czyna się obracać około C . Możemy go osadzić na osi pionowej, przechodzącej przez C i ruch początkowy nie ulegnie zmianie. Z tego wynika, że pręt nie wywrze na swą oś żadnej reakcyi. Punkt C nazywamy środkiem uderzenia. Wrócimy do niego w rozdziale V.

ROZDZIAŁ III.

SZKIELET DYNAMICZNY CIAŁA.

38. Przedmiot rozdziału. Zasadnicze zagadnienie dynamiki ciał sztywnych jest takie: mając dane ciało sztywne oraz siły na nie działające wyznaczyć ruch tego ciała. Aby zagadnienie takie rozwiązać trzeba przedewszystkiem wiedzieć, jak jest w ciele rozłożona masa, czyli znać jego budowę dynamiczną.

Wśród ciał sztywnych możliwa jest nieograniczona rozmaitość kształtów, a wśród ciał niejednorodnych o jednakowych kształtach możliwa jest jeszcze nieograniczona różnorodność w rozkładzie mas. Pomimo to jednak wszystkie ciała sztywne wykazują w swej budowie dynamicznej pewne wspólne rysy. Możnaby powiedzieć, że każde ciało sztywne posiada jakby szkielet dynamiczny i szkielety wszystkich ciał są zbudowane na jedną modłę jak na jedną modłę są zbudowane szkielety wszystkich zwierząt kręgowych.

Przedmiotem niniejszego rozdziału ma być właśnie opis budowy dynamicznej ciała sztywnego. Punktem wyjścia będzie pojecie momentu bezwładności, albo momentu drugiego rzędu. Na początku poznamy trzy rodzaje tych momentów, a mianowicie momenty względem płaszczyzny, moment względem prostej i moment względem punktu albo środka.

Właściwie w zagadnieniach dynamicznych będą potrzebne tylko momenty względem osi, ale pomiędzy wymienionymi rodzajami zachodzą pewne proste związki, które ułatwiają w dużym stopniu wyznaczenie momentów, dlatego też wypada poznać i dwa rodzaje pozostałe. Następnie poznamy jeszcze czwarty rodzaj momentu drugiego rzędu, a mianowicie tak zwany moment odśrodkowy albo dewiacyjny.

Wypada zauważyć, że wyraz moment został tu użyty w zupełnie innem znaczeniu, niż np. w par. 9 cz. I. Moment bezwładności nie jest wcale wektorem, lecz skalarem.

39. Moment wuględem płaszczyzny. Niech będzie jakieś ciało sztywne i jakaś płaszczyzna F. Podzielmy to ciało na tak małe elementy, aby każdy z nich można było uważać za punkt. Masy ich niech będą $m_1, m_2, \ldots$, a odległości od płaszczyzny F: $z_1, z_2, \ldots$ Odległościom tym przypisujemy znaki podobnie, jak odległościom od płaszczyzn współrzędnych. Iloczyn mz^2 nazywa się momentem bezwładności elementu m względem płaszczyzny F, a suma wszystkich iloczynów takich,

to jest $m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \ldots\ldots = \sum m z^2$ – zowie się momentem bezwładności ciała względem tejże płaszczyzny.

Oznaczmy masę całego ciała, czyli $\sum m$ przez M i obierzmy tak długość k, aby było:

1.) $$M k^2 = \sum m z^2.$$

Ta długość k nazywa się ramieniem bezwładności ciała względem płaszczyzny F.

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została rozłożona na płaszczyźnie G, równoległej do F i położonej od niej w odległości k. Oczywiście ta płaska warstwa masy miałaby względem F taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Poprowadźmy jeszcze przez środek ciężkości S ciała płaszczyznę F_0 równoległą do F i oznaczmy przez a odległość pierwszej od drugiej, a przez $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ odległości punktów $m_1, m_2, \ldots$ od F_0. Oczywiście $z = \xi - a$ i $z^2 = \xi^2 + a^2 - 2a\xi$, albo

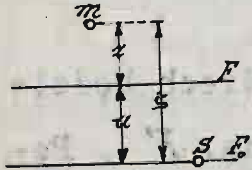

FIG. 56.

$$m z^2 = m\xi^2 + m a^2 - 2 a m \xi$$

Utwórzmy takie równania dla wszystkich elementów ciała i dodajmy je stronami. Wypadnie $\sum m z^2 = \sum m \xi^2 + \sum m a^2 - \sum 2 a m \xi$

Drugi wyraz prawej strony $= a^2 \sum m = M a^2$, a wyraz trzeci $= 2a \sum m\xi$. Lecz $\sum m\xi$ jest to t. zw. moment statyczny, czyli moment pierwszego rzędu, względem płaszczyzny F_0, a ze statyki wiadomo, że moment taki względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości jest zerem. Będzie więc

1)

$$\Sigma m z^2 = \Sigma m \zeta^2 + M a^2$$

albo

$$I = I_0 + M a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

gdzie I i I_0 oznaczają momenty bezwł. ciała względem płaszczyzny F i F_0. Twierdzenie, zawarte w tym wzorze można wypowiedzieć tak: aby otrzymać moment bezwładności względem płaszczyzny F, to trzeba do momentu względem płaszczyzny równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem F.

Oczywiście ze wszystkich płaszczyzn równoległych najmniejszy moment odpowiada płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości.

Równanie /1/ można jeszcze napisać w postaci $M k^2 = M k_0^2 + M a^2$, gdzie k_0 oznacza ramię bezwładności względem środka ciężkości; zatem

$$k^2 = k_0^2 + a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

40. Moment względem osi. Niech będzie znowu ciało sztywne i jakaś prosta z. Odległości elementów

2) $m_1, m_2, \ldots$ od z oznaczamy przez $r_1, r_2, \ldots$ Iloczyn mr^2 zowie się momentem bezwładności elementu m względem osi z, a $\Sigma m r^2$ momentem bezwładności ciała względem tejże osi.

Jeżeli $M k^2 = \Sigma m r^2$, to k nazywa się ramieniem bezwładności ciała względem osi z. Gdybyśmy rozłożyli masę ciała na powierzchni prostego cylindra, którego osią jest prosta z, a promień $= k$, to taka warstwa cylindryczna miałaby względem z taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Pomiędzy momentami względem prostych i płaszczyzn zachodzi prosty związek. Poprowadźmy przez oś z dwie płaszczyzny F_1 i F_2, tworzące kąt prosty i niech x, y oznaczają odległości elementu m od tych płaszczyzn. Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2$ albo

$$mr^2 = mx^2 + my^2$$

Takie równanie odpowiada każdemu elementowi; sumując je, otrzymamy

$$\boxed{\sum mr^2 = \sum mx^2 + \sum my^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Znaczy to, że moment bezwładności względem osi jest równy sumie momentów względem dwóch płaszczyzn przechodzących przez tę oś i do siebie prostopadłych.

Oznaczając przez k_1 i k_2 ramiona bezwładności ciała względem F_1 i F_2 znajdziemy, że:

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała prostą z_0, równoległą do z. Odległość pomiędzy prostemi z i z_0 oznaczmy przez a, a momenty bezwładności względem nich odpowiednio przez I_z i I_0. Poprowadźmy prócz tego trzy płaszczyzny, a mianowicie F_1 przechodzącą przez z i z_0, oraz płaszczyzny F_2, F_3 prostopadłe do F_1 i przechodzące odpowiednie przez

z i z_0. Momenty bezwładności ciała względem płaszczyzn F_1, F_2, F_3 oznaczymy odpowiednio przez I_1, I_2 i I_3. W myśl tylko co dowiedzionego twierdzenia:

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{i} \qquad I_0 = I_1 + I_3$$

Rugując stąd I_1 otrzymamy $I = I_0 + I_2 - I_3$. Lecz według twierdzenia, które poznaliśmy w par. poprzedzającym $I_2 - I_3 = Ma^2$, a zatem

$$I = I_0 + M.a^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3.)$$

Pragnąc otrzymać moment bezwładności względem osi z, trzeba do momentu względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do z dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości względem z.

Ze wszystkich prostych równoległych oczywiście najmniejszy moment odpowiada tej, która przechodzi przez środek ciężkości.

Oznaczając przez k_0 ramię bezwładności ciała względem osi z_0 przekształcimy równanie /3/ na

$$k^2 = k_0^2 + a^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4.)$$

41. Moment względem punktu. Momentem bezwładności ciała względem punktu O nazywamy Σmr^2, gdzie $m_1, m_2, \ldots$ oznaczają masy elementów, a $r_1, r_2, \ldots$ ich odległości od O. Jeżeli $Mk^2 = \Sigma mr^2$, to k zowie się ramieniem bezwładności względem O.

Gdybyśmy całą masę ciała rozłożyli na powierzchni kuli, której środkiem jest punkt O, a promień jest równy k, to moment bezwładności takiej warstwy kulistej względem O byłby równy momentowi ciała.

Obierzmy O za początek prostokątnego układu współrzędnych i oznaczmy przez x, y, z współrzędne elementu m. Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, albo

$$mr^2 = mx^2 + my^2 + mz^2$$

Sumując wszystkie takie równania otrzymamy

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Σmx^2 jest to moment bezwładności względem płaszczyzny yz, a zatem twierdzenie, zawarte w /1/ wypowiemy tak: moment bezwładności względem punktu jest równy sumie momentów bezwładności względem trzech płaszczyzn, przechodzących przez ten punkt i do siebie prostopadłych. Ostatnie równanie przekształca się łatwo na

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gdzie k_1, k_2, k_3 oznaczają ramiona bezwładności względem płaszczyzn xy, yz, zx.

Oznaczmy moment bezwładności ciała względem punktu O przez I, momenty względem płaszczyzn xy, yz, zx — przez I_1, I_2, I_3 — i wreszcie momenty względem prostych x, y, z przez I_x, I_y, I_z.

Na zasadzie /1/ w par. poprzedzającym napiszemy: $I_x = I_3 + I_1$; $I_y = I_1 + I_2$; $I_z = I_2 + I_3$.

Gdy dodamy te równania stronami, to wypadnie

$$I_x + I_y + I_z = 2(I_1 + I_2 + I_3)$$

lub

$$I_x + I_y + I_z = 2I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.)$$

gdyż według /1/ $\quad I_1 + I_2 + I_3 = I$

Oznaczmy moment bezwładności ciała względem punktu O przez I, a względem środka ciężkości S przez I_o. Znajdziemy związek pomiędzy I i I_o.

W tym celu prowadzimy przez O i S prostą x oraz odpowiednio przez te punkty płaszczyznę yz i y_oz_o prostopadłe do x. Momenty bezwł. ciała względem płaszczyzn xy, yz, zx i y_oz_o oznaczamy odpowiednio przez I_1, I_2, I_3, I_4. Wówczas będzie

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \qquad \text{oraz}$$

$$I_o = I_1 + I_4 + I_3 \qquad \text{skąd}$$

$$I - I_o = I_2 - I_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

Lecz w par. 39 wiemy, że $I_2 = I_4 + Ma^2$ gdzie a oznacza odległość OS. Stąd i z /4/ otrzymemy

$$I = I_o + Ma^2$$

Znaczy to, że pragnąc otrzymać moment bezwładności względem punktu O, należy do momentu względem środka ciężkości dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w tym środku względem O.

42. Wyznaczanie momentów bezwładności. Przy pomocy twierdzeń powyższych wyznaczymy momenty lub ramiona bezwładności kilku ciał, z któremi będziemy mie li częściej do czynienia w dalszym ciągu. We wszystkich rozważanych przypadkach należy uważać ciało za jednorodne.

a. Sztaba. Naprzód wyznaczymy moment bezwładności cienkiej prostej sztaby, o długości $2a$ względem prostej y, przechodzącej przez środek ciężkości O i prostopadłej do sztaby, albo względem punktu O, bo w danym przypadku jest to wszystko jedno.

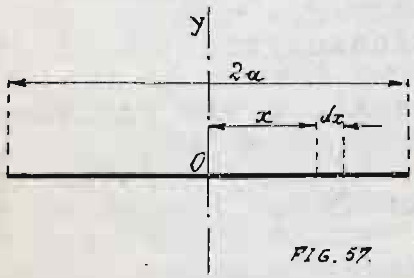

FIG. 57.

Dzielimy sztabę na nieskończenie małe elementy dx; masa takiego elementu jest równa $\mu.dx$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości. Moment bezwładności jednego elementu względem O wynosi $\mu.x^2.dx$, a zatem moment bezwładności sztaby

$$I = \int_{-a}^{a} \mu.x^2.dx = \frac{2\mu.a^3}{3}$$

Ponieważ masa sztaby $=2\mu.a$, przeto na ramię bezwładności otrzymamy wzór $k^2 = \frac{a^2}{3}$. Kwadrat ramienia bezwładności względem końca sztaby $= \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$.

b. Płyta prostokątna. Wyznaczymy ramię bezwładności cienkiej płyty prostokątnej o podstawie $2a$ i wysokości $2b$ względem prostej x, przechodzącej przez środek ciężkości O i równoległej do podstawy. W tym

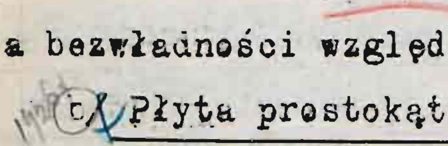

FIG. 58.

celu dzielimy płytę na nieskończenie wązkie paski prostokątne, prostopadłe do x . Pasek taki możemy uważać za sztabę o długości $2b$, a zatem kwadrat jego ramienia bezwładności $k_x^2 = \frac{b^2}{3}$.

Gdybyśmy masę paska skoncentrowali w jednym punkcie w odległości k_x od x , to moment bezwładności całego ciała względem tej prostej nie uległby zmianie. Z tego wynika, że k_x jest również ramieniem bezwładności płyty względem osi x .

Kwadrat ramienia bezwładności względem osi y , przechodzącej przez O i równoległej do wysokości będzie oczywiście $k_y^2 = \frac{a^2}{3}$. Można uważać, że k_x i k_y są ramionami bezwładności płyty względem płaszczyzn, przechodzących odpowiednio przez proste x, y i prostopadłych do płaszczyzny płyty, a zatem $k_x^2 + k_y^2 = \frac{a^2+b^2}{3}$ będzie kwadratem ramienia bezwładności względem osi Z, przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny płyty. wgl. z' $\frac{a^2+b^2}{3} + a^2+b^2 = \frac{4(a^2+b^2)}{3}$

1936 d/ Pierścień cylindryczny kołowy. Wyznaczymy moment bezwładności względem osi pierścienia. W tym celu dzielimy pierścień na nieskończenie cienkie warstwy cylindryczne powierzchniami cylindrycznemi współśrodkowemi z powierzchnią boczną

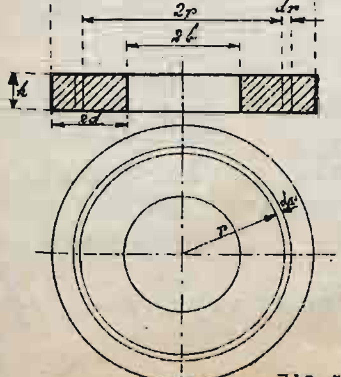

FIG. 59.

pierścienia. Promień jednej z nich niech będzie równy r a grubość dr; w takim razie masa jej wynosi $2\pi . r . h . dr . \mu$, gdzie h oznacza wysokość cylindra, a μ masę jednostki objętości. Moment bezwładności takiej warstwy względem osi jest oczywiście równy $2\pi . r . h . dr . \mu . r^2$, a moment całego cylindra

$$I = \int_b^a 2\pi . \mu . h . r^3 dr = \frac{\pi . \mu . h}{2}(a^4 - b^4),$$

gdzie a i b oznaczają odpowiednio promień pierścienia i otworu wewnętrznego.

Masa pierścienia wynosi $M = \pi . \mu . h(a^2 - b^2)$, zatem kwadrat ramienia bezwładności jest równy

$$k^2 = \frac{I}{M} = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Prosty cylinder kołowy możemy uważać za pierścień, w którym $b = 0$. Wówczas $k^2 = \frac{a^2}{2}$

Wyznaczymy dla takiego cylindra ramię bezwładności k_x względem prostej x, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi cylindra. Poprowadzimy przez nią dwie płaszczyzny F_1 i F_2, jedną prostopadle do osi cylindra, a drugą przez tę oś i wyznaczymy względem nich ramiona bezwładności k_1 i k_2.

Możemy uważać, że cylinder składa się ze sztab o długości h, równoległych do osi, czyli prostopadłych do płaszczyzny F_1. Kwadrat ramienia bezwładności każdej sztaby względem tej płaszczyzny $= \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 =$

$=\frac{h^2}{12}$; oczywiście i $k_1^2 = \frac{h^2}{12}$

Ramiona bezwładności względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez oś, są równe, a suma kwadratów ramion względem takich dwóch płaszczyzn, nawzajem prostopadłych jest równa k^2, czyli momentowi bezwładności względem osi, a zatem $k_2^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{a^2}{4}$, gdyż $k^2 = \frac{a^2}{2}$, co otrzymamy, zakładając w /1/ $b=0$. Ostatecznie znajdziemy, że $k_x^2 = k_1^2 + k_2^2 = \frac{3a^2+h^2}{12}$

d/ Stożek prosty. Naprzód wyznaczymy moment bezwładności względem osi. W tym celu dzielimy stożek na nieskończenie cienkie warstwy płaszczyznami prostopadłemi do osi. Odległość jednej z nich od wierzchołka niech będzie równa z, grubość dz, promień zaś wynosi $y \cdot tg^2\alpha$, gdzie 2α oznacza kąt wierzchołkowy. Warstwę tę możemy uważać za cylinder, zatem masa jej $= \pi . y^2 tg^2\alpha . dy . \mu$ ——, a ponieważ kwadrat ramienia bezwładności $= \frac{y^2 tg^2\alpha}{2}$, przeto moment bezwładności warstwy względem osi $= \frac{\pi . y^4 tg^4\alpha . dy . \mu}{2}$ $\frac{a^2}{2}$

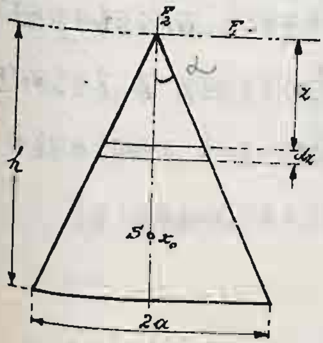

FIG. 60.

a moment szukany $I = \int_0^h \frac{\pi . \mu . tg^4\alpha . y^4 dy}{2} = \frac{\pi . \mu . tg^4\alpha . h^5}{10}$

Oznaczmy jeszcze przez a promień podstawy; w takim razie $tg\,\alpha = \frac{a}{h}$ i $I = \frac{\pi . \mu . a^4 h}{10}$. Masa stożka wynosi $\frac{\pi . \mu . a^2 h}{3}$, a zatem $k^2 = \frac{3a^2}{10}$.

Wyznaczymy jeszcze ramię bezwładności k_x, względem prostej x_0, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi stożka, a w tym celu wyznaczymy naprzód moment względem płaszczyzny E_1, poprowadzonej przez wierzchołek prostopadle do osi. Moment bezwładności warstwy wyżej określonej $=\pi . z^2 tg^2\alpha . dz . \mu . z^2$,

zad moment stożka $=\int_0^h \pi . \mu . tg^2\alpha . z^4 . dz = \frac{\pi . \mu . tg^2\alpha . h^5}{5}$

a kwadrat ramienia bezwładności $= \frac{3h^2}{5}$, gdyż objętość $= \frac{\pi . h^3 tg^2\alpha}{3}$. Odległość wierzchołka od środka ciężkości, jak wiadomo ze statyki wynosi $\frac{3}{4}h$, a zatem kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadle do osi, będzie $\frac{3h^2}{5} - \left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \frac{3h^2}{80}$. Znajdziemy z łatwością, jak w przypadku cylindra, że kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez oś $= \frac{3a^2}{10} : 2 = \frac{3a^2}{20}$, a zatem

$$k_x^2 = \frac{3a^2}{20} + \frac{3h^2}{80} = \frac{12a^2 + 3h^2}{80}.$$

e/ Kula. Chodzi tu o ramię bezwładności k_1 względem średnicy, lecz naprzód wyznaczymy moment bezwładności względem środka. W tym celu podzielmy kulę na nieskończenie cienkie warstwy powierzchniami kulistemi, współśrodkowemi z daną. Niech promień jednej z takich warstw będzie r, a grubość dr. Objętość wyniesie $4\pi . r^2 . dr$, a masa $4\pi . r^2 dr . \mu$. Oczywiście moment bezwładności warstwy względem środka $= 4\pi . r^2 dr \mu . r^2$, a moment kuli

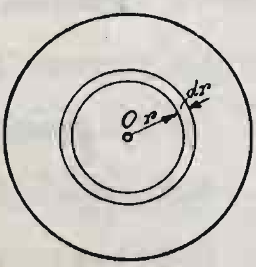

FIG. 61.

$= \int_0^a 4\pi.\mu.r^4 dr = \frac{4\pi\mu.a^5}{5}$, gdzie a oznacza promień. Kwadrat ramienia bezwładności względem środka

$$= \frac{4\pi.\mu.a^5}{5} : \frac{4\pi.\mu.a^3}{3} = \frac{3a^2}{5}$$

Kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek $= \frac{3a^2}{5} : 3 = \frac{a^2}{5}$, i zatem $k_1^2 = \frac{a^2}{5} \cdot 2 = \frac{2a^2}{5}$.

43. Osi główne. Niech będzie ciało sztywne, jakakolwiek płaszczyzna F i w tej płaszczyźnie jakikolwiek punkt O. Kierujemy uwagę na te proste, które w płaszczyźnie F przechodzą przez punkt O, czyli na pęk promieni O. Każdej z tych prostych odpowiada pewien moment bezwładności ciała. Wyróżnimy z pośród nich dwie, a mianowicie tę, której odpowiada moment największy, i tę której odpowiada moment najmniejszy. Nazwiemy je osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie F. Zobaczymy jaki kąt tworzą te proste.

W tym celu obierzmy O za początek układu prostokątnego, a F za płaszczyznę xy. W takim razie oś z będzie prostopadła do F. Oznaczmy przez I_x, I_y, I_z, I momenty bezwładności ciała względem prostych x, y, z oraz względem punktu O. Według /3/par. 41: $I_x + I_y + I_z = 2.I$, a zatem

$$I_x + I_y = 2I - I_z$$

Wyobraźmy sobie teraz, że układ współrzędnych obraca się około osi z, ale ciało i płaszczyzna

F pozostają w spokoju. Podczas tego ruchu I_x i I_y się zmieniają, ale suma ich pozostaje stałą, gdyż ani I ani I_z nie ulegają zmianom. Z tego wynika, że gdy I_x osiąga wartość największą, to I_y przybierze wartość najmniejszą, to znaczy, gdy oś x zajmie położenie osi największego momentu, to oś y zajmie właśnie położenie osi najmniejszego momentu. Tak więc osi największego i najmniejszego momentu tworzą kąt prosty.

Zwróćmy teraz uwagę na wszystkie proste, które przechodzą w przestrzeni przez O, czyli na snop promieni O. Wyróżnimy znowu z pośród tych prostych dwie, którym odpowiadają momenty największy i najmniejszy. Nazwiemy je osiami największego i najmniejszego momentu punktu O i oznaczymy przez a i b. Są one również osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie ab, a zatem w myśl wyżej dowiedzionego twierdzenia są do siebie prostopadłe.

Poprowadźmy jeszcze trzecią prostą c, prostopadłą do płaszczyzny ab. Będzie ona oczywiście osią największego momentu w płaszczyźnie bc i osią

najmniejszego

największego momentu w płaszczyźnie ca. Te trzy proste a, b i c nazywają się osiami głównemi punktu O, a jeżeli O jest środkiem ciężkości, to osiami głównemi ciała.

Osi główne odgrywają ważną rolę w dynamice ciała sztywnego. Stanowią one właśnie ten szkielet dynamiczny ciała, o którym była wzmianka w par. 38...

44. Moment odśrodkowy. Niech będzie ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Nazywamy momentem odśrodkowym lub momentem dewiacyjnym ciała względem osi x, y sumę $m_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \ldots$ czyli Σmxy Również Σmyz i Σmzx nazywają się momentami odśrodkowymi względem y, z i z, x .

Moment odśrodkowy posiada ten sam wymiar, co i momenty bezwładności, a mianowicie ML^2, jest to więc także moment drugiego rzędu, czyli rodzaj momentu bezwładności; jednak pod pewnym względem rodzaj ten różni się zasadniczo od innych.

Moment bezwładności względem płaszczyzny zawiera współrzędne elementów tylko w drugich potęgach, a zatem jest on zawsze dodatni. To samo dotyczy momentów względem prostej i punktu. Tymczasem moment odśrodkowy zawiera współrzędne w pierwszych potęgach, może więc być ujemny a nawet równy zeru. Okażemy teraz na przykładzie, że ten ostatni przypadek jest możliwy. Przypuśćmy, że ciało posiada mechaniczną płaszczyznę symetrji /par. 52 cz. I/. Obierzmy osi x i y w płaszczyźnie symetrji i zwróćmy uwagę na dwa jakiekolwiek elementy symetryczne o masach m . Jeżeli jeden z nich posiada współrzędne x, y, z , to drugi $x, y, -z$, zatem moment odśrodkowy jednego względem y,z będzie myz, a drugiego $-myz$.

Suma tych momentów jest zerem. Z tego wynika, że moment odśrodkowy całego ciała względem osi y,z jest równy zeru i toż samo dotyczy momentu względem z,x. Momenty odśrodkowe cienkiej jednorodnej płyty względem y,z i z,x są oczywiście zerami, jeśli oś z jest prostopadła do płaszczyzny płyty.

Powróćmy do przypadku ogólnego. Oznaczmy współrzędne środka ciężkości ciała przez a, b, c i poprowadźmy przez ten punkt nowe osi współrzędnych ξ, η, ζ równoległe do poprzednich. Jeżeli współrzędne elementu m w dawnym układzie są x, y, z a w nowym ξ, η, ζ, to $x = \xi + a$, $y = \eta + b$, $z = \zeta + c$ i $xy = \xi.\eta + a.\eta + b\xi + a.b$, albo

$$mxy = m\xi\eta + m.a\eta + mb\xi + m.ab$$

Sumując wszystkie takie równania, otrzymamy

$$\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + a\Sigma m\eta + b\Sigma m\xi + M.a.b$$

Lecz $\Sigma m\eta$ i $\Sigma m\xi$ są zerami, jako momenty statyczne ciała względem płaszczyzn, przechodzących przez środek ciężkości, a zatem $\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + M.ab$

albo $I_{xy} = I_{\xi\eta} + M.a.b.$

Tak więc moment odśrodkowy ciała względem osi x,y jest równy sumie momentu ciała względem osi równoległych, przechodzących przez środek ciężkości, oraz momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x,y.

Toż samo dotyczy osi y,z i z,x.

45. Moment bezwładności w funkcji kątów kierunkowych. Niech będzie znowu ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Momenty bezwładności względem osi oznaczymy przez I_x, I_y, I_z, a momenty odśrodkowe przez I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}. Niech będzie prócz tego prosta u, przechodząca przez początek i tworząca z osiami współrzędnych kąty α, β, γ. Mamy wyznaczyć moment bezwładności I danego ciała względem tej prostej u.

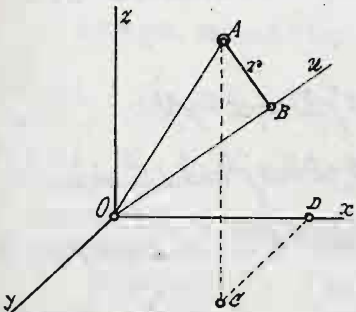

Fig. 62

Dajmy na to, że jeden z elementów ciała o masie m zajmuje położenie $A(x,y,z)$, a odległość jego AB od u niech będzie równa r.

Oczywiście
$$r^2 = OA^2 - OB^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a OB jest rzutem odcinka OA albo wieloboku $ODCA$ na prostą u. Boki tego wieloboku są odpowiednio równe x, y, z i tworzą z u kąty α, β, γ, a zatem $OB = x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma$

Wprowadzając te wartości do /1/, otrzymamy
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z.\cos\gamma)^2$$

Ponieważ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ możemy więc napisać

$$r^2 = (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-(x.\cos\alpha+y.\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

czyli $r^2 = (y^2+z^2).\cos^2\alpha+(z^2+x^2).\cos^2\beta+(x^2+y^2).\cos^2\gamma-$

$$-2xy.\cos\alpha.\cos\beta-2yz\cos\beta.\cos\gamma-2zx\cos\gamma.\cos\alpha$$

Mnożymy to przez m i sumujemy takie równania dla wszystkich elementów. Wypadnie

$$\Sigma mr^2 = \cos^2\alpha\Sigma m(y^2+z^2)+\cos^2\beta\Sigma m(z^2+x^2)+\cos^2\gamma\Sigma m(x^2+y^2)-$$

$$-2\cos\alpha.\cos\beta\Sigma m.xy-2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz-2\cos\gamma.\cos\alpha\Sigma mzx$$

Lecz y^2+z^2 jest to kwadrat odległości elementu m od osi x, a zatem $\Sigma m(y^2+z^2) = I_x$ i t.d. Będzie więc

$$I = I_x.\cos^2\alpha+I_y.\cos^2\beta+I_z.\cos^2\gamma-$$

$$-2I_{xy}\cos\alpha.\cos\beta-2I_{yz}.\cos\beta.\cos\gamma-2I_{zx}\cos\gamma.\cos\alpha \quad \ldots (2)$$

Jest to szukany moment bezwładności.

Rozważymy szczegółowo przypadek, gdy prosta u leży w płaszczyźnie xy. W takim razie $\gamma = \frac{\pi}{2}$ $\cos\gamma = 0$ i $\cos\beta = \sin\alpha$, a zatem

$$I_1 = I_x.\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-2I_{xy}\cos\alpha.\sin\alpha$$

Wyznaczymy tę wartość kąta α, przy której I osiąga maksymum lub minimum. Zakładając $\frac{dI}{d\alpha}=0$, otrzymamy

$$(I_y-I_x)\sin 2\alpha-2I_{xy}\cos 2\alpha = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

a zatem

$$tg\,2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}$$

Kąt 2α posiada taki tangens przy dwóch różnych wartościach mniejszych od 2π, różnią się one o π a zatem równaniu /3/ czynią zadość dwie wartości α,

różniące się o $\frac{\pi}{2}$. Oczywiście przy jednej z nich I osiąga maksymum, a przy drugiej minimum; jednej z nich odpowiada prosta największego, a drugiej najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie xy.
Jeżeli $I_{xy}=0$ to owe wartości są 0 i $\frac{\pi}{2}$ znaczy to że osi x i y są osiami największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie xy.

Odwrotnie jeżeli za osi x, y obierzemy proste największego i najmniejszego momentu, to $tg\, 2\alpha=0$, a zatem $I_{xy}=0$
W tym przypadku

$$I=I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Oczywiście otrzymamy to samo I dla dwóch prostych, z których jedna tworzy z osią x kąt α, a druga $-\alpha$, innemi słowy osi największego i najmniejszego momentu są dwusiecznemi kąta pomiędzy dwiema prostemi, którym odpowiadają momenty równe.
Jeżeli $I_y=I_x$ to $I=I_x$, znaczy to, że ciało posiada względem wszystkich prostych, przechodzących przez O i położenych w płaszczyźnie xy, momenty jednakowe.

Jeżeli za osi współrzędnych obierzemy osi główne punktu O, to w każdej z płaszczyzn współrzędnych będą one prostemi największego i najmniejszego momentu, a więc w tym razie $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}=0$. Będziemy w tym przypadku szczególnym oznaczali momenty względem osi x, y, z odpowiednio przez A, B i C nazywając je momentami głównymi punktu O, a zatem równanie /2/ przekształci się na

$$I = A.\cos^2\alpha + B.\cos^2\beta + C.\cos^2\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dowiedziemy teraz twierdzenie odwrotne. Osi współrzędnych obrano, dajmy na to, w taki sposób, że wszystkie trzy momenty odśrodkowe wą zerami. Tym czasem można stąd wyciągnąć jedynie ten wniosek, że osi x i y są prostemi największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie xy, osi y i z w płaszczyźnie yz, wreszcie osi z i x w płaszczyźnie zx. Wypada dowieść, że osi współrzędnych są także osiami głównemi początku O.

Aby nie przesądzać sprawy, napiszemy równanie /2/ w postaci

$$I = I_x.\cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z.\cos^2\gamma$$

Dajmy na to, że z trzech momentów I_x, I_y, I_z pierwszy jest największy, a drugi najmniejszy. Oczywiście

$$I_x = I_x \cos^2\alpha + I_x \cos^2\beta + I_x \cos^2\gamma$$

Odejmując od tego równanie poprzednie, otrzymamy
$$I_x - I = (I_x - I_y)\cos^2\beta + (I_x - I_z)\cos^2\gamma$$

Prawa strona jest oczywiście dodatnia, zatem I_x jest większe od I, jakiekolwiek są α, β, γ, a z tego wynika, że oś x jest prostą największego momentu punktu O . Tak samo dowiedziemy, że oś y jest prostą najmniejszego momentu, a więc osi współrzędnych są osiami głównemi. Wyciągniemy pewne wnioski z równania /5/, które odegra ważną rolę w dalszym ciągu. Jeżeli osiami współrzędnych są osi główne początku, i prosta u leży w płaszczyźnie xy, to $I = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$. Dajmy na to, że momenty A i B są równe. W takim razie oczywiście $I = A$, znaczy to, że momenty względem wszystkich prostych, przechodzących przez O w płaszczyźnie xy są równe.

Weźmy dla przykładu ciało jednorodne w kształcie bryły obrotowej. Oś obrotu jest oczywiście osią główną każdego ze swych punktów, a wszystkim prostym, prostopadłym do tej osi i przecinającym ją w jednym punkcie odpowiadają równe momenty bezwładności.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie trzy główne momenty bezwładności punktu O t.j. A, B i C są równe. Z równania /5/ wynika bezpośrednio, że takim razie ciało posiada względem wszystkich prostych, przechodzących przez O , momenty równe. Jeżeli do tego O jest środkiem ciężkości, to ciało takie nazwiemy <u>kulistem</u>.

Oczywiście właściwość taką posiada kula jednorodna, ale oprócz niej istnieje jeszcze bardzo wiele innych ciał kulistych. Ciałem takiem jest np.

sześcian. Za osi główne możemy tu uważać proste, prostopadłe do ścian i oczywiście momenty względem nich są równe.

Prosty kołowy cylinder jednorodny jest kulisty, jeżeli moment bezwładności względem osi jest równy momentowi względem prostej, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadle do osi, czyli jeżeli $\frac{r^2}{2}=\frac{3r^2+h^2}{12}$ /par.42 c /, gdzie r oznacza promień, a h wysokość. Z tego wynika, że w cylindrze kulistym $h=r\sqrt{3}$.

Prosty stożek jednorodny jest kulisty, jeżeli $\frac{3r^2}{10}=\frac{12r^2+3h^2}{80}$ /par.42,d/, gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością. W takim razie $h=2r$.

46. Trzecia oś. Z trzech osi głównych punktu O jedna jest prostą największego momentu, druga prostą najmniejszego momentu, a o trzeciej wiemy dotychczas tylko to, że jest prostopadła do dwóch pierwszych. Mamy tu poznać pewne właściwości szczególne tej trzeciej osi.

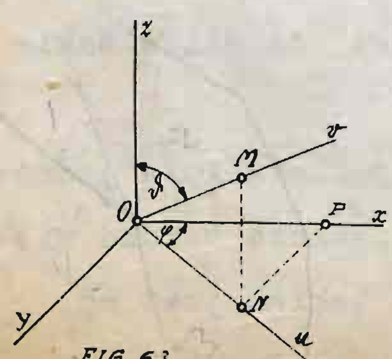

FIG. 63.

Za osi współrzędnych obieramy osi główne punktu O i oznaczamy momenty główne przez A, B, C. Niech z nich A będzie największym, a B najmniejszym, a więc x jest osią największego, a y

osią najmniejszego momentu.

Poprowadźmy przez oś z dowolnie płaszczyznę przecinającą płaszczyznę xy według prostej u, i w tej płaszczyźnie poprowadźmy również dowolnie przez O prostą v. Kąt pomiędzy prostemi u i x oznaczymy przez φ, a pomiędzy v i z przez ϑ. Jeżeli kąty kierunkowe prostej v są α, β, γ, to, jak wiadomo z geometrji */

$$\cos\alpha = \sin\vartheta\cos\varphi;\ \cos\beta = \sin\vartheta\sin\varphi;\ \cos\gamma = \cos\vartheta$$

B/

Wstawiając to w /5/ par. poprzedzającego, otrzymamy

$$I = (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi) + C\cos^2\vartheta$$

Gdy porównamy to z /4/ par. poprzedz., to dojdziemy z łatwością do dwóch wniosków: 1/ że wyrażenie, zawarte w nawiasie jest momentem bezwładności względem prostej u 2/, że proste z i u są osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie zu.

$x = r\cos\vartheta$ $x = r'\cos\varphi$, $r' = r\sin\vartheta$

Tak więc prosta z jest osią największego lub najmniejszego momentu w każdej, przechodzącej przez nią płaszczyźnie.

*/ Wzory te można łatwo otrzymać w sposób następujący. Przypuśćmy, że na prostej v leży wektor $P = OM$. Składowe jego w kierunkach u i z będą $P\sin\vartheta$ i $P\cos\vartheta$, a rzut na oś x jest równy $P\cos\varphi$ albo $P\sin\vartheta\cos\varphi$ ~. Z tego otrzymamy wzór pierwszy, biorac rzuty na oś y - wzór drugi.

Jest rzeczą jasną, że jeżeli prosta u leży w pobliżu osi x, to jest ona prostą największego momentu w płaszczyźnie zu, a z jest wówczas prostą najmniejszego momentu. Jeżeli u leży w pobliżu osi y to zachodzi przypadek odwrotny. Granicą pomiędzy dwoma obszarami stanowi to położenie prostej u, przy którem momenty względem z i u są równe. W przypadku granicznym

$$A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi = C$$

Pisząc $1-\cos^2\varphi$ zamiast $\sin^2\varphi$ znajdziemy odrazu, że

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{C-B}{A-B}}$$

Widzimy, że w płaszczyźnie xy istnieją dwie takie proste graniczne u_1 i u_2, tworzące odpowiednio z osią x kąty φ_1, φ_2 i $\varphi_1+\varphi_2=\pi$. Dwusiecznemi kąta pomiędzy niemi są osie x i y.

Proste u_1 i u_2 dzielą płaszczyznę xy na cztery wycinki kątowe, czyli na dwa obszary. Jeżeli u leży w obszarze, zawierającym oś x, to z jest osią najmniejszego momentu płaszczyzny zu, jeżeli zaś u należy do obszaru, w którym przebiega oś y, to z jest osią największego momentu.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę na płaszczyzny zu_1 i zu_2. W myśl twierdzenia, które poznaliśmy w par. poprzedz., momenty bezwładności względem wszystkich prostych, położonych w tych płaszczyznach i przechodzących przez O , są równe. Możnaby płaszczyzny zu_1 i zu_2 nazwać przekrojami kołowymi punktu O. Wogóle przez każdy punkt przechodzą dwa takie przekroje, a ich przecięcie jest trzecią osią główną tego punktu.

47. Punkt główny prostej. Jeżeli prosta z jest osią główną punktu O , to punkt ten nazywamy punktem głównym prostej z .

Nasuwa się pytanie, czy każda prosta jest dla któregoś ze swych punktów osią główną, albo czy każda prosta posiada punkt główny. Na pytanie to można dać z góry odpowiedź przeczącą. Wynika to z uwagi następującej. Położenie punktu w przestrzeni daje się określić za pomocą trzech liczb, nap. trzech współrzędnych Kartezjusza, i z tego względu mówimy, że zbiorowość punktów przestrzeni jest rozciągłością trójwymiarową. Położenie prostej określa się zapomocą czterech liczb, np. czterech współczynników równań prostej w układzie Kartezjusza. Z tego wynika, że zbiorowość prostych przestrzeni jest rozciągłością czterowymiarową. Można powiedzieć, że prostych jest nieskończenie razy więcej, niż punktów, gdy tymczasem osi głównych jest najwyżej trzy razy więcej niż punktów.

Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne i jaka

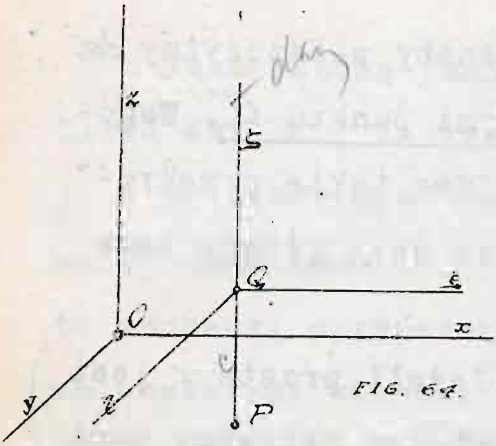

FIG. 64.

kelwiek prosta ζ.

Zobaczymy jakie warunki powinny być spełnione, aby ta prosta posiadała punkt główny. Obierzmy za początek prostokątnego układu współrzędnych środek ciężkości O danego ciała, a oś z poprowadźmy równolegle do prostej ζ. Przypuśćmy, że ta ostatnia orzecina płaszczyznę xy w punkcie $P(a,b,o)$, i że posiada ona punkt główny $Q(a,b,c)$. Poprowadźmy jeszcze przez Q proste ξ, η odpowiednio równoległe do osi x i y.

Według par. 44 momenty odśrodkowe ciała względem osi η i ζ tudzież osi ζ i ξ są odpowiednio równe:

$I_{yz} + M.b.c$ i $I_{zx} + M.c.a$, gdzie I_{yz} i I_{zx} oznaczają momenty odśrodkowe względem odpowiednich osi układu x,y,z, a M masę ciała. Skoro jednak prosta ζ jest osią główną punktu Q, to η i ζ są osiami największego i najmniejszego momentu tegoż punktu w płaszczyźnie $\eta\zeta$, a zatem moment odśrodkowy względem nich jest zerem; również jest zerem moment odśrodkowy względem ζ i ξ. Wynikają stąd równania

$$I_{yz} + M.b.c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$I_{zx} + M.c.a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Równaniom tym wogóle nie może czynić zadość jedna i ta sama wartość niewiadomej c , a więc wogóle prosta s nie posiada punktu głównego.

Rugując z równań powyższych c , otrzymamy

$$I_{yz} \cdot a - I_{zx} \cdot b = 0 \quad (3)$$

Jest to warunek, który powinien być spełniony, aby prosta s posiadała punkt główny. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to można współrzędną c , a więc i położenie punktu głównego, wyznaczyć z równania /1/ lub /2/. Otrzymamy tylko jedną wartość na c, a więc wogóle prosta może posiadać tylko jeden punkt główny.

Przypuśćmy, że prosta s , jest równoległa do jednej z osi głównych ciała, czyli, że oś z jest osią główną ciała.

W tym przypadku szczególnym $I_{yz} = I_{zx} = 0$, a więc warunek /3/ jest spełniony, a z /1/ lub /2/ wynika, że $c = 0$. Widzimy, że każda prosta równoległa do osi głównej ciała posiada punkt główny; jest nim rzut środka ciężkości na tę prostą.

Można twierdzenia to wypowiedzieć w inny sposób Weźmy w płaszczyźnie zawierającej dwie osi główne ciała, czyli w płaszczyźnie głównej ciała, jakikolwiek punkt. Oczywiście dwie jego osi główne leżą w owej płaszczyźnie, a trzecia jest do niej prostopadła; a zatem płaszczyzna główna ciała jest płaszczyzną główną każdego ze swych punktów.

Przypuśćmy wreszcie, że prosta z jest osią główną ciała. W tym razie $I_{yz} = I_{zx} = 0$, oraz $a = b = 0$ i równaniom /1/ i /2/ czyni zadość każda wartość współrzędnej c. Z tego wynika, że oś główna ciała jest osią główną każdego ze swych punktów. Innemi osiami głównemi jakiegokolwiek punktu Q, położonego na osi głównej ciała, są dwie proste odpowiednio równoległe do dwóch pozostałych osi głównych ciała, gdyż punkt Q jest na każdej z tych prostych rzutem środka ciężkości.

ROZDZIAŁ IV.

ZASADY DYNAMIKI CIAŁA SZTYWNEGO.

48. **Model ciała.** Zasadnicze zagadnienie dynamiki jest następujące: mając dane ciało oraz siły na nie działające wyznaczyć ruch jego. Widzieliśmy w rozdziale I, jak się rozwiązuje to zagadnienie w przypadku, gdy można uważać ciało za punkt materjalny; będziemy usiłowali sprowadzić przypadek ogólny do tego przypadku ogólnego.

W tym celu zbudujemy model ciała, złożony z punktów materialnych. Wyobraźmy sobie dwa układy współrzędnych I i II, zajmujące różne okolice przestrzeni. Do I-go