działania jest jedną i tą samą prostą /w danym wypadku FA i CG będą leżeć na jednej prostej/, to układ jest w równowadze.

A więc aby płaski układ sił był w równowadze, to potrzeba i wystarcza, by obydwa wieloboki t.j. wielobok sił i wielobok sznurowy zamykały się.

§ 5. STOPNIE SWOBODY.

Mamy punkt ruchomy A. Przypuśćmy, że może on poruszać się tylko po pewnej linji. Obierzmy na tej linji nieruchomy punkt O; każdorazowej odległości A od O odpowiada pewna wartość x, a więc położenie A określa się całkowicie przy pomocy jednego parametru x, czyli mówimy, że punkt A posiada jeden stopień swobody.

Niech będzie znów ruchomy punkt A, który może dowolnie poruszać się w jednej płaszczyźnie.- Obierzmy w tej płaszczyźnie prostokątny układ spółrzędnych xoy. Wtedy położenie A możemy określić zapomocą dwóch współrzędnych, czyli parametrów x i y i mówimy, że punkt A posiada 2 stopnie swobody.

Gdy zaś punkt A może poruszać się swobodnie w przestrzeni, to położenie jego określa się trzema parametrami / x, y i z / czyli posiada on 3 stopnie swobody.

Niech będzie ciało, które może poruszać się w płaszczyźnie /np. cienka płyta/ i którego jeden punkt jest nieruchomy. Może ono obracać się tylko koło punktu nieruchomego i położenie daje się określić zapomocą jednego parametru /kąta/ czyli posiada ono jeden stopień swobody.

Jeśli to samo ciało może swobodnie poruszać się w płaszczyźnie, to oczywiste posiada ono 3 stopnie swobody, gdyż punkt, który przedtem był nieruchomy, posiada dwa stopnie swobody, zaś ciało względem punktu jeden stopień swobody.

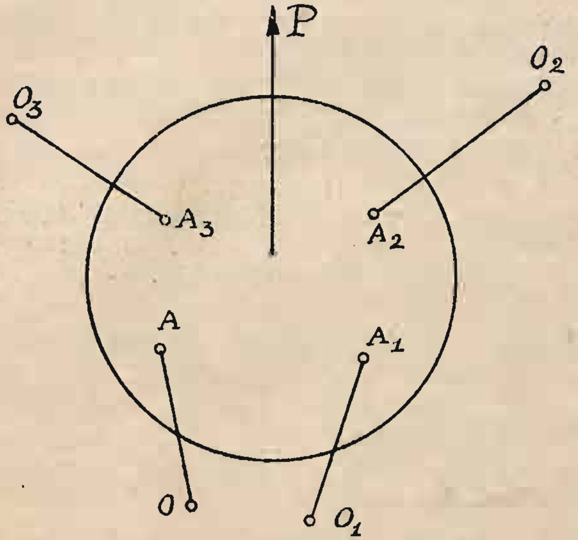
Gdy mamy ciało osadzone na nieruchomej osi, to ono może obracać się tylko koło tej osi i do wyznaczenia położenia tego ciała potrzebny jeden parametr /kąt/ czyli posiada ono jeden stopień swobody.

Jeśli ciało posiada jeden punkt nieruchomy O, to ma ono 3 stopnie swobody, gdyż względem prostej, poprowadzonej przez punkt O posiada jeden stopień swobody, prosta zaś, przechodząca przez punkt nieruchomy, określa się za pomocą dwóch parametrów /kątów/ czyli posiada dwa stopnie swobody.

Wreszcie ciało, poruszając się zupełnie swobodnie w przestrzeni posiada sześć stopni swobody, bo gdy obierzemy dowolny punkt tego ciała O, to posiada on 3 stopnie swobody, ciało zaś względem punktu O posiada też 3 stopnie swobody, czyli razem ciało posiada 6 stopni swobody.

Pojęcie stopnia swobody jest ściśle związane z zagadnieniem równowagi ciała. Jeżeli chcemy, by ciało pozostało w spoczynku, czyli było w równowadze, należy odebrać ciału wszystkie stopnie swobody. Stopnie swobody można odebrać ciału przez połączenie z innemi ciałami nieruchomemi. Połączenia mogą być różne, t.zn. odbierające ciału jeden, dwa i t.d. stopni swobody. Jeżeli połączeń wprowadzimy więcej niż potrzeba do zniesienia istniejących stopni swobody, to równowaga oczywiście zostanie zachowana, lecz siły, występujące w połączeniach czyli reakcje są statycznie niewyznaczalne, t.zn. będziemy mieć więcej niewiadomych niż równań równowagi, jakie moglibyśmy wypisać dla danego ciała.

Przypuśćmy, że mamy płytę mogącą poruszać się w płaszczyźnie /rys.23/. Dowolny punkt płyty A posiada 2 stopnie swobody; jeżeli go połączymy przegubowo z nieruchomym punktem O zapomocą pręta, to punkt A będzie posiadać jeden tylko stopień swobody, mianowicie może poruszać się na



Rys. 23.

okręgu koła, zatoczonym z O promieniem OA, czyli tym sposobem odebraliśmy płycie jeden stopień swobody. Jeżeli jeszcze połączymy tak samo dwa inne punkty płyty A_1 i A_2 z punktami nieruchomemi O_1 i O_2, to płycie odbierzemy wszystkie stopnie swobody i będzie ona nieruchoma. Przypuśćmy teraz, że na płytę działa siła P, wtedy pręty OA, O_1A_1, O_2A_2 wywrą pewne siły, które zrównoważą siłę P i które łatwo wyznaczymy, gdyż siły te działają w kierunkach prętów. P rozkładamy na trzy składowe w kierunkach OA, O_1A_1 i O_2A_2 i składowe te będą równe i odwrotne do reakcji prętów. Jeśli wprowadzimy jeszcze jedno połączenie O_3A_3, to równowaga nie będzie zachwiana, lecz siły działające w prętach OA, O_1A_1, O_2A_2 i O_3A_3 nie dadzą się statycznie

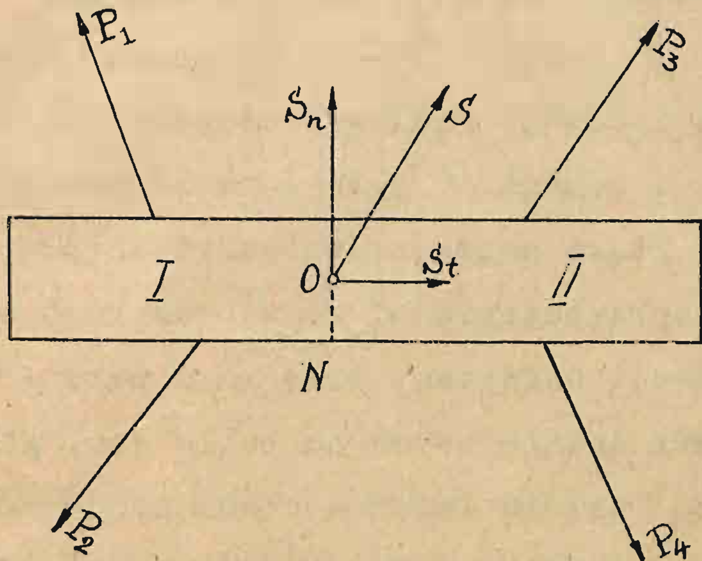
----

wyznaczyć czyli będą statycznie niewyznaczalnemi.

