ZBIÓR

zadań z mechaniki

prof.

Z. Straszewicza.

WARSZAWA.

Nakładem „Bratniej Pomocy"

Stud. Politechniki Warszawskiej.

1921.

ZBIÓR ZADAŃ Z MECHANIKI.

STATYKA.

1. Okazać, że wypadkowa sił OA iOB odpowiada podwójnemu odcinkowi OM, gdzie M oznacza środek odcinka AB.

2. Cząsteczka O pozostaje w równowadze pod działaniem trzech sił, z których F jest dana co do wielkości, F′ co do kierunku, a P co do wielkości i kierunku. Wyznaczyć wykreślnie linię działania siły F.

3. Rozłożyć daną siłę R na dwie składowe P_1 i P_2, tworzące kąt 60° tak, aby suma tych składowych była jaknajwiększa. Odp.: $P_1 = P_2 = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

4. Najmniejsza z pięciu sił, wyrażonych przez boki i przekątnie regularnego sześcioboku, wychodzące z jednego wierzchołka, =P. Wyznaczyć wypadkową. Odp.: 6P.

5. Jednorodna sztaba AB = l posiada masę M. Na przedłużeniu jej, w odległości a od końca A, leży punkt o masie m.

przyciągany przez elementy sztaby według prawa Newtona. Wyznaczyć całkowitą siłę przyciągającą. Odp.: $\frac{kMm}{a(a+l)}$, gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności.

6. Pozioma belka CB jest osadzona w C na zawiasie, a w B podtrzymuje ją ściegno AB, tworzące z nią kąt $30°$. Wyznaczyć naprężenie ściegna i siłę, działającą na belkę, gdy na końcu belki wisi ciężar 200 kg. Odp.: 400 i $346{,}5$ kg.

7. Na ciężar Q, zawieszony na sznurze od długości l, działa siła pozioma P. Wyznaczyć kąt φ, który w stanie równowagi tworzy sznur z pionem, a także naprężenie sznura S.
Odp.: $\operatorname{tang} \varphi = \frac{P}{Q}$, $S = \frac{Q}{\cos \varphi}$.

8. Ciężar Q jest utrzymywany na równi pochyłej przez pewną siłę, tworzącą z równią kąt $30°$, a równia tworzy z poziomem także kąt $30°$. Wyznaczyć reakcyę, którą równia wywiera na ciężar. Odp.: $\frac{Q}{\sqrt{3}}$.

9. Na ciężar Q, spoczywający na równi pochyłej, działają trzy siły, z których każda jest równa P. Pierwsza jest skierowana pionowo w górę, druga według linii największego spadku pod górę i trzecia poziomo w tę samą stronę, co i druga. Wyznaczyć kąt nachylenia równi. Odp.: $2 \operatorname{arctang} \frac{P}{Q-P}$.

10. Na poziomy pręt nawleczono dwa pierścienie; do nich przywiązano końce sznura o długości $2l$, na którym zapomocą trzeciego pierścienia zawieszono ciężar, równy największemu naprężeniu, jakie może znieść sznur. Pierścienie na pręcie są stopniowo rozsuwane; przy jakiej odległości pomiędzy nimi sznur się zerwie? Odp.: $l\cdot\sqrt{3}$.

11. Dwie małe lekkie obrączki są nawleczone na gładki łuk koła, położonego w płaszczyźnie pionowej. Przez obrączki przechodzi sznur, do którego przywiązano trzy jednakowe ciężary: dwa na końcach i jeden po środku pomiędzy obrączkami. Wyznaczyć położenie równowagi.

Odp.: Odległość obrączek od najwyższego punktu koła = $=30°$

12. Punkt M, ważący Q, może poruszać się na kole, ustawionem w płaszczyźnie pionowej i posiadającem promień r. Punkt ten jest odpychany przez najniższy punkt okręgu C z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. Współczynnik proporcjonalności $=k$. Wyznaczyć położenie równowagi. Odp.: $CM=\sqrt[3]{\frac{kr}{Q}}$ lub $CM=2r$.

