26. Dany jest układ sił jak w zadaniu 24. Należy znaleźć dwie siły równoległe A i B, przechodzące przez punkty M i N, a równoważące ten układ.

Jeżeli siły A i B mają być w równowadze z siłą R czyli z siłami P_1, P_2, P_3, to moment ich względem dowolnego punktu musi być równy i wprost przeciwny momentowi siły R. Obierzmy punkt ten na kierunku / nieznanej jeszcze/siły B, to otrzymamy:

$$A/20 + 60 + 80 + 70/ - R/62 + 70/ = 0$$

$$\text{a stąd: } A = \frac{R./62 + 70/}{20 + 60 + 80 + 70} = \frac{1900 \; . \; 132}{230} = 1090 \text{ kg}$$

zaś B = R - A = 1900 - 1090 = 810 kg, zatem wartości te same, co znaleziono wykreślnie w przykładzie 18.

Jeżeli siły P_1, P_2, P_3 działają na belkę podpartą siłami A i B, to te ostatnie nazywamy oddziaływaniami belki / porównaj § 3 i 23/.

D. Środek ciężkości figur płaskich.

§ 22. Środek ciężkości.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię o jakimkolwiek dowolnym kształcie, wyciętą np. z blachy, i podzielmy ją na wąskie równoległe paski w dowolnym kierunku / rys.66/. Każdy z tych pasków posiada pewien ciężar, a zatem posiada pewną siłę proporcjonalną do swojej powierzchni. Wypadkową ST tych wszystkich sił nazywamy osią ciężkości.

Jeśli ciężary pasków zaczepimy lub jeśli w ogóle podział ich przeprowadzimy w innym kierunku, otrzymamy w podobny sposób inną oś ciężkości np. SU, przecinającą się z poprzednią w p.S. Można udowodnić, że przez ten sam punkt S przechodzą wszystkie osie ciężkości danej figury; nazywamy go środkiem ciężkości.

Z powyższego wynika ogólny sposób znalezienia środka ciężkości. Dany przekrój dzieli się na dowolne części, najczęściej paski, których środki ciężkości są znane albo łatwo dadzą się wyznaczyć, zaczepia się w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków i znajduje wypadkową tych sił. Oznaczając przez F_1, F_2 ... powierzchnie poszczególnych pasków, przez F powierzchnię całego przekroju, przez c_1, c_2 ... odległość ich środków ciężkości od dowolnej podstawy, otrzymamy / według wzoru 12/ na odległość c środka ciężkości całego przekroju od tej samej podstawy wzór:

$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 20$$

Potem w tych samych punktach zaczepia się te same siły, ale w jakimś innym kierunku, czyli poprostu obraca się daną figurę i znów szuka wypadkowej. W punkcie przecięcia obu wypadkowych leży środek ciężkości przekroju. Bardzo wąskie paski uważać można za linie proste, których środek ciężkości leży oczywiście w środku ich długości.

./.

Srodki ciężkości pól niektórych figur płaskich.

1. PROSTOKĄT / rys.67/. Podzieliwszy prostokąt na paski o równej szerokości, otrzymujemy równą powierzchnię każdego z nich; wypadkowa zatem leżeć będzie w środku geometrycznym S prostokąta. Podobnie otrzymamy środek ciężkości równoległoboku / rys.68/.

2. TRÓJKĄT. Podzielmy trójkąt ABC / rys.69/ na wąskie paski równolegle do jednego z boków, np. do AB. Srodek ciężkości każdego z nich leży w środku długości, więc środek ciężkości całego trójkąta leżeć musi na linii CD łączącej środek boku AB z p.C, a tym samym i wszystkie środki pasków. Linia CD jest zatem osią ciężkości. W ten sam sposób, dzieląc bok BC i łącząc p.E z A otrzymamy drugą oś ciężkości. Na ich przecięciu leży p.S.

Punkt przecięcia linii CD i AE / a więc i BF/ dzieli te linie w stosunku 2:1 / np. CS:DS=2:1 i t.d./; zatem linia pozioma MN przechodząca przez środek ciężkości oddalona jest od podstawy o trzecią część odpowiedniej wysokości.