Przypuśćmy znów, że mamy płytę i jej punkt O Jeżeli punkt O unieruchomimy t.j. jeżeli osadzimy płytę na nieruchomej osi O, to płyta straci 2 stopnie swobody. Gdy odbierzemy płycie jeszcze jeden stopień swobody przez połączenie dowolnego jej punktu A_1 z punktem nieruchomym O_1, to będzie ona nieruchoma. Przypuśćmy teraz, że na płytę działa siła P, to oś w punkcie O i sztaba O_1A_1 będą wywierać pewne reakcje, które możemy wyznaczyć, gdyż niema zbytecznych połączeń. W tym celu rozkładamy siłę P na dwie składowe, z których jedna leży na O_1A_1, a druga przechodzi przez punkt O ; szukane reakcje są równe i odwrotne do tych składowych. Jeżeli jednak unieruchomimy dwa punkty płyty O_1 i O_2, to odbierzemy jej 4 stopnie swobody, a ponieważ płyta posiada tylko 3 stopnie swobody, więc jedno połączenie jest zbyteczne i reakcje w punktach O_1 i O_2 są statycznie niewyznaczalne. Mianowicie można siłę P nieskończenie wieloma sposobami rozłożyć na dwie składowe, przechodzące przez O_1 i O_2, i dwie siły równe i odwrotne do tych składowych mogą być temi reakcjami.

§ 6. RÓWNOWAGI BELKI PRYZMATYCZNEJ.

Niech będzie prosta belka pryzmatyczna, na którą działa układ sił P_1, P_2, P_3, P_4 i która jest w równowadze /rys.24/.

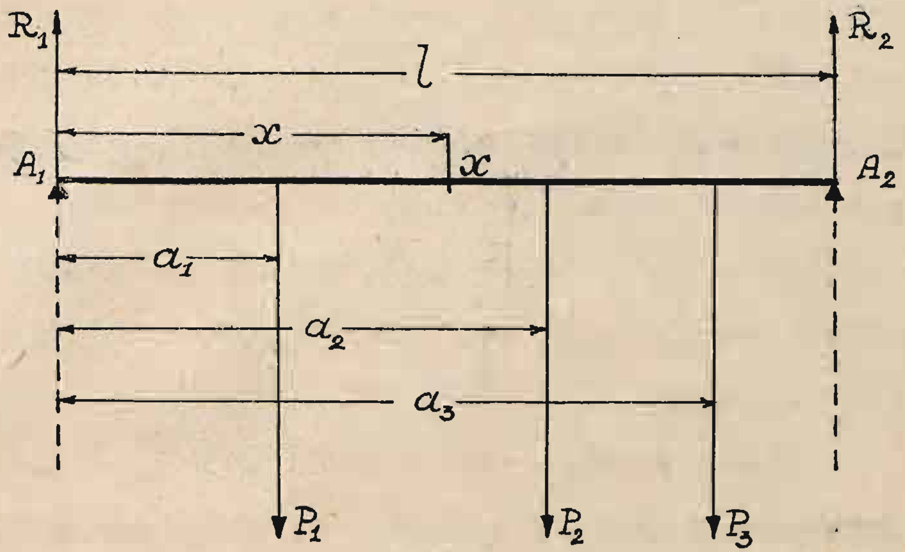


Rys. 24.

Wyobraźmy sobie dowolny przekrój; dzieli on belkę na dwie części I i II, każdą część możemy uważać za odrębne ciało, które również będzie w równowadze. Rozpatrzmy część I. Działają na nią siły zewnętrzne P_1 i P_2 ; prócz tego na każdym elemencie przekroju część II wywiera na I pewną siłę czyli na pierwszą część działa cały układ sił wewnętrznych, dający się sprowadzić do siły i pary. Obierzemy za środek redukcji dowolny punkt przekroju O. Siły wewnętrzne sprowadzą się do pewnej siły S i momentu N, które równoważą siły zewnętrzne P_1 i P_2. Redukujemy P_1 i P_2 do tego samego środka redukcji; otrzymamy siłę i moment równe lecz odwrotne do S i N, czyli $-S$ i $-N$. S i N możemy wyznaczyć jeszcze inaczej. Ponieważ część II na I wywiera siłę S i moment N, to I na II wywiera $-S$ i $-N$, które muszą zrównoważyć siły P_3 i P_4. Zatem po sprowadzeniu P_3 i P_4 do tego samego środka redukcji otrzymamy siłę S i parę N. Jeśli układ sił działających na belkę jest płaski, to siła S będzie leżeć w płaszczyźnie układu, zaś moment N będzie do niej prostopadłym. Siłę S możemy rozłożyć na 2 składowe: S_t wzdłuż osi belki i S_n prostopadłe do osi. S_t nazywa się siłą zrywającą, S_n - tnącą, zaś moment N - momentem gnącym.

Jeśli siły działające na belkę poziomą są pionowe, to siły wewnętrzne sprowadzają się tylko do $S_n = S$ $(S_t = 0)$, zaś moment N jest niezależny od położenia środka redukcji w przekroju.

Dana jest pozioma belka $A_1 A_2$, na którą działają siły pionowe P_1, P_2 i P_3. Należy wyznaczyć reakcje w A_1 i A_2 oraz S i N w dowolnym przekroju /rys.25/.



Rys. 25.

Rozwiążmy to zadanie wpierw analitycznie. Ponieważ belka jest gładka, a siły na nią działające pionowe, więc i reakcje R_1 i R_2 w A_1 i A_2 będą też pionowe. Aby wyznaczyć wielkość tych reakcji, bierzemy momenty względem A_2, gdyż suma momentów sił R_1, P_1, P_2, P_3 i R_2, jako równoważących się, będzie zerem. Oznaczmy długość belki przez l, odległość sił P_1, P_2 i P_3 od A_1 odpowiednio przez a_1, a_2 i a_3. Suma momentów względem A_2 będzie:

$$R_1 l - P_1(l-a_1) - P_2(l-a_2) - P_3(l-a_3) = 0$$

skąd

$$R_1 = \frac{P_1(l-a_1)+P_2(l-a_2)+P_3(l-a_3)}{l} \qquad (1).$$

Biorąc momenty względem A_1 znajdziemy reakcję R_2.

$$-R_2 l + P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 = 0$$

skąd

$$R_2 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{l} \qquad (2).$$

Obierzmy teraz na belce dowolny przekrój X w odległości x od A_1 i wyznaczmy S i N. - W tym przekroju S równoważy siły działające na A_1X, a więc musi ona być równą i odwrotną do wypadkowej R_1 i P_1 czyli:

$$S = R_1 + P_1 ;$$

podstawiając na R_1 wartość z równania /1/ otrzymamy:

$$S = \frac{P_2(l-a_2)+P_3(l-a_3)-P_1 a_1}{l} \qquad (3).$$

Moment N musi być równy sumie momentów R_1 i P_1 względem X.

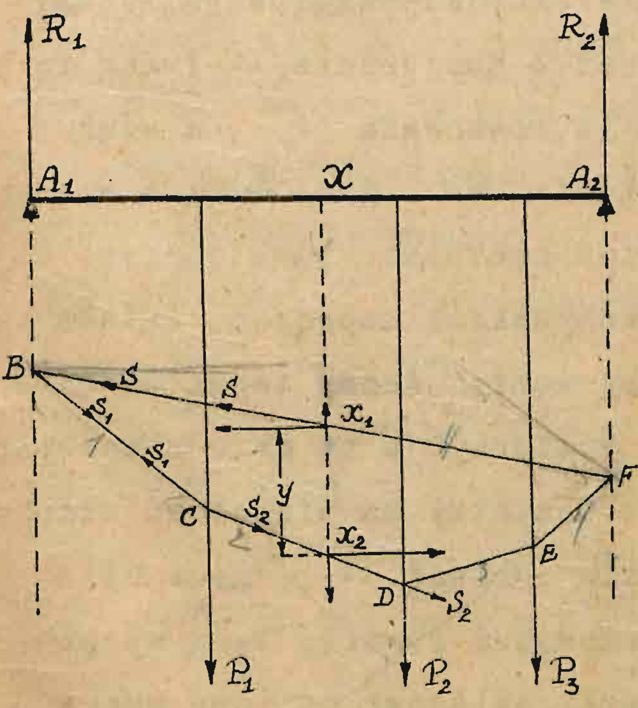
$$N = R_1 x - P_1 (x-a_1).$$

Gdy podstawimy na R_1 wartość z równania /1/, to:

