać:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Widzimy, że ruch jest znowu harmoniczny, ale środkiem jest teraz nie O, lecz inny punkt O_1, położony w lewo od O w odległości $f.h$. Skrajne położenie przypadnie w punkcie A_2, którego odległość od O_1 jest równa A_1O_1. Skutkiem tarcia amplituda zmniejszyła się o $2OO_1$, czyli o $2.f.h$, natomiast półokres i teraz $= \frac{\pi}{\omega}$.

Gdy punkt materyalny wyruszy z A_2 w lewo, to kierunek tarcia zmieni się na odwrotny i zamiast równania (2) będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x + f.\omega^2.h$$

Postępując, jak poprzednio, znajdziemy, że ruch jest wciąż harmoniczny, ale środek przesunął się do punktu O_2 położonego w prawo od O w odległości fh amplituda skróciła się jeszcze o $2fh$ a okres pozostał bez zmiany.

W ten sposob ruch będzie trwał w dalszym ciągu Po każdem wahnięciu prostem, amplituda zmniejszy się o $2fh$ i ostatecznie jedno ze skrajnych położeń przypadnie pomiędzy O_1 i O_2. Wówczas oczywiście siła styczna będzie mniejsza od $f\omega^2 h$, czyli mniejsza od granicznej siły tarcia, przyciąganie punktu nie zdoła przemódz tarcia, i punkt materyalny pozostanie w spoczynku.

2/ Punkt materyalny wyszedł z punktu A_0, leżącego na wewnętrznej stronie powierzchni kołowego cylindra o promieniu a z szybkością v_0 styczną do powierzchni i prostopadłą do tworzących. Punkt biegnie dalej jedynie pod działaniem reakcyi powierzchni N i siły tarcia fN, gdzie f oznacza współczynnik tarcia.

W jakim czasie punkt obiegnie cylinder naokoło.

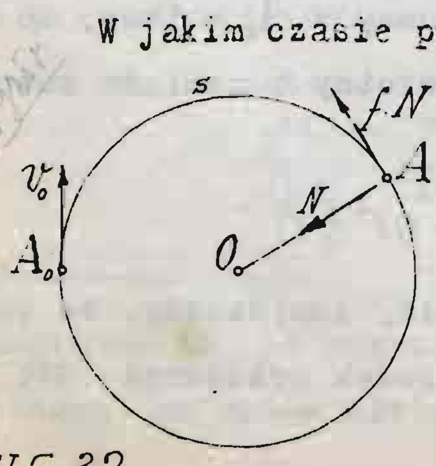

FIG. 32.

Przypuśćmy, że w chwili t punkt materyalny zajmuje położenie A i obiegł od A łuk $AA_0 = s$.

Biorąc rzuty na normalną AO, otrzymamy

$$\frac{mv^2}{a} = N \quad \ldots\ldots (1)$$

a na styczną

$$m\frac{dv}{dt} = -f.N \ldots\ldots\ldots (2)$$

gdzie v oznacza szybkość punktu w chwili t. Z równań (1) i (2) wypadnie: $\frac{dv}{v^2} = -f\frac{dt}{a}$, a po zcałkowaniu $\frac{1}{v} = \frac{ft}{a} + A$, gdzie A oznacza stałą całkowania. Gdy $t=0$, to $v=v_0$ zatem $A = \frac{1}{v_0}$ i $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{ft}{a}$ skąd $v = \frac{a v_0}{a+f.v_0.t} = \frac{ds}{dt}$ Inaczej $ds = \frac{a.v_0 dt}{a+f v_0 t}$, stąd po zcałkowaniu będzie $fs = a\,lg(a+f.v_0 t) + B$, gdzie B jest stałą całkowania. Gdy $t=0$, to $s=0$, więc $0 = a\,lg\,a + B$, a zatem $fs = a\,lg\frac{a+f.v_0.t}{a}$ albo $s = \frac{a}{f}\,lg\frac{a+f.v_0 t}{a}$ Gdy wstawimy w to równanie $s = 2\pi.a$, to otrzymamy łatwo, że punkt obiegnie cylinder po upływie czasu

$$\frac{a}{f.v_0}\left(e^{2\pi f} - 1\right).-$$

3./ Ciężki punkt zsuwa się po okręgu koła, położonego w płaszczyźnie pionowej, poczynając od konca średnicy poziomej A_0. Współczynnik tarcia wynosi $\frac{1}{2}$. W jakiem położeniu szybkość punktu będzie największa?

Przypuśćmy, że w chwili t punkt materyalny znalazł się w położeniu A. Biorąc rzuty sił i przyspieszeń na kierunki: stycznej i normalnej, otrzymamy równania $m\frac{dv}{dt} = mg\cos\vartheta - \frac{N}{2}$ (1)

$$m\frac{v^2}{a} = N - mg.\sin\vartheta \ldots\ldots (2)$$

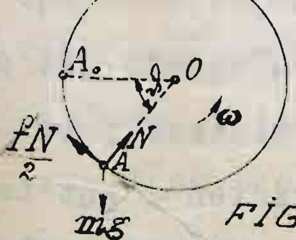

FIG 33.

Ponieważ $\frac{v^2}{a} = a\omega^2$, zatem

$$m.a.\omega^2 = N - mg\sin\vartheta \ldots 3'$$

/ ϑ oznacza tu kąt, który tworzą promienie, przechodzące przez A i A_o, ω - szybkość kątową promienia ruchomego, v - szybkość liniową punktu A ruchomego i N - reakcyę normalną toru/.

Gdy wyrugujemy N z (1) i (3), to otrzymamy $a(\omega^2+2\frac{d\omega}{dt})=g(2\cos\vartheta-\sin\vartheta)$. Pomnóżmy to równanie przez $e^{\vartheta}.d\vartheta$. Po lewej stronie otrzymamy $a\,d(\omega^2.e^{\vartheta})$. Po prawej stronie wypadnie wyznaczyć $\int e^{\vartheta}(2\cos\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta$ Można to uczynić krótko w sposób następujący: daje się przewidzieć, że szukana całka posiada postać $e^{\vartheta}(M\cos\vartheta+N\sin\vartheta)$, gdzie M i N oznaczają współczynniki, które jeszcze trzeba wyznaczyć. Tak więc $\int e^{\vartheta}(2\cos\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta=e^{\vartheta}(M\cos\vartheta+N\sin\vartheta)$. — Różniczkując i porównywując współczynniki przy $\sin\vartheta$ i $\cos\vartheta$ znajdziemy, że $M=\frac{3}{2}$, $N=\frac{1}{2}$ Uwzględniając warunki początkowe znajdziemy, że

$$2a.\omega^2=(\sin\vartheta+3\cos\vartheta-s.e^{-\vartheta})g$$

Największa szybkość odpowiada temu kątowi ϑ który czyni zadość równaniu $\cos\vartheta-3\sin\vartheta+3e^{-\vartheta}=0$

4./ Prosty pręt, tworzący z poziomem kąt α wiruje ze stałą szybkością kątową wokoło osi pionowej, położonej z nim w jednej płaszczyźnie. Na pręt jest nawleczony ciężki pierścień i kąt tarcia pomiędzy nimi jest równy φ. Wyznaczyć długość części pręta, na której pierścień może pozostawać w spoczynku względnym.

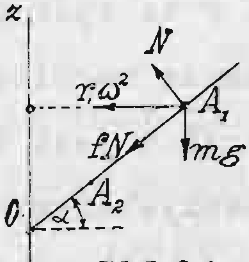

FIG 34.

Odcinek ten poznamy po tem, że gdy pierścień znajduje się na końcu jego /w A_1 lub A_2 /, to tarcie jest całkowicie rozwinięte. Rozważając położenie A_1 łatwo otrzymamy równania $m \cdot r\omega^2 = N\sin\alpha + fN\cos\alpha$; $N\cos\alpha - fN\sin\alpha = mg$ gdzie oznaczają: m - masę pierścienia, r - odległość jego od osi obrotu /z/, N - reakcyę normalną pręta, α - kąt pręta z poziomem i $f = tg\,\varphi$. Biorąc pod uwagę $r_1 = x_1 \cdot \cos\alpha$, gdzie $x_1 = A_1O$ otrzymamy:
$x_1\omega^2\cos\alpha = \frac{g\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)}$ skąd $x_1 = \frac{g \cdot tg(\alpha+\varphi)}{\omega^2\cos\alpha}$
Tak samo, jeśli pierścień znajdzie się w końcu szukanego odcinka, to $x_2 = \frac{g \cdot tg(\alpha-\varphi)}{\omega^2\cos\alpha}$ Zatem długość odcinka A_1A_2 wynosi $x = x_1 - x_2 = \frac{g}{\omega^2\cos\alpha}\left[tg(\alpha+\varphi) - tg(\alpha-\varphi)\right]$

~~17.~~ Opór powietrza. W rozważaniach dotychczasowych pomijaliśmy jeszcze inną siłę, która w warunkach zwykłych działa zawsze na ciała w ruchu, a mianowicie opór powietrza.

Opór powietrza występuje tylko podczas ruchu i jest funkcją szybkości. Pomimo licznych doświadczeń nie zdołano dotychczas wykryć dokładnego i ogólnego związku funkcyjnego pomiędzy oporem powietrza i szybkością, jeżeli jednak szybkość nie jest zbyt wielka, nie przekracza jakich 300 m. na sek, to otrzymuje się wyniki dość zgodne z rzeczywistością, przyjmując, że opór jest proporcyonalny do kwadratu szybkości. Jeżeli szybkość wynosi v to opór powietrza jest równy kv^2 gdzie k oznacza współczynnik proporcyonalności. Ten współczynnik k jest dla każdego ciała inny. Zależy on przedewszystkiem od wymiarów, a mianowicie można uważać, że dla ciał podobnych jest proporcyonalny do pola rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości; prócz tego zależy on jeszcze od kształtu powierzchni. Z tego wynika, że k nie jest dla danego ciała wielkością stałą, lecz zależy od tego, którą stroną ciało zwraca się do szybkości. Weźmy np. prosty stożek kołowy i nadajmy mu naprzód szybkość w kierunku osi w stronę wierzchołka, następnie szybkość również w kierunku osi, ale w stronę podstawy i wreszcie w kierunku prostopadłym do osi. Dla każdego z tych trzech ruchów k będzie inne. Wogóle mamy tu do czynienia ze zjawiskiem wielce zawiłem, którego badanie, bardzo ważne ze względu na liczne zagadnienia praktyczne, stanowi odrębną gałąź wiedzy.

Rozwiążemy tylko jedno zagadnienie z tej dziedziny, a mianowicie ruch pionowy ciała ciężkiego w powietrzu.

Przypuśćmy, że ciało o masie m zostało wyrzucone z punktu O z szybkością v_0 pionowo w górę i że opór powietrza ma kierunek wprost odwrotny do szybkości. Obieramy początek toru w O i kierunek dodatni w górę; w takim razie wypadnie, że

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Będziemy uważali, że współczynnik k podczas całego ruchu pozostaje bez zmiany.

Załóżmy $$c = \sqrt{\frac{m}{k} g} \ldots\ldots\ldots (2.)$$

Będziemy nazywali tę wielkość c szybkością graniczną ciała ze względów, które wyjaśnią się w dalszym ciągu.

Wprowadzając do (1) $\frac{mg}{c^2}$ zamiast k otrzymamy

$$c^2\frac{dv}{dt} = -g(c^2+v^2) \ldots\ldots\ldots (3.)$$

Całkując to równanie znaleźlibyśmy związek pomiędzy szybkością v i czasem t. Ważniejszy jest związek pomiędzy v i przebytą drogą x; aby go otrzymać mnożymy ostatnie równanie przez dx i po lewej stronie zamiast $\frac{dx}{dt}$ piszemy v. Wypadnie wówczas $\frac{c^2 v \, dv}{c^2+v^2} = -g\,dx$ Całkując znajdziemy $lg\frac{c^2+v_0^2}{c^2+v^2} = \frac{2gx}{c^2}$.— Aby wyznaczyć wysokość h do której wzbije się ciało, trzeba tylko w równaniu ostatniem założyć $v=0$; wypadnie $h = \frac{c^2}{2g} lg\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)$.— Przypuśćmy dla przykładu, że szybkość początkowa $v_0 = c$. W takim razie $h = \frac{c^2 \, lg 2}{2g}$ W próżni ciało wzbiłoby się do wysokości $\frac{c^2}{2g}$, a więc opór powietrza zmniejszył tę wysokość o $\frac{c^2}{2g}(1-lg2)$.—

W chwili, gdy ciało osiąga największą wysokość, równanie (1) przestaje być ważnem, gdyż wyraz kv^2 reprezentujący opór powietrza już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Szybkość v wchodzi w nim w drugiej potędze, a więc nie zmienia on znaku pomimo to, że opór powietrza zwraca się do góry. Taka nieciągłość równania jest możliwa zawsze, gdy na ciało działa siła proporcyonalna do parzystej potęgi szybkości. Musimy więc uważać, że od chwili gdy szybkość się wyczerpała rozpoczyna się nowe zagadnienie, które potrzeba rozważyć odrębnie od poprzedzającego; obierzemy też inaczej początek toru i kierunek dodatni, aby otrzymać przejrzystsze wyniki, a mianowicie początek umieścimy w punkcie najwyższym, a kierunek dodatni obierzemy na dół. Będzie wówczas $m\cdot\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$, a gdy wprowadzimy szybkość graniczną c według (2) to wypadnie

$c=\sqrt{\frac{mg}{k}}$

$$c^2\cdot\frac{dv}{dt}=g\left(c^2-v^2\right)\ldots\ldots\ldots(4)$$

Równanie to wskazuje, że szybkość v nie może przekroczyć szybkości granicznej. Gdyby v doszło do szybkości granicznej, to przyspieszenie stałoby się zerem i ruch byłby nadal jednostajny, a mianowicie ciało spadałoby z szybkością graniczną.

Stąd pochodzi nazwa tej wielkości.

Jeżeli rzucimy ciało pionowo na dół z szybkością większą od c , to przyśpieszenie będzie ujemne, a więc szybkość będzie się zmniejszała, znowu dążąc do granicznej.

Całkując równanie (4) podobnie, jak (3) otrzymamy $\lg \frac{c^2-v^2}{c^2} = -\frac{2gx}{c^2}$, a stąd $v^2 = c^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{c^2}}\right)$

Równanie to wskazuje, że szybkość ciała zbliża się asymptotycznie do granicznej, pierwsza jest wciąż mniejsza od drugiej, ale różnica z biegiem czasu zaciera się nieograniczenie.

Zobaczymy jeszcze, w jakiej zależności pozostaje szybkość graniczna od rozmiarów ciała. Weźmy dla przykładu kulę o promieniu r, której masa gatunkowa, czyli masa jednostki objętości jest równa μ. Masa tej kuli $m = \frac{4}{3}\pi\mu r^3$. Współczynnik k jak już mówiliśmy, jest dla ciał podobnych proporcyonalny do rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości, a więc w tym razie $k = \lambda\pi r^2$ gdzie λ oznacza nowy współczynnik proporcyonalności. Podstawiając to w (2) znajdziemy $c = \sqrt{\frac{4\mu g r}{3\lambda}}$. Widzimy, że c jest proporcyonalne do $r^{\frac{1}{2}}$. Tem można wytłomaczyć fakt, że drobne kropelki mgły, a także cząsteczki pyłu spadają bardzo wolno. Ich szybkość graniczna dzięki drobnym wymiarom jest bardzo mała.

ROZDZIAŁ II.

SIŁA ŻYWA i ILOŚĆ RUCHU.

18. Dwie zasady. Widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym, że można rozwiązać bardzo wiele zagadnień z dynamiki punktu materyalnego, posługując się bezpośrednio prawami Newtona; właściwie napotykane ograniczenia tkwią nie w samej naturze pew-