największy. Jednocześnie dolna część ciała obróci się o pewien kąt w prawo. Następnie człowiek zwiesza ręce wzdłuż ciała i powraca do położenia normalnego. Podczas tego ruchu powrotnego dolna część ciała obróci się znowu o pewien kąt w lewo, lecz o mniejszy, niż poprzednio w prawo, gdyż moment bezwładności górnej części względem osi obrotu się zmniejszył. Wynikiem obydwóch ruchów będzie oczywiście obrót całego ciała, o jakiś kąt w prawo. Powtarzając tę operację dostateczną ilość razy, człowiek może obrócić się o kąt dowolny.

W podobny sposób postępuje spadający kot, aby odwrócić się łapami do dołu. Wyciąga on prostopadle do ciała przednie łapy, a kurczy tylne i skręca przednią część tułowia względem tylnej o kąt jaknajwiększy. Następnie kurczy przednie łapy, wyciąga tylne i nadaje ciału ruch odwrotny do poprzedniego, powtarzając tę czynność, dopóki ciało jego nie przybierze żądanego położenia.

## ROZDZIAŁ V

## RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO.

66. Równanie zasadnicze. Rozważymy teraz rozmaite rodzaje ruchów ciała sztywnego, przy pomocy twierdzeń, wyłożonych w rozdziale poprzedzającym.

Ruch postępowy stanowi przedmiot dynamiki punktu materyalnego, zaczniemy więc od ruchu obrotowego.

Przypuśćmy, że ciało obraca się około nieruchomej osi $z$ pod działaniem sił $P_1, P_2, \ldots$ W chwili $t$ ciało posiadało, dajmy na to, szybkość kątową $\omega$, a moment ilości ruchu względem osi $z$ wynosił $I\omega$, gdzie $I$ oznacza moment bezwładności ciała względem $z$. W ciągu następnego okresu $dt$ ten moment ilości ruchu przybiera przyrost algebraiczny $d(I\omega)$; z drugiej strony wiemy, że siły $P_1, P_2 \ldots$ wytwarzają w tym samym czasie przyrosty momentu ilości ruchu $N_1 dt, N_2 dt, \ldots$ gdzie $N_1, N_2, \ldots$ oznaczają ich momenty względem osi $z$. Będzie więc $d(I\omega) = \sum N.dt$ albo

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum N \quad \ldots\ldots\ldots (1.)$$

To samo równanie wynika także z zasady sił żywych. Siła żywa ciała w chwili $t$ wynosi $\frac{I\omega^2}{2}$; w czasie $dt$ przybierze ona przyrost $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$, a siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ wykonają jednocześnie prace $N_1 d\vartheta, N_2 d\vartheta, \ldots$ gdzie $d\vartheta$ oznacza kąt, o który w czasie $dt$ obróciło się ciało. Będzie więc $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \sum N d\vartheta$, albo $I.\omega.d\omega = \sum N.\omega.dt$, gdyż $d\vartheta = \omega.dt$. Z tego otrzymamy równanie $(1.)$.

Równanie to piszemy często w postaci

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = \sum N.$$

gdzie $M$ oznacza masę ciała, $k$ jego ramię bezwładności względem osi, a $\frac{d\omega}{dt}$ jest przyspieszeniem kątowem.

Jeżeli suma momentów sił $P_1, P_2, \ldots$ względem osi obrotu jest równa zeru, to $\frac{d\omega}{dt} = 0$, a zatem $\omega$ jest wielkością stałą.

**67. Przykłady.** 1. Poziomycylinder kołowy o masie $M$ i promieniu $a$ może obracać się swobodnie około swej osi. Na cylinder nawinięto sznur, a do końca sznura przyczepiono ciężar o masie $m$. O jaki kąt obróci się cylinder w ciągu $t$ sek. od wyswobodzenia ciężaru? Na cylinder działa naprężenie sznura $S$ /nie ciężar $mg$/, zatem:

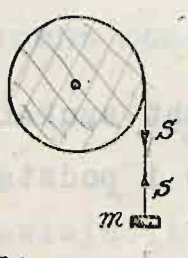


FIG. 88.

$M\varepsilon = Sa$

$$M . k^2 \frac{d\omega}{dt} = S . a \quad \ldots \ldots \quad (1.)$$

gdzie $k$ oznacza ramię bezwładności cylindra względem jego osi, a $\frac{d\omega}{dt}$ jego przyśpieszenie kątowe.

Na ciężar $m$ działa siła ciężkości $mg$ i siła $S$, a ruch jego jest prostoliniowy, zatem $m\frac{dv}{dt} = mg - S \ldots (2.)$

Różniczkując oczywiste równanie $v = a\omega$, otrzymamy $\frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt}$. Podstawiamy to w $(2.)$. Wypadnie $p = S = m\left(g - a\frac{d\omega}{dt}\right)$, a porównując z $(1.)$ znajdziemy zależność

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{a} \qquad (Mk^2 + ma^2)\frac{d\omega}{dt} = m . a . g \quad \ldots \ldots \quad (3.)$$

[Do tego samego można dojść inaczej. Rozpatrujemy układ, złożony z cylindra i ciężaru $m$. Moment ilości ruchu cylindra względem osi jest $= M . k^2 \omega$, gdzie $k$ i $\omega$ mają poprzednie znaczenie. Moment ilości ruchu ciężaru $m$ wynosi $m.v.a$ czyli $ma^2\omega$, zatem wektor $H$ całego układu jest $= Mk^2\omega + ma^2\omega = (Mk^2+ma^2)\omega$. W $dt$ sek. wektor ten przybierze przyrost $d[(Mk^2+ma^2)\omega]$, równy momentowi siły ciążenia pomnożonemu przez $dt$ czyli $mgadt$ Stąd

$$d[(Mk^2+ma^2)\omega] = mg.a.dt$$

Gdy wykonamy różniczkowanie, to otrzymamy (3.)

Całkując (3.) znajdziemy, że:

$$(Mk^2+ma^2)\omega = m.a.g.t$$

Lecz $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, gdzie $\vartheta$ oznacza kąt szukany, zatem $(Mk^2+ma^2)d\vartheta = m.a.g.t.dt$, a całkując i podstawiając $k^2 = \frac{a^2}{2}$, otrzymamy $\vartheta = \frac{m.g.t^2}{a(M+2m)}$.

Gdy cylinder jest lekki w porównaniu z ciężarem $m$, to można przyjąć, że $M=0$, a wtedy wypadnie $\vartheta = \frac{g.t^2}{2a}$.

2. Deska o masie $M$ i długości $a$ może obracać się około swego końca w płaszczyźnie pionowej. Drugi koniec opiera się na podstawce. Na deskę kładziemy ciężar i usuwamy podstawkę. Jaka powinna być odległość początkowa ciężaru od osi obrotu, aby zetknięcie jego z deską ustało zaraz po wyswobodzeniu deski.

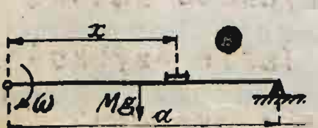

FIG. 89.