3. FIGURA SYMETRYCZNA. Oś symetrii jest tu zawsze osią ciężkości, gdyż po obu jej stronach powierzchnia przekroju rozłożona jest zupełnie tak samo. Jeżeli są dwie osi symetrii / np. rys.69/, to środek powierzchni leży w punkcie ich przecięcia; jeżeli tylko jedna, to trzeba znaleźć drugą oś ciężkości wyżej podanym sposobem.

4. CZWOROBOK NIEREGULARNY /rys.70/ dzielimy na dwa trójkąty ABC i ACD o środkach ciężkości S_1 i S_2, a potem na trójkąty ABD i BCD o środkach ciężkości S_3 i S_4. Srodek ciężkości czworoboku leży na przecięciu linij $S_1 S_2$ i $S_3 S_4$.

5. TRAPEZ /rys.71/. Dla znalezienia środka ciężkości trapezu należy poprowadzić a/ prostą EF łączącą środki boków równoległych trapezu, b/ prostą GH, którą otrzymamy odcinając na przedłużeniu boku górnego bok dolny, a na przedłużeniu dolnego górny - i łącząc otrzymane w ten sposób punkty G i H. Srodek ciężkości leży na przecięciu linii EF i GH.

Rachunkowo określa się położenie ciężkości trapezu z wzorów:

$$e = \frac{h\ 2a + b}{3\ a + b} \qquad e_1 = h - e = \frac{h\ a + 2b}{3\ a + b}$$

Przykłady 27 - 28.

27. Znaleźć rachunkowo środek ciężkości teówki podanej na rys. 72.

a/ Dzieląc przekrój na dwa prostokąty / por. rys.72/, otrzymamy ich powierzchnie: $F_1 = 9 \cdot 53 = 447\ mm^2$, $F_2 = 80 \cdot 9 = 720\ mm^2$; więc odległość "e" środków ciężkości przekroju od podstawy ze wzoru 20:

$$e = \frac{F_1 e_1 + F_2 e_2}{F_1 + F_2} = \frac{477 \cdot 35,5 + 720 \cdot 4,5}{477 + 720} = 16,9\ mm.$$

b/ Tę samą wartość otrzymamy ze wzoru 7. Wypadkowa dwu sił równoległych o tym samym toku dzieli mianowicie odstęp między nimi w odwrotnym stosunku do ich wielkości. Odległość środków ciężkości obu prostokątów wynosi: $m = m_1 + m_2 = 31$ mm; siły zaś zaczepiające w nich są równe powierzchniom prostokątów. Zatem $m_1:m_2 = F_2:F_1$, czyli $/ m_1 + m_2/ : m_2 = / F_2 + F_1/ : F_1$, a stąd:

./.

$$m_2 = \frac{/ m_1 + m_2 / F_1}{F_1 + F_2} = \frac{31 \;.\; 477}{477 + 720} = 12{,}4 \text{ mm, a stąd } e_1 = m_2 + 4{,}5 =$$

$= 12{,}4 + 4{,}5 = 16{,}9$ mm, czyli ta sama wartość, co wyżej obliczona.

28. Znaleźć środek ciężkości przekroju podanego na rys.73.

a/ Powierzchnie poszczególnych pasków wynoszą:

$F_1 = 3 \;.\; 6 = 18$ cm^2 $F_2 = 5 \;.\; 2 = 10$ cm^2 $F_3 = 4 \;.\; 10 = 40$ cm^2

Odległość ich środków ciężkości od dowolnie wybranej prostej, np. od podstawy ab:

$m_1 = 4 + 5 + 1{,}5 = 10{,}5$ cm $m_2 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5$ cm $m_3 = 2$ cm

Odległość środka ciężkości od podstawy / porównaj wzór 2/:

$$e = \frac{1}{F} / F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3 / = \frac{18 \;.\; 10{,}5 + 10 \;.\; 6{,}5 + 40 \;.\; 3}{18 + 10 + 40} =$$

$$= \frac{334}{68} = 4{,}9 \text{ cm}$$

Dla znalezienia drugiej osi ciężkości zaczepiamy siły proporcjonalne do powierzchni poszczególnych pasków w innym dowolnie obranym kierunku. W danym wypadku najlepiej użyć równoległego do ac.