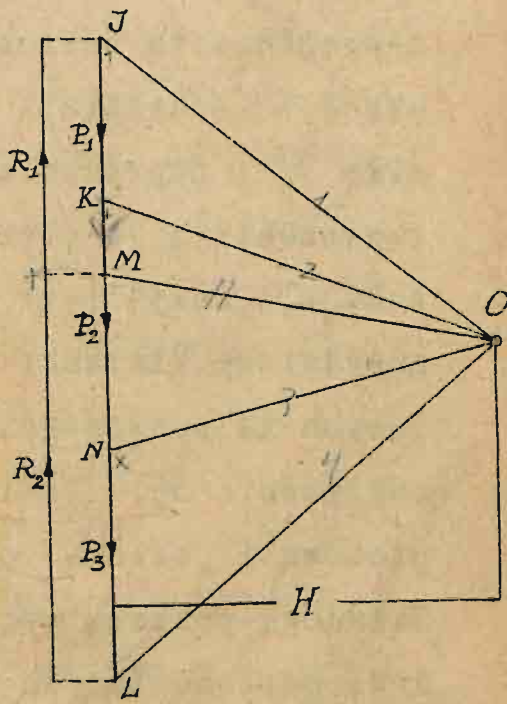
$$N = \frac{[P_2(l-a_2)+P_3(l-a_3)]x + P_1 a_1 (l-x)}{l} \qquad (4).$$

Widzimy, że N jest zależne od x, lecz wzór /4/ ważny jest tylko dla przekrojów zawartych między P_1 i P_2.

Aby wykonać to samo zadanie wykreślnie, budujemy wielobok sił $JKNLO$, złożony z sił P_1, P_2 i P_3 oraz odpowiadający mu wielobok sznurowy $BCDEF$ /rys.26 i 27/.



Rys.26.



Rys.27.

Ponieważ siły działające na belkę są w równowadze, więc wielobok sił i wielobok sznurowy są zamknięte, czyli odcinek LJ wyraża sumę R_1+R_2, zaś promień OM, oddzielający siłę R_1 od R_2, jest równoległy do boku BF, zawartego między R_1 i R_2 i zamykającego wielobok sznurowy.

Siła tnąca S jak już wiemy, jest sumą sił, leżących na lewo od przekroju x, czyli w danym wypadku jest różnicą R_1 i P_1, a więc na wieloboku sił wyraża ją odcinek KM.

Aby wyznaczyć moment gnący N, rozpatrzmy naprężenie na bokach wieloboku sznurowego. Weźmy węzeł C - działają nań 2 naprężenia S_1 i S_2 i siła P_1; naprężenia te równoważą P_1, a więc reprezentują je promienie OJ i OK; z wieloboku sił znajdziemy ich kierunki. Identycznie znajdziemy kierunki wszystkich naprężeń, działających na poszczególne węzły. Weźmy teraz dowolne naprężenie np. S_1 i rozłóżmy je na dwie składowe: pionową i poziomą, co uczynimy na wieloboku sił. Składową poziomą wyraża odcinek H. Lecz składowe poziome innych naprężeń również będą wyrażone odcinkiem H, czyli składowe poziome wszystkich naprężeń są sobie równe i wyraża je odcinek H - zwany odległością biegunową.

Moment zginający w $\mathcal{X}$, jak wiemy, równy jest momentowi sił, działających po lewej stronie przekroju $\mathcal{X}$ względem $\mathcal{X}$, czyli sumie momentów R_1 i P_1. Lecz siły R_1 i P_1 równoważą się z naprężeniami S_1 i S_2, a więc suma momentów tych sił jest równa i odwrotna momentowi naprężeń S i S_2. Poprowadźmy przez $\mathcal{X}$ prostą pionową; przetnie ona wielobok sznurowy w punktach x_1 i x_2. Do punktów x_1 i x_2 przenieśmy naprężenia S i S_2 i rozłóżmy je na składowe pionowe i poziome. Moment składowych pionowych względem $\mathcal{X}$ będzie zerem, zaś suma momentów składowych poziomych, które tworzą parę o ramieniu $x_1x_2 = y$ będzie równa momentowi pary $H.y$, który i jest szukanym momentem gnącym.

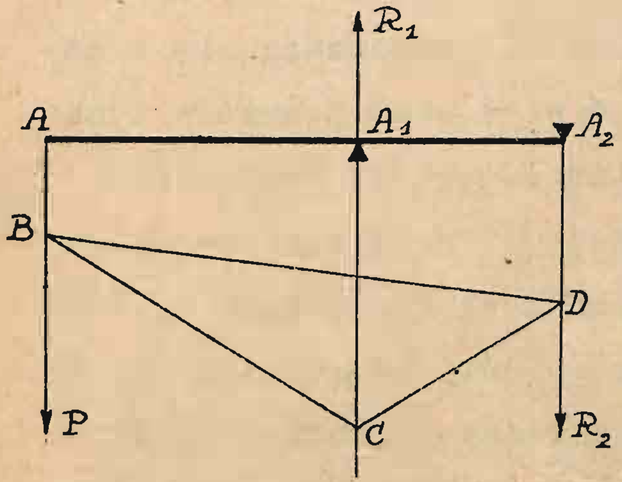
Jak widzimy N jest proporcjonalne do y czyli $N_{max.}$ jest tam, gdzie y_{max}. Pole wieloboku sznurowego $BCDEF$ nazywa się polem momentów gnących.

Rozważmy jeszcze 2 przykłady.

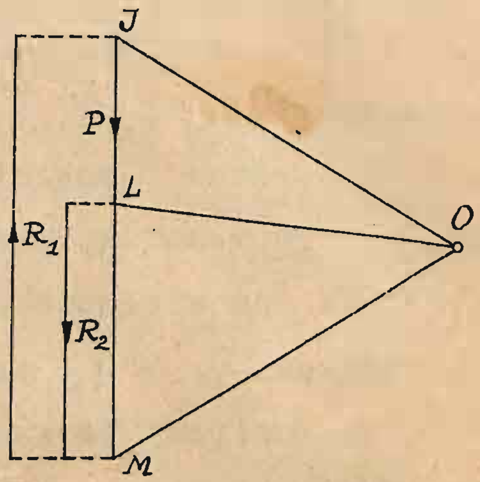
Mamy belkę poziomą pomiędzy podporami A_1 i A_2, jak na rys.28; na koniec jej A działa siła pionowa P.

Aby wyznaczyć pole momentów, znajdziemy wpierw reakcje R_1 i R_2. Są one pionowe i jedna z nich R_1

skierowana do góry, druga R_2 - na dół. Budujemy wielobok sił i wielobok sznurowy.



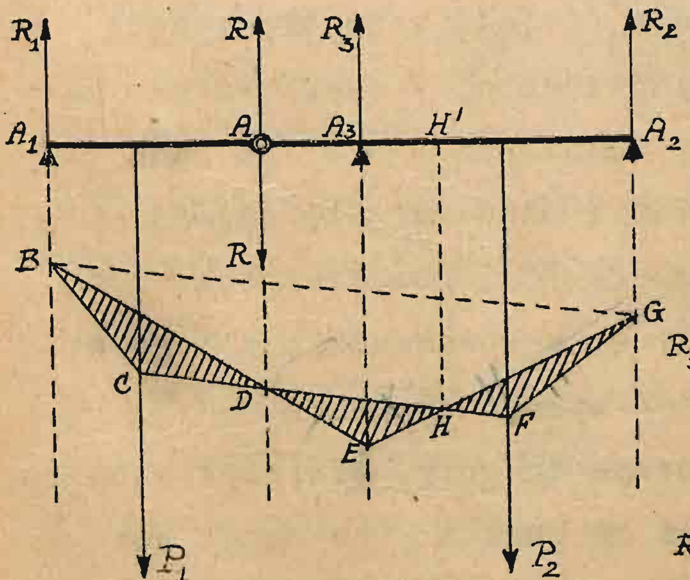
Rys. 28.



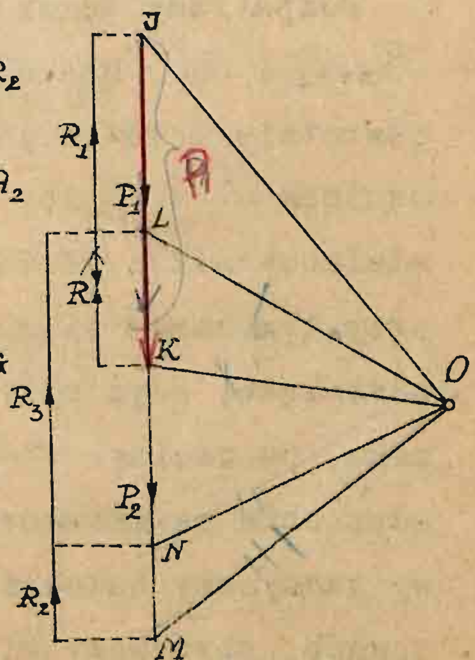
Rys. 29.

Będą one zamknięte, ponieważ belka jest w równowadze. Z tego wynika, że w wieloboku sił koniec R_1 upadnie na początek P w punkcie J , promień zaś OM , poprowadzony równolegle do boku CD , zawartego między R_1 i R_2 przez O , przejdzie przez koniec R_2 i początek R_1 . Wyznaczymy w ten sposób obie reakcje i jednocześnie pole momentów BCD , z którego wnioskujemy, jak są rozłożone momenty na belce.

Mamy znów belkę poziomą $A_1 A_2$, w punkcie której A jest przegub /rys.30/. Taka belka posiada 4 stopnie swobody, gdyż część $A_1 A$ posiada sama przez się trzy stopnie swobody, a część AA_2 ma względem niej jeszcze jeden stopień swobody. Aby ją unieruchomić musimy dać podpory w punktach A_1 i A_3 oraz zawiasę w A_2 ; ponieważ jednak siły działające są pionowe, wystarczy w A_2 dać podporę. Na belkę działają siły P_1 i P_2 , które wywołują reakcje pionowe R_1, R_2 i R_3 oraz pewną reakcję R w przegubie A . Aby wyznaczyć kierunek reakcji R rozpatrzmy część A_1A; na nią działają 3 siły R_1, P_1 i R ; ponieważ siły te są w równowadze, a R_1 i P_1 pionowe, to R



Rys. 30.



Rys. 31.

również jest pionowa i skierowana do góry; na prawą część AA_2 działa reakcja równa i odwrotna, a więc skierowana pionowo na dół.

Aby wyznaczyć pole momentów, zbudujemy wielobok sił i wielobok sznurowy. Rozpatrzmy początkowo część AA_1. Działają tu 3 siły R_1, P_1 i R równoważące się; odpowiada im wielobok sił $JKLJ$ i wielobok sznurowy BCD zamknięty; ponieważ R_1 i R są skierowane do góry, więc sumę ich R_1+R wyrazi odcinek JK, zaś promień OL, oddzielający R_1 od R, jest równoległy do boku BD zawartego między R_1 i R.

Rozpatrzmy teraz część AA_2. Działają tu R, R_3, P_2 i R_2. Reakcja R będzie tu skierowana odwrotnie i równa poprzedniej - czyli wyraża ją odcinek LK. Aby wyznaczyć R_2 i R_3 budujemy wielobok sił i wielobok sznurowy dla części AA_2 przy tym samym biegunie O. Oba wieloboki będą zamknięte, gdyż siły są w równowadze; z tego wynika, że odcinek LM wyraża nam sumę R_2+R_3, gdyż obie są skierowane do góry. Wielobok sznurowy zaczynamy budować od punktu D w znany nam sposób; otrzymamy wielobok $DEFG$, w którym bok zamykający EG musi być równoległy do promienia łączącego w wieloboku sił biegun z punktem dzielącym R_2 od R_3, czyli do promienia ON. Tym sposobem wyznaczyliśmy wszystkie reakcje i pole momentów, składające się z 3-ch trójkątów: BCD, DEH i HFG. Przypuśćmy, że belka A_1A_2 nie posiada przegubu A, wtedy niema potrzeby podpierać ją w 3-ch punktach, gdyż reakcje będą statycznie niewyznaczalne, wystarczy je podeprzeć w A_1 i A_2. Polem momentów wtedy będzie wielobok $BCFGB$, i jak widzimy, momenty gnące w danym wypadku będą znacznie większe, niż poprzednio.

§ 7. TEORJA KRATOWNIC.

nic abstrakcji

Kratownicą nazywamy konstrukcję żelazną, złożoną z prostych sztab lub prętów, połączonych przegubami, które nazywamy również węzłami kratownicy.

Kratownice dzielą się na:

1/ płaskie, gdy wszystkie sztaby i węzły leżą w jednej płaszczyźnie i

2/ przestrzenne.

W dalszym ciągu będzie mowa jedynie o kratownicach płaskich.

Pozatem rozróżniamy kratownice:

a/ niedosztywnione, gdy możemy kratownicę odkształcać, nie zmieniając długości sztab;

b/ sztywne - nie dające się odkształcać bez zmiany długości sztab i

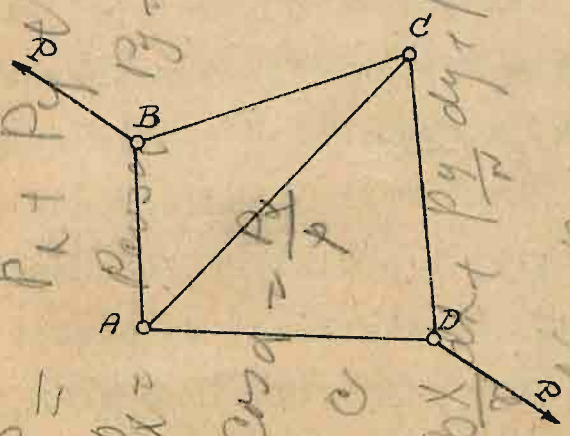
c/ przesztywnione - zawierające więcej sztab, niż potrzeba do usztywnienia.

Pomiędzy liczbą sztab i liczbą węzłów kratownicy sztywnej istnieje prosty związek.

Oznaczmy węzły kratownicy sztywnej literami $A_1, A_2, A_3, \dots$ Pierwsza sztaba $A_1 A_2$ - łączy 2 węzły A_1 i A_2. Aby połączyć z nią trzeci węzeł - A_3, potrzebne są 2 sztaby $A_1 A_3$ i $A_2 A_3$. Chcąc dołączyć czwarty węzeł, musimy znowu użyć dwie sztaby i t.d., czyli przyłączenie każdego nowego węzła wymaga 2-ch sztab.

Przypuśćmy, że kratownica posiada n węzłów; jeśli odliczymy pierwsze 2 węzły, to otrzymamy $n-2$ węzłów i na przyłączenie każdego z nich potrzebne są 2 sztaby, czyli wszystkich sztab będzie $2(n-2)$; do tego trzeba dodać jeszcze sztabę $A_1 A_2$. Otrzymamy razem $2n-3$ sztab; będzie to kratownica sztywna. Jeśli kratownica przy n węzłach posiada mniej niż $2n-3$ sztab, to jest ona niedosztywniona, jeśli zaś więcej niż $2n-3$ - to przesztywniona.

Przypuśćmy teraz, że na 2 węzły kratownicy sztywnej $ABCD$ działają 2 siły zewnętrzne, które są w równowadze /rys.32/. Prócz tych 2-ch sił zewnętrznych /ciężaru sztab nie bierzemy w rachubę/ wchodzą tu siły wewnętrzne, występujące w przegubach. Weźmy np. sztabę AC - leży ona między dwoma sworzniami przegubów, które wywierają na nią pewne reakcje. Ponieważ kratownica jest w równowadze, więc i sztaba AC również jest w równowadze, czyli reakcje wywierane są równe, odwrotne i działają na linji sztaby AC. Przytem mogą zachodzić 2 wypadki: reakcje mogą być skierowane nazewnątrz czyli usiłują rozerwać sztabę - sztaba jest rozciągana, co oznaczamy znakiem $+$, lub skierowane wewnątrz



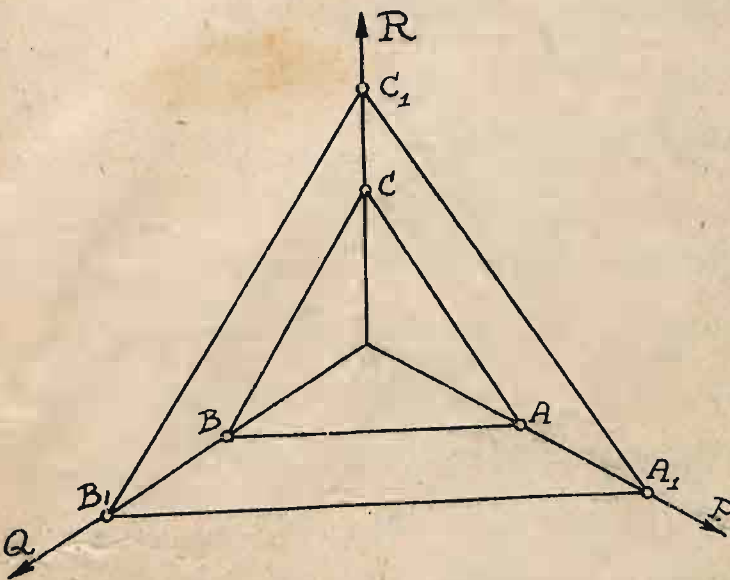
Rys. 32.

sztaby - sztaba ściskana — lub wybaczana, oznaczamy to znakiem — . Jeśli sztaba jest rozciągana, to wywiera ona na przeguby siły, usiłujące te przeguby zbliżyć, jeśli zaś ściskana - to usiłuje ona przeguby rozsunąć. Siły wewnętrzne, występujące w sztabach, nazywamy naprężeniem sztab.

Prócz powyższej klasyfikacji, dzielimy jeszcze kratownice na dwie kategorje. Do pierwszej kategorji zaliczamy takie kratownice, w sztabach których mogą występować naprężenia bez działania sił zewnętrznych, czyli kratownice, podlegające samonaprężeniom; do drugiej - u których samonaprężenia istnieć nie mogą. Do pierwszej kategorji należą wszystkie kratownice przesztywnione oraz niektóre sztywne, jednakże te ostatnie należą przeważnie do kategorji drugiej. Podajemy tu przykład kratownicy sztywnej, która należy do kategorji pierwszej.

Niech będą 3 siły równoważące się P, Q i R , a więc przechodzące przez jeden punkt. Zbudujmy dla nich wielobok sznurowy ABC który będzie zamknięty. Każdy układ posiada nieskończenie wiele wieloboków sznurowych. Odwróćmy kierunki sił P, Q i R i wykreślmy inny wielobok sznurowy $A_1B_1C_1$.

Zbudujmy następnie kratownicę w postaci trójkąta ABC i umocujmy ją w płaszczyźnie nieruchomej; zbudujmy też kratownicę $A_1B_1C_1$ i również umocujmy w tej samej płaszczyźnie i w tem samem położeniu względem ABC co i wieloboki sznurowe. Pomiędzy

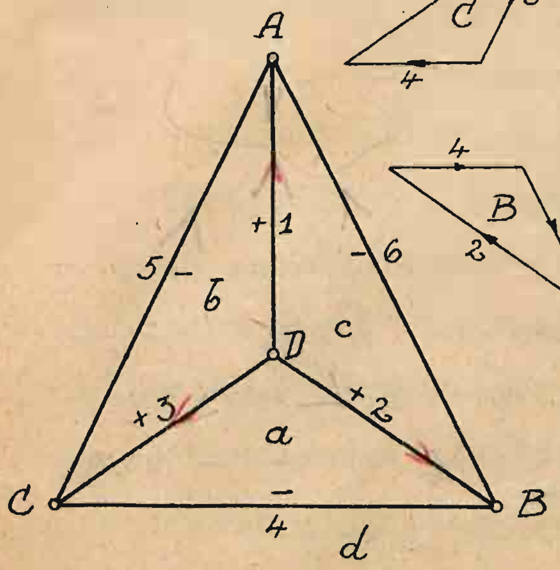


Rys 33.

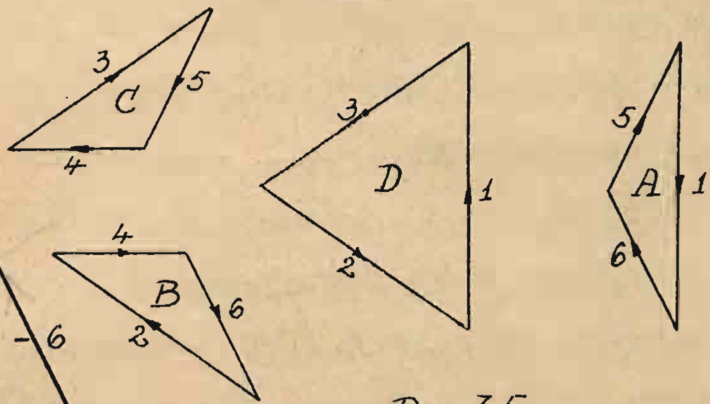
wierzchołki AA_1, BB_1 i CC_1 wstawmy nowe sztaby i nadajmy im odpowiednio naprężenia P, Q i R, a więc na wierzchołki A, B i C będą działać odpowiednio P, Q i R, zaś na A_1, B_1, C_1 – odpowiednio $-P$, $-Q$ i $-R$. Po tem wszystkiem możemy kratownicę $ABCA_1B_1C_1$ wyswobodzić; będzie ona w równowadze, a siły P, Q i R będą już siłami wewnętrznemi, czyli będzie to kratownica pierwszej kategorji, aczkolwiek jest sztywną $(2n-3=9)$.

Punkty A, B i C można było obrać dowolnie, bo dwa boki wieloboku sznurowego można zawsze obierać dowolnie. Z tego wynika, że jakiekolwiek dwa trójkąty Desargues'a wraz z promieniami, łączącemi wierzchołki tworzą kratownicę sztywną, należącą do kategorji pierwszej.

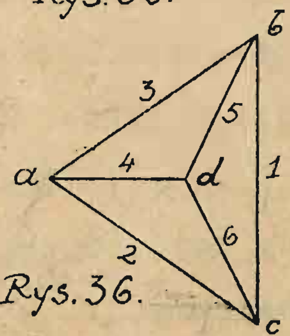
Niech będzie teraz kratownica przesztywniona $ABCD$, a więc należąca do pierwszej kategorji /rys.34/. Przypuśćmy, że znane jest naprężenie jednej sztaby np. AD, i że jest ona rozciągana; oznaczmy to naprężenie cyfrą 1. We wszystkich innych sztabach panują również naprężenia, które pragniemy wyznaczyć; oznaczmy odpowiednio je przez 2, 3, 4, 5 i 6. Na przegub D działa 3 siły - 1,2,3, które są w równowadze; można z nich utworzyć trójkąt zamknięty D, z którego wyznaczymy wielkość i kierunek naprężeń 2 i 3. Również równoważą się naprężenia działające na przegub A, możemy więc też zbudować trójkąt A, gdyż naprężenie 1 jest znane, i z niego wyznaczymy dwa nieznane naprężenia 5 i 6. Wogóle, gdy znamy naprężenia wszystkich sztab węzła prócz dwóch, to te naprężenia nieznane możemy wyznaczyć. W ten sposób wykreślimy trójkąty A, B, C i D /rys.35/, z których wyznaczymy naprężenia sztab danej kratownicy.



Rys. 34.



Rys. 35.



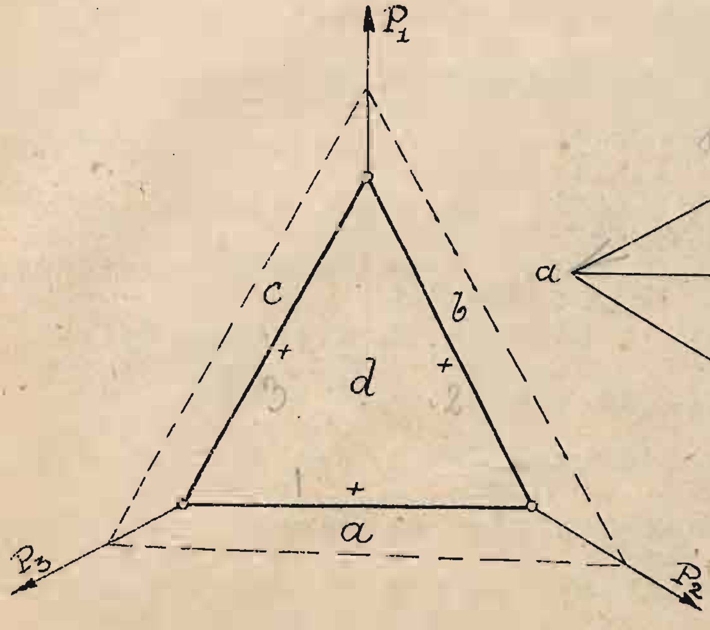
Rys. 36.

Naprężenie sztaby *AD* mogło być jakiekolwiek, a więc istnieje nieskończenie wiele układów samonaprężeń. Przypuśćmy, że na węzły zaczęły działać siły zewnętrzne, pozostające w równowadze. Skutkiem tego naprężenia sztab się zmienią, Naprężenia nowe, nazwiemy je wypadkowemi, zależą 1/ od samonaprężeń, które już istniały w sztabach i 2/ od sił zewnętrznych. Lecz układów samonaprężeń jest nieskończenie wiele, a zatem danemu układowi sił zewnętrznych może odpowiadać nieskończenie wiele układów naprężeń sztab. Znając tylko siły zewnętrzne, działające na kratownicę pierwszej kategorji, nie możemy przy pomocy działań statycznych wyznaczyć naprężeń. Naprężenia te są siłami statycznie niewyznaczalnemi.

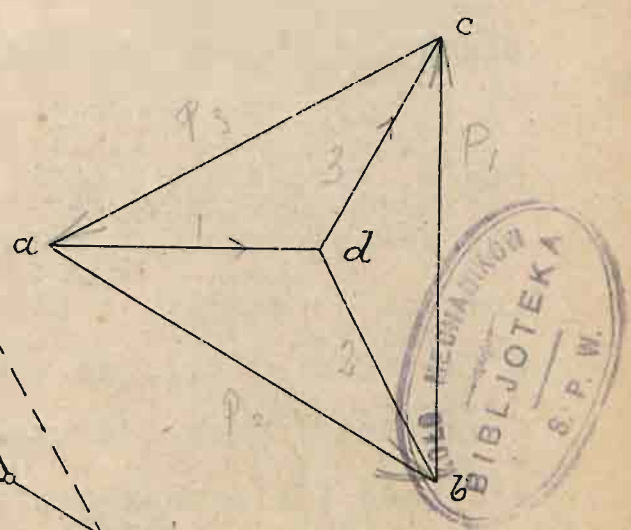
Trójkąty A, B, C i D /rys. 35/ możemy zesunąć i otrzymamy nową figurę jak na rys. 36. Jeśli teraz porównamy otrzymaną figurę z kratownicą, to zobaczymy, że są to figury odwrotne. Gdy wprowadzimy tu oznaczenie Bow'a t.j. pole wokoło kratownicy oznaczymy przez d, trójkąty wewnętrzne przez a, b i c /rys. 34/, sztaby zaś, jako leżące na granicy pól, odpowiednio przez ab, bc, cd i da, to zobaczymy, że w nowej figurze /rys. 36/ węzłom kratownicy odpowiadają wieloboki, wielobokom punkty, sztabom - proste równoległe i odwrotnie.

Figura odwrotna kratownicy nazywa się także planem Cremony.

Niech teraz będzie kratownica sztywna ABC /rys. 37/, należąca do drugiej kategorji. Gdy żadne siły zewnętrzne nie działają, to nie istnieją i naprężenia w sztabach. Przypuśćmy, iż zaczęły działać na węzły siły P_1, P_2, P_3, które się równoważą. Pod działaniem tych sił występują w sztabach naprężenia, które będą zależne jedynie od sił zewnętrznych, a więc znając te ostatnie można naprężenia wyznaczyć. Naprężenia są w tym przypadku statycznie wyznaczalne. Najprościej dają się



Rys. 37.



Rys. 38

one wyznaczyć zapomocą planu Cremony, lecz, jak wiemy z poprzedniego, plan Cremony możemy wykreślić tylko dla kratownic pierwszej kategorji, a więc aby zastosować go do danej kratownicy, należy dopełnić ją do kratownicy pierwszej kategorji. W tym celu dla sił P_1, P_2, P_3 wykreślamy wielobok sznurowy, który możemy uważać również jako kratownicę; nowa kratownica, składające się z danej, z linij działania sił P_1, P_2, P_3 i wieloboku sznurowego /na rys. 37 linje kreskowane/ jest kratownicą pierwszej kategorji, w której siły P_1, P_2, P_3 są naprężeniami sztab. Dla otrzymanej kratownicy możemy już wykreślić plan Cremony, wystarczy jednak wykreślić część tego planu, odpowiadającą danej kratownicy i siłom P_1, P_2, P_3. Po wprowadzeniu do kratownicy oznaczeń Bow'a. wykreślamy figurę odwrotną, zaczynając od sił zewnętrznych P_1, P_2, P_3, przechodząc następnie kolejno do węzłów, w których są nieznane tylko 2 naprężenia, t.j. do węzłów dcb, adb i cda. Otrzymana figura odwrotna $abcd$/rys.38/ określa wielkość i kierunek naprężeń szukanych.

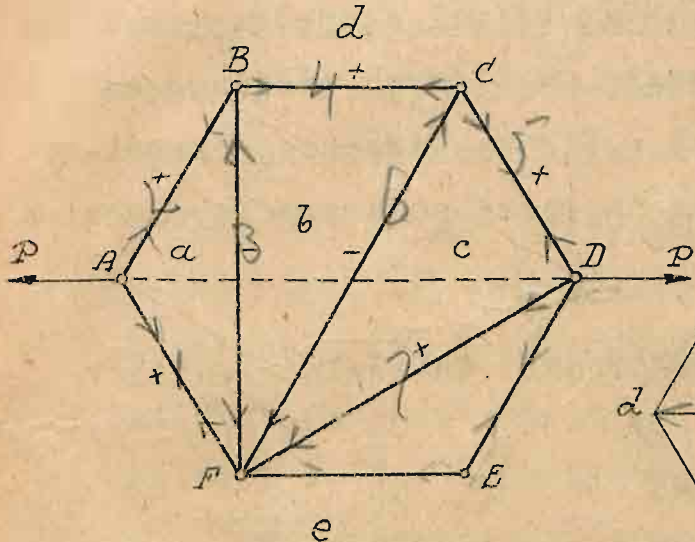
Z powyższego widzimy, że gdy chcemy wyznaczyć naprężenia, powstające pod działaniem sił zewnętrznych w kratownicy sztywnej drugiej kategorji, należy ją przekształcić na kratownicę pierwszej kategorji, gdyż już dla takiej możemy wykreślić figurę odwrotną, określającą naprężenia szukane.

PRZYKŁAD 3.

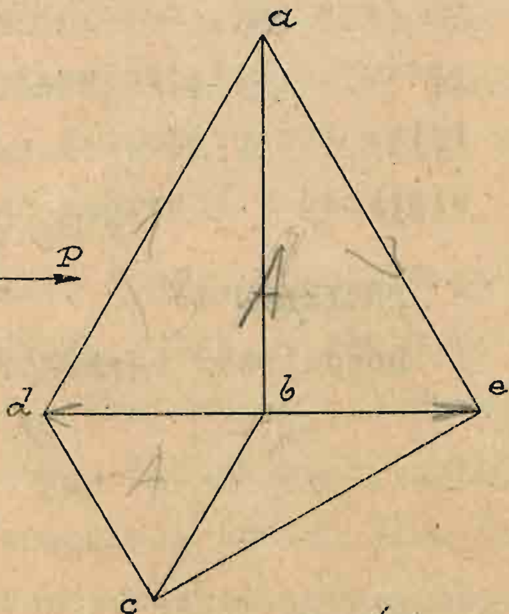
Dana jest kratownica w postaci foremnego sześciokąta $ABCDEF$, jeden węzeł której F jest połączony z pozostałymi zapomocą sztab /rys.39/; jest to kratownica sztywna drugiej kategorji

$(2n-3=2.6-3=9)$. Na 2 węzły A i D działają dwie siły P równe i odwrotne, pragniemy wyznaczyć naprężenia sztab.

Chcąc wykreślić dla danej kratownicy plan Cremony, należy przekształcić ją na kratownicę



Rys. 39

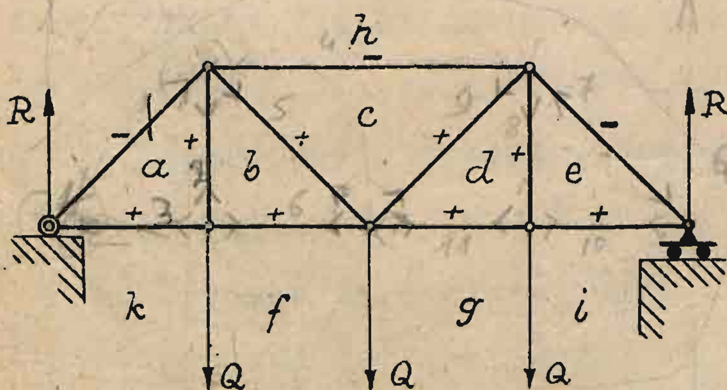


Rys. 40

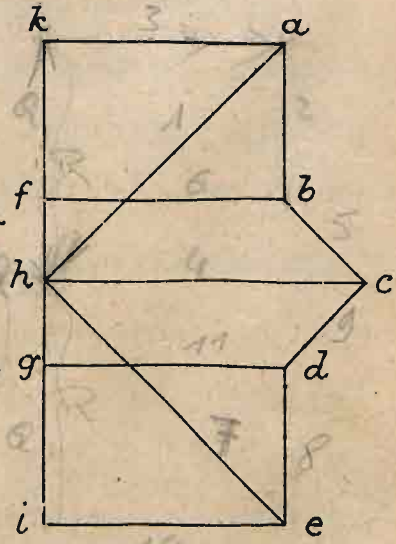
pierwszej kategorji, co uskuteczniamy łatwo, wprowadzając sztabę AD. Możemy uważać, że właśnie ta sztaba AD wywiera na węzły A i D siły P, czyli, że takie jest jej naprężenie. Należy zwrócić uwagę, że w sztabach FE i ED niema żadnych naprężeń, bo gdyby istniały, to owe musiałyby leżeć na jednej prostej. Wprowadzamy oznaczenia Bow'a; literami a, b i c oznaczamy trójkąty wewnętrzne, literą d górne pole zewnętrzne, oraz przez e - dolne pole zewnętrzne, do którego też zaliczamy trójkąt FDE .- Wykreślamy następnie odpowiednią figurę odwrotną /rys.40/, zaczynając od sił zewnętrznych i rozpatrując kolejno węzły, w których nieznane są tylko 2 naprężenia; z figury odwrotnej określamy wielkość i kierunek naprężeń poszczególnych sztab.

PRZYKŁAD 4.

Rozpatrzmy teraz przęsło Warren'a /rys.41/.



Rys. 41.



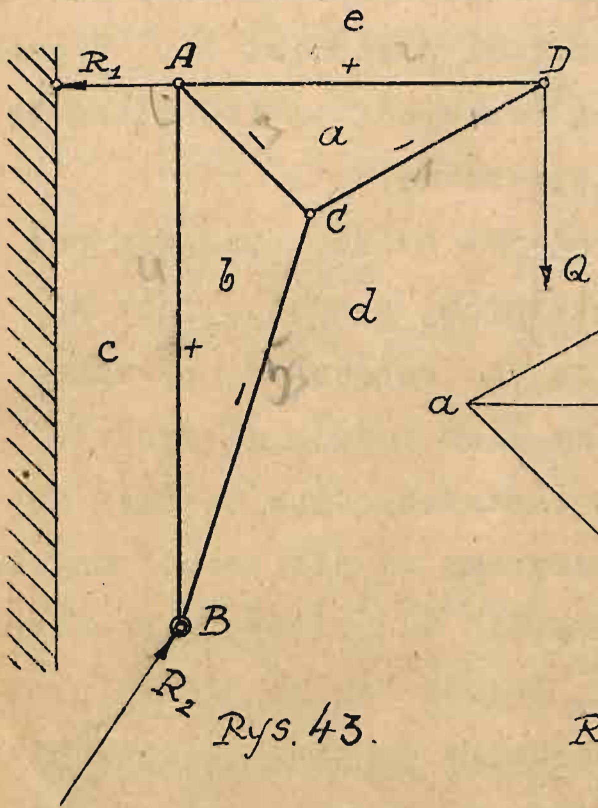
Rys. 42.

Jest to kratownica sztywna drugiej kategorji, oparta w dwóch skrajnych węzłach tak, że odebrano jej wszystkie stopnie swobody, czyli lewy węzeł umieszczono w nieruchomym łożysku, prawy tylko podparty i może swobodnie poruszać się w kierunku poziomym. Przypuśćmy, że kratownicę obciążono trzema równemi siłami pionowemi Q . W punktach oparcia powstaną reakcje R , które też będą pionowe i oczywiście równe.

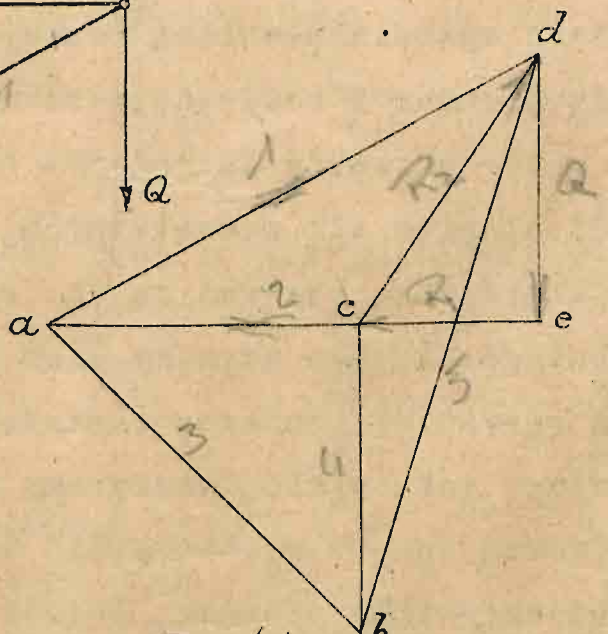
Aby określić naprężenia sztab, powstałe pod działaniem sił zewnętrznych, trzeba byłoby dopełnić daną kratownicę do kratownicy pierwszej kategorji. Nie czynimy tego jednak na rysunku, a wprost wprowadzamy oznaczenie Bow'a. Plan Cremony, jak zwykle, zaczynamy od sił zewnętrznych. Tworzą one tu wielobok sił zamknięty, a ponieważ są wszystkie pionowe, leżą zatem na jednej prostej. Następnie przechodzimy do węzła, gdzie nieznane są dwa naprężenia; są tu nimi hka i hei ; zaczynamy od hka i dalej już przechodzimy kolejno do węzłów $abfk$, $abch$, $fbcdg$, $dche$, $gdei$ i ieh, otrzymamy w ten sposób całkowitą figurę odwrotną /rys.42/, określającą szukane naprężenia.

PRZYKŁAD 5.

Dany jest żóraw $ABCD$ /rys.43/. Przegub B osadzono w nieruchomym łożysku, A – połączonc ściegnem poziomem z murem, a w D – wisi ciężar Q. Pragniemy wyznaczyć naprężenie sztab.



Rys. 43.



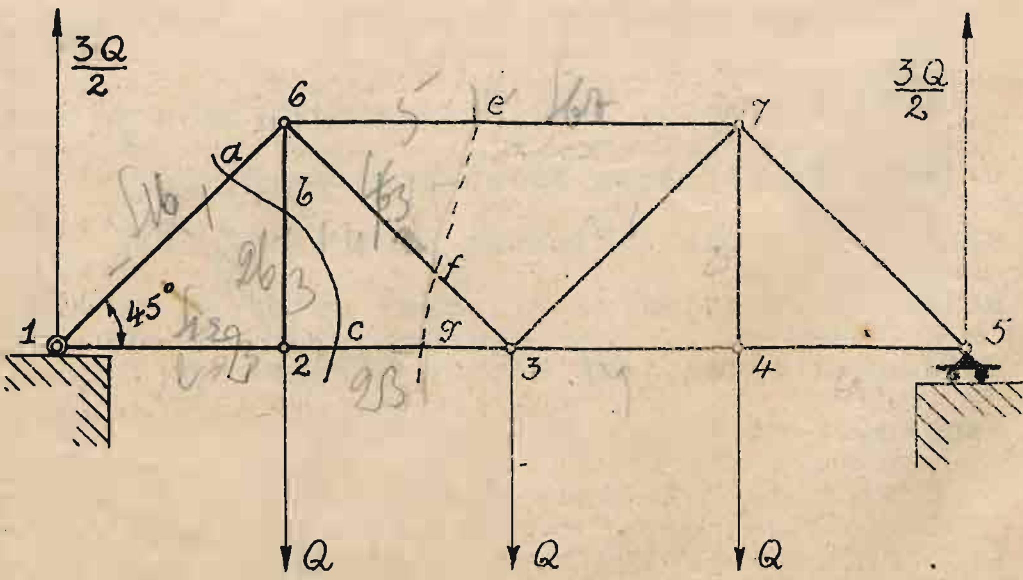
Rys. 44.

W przegubach A i B występują reakcje, w pierwszem reakcja ścięgna, w drugiem łożyska. W przegubie A - reakcja R_1 ma kierunek ścięgna, w B - reakcja R_2 ma kierunek BD, gdyż siły zewnętrzne Q, R_1 i R_2 są w równowadze, a więc muszą przechodzić przez jeden punkt, którym jest oczywiście przegub D . Po wprowadzeniu oznaczeń Bow'a na rys.43, wykreślamy plan Cremony, zaczynając, jak zwykle, od sił zewnętrznych i rozpatrując kolejno węzły o dwóch nieznanych naprężeniach. Otrzymany plan Cremony /rys.44/ określa reakcje R_1 i R_2 oraz naprężenia sztab.

Metoda Cremony jest najczęściej używaną przy określaniu naprężeń sztab kratownic. Jednak, gdy wykreślenie planu Cremony nastręcza pewne trudności, posługujemy się innemi metodami, z których najdogodniejszą jest metoda Rittera. Najlepiej zapoznamy się z nią na przykładzie.

Przypuśćmy, że mamy przęsło Warren'a, podparte, jak poprzednio, w dwóch skrajnych węzłach i obciążone trzema równemi siłami Q. Oznaczmy węzły odpowiednio cyframi 1,2,3,4,5,6 i 7, długość sztab /12, 23, 34.....i t.d./ przez l , naprężenie każdej sztaby przez S z odpowiednim wskaźnikiem /np. naprężenie sztaby 12 przez S_{12} /, oraz załóżmy, że wszystkie sztaby są rozciągane; jeżeli z rachunku dla której ze sztab otrzymamy znak —, to znaczy, że jest ona ściskana. Reakcje punktów podparcia, działające na przeguby 1 i 5 będą pionowe i równe $\frac{3}{2}Q$, gdyż równoważą one siły zewnętrzne Q /rys.45/.

Rozpatrzmy węzeł 1: działa nań 3 siły: $\frac{3}{2}Q$, S_{16} i S_{12}, które są w równowadze, czyli su-



Rys. 45.

ma rzutów tych sił na wszystkie kierunki jest zerem. Moglibyśmy więc w danym wypadku metodą rzutów łatwo określić nieznane naprężenia, gdyż wszystkie kąty są równe 45° lub 90°. Jeśli jednak kąty są różne, metoda ta jest niedogodna; wygodniejszą jest metoda momentów, czyli właśnie metoda Rittera. Przypuśćmy, że kratownicę przecięto przez 3 sztaby, nie wychodzące z jednego węzła np. przez sztaby 16, 26 i 23 /rys.45/. Lewa część kratownicy odciętej jest w równowadze, a więc i siły zewnętrzne nań działające również są w równowadze. Siłami zewnętrznemi są tu: $\frac{3}{2}Q$, Q oraz naprężenia w punktach przekroju a, b i c . Przed przecięciem w a było naprężenie S_{16} , a więc S_{16} będzie teraz siłą zewnętrzną. Zakładamy, że jest ona zwrócona w stronę węzła 6 , gdyż przyjęliśmy, iż sztaby są rozciągane; tak samo w b i c będą siłami zewnętrznemi naprężenia S_{26} i S_{23} . Suma momentów tych sił zewnętrznych względem dowolnego punktu jest zerem. Weźmy momenty względem węzła, gdzie schodzą się dwie przecięte sztaby np. względem węzła 2 . Momenty S_{26} i S_{23} będą zerami, a więc:

$$\frac{3Q}{2} \cdot l + S_{16} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = 0$$

skąd

$$S_{16} = -\frac{3Q}{\sqrt{2}} .$$

Otrzymaliśmy na wartość S_{16} znak minus, zatem sztaba 16 jest ściskana.

Analogicznie rozpatrując momenty względem węzłów 1 i 6 znajdziemy:

$$S_{26} = Q \quad i \quad S_{12} = S_{23} = \frac{3Q}{2}.$$

$S_{12} = S_{23}$ bo gdy 4 sztaby / Q możemy uważać za sztabę/ schodzą się w jednym węźle, leżąc na dwóch prostych, to naprężenia sztab leżących na jednej prostej są sobie równe.

Aby wyznaczyć naprężenie sztaby 67 należy przeprowadzić inny przekrój efg , przechodzący przez sztabę 67 i dwie inne sztaby. Siły działające na lewą część są w równowadze, a zatem suma momentów względem węzła 3 będzie:

$$\frac{3Q}{2} \cdot 2l - Q.l + S_{67} \cdot l = 0$$

skąd

$$S_{67} = -2Q.$$

Pewną trudność nastręcza sztaba 63, gdyż nie możemy brać momentów względem punktu przecięcia sztab 67 i 23, jako nieskończenie odległego. Ponieważ jednak naprężenie sztaby 67 jest już znane, przeto możemy wziąć momenty względem węzła 1:

$$S_{67} \cdot l + S_{63} \cdot l\sqrt{2} + Q.l = 0$$

Podstawiając znalezioną poprzednio wartość na S_{67} otrzymamy:

$$S_{63} = S_{73} = \frac{Q}{\sqrt{2}} .$$

Naprężenia drugiej połowy kratownicy będą takie same, gdyż cały układ jest symetryczny względem pionu, przechodzącego przez węzeł 3.

SPIS TREŚCI.

---ooOoo---