13. Jeden koniec sznura długości c jest umocowany w najwyższym punkcie nieruchomej kuli o promieniu r, do drugiego końca jest przywiązany ciężar P, spoczywający na powierzchni kuli. Wyznaczyć reakcyę R ciężaru na kulę i na-

prężenie sznura S. Odp.: $R = P\cos\frac{c}{r}$, $S = P\sin\frac{c}{r}$.

14. Końce sznura $ABCD$ o długości l są umocowane w nieruchomych punktach A i D, położonych na jednym poziomie w odległości c. Punkty B i C dzielą sznur na trzy części równe i w nich są przyczepione dwa równe ciężary P. Wyznaczyć naprężenia S i T w częściach sznura AB i BC.

Odp.: $T = \frac{P(3c-l)}{\sqrt{4l^2-(3c-l)^2}}$, $S = \frac{2Pl}{\sqrt{4l^2-(3c-l)^2}}$.

15. Na ciało sztywne działają siły równoległe i położone w jednej płaszczyźnie $P_1 = 5$, $P_2 = 3$, $P_3 = -16$, $P_4 = 8\,kg$. Odległości od P_1 do P_2, P_3 i P_4 są odpowiednio równe $50, 130$ i $200\,cm$. Wyznaczyć wypadkową co do wielkości i położenia.

16. Cztery proste równoległe a, b, c i d są przeprowadzone w jednakowych odstępach. Na prostych b i d działają siły, zwrócone w jedną stronę i wynoszące odpowiednio 14 i $20\,kg$. Zastąpić je przez dwie inne siły, działające na prostych a i c. Odp.: 37 i -3.

17. A, B, C i D oznaczają wierzchołki kwadratu. Wyznaczyć wypadkową sił AB, BC, CD, DA, AC i BD.

Odp.: Wypadkowa $= 2AB$ i leży w odległości AB od środka kwadratu.

18. Na boku AB kwadratu $ABCD$, działa siła P. Rozłożyć

ją na trzy składowe, działające na trzech bokach pozostałych.

19. Wzdłuż boków AB, CD, DE i AF foremnego sześcioboku $ABCDEF$ działają siły $2P$, P, $2P$ i P. Wyznaczyć wypadkową.

20. Na wierzchołki A, B i C równobocznego trójkąta ABC działają siły P, $2P$, $3P$, prostopadłe do boków CA, AB, BC i usiłujące obrócić trójkąt w kierunku ruchu wskazówki zegara. Wyznaczyć wypadkową.

Odp.: $P\sqrt{3}$, kierunek BA.

21. Okazać, że płaski układ sił daje się sprowadzić do dwóch sił, działających na dane punkty A i B, przyczem pierwsza tworzy z AB kąt dany.

22. Siły P, $2P$, $4P$, $2P$ działają na bokach kwadratu, obieganych w koło. Wyznaczyć wypadkową pod względem wielkości i położenia.

23. Boki trójkąta, obiegane w koło, wyobrażają siły pod względem wielkości, kierunku i położenia. Okazać, że siły te są równoważne parze, której moment odpowiada podwójnemu polu trójkąta.

Okazać prócz tego, że równoważą się trzy pary, których momenty odpowiadają bokom trójkąta, obieganym w koło.

24. Trójkątna płyta ABC może się obracać w swej płaszczyźnie około pewnego nieruchomego punktu. Na płytę wzdłuż boków BC, CA, BA, działają siły proporcjonalne do tych boków. Dowieść, że aby płyta pozostała w spokoju, to ów punkt nieruchomy musi leżeć na prostej, przechodzącej przez środki boków BC i CA.

25. Dwie jednorodne sztaby AB i BC o długościach c i a są połączone sztywno w B i mają być zawieszone w końcu A. Jaki powinien być kąt ABC, aby sztaba BC zajęła położenie poziome? Odp.: $arc\cos\dfrac{a^2}{c(c+2a)}$.