$m'_1 = 3$ cm $m'_2 = 1$ cm $m'_3 = 5$ cm

a stąd

$$e' = \frac{1}{F} / F_1 m_1' + F_2 m_2' + F_3 m_3' / = \frac{18 \;.\; 3 + 10 \;.\; 1 + 40 \;.\; 5}{68} =$$

$$= \frac{264}{68} = 3{,}9 \text{ cm}$$

b/ Wykreślnie znajdziemy środek ciężkości za pomocą wieloboku sznurowego. W tym celu zaczepimy w środkach ciężkości S_1, S_2, S_3 poszczególnych prostokątów siły poziomo proporcjonalne do ich powierzchni F_1, F_2, F_3 / rys. 74b/, kreślimy wielobok sił i, dla przyjętego bieguna O, wielobok szurowy, z którego otrzymamy jedną oś ciężkości SR. Następnie te same siły zaczepiamy w innym kierunku, np. pionowym. Ponieważ jednak siły następować będą teraz w porządku F_2, F_1, F_3, przeto w tym też porządku kreślimy drugi wielobok sił z biegunem R' / rys.74c/ i znajdujemy drugą oś ciężkości SR'. Na przecięciu linij SR i SR' leży środek ciężkości całego przekroju S, zgodnie z poprzednim rachunkowym wynikiem.

Moglibyśmy jednak znaleźć pionową oś ciężkości SR', nie zmieniając wcale porządku sił. Wykreślmy mianowicie wielobok sił pionowych F_1, F_2, F_3 / rys. 74d/, nie zmieniając ich porządku i wykreślimy dla bieguna O" wielobok sznurowy. Pierwszy bok tegoż doprowadzamy do przecięcia z siłą F_1 w punkcie r, stąd kreślimy bok rs równoległy do O"1 itd. Wypadkowa, przechodząca przez punkt przecięcia boków skrajnych ru i tu jest znów ta sama oś ciężkości pionowa SR'.

E. BELKI NAJPROSTSZE.

§ 23. Wykreślne wyznaczenie oddziaływań sił poprzecznych i momentów belki prostej obciążonej ciężarami skupionymi.

Belką czyli dźwigarem nazywamy konstrukcyjną część budowli służącą do tego, by jakieś siły, ciężary, działające na nią ...

P_2..., przenieść na podpory A i B. Taką belką jest np. belka stropowa, która przenosi na mur ciężar stropu, oraz ciężary, jakie na niej stoją / i swój własny ciężar/, - wiązar dachowy, przenoszący na mury ciężar pokrycia, śniegu i wiatru, - most i t.d.

Jeśliby na belkę działały wyłącznie obciążenia jako siły zewnętrzne, to musiałaby się ona posunąć w kierunku wypadkowej tych sił. Jednakowoż belka pozostaje w równowadze, a pozostaje dlatego, że jest podparta na podporach / na rys. 74 i 75 mamy dwie podpory A i B/, gdzie ciśnie na mur i gdzie zupełnie tak samo ciśnie mur na nią / por. przykłady 18 i 26/. Ciśnienia te jakie mur wywiera na belkę, nazywamy oddziaływaniami lub reakcjami podpór / czasem odporem/. Dla obliczenia wymiarów belki potrzebne jest wyznaczenie tego oddziaływania.

Jeśli przy obciążeniu pionowym belki, oddziaływania są też pionowe, to belkę nazywamy belką prostą.

Ponieważ belka pod wpływem obciążenia pozostaje w równowadze tylko dzięki oddziaływaniom, które równoważą działanie obciążenia, przeto zadanie: " znaleźć oddziaływania" znaczy: " znaleźć siły, powstające pod wpływem obciążenia w punktach podparcia belki i równoważące to obciążenie" / por. przykłady 18 i 25/.

Obliczając jakąkolwiek belkę, musimy przede wszystkim znać jej punkty podparcia. Rozróżnia się bowiem t.zw. rozpiętość w świetle l_0, tj. odstęp między murami, przyczółkami itp. / rys.86/, od rozpiętości teoretycznej, czyli obliczeniowej l, którą wprowadzamy w obliczenie.

