2Q. Wyznaczyć położenia równowagi i określić jej rodzaje.

Odp.: Jeżeli $\vartheta$ oznacza kąt, który sznur tworzy z pionem, to równowaga trwała zachodzi przy $\vartheta = 0$, a chwiejna przy $\cos\vartheta = \frac{P}{2Q}$.

## CYNEMATYKA.

1. Torem punktu ruchomego jest linia prosta, a równanie ruchu $s = t^2 - 20t + 75$. Gdzie znajdował się punkt, gdy zaczynano rachować czas, w jakiej chwili przebiegał przez początek toru,- w którem miejscu i w której chwili kierunek ruchu zmienił się na odwrotny, w jakim kierunku punkt biegł przedtem, i w jakim potem?

2. Punkt biegnie po linii prostej według równania $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 5$; wyznaczyć odległość pomiędzy punktami zwrotu. Odp.: 108.

3. Ruch punktu jest prostoliniowy, a równanie ruchu $s = a\sin(\alpha + \omega t)$, gdzie $a$, $\alpha$ i $\omega$ są wielkościami stałemi. Gdzie znajdował się punkt ruchomy, gdy zaczynano rachować czas, kiedy przechodził po raz pierwszy od owej chwili przez po-

czątek toru, w jakich położeniach odbywają się zmiany kierunku ruchu, i ile czasu upływa pomiędzy dwiema następującemi po sobie zmianami?

Odp.: Pomiędzy dwiema zmianami upływa $\frac{\pi}{\omega}$ sekund.

4. Dwa punkty biegną tąż samą prostą, a ich równania ruchu są: $s = t^2 + 15t - 25$ i $s = 18t + 15$. W których miejscach nastąpią spotkania?

Odp.: $s_1 = -165$ i $s_2 = 303$.

5. Dwa punkty biegną prostemi $x$ i $y$, przecinającemi się w $O$ pod kątem prostym. Jeżeli punkt $O$ obierzemy za początek obydwóch torów, to równania ruchu będą $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$. Wyznaczyć najmniejszą odległość pomiędzy punktami ruchomymi. Odp.: $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$.

6. Równanie ruchu punktu: $s = 2t^3 - 18t^2 + 50t - 50$. Z jaką szybkością punkt ten przechodził przez początek toru? Odp.: $20$.

7. Prosta $x$ jest nieruchoma, a prosta $a$ posuwa się ze stałą szybkością $v$ w kierunku prostopadłym do $a$, tworząc z prostą $x$ stały kąt $\alpha$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostych $a$ i $x$. Odp.: $\frac{v}{\sin\alpha}$.

8. Prosta obraca się około punktu $O$ ze stałą szybkością kątową $\omega$; wyznaczyć szybkość punktu przecięcia tej prostej z okręgiem, który przechodzi przez $O$ i którego promień $=a$. Odp.: $2a\omega$.

9. Punkt $M$ biegnie po prostej $OM$ w kierunku $OM$ z szybkością $v$. Jest on połączony sznurem, przechodzącym przez blok $O$, z innym punktem $P$, który porusza się po prostej $x$, równoległej do $OM$. Wyznaczyć szybkość, którą punkt $P$ posiada w chwili, gdy prosta $PO$ tworzy z $x$ kąt $\varphi$. Odp.: $\frac{v}{\cos\varphi}$.

10. Równania ruchu punktu są $x=\frac{a^2t^2}{2p}$, $y=at$. Wyznaczyć tor oraz szybkość w początku rachuby czasu.

Odp.: Torem jest parabola styczna do osi $y$, szukana szybkość $=a$.

11. Równania ruchu punktu są $x=a\cos^3\omega t$; $y=a\sin^3\omega t$. Wyznaczyć tor punktu, położenie, w którem szybkość była największa, oraz tę szybkość największą.

Odp.: Szybkość największa $=\frac{3a\omega}{2}$.

12. Punkt porusza się według równań $x=t^2-4t+3$

i $y=5t-9$ . Wyznaczyć położenie w którem szybkość była najmniejsza i kierunek tej szybkości.

Odp.: Szybkość najmniejsza jest prostopadła do osi $x$.