Oznaczmy szukaną odległość przez $x$. Gdy początkowe przyspieszenie punktu deski, w którym znajduje się ciężar, czyli $x\frac{d\omega}{dt}$ będzie większe od największego przyśpieszenia, jakie może otrzymać ciężar czyli od $g$, to już w pierwszej chwili zetknięcia, o które chodzi, zniknie. Zatem musi zachodzić zależność $x\frac{d\omega}{dt} > g$ . . . . . . . . . (1)

Wyznaczymy $\frac{d\omega}{dt}$ w sposób następujący: Iloczyn momentu bezwładności deski względem osi obrotu czyli $Mk^2$ przez przyśpieszenie kątowe $\frac{d\omega}{dt}$ jest równy sumie momentów sił, działających na deskę względem tej że osi. Moment reakcyi osi jest zerem, a zatem $Mk^2\frac{d\omega}{dt}$ jest równe momentowi siły ciężkości deski albo $M.g.\frac{a}{2}$.

Stąd

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt} = Mg\frac{a}{2}$$

Podstawiając tu $k^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$ otrzymamy $\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2a}$. Stąd i z (1) wypada $x > \frac{2a}{3}$.

3. Dwie tarcze cylindryczne o masach $m_1, m_2$ i promieniach $a_1, a_2$ położone w jednej płaszczyźnie pionowej mogą się swobodnie obracać około osi, przechodzących przez ich środki i prostopadłych do owej płaszczyzny. Na obwodach tarcz są umocowane końce wiotkiego, lekkiego pasa, daleko dłuższego, niż odległość pomiędzy punktami umocowania. Pas po części spoczywa na obwodach, a po części zwisa pomiędzy tarczami. Nadajemy pierwszej tarczy szybkość kątową $\omega$ i pozostawiamy układ samemu sobie. Jakie szybkości kątowe będą miały tarcze, gdy pas się wypręży?

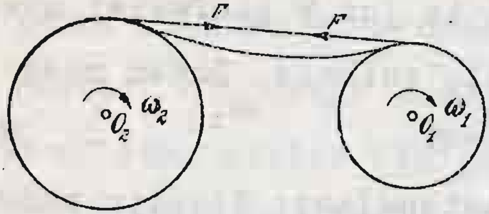


FIG. 90.

Dajmy na to, że te szybkości są równe odpowiednio $\omega_1$ i $\omega_2$ i że impuls naprężenia chwilowego wynosi $F$.

Wektor $H$ pierwszej tarczy względem $O_1$ przybrał przyrost równy momentowi impulsu $F$ względem $O_1$, zatem

$$m_1 \frac{a_1^2}{2}\omega_1 - m_1 \frac{a_1^2}{2}\omega = -F a_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Dla drugiej tarczy będzie

$$m_2 \frac{a_2^2}{2}\omega_2 = F . a_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Wreszcie mamy zależność $a_2\omega_2 = a_1\omega_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$

Z równań (1), (2) i (3) wyrugujemy $F$ i znajdziemy $\omega_1$ i $\omega_2$. Otrzymamy, że

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\omega \quad ; \qquad \omega_2 = \frac{a_1 m_1}{a_2(m_1 + m_2)}\omega$$

W przypadku gdy tarcze są jednakowe, to $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{2}$

Wyznaczmy jeszcze stratę siły żywej wskutek szarpnięcia w tym szczególnym przypadku. Początkowa siła żywa wynosi $\frac{m a^2\omega^2}{4}$, zaś po wyprężeniu pasa

$$2\,\frac{m a^2\omega^2}{16} = \frac{m a^2\omega^2}{8}$$

Strata wynosi więc $\frac{m a^2\omega^2}{4} - \frac{m . a^2\omega^2}{8} = \frac{m . a^2\omega^2}{8}$.

68. Wahadło fizyczne. Wahadłem fizycznem nazywa się ciało ciężkie, które może się swobodnie obracać około osi poziomej i na które działają jedynie reakcye

osi i siła ciążenia. Wahadło kołowe, złożone z punktu materyalnego na sznurze, które opisaliśmy w par. 11 nazywa się w przeciwstawieniu do fizycznego matematycznem albo prostem. Poprowadźmy w wahadle fizycznym przez środek ciężkości $S$ płaszczyznę, prostopadłą do osi. Nazwiemy tę płaszczyznę płaszczyzną wahań.

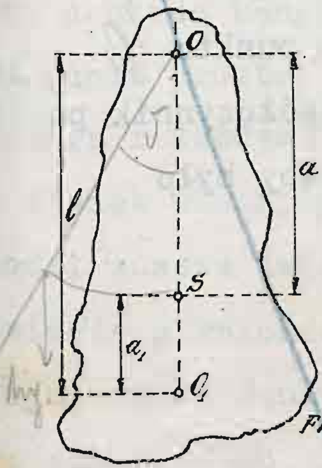

Fig. 91.

Punkt $O$, w którym płaszczyzna wahań przecina oś wahadła, nazywa się punktem zawieszenia. Odległość $OS$ oznaczymy przez $a$. Nadajmy wahadłu pewną szybkość kątową i pozostawmy je samemu sobie. Gdy prosta $OS$ odchyli się od pionu o kąt $\vartheta$, to moment siły ciążenia względem osi lub względem punktu zawieszenia będzie $M.g.a.\sin\vartheta$, a zatem w myśl par. 66

$$M\left(k^2+a^2\right)\frac{d\omega}{dt}=-M.g.a.\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$k$ oznacza tu ramię bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do osi obrotu, a zatem $k^2+a^2$ jest kwadratem ramienia bezwładności względem tej drugiej. Weźmy na prostej $OS$ punkt $O_1$ w odległości $l$ od $O$. Torem jego jest łuk koła, zatoczonego z $O$ promieniem $l$ w płaszczyźnie wahań. Za początek toru obierzmy punkt najniższy i oznaczmy przez $s$ łuk, przebieżony przez $O_1$

i mierzony od tego początku. W takim razie $\vartheta = \frac{s}{l}$,

$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{l} \frac{ds}{dt}$, zatem $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{l} \frac{d^2s}{dt^2}$

i równanie (1.) przybierze postać

$$\frac{k^2+a^2}{la} \frac{d^2s}{dt^2} = -g.\sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

Możemy to uważać za równanie ruchu punktu $O_1$. Obierzmy $O_1$ w taki sposób, aby współczynnik po lewej stronie był równy jedności, czyli aby było

$$l = \frac{k^2+a^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

W takim razie będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g.\sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

Jest to równanie ruchu wahadła prostego; mieliśmy je w par. 11. Tak więc punkt $O_1$ obrany w sposób powyższy porusza się tak, jak wahadło proste o długości $OO_1$. Innemi słowy, gdybyśmy całą masę ciała skoncentrowali w $O_1$, to punkt ten poruszałby się tak, jak obecnie. Mówimy o takim wahadle prostem, że jest równoważne z danem wahadłem fizycznem, a punkt $O_1$ nazywamy środkiem wahań wahadła fizycznego. Oczywiście okres wahań wahadła fizycznego musi być taki sam, jak okres wahań wahadła prostego równoważnego. Przy małej amplitudzie ten okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ /par.11/, czyli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+a^2}{ag}}$$