Sprawa ta jak i inne sprawy obliczeniowe, ustalone są przepisami byłego Ministerstwa Robót Publicznych, oraz normami Polskiego Komitetu Normalizacyjnego. Normy takie oznaczone są literami PN/B [x] i odpowiednimi numerami. Np. norma dotycząca konstrukcyj stalowych nosi nr PN/B 19 , norma konstrukcyj żelazobetonowych PN/B 1711 .

Jeżeli belka spoczywa na specjalnych podporach np. belka drewniana na ławie drewnianej, dźwigar stalowy na łożysku, lub na podciągu stalowym/, to za rozpiętość belki przyjmuje się odległość od środka jednej podpory do środka drugiej.

Jeżeli jednak belki leżą bezpośrednio na murze lub na ciosie podporowym, to dla każdego takiego bezpośredniego podparcia należy dla belek drewnianych i żelazobetonowych zwiększyć rozpiętość w świetle o 2,5%; dla belek stalowych przyjmować rozpiętość rachunkową równą rozpiętości w świetle.

Dla belki stalowej przyjmujemy zatem

$$l = l_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21$$

w wypadku zaś belki drewnianej lub żelbetonowej

$$l = 1,05\, l_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21a$$

gdzie l_0 jest rozpiętością w świetle.

Weźmy najpierw pod uwagę belkę prostą, obciążoną jednym tylko ciężarem . Postępując wedle § 13, przyjmujemy dla siły P = 01 biegun O i kreślimy doń promienie 01 i Oo, oraz równoległe do nich promienie ac i cb wieloboku sznurowego. Jeśli oddziaływania A i B mają równoważyć się z siłą 1, to wielobok ten musi się zamknąć, a nastąpi to wtedy, gdy połączymy jego punkty skrajne a i b; dlatego też tę prostą nazywamy linią zamykającą lub krótko zamykającą. Łączy ona oba oddziaływania, t.j. siły A i B, a więc równoległy do niej promień ciągu sił łączyć musi biegun z punktem 2 dzielącym oba oddziaływania. Wykreśliwszy ten promień 2, otrzymujemy tym samym wielkość oddziaływań: A = 2a i B = 12, które równoważą siłę 1. Zamyka się bo-

[x] PN = Polska Norma, B = budowlana.

./.

wiem wtedy ciąg sił / gdyż suma sił 2 i 12 równa się sile 1=-1/ oraz ciąg sznurowy.

Dla późniejszego obliczenia przekroju belki potrzebna jest także znajomość momentu statycznego sił zewnętrznych w każdym punkcie belki. W tym celu posłużą nam zasady poznane w § 17; belka AB jest bowiem obciążona wyłącznie ciężarami pionowymi. Dla znalezienia zatem momentu statycznego w dowolnym punkcie belki np. C, prowadzimy w tym punkcie linię pionową aż do przecięcia z bokami wieloboku sznurowego w punktach f i g, a odcinek fg = y pomnożony przez odległość biegunową H daje moment statyczny w punkcie C:

$$M = fg \cdot h = yH \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 22$$

Zamiast mnożyć odcinek fg = y przez odległość biegunową H możemy przy odpowiednim uwzględnieniu skali sił i skali długości odczytać na nim moment wprost w kgm według § 18. Wtedy wszystkie odcinki pionowe powierzchni abc przedstawiać będą bezpośrednio momenty w odnośnych punktach belki. Powierzchnia ta określa zatem wprost rozkład momentów wzdłuż belki przy danym obciążeniu i dlatego nazywa się powierzchnią momentów. Największy moment występuje w punkcie działania ciężaru i wynosi $M_n = mH$, a przekrój belki w tym punkcie nazywamy przekrojem niebezpiecznym, gdyż tu zachodzi największe niebezpieczeństwo złamania belki / jeżeli belka ma przekrój stały/.

Moment działający na belkę nazywamy często także momentem zginającym lub gnącym, gdyż stara się on wygiąć belkę i to tym więcej, im jest większy.