26. Płyta trójkątna równoboczna o boku a ma być zawieszona na gładkim haku za pomocą sznura, przywiązanego do dwóch wierzchołków. Jaka powinna być długość sznura, aby jeden z boków zajął położenie pionowe? Odp.: $a\sqrt{3}$.

27. Sztaba AB, ważąca $Q\,kg.$, o długości $2a$, może się obracać w płaszczyźnie pionowej około punktu A. Do jej końca B jest przytwierdzona linka, przechodząca przez blok C, położony pionowo nad A tak, że $AC=2a$. Z jaką siłą należy ciągnąć linkę, aby sztaba utworzyła z pionem dany kąt α?

Wyznaczyć także reakcyę R osi A co do wielkości i kierunku.

Odp.: $Q \sin \frac{\alpha}{2}$ i $Q \cos \frac{\alpha}{2}$.

28. Płyta kwadratowa, ważąca Q kg., jest przyczepiona w jednym wierzchołku do ściany zapomocą sznura, którego długość jest równa bokowi płyty, przyczem płaszczyzna jej pozostaje prostopadła do ściany. Wyznaczyć kąt α, który sznur tworzy ze ścianą oraz naprężenie sznura S.

Odp.: $\operatorname{tang} \alpha = 1/3$, $S = \frac{Q\sqrt{10}}{3}$.

29. Cylinder ważący Q kg spoczywa na dwóch płaszczyznach, nachylonych do poziomu pod kątami α i β. Wyznaczyć reakcyę tych płaszczyzn. Odp.: $\frac{Q \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{Q \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

30. Sztaba o długości $2l$ jest oparta o równię pochyłą, nachyloną do poziomu pod kątem α, i o kołek poziomy, równoległy do równi; tworzy ona z równią kąt β. Wyznaczyć długość części sztaby, zawartą pomiędzy równią i kołkiem.

Odp.: $\frac{l \cos(\beta-\alpha) \sin\beta}{\sin\alpha}$.

31. Prosty stożek kołowy o wysokości h i o promieniu podstawy r zawieszono na gładkim poziomym kołku zapomocą sznura, którego jeden koniec jest przywiązany do wierzchołka, a drugi do punktu, położonego na obwodzie podstawy, przyczem oś stożka zajęła położenie poziome. Wyznaczyć długość

sznura. Odp.: $\sqrt{h^2+4r^2}$.

32. Sztaby AB, BC o jednakowych ciężarach, lecz niejednakowych długościach, połączono przegubem w punkcie B, pozostałe zaś końce osadzono na zawiasach w nieruchomych punktach A i C, położonych na jednym pionie. Okazać, że linia działania reakcyi w przegubie B przechodzi przez środek odcinka AC.

33. Cztery jednakowe płyty o długości $2a$ leżą jedna na drugiej. O ile można wysunąć każdą wyższą płytę nad niższą nie naruszając równowagi? Odp.: a, $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{3}$.

34. Dwie równe lekkie sztaby AA_1, BB_1 są połączone przegubem we wspólnym środku C i ustawione w płaszczyźnie pionowej na gładkim poziomym stole. Ich górne końce A, B łączy lekki sznur ADB, na który nawleczono ciężki pierścień D. Okazać, że w położeniu równowagi prosta pozioma, przechodząca przez pierścień D, dzieli na pół odcinki AC i BC.

35. Dwie jednakowe sztaby AB i AC, ważące po Q kg. są połączone w A przegubem i stoją w płaszczyźnie pionowej opierając się końcami B i C o gładką płaszczyznę poziomą. Każdy z końców B i C jest przywiązany sznurem do środka przeciwległej sztaby, a każda sztaba tworzy z poziomem kąt ϑ.

Wyznaczyć naprężenie sznurów. Odp.: $\frac{Q}{8}\sqrt{1+9\cot^2\vartheta}$.

36. Dwie jednakowe sztaby AB i BC są połączone w B przegubem i spoczywają na dwuch gładkich kołkach, położonych na jednym poziomie. Długość każdej sztaby $=2b$, odległość między kołkami $=a$. Wyznaczyć kąt, który każda ze sztab tworzy z poziomem. Odp.: $\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$.