Oznaczmy jeszcze odległość $SO_1$ przez $a_1$. W takim razie $l = a + a_1$. Wstawiając to w (2) otrzymamy

$$aa_1 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ze związku tego widzimy, że punkty $O$ i $O_1$ odgrywają względem siebie role analogiczne; gdy $O_1$ uczynimy punktem zawieszenia, to $O$ stanie się środkiem wahań, a okres będzie taki sam, jak poprzednio. Każdy punkt prostej $OS$ możemy uczynić punktem zawieszenia i każdemu odpowiada inny punkt tej prostej, jako środek wahań; pomiędzy ich odległościami od $S$ zachodzi zawsze związek (3.). Punktowi $S$ odpowiada oczywiście nieskończenie odległy punkt prostej. Tego rodzaju odpowiadanie sobie punktów na prostej zowie się, jak wiadomo, inwolucją punktów, a punkt $S$ środkiem tej inwolucji, powiemy więc, że punkty zawieszeń są ze środkiem wahań w inwolucji.

Jest to tak zwana inwolucja eliptyczna, gdyż punkty podwójne są urojone.

Weźmy którąkolwiek parę punktów tej inwolucji i zbudujmy prostokąt z ich odległości od $S$; pole takiego prostokąta będzie według (3) równe $k^2$. Ze wszystkich prostokątów o jednakowym polu najmniejszy obwód posiada kwadrat, a z tego wynika, że te dwa odpowiadające sobie punkty inwolucji są najbliżej siebie położone, których odległości od $S$ są równe $k$. Gdy jeden z nich obierzemy za punkt zawieszenia, to długość prostego wahadła równoważnego, równa $2k$, będzie możliwie najmniejsza, a zatem otrzymamy możliwie najkrótszy okres wahań.

Zatoczmy z punktu $S$ w płaszczyźnie wahań okrąg promieniem $k$. Gdy obierzemy którykolwiek punkt tego okręgu za punkt zawieszenia, to zawsze otrzymamy jeden i ten sam okres wahań, a mianowicie dla danego wahadła i danej płaszczyzny wahań okres najkrótszy.

Punktom, położonym wewnątrz tego koła albo na zewnątrz odpowiadają okresy dłuższe.

W innych płaszczyznach wahań mogą istnieć punkty którym odpowiadają jeszcze krótsze okresy. Chcąc otrzymać dla danego wahadła okres najkrótszy, należy poprowadzić płaszczyznę wahań prostopadle do osi najmniejszego momentu środka ciężkości i w tej płaszczyźnie zatoczyć koło promieniem, równym ramieniowi bezwładności względem owej osi. Gdy osią wahadła jest prostopadła, w którymkolwiek punkcie tego okręgu do jego płaszczyzny, to okres wahań jest dla danego wahadła fizycznego najkrótszy.

69. Przykład. Łuk koła o promieniu $r$ może się wahać około osi, przechodzącej przez środek $A$ łuku /nie koła/ i prostopadłej do jego płaszczyzny. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Wyznaczymy naprzód środek wahań $B$. Oznaczmy odległość środka ciężkości $S$ wahadła od środka koła

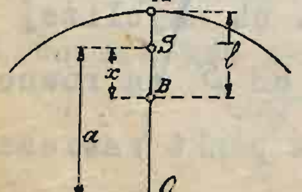

FIG. 92

$O$ przez $a$, odległość $AB$ przez $l$, wreszcie $SB$ przez $x$. Pomiędzy temi wielkościami zachodzi związek

$$(r-a)x = k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

gdzie $k$ oznacza ramię bezwładności względem $S$. Kwadrat ramienia bezwładności względem $O$ jest równy $r^2$ więc $k^2 = r^2 - a^2$. Podstawiając to w $(1)$ otrzymamy $x = r + a$. Z figury wprost wynika, że szukana długość $l$ wynosi $r = a + x$, czyli

$$l = 2r$$

70. Reakcye łożysk. Będziemy uważali oś, około której wiruje ciało sztywne, za sztywną linię materyalną należącą do owego ciała. Podobne urządzenie posiadają różne obracające się części maszyn, jak koła rozpędowe, pasowe, zębate i t.d. Są one zazwyczaj sztywno umocowane na wale, a wał jest osadzony w łożyskach nieruchomych.

Dajmy na to, że oś ciała wirującego jest osadzona w dwóch łożyskach; wystarcza to całkowicie do unieruchomienia jej w przestrzeni. Rola mechaniczna łożysk polega jedynie na tem, że wywierają one na oś pewne reakcye. Rozważymy teraz, w jaki sposób reakcye te dają się wyznaczyć. Aby ułatwić sprawę będziemy uważali łożyska za punkty; w takim razie każde z nich może wywierać tylko jedną siłę, i zadanie sprowadza się do wyznaczenia dwóch sił, przyłożonych w danych punktach osi.

I) Zbadamy naprzód przypadek szczególny, w którym na ciało nie działają żadne siły z wyjątkiem owych reakcyi. Wiemy z par. 66, że w takim razie szybkość kątowa jest stała. Oznaczymy ją przez $\omega$.

Obierzmy na osi obrotu środek redukcyi $O$ i wyznaczmy dlań wektory $G$ i $H$. Prócz tego zredukujmy obydwie reakcye łożysk do siły wypadkowej przyłożonej w $O$ i do pary. Tę siłę wypadkową oznaczymy przez $R$, a moment pary wypadkowej przez $N$. Siła $R$ nie wywiera wpływu na wektor $H$, gdyż moment jej względem $O$ jest zerem, z drugiej strony para $N$ nie oddziaływa wcale na wektor $G$, gdyż jej siły wytwarzają przyrosty równe i odwrotne tego wektora. Tak więc wektor $G$ zmienia się jedynie pod działaniem siły $R$, a wektor $H$ pod działaniem pary $N$, i zadanie nasze rozpada się na dwa zadania odrębne, a mianowicie wyznaczanie siły $R$ według zmian, zachodzących w wektorze $G$ i wyznaczeniu pary $N$ według zmian wektora $H$.

Wektor $G$ jest równoległy do szybkości środka ciężkości $S$ ciała, czyli prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez $S$ i oś obrotu. Co do wielkości $G=Ma\omega$, gdzie $M$ oznacza masę ciała i $a$ od-

FIG. 93

ległość środka ciężkości od osi. Można uważać, że wektor $G$ jest sztywno połączony z ciałem i obraca się wraz z niem około osi z szybkością kątową $\omega$.

W czasie $dt$ wektor $G$ obróci się o kąt $\omega dt$, czyli przybierze przyrost geometryczny $G\omega dt$ w kierunku, w którym porusza się koniec jego; przyrost ten jest równy popędowi $Rdt$, a zatem $R = G\omega$ czyli

$$R = M.a\omega^2.$$

Co do kierunku siła $R$ jest prostopadła do osi, leży w płaszczyźnie przechodzącej przez oś oraz środek ciężkości i jest odwrócona od tego punktu.

Do tego samego moglibyśmy dojść bardzo łatwo przy pomocy zasady ruchu środka ciężkości. Ponieważ $\omega$ jest stałe, zatem środek ciężkości posiada tylko przyśpieszenie normalne, skierowane prostopadle do osi obrotu i wynoszące $a\omega^2$. Przyspieszenie to nadała by masie $M$ siła $R$, z czego wynika ta sama wielkość jej i kierunek, które znaleźliśmy poprzednio.

Siłę $R$ wywierają obydwa łożyska razem; aby znaleźć jaki udział w tem bierze każde z nich, trzeba tylko rozłożyć $R$ na dwie składowe równoległe $R'$ i $R''$, przyłożone w łożyskach. Jeżeli środek redukcyi $O$ został obrany w jednem z łożysk, to łożysko to wywiera całkowitą siłę $R$.

Wektor $H$, podobnie jak $G$, nie zmienia się co do wielkości, lecz tylko wiruje około osi obrotu z szybkością kątową $\omega$. Rozłożymy go na dwie składowe, a mianowicie w kierunku osi obrotu i w kierunku prostopadłym do osi. Pierwszą oznaczymy przez $H_o$, drugą przez $H_p$. Składowa $H_o$ nie zmienia się ani pod względem wielkości, ani pod względem kierunku, a zatem $N$ wytwarza tylko przyrost składowej $H_p$. W czasie $dt$ wektor $H_p$ przybierze przyrost geometryczny $H_p.\omega.dt$ w kierunku szybkości końca i przyrost ten musi być równy $Ndt$, a zatem

$$N = H_p.\omega$$

Moment ten jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez wektor $H$ i oś obrotu, zwrócony zaś jest w stronę, w którą porusza się koniec $H_p$.

Siły, tworzące parę $N$/oznaczymy je przez $P', P''$/ są przyłożone w łożyskach; mając moment $N$, możemy je z łatwością wyznaczyć co do wielkości i kierunku.

Tak więc jedno łożysko wywiera siłę $R'$ i $P'$, a drugie $R''$ i $P''$. Znając te składowe wyznaczymy reakcyę wypadkową każdego łożyska. Jest ona oczywiście prostopadła do osi i obraca się koło niej z szybkością kątową $\omega$.

Rozważymy pewne ważne przypadki szczególne. Przypuśćmy naprzód, że obrany przez nas środek redukcyi $O$ jest punktem głównym osi obrotu. W takim razie wektor $H$ leży na osi obrotu, nie otrzymuje on żadnych przyrostów, a więc moment $N$ jest zerem. Istnieje tylko si-

$H_p = 0$ $H_o = const$

ła wypadkowa $R$ i łożyska wywierają reakcye równoległe $R'$, $R''$. Jeżeli przytem ten główny punkt $O$ leży w jednem z łożysk, to wywiera ono całkowitą siłę $R$. Drugie łożysko nie wywiera żadnej reakcyi, a więc nie odgrywa żadnej roli. Gdybyśmy je usunęli, to ciało poruszałoby się w dalszym ciągu zupełnie tak samo jak poprzednio. W tym przypadku, oś obrotu, jedna z osi głównych punktu $O$ nazywa się także osią swobodną tego punktu. Nazwa ta pochodzi stąd, że ciało bez zewnętrznego przymusu może się obracać około tej prostej, jeżeli tylko jest unieruchomiony punkt $O$. Gdybyśmy chcieli, aby ciało wirowało stale około jakiejś innej prostej, przechodzącej przez $O$, lecz nie będącej jego osią główną, to trzebaby ruch ten wymusić, ustawiając drugie łożysko, albo wywierając na oś odpowiednie siły.

Przypuśćmy teraz, że środek ciężkości ciała leży na osi obrotu. Jeżeli ta prosta nie jest osią główną ciała, to jak wiemy, nie posiada ona punktu głównego w odległości skończonej, a zatem moment $N$ nie może być
bo przyśpieszenie śr. ciężk. = 0
zerem. Natomiast nie istnieje siła wypadkowa $R$, gdyż środek ciężkości pozostaje w spokoju, a zatem wektor $G$ jest stale równy zeru. Tak więc w tym razie łożyska wywierają reakcye $P'$, $P''$ równe i odwrotne.

Jeżeli oś obrotu jest osią główną środka ciężkości, to zarówno siła $R$, jak i moment $N$ są zerami. Obydwa łożyska nie wywierają na oś żadnych reakcyi i możnaby je usunąć. Dlatego też osi główne środka ciężkości nazywają się także osiami swobodnemi ciała.

Twierdzenia powyższe wyrażają zasadniczą właściwość dynamiczną osi głównych.

71. Reakcye łożysk w ruchu przyśpieszonym. Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym na wirujące ciało działają siły $P_1, P_2, \ldots$ . Będziemy postępowali, jak poprzednio. Obieramy na osi obrotu środek redukcyi $O$ wyznaczamy dlań wektory $G$ , $H$ i redukujemy siły $P_1$, $P_2, \ldots$ oraz reakcye łożysk. ~~Równe~~ sprowadzają się do siły $Q$ i pary o momencie $L$ , a drugie do siły $R$ i momentu $N$ . $P_1 P_2 \ldots$ | $Q$ par $L$ | Reakcje | $R$ par $N$

Otrzymaliśmy wektory $G, H, Q, R, L$ i $N$ posiadające wspólny początek $O$ , z nich $G$ i $N$ są prostopadłe do osi, gdyż $G$ jest równoległe do szybkości środka ciężkości, a siły, tworzące parę $N$ są przyłożone w punktach osi i moment musi być do osi prostopadły. Każdy z wektorów pozostałych rozkładamy na dwie składowe w kierunku osi i w kierunku prostopadłym, odznaczając te składowe odpowiednio wskaźnikami $o$ i $p$.

Wypada zwrócić uwagę, że $L_o$ jest to suma momentów sił $P_1, P_2, \ldots$ względem osi obrotu, a zatem

Ma wpływ na $H_o$ ←
$$M.k^2\frac{d\omega}{dt}=L_o \quad .$$

Na wektor $G$ wywierają wpływ tylko siły, a na wektor $H$ tylko momenty, ale siły $Q_o$ i $R_o$ nie wywierają wpływu nawet na wektor $G$ , gdyż ten nie przybiera

$d(mav) = Pdt$ $|G|$

$mav = Pdt$ $ma^2\frac{d\omega}{dt} = Pr$

Wektor G jest prostopadły do OA

przyrostów w kierunku osi. - ponieważ ruch jest obrotowy

Z tego wynika, że siły te się równoważą, a zatem reakcya osiowa $R_o$ jest równa $Q_o$ , czyli sumie rzutów sił $P_1, P_2, \ldots$ na oś obrotu.

Tę reakcyę $R_o$ wogóle wywierają obydwa łożyska razem, ale nie da się rozstrzygnąć, jaki w tem udział bierze każde z nich, jeżeli uważamy oś za ciało sztywne. Siły osiowe, wywierane przez poszczególne łożyska, należą do t. zw. sił statycznie niewyznaczalnych. /por. prz.3 par. 42 cz.I/. Łożyska można urządzić w taki sposób, aby tylko jedno z nich wywierało całkowitą reakcyę $R_o$ i tak też zazwyczaj dzieje się w technice.

Wektor $G$ zmienia się nietylko co do kierunku, ale i co do wielkości; w czasie $dt$ przybierze on przyrost prostopadły $G.\omega.dt = M.a.\omega^2 dt$ , a obok tego przyrost $dG = M a d\omega$ w swym kierunku. Pierwszy z tych przyrostów leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości i oś obrotu, a drugi jest do niej prostopadły. Wytwarzają je siły $Q_p$ i $R_p$ , a zatem sumy rzutów tych sił na kierunki przyrostów powinny być odpowiednio równe $M.a.\omega^2$ i $M.a.\frac{d\omega}{dt}$ . Z tego wynikają dwa równania, określające wielkość i kierunek reakcyi $R_p$ .

W analogiczny sposób wyznacza się moment $N$ , który łącznie ze znanym momentem $L_p$ wytwarza przyrosty $H_p.\omega.dt$ oraz $dH_p$ wektora $H_p$ . Jeżeli $O$ jest punktem głównym osi, to $H_p$ jest zerem i nie przybiera żadnych przyrostów, a zatem moment $N$ musi być równy i odwrotny do $L_p$.

Znając $R_p$ i $N$ wyznaczymy, jak poprzednio, reakcye, które łożyska wywierają w kierunkach prostopadłych do osi.

Często bywa dogodny inny sposób postępowania, opisując go pominiemy siły osiowe $Q_o$ i $R_o$, z któremi załatwiliśmy się już wyżej.

Wyznaczamy naprzód takie dwie siły, które przyłożone do osi w łożyskach, wytworzyłyby same, bez udziału sił $P_1, P_2, \ldots$ wszystkie przyrosty, jakie istotnie przybierają wektory $G$ oraz $H_p$. Siły te nazwiemy *reakcyami dynamicznemi łożysk*. Oczywiście reakcye dynamiczne łącznie z parą $L_o$ nadałyby ciału taki sam ruch, jaki posiada ono w rzeczywistości.

$-L_p - Q_p + Q_p + L_p + L_o = L_o$

Następnie wyznaczamy dwie inne siły, które przyłożone w łożyskach zrównoważyłyby siłę $Q_p$, oraz parę $L_p$. Takie siły nazwiemy *reakcyami statycznemi*. Reakcye statyczne wraz z siłami $P_1, P_2, \ldots$ są oczywiście równoważne z parą $L_o$.

stałe co do wielkości i kierunku

$L_p$ $Q_p$ $L_o$ przy $\omega$ = const

Możemy uważać, że jednocześnie działają siły $P_1, P_2, \ldots$ reakcye statyczne i reakcye dynamiczne, gdyż siły $P_1, P_2, \ldots$ z reakcyami statycznemi sprowadzają się do pary $L_o$, a ta para łącznie z reakcyami dynamicznemi wywołuje dany ruch ciała. Z tego wynika, że reakcya, którą istotnie wywiera łożysko jest wypadkową reakcyi statycznej i

$p + Q_p + L_o - L_p - Q_p +$ 

$+ \; Q_p - R_p^{dyn} + N + L_p =$ Rea jak pow...

reakcyi dynamicznej.

Łatwo jest zrozumieć, że ani reakcye statyczne, ani reakcye dynamiczne nie zależą od położenia środka redukcyi $O$, możemy przeto dla każdego z tych rodzajów redukcyi obrać inny punkt redukcyi, co pozwala nieraz znacznie uprościć sprawę.

Przypuśćmy dla przykładu, że oś obrotu posiada punkt główny $O$, i że na ciało działa tylko jedna siła $P$, prostopadła do osi. Za środek redukcyi dla reakcyi dynamicznych obierzemy punkt $O$. Wektor $H$ leży na osi obrotu, a zatem reakcye dynamiczne posiadają jedną wypadkową $R$, przyłożoną w $O$ i wytwarzającą obydwa przyrosty wektora $G$. Za środek redukcyi reakcyi statycznych obierzemy punkt $O'$, w którym oś przecina prostopadłą do niej płaszczyznę, poprowadzoną przez $P$. W takim razie zamiast siły $P$ otrzymamy parę, której moment $L$ leży na osi obrotu, i siłę $P$, przyłożoną w $O'$, łatwo jest dojść, że reakcye statyczne posiadają także wypadkową, przyłożoną w $O'$, równą i odwrotną do $P$. Rozłożywszy każdą z tych wypadkowych na składowe równoległe przyłożone w łożyskach, znajdziemy reakcyę istotną każdego łożyska.

72. Przykłady. 1. Koło rozpędowe zostało zmontowane w taki sposób, że płaszczyzna jego tworzy z osią wału kąt $\alpha$. Moment bezwładności koła względem średnicy $= A$ i względem osi symetryi $= C$. Wyznaczyć moment

pary, działającej na łożyska, gdy wał posiada stałą szybkość kątową $\omega$.

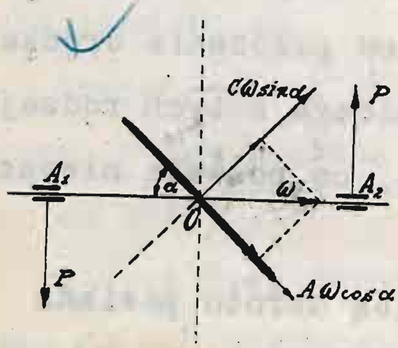


FIG. 94.

Obierzmy środek ciężkości koła $O$ za środek redukcyi i wyznaczmy wektor $H$. Osiami głównemi punktu $O$ są: oś symetrji i którakolwiek średnica koła. Rozłóżmy nieznany wektor $H$ w tych dwóch kierunkach. Pierwsza z nich jest równa $C\omega.\sin\alpha$, a druga $A.\omega.\cos\alpha$.

Składowa wektora $H$ w kierunku prostopadłym do osi $A_1A_2$ czyli $H_p$ wynosi zatem $C\omega.\sin\alpha\cos\alpha - A\omega.\sin\alpha\cos\alpha$ albo $H_p = (C-A)\omega.\sin\alpha.\cos\alpha$. W $dt$ sek. składowa ta otrzyma przyrost $H_p\omega\,dt$, równy $N dt$, gdzie $N$ jest momentem szukanym. Zatem $N = H_p\omega = (C-A)\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha$ Siła pary wynosi

$$P = \frac{N}{a} = \frac{(C-A).\omega^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{a}$$

gdzie $a$ oznacza odległość pomiędzy łożyskami.

2. Sztaba, o długości $2b$, ważąca $Q$, jest umocowana w punkcie środkowym $O$ na osi poziomej i tworzy z nią kąt $\alpha$. Oś posiada dwa łożyska, każde w odległości $a$ od $O$, i obraca się z szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć reakcye łożysk.

Reakcye statyczne są obydwie skierowane pionowo w górę i każda z nich wynosi $\frac{Q}{2}$. Aby znaleźć reakcye

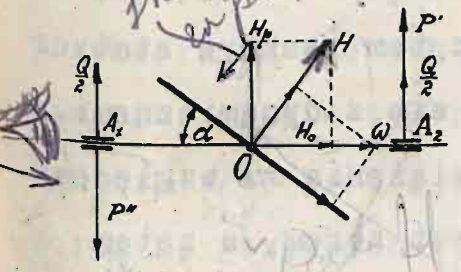


FIG. 95.

dynamiczne, wyznaczamy naprzód wektor $H$. Osiami głównemi punktu $O$ są: linia sztaby i prostopadła do niej, wzniesiona w $O$. Składowa wektora $H$ w kierunku sztaby jest zerem, bo moment bezwładności sztaby względem jej osi $=0$, zatem wektor $H$ ma kierunek drugiej osi głównej, czyli jest prostopadły do sztaby.

Pod względem wielkości jest on równy $H = \frac{Q}{g} \cdot \frac{b^2}{3} \omega \sin\alpha$. Rozkładamy go na składowe $H_0$ i $H_p$. Z tych pierwsza nie ulega zmianie, a druga, czyli $H \cos\alpha$ w czasie $dt$ przybierze przyrost $H \cos\alpha . \omega . dt$; na rysunku ten przyrost jest skierowany od widza. Reakcye dynamiczne składają się z pary sił o momencie $H \omega . \cos\alpha$, a każda z sił pary $= \frac{Q . b^2 \omega^2 . \sin\alpha . \cos\alpha}{6 . a . g}$

Siły te $P'$ i $P''$ leżą zawsze w płaszczyźnie przechodzącej przez oś i sztabę.

Całkowita reakcya każdego łożyska zmienia się w zależności od położenia sztaby, osiągając maksymum lub minimum, gdy sztaba przechodzi przez płaszczyznę pionową przeprowadzoną przez oś.

3. Prosty kołowy cylinder o masie $m$, promieniu $a$ i wysokości $h$ wiruje około tworzącej $AB$, która zachowuje położenie pionowe, jakkolwiek tylko górny koniec $A$ jest umocowany. Wyznaczyć reakcyę w tym punkcie

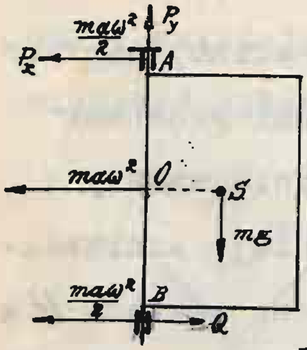

FIG. 96.

Można uważać, że i w $B$ istnieje łożysko, lecz tam reakcye statyczne równoważą się z dynamicznemi. Moment siły ciążenia $mg$ względem osi obrotu jest zerem, a zatem szybkość kątowa cylindra jest stała i równa, dajmy na to $\omega$ .

Wyznaczymy naprzód reakcye statyczne łożysk. Obierzmy w tym celu na osi dowolny środek redukcyi i przyłóżmy doń dwie siły równe i odwrotne, z których każda jest równa i równoległa do $mg$. Wraz z siłą $mg$, przyłożoną w $S$ , dadzą one siłę $mg$ przyłożoną w owym środku redukcyi i parę, o momencie prostopadłym do osi czyli $L_p$ .

Reakcye statyczne łożysk mają zrównoważyć tę siłę i tę parę lub wprost siłę $mg$, przyłożoną w $S$.

Reakcyę w $A$ rozłóżmy na składowe $P_x$ i $P_y$ w kierunku osi i w kierunku prostopadłym, a reakcyę łożyska $B$ /jest ona prostopadła do osi/ oznaczmy przez $Q$ . Weźmy rzuty na kierunek poziomy i pionowy oraz momenty względem $A$. Otrzymamy

$$P_x = Q \quad ; \quad P_y = mg \quad ; \quad Q = \frac{mg.a}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /1/$$

Wyznaczymy teraz reakcye dynamiczne. Oś obrotu, jako równoległa do osi głównej cylindra posiada punkt główny, jest nim mianowicie rzut środka ciężkości na $AB$ . Oznaczmy go literą $O$ i obierzmy za środek redukcyi. Ponieważ cały wektor $H$ leży na osi, więc nie przybiera on żadnych przyrostów, a zatem reakcye dynamiczne mają w tym razie wytworzyć tylko przyrost wektora $G$. Środek ciężkości ma tylko przyśpieszenie normalne /szybkość kątową jest stała/, zatem całkowita reakcya dynamiczna łożysk jest równa $ma\omega^2$. Na każde łożysko przypada połowa tej reakcyi czyli $\frac{ma\omega^2}{2}$ Reakcya wypadkowa łożyska $B$ wynosi $Q-\frac{ma\omega^2}{2}$, ale w myśl założenia ma ona być zerem, a więc $Q-\frac{ma\omega^2}{2}=0$ stąd uwzględniając $(1.)$ otrzymamy $\omega^2=\frac{2g}{h}$.

Składowa pozioma reakcyi łożyska $A$ jest równa $P_x+\frac{ma\omega^2}{2}$, a pionowa $=P_y$. Gdy podstawimy zamiast $P_x$ i $P_y$ odpowiednie wartości z $(1.)$, to znajdziemy, że całkowita reakcya łożyska $A$ jest $=\frac{mg}{h}\sqrt{h^2+4a^2}$.

4. Jednorodna płyta posiada kształt prostokątnego, równoramiennego trójkąta $ABC$. Kąt $B$ jest prosty i $AB=a$. Płyta wiruje około przyprostokątnej $AB$ zachowującej położenie pionowe i tylko górny koniec $B$ jest umocowany. Wyznaczyć szybkość kątową.

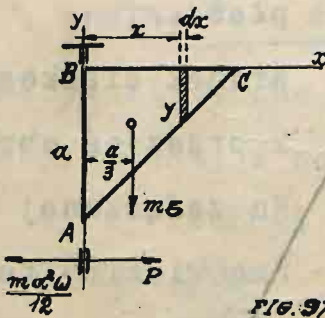


FIG. 37

Postępujemy tak samo, jak w przy poprzedzającym, przypuszczamy więc, że w $A$ istnieje łożysko, lecz tam reakcje statyczne równoważą się z dynamicznemi.

Wyznaczamy naprzód reakcye statyczne. Za środek redukcyi obieramy punkt $B$ i przykładamy do niego dwie siły równe i odwrotne do $mg$. Otrzymamy, jak poprzednio, że reakcya statyczna łożyska $A$ wynosi $P=\frac{mg}{3}$. Aby wyznaczyć reakcye dynamiczne wyznaczamy wektor $H$ względem środka redukcyi $B$, a właściwie składową jego $H_x$, czyli moment ilości ruchu względem boku $BC$. W tym celu dzielimy całą płytę na nieskończenie wązkie paski równoległe do osi obrotu. Masa każdego z nich wynosi $y.dx\cdot\frac{2m}{a^2}$, a szybkość jest równa $\omega x$. Stąd $dH_x=\frac{2m}{a^2}y.dx.\omega x^2$, a podstawiając $y=a-x$ i całkując w granicach od $0$ do $a$ otrzymamy $H_x=\frac{m\omega a^2}{12}$.

Przyrost geometryczny tej składowej wynosi $H_x\omega dt$ czyli $\frac{m.\omega^2.a^2.dt}{12}$. Z drugiej strony przyrost ten jest równy $N.dt$, gdzie $N$ jest momentem reakcyi dynamicznej, zatem $\frac{m.\omega^2.a^2.dt}{12}=N.dt$ skąd $N=\frac{m.\omega^2 a^2}{12}$

Każda siła tej pary jest $=\frac{m.\omega^2 a}{12}$, więc reakcya całkowita łożyska $A$ $=\frac{m\omega^2 a}{12}-\frac{mg}{3}=0$.

Stąd $\omega=2\sqrt{\frac{g}{a}}$.

**73. Środek uderzeń.** Poprowadźmy w ciele wirującem płaszczyznę $F$ przez środek ciężkości $S$ i przez oś obrotu $u$. Na załączonej figurze widzimy tę płaszczyznę w perspektywie.

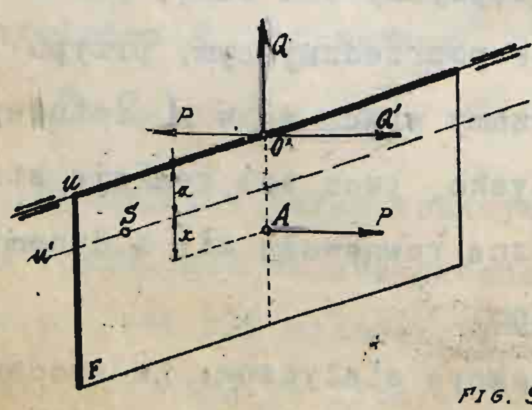


FIG. 98

Przypuśćmy, że na ciało działa jedna siła $P$, prostopadła do płaszczyzny $F$ i przyłożona w jej punkcie $A$. Oznaczmy odległości punktów $S$ i $A$ od osi $u$ odpowiednio przez $a$ i $a+x$, a ramię bezwładności względem prostej $u'$, przechodzącej przez $S$ i równoległej do $u$ przez $k$. W takim razie będzie

$$M(k^2+a^2)\frac{d\omega}{dt}=P(a+x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dajmy na to, że oś obrotu posiada punkt główny, i że jest nim rzut $O$ punktu $A$ na tę prostą. więc $H = H_0 =$ const bo na osi

Obierzmy $O$ za środek redukcyi dla wszystkich reakcyi. Reakcye dynamiczne sprowadzają się do jednej siły wypadkowej; rozłożymy ją odrazu na składowe $Q$ i $Q'$, z których pierwsza leży w płaszczyźnie $F$, a druga jest do niej prostopadła. Bo przyrost obejmuje tylko G - są to składowe styczna i normalna

Znajdziemy, że

$$(Q_p = Q') \qquad Q=Ma\omega^2 \quad (Q=R_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

a $Q'=Ma.\frac{d\omega}{dt}$, rugując zaś $\frac{d\omega}{dt}$ przy pomocy $(1)$ otrzymamy

$$Q'=\frac{P.a.(a+x)}{k^2+a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Reakcye statyczne sprowadzają się również do jednej wypadkowej, równej i odwrotnej do siły $P$. Wypadkową siły $Q'$ i tej reakcyi statycznej oznaczymy przez $R$, oczywiście $R=Q'-P$, albo, gdy uwzględnimy $(3)$

$$R=\frac{P(ax-k^2)}{k^2+a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Tak więc całkowite reakcye łożysk sprowadzają się do dwoch sił $Q$ i $R$. Pierwsza nie zależy bezpośrednio od siły $P$, lecz tylko od szybkości kątowej, którą ciało posiada w danej chwili, natomiast druga jest niezależna od szybkości kątowej, a zależy jedynie od siły $P$. Jeżeli ciało pozostawało w spokoju, gdy siła $P$ zaczęła działać, to w pierwszej chwili $Q$ było zerem, a $R$ odrazu osiągnęło wartość wymienioną w (4)

Jeżeli punkt $A$ jest tak położony, że $x = \frac{k^2}{a}$ . . (5) to $R=0$ i reakcye łożysk sprowadzają się do siły $Q$. Można powiedzieć, że siła $P$ w tym przypadku nie oddziaływa wcale na łożyska. Taki punkt $A$ nazywa się środkiem uderzeń. Gdy porównamy (5) z (3) w par. 68, to przekonamy się, że środek uderzeń leży w tej samej odległości od osi, w której leżałby środek wahań, gdyby dano ciało uczynić wahadłem fizycznem, pozostawiając je na tej samej osi. Jeżeli oś obrotu jest równoległa do osi głównej ciała to, jak wiemy, punkt główny $O$ znajduje się w rzucie środka ciężkości, a zatem środki uderzeń i wahań leżą razem.

Jeżeli $x$ jest większe od $\frac{k^2}{a}$ t.j. jezeli punkt przyłożenia siły $P$ leży dalej od osi, niż środek uderzeń, to $R$ jest dodatnie; znaczy to, że łożyska wywierają na oś siły prostopadłe do płaszczyzny $F$ w kierunku siły $P$. Jeżeli punkt przyłożenia siły $P$ znajduje się bliżej osi, niż środek uderzeń, albo po drugiej stro nie osi, to reakcye łożysk mają kierunek odwrotny.

Środek uderzeń istnieje tylko w takim razie, gdy oś obrotu posiada punkt główny.

Twierdzenia powyższe dotyczą oczywiście w równej mierze sił chwilowych, i właśnie w tym przypadku posiadają donioslość szczególną. Gdy ciało, osadzone na osi dozna uderzenia w środku uderzeń w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $F$, to reakcye łożysk w pierwszej chwili nie doznają zmiany. Jeżeli ciało było poprzednio w spokoju, i żadne inne siły nań nie działają, to, podczas uderzenia, łożyska nie wywierają żadnych reakcyi, a zatem nie odgrywają żadnej roli. Gdyby ciało było swobodne, t. zaczęłoby się ono obracać około tej samej osi $u$; byłaby to pierwsza oś chwilowa.

Dla przykładu wyobraźmy sobie wahadło fizyczne urządzone na podstawie ruchomej np. na wózku kolejowym, i niech oś będzie prostopadła do szyn. Przypuśćmy, że wahadło pozostaje w spokoju, gdy uderza je pocisk, biegnący z szybkością, równoległą do szyn. Jeżeli pocisk trafi niżej od środka uderzeń, to łożyska, połączone sztywno z wózkiem wywrą na oś w krótkim okresie uderzenia bardzo wielkie reakcye czyli siły chwilowe, w kierunku szybkości pocisku, a zatem oś wywrze na łożyska siły odwrotne i wózek potoczy się w kierunku odwrotnym do szybkości pocisku. Jeżeli pocisk trafi wyżej od środka uderzeń, to wózek potoczy się w tę samą stronę, w którą biegł pocisk. Jeżeli wreszcie uderzenie nastąpi w samym środku uderzeń, to wózek w pierwszej chwili pozostanie w spokoju.

Niech będzie jeszcze cienka płyta, leżąca na płaszczyźnie poziomej. Wprawmy ją w ruch zapomocą uderzenia poziomego, skierowanego wzdłuż pewnej określonej prostej $p$. Twierdzenia powyższe pozwalają łatwo wyznaczyć najpierwszy środek chwilowy $O$.

Gdybyśmy osadzili płytę na pionowej osi $u$, przechodzącej przez ten środek chwilowy, to w pierwszej chwili ruch płyty byłby taki sam, jak i bez tej osi. Z tego wynika, że oś $u$ nie wywiera podczas uderzenia żadnych reakcyi, a więc uderzenie nastąpiło w jej środek uderzeń $A$ i środek ten jest oczywiście rzutem punktu $O$, na prostą $p$. Prosta $AO$ przechodzi przez środek ciężkości $S$, gdyż punkt ten musi leżeć w płaszczyźnie, przechodzącej przez $A$ i $u$. Tak więc znajdziemy punkt $A$, prowadząc prostopadłą z $S$ do $p$, a środek chwilowy leży na tejże prostopadłej po drugiej stronie środka ciężkości w odległości $\frac{k^2}{AS}$.

Narzędzia, przeznaczone do uderzeń, jak młoty, siekiery i t.d. powinny być tak urządzone, aby środek uderzeń przypadał mniej więcej w tem miejscu, które obejmuje dłoń robotnika. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to ręka doznaje nieprzyjemnych wstrząśnień.

74. Przykłady. 1. Drzwi prostokątne, o szerokości $2b$ są osadzone w zawiasach, umieszczonych na jednym pionie. W którym punkcie drzwi należy przymocować kołek gumowy, zapobiegający uderzeniom drzwi o ścianę, aby podczas zetknięcia kołka ze ściana zawiasy nie doznały wstrząśnień?

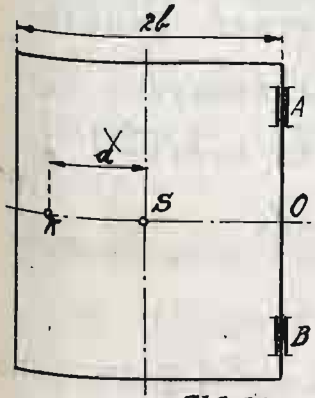

FIG. 99.

Oczywiście kołek powinien być przybity w środku uderzeń drzwi. Środek ten istnieje, bo oś obrotu, jako prosta, równoległa do osi głównej ciała posiada punkt główny, położony na prostopadłej z $S$ do $AB$. Dajmy na to, że tym środkiem uderzeń jest punkt $K$, odległy o $a$ od $S$.

Pomiędzy $a, b$ i ramieniem bezwładności $k$ drzwi względem pionu, przechodzącego przez środek ciężkości zachodzi związek $a.b = k^2$, a ponieważ $k^2 = \frac{b^2}{3}$, zatem $a = \frac{b}{3}$.

2. Kula bilardowa o promieniu $a$ leży na płaszczyźnie poziomej. W który punkt kuli należy uderzyć kijem w kierunku poziomym, aby kula odrazu zaczęła się toczyć?

Punkt zetknięcia $A$ kuli z płaszczyzną ma po uderzeniu posiadać szybkość zero, a zatem kula powinna za-

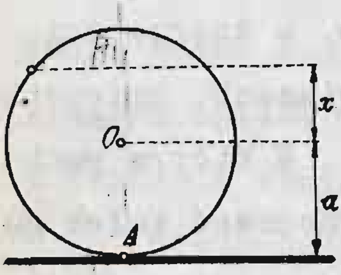


FIG. 100.

gząć się obracać około osi poziomej $u$ przechodzącej przez $A$. Oś obrotu posiada punkt główny, więc kula posiada środek uderzeń. Oznaczmy jego odległość od płaszczyzny bilardu przez $x+a$, to będzie:

$$ax = \frac{2a^2}{5} \quad /\text{par. } 42, e/;$$

stąd $\quad x = \frac{2a}{5} \quad$ i $\quad a+x = \frac{7a}{5}$.

3. Sztaba jednorodna $AB$ o długości $=2a$ jest osadzona na osi do niej prostopadłej i przecinającej ją w punkcie $O$. Koniec $A$ otrzymał uderzenie prostopadłe do $AB$. Wyznaczyć tak położenie punktu $O$, aby podczas uderzenia sztaba otrzymała jaknajwięcej siły żywej.

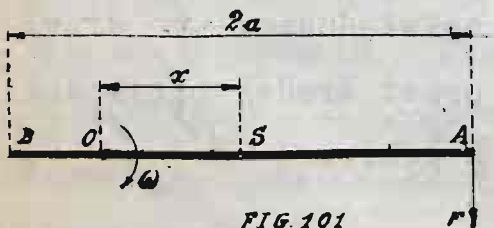


FIG. 101

Oznaczmy środek sztaby przez $S$, odległość $OS$ przez $x$, a impuls siły chwilowej przez $F$ i przypuśćmy, że po uderzeniu sztaba otrzymała szybkość kątową $\omega$. Moment ilości ruchu względem osi obrotu jest równy $M.(k^2+x^2).\omega$, gdzie $k$ jest ramieniem bezwładności sztaby względem tej osi. Ten moment powstał pod działaniem siły $F$, zatem

$$M.(k^2+x^2).\omega = F.(a+x) \quad \text{skąd:} \quad \omega = \frac{F(a+x)}{M.(k^2+x^2)}.$$

Siła żywa sztaby po uderzeniu wynosi

$$L = \frac{M(k^2+x^2)F^2(a+x)^2}{2M^2(k^2+x^2)^2} = \frac{F^2(a+x)^2}{2M(k^2+x^2)} \quad . \; . \; . \; (1.)$$

Chodzi o maksymum wartości $L$. Aby je wyznaczyć różniczkujemy $(1.)$ względem $x$ i przyrównywujemy pochodną do zera. Wypadnie

$$(a+x)(k^2-ax)=0$$

Stąd albo $x=a$, czyli oś obrotu przechodzi przez $A$; odpowiada to minimum $L$, albo też $k^2-ax=0$; stąd $x=\frac{k^2}{a}=\frac{a}{3}$. Odpowiada to oczywiście szukanemu maksymum.



## ROZDZIAŁ VI.

## RUCH PŁASKI CIAŁA SZTYWNEGO.

75. Równania zasadnicze. Przypuśćmy, że ruch ciała sztywnego jest wciąż równoległy do płaszczyzny $F$. Będziemy uważali, że płaszczyzna ta przechodzi przez środek ciężkości ciała i że w niej działają na ciało siły $P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots$

Ruch ciała rozłożymy na dwa ruchy składowe, postępowy, odbywający się wciąż z szybkością środka ciężkości i obrotowy około tego środka. Aby wyznaczyć ruch postępowy czyli ruch środka ciężkości, obierzmy w płaszczyźnie $F$ prostokątny układ współrzędnych, współrzędne środka ciężkości oznaczymy przez $x_0, y_0$, a masę ciała przez $M$. W myśl zasady ruchu środka ciężkości