Podobnie postępuje się dla obciążenia belki kilku ciężarami skupionymi / rys. 77/. Znajdujemy przede wszystkim wielobok sznurowy abcdef prowadzimy zamykającą af i z bieguna O kreślimy równoległy doń promień Om, który odetnie oba oddziaływania A = mO i B = 4m. Odcinki pionowe powierzchni abcdef t.zw. powierzchni momentów, zamkniętej wielobokiem sznurowym, odczytane w odpowiedniej skali, przedstawiają momenty zginające w poszczególnych punktach belki.

Dla obliczenia belki potrzebne jest wprowadzenie jeszcze jednego pojęcia. Znajdźmy mianowicie dla dowolnego punktu C wypadkową T wszystkich sił działających po jednej np. lewej stronie przekroju. Jeśli na belkę poziomą działają wyłącznie siły pionowe, to wypadkowa ta będzie t.zw. siłą poprzeczną.

Jeśli p.C leży między punktem zaczepienia sił P_2 i P_3, to po lewej jego stronie działają siły A_1, P_1 i P_2, a więc wypadkowa T tych sił równa ich sumie będzie siłą poprzeczną. Ale siły A_1, P_1 i P_2 działające po lewej stronie p.C_1 są w równowadze z siłami P_3, P_4 i B po prawej stronie, więc i ich wypadkowa jest równa tej samej sile poprzecznej T, tylko z przeciwnym znakiem. Wynika stąd, - że jeśli chodzi o bezwzględną wielkość siły T, - to obojętną jest rzeczą czy obliczając ją uwzględnimy siły po lewej stronie przekroju, czy po prawej. Najczęściej uwzględniamy lewą i znak po tej stronie jest miarodajny dla siły poprzecznej.

Pomiędzy dwiema sąsiednimi siłami skupionymi nie ma na belce żadnej siły; dla wszystkich przeto punktów na tej przestrzeni wartość siły poprzecznej pozostaje ta sama, równa sumie sił po jednej / lewej/ stronie przekroju badanego C. Np. dla wszystkich punktów pomiędzy P_2 a P_3:

$$T'' = A - P_1 - P_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 23$$

W wieloboku sił otrzymamy:

$$T'' = mo - o1 - 12 = m2$$

./.

Odetnijmy tę wielkość T" = m2 pod przekrojem badanym C i poprowadźmy przez jej końce proste poziome m'm" i c"d' na długości pomiędzy siłami P_2 a P_3, to każdy pionowy odcinek poprowadzony między P_2 a P_3 przedstawiać będzie wielkość siły poprzecznej w danym miejscu belki. Podobnie możemy uczynić i w innych miejscach, a wtedy otrzymalibyśmy wykres rozkładu sił poprzecznych na całej belce.

Wykres ten wykonujemy jednak zwykle inaczej. Poprowadźmy mianowicie z bieguna O promienie O2 i Om równoległe do boków cd i af wieloboku sznurowego przeciętych przekrojem CC', to odcinek m2 na wieloboku sił przedstawi nam siłę poprzeczną w danym punkcie. /Jest to sposób znalezienia wykreślnego siły poprzecznej, używany bardzo często zwłaszcza przy obciążeniach rozłożonych, o czym mówić będziemy poniżej/. Prowadząc z m i 2 na długości między P_2 a P_3 linie poziome, otrzymamy znowu wykres ten sam, co poprzednio, wskazujący wielkość siły poprzecznej w każdym punkcie na długości między P_2 a P_3. Znajdźmy tak samo siłę poprzeczną T dla innych przekrojów belki i wykreślmy odpowiednie poziome a'b' b"c' ... e"f',to linia schodkowa otrzymana w ten sposób będzie przedstawiać rozkład sił poprzecznych na całej belce. Np. siła poprzeczna w punkcie D przedstawia się w postaci odcinka st, odciętego linią sił poprzecznych na pionowej przeprowadzonej przez D.

W miejscu, w którym suma odjemników w wyrazie

$$T = A - P_1 - P_2 - P_3 - \dots$$

jest mniejsza od O, siła poprzeczna przyjmuje wartość ujemną. Na rys.87 następuje to w punkcie zaczepienia siły P_2, co uwidacznia się w rysunku przez to, że wykres sił poprzecznych przesuwa się pod linię m'm", / por. np. rzędną st/.

Wyżej wspomnieliśmy, że przekrój, w którym moment zginający przybiera największą wartość, nazywamy przekrojem niebezpiecznym. Znajduje się on tam, gdzie prosta nn przeprowadzona równolegle do zamykającej af jest styczna do wieloboku momentów, t.j. w punkcie d. Promień O2 równoległy do promienia linii sznurowej cd bezpośrednio na lewo od d leży tuż ponad punktem m, zaś promień O3 równoległy do de tuż pod m. Siła poprzeczna na lewo od przekroju niebezp. ma znak "+", na prawo znak "-". Przekrój niebezpieczny leży więc w punkcie, w którym siła poprzeczna zmienia znak, na rys.87 w punkcie działania siły P_3.

Niekiedy wygodnie jest mieć wykres momentów taki, aby linia zamykająca af była pozioma. Nie mając oddziaływań, a więc promienia Om wieloboku sznurowego, nie możemy tego uzyskać, postępujemy przeto tak: Wykreślamy w zwykły sposób wielobok sił z biegunem O i wielobok sznurowy abcdef, a prowadząc promień Om // af znajdujemy oddziaływanie m0 i 4m. Następnie kreślimy drugi wielobok sił, przyjmując jednak biegun A na poziomej przechodzącej przez znany już punkt m. Wielobok sznurowy a'b'c'd'e'f' wykreślony dla tego bieguna O_1 ma zamykającą a'f' poziomą, gdyż równoległą do poziomej linii O_1m.

Jeżeli nie chcemy powtarzać wykresu sił dwukrotnie, możemy na tym samym wieloboku sił z punktu m wyprowadzić linię poziomą i na niej umieścić biegun O_1 a promienie sznurowe przechodzące przezeń dadzą nam wykres momentów o zamykającej poziomej.

§ 24. Rachunkowe wyznaczenie oddziaływań sił poprzecznych i momentów dla układu ciężarów skupionych.

Pierwszym zadaniem przy obliczeniu jakiejkolwiek belki, a więc i tutaj, jest znalezienie oddziaływań. Jak wiemy, oba oddziaływania muszą być w równowadze z siłami zewnętrznymi, w danym

./.

więc wypadku wyznaczenie ich nastąpi wedle § 19.

Jeśli ma nastąpić równowaga, to moment wszystkich sił działających / t.j. obciążeń i oddziaływań/ względem któregokolwiek punktu na danej płaszczyźnie musi się równać zeru / równ.19/. O ile jednak na belkę działają jedynie siły pionowe, a oddziaływania są również pionowe, to suma składowych poziomych wszystkich sił sama przez się równa jest zeru. Wtedy drugi warunek równowagi / suma składowych poziomych równa się zeru - równ. 19b/ sam przez się sprawdza się. Wobec tego do wyznaczenia niewiadomych sił / oddziaływań/ pozostają nam do dyspozycji jeszcze dwa pozostałe równania. Ponieważ mamy dwie niewiadome / wielkości dwu reakcyj/, przeto z dwu tych równań będziemy mogli je wyznaczyć.

Równanie 19a daje tutaj:

$$A + B - P_1 - P_2 - \ldots\ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 24$$

Rozpatrując równanie 19c, przyjmiemy punkt, ze względu na który bierzemy momenty tak, jak to jest najwygodniej dla naszych obliczeń / por.§ 21/. Jeżeli punkt ten przyjmiemy na kierunku jednego oddziaływania np. B, to ramię tego oddziaływania względem tego przyjętego punktu równe jest zeru, a więc i odpowiedni moment równa się zeru. Otrzymujemy wtedy jedno z pozostałych dwu równań równowagi o jednej niewiadomej, a więc bardzo łatwe do rozwiązania.

Równanie momentów względem p. B brzmi:

$$Al - P_1b_1 - P_2b_2 - \ldots\ldots = 0$$

a stąd oddziaływanie:

$$A = \frac{1}{l}/ P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots/ = \frac{1}{l}\sum Pb \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 25$$

Znając A obliczymy drugie oddziaływanie B z równania

$$B = P_1 + P_2 + \ldots\ldots - A = \sum P - A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 26$$

Wielkość oddziaływania B znaleźć można także niezależnie od oddziaływania A z równania momentów odniesionego do punktu A. Wtedy będziemy mieli:

$$P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots - Bl = 0$$

$$B = \frac{1}{l}/ P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots/ = \frac{1}{l}\sum Pa \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 25a$$

Jeżeli w ten sposób obliczymy B / z wz. 24a/, to możemy skontrolować dobroć obliczenia na mocy wzoru 25. Musi się spełnić mianowicie równanie:

$$P_1 + P_2 + \ldots. = A + B$$

czyli

$$P_1 + P_2 + \ldots = \frac{1}{l}/ P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots + P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots/ =$$

$$= \frac{1}{l}\left[P_1/ a_1 + b_1/ + P_2/ a_2 + b_2/ + \ldots.\right]$$

ale $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \ldots. = l$

a stąd:

$$P_1 + P_2 + \ldots = \frac{1}{l}/ P_1l + P_2l + \ldots = \frac{1}{l}/ P_1 + P_2 \ldots/ = P_1 + P_2 \ldots$$

Podobną kontrolę należy wykonywać o ile możności jak najczęściej przy wszystkich obliczeniach statycznych.

Siłę poprzeczną T w dowolnym punkcie C znajdziemy, obliczając sumę sił działających po lewej stronie danego punktu C; wtedy:

$$T'' = A - P_1 - P_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 27$$

./.

Moment zginający zaś obliczymy, biorąc sumę momentów wszystkich sił działających po lewej stronie przekroju ze względu na dany punkt C, wtedy:

$$M'' = Ac - P_1c_1 - P_2c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28$$

Jeśli na belkę działa tylko jeden ciężar / rys.85/ wtedy otrzymamy wzory powyższe w następującej formie:

$$A = P\frac{b}{l} \qquad B = P\frac{a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29$$

Siła poprzeczna między lewą podporą, a punktem D:

$$T = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30$$

Siła poprzeczna między punktem D, a podporą prawą:

$$T = A - P = P\frac{b}{l} - P = \frac{P}{l}(b - l) = -P\frac{a}{l} = -B \quad \ldots\ldots \quad 30a$$

Moment w punkcie działania ciężaru:

$$M = Aa = \frac{ab}{l}P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31$$

Jeśli na belkę działa jedna siła w środku belki, to otrzymamy / rys.88/

$$\text{Oddziaływanie } A = B = \frac{P}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32$$

Siła poprzeczna między A a C:

$$T = A = \frac{P}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33$$

$$\text{Siła poprzeczna między C a B: } T = -\frac{P}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33a$$

$$\text{Moment w środku belki: } M = A\frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \quad \ldots\ldots \quad 34$$

Jeśli na belkę działają dwie siły równe i umieszczone symetrycznie, to otrzymamy:

Moment w punkcie C w odległości c od podpory lewej:

$$M = Ac - P(c - a) = Pc - P(c - a) = Pa \quad \ldots\ldots \quad 35$$

Moment M jest między obu siłami / t.j. na długości s/ niezależny od odległości c, a więc stały i wynosi $M = Pa$.

Dla dowolnego punktu D między A a E otrzymamy moment $M' = Ab = Pb$, wprost proporcjonalny do odległości b.

Siła poprzeczna między A i E wynosi $T = A$ 36

Pomiędzy siłami P siła poprzeczna równa się zeru, gdyż:

$$T = A - P = P - P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36a$$

Przykłady 29 – 31.

29. Obliczyć oddziaływania siły poprzeczne i momenty belki wolno podpartej o długości $l = 5$ m, obciążonej ciężarem $P = 2$ t stojącym w środku belki:

$$A = \tfrac{1}{2}P = 1\ t$$

$$T = 1\ t \text{ wzgl. } T' = -1\ t$$

$$M = \tfrac{1}{4}Pl = \tfrac{1}{4}\,2{,}0 \cdot 5{,}0 = 2{,}5\ tm =$$

= 250 000 kgcm.

Wykreślnie znaleźliśmy wartości te same.

./.

30. Znaleźć najwiąk. moment zgięcia poprzