mamy $\lg\frac{c^2-v^2}{c^2}=-\frac{2gx}{c^2}$, a stąd $v^2=c^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{c^2}}\right)$

Równanie to wskazuje, że szybkość ciała zbliża się asymptotycznie do granicznej, pierwsza jest wciąż mniejsza od drugiej, ale różnica z biegiem czasu zaciera się nieograniczenie.

Zobaczymy jeszcze, w jakiej zależności pozostaje szybkość graniczna od rozmiarów ciała. Weźmy dla przykładu kulę o promieniu r, której masa gatunkowa, czyli masa jednostki objętości jest równa μ. Masa tej kuli $m=\frac{4}{3}\pi\mu r^3$. Współczynnik k jak już mówiliśmy, jest dla ciał podobnych proporcyonalny do rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości, a więc w tym razie $k=\lambda\pi r^2$ gdzie λ oznacza nowy współczynnik proporcyonalności. Podstawiając to w (2) znajdziemy $c=\sqrt{\frac{4\mu g r}{3\lambda}}$. Widzimy, że c jest proporcyonalne do $r^{\frac{1}{2}}$. Tem można wytłomaczyć fakt, że drobne kropelki mgły, a także cząsteczki pyłu spadają bardzo wolno. Ich szybkość graniczna dzięki drobnym wymiarom jest bardzo mała.

ROZDZIAŁ II.

SIŁA ŻYWA i ILOŚĆ RUCHU.

18. Dwie zasady. Widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym, że można rozwiązać bardzo wiele zagadnień z dynamiki punktu materyalnego, posługując się bezpośrednio prawami Newtona; właściwie napotykane ograniczenia tkwią nie w samej naturze pewnych zagadnień, lecz wynikają raczej z trudności matematycznych, które występują zwłaszcza przy całkowaniu równań różniczkowych. Pomimo tak rozległego zakresu stosowalności praw Newtona ważną rolę odgrywają jeszcze w dynamice pewne twierdzenia zasadnicze, czyli zasady, które ułatwiają w znacznym stopniu układanie równań i skracają rachunki; ale one same oparte są na prawach Newtona, nie zawierają więc żadnych elementów nowych.

Nam chodzi tu głównie o zasadę sił żywych i zasadę ilości ruchu. Treścią każdej z nich jest związek pomiędzy pewnemi dwiema wielkościami. Tak więc w pierwszej mamy związek pomiędzy siłą żywą i pracą mechaniczną, a w drugiej pomiędzy ilością ruchu i popędem albo impulsem siły.

Zasadnicza różnica pomiędzy zasadami temi polega przedewszystkiem na tem, że pierwsza posiada charakter skalarowy, bo zarówno siła żywa, jak i praca są skalarami, natomiast druga posiada charakter wektorowy, bo ilość ruchu i popęd są wektorami.

Rozważymy naprzód zasadę sił żywych; wypada jednak na wstępie wyłożyć teorję pracy mechanicznej.

19. Praca całkowita*). Przypuśćmy, że punkt materyalny wyszedł z położenia A i doszedł jakimkolwiek torem do położenia B, przyczem wciąż dzia-

*) O pracy elementarnej mówiliśmy już w rozdziale VIII cz.I /§§ 71-80/.

łała nań siła P. Podzielmy tor AB na nieskończenie małe elementy i wyznaczmy dla każdego z nich pracę elementarną, którą wykonała na nim siła P. Sumę tych prac elementarnych nazywamy pracą całkowitą, albo wprost pracą siły P na drodze AB.

Dajmy na to, że siła P jest stała co do wielkości i posiada wciąż kierunek szybkości. W takim razie $dL = P\,ds$ i $L = P.s$, gdzie s oznacza długość toru AB. Jeżeli $P = 1kg$ i $s = 1m$, to praca jest równa jednemu kilogramometrowi. W fizyce jest w użyciu inna jednostka - erg.

Przypuśćmy, że ciężki punkt materjalny, ważący $Q\,kg$, przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2. Pragniemy wyznaczyć pracę siły ciążenia. Obierzmy w taki sposób układ współrzędnych, aby oś z była skierowana pionowo na dół i oznaczmy w tym układzie współrzędne punktów A_1 i A_2 przez $(x_1 y_1 z_1)$ i $(x_2 y_2 z_2)$. Pracę elementarną wyznaczymy przy pomocy wzoru następującego: $dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz$ (p.par.74 cz.I). Oczywiście $P_x = P_y = 0$; $P_z = Q$, zatem

$$dL = Q\,dz \quad ; L = Q\int_{z_1}^{z_2} dz = Q(z_2 - z_1);$$

$z_2 - z_1$ jest różnicą poziomów położeń A_1 i A_2. Widzimy, że praca L zależy jedynie od tej różnicy poziomów, lecz jest niezależna od drogi, którą punkt materjalny przeszedł z jednego położenia do drugiego.

Wyznaczymy jeszcze pracę całkowitą siły centralnej P_x w przypadku, gdy ta jest funkcją odległości r punktu materjalnego od środka O, gdy np. $P=f(r)$. Dajmy na to, że punkt materjalny przeszedł z położenia A_1 do A_2 i oznaczmy promienie OA_1 i OA_2 odpowiednio przez r_1 i r_2 .

Praca elementarna $dL=Pdr$, jak wiemy z par. 75 cz. I, czyli

$$dL=f(r).dr$$

a zatem praca całkowita $L=\int_{r_1}^{r_2} f(r)dr$

Oczywiście L zależy tu znowu tylko od r_1 i r_2 czyli od skrajnych położeń punktu materjalnego, lecz jest niezależne od drogi, którą punkt ten przeszedł od jednego z nich do drugiego.

Przypuśćmy dla przykładu, że punkt O przyciąga punkt materyalny z siłą odwrotnie proporcyonalną do kwadratu odległości. W takim razie $P=-\frac{k}{r^2}$,gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności i

$$L=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{kdr}{r^2}=k\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

W technice obok pracy ważną rolę odgrywa pojęcie sprawności siły. Sprawność jest to skalar, równy $\frac{dL}{dt}$. Jeżeli sprawność jest stała, to wynosi ona $\frac{L}{t}$, gdzie L jest pracą, wykonaną w czasie t . Jednostką sprawności jest kilogramometr na sekundę, częściej jednak są w użyciu inne jednostki, a zwłaszcza koń parowy lub mechaniczny /75 kilogramometrów na sekundę/ i kilowat. Ponieważ praca jest równa iloczynowi z siły przez drogę, przeto wymiar pracy $= MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$. Wymiar sprawności $= ML^2T^{-2} : T = ML^2T^{-3}$

20. Przykłady. 1. Na punkt materyalny A, który obraca się około punktu O, działa siła P, stała pod względem wielkości i tworząca stały kąt z OA. Wyznaczyć pracę L siły P podczas jednego obrotu. Według par. 76 cz. I praca elementarna jest równa $dL = M d\varphi$, gdzie M oznacza moment siły P względem O. Stąd $L = \int_0^{2\pi} M d\varphi = 2\pi.M$. Przypuśćmy, że punkt robi n obrotów na minutę; wtedy sprawność wynosi $\frac{2\pi.n M}{60} \frac{kgm}{sek}$ albo $\frac{2\pi.n.M}{60.75}$ koni mech.

2. Cząsteczki, składające obecnie kulę jednorodną o masie M i promieniu a, były niegdyś rozproszone w przestrzeni w nieskończenie wielkich odległościach jedna od drugiej i zbiegły się dzięki przyciąganiu wzajemnemu, podlegającemu prawu Newtona /współczynnik proporc. $= 1$/. Jaką pracę wykonały przytem siły przyciągania?

Kula tworzy się stopniowo. Po pewnym czasie już część cząsteczek utworzyła kulę o promieniu r i masie $M_r = \frac{4\pi r^3 \mu}{3}$, gdy reszta pozostaje jeszcze w odległości nieskonczenie wielkiej. Następ nie przybywa nowa cząsteczka dm, która rozkłada się na kuli w postaci warstwy sferycznej o grubości dr, a zatem $dm = 4\pi r^2 dr \cdot \mu$ ~. Siła przyciągania wykonała przytem pracę $dL = \frac{M \cdot dm}{r} = \frac{(4\pi\mu)^2 r^4 dr}{3}$

Zatem praca całkowita jest równa

$$L = \frac{(4\pi\mu)^2}{3} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{(4\pi\mu)^2 a^5}{15} ;$$

Ponieważ masa kuli jest $M = \frac{4}{3}\pi\mu a^3$, więc $L = \frac{3M^2}{5a}$ ~

3. Część łancuszka, ważącego Q i l długiego leży na stole, a część o długości a zwisa. Jaką pracę wykona siła ciążenia, gdy łańcuch całkowicie zsunie się ze stołu?

Rozwiążemy naprzód pewne zadanie ogólniejsze. Dajmy na to, że układ punktów materyalnych o masach $m_1, m_2, \ldots\ldots$ opada. Chodzi o wyznaczenie pracy, jaką wykona przytem siła ciążenia.

Obierzmy dowolnie w przestrzeni nieruchomą płaszczyznę poziomą F i oznaczmy przez $z_1, z_2, \ldots$ odległości początkowe, a przez $z_1', z_2', \ldots\ldots$ odległości końcowe punktów $m_1, m_2, \ldots$ od F. W takim razie praca szukana będzie równa $L = g m_1 (z_1' - z_1) + g m_2 (z_2' - z_2) + \ldots\ldots$ albo

$$L = g \Sigma m (z' - z) = g \left[\Sigma m z' - \Sigma m z\right] \sim$$

Z tego widać, że praca ta równa się iloczynowi g przez różnicę momentów statycznych układu punktów względem płaszczyzny F w chwili początkowej i końcowej. Gdy oznaczymy początkową odległość

środka masy układu od F przez z_0 , a końcową przez z_0' , to będzie $L = g(Mz_0' - Mz_0) = gM(z_0' - z_0)$
Wzór ten wyraża twierdzenie następujące: Praca sił ciążenia, działających na swobodny układ punktów materyalnych jest równa iloczynowi ciężaru tego układu przez różnicę poziomów środka masy układu w chwili początkowej i końcowej.

Zastosujemy to twierdzenie do naszego zadania.

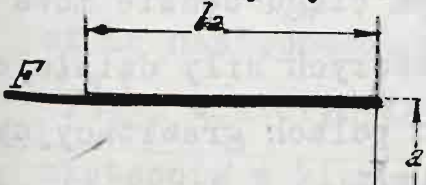

FIG 35

W chwili początkowej moment statyczny łańcucha względem płaszczyzny stołu wynosi $\mu l z_0 = \mu a \cdot \frac{a}{2}$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości łańcucha. Stąd $z_0 = \frac{a^2}{2l}$.
Gdy już cały łańcuch się zesunie, to odległość jego środka masy od F będzie wynosiła $z_0' = \frac{l}{2}$;
Zatem $L = Q\left(\frac{l}{2} - \frac{a^2}{2l}\right) = \frac{Q}{2l}(l^2 - a^2)$.

x 21. Pole sił. Wyobraźmy sobie część przestrzeni, posiadającą własciwość następującą: gdziekolwiek umieścimy w niej punkt materyalny, to zawsze na tem punkt działa siła. Taka część przestrzeni nazywa się polem sił. Tak np. okolice kuli ziemskiej są polami sił, gdyż tu na każde ciało działa siła ciążenia; nazywamy je grawitacyjnem polem ziemskiem. Nasz system planetarny jest pogrążony w grawitacyjnem polu słonecznem i każde ciało wytwarza naokoło siebie gra witacyjne pole sił, gdyż każde ciało przyciąga oko- liczne punkty materyalna.

Są pola, w których siły działają, tylko na nie- które ciała. Tak np. okolice magnesu są polem sił, ale tylko dla żelaza i niewielu ciał innych. Rów- nież tak zw. pole elektrostatyczne, istniejące w okolicach ciała naelektryzowanego, oddziaływa nie na wszystkie ciała. W dalszym ciągu będzie mowa głównie o takich polach, w których siły działają na wszystkie ciała, a więc o polach grawitacyjnych.

Umieśćmy w punkcie A takiego pola punkt ma- teryalny o masie m. Na punkt ten zacznie działać siła P i z definicji masy wynika, że ta siła jest proporcyonalna do masy, a zatem $P=Hm$, gdzie H – oznacza współczynnik proporcjonalności.

H - natężenie pola

Wielkość ta charakteryzuje pod pewnymi wzglę- dami punkt A i nazywa się natężeniem pola w punkcie A. Jeżeli $m=1$, to $P=H$, więc natężenie po- la w punkcie A jest to wektor, zgodny co do kierun- ku i wielkości /liczbowo/ z siłą, która działałaby na punkt materyalny o masie jednostkowej, gdyby go umieścić w A.

Ponieważ $H=\frac{P}{m}$, przeto wymiar natężenia = $=M.L.T^{-2}:M=LT^{-2}$

Jest to wymiar przyspieszenia. W polu ziemskie w pobliżu powierzchni ziemi, natężenie jest wszędzie równe g i posiada kierunek pionowy na dół.

Wyjdźmy z punktu A i wędrujmy w kierunku natężenia H aż do nieskończenie bliskiego punktu A_1. Znajdziemy tam natężenie H_1, które wogóle różni się od H pod względem wielkości i kierunku. Wędrujmy dalej w kierunku tego nowego natężenia H_1 aż do następnego, nieskończenie blizkiego punktu A_2, w którym panuje natężenie H_2. Pójdziemy następnie w kierunku H i t.d. Tym sposobem zakreślimy w polu sił pewną linię; linia taka nazywa się linią sił.

Przez każdy punkt pola przechodzi linia sił; natężenie jest styczne do tej linii, gdyż posiada z nią dwa nieskończenie blizkie punkty wspólne.

W polu ziemskiem linie sił są liniami prostemi; można uważać, że wychodzą one ze środka kuli ziemskiej i rozchodzą się nakształt promieni. Jeżeli chodzi tylko o niewielką część pola ziemskiego, np. o pole, zawarte w granicach jednej sali, to możemy uważać, że linje sił są równoległe, a więc natężenie jest tu stałe co do wielkości i kierunku. Pole takie nazywamy jednorodnem.

Pole sił jest szczególnym przypadkiem pojęcia

Jednorodn(a)

ogólniejszego, a mianowicie pola wektorowego. Nazywamy tak przestrzeń, w której każdemu punktowi odpowiada pewien wektor. Już poprzednio mówiliśmy o polu szybkości układu sztywnego. Tam w danej chwili punktowi A pola odpowiada szybkość tego punktu układu, który właśnie przez A przebiega.

W polu szybkości zamiast linii sił mamy linię szybkości. Linia szybkości przechodzi przez każdy punkt pola i jest styczna do jego szybkości. Ruch układu sztywnego jest wogóle śrubowy; określają go dwa wektory, a mianowicie szybkość postępowa i szybkość kątowa. Gdyby te wektory od danej chwili zachowały obecną wielkość i kierunek, to oczywiście linie szybkości stałyby się torami punktów,; z tego wynika że linie te są śrubowemi, posiadającemi wspólną oś i jednakowe kroki.

Jeżeli owe dwa wektory nie są stałe, to i całe pole szybkości zmienia się z biegiem czasu. Przez dany punkt przstrzeni przebiegają punkty układu z coraz innemi szybkościami, i linie szybkości mają coraz inny przebieg. Pole takie nazywamy zmiennem.

Można łatwo wyobrazić sobie również zmienne pole sił, w którem natężenia zmieniają się co do wielkości i kierunku, a linie sił przybierają coraz inną postać. Takie zmienne pola odgrywają ważną rolę w elektrotechnice. Maszyna elektrodynamiczna w najprostszej postaci składa się z masy magnetycznej, która porusza się w zmiennem polu magnetycznem, wytwarzanem przez prąd elektryczny. Siła pola działająca na masę wykonywa podczas tego ruchu pracę. Jeśli ta praca jest dodatnia, to można ją przy pomocy znanych urządzeń mechanicznych przenieść na inne maszyny. Maszynę elektrodynamiczną nazywamy w tym razie motorem. Prąd do wytwarzania pola w motorze musi być dostarczony z zewnątrz. Jeżeli praca siły pola jest ujemna, to maszynę nazywamy generatorem. Do poruszania masy magnetycznej trzeba tu doprowadzić pracę z zewnątrz, natomiast w generatorze powstaje prąd, który można zużytkować w stosownych przyrządach.

22. Przykład. Jednorodne pole sił o stałem natężeniu H wiruje ze stałą szybkością kątową ω około osi prostopadłej do linii sił. Wyznaczyć pracę, której podczas n obrotów dostarczy motor, złożony z punktu materyalnego m, osadzonego za pomocą ramienia a na osi, równoległej do osi obrotu pola i posiadającej stałą szybkość kątową ω_1.

Przyjmijmy, że ω i ω_1 skierowane jednakowo. Mo-

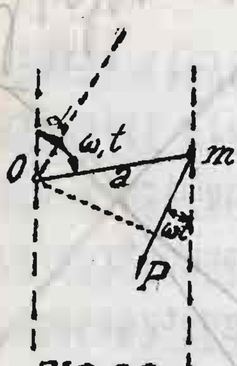

FIG. 36.

żemy uważać, że masa m wiruje około osi lub około punktu O pod działaniem siły $P=Hm$, która znowu obraca się około m. Dajmy na to, w początku rachuby czasu siła tworzyła z ramieniem mO kąt α i że jej moment względem O miał kierunek szybkości ω_1. W takim razie praca wykonana w okresie od t do $t+dt$ będzie

$$dL=P.a.\sin(\alpha+\omega_1 t-\omega t).\omega_1\,dt=P.a.\sin[\alpha-(\omega-\omega_1)t].\omega_1\,dt \ldots\ldots (1)$$

Całkując w granicach od 0 do $\frac{2\pi.n}{\omega_1}$, znajdziemy, że praca szukana

$$L=\frac{P.a.\omega_1}{\omega_1-\omega}\left[\cos\alpha-\cos\left(\alpha+2\pi.n\frac{\omega_1-\omega}{\omega_1}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jeżeli ω_1 różni się od ω, to ze wzrostem n, L oscyluje pomiędzy pewną wartością dodatnią i ujemną, a więc motor nie może dostarczać nieograniczonych ilości pracy. Możliwe jest to tylko w takim razie, gdy $\omega_1=\omega$. Wówczas z (2) wypadnie $L=\frac{0}{0}$; stosując znaną metodę wyznaczania takich wartości lub wprost z $(1.)$ otrzymamy $L=2P.a.\pi.n.\sin\alpha$. Taki motor zowie się <u>synchronicznym.</u> Jeżeli $\alpha<0$, to L jest ujemne i mamy generator synchroniczny.

23. Pola jednowartościowe i wielowartościowe.

Przenieśmy w polu sił punkt materyalny o masie m z położenia A_1 do położenia A_2.

Podczas ruchu na punkt ten będzie wciąż działała siła pola, a zatem siła ta wykona pewną pracę. Istnieją pola, w których praca ta jest niezależna od tego, jaką drogą punkt m dostał się z A_1 do A_2. Otrzymujemy zawsze jedną i tęż samą pracę, jakakolwiek będzie ta droga. Pole, posiadające taką właściwość nazywa się <u>jednowartościowem.</u>

W grawitacyjnem polu ziemskiem punkty materyalne są przyciągane do środka ziemi, a siły są funkcyami odległości od środka. Widzieliśmy w par. 19, że właśnie w tym razie praca zależy jedynie od położeń pierwotnego i końcowego, a jest niezależna od drogi. Z tego wynika, że pole ziemskie i wogóle wszystkie pola grawitacyjne są jednowartościowe. Jeśli natomiast praca jest zależna od drogi, to pole, nazywa się <u>wielowartościowem.</u>

Zasadnicza cecha odróżniająca pole jednowartościowe od wielowartościowego jest ta, że praca siły pierwszego z nich wzdłuż jakiejkolwiek linii zamkniętej jest równa zeru. Istotnie, obierzmy na linii tej dwa dowolne punkty A_1 i A_2 (FIG 37) Możemy dwiema drogami (α i β) przejść z A_1 do A_2 i wzdłuż każdej z nich siła pola wykona jednakową pracę, dajmy na to L. Gdy punkt materyalny przejdzie z A_2 do A_1 drogą β, to oczywiście praca siły pola wyniesie $-L$. Zatem, gdy obwiedziemy ów punkt drogą $A_1 \alpha A_2 \beta$ to na jednej jej części praca wykonana będzie $= L$;

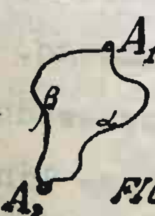

FIG32

a na pozostałej $=-L$, a więc praca całkowita na tej drodze jest równa zeru. Z tego wynika, że motor,zło- żony z punktu materyalnego, obiegającego linię zam- kniętą w polu jednowartościowem jest niemożliwy, bo nie dostarczał by on żadnej pracy, innemi słowy w po- lu jednowartosciowem "perpetuum mobile I rzędu" jest niemożliwe.

Przypuśćmy teraz, że punkt materyalny obiega li- nię zamkniętą w polu wielowartościowem /FIG.37/. Pra- ca L_1 wykonana przez siły pola wzdłuż drogi $A_1\alpha A_2$ mo- że nie być równa pracy L_2 wzdłuż drogi $A_1\beta A_2$. Daj- my na to, że $L_1 - L_2 > 0$; znaczy to, że gdy punkt obiegnie linię zamkniętą $A_1\alpha A_2\beta A_1$, to siła pola wykona przytem pracę dodatnią. W polu wielowar- tościowem możliwy jest więc motor, złożony z punktu materyalnego i obiegający linię zamkniętą.

W naturze istnieją pola wielowartościowe; takie jest np. pole magnetyczne prądu elektrycznego.

Gdy prąd elektryczny płynie przez przewodnik to wytwarza się dokoła niego pole sił, którego linie są okręgami kół, mającemi za środek przekrój przewodni- ka. Możliwy jest przeto motor, złożony z masy magne- tycznej, obiegającej taką linię zamkniętą. Może on stale dostarczać pracy, czerpiąc energję z przewod- nika.

24. Potencjał. Obierzmy w polu jednowartościowem punkt O, który nazwiemy początkiem pola. Przenieśmy następnie punkt materyalny m z O do jakiegoś innego punktu A. Siła pola wykona przytem pracę L. Ponieważ siła jest w każdem położeniu proporcyonalna do masy, przeto i praca L będzie proporcyonalna do m. Będzie więc $L = Vm$, gdzie V oznacza współczynnik proporcyonalności.

Wielkość ta jest także charakterystyczną dla punktu A i nazywa się potencyałem tego punktu.

Jeżeli $m = 1$, to $L = V$, a zatem potencyał punktu A jest to skalar liczbowo równy pracy, którą wykona siła pola, gdy masa jednostkowa przejdzie z początku pola do punktu A. Potencjał $= \frac{L}{m}$ więc wymiar jego będzie $ML^2T^{-2} : M = L^2T^{-2}$.

Oczywiście potencyał początku pola jest zerem, a potencyały wszystkich punktów zależą od położenia początku. Gdy obierzemy początek inaczej, to wogóle potencyały wszystkich punktów pola się zmienią.

Dajmy na to, że punkt materyalny, o masie m przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2 i że potencyały tych punktów są odpowiednio równe V_1 i V_2. Mamy wyznaczyć pracę, którą wykonała przytem siła pola.

Ponieważ droga, którą podążył punkt m od A_1 do A_2

Dla jednorazowego ... - temu!!

nie wywiera wpływu na pracę, możemy przeto uważać, że droga ta przechodzi przez początek O i składa się z dwóch części A_1O i OA_2. Na pierwszej części siła pola wykonała oczywiście pracę $-V_1m$, na drugiej V_2m a zatem praca całkowita $L=(V_2-V_1)m$. Jeżeli $m=1$, to praca L jest liczbowo równa różnicy potencyałów. Jeżeli potencyały punktów A_1 i A_2 są równe, to praca siły pola jest zerem.

Weźmy dla przykładu małą część pola ziemskiego w pobliżu powierzchni ziemi, np. część, zawartą w granicach jednej sali. Początek pola O obierzmy w jednym z punktów sufitu. Gdy punkt materyalny o masie jednostkowej przejdzie z O do jakiegoś punktu A, położonego o z niżej, to siła ciążenia wykona pracę gz, a więc potencyał punktu $A=gz$. Oczywiście potencyały punktów, położonych na jednym poziomie są równe.

Poprowadźmy w polu sił powierzchnię, która w każdym ze swych punktów jest normalna do linii sił, przechodzącej przez ten punkt. Gdy będziemy po takiej powierzchni przesuwali punkt materyalny, to siła pola wciąż pozostanie normalną do toru, a zatem praca jej będzie zerem. Z tego wynika, że potencyały wszystkich punktów takiej powierzchni są równe, czyli że jest to miejsce geometryczne punktów jednakowego potencyału. Powierzchnie takie zowią się <u>ekwipotencyalnemi.</u>

W grawitacyjnem polu ziemskiem powierzchnie ekwipotencyalne są w przybliżeniu powierzchniami kulistemi, współśrodkowemi z powierzchnią ziemi, gdy zaś chodzi o małą część tego pola, to możemy zważać że powierzchnie ekwipotencyalne są płaszcz.poziomemi.- W dalszym ciągu będzie nieraz mowa o energii potencyalnej punktu materyalnego. Nazwa ta ma znaczenie następujące.

Przypuśćmy, że punkt materyalny m zajmuje w polu położenie A, gdzie panuje potencyał V; mówimy w takim razie, że punkt m posiada energię potencyalną $-Vm$. Gdybyśmy ten punkt przenieśli do początku pola, to właśnie taką pracę wykonałaby siła pola. Wymiar energii potencyalnej jest oczywiście równy wymiarowi pracy. Energia potencyalna punktu materyalnego, który zajmuje w polu pewne określone położenie, jest zależna od obioru początku pola. Gdy zmienimy początek, to zmieni się i energia.

W małej części pola ziemskiego energia potencyalna punktu m, położonego o z niżej od początku wynosi $m g.z$.—

25. Przykład. Wyznaczyć potencyał punktu, położonego na wysokości z nad powierzchnią ziemi, jeżeli początek pola obrano na powierzchni ziemi.

Na punkt o masie jednostkowej działa siła cen-

gz – potencyał | V

– mgz – eng. potencyalna | mV

tralna $P=\frac{k}{r^2}$, gdzie r - oznacza odległość punktu od środka ziemi, a k wsp. prop. Szukany potencyał jest równy

$$V=k\int_a^{a+z}\frac{dr}{r^2}=k\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{kz}{(a+z)a} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1.)$$

Gdy punkt był na powierzchni ziemi, to było $r=a$, $P=g$, gdzie a oznacza promień kuli ziemskiej. Zatem $g=\frac{k}{a^2}$, skąd $k=g.a^2$, co podstawiając do $(1.)$ otrzymamy $V=-\frac{g.z}{1+\frac{z}{a}}$. Jeżeli z jest małe w porównaniu z a , to $V=-gz$. Zbadajmy związek pomiędzy wektorem H i skalarem V . Oznaczmy w prostokątnym układzie współrzędne punktu materyalnego o masie jednostkowej przez $(x,y,z,)$, a przez V jego potencyał, oraz przez $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $V+dV$ odpowiednie wartości dla nieskończenie bliskiego punktu A_1. Gdy przeprowadzimy punkt z położenia A do A_1, to siła pola wykona pracę $dL=dV$. Lecz V jest to funkcya współrzędnych punktu; czyli $V=f(x,y,z)$ zatem

$$dL=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1.)$$

Ale możemy dL wyrazić jeszcze inaczej. W punkcie A działa siła H; rozkładając ją na składowe H_x, H_y, H_z , w kierunkach osi x,y,z , otrzymamy stosownie do znanego wzoru na pracę elementarną

$$dL=H_x\,dx+H_y\,dy+H_z.\,dz \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Porównywując $(1.)$ i $(2.)$ znajdziemy, że

$$H_x=\frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad H_y=\frac{\partial V}{\partial y}\,,\quad H_z=\frac{\partial V}{\partial z}\,.$$

27. Siła żywa. Dajmy na to, że punkt materyalny o

masie m posiada szybkość v . Iloczyn $\frac{mv^2}{2}$ nazywamy siłą żywą albo energią cynetyczną punktu.

Siła żywa jest skalarem, gdyż nie przypisujemy jej kierunku i posiada ten sam wymiar, co i praca.

Przypuśćmy, że na punkt m działa siła P, tworząca z szybkością v kąt ϑ . Składowa styczna jest równa $P\cos\vartheta$, a zatem $m\frac{dv}{dt}=P.\cos\vartheta$

Pomnóżmy obydwie strony przez element toru ds. Skutkiem tego lewa strona przekształci się tak:

$m\frac{ds}{dt}\cdot dv=m.v.dv=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a zatem będzie

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=P.\cos\vartheta\, ds} \quad \ldots\ldots\ldots (1.)$$

czyli elementarny przyrost siły żywej punktu materyalnego jest równy pracy elementarnej siły, działającej na ten punkt.

Twierdzenie to wyraża zasadę siły żywej w postaci różniczkowej. Jeżeli siła P jest wypadkową pewnej liczby składowych, to możemy powiedzieć, że przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych tych składowych.

Zasada siły żywej wynika również bezpośrednio z równań ruchu, przytoczonych w par. 5. Równanie to można napisać w postaci

$$m\frac{dv_x}{dt}=P_x \qquad m\frac{dv_y}{dt}=P_y \qquad m\frac{dv_z}{dt}=P_z$$

Pomnóżmy je odpowiednio przez dx, dy, dz i dodajmy stronami. Wypadnie $m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z)=P_x dx+P_y dy+P_z dz$

$v_x dv_x = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)$

Lewa strona $= d\left[\frac{m.(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2}\right] = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a prawa jest znanem wyrażeniem pracy elementarnej.

Przypuśćmy, że punkt materyalny przeszedł na swym torze z położenia A_1 do położenia A_2 i że działała nań siła P.

Podzielmy tor A_1A_2 na nieskończenie małe elementy. Na każdym z nich siła żywa otrzymała pewien przyrost, a siła P wykonała pewną pracę i ten przyrost siły żywej jest równy tej pracy.

Można powiedzieć, że siła P na każdym elemencie toru wytwarza pewną ilość siły żywej, i ta dołącza się algebraicznie do dotychczasowej siły żywej punktu materyalnego. Oczywiście całkowity przyrost siły żywej na drodze A_1A_2 jest równy całkowitej pracy siły P na tej drodze. W twierdzeniu tem mamy zasadę siły żywej w postaci całkowej. Dajmy na to, że punkt materyalny porusza się w polu sił i w pewnej chwili przebiegał przez punkt A z szybkością v. Potencyał punktu A niech będzie $-V$. W położeniu A punkt m posiadał siłę żywą, czyli energię cynetyczną $\frac{m.v^2}{2}$ i energię potencyalną $-Vm$. Suma tych energii, czyli $\frac{mv^2}{2} - Vm$ nazywa się energią całkowitą punktu materyalnego.

Przypuśćmy, że punkt materyalny m przebiegał z kolei z szybkościami v_0 i v położenia A_0 i A, w któ rych panują potencyały V_0 i V. Całkowity przyrost siły żywej na tej drodze wynosi $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, a całkowita praca siły pola $mV - mV_0$.

W myśl zasady sił żywych

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mV - mV_0$$

czyli

$$\frac{mv^2}{2} - mV = \frac{mv_0^2}{2} - mV_0$$

Widzimy, że energia całkowita nie uległa zmianie. Tak więc, gdy punkt materyalny porusza się w polu jednoznacznem, to jego energia całkowita jest wielkością stałą.

Dajmy na to, że zjawisko odbywa się w niewielkiej części pola ziemskiego, i że punkty A_0, A leżą odpowiednio o z_0, z niżej od początku. W takim razie $\frac{mv^2}{2} - mgz = \frac{mv_0^2}{2} - mgz_0$, z czego wynika, że $v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$; jest to równanie, które otrzymaliśmy bezpośrednio w par. 9.

28. Przykłady. 1^W^. Jeden z końców sprężystego sznura, jest przymocowany do nieruchomego punktu O, a do drugiego końca A przywiązany jest punkt materyalny o masie m. Wszystko to znajduje się na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Punkt m otrzymał szybkość v w kierunku OA.

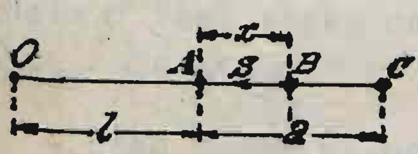

FIG. 38.

Wyznaczyć największe wydłużenie sznura, jeżeli jego długość naturalna $= l$, a współczynnik sprężystości $= \varepsilon$

Oznaczmy przez C skrajne położenie punktu, a przez B jedno z jego położeń pośrednich, odległe o x od A.

Siła żywa punktu m w A wynosi $\frac{mv^2}{2}$, zaś w C jest ona równa zeru, zatem całkowity jej przyrost jest $= L = -\frac{mv^2}{2}$, gdzie L oznacza pracę, wykonaną przez naprężenie sznura S na drodze AC.

Oczywiście $dL = -S.dx$, a że $S = \frac{\varepsilon x}{l}$ więc $dL = -\frac{\varepsilon x dx}{l}$ $dL = -\frac{\varepsilon x dx}{l}$, skąd $L = -\frac{\varepsilon}{l}\int_0^a x dx = -\frac{\varepsilon}{l}\cdot\frac{a^2}{2}$. Zatem $-\frac{mv^2}{2} = -\frac{\varepsilon}{l}\cdot\frac{a^2}{2}$ i $a = v\sqrt{\frac{ml}{\varepsilon}}$

2. Paciorka o masie m, nawleczona na gładki krzywy drut otrzymała początkową szybkość v_0 i podlegała dalej działaniu siły P. Gdyby taka sama paciorka swobodna otrzymała początkową szybkość u_0 i podlegała działaniu takiej samej siły P, to tor jej nie różniłby się od linii drutu. Wyznaczyć reakcję N drutu na paciorkę w funkcji promienia krzywizny ρ. Rozważmy naprzód ruch paciorki nieswobodnej. Biorąc rzuty na kierunek normalnej do drutu otrzymamy

$$\frac{mv^2}{\rho} = P_n - N \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

W przypadku, gdy paciorka jest swobodna będzie oczywiście

$$\frac{mu^2}{\rho} = P_n \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Z (1.) i (2.) wynika

$$N = \frac{m(u^2 - v^2)}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Zastosujmy zasadę sił żywych do wypadku pierwszego,/gdy tor paciorki jest przepisany/.

Przyrost siły żywej wynosi $m\frac{v^2-v_0^2}{2}$, a praca elementarna wykonana przez siłę P jest równa $dL=P_t ds$ gdzie P_t oznacza składową styczną siły P. Praca całkowita będzie więc $=\int P_t ds$ i oczywiście

$$m\frac{v^2-v_0^2}{2}=\int P_t ds$$

W drugim przypadku znajdziemy tak samo

$$m.\frac{u^2-u_0^2}{2}=\int P_t ds$$

Stąd $v^2-v_0^2=u^2-u_0^2$ i $u^2-v^2=u_0^2-v_0^2$. Podstawiając to w (3) otrzymamy $N=\frac{m(u_0^2-v_0^2)}{\varrho}$

3. Sprawność lokomotywy pociągu o masie M jest stała i równa H; również całkowity opór F, który pociąg spotyka na drodze, jest stały. Jaką szybkość osiągnie pociąg po t sek. od wyruszenia ze stacji?

Dajmy na to, że ta szybkość wynosi v. Siła żywa pociągu w chwili t jest równa $\frac{Mv^2}{2}$, a gdy upłynie jeszcze dt sek., to wzrośnie ona o $d\left(\frac{Mv^2}{2}\right)$ i przyrost ten jest równy pracy sił, działających na pociąg czyli $d\left(\frac{Mv^2}{2}\right)=H.dt-v.dt.F$ Stąd

$$Mvdv=(H-Fv).dt \quad ;\left(1-\frac{H}{H-Fv}\right)dv=-\frac{Fdt}{M}$$

Całkując otrzymamy $v+\frac{H}{F}\lg(H-Fv)=-\frac{F}{M}t+C$ gdzie C jest stałą całkowania- Gdy $t=0$, to $v=0$ zatem $C=\frac{H.\lg H}{F}$ i $-v+\frac{H}{F}\lg\frac{H}{H-Fv}=\frac{Ft}{M}$

Stąd można wyznaczyć v. Szybkość ta nie wzrasta nieograniczenie, lecz zbliża się asymptotycznie do $\frac{H}{F}$.

4. Okrągła tarcza, o promieniu a jest ustawiona w płaszczyźnie pionowej, a na obwodzie jej na końcu poziomej średnicy umieszczono punkt materyalny o masie m. Współczynnik tarcia między brzegiem tarczy a punktem wynosi f. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać, aby wciągnąć punkt do końca (B) średnicy pionowej; przytem przyspieszenie styczne powinno być wciąż równe $\frac{g}{\pi}$, a siła poruszająca wciąż styczna do tarczy.

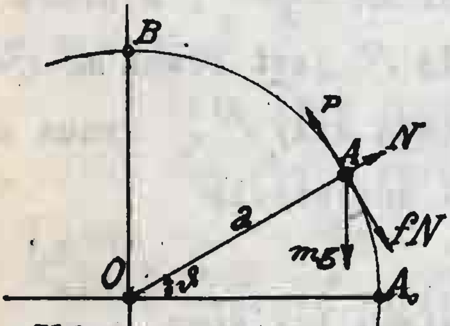

FIG.39.

Przypuśćmy, że po t sek. punkt zajmie położenie A, a kąt AOA_0 będzie równy ϑ. W tem położeniu na punkt działają: siła ciężkości mg, reakcja tarczy N, siła tarcia fN i siła poruszająca P. Biorąc rzuty na styczną otrzymamy

$$\cancel{mg}\; m\frac{g}{\pi} = P - fN - mg\cos\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ponieważ $\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\pi}$ oraz $ds = a\,d\vartheta$, więc $ds\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\pi}a\,d\vartheta$ skąd $v\,dv = \frac{ag}{\pi}d\vartheta$, —, a po zcałkowaniu $\frac{v^2}{2} = \frac{ag}{\pi}\vartheta + c$ gdzie c jest stałą całkowania. Gdy $\vartheta = 0$, to i $v = 0$ zatem $c = 0$ i

$$v^2 = \frac{2ag\vartheta}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Stąd przyspieszenie normalne jest $= \frac{v^2}{a} = \frac{2g\vartheta}{\pi}$, zatem biorąc rzuty na kierunek normalnej znajdziemy

$$m\frac{2g\vartheta}{\pi} = mg\sin\vartheta - N \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Rugując N z (1) i (3) otrzymamy

$$P=mg\left[\frac{1}{\pi}-\frac{2\vartheta f}{\pi}+\cos\vartheta-f\sin\vartheta\right]$$

Praca elementarna jest równa

$$dL=P\,ds=Pa\,d\vartheta=mga\left[\frac{1}{\pi}-\frac{2\vartheta f}{\pi}+\cos\vartheta-f\sin\vartheta\right]d\vartheta$$

Całkując w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$ otrzymamy, że praca całkowita wynosi

$$L=a\,mg\left[\frac{\vartheta}{\pi}-\frac{\vartheta^2 f}{\pi}+\sin\vartheta+f\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a\,mg\left[\frac{3}{2}-\frac{\pi f}{4}-f\right]$$

5. **Punkt** materyalny leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej w odległości l od punktu O i jest z nim połączony sprężystą nicią, której naturalna długość $=l$. Wyznaczyć największą odległość, na którą punkt materyalny odsunie się od O, otrzymawszy uderzenie, skierowane pod kątem α do przedłużenia nici. Gdyby takie same uderzenie zostało wymierzone w kierunku przedłużenia nici, to największa odległość wyniosłaby $2l$.

Wyznaczamy naprzód szybkość v_0, które dane uderzenie udzieliło nici. Gdyby było ono skierowane wzdłuż nici, to v_0 byłoby równe kl, gdzie $k^2=\frac{\varepsilon}{ml}$ /p.prz.1 niniejszego par./. Taka sama będzie szybkość początkowa w wypadku danym. W położeniu skrajnem $v_r=0$ i $v=v_\varphi$. Aby wyznaczyć v_φ w funkcyi promienia wodzącego, należy wziąć pod uwagę, że $p_\varphi=0$. Z wzoru na p_φ wypadnie wtedy: $r^2\frac{d\varphi}{dt}=c$ ———, gdzie c jest stała całkowania. Gdy $r=l$, to $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{v_0\sin\alpha}{l}=k\sin\alpha$, więc $c=l^2k\sin\alpha$, zatem $r^2\frac{d\varphi}{dt}=l^2k\sin\alpha$ ...(4)

Stosując dalej wzór na p_r otrzymamy

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=-S \ldots\ldots\ldots (2)$$

gdzie S oznacza naprężenie sznura. Ale $S=\frac{\pi l}{l}\varepsilon=(r-l)k^2m$

więc $m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=(l-r)k^2m$, a na zasadzie (1.)

będzie $\frac{d^2r}{dt^2}=(l-r)k^2+\frac{l^4k^2\sin^2\alpha}{r^3} \ldots\ldots\ldots (3)$.

Ponieważ $\frac{dr}{dt}=v_r$, więc mnożąc (3) przez dr otrzymamy $v_r \cdot dv_r=\left[(l-r)k^2+\frac{l^4k^2\sin^2\alpha}{r^3}\right]dr$

Całkując to równanie znajdziemy $v_r^2=k^2\left(2lr-r^2-\frac{l^4\sin^2\alpha}{r^2}\right)$

Lecz gdy r osiąga maksymum, to $v_r=\frac{dr}{dt}=0$ — , zatem szukana odległość jest największym pierwiastkiem równania : $r^4-2lr^3+l^4\sin^2\alpha=0$

29. Siła żywa układu. Niech będą punkty materyalne $m_1, m_2, \ldots$ posiadające w danej chwili szybkości $v_1, v_2 \ldots$ Mówimy, że punkty te tworzą układ punktów materyalnych. Suma sił żywych wstystkich punktów czyli $\sum\frac{mv^2}{2}$, nazywa się siłą żywą układu. Siła żywa każdego punktu otrzymuje w czasie dt przyrost równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na ten punkt, a zatem siła żywa układu otrzymuje w tymże czasie przyrost, równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na różne punkty układu. W wytwarzaniu siły żywej biorą tu udział zarówno siły wewnętrzne, jak i zewnętrzne /p.par.28 Cz.I/

Przypuśćmy np., że punkty m_1 i m_2 wywierają na siebie nawzajem siły P i P równe i odwrotne — Według wykonanemi Rusz. ruchu mr-pt - ... ...

par. 77 cz. I siły te wykonują razem w czasie dt pracę Pdr, gdzie dr oznacza przyrost odległości pomiędzy punktami w tymże czasie; powstanie zatem nowa ilość siły żywej, równa tej pracy, a więc wogóle różna od zera.

Jak ta nowowytworzona siła żywa podzieli się pomiędzy punkty m_1 i m_2 to zależy od różnych innych okoliczności, ale w każdym razie suma sił żywych tych punktów, a więc i siła żywa całego układu otrzyma przyrost, dodatni lub ujemny, równy tej pracy elementarnej.

Ważne

Siły wewnętrzne tylko w tym razie nie wywierają wpływu na siłę żywą układu, gdy wszystkie dr są zerami, czyli gdy odległości pomiędzy punktami się nie zmieniają. Mówimy w tym razie, że układ jest sztywny.

Do sprawy tej powrócimy jeszcze w dynamice ciał sztywnych i zobaczymy, że tam nabiera ona pierwszorzędnego znaczenia.

Jeżeli odległości pomiędzy punktami układu nie są stałe, a pragniemy zastosować do badania ruchu zasadę sił żywych, to musimy wprowadzić do rachunku siły wewnętrzne, a ponieważ siły te są zwykle nieznane, powiększymy więc tym sposobem liczbę niewiadomych i utrudnimy sprawę. Stosując zasadę siły żywej należy być bardzo ostrożnym, gdyż łatwo tu wpaść w błędy. Jako ilustrację do tej uwagi przytoczymy przykład, który można uważać za typowy.

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch punktów materyalnych m_1 i m_2 leżących na gładkiej płaszczyźnie poziomej i połączonych tak zwaną "nicią nierozciągalną" czyli niesprężystą o długości l. Odległość pomiędzy punktami jest, dajmy na to, znacznie mniejsza od l, a zatem nić leży luźno. Nadajmy punktowi m_1 szybkość v, skierowaną według linii, łączącej obydwa punkty w stronę od m_2. Dopóki nić się nie wyprostuje, punkt m_1 będzie się poruszał, jakgdyby był zupełnie swobodny, ze stałą szybkością v a całkowita siła żywa układu będzie wciąż równa $\frac{m_1 . v^2}{2}$. Po wyprostowaniu nici obydwa punkty będą biegły z jednakową szybkoscią np. u, a siła żywa wyniesie $\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}$. Chodzi teraz o to, czy te siły żywe są równe.

Ponieważ możemy uważać, że siły zewnętrzne nie istnieją /siły ciążenia równoważą się z reakcyą płaszczyzny/, przeto odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, czy siły wewnętrzne t.j. naprężenie nici wykonały jaką pracę, różną od zera. Narzuca się samo przez się rozumowanie następujące: przed wyprostowaniem nici siły wewnętrzne nie istilości ruchu!

niały, bo naprężenie jej było zerem; po wyprostowaniu naprężenie mogło być duże, ale odległość między punktami nie mogła się zmieniać, skoro nić jest "nierozciągalna", a zatem i wówczas praca sił wewnętrznych nie mogła być różna od zera. Z tego wynika, że siła żywa układu po wyprostowaniu nici powinna być taka sama, jak przed wyprostowaniem.

Wniosek taki byłby zupełnie mylny. W rozumowaniu powyższem założyliśmy w milczeniu, że całe zjawisko składa się z dwóch okresów: w pierwszym porusza się tylko punkt m_1 z szybkością v, w drugim obydwa punkty z szybkością u. Przejście od jednego okresu do drugiego odbywa się w jednej chwili /"chwili" w znaczeniu wyjaśnionem w cynematyce/; w jednej chwili szybkość punktu m_1 z v spada do u i szybkość punktu m_2 od zera przeskakuje do u.

Takiego skutku nie mogłaby wywołać żadna siła skończona dowolnie wielka; trzebaby tu mówić o siłach i przyśpieszeniach nieskończenie wielkich, t.j. używać wyrazów, którym w naturze nie odpowiada nic realnego. Z drugiej strony nić posiada wytrzymałość ograniczoną i zrywa się gdy naprężenie dojdzie do pewnej określonej granicy. Przy wyżej opisanym przebiegu zjawiska naprężenie z pewnością przekroczyłoby ową granicę, a zatem nić musiałaby się zerwać. Skoro to nie nastąpiło, to przebieg zjawiska musiał być inny.

Oczywiście pomiędzy pierwszym okresem i drugim istnieje jeszcze okres przejściowy i trwa on niezmiernie krótko, ale w każdym razie przejście nie odbywa się w jednej chwili. W ciągu tego okresu przejściowego szybkość punktu m_1 stopniowo spada do u, a szybkość punktu m_2 stopniowo wzrasta do u, a zatem pierwsza jest wciąż większa od drugiej. Z tego wynika, że nić musi się wydłużyć, a więc nie jest nierozciągalna. Przyjmując, że nić jest nierozciągalną przypisywaliśmy jej właściwość, której żadne ciało w naturze nie posiada i to doprowadziło nas do mylnego wniosku. Każda nić, czy sznur rozciąga się pod działaniem sił /p.par.42 cz.I prz.3/. Jeżeli te siły są małe, to nić zwykła /niesprężysta/ wydłuża się nieznacznie i wówczas mówimy o nici nierozciągalnej. W danym razie siły są duże, gdy przyśpieszenia punktów w okresie przejściowym są bardzo wielkie. Z tego wynika, że wydłużenie nici jest stosunkowo znaczne i wywiera wpływ zasadniczy na przebieg zjawiska.

Tak więc w okresie przejściowym odległość pomiędzy punktami się zmienia, a zatem praca naprężeń nici nie jest zerem. Okres ten trwa wprawdzie bardzo krótko, ale ponieważ siły są duże, przeto praca cakowita może być znaczna; nie mamy więc prawa zakładać nawet w przybliżeniu, że siła żywa pozostaje bez zmiany. Zobaczymy dalej, że istotnie siła żywa się zmienia. Dojdziemy do tego wniosku, stosując tak zwaną zasadę ilości ruchu, o której teraz mówić będziemy. . .

1926

30. Zasada ilości ruchu. Niech będzie punkt materyalny o masie m posiadający w danej chwili szybkość v. Nazywamy ilością ruchu wektor, zgodny co do kierunku z szybkością v a co do wielkości równy mv. Wektor ten tak samo jak szybkość v jest związany z punktem m i posiada wymiar MLT^{-1}.

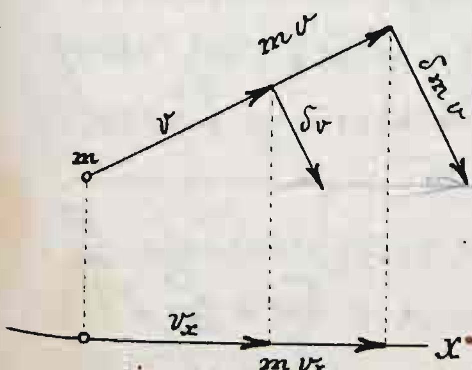

FIG. 40.

Jeżeli rzut szybkości v na jakąś prostą x jest równy v_x, to oczywiście rzut ilości ruchu na tę prostą jest równy $m v_x$. Mówimy, że punkt m posiada w kierunku prostej x ilość ruchu $m v_x$.

Dajmy na to, że szybkość przybrała elementarny przyrost geometryczny δv. Oczywiście ilość ruchu przybierze w takim razie przyrost, zgodny co do kierunku z δv, a co do wielkości równy $m\delta v$. Napiszemy, że $\delta(mv) = m\delta v$. Znak = ma tu oznaczać zgodność nietylko co do wielkości, lecz i co do kierunku. W tym samym czasie rzut szybkości na oś x przybiera przyrost $d v_x$ równy rzutowi δv_x, a rzut ilości ruchu przybiera przyrost $d(m v_x)$ równy rzutowi $\delta(m v)$.

Przypuśćmy, że w danej chwili na punkt m działa siła P. Możemy uważać, że w ciągu następnego okresu dt siła ta ani pod względem wielkości, ani kierunku nie ulegnie zmianie. Wprowadzmy nowy wektor, a mianowicie popęd albo impuls elementarny siły P. Nazywamy tak wektor, zgodny co do kierunku z siłą P, a co do wielkości równy Pdt. [Popęd posiada ten sam wymiar co ilość ruchu, a mianowicie MLT^{-1}] Jeżeli rzut siły P na prostą x jest równy P_x, to oczywiście rzut popędu elementarnego na tę prostą jest równy $P_x dt$. Mówimy, że popęd siły P w kierunku prostej x jest równy $P_x dt$.

Siła P nadaje punktowi m przyśpieszenie $\frac{P}{m}$, posiadające zgodny z nią kierunek i $\delta v = \frac{P}{m} dt$; znak = wyraża tu znowu zgodność co do wielkości i kierunku. Z równania tego wynika, że $\delta(mv) = Pdt$; znaczy to, że przyrost elementarny ilości ruchu jest zgodny co do wielkości i kierunku z popędem elementarnym siły.

W twierdzeniu tem zawiera się tak zw. zasada ilości ruchu w postaci różniczkowej. Możemy uważać, że w ciągu każdego elementu czasu siła P wytwarza nową ilość ruchu, która dołącza się geometrycznie do dotychczasowej ilości ruchu punktu materyalnego.

e = 1

Jeżeli na punkt materyalny działa większa liczba sił, to każda z nich wytwarza w czasie dt przyrost ilości ruchu równy jej popędowi i wszystkie te przyrosty dodają się geometrycznie do poprzedniej ilości ruchu punktu.

Oczywiscie $d(mv_x)=P_x dt$ t.j. przyrost elementarny ilosci ruchu w dowolnym kierunku jest równy popędowi elementarnemu siły w tymże kierunku.

Można byłoby nadać na zasadzie powyższej postać całkową, ale nie przyniosłoby to wyraźnej korzyści.

31. Wektor G. Zasada ilości ruchu jest szczególnie użyteczną w tym razie, gdy mamy do czynienia nie z jednym, lecz z większą ilością punktów materyalnych. Niech będzie układ punktów materyalnych $m_1, m_2, \ldots$ posiadających w danej chwili szybkosci $v_1, v_2, \ldots$. Obrawszy dowolnie w przestrzeni punkt O /nazwiemy go środkiem redukcyi/, utwórzmy układ wektorów, posiadających początek w O i zgodnych z ilościami ruchu punktów $m_1, m_2, \ldots$ zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku.

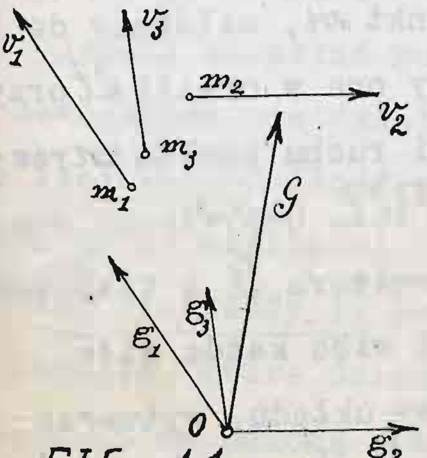

FIG.41.

Mamy teraz wektory $m_1v_1, m_2v_2 \ldots$ posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wypad-