

DYNAMIKA.

1. Ciało o masie M leży na gładkim stole; do niego jest przyczepiony sznur, który zwisa ze stołu i dźwiga na końcu blok o masie m . Przez blok przechodzi inny sznur, na którego końcach wiszą masy m_1 i m_2 . Wyznaczyć przyspieszenie ciała?

$$\text{Odp.: } \frac{m(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M + m)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g.$$

2. Przez nieruchomy blok przerzucono sznur, a na lewym końcu sznura zawieszono drugi blok lekki, przez który przechodzi drugi sznur, dźwigający na końcach ciężary P i Q . Jaki ciężar należy zawiesić na prawym końcu pierwszego sznura, aby ciężar Q pozostał w spokoju?

$$\text{Odp.: } \frac{4PQ}{3P - Q}.$$

3. Na końcach sznura, przerzuconego przez nieruchomy blok wiszą dwa jednakowe ciężary. Jak zmieni się napięcie sznura, gdy podwoimy obciążenie jednego końca, a zmniejszymy obciążenie drugiego do $\frac{2}{3}$?

4. Ciało zostało rzucone w górę z szybkością v_0 po linii największego spadku równi pochyłej ustawionej pod

kątem α do poziomu. Kąt tarcia $= \varphi$. Wyznaczyć szybkość, z którą ciało powróci do miejsca, z którego wyszło.

Odp. $v_0 \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}$.

5. Wagon o masie m oderwał się w punkcie A podczas pełnego biegu od pociągu, którego całkowita masa była równa M . Wagon zatrzymał się w punkcie B w odległości l od A . W jakiej odległości od B była wówczas reszta pociągu, jeżeli siła pociągowa lokomotywy pozostała bez zmiany, a opór, który pociąg napotyka w biegu, jest proporcjonalny do masy?

Odp.: $\frac{Ml}{M-m}$.

6. Ciało o masie m otrzymało szybkość v_0 w ośrodku, który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości; współczynnik proporcjonalności $= k$. Wyznaczyć drogę, którą ciało przebiegnie w czasie t .

Odp.: $\frac{m}{k} \lg \frac{v_0 k t + m}{m}$.

7. Ciało spadło na ziemię z nieskończenie wielkiej odległości. Dowieść, że doszłoby ono do powierzchni ziemi z taką samą szybkością, gdyby wysokość spadania była równa promieniowi ziemskiemu, i gdyby siła ciężenia była stale równa mg .

8. Część łańcucha, którego całkowita długość $= a$, leży na gładkim stole, a druga część o długości b zwisa. W jakim czasie łańcuch zsunie się ze stołu, jeżeli pozwolimy mu spadać?

$$\text{Odp.: } \sqrt{\frac{a}{g}} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

9. Na płaszczyźnie poziomej stoi klin, którego ściany boczne tworzą z podstawą kąty α_1 i α_2 . Ściany te są gładkie i leżą na nich masy m_1 , m_2 , połączone nicią, przechodzącą przez krawędź. Jakie przyspieszenie poziome powinien mieć klin, aby masy m_1 , m_2 , pozostały względem niego w spokoju?

$$\text{Odp.: } \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2} g.$$

10. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej jest umocowana okrągła tarcza o promieniu a . Do pewnego punktu jej obwodu przyczepiono punkt materialny za pomocą sznura, którego długość jest równa połowie obwodu. Sznur był wyprostowany i posiadał kierunek promienia, gdy punkt materialny otrzymał szybkość v_0 prostopadłą do sznura. W jakim czasie dojdzie on do obwodu tarczy?

$$\text{Odp.: } \frac{\pi^2 a}{v_0}.$$

11. Koniec nici o długości l jest umocowany w najwyższym punkcie gładkiej kuli o promieniu a . W drugim końcu

na dźwiga ciężarek, który zatacza koło poziome ze stałą szybkością kątową. przyczem część nici $a\alpha$ pozostaje w zetknięciu z kulą. Wyznaczyć szybkość kątową.

$$\text{Odp.: } \omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{[a \sin \alpha + (l - a\alpha) \cos \alpha] \sin \alpha}.$$

12. W środku nici o długości $2a$ jest przywiązany punkt masy m , a na końcu punkt M . Drugi koniec jest przymocowany do gładkiego stołu, na którym leżą punkty, i dwie połowy nici tworzą kąt α . Punktowi M nadano szybkość prostopadłą do części nici łączącej go z m , przyczem obydwie części pozostały w naprężeniu. Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie początkowym.

$$\text{Odp. } \frac{a(m + M \sin \alpha)}{m}.$$

13. Trzy punkty masy A , B , C , każdy o masie m , leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, przyłączone do nierozciągalnej nici, i części nici AB , BC są odpowiednio równe a , b . Punkt B jest przymocowany do płaszczyzny, A zaś oraz C krążą koło niego z szybkością kątową ω , przyczem obydwie części nici leżą na linii prostej. Wyznaczyć naprężenia, które powstaną w nici bezpośrodkowo po wyzwoleniu punktu B .

$$\text{Odp. } \frac{m(2a + b)\omega^2}{3} \text{ i } \frac{m(a + 2b)\omega^2}{3}.$$

14. Wagon rusza na łuku i idzie ze stałym przyspieszeniem stycznym ν . Szyna zewnętrzna jest wniesiona nad wewnętrzną, skutkiem czego podłoga tworzy z poziomem kąt α . Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy przedmiotem, leżącym na podłodze, a podłogą, aby przedmiot ten nie zsuwał się.

Odp.: $\frac{\sqrt{\nu^2 + g^2 \sin^2 \alpha}}{g \cos \alpha}$.

15. W najwyższym punkcie gładkiego kołowego drutu o promieniu r , położonego w płaszczyźnie pionowej, umieszczono mały pierścień, nawleczony na drut. Pierścieniowi nadano szybkość v i jednocześnie wypuszczono drut. Ile obrotów wykona pierścień, podczas gdy drut przejdzie drogę h ?

Odp. $\frac{v}{2\pi r} \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

16. Łuk ABC wewnątrz gładka stanowi łuk koła, odpowiadający kątowi centralnemu 240° , a promień koła = a . Łuk ten znajduje się w płaszczyźnie pionowej, a cięciwa AC jest pozioma. Jaką szybkość powinien mieć pocisk w najniższym punkcie B , aby odbyć całkowity obrót.

Odp.: $5ag$.

17. Punkt materialny jest przywiązany do końca nici nawiniętej na koło, i jest odpychany od środka z siłą wprost proporcjonalną do odległości; współczynnik proporcjonalno-

$\epsilon_{el} = k$; początkowo punkt ten znajdował się w spokoju na obwodzie koła; wyznaczyć naprężenie, panujące w nici, gdy już odwinęła się długość S .

Odp.: $2 k S$.

18. Wahadło składa się z ciężaru, uwiązanego na sznurze, który zrywa się pod działaniem siły równej podwójnej wadze ciężaru. Wyznaczyć największą amplitudę takiego wahadła. Odp.: 120°

19. W pewnym punkcie wewnątrz gładkiej rurki, posiadającej kształt pierścienia kołowego o promieniu a , położonej w płaszczyźnie poziomej, są przyłączone końce dwóch jednakowych elastycznych nici. Naturalna długość każdej nici $= \frac{\pi a}{2}$ naprężenie jest proporcjonalne do wydłużenia i współczynnik proporcjonalności $= k$. Nici te naciągnięto w odwrotnych kierunkach /wewnątrz rurki/ i pozostałe końce przyłączono do punktu materialnego o masie m . Wyznaczyć okres wahań tego punktu, jeżeli odchylenie początkowe nie przekracza ćwierci obwodu pierścienia.

Odp.: Wahania są izochroniczne i okres $= \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$.

20. Punkt materialny zsuwa się po gładkiej cykloidzie o osi pionowej, wyszedłszy z ostrza bez początkowej szyb-

kości. Okazać że przyspieszenie całkowite jest skierowane do środka koła tworzącego i równe g .

21. Ciało o masie m otrzymało szybkość v w ośrodku który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości /współ. proporc. = k /. Jaką drogę przebiegnie to ciało w ciągu t sek?

Odp.: $\frac{m}{k} \lg \frac{v \cdot kt + m}{m}$.

22. Wyznaczyć pracę, którą wykonała ziemską siłą ciężenia podczas spadania meteorytu, który na powierzchni ziemi waży 1 kg . /Należy uważać, że meteoryt doszedł do powierzchni ziemi z odległości nieskończenie wielkiej/.

Odp.: 6370000 kilogramometrów.

23. Punkt materialny musi pozostawać na łańcuchowej o parametrze a i jest przyciągany do kierownicy z siłą prostopadłą do tej prostej i proporcjonalną do odległości /współcz. prop. = k /. Wyznaczyć pracę, którą wykona ta siła, gdy punkt materialny dojdzie z położenia P do wierzchołka A , jeżeli łuk $PA = s$.

Odp.: $\frac{ks^2}{2}$.

24. Punkt materialny jest przyczepiony do końca sznura, zarzuconego na gładką tarczę kołową, położoną w pł-

szczyźnie pionowej. W początku punkt znajdował się na końcu średnicy poziomej, a następnie został wciągnięty do szczytu tarczy ze stałym przyspieszeniem stycznym g . Wyznaczyć stosunek pracy, wykonanej na pierwszej połowie drogi, do pracy, wykonanej na drugiej.

Odp.: $\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{\pi + 4 - 2\sqrt{2}}$.

25. Do polerowania podłogi służy kamień, ważący 40kg . Jego współczynnik tarcia o podłogę $= 0,3$. Robotnik przesuwając kamień 10 razy na minutę o $1,2\text{m}$. w jedną i drugą stronę. Wyznaczyć sprawność robotnika.

Odp.: $4,8$ kilogramometrów na sek.

26. Staw o pojemności 5000m^3 ma być opróżniony za pomocą pompy, której współczynnik użytecznego skutku $= 0,8$. Motor rozwija dwa konie, a wodę trzeba odprowadzać na wysokość 3m . Ile czasu zajmie opróżnienie stawu?

Odp.: 34 godz. 43m .

27. Robotnik wyciągnął przy pomocy linki i bloka nieruchomego wiadro o masie m ze studni o głębokości h . Cała czynność trwała t sek. Z początku robotnik wywierał stałą siłę, następnie wypuścił linkę, i wiadro po pewnym czasie zatrzymało dokładnie u wylotu studni. Wyznaczyć największą sprawność, z jaką pracował robotnik?

Odp.. $\frac{2mg^2ht}{gt^2 - 2h}$

28. Sznur bez końca o długości 2ℓ przechodzi przez gładkie poziome kołki, leżące na jednym poziomie. Na sznur są nawleczone dwie paciorki o masach m i M . Pierwszą z nich podnosimy do punktu środkowego linii kołków i następnie pozwalamy jej spadać. Jaka powinna być odległość pomiędzy kołkami, aby paciorki doszły tylko do spotkania?

Odp.: $\frac{(3M+m)(M-m)\ell}{(M+m)^2}$

29. Punkt masy M obiega koło na gładkiej płaszczyźnie poziomej, będąc przywiązany do środka nierozciągalną nicią. W pewnej chwili M uderza o inny punkt masy m , pozostający dotychczas w spoczynku, punkty zlepiają się i dalej obiegają razem to samo koło. W jakim stosunku zmieni się naprężenie nici?

Odp.: Stosunek nowego naprężenia do poprzedniego = $\frac{M}{M+m}$

30. Ciężki jednorodny łańcuch wypełnia cienką gładką rurkę, posiadającą kształt ćwiartki koła o promieniu a ; jeden z promieni granicznych tej ćwiartki jest pionowy, a drugi poziomy. Łańcuch zaczyna spadać ze stanu spoczynku; wyznaczyć szybkość jego w chwili, gdy górny koniec wychodzi z rurki.

Odp.: $\sqrt{\frac{ga(\pi^2+8)}{2\pi}}$.

32. Jednorodny łańcuch o długości l tworzy stos na samym brzegu stołu. Jeden koniec wysunięto cokolwiek po za brzeg, skutkiem czego łańcuch zaczął się stopniowo zsuwać. Z jaką szybkością zejdzie ze stołu koniec drugi?

Odp. $\sqrt{\frac{2gl}{3}}$.

32. Do końca łańcucha, tworzącego stos na płaszczyźnie poziomej, jest przywiązany pocisk, który waży tyle, co a metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha wniesie się w górę, gdy nadamy pociskowi szybkość pionową $\sqrt{2gh}$.

Odp.: $\sqrt[3]{a^2(3h+a)} - a$.

33. Wyznaczyć ramię bezwładności płyty półkolistej o promieniu a względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy.

Odp.: $k^2 = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2} \right)$.

34. Granicę cienkiej płyty stanowi parabola $y^2 = 4px$ i prosta prostopadła do osi paraboli, przeprowadzona w odległości c od wierzchołka. Wyznaczyć ramiona bezwładności względem osi i względem stycznej w wierzchołku.

Odp.: Kwadraty wynoszą odpowiednio $\frac{4cp^2}{5}$ i $\frac{3c^2}{7}$.

35. Wyznaczyć ramię bezwładności półkuli o promieniu a względem stycznej w wierzchołku.

$$\text{Odp.: } k^2 = \frac{13a^2}{20}.$$

36. Wyznaczyć ramię bezwładności paraboloidy obrotu, w której promień podstawy = b , względem osi obrotu.

$$\text{Odp.: } k^2 = \frac{b^2}{3}.$$

37. Wyznaczyć ramię bezwładności sześciennego pudełka o cienkich ścianach i krawędzi a względem krawędzi.

$$\text{Odp.: } \frac{7a^2}{9}.$$

38. Dowieść, że momenty bezwładności półkulistej cza-
szy względem wszystkich prostych, przechodzących przez śro-
dek a także względem wszystkich prostych, przechodzących
przez wierzchołek, są równe.

39. Wyznaczyć ramię bezwładności sztaby o długości l
względem prostej, przechodzącej przez koniec i tworzącej
ze sztabą kąt α .

$$\text{Odp.: } k^2 = \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{3}.$$

40. Wyzn. ramię bezwładności prostokąta, mającego bo-
ki a i b , względem przekątnej.

$$\text{Odp.: } k^2 = \frac{a^2 b^2}{6(a^2 + b^2)}.$$

41. Promień podstawy prostego stożka $= a$, a wysokość $= h$. Wyznaczyć ramię bezwładności względem tworzącej.

Odp.: $\frac{3a^2(a^2 + 6h^2)}{20(a^2 + h^2)}$.

42. Dwie lekkie sztaby o długościach a i $2a$ są połączone sztywno w O pod kątem prostym i zaopatrzone na końcach w kule, ważące odpowiednio Q i $\frac{Q}{2}$. Sztaby mogą się obracać około O w płaszczyźnie pionowej i wirują ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, przechodzącej przez O , przyczem pierwsza tworzy z tą osią stały kąt φ . Okazać, że $\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{a\omega^2}{g}$.

43. W zwykłym kołowrocie promień koła $= a$, i promień wału $= b$. Na kole i na wale są nawinięte sznury, dźwigające odpowiednio ciężary P i Q . Wyznaczyć przyspieszenie ciężaru P , uważając masę kołowrotu za znikomą.

Odp.: $\frac{a(aP - bQ)g}{a^2P + b^2Q}$.

44. Planeta obraca się około swej osi z tak wielką szybkością kątową, że ciała na jej równiku pozornie nie mają ciężaru. Dowieść, że we wszystkich okolicach powierzchni planety piony przybierają kierunek równoległy do osi.

45. Prostokątna deska o masie M może się obracać o-

koło osi poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do dwóch boków; długość boku prostopadłego do osi $= 2a$. Gdy deska zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, położono na niej w odległości c od osi punkt materialny o masie m ; współczynnik tarcia punktu o deskę $= f$. Przy jakim nachyleniu deski do poziomu punkt zacznie się zsuwać?

Odp.: $\arctan \frac{fMa^2}{Ma^2 + 9mc^2}$.

46. Przez gładki poziomy kołek przechodzi sznur, na końcach którego wiszą masy M i m . Wyznaczyć przyspieszenie środka ciężkości tych mas, a następnie reakcję, którą kołek wywiera na sznur.

Odp.: Reakcja $= \frac{4Mmg}{M+m}$.

47. Trzy jednakowe punkty materialne A, B, C są połączone nierozciągalną nicią tak, że $AB=BC$. Z początku punkt A jest przymocowany, a dwa pozostałe krążą koło niego, i nić jest wyprostowana. W jakim stosunku zmienia się naprężenia obydwóch części nici, gdy wyswobodzimy punkt A ?

Odp.: W AB naprężenie spadnie do $\frac{2}{3}$ w BC do $\frac{1}{2}$.

48. Kula żelazna o promieniu 50cm robi 120 obrotów na minutę. Ile obrotów na minutę będzie robiła kula, gdy cięciwa 2452 kilogramometry siły żywej?

Odp.: 60.

49. Ile trzeba wyłożyć pracy, aby kamień młyński, ważący 820 kg o średnicy $1,4\text{ m}$ wprowadzić w ruch obrotowy o 108 obrotach na minutę, nie rachując strat na tarcie?

Odp.: 1300 kilogramometrów.

50. Wydrążony żelazny cylinder o osi poziomej posiada promień zewnętrzny $R = 20\text{ cm}$, promień wewnętrzny $r = 10\text{ cm}$ i długość $a = 3\text{ m}$. Na cylinder jest nawinięty sznur, na którym wisi ciężar $Q = 10\text{ kg}$. Jaką szybkość kątową powinien posiadać cylinder, aby jeszcze podnieść ciężar o $h = 5\text{ m}$ wyżej? Odp.: $4,19$.

51. Cylinder o promieniu r , wirujący około osi, postawiono na płaszczyźnie poziomej. W chwili, gdy podstawa dotknęła płaszczyzny, cylinder robił u obr. na min., a współcz. tarcia $= f$. Ile jeszcze obrotów zrobi cylinder?

Odp.: $\frac{\pi r n^2}{4800 f g}$.

52. Jednorodna laska AB o długości $2a$ jest zawieszona swobodnie za koniec A na takiej wysokości, że koniec B znajduje się nad samą ziemią. Nadajemy lasce pewną szybkość kątową, a gdy dojdzie do położenia poziomego, wyśledzamy koniec A . Jaka powinna być ta początkowa szybkość

aby laska, spadając, utkwiała końcem B w ziemi?

$$\text{Odp.: } \frac{3g(3\pi^2 + 6\pi + 1)}{4a(3\pi + 2)}.$$

53. Okrągła tarcza, ważąca Q , jest osadzona w punkcie C obwodu na osi poziomej, prostopadłej do płaszczyzny tarczy. Tarcza wyruszyła z położenia, w którym średnica, przechodząca przez C , stała pionowo nad tym punktem.

Wyznaczyć reakcje osi po obrocie o 90° i o 180° .

$$\text{Odp.: } \frac{\sqrt{17} Q}{3}, \text{ i } \frac{11 Q}{3}.$$

54. Sztaba o długości $2a$ i masie M obraca się z szybkością kątową ω około nieruchomej osi, która przechodzi przez koniec O sztaby i tworzy z nią kąt α . Wyznaczyć wektor H względem punktu O .

$$\text{Odp.: } \frac{4Ma^2\omega \sin \alpha}{3}.$$

55. Kula o masie M i promieniu a obraca się z szybkością kątową ω około średnicy, a średnica z szybkością 2ω około prostej, która tworzy z nią kąt 60° i przechodzi przez koniec O . Wyznaczyć wektor H względem O .

$$\text{Odp.: } H = \frac{Ma^2\omega \sqrt{163}}{5}.$$

56. Okazać, że wektor H , dowolnego układu względem punktów prostej równoległej do szybkości środka ciężkości jest stały co do wielkości i kierunku.

57. Wektor H względem środka ciężkości jest prostopadły do jego szybkości; wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, względem których moment ilości ruchu jest równy zeru.

58. Ciała, tworzące układ, pozostawały początkowo w spokoju; przyciągają się one pomiędzy sobą, lecz poza tem żadne inne siły na nie nie działają. Pod działaniem przyciągania ciała się zeszkły i powstało jedno ciało sztywne. Okazać, że pozostaje ono w spokoju.

59. Na szale wagi, z których każda waży Q spadły jednocześnie ciężary Q_1 i Q_2 z wysokości h_1 i h_2 . Wyznaczyć początkową szybkość szal.

$$\text{Odp.: } \frac{(Q_1 \sqrt{h_1} - Q_2 \sqrt{h_2}) \sqrt{2g}}{2Q + Q_1 + Q_2}.$$

60. Trzy jednakowe sztaby o długości a , połączone gładkimi zawiasami posiadają ruch postępowy o szybkości v na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc linię prostą prostopadłą do tej szybkości. Po jakim czasie spotkają się końce sztab skrajnych, gdy zatrzymamy środek średniej?

$$\text{Odp.: } \frac{4a\pi}{9v} \quad \frac{2\sqrt{2}a\pi}{9v} \quad (?)$$

61. Trzy jednakowe sztaby, połączone przygubami, tworzą na gładkim stole linię prostą. Wymierzamy prostopadle

do tej prostej w sam środek impuls F . Wyznaczyć impulsy, które otrzymają sztaby boczne.

Odp.: $\frac{F}{6}$.

62. Sztaba AB wiruje około końca A . Jak zmieni się siła żywa sztaby, gdy wyswobodzimy A i jednocześnie zatrzymamy B ?

Odp.: Zmniejszy się poczwórnice.

63. Dwie tarcze cylindryczne o masach m_1, m_2 i promieniach a_1, a_2 , położone w jednej płaszczyźnie pionowej, mogą się swobodnie obracać około osi, przechodzących przez ich środki i prostopadłych do owej płaszczyzny. Na obwodach tarcz są umocowane końce wiotkiego, lekkiego pasa, daleko dłuższego niż odległość pomiędzy punktami umocowania. Pas w części spoczywa na obwodach, a w części zwisa pomiędzy tarczami. Nadajemy pierwszej tarczy szybkość kątową ω i pozostawiamy układ samemu sobie. Jakie szybkości kątowe będą miały tarcze, gdy pas się wypręży?

Odp.: $\frac{m_1 \omega}{m_1 + m_2}, \frac{m_2 a_1 \omega}{(m_1 + m_2) a_2}$.

64. Dwie jednakowe sztaby AB i BC każda o długości a tworzą linię prostą i biegną na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością v , prostopadłą do AC . Jakie szybkości kątowe będą miały w pierwszej chwili sztaby, gdy

zatrzymamy koniec A ?

$$\text{Odp.: } \frac{9v}{7a} \text{ i } -\frac{3v}{7a}.$$

65. Końce jednorodnego pręta o długości $2a$ mogą się swobodnie poruszać po okręgu koła, którego promień wynosi $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. W środku pręta siedzi owad, którego masa jest równa masie pręta. O jaki kąt obróci się pręt w czasie t , gdy owad pobiegnie po nim ze stałą szybkością względną v ?

$$\text{Odp.: } \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{vt}{a}.$$

66. Rurka wewnątrz gładka w postaci koła o promieniu a leży na gładkim stole i może się swobodnie obracać około punktu A obwodu. W rurce w punkcie B na przeciwnym końcu średnicy, przechodzącej przez A , znajdował się punkt masy o masie dwa razy mniejszej od masy rurki. Rurka była w spokoju, gdy punkt masy otrzymał szybkość v_0 . Jaką szybkość względną będzie miał ten punkt po przejściu łuku $a\varphi$ rurki?

$$\text{Odp.: } \frac{2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4 + \sin^2 \varphi}}.$$

67. Jednorodna belka o długości a spoczywa poziomo na dwóch podstawkach, położonych symetrycznie względem środka. Jaka powinna być odległość pomiędzy podstawkami, aby reakcja jednej z nich nie uległa zmianie w chwili, gdy usuniemy drugą?

Odp.: $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

68. Kula jednorodna o promieniu r i gęstości μ wisi na sznurze. Obracamy ją n razy około średnicy pionowej i pozostawiamy samej sobie. Przyjmując, że moment, który sznur wywiera na kulę, jest proporcjonalny do kąta skręcenia, i że współczynnik proporcjonalności $= \lambda$ -, znaleźć kąt, o który obróci się kula w czasie t .

Odp.: $2 \pi n \cos t \sqrt{\frac{15 \lambda}{8 \mu \pi r^5}}$.

69. Sześcian jednorodny może się obracać około jednej z krawędzi, umocowanej w położeniu poziomem. Długość krawędzi jest równa $2a$. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego.

Odp.: $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

70. Dwa wahadła fizyczne o masach m_1, m_2 , są osadzone na jednej osi poziomej. Odległości środków ciężkości od osi są odpowiednio równe h_1 i h_2 , a długości równoważnych wahadeł prostych l_1 i l_2 . Wahadła te połączono sztywno, gdy środki ciężkości znalazły się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś. Wyznaczyć dla takiego wahadła złożonego długość równoważnego wahadła prostego.

Odp.: $\frac{m_1 h_1 l_1 + m_2 h_2 l_2}{m_1 h_1 + m_2 h_2}$.

71. Koło rozpadowe zostało umontowane w taki sposób, że płaszczyzna jego tworzy z osią wała kąt α . Moment bezwładności koła względem średnicy $= A$ i względem osi symetrii $= C$. Wyznaczyć moment pary, działającej nałożyska, gdy wał posiada stałą szybkość kątową ω .

Odp.: $(C - A) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

72. Tarcza kołowa, której środkiem jest punkt O , a promień $= r$, otrzymuje uderzenie w punkt A obwodu i może się obracać około cięciwy prostopadłej do AO . W jakiej odległości od środka powinna być ta cięciwa, aby uderzenia nie wywołały wstrząszeń.

Odp.: $\frac{r}{4}$.

73. W jaki sposób należy uderzyć tarczę okrągłą, leżącą na gładkim stole, aby zaczęła się obracać około jednego z punktów obwodu?

Odp.: Linia uderzenia powinna dzielić prostopadłą średnicę w stosunku $3:1$.

74. Jednorodna sztaba o masie m jest oparta końcem A o gładki ścian, a środek jej znajduje się na wysokości h nad stołem. Z jaką szybkością środek dojdzie do stołu, gdy sztaba zostanie wyzwolona?

Odp.: $\sqrt{\frac{3gh}{2}}$.

75. Obręcz kołowa o masie m wisi na dwóch kołkach, położonych na jednym poziomie; widać je ze środka obręczy pod kątem 2α . Wyznaczyć reakcje, którą jeden z kołków wywiera na obręcz w chwili, gdy drugi zostaje usunięty w dwóch przypadkach: /1/ jeżeli kołki są gładkie, /2/ gdy są chropowate.

Odp.: $mg \cos \alpha$ i $\frac{mg}{2} \sqrt{1+3\cos^2 \alpha}$.

76. Drut AB , zgięty w formie półkola, obraca się około końca A ze stałą szybkością kątową na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć punkt C drutu, w którym działa największy moment zginający.

Odp.: Kąt centralny φ , odpowiadający łukowi AC , czyni zadość równaniu $\tan \varphi = \pi - \varphi$.

77. Dwie korby równe i równoległe, każda o długości r są połączone zapomocą przegubów sztabą o długości $2a$ i masie M . Szybkość kątowna korb jest stała i równa ω . Wyznaczyć największy moment zginający w sztabie.

Odp.: $\frac{Mar\omega^2}{4}$.

78. Sztaby OA i AB są połączone sztywno w A pod kątem prostym i obracają się około O w płaszczyźnie OAB ze stałą szybkością kątową ω . Długość sztaby AB jest równa a i waga Q . Wyznaczyć moment zginający w przekroju C sztaby OA , położonym w odległości x od O .

Odp.: $\frac{Q\omega^2ax}{2g}$.

79. Kula o masie m uderza centralnie kulę o masie mn i po uderzeniu szybkości kul są równe i odwrotne. Wyznaczyć współczynnik restytucyi.

Odp.: $\frac{2}{n-1}$.

80. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej kładziemy trzy kule doskonale sprężyste w linii prostej. Udzielamy następnie jednej ze skrajnych szybkość tak, aby uderzyła centralnie środkową, a środkowa uderzy drugą skrajną. Masy skrajnych wynoszą odpowiednio m_1 i m_2 ; jaka powinna być masa środkowej, aby druga skrajna otrzymała szybkość jak największą.

Odp.: $\sqrt{m_1 m_2}$.

81. Dwa ciężary P i Q wiszą na końcach sznura, przechodzących przez nieruchomy blok. W początku ciężary są w spoczynku na wysokości h nad zupełnie niesprężystą płaszczyzną poziomą; po wyzwobodzeniu większy ciężar P robi szereg uderzeń w ową płaszczyznę. W jakim czasie ruch ustanie całkowicie?

Odp.: $3\sqrt{\frac{3h(P+Q)}{g(P-Q)}}$.

82. Dwie jednakowe gładkie kule leżą na stole; trze-

cia taka sama kula uderza obydwie i zatrzymuje się. Wyznaczyć współczynnik restytucyi.

Odp.: $\frac{2}{3}$.

83. Na prostokątnym bilardzie $ABCD$ przy boku AB w punkcie P leży kula $AP = b_1$, $BP = b_2$, $BC = a$, i współczynnik restytucyi $= \varepsilon$. W jakim kierunku należy uderzyć kulę, aby ta, uderzywszy po kolei wszystkie boki, powróciła do punktu P ?

Odp.: Szukany kierunek tworzy z AB kąt $\arctan \frac{a\varepsilon}{b_2 + \varepsilon b_1}$.

84. Punkt materialny o masie m spada na koniec poziomej belki, osadzonej na poziomej osi, oś ta przechodzi przez środek ciężkości belki. Współczynnik restytucyi $= \varepsilon$. Jaka powinna być masa belki, aby punkt materialny odskończył?

Odp.: Większa od $\frac{3m}{\varepsilon}$.

85. Sztaba jednorodna spada pionowo bez ruchu obrotowego i uderza jednym końcem w gładką płaszczyznę poziomą. Jaki kąt powinna sztaba tworzyć z poziomem, aby jej szybkość katowa była po uderzeniu największa?

Odp.: $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