37. Trzy równe jednorodne pręty, z których każdy waży Q, są złączone przegubami w końcach i spoczywają na dwóch gładkich kołkach, położonych na jednym poziomie. Odległość pomiędzy kołkami wynosi połowę długości jednego pręta, a pręt najniższy posiada położenie poziome. Wyznaczyć reakcje w przegubach.

Odp.: w górnym $\frac{5Q}{2\sqrt{3}}$, w dolnych $\frac{Q}{6}\sqrt{57}$.

38 Z jednej sztaby, ważącej Q kg., zrobiono trzy odcinki AB, BC i CD, stanowiące odpowiednio $1/4$, $1/2$ i $1/4$ sztaby. Odcinki te połączono przegubami B i C i położono na gładkiej kuli, której średnica jest równa długości całej sztaby. Z kulą styka się środek odcinka BC oraz punkty A i D. Wyznaczyć reakcję w środku odcinka BC.

Odp.: $\frac{91Q}{100}$.

39. Na równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α, le-

ży ciężar Q, podtrzymywany przez jaknajmniejszą siłę równoległą do równi, a równia stoi na gładkiej podłodze. Jaką siłę poziomą należy przyłożyć do równi, aby utrzymać równowagę, jeżeli kąt tarcia pomiędzy ciężarem i równią $= \varphi$?

Odp.: $\dfrac{Q \cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$.

40. Dwie jednorodne sztaby AB i BC są połączone sztywno w B pod kątem prostym; długość pierwszej jest równa $2a$, drugiej $2b$. Sztaba AB wspiera się w punkcie D na krawędzi stołu /współcz. tarcia $= f$/; wyznaczyć największą możliwą długość wystającej części DB. Przy jakim współczynniku tarcia układ pozostanie w równowadze, opierając się w A?

Odp.: $DB = \dfrac{a^2 + fb^2}{a+b}$.

41. Sztaba AB opiera się w punkcie A o podłogę, a w B jest zawieszona na sznurze, tworząc z poziomem kąt 45°. Współczynnik tarcia sztaby o podłogę $= f$. Wyznaczyć największy kąt, który sznur może tworzyć z pionem.

Odp.: $arctang.\ \dfrac{f}{1-2f}$.

42. Belka AB o długości $2l$ opiera się końcem A o chropowatą podłogę, a w punkcie C spoczywa na pionowym gładkim słupie wysokości h, tworząc z poziomem kąt α. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia belki o podłogę, aby zachodziła równowaga? Odp. $\dfrac{l \sin^2\alpha \cos\alpha}{h - l \sin\alpha \cos^2\alpha}$.

43. Pomiędzy dwiema płaszczyznami, nachylonemi do poziomu pod kątem 45°, spoczywają trzy jednakowe sześciany, z których każdy waży Q. Kąt tarcia sześcianu o sześcian, oraz sześcianu o płaszczyznę $=\varphi$. Jaką siłą pionową należy przyłożyć do sześcianu dolnego, aby go unieść do góry?

Odp. $(2+\sin 2\varphi)\,Q$.

44. Połkula o promieniu a i wadze Q spoczywa krzywą powierzchnią na płaszczyźnie poziomej. Na chropowatej podstawie półkuli leży cząsteczka ważąca P; współcz. tarcia $=f$. Wyznaczyć największą możliwą odległość cząsteczki od środka półkuli. Odp. $\frac{3Qfa}{8P}$.

45. Półkula jest oparta powierzchnią krzywą o gładką ścianę i o chropowatą podłogę; współczynnik tarcia $=f$. Wyznaczyć najmniejszy kąt, który płaszczyzna podstawy może tworzyć ze ścianą. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia, aby półkula była w równowadze w każdem położeniu? Odp.: $\arccos \frac{8f}{3}$.

46. Sztywna rama w postaci romba wisi na kołku, opierając się na nim jednym bokiem. Długość boku $=a$, współcz. tarcia $=f$, kąt ostry romba $=\alpha$. Wyznaczyć odległość skrajnych położeń punktu oparcia na boku romba.

Odp.: $af\sin\alpha$.

47. Sztaba, leżąca na równi pochyłej, może obracać się w płaszczyźnie równi około jednego ze swych końców. Równia tworzy z poziomem kąt α, a współczynnik tarcia sztaby o równię $= f$. Wyznaczyć największy kąt, jaki sztaba może tworzyć z linją największego spadku. Odp. $\arcsin f \cot \alpha$.

48. Dwie płyty A i B o jednakowej grubości leżą na podłodze; pierwsza jest nieruchoma, a druga, ważąca Q kg., swobodna. Pomiędzy płyty wstawiono klin, którego kąt $= 2\alpha$. Jaką siłę należy przyłożyć do klina, prostopadle do jego podstawy, aby odsunąć B od A? / kąt tarcia klina o płyty i płyt o podłogę $= \varphi$ /.

Odp.: $\dfrac{2Q \sin\varphi \sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+2\varphi)}$.

49. Linka o długości l jest zawieszona w nieruchomym punkcie A, na drugi zaś koniec B działa pozioma siła kc, gdzie k oznacza ciężar 1 m. linki. Wyznaczyć odległość poziomą i pionową pomiędzy punktami A i B.

Odp.: $c \lg \dfrac{l+\sqrt{l^2+c^2}}{c}$, $\sqrt{l^2+c^2} - c$.

50. Koniec łańcucha o długości 13 m. umocowano na wysokości 3 m nad poziomem gruntu; współczynnik tarcia $f = 1/3$. Wyznaczyć najmniejszą długość łańcucha, która może spoczywać na ziemi. Odp.: 8 m.

51. Linka przechodzi przez blok i jej części o długościach b i b_1 leżą na dwuch płaszczyznach poziomych. Odległość pomiędzy płaszczyznami $= h$. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia linki o płaszczyznę, aby zachodziła równowaga? Odp.: $\frac{h}{b-b_1}$.

52. Linka o długości $2l$ jest zawieszona w dwóch punktach położonych na jednym poziomie. Styczne do linki w tych punktach tworzą z poziomem kąty $45°$. Wyznaczyć strzałkę.
Odp.: $l(\sqrt{2}-1)$.

53. Styczne w punktach zawieszenia sznura o długości l tworzą z pionem kąty α i β; wyznaczyć wysokość jednego z punktów zawieszenia nad drugim.
Odp. $\frac{l \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

54. Lekka wstęga opasuje ściśle dwa nierówne koła chropowate. Jedno z nich jest nieruchome, a drugie zaczyna się wolna obracać około środka. Dowieść, że poślizg wstęgi rozpocznie się na mniejszem kole.

55. Dwa jednakowe, nieruchome, poziome cylindry mają osi równoległe i położone na jednym poziomie. Cylindry obiega linka, przystając do każdego z nich na $\frac{3}{4}$ obwodu, a na końcach jej są zawieszone ciężary P i Q. Jaki powinien być

conajmniej współczynnik tarcia, aby zachodziła równowaga?

Odp.: $\frac{1}{3\pi} lg\left(\frac{P}{Q}\right)$.

56. Trzy prostopadłe do siebie cięciwy kuli, wychodzące z jednego punktu, wyobrażają siły. Wyznaczyć wypadkową.

57. Siły P_1, P_2, P_3, działają odpowiednio równolegle do osi x, y, z na punkty C, A, B, położone na osiach z, x, y w odległościach a, b, c od początku O. W jakim stosunku powinny być do siebie te siły, aby oś wypadkowego skrętnika przechodziła przez O?

Odp.: $P_1 : P_2 : P_3 = \sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[3]{bc^2} : \sqrt[3]{ca^2}$.

58. Punkty L, M, N leżą odpowiednio na osiach x, y, z w odległościach l, m, n od początku O. W tych punktach są przyłożone siły równoległe P_1, P_2, P_3, których kąty kierunkowe są α, β, γ, a wypadkowa przechodzi przez O. Okazać, że $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = P_1 l : P_2 m : P_3 n$.

59. W punktach A, B, C, położonych na osiach x, y, z są przyłożone jednakowe siły, działające odpowiednio równolegle do osi y, z, x. Odległości punktów A, B, C od początku O wynoszą a, b, c, i układ sił sprowadza się do jednej siły wypadkowej. Wyznaczyć odległość tej wypadkowej od początku O.

Odp.: $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

60. Na trzech nierównoległych i nieprzecinających się krawędziach prostopadłościanu działają trzy jednakowe siły. Jaki związek powinien zachodzić pomiędzy krawędziami prostopadłościanu, aby układ ten sprowadzał się do jednej wypadkowej.

Odp.: Jedna z nich powinna być równa sumie dwóch pozostałych.

61. Sześć sił, z których każda $= P$, działa według krawędzi sześcianu, nie przecinających jednej z przekątni i obieganych w jedną stronę. Krawędź sześcianu $= a$. Sprowadzić ten układ do skrętnika.

Odp.: Moment skrętnika $= 2Pa\sqrt{3}$.

62. OA, OB, OC stanowią krawędzie, a OO', AA', BB', CC' przekątnie sześcianu o krawędzi a; wzdłuż OB', $O'A$, BO' i $C'A$, działają odpowiednio siły P, $2P$, $3P$, $4P$. Obrawszy punkt O za środek redukcji, wyznaczyć siłę wypadkową i parę wypadkową.

Odp.: Siła $= P\sqrt{35}$, $para = \frac{Pa\sqrt{114}}{2}$.

63. Wzdłuż krawędzi sześcianu działa 12 sił, z których każda $= P$, i te z nich, które działają na krawędziach rów-

noległych są skierowane jednakowo. Wyznaczyć siłę wypadkową i parę wypadkową.

Odp.: Siła wypadkowa $= 4P\sqrt{3}$.

64. Dwie siły, z których każda jest równa P, działają na sześcian, którego środek jest nieruchomy, a krawędź wynosi $2a$. Liniami działania tych sił są wichrowate przekątnie dwóch ścian przyległych. Wyznaczyć moment pary, która może utrzymać sześcian w równowadze. Odp.: $Pa\sqrt{3}$

65. Okrągła tarcza wisi na sznurze, przyczepionym w środku O. W jakich punktach obwodu należy umieścić ciężary Q_1, Q_2, Q_3, aby tarcza pozostała w równowadze w położeniu poziomem?

Odp.: Ciężary umieszczamy odpowiednio w punktach A_1, A_2, A_3 i niech będzie kąt $A_2OA_3 = \varphi_1$, $A_3OA_1 = \varphi_2$ i $A_1OA_2 = \varphi_3$. W takim razie $\cos\varphi_1 = \dfrac{Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}{2Q_2Q_3}$ i t.d.

66. Ciężka obręcz jest zawieszona u nieruchomego punktu O na pewnej liczbie sznurów jednakowej długości. Na stożek, utworzony przez sznury, nasunięto inną, mniejszą obręcz tej samej wagi, przyczem każdy sznur został podzielony przez tę drugą obręcz na pół. Wyznaczyć stosunek odległości pierścieni od punktu O. Odp.: $3:2$.

67. Trzy lekkie sztaby, każda o długości a, tworzą trójnóg, stojący na gładkiej podłodze; końce sztab są połączone sznurami i tworzą trójkąt równoboczny, którego bok $= b$. U wierzchołka jest zawieszony ciężar Q. Wyznaczyć naprężenia sznurów. Odp.: $\frac{Qb}{3\sqrt{9a^2-3b^2}}$.

68. Dwie gładkie płaszczyzny przecinają się według prostej poziomej i każda z nich tworzy z pionem kąt α. Pomiędzy niemi umieszczono sztabę, ważącą $Q\,kg$ i $2a\,m$ długą, w położeniu poziomem tak, że tworzy z prostą przecięcia płaszczyzn kąt ϑ. Wyznaczyć moment pary, którą należy przyłożyć do sztaby, aby utrzymać równowagę. Odp.: $\frac{Qa\cos\vartheta}{\tan\alpha}$.

69. Cztery jednakowe sztaby, połączone w końcach swobodnie, tworzą czworobok skośny. Jedna z nich jest umocowana w położeniu poziomem, a na przeciwległą działa para sił o osi pionowej i momencie M. Długość sztaby $= l$, ciężar $= Q$. Wyznaczyć kąt, który dolna sztaba tworzy z górną.

Odp.: $2\arcsin\frac{M}{Ql}$.

70. Cztery jednakowe kule o promieniach r pozostają w zetknięciu na dnie gładkiego kulistego naczynia, a ich środki leżą w jednej płaszczyźnie poziomej. Kładziemy na nie piątą kulę taką samą. Jaki powinien być najwyżej promień naczynia, aby kule się nie rozeszły?

Odp.: $(2\sqrt{13}+1)r$.

71. Wyznaczyć środek ciężkości naczynia blaszanego, cylindrycznego, otwartego u góry, w którem wysokość jest równa średnicy dna. Odp.: Odległość od dna $= \frac{2h}{5}$.

72. Jednorodna bryła obrotu składa się ze stożka, którego wysokość $= h$, a średnica podstawy $= 2h$, z cylindra o wysokości $2h$ i promieniu r i półkuli o promieniu h. Wyznaczyć odległość środka ciężkości bryły od wierzchołka stożka. Odp.: $\frac{h(5h^2+8r^2)}{2(h^2+2r^2)}$.

73. Okazać, że środek ciężkości obwodu trójkąta ABC jest środkiem koła, wpisanego w trójkąt $A_1B_1C_1$, gdzie A_1, B_1, C_1, oznaczają środki boków BC, CA i AB.

74. Wyznaczyć środek ciężkości obwodu odcinka kołowego AMB, w którym łuk $AMB = s$, cięciwa $AB = c$, a promień koła $= r$. Odp.: $OS = \frac{c(\sqrt{4r^2-c^2}+2r)}{2(c+s)}$.

75. Okazać, że odległość środka ciężkości odcinka kołowego AMB od środka koła O wynosi $\frac{c^3}{6(sr-ac)}$, gdzie c oznacza cięciwę AB, s długość łuku AMB, r promień koła i a odległość cięciwy od środka O.

76. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka paraboloidy obrotu, której podstawa jest prostopadła do osi, a wysokość $= h$. Odp.: Odległość od wierzchołka $= \frac{2h}{3}$.

77. Wyznaczyć środek ciężkości połowy elipsoidy, powstałej skutkiem obrotu ćwiartki elipsy o osiach $2a$ i $2b$ około dużej osi. Odp.: Odległość od podstawy $= \frac{3a}{8}$.

78. Wyznaczyć powierzchnię bryły, która powstaje skutkiem obrotu regularnego sześcioboku / długość boku $= a$ / około jednego z boków. Odp. $6\pi a^2\sqrt{3}$.

79. Wyznaczyć objętość bryły, która powstaje skutkiem obrotu półkola ABC około prostej równoległej do średnicy AC i położonej w odległości a od niej. Promień półkola $= r$

Odp.: $\frac{\pi r^2(3\pi a \pm 4r)}{3}$.

80. Na półkuli o promieniu r, spoczywającej na płaszczyźnie poziomej, ma być osadzony cylinder z jednakowego materyału o średnicy półkuli. Jaka powinna być wysokość cylindra, aby równowaga była obojętna? Odp.: $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

81. Ciało, złożone ze stożka i półkuli o promieniu r, posiadających wspólną podstawę, ustawiono na stole stożkiem do góry. Jaka powinna być wysokość stożka, aby równowaga

była obojętna? Odp.: $r\sqrt{3}$

82. Stożek jednorodny spoczywa wewnątrz opisanej kuli. Jaki powinien być kąt u wierzchołka aby stożek był w równowadze w każdem położeniu? Odp.: $2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

83. Sztaba AB o długości $2a$ opiera się końcem A o gładką pionową ścianę, a w końcu B jest uczepiona do sznura CB, przymocowanego w C do ściany. Sznur tworzy ze ścianą kąt φ, a sztaba kąt ϑ. Okazać, że $\tan\vartheta = 2\tan\varphi$.

84 Cztery jednakowe, lekkie sztaby o długości a są połączone przegubami i tworzą romb $ABCD$. Pomiędzy przeciwległymi przegubami są naciągnięte elastyczne sznury, z których każdy w stanie nierozciągniętym posiada długość a; naprężenie ich jest proporcyonalne do wydłużenia, a współczynnik proporcyonalności $= k$. Prócz tego na zawiasy B i D działają siły P w kierunkach BD i DB. Wyznaczyć kąt BAC.
Odp.: $\arctan\left(1-\frac{P}{ak}\right)$.

85. Osiem jednakowych prętów, połączonych luźno tworzy ośmiościan. Jeden z wierzchołków jego jest zawieszony u sufitu i połączony elastycznym sznurem z wierzchołkiem przeciwległym. Naprężenie sznura jest proporcyonalne do wydłużenia, naturalna długość jest równa długości pręta, a

pod działaniem ciężaru ~~wszystkich~~ prętów sznur przybrałby długość podwójną. Wyznaczyć kąt, który każdy pręt tworzy z pionem. Odp.: $\arccos 3/4$.

86. Dwie gładkie płaszczyzny przecinają się według prostej poziomej; jedna z nich tworzy z poziomem kąt α, druga β. Pomiędzy płaszczyznami spoczywa sześcian, opierając się na nich dwiema krawędziami. Wyznaczyć kąt ϑ, który dolna ściana sześcianu tworzy z poziomem, oraz wskazać rodzaj równowagi. Odp.: Równowaga chwiejna, $\tan\vartheta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}$

87. Na obwodzie gładkiej kołowej tarczy, ustawionej w płaszczyźnie pionowej, spoczywają dwie cząsteczki o masach m_1, i m_2, połączone nicią, która również leży na obwodzie; widać ją ze środka tarczy pod kątem α. Wyznaczyć kąt ϑ, który tworzy z pionem promień, przechodzący przez m_1, i określić rodzaj równowagi.

Odp.: Równowaga chwiejna, $\tan\vartheta = \frac{m_2\sin\alpha}{m_1+m_2\cos\alpha}$.

88. Sztaba AB, o długości $2a$, ważąca $Q\,kg$, może obracać się w płaszczyźnie pionowej około końca A. Pionowo nad A, na wysokości a, znajduje się mały bloczek, przez który przechodzi sznur. Jeden koniec tego sznura jest przymocowany w środku sztaby, a na drugim wisi ciężar P mniejszy od

2Q. Wyznaczyć położenia równowagi i określić jej rodzaje.

Odp.: Jeżeli ϑ oznacza kąt, który sznur tworzy z pionem, to równowaga trwała zachodzi przy $\vartheta = 0$, a chwiejna przy $\cos\vartheta = \frac{P}{2Q}$.

CYNEMATYKA.

1. Torem punktu ruchomego jest linia prosta, a równanie ruchu $s = t^2 - 20t + 75$. Gdzie znajdował się punkt, gdy zaczynano rachować czas, w jakiej chwili przebiegał przez początek toru,- w którem miejscu i w której chwili kierunek ruchu zmienił się na odwrotny, w jakim kierunku punkt biegł przedtem, i w jakim potem?

2. Punkt biegnie po linii prostej według równania $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 5$; wyznaczyć odległość pomiędzy punktami zwrotu. Odp.: 108.

3. Ruch punktu jest prostoliniowy, a równanie ruchu $s = a \sin(\alpha + \omega t)$, gdzie a, α i ω są wielkościami stałemi. Gdzie znajdował się punkt ruchomy, gdy zaczynano rachować czas, kiedy przechodził po raz pierwszy od owej chwili przez po-