13. Punkt ruchomy zajmował w pewnej chwili położenie $(o,a)$, a rzuty szybkości jego na osi $x$ i $y$ wynoszą odpowiednio $\frac{ac}{y}$ i $\frac{c\sqrt{y^2-a^2}}{y}$. Wyznaczyć szybkość i tor.

Odp.: Szybkość $=c$, a torem jest łańcuchowa.

14. Prosta obraca się około ogniska $F$ paraboli, przyczem punkt jej położony w odległości jednostkowej od $F$, posiada szybkość $2\omega$. Odległość ogniska od wierzchołka $=p$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostej z parabolą w chwili, gdy pierwsza tworzy z osią paraboli kąt $\varphi$. Odp.: $\frac{2\omega p}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

15. Dwa okręty, zajmujące dane położenia, płyną z szybkościami danemi. Wyznaczyć wykreślnie szybkość, z którą powinien płynąć trzeci okręt, którego położenie jest również dane, aby jadącym na nim wydawało się, że dwa pierwsze są nieruchome. / Widzowi przedmiot odległy wydaje się nieruchomym, jeżeli szybkość tego przedmiotu

jest skierowana wzdłuż prostej, łączącej go z okiem widza/.

16. Deszcz pada pionowo z szybkością $v$. Pod jakim kątem do pionu należy ustawić laskę parasola, idąc z szybkością $u$, aby najskuteczniej zasłonić się od deszczu?

Odp.: $\operatorname{arc\,tan} \frac{u}{v}$.

17. Czy do wagonu bez dachu więcej wpada deszczu na sekundę podczas postoju, czy podczas biegu?

18. Okrągła tarcza obraca się około środka; okazać, że względem punktu $A$, położonego na obwodzie, szybkości wszystkich innych punktów obwodu są skierowane do przeciwległego końca średnicy, przechodzącej przez $A$.

19. Dwa punkty ruchome $P$ i $Q$ zajmują w pewnej chwili położenia $O$ i $A$. Pierwszy porusza się z szybkością stałą $u$, prostopadłą do $OA$, szybkość zaś drugiego jest wciąż skierowana do pierwszego, i odległość pomiędzy niemi jest stale równa $a$. Jaki kąt utworzą te szybkości po upływie $t$ sekund?

Odp.: $2 \operatorname{arc\,tan} e^{\frac{ut}{a}}$.

20. Koło obraca się w swej płaszczyźnie około punktu $A$, położonego na obwodzie, z szybkością kątową $\omega$, a punkt $P$ porusza się po obwodzie w kierunku odwrotnym z szybkością kątową $2\omega$ względem koła. Okazać, że torem punktu $P$ jest linia prosta i że szybkość bezwzględna $=$ $= 2a\omega\cos\left(\frac{s}{2a}\right)$, gdzie $s$ oznacza łuk $AP$ i $a$ promień koła.

21. Dwie sztaby $AB$ i $BC$ połączone w $B$ za pomocą przegubu, poruszają się w płaszczyźnie. Wyznaczyć wykreślnie szybkość przegubu $B$, mając dane szybkości końców $A$ i $C$.

22. Wyznaczyć szybkość kątową ziemi i wskazać, w którą stronę jest zwrócona na osi ziemskiej $NS$.

Odp.: $\omega = 0,00007$.

23. Dwie proste obracają się około środków $O_1$ i $O_2$ przyczem ich punkt przecięcia obiega okrąg, przechodzący przez te środki. Szybkość kątowa pierwszej prostej $=$ $=\omega$; wyznaczyć szybkość kątową drugiej.

24. Okrąg o promieniu $a$ obraca się w swej płaszczy-

źnie około punktu $O$ z szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć linię przewodnią w dwóch przypadkach: (1) gdy $O$ leży w środku, (2) gdy leży na okręgu.

Odp.: Okrąg o promieniu $a\sqrt{1+\omega^2}$.

25. Torem punktu $A$ układu płaskiego jest okrąg, którego środek leży w $O$, a promień $= r$, torem zaś punktu $B$ jest prosta, przechodząca przez $O$. Wyznaczyć szybkość punktu $B$ w funkcji kąta $AOB = \varphi$, oraz szybkości kątowej $\omega$ promienia $OA$.

Odp.: $\dfrac{r\omega\left(r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}\right)\sin\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$, gdzie $l = AB$.

26. Prosta, należąca do układu ruchomego, toczy się po okręgu. Wyznaczyć tor punktu, który przechodził przez środek okręgu. Odp.: Spiralna Archimedesa.

27. Srodkiem chwilowym jest wciąż jeden i ten sam punkt układu ruchomego; dowieść, że punkt ten zajmuje stałe położenie na płaszczyźnie nieruchomej.

28. Spiralna logarytmiczna toczy się po linii prostej; wyznaczyć tor jej bieguna. Odp.: Linia prosta.

29. Układ obraca się około punktu $A$ ze stałą szyb-

kością kątową $\omega$, a ten punkt $A$ biegnie prostą $a$ ze stałą szybkością $v$. Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych.

30. Punkt $M$ układu płaskiego obiega spiralną Archimedesa, której biegun leży w $O$, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r=a\varphi$, a prosta $m$ układu, zawierająca punkt $M$, przechodzi wciąż przez $O$. Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych.

31. Punkt $M$ układu obiega spiralną logarytmiczną, której biegun leży w $O$, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r=ae^{\varphi}$, a prosta $m$ układu, zawierająca punkt $M$, przechodzi wciąż przez $O$. Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych.

32. Jeden bok ruchomego kąta $ABC$ przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt $A$, a punkt $C$, położony na drugim boku, pozostaje na nieruchomej prostej $x$, przyczem odległość punktu $A$ od $x$ jest równa $BC$. Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych.

33. Wierzchołek kąta prostego obiega spiralną lo-

garytmiczną $r = ae^{\varphi}$, a jeden z jego boków przechodzi przez biegun; wyznaczyć obwiednię drugiego boku.

34. Wyznaczyć promienie krzywizny w wierzchołkach elipsy, której osie wynoszą $2a$ i $2b$.

Odp.: $\frac{a^2}{b}$ i $\frac{b^2}{a}$.

35. Punkty $O_1$ i $O_2$ są środkami krzywizny linii środków chwilowych stałej i ruchomej w punkcie zetknięcia; okazać, że $O_1$ jest środkiem krzywizny toru punktu $O_2$.

36. Jeden punkt układu obiega koło, a drugi prostą, przechodzącą przez środek tego koła. Wykreślić koło przegięć w jednem z położeń układu.

37. Półkula jednorodna o promieniu $a$ jest oparta o kulę powierzchnią krzywą. Jaki powinien być promień kuli, aby równowaga była trwała?

Odp.: Większy od $\frac{5a}{3}$.

38. Punkt $P$ biegnie do stałego punktu $O$ z szybkością $\alpha x^n$, gdzie $\alpha$ jest stałe, a $x = OP$. Wyznaczyć

przyśpieszenie.

Odp.: Przyśpieszenie jest odwrócone od $O$ i $= \alpha^2 n x^{2n-1}$.

39. Ruchoma styczna do paraboli $y^2 = 4px$ przecina oś $y$ w punkcie $B$, a oś $x$ w $C$. Szybkość punktu $B$ jest stała i równa $v$. Wyznaczyć przyśpieszeniepunktu $C$.

Odp.: $\frac{2v^2}{p}$.

40. Punkt obiega cykloidę $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1-\cos\vartheta)$, przyśpieszenie jego jest wciąż równoległe do osi odciętych i wynosi $p_0$, gdy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcyi $\vartheta$.

Odp.: $\frac{p_0(1-\cos\vartheta)}{\sin^3\vartheta}$.

41. Pociąg wyszedł ze stacyi, biegł minutę ze stałem przyśpieszeniem, następnie $2\frac{1}{2}$ minuty ze stałą szybkością, ostatnie $30$ sekund ze stałem opóźnieniem i zatrzymał się na stacyi następnej. Odległość pomiędzy stacyami wynosi $3\frac{1}{4}$ klm. Wyznaczyć owo przyśpieszenie, opóźnienie i szybkość stałą.

Odp. $3600$; $7200$ $60$ w klm. i godzinach.

42. Pociąg, idąc ze stałem przyśpieszeniem $p$, przechodził przez dwa następujące po sobie przystanki z szybkościami $v_1$ i $v_2$. Wyznaczyć odległość pomiędzy przystan-

kami. Odp.: $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$.

43. Dwie łódki na wyścigach ruszyły z szybkościami $v_1$, $v_2$, płynęły z przyśpieszeniami $p_1$, $p_2$ i bieg skończył się nierozegraną. Wyznaczyć odległość mety od startu.

Odp.: $\frac{2(v_1 - v_2)(v_1 p_2 - v_2 p_1)}{(p_1 - p_2)^2}$.

44. Punkty $A$ i $B$ wyruszyły jednocześnie z początku współrzędnych; pierwszy biegnie po osi $x$ ze stałem przyśpieszeniem $p$, a drugi po osi $y$ ze stałą szybkością $v$. Wyznaczyć obwiednię prostej $AB$.

Odp.: Parabola $y^2 = -\frac{8v^2}{p} x$.

45. Pociski $A$ i $B$ pozostawały początkowo na jednym pionie i $AB$ było równe $h$. Jednocześnie $A$ zaczyna swobodnie spadać, a $B$ zostaje wyrzucony pionowo w górę. Spotkanie nastąpiło w tym samym miejscu, z którego wybiegł $B$, wyznaczyć jego szybkość początkową.

Odp.: $\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

46. Z działa, wymierzonego pionowo w górę, dano dwa strzały w odstępie $t$ sek.; początkowa szybkość pocisków była równa $v$. Kiedy nastąpi spotkanie?

Odp.: W $\frac{2v_0 - gt}{2g}$ sek. od drugiego wystrzału.

47. Jaką szybkość posiada punkt, pozostający w ruchu prostym harmonicznym $x = a\sin(\omega t + \alpha)$, gdy odległość jego od środka $= x$.

Odp.: $\pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2}$.

48. Dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$; kąt $A_3$ jest prosty, a boki $A_1A_3$, $A_2A_3$ równe. W $A_1$ znajdował się punkt ruchomy w spoczynku; przyciągają go wierzchołki $A_1$, $A_2$, $A_3$, a udzielane przyśpieszenia są wprost proporcyonalne do odległości /współcz. proporc. $= k^2$ /. Wyznaczyć tor punktu i okres wahań.

Odp.: Okres wahań $= \dfrac{2\pi}{k\sqrt{3}}$.

49. Dwa pociski $A$ i $B$ znajdowały się na jednym poziomie. Pocisk $A$ otrzymał szybkość poziomą w kierunku $B$ i jednocześnie $B$ zaczął spadać. Dowieść, że pociski te się spotkają.

50. Strzelec stoi w odległości $a$ od pionowej ściany, a początkowa szybkość pocisku jego strzelby wynosi $v_0$. Wyznaczyć granicę pomiędzy punktami ściany dosięgalnemi i niedosięgalnemi.

Odp.: Parabola, której parametr $= \dfrac{v_0^2}{g}$, a ognisko leży pod poziomem strzelca na głębokości $\dfrac{a^2 g}{2v_0^2}$.

51. Dowieść, że punkt przecięcia stycznej do toru pocisku z dowolnym pionem porusza się na tym pionie podczas biegu pocisku w przyśpieszeniem ziemskiem.

52. Z punktu $O$ wybiegła jednocześnie pewna liczba pocisków. Prowadzimy z jakiegoś punktu położonego pionowo nad $O$ styczne do torów. Dowieść, że pociski przebiegały jednocześnie przez punkty zetknięcia.

53. Pocisk wybiega w kierunku poziomym z najwyższego punktu kuli o promieniu $a$. Jaka powinna być szybkość początkowa, aby pocisk nie dotknął powierzchni kuli?

Odp Większa od $\sqrt{ag}$.

54. Punkt ruchomy wyszedł z punktu $O$, położonego na danej prostej $x$ z szybkością $v_0$, tworzącą z ową prostą kąt $\alpha$, i posiada przyśpieszenie prostopadłe do $x$, zwrócone do tej prostej i wprost proporcyonalne do odległości; współczynnik proporcyonalności $= \omega$. Wyznaczyć równania ruchu. Odp.: $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin \omega t$.

55. Rzuty przyśpieszenia punktu na osi $x$ i $y$ są odpowiednio równe $-a$ i $a$, a gdy punkt przebiegał przez początek układu, to szybkość jego $v_0$ była skierowana według osi $x$. Wyznaczyć położenie, w którem punkt poruszał się

najwolniej.

Odp.: $\left(\frac{3v_0^2}{8a}, \frac{v_0^2}{8a}\right)$.

56. Pocisk został wyrzucony z szybkością początkową $v_0$ pod kątem $\alpha$. Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie najwyższym.

Odp.: $\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$.

57. Torem punktu jest cykloida, przyśpieszenie jest wciąż skierowane prostopadle do podstawy, i wiadomo, że punkt przybywa do wierzchołka z szybkością $c$. Dowieść, że przyśpieszenie $= \frac{64a^3c^2}{\rho^4}$, gdzie $\rho$ oznacza promień krzywizny.

58. Punkt obiega cykloidę, w której promień koła tworzącego $= a$, przyczem styczna do toru obraca się ze stałą szybkością kątową $\omega$. Wyznaczyć przyśpieszenie.

Odp.: $4a\omega^2$.

59. Punkt $A$ obiega koło o promieniu $a$, przyczem przyśpieszenie jest skierowane do stałego punktu $O$, położonego na obwodzie. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcyi promienia wodzącego $OA = r$.

Odp.: $\frac{8c^2a^2}{r^5}$, gdzie $c$ jest wielkością stałą.

60. Przyśpieszenie punktu ruchomego $M$ jest wciąż skierowane do stałego punktu $O$ i równe $\frac{k^2}{r^3}$, gdzie $r$ oznacza odległość $OM$, a $k^2$ współczynnik proporcyonalności. Punkt $M$ wyruszył z położenia $A$, odległego o $a$ od $O$ z szybkością $\frac{k}{a}$, tworzącą z $OA$ kąt $45^o$. Wyznaczyć tor punktu $M$.

Odp.: $r = ae^{\varphi}$.

61. Punkt posiada stałą szybkość $a\omega$, a jego promień wodzący $r$, wyprowadzony ze stałego bieguna $O$, obraca się ze stałą szybkością kątową $\frac{r\omega}{a}$. Wyznaczyć tor i przyśpieszenie.

Odp.: Torem jest lemniskata, a przyśpieszenie $= 3\omega^2 r$.

62. Tarcza okrągła o promieniu $a$ obraca się około środka ze stałą szybkością kątową $\omega$, a brzegiem tarczy biegnie punkt $M$ ze stałą szybkością względną $w$. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne punktu $M$.

Odp.: $(a\omega + 2w)\omega + \frac{w^2}{a}$.

63. Sztaba obraca się około swego końca z szybkością kątową stałą. Z końca tego wyszedł punkt $M$ z początkową szybkością równą zeru i wędruje po sztabie ze stałem przyśpieszeniem $p$. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne, które posiadał punkt $M$ w chwili, gdy tworzyło ono ze sztabą

kąt $45°$

Odp.: $4p(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

64. Układ $S$ obraca się około punktu $O$ ze stałą szybkością kątową $\omega$, a szybkość względna $w$ punktu $M$ jest stała co do wielkości. Jaki powinien być tor względny punktu $M$, aby jego przyśpieszenie bezwzględne było stale skierowane do punktu $O$ ?

Odp.: Koło o promieniu $\frac{w}{2\omega}$, położone dowolnie, albo koło o promieniu dowolnym, zatoczone z $O$.

65. Punkt $M$ posiada ruch harmoniczny na prostej $x$ ; środkiem tego ruchu jest punkt $O$, okres wynosi $\frac{2\pi}{\omega}$, a amplituda $2a$. Prosta $x$ jest ruchoma, a mianowicie obraca się około $O$ z szybkością kątową $\omega$. Dowieść, że koniec przyśpieszenia bezwzględnego punktu $M$ zatacza około niego okrąg o promieniu $2a\omega^2$.

66. Punkt $A$ układu porusza się po prostej $x$ z daną szybkością stałą, a punkt $B$ po prostej $y$. Wyznaczyć wykreślnie przyśpieszenie punktu $B$.

67. Sztaby $A_1O$ i $A_2O$ są połączone w $O$ przegubem, i cały ten układ porusza się w płaszczyźnie. Znane są szybkości i przyśpieszenia punktów $A_1$, $A_2$; wyznaczyć wykreślnie przyśpieszenie przegubu $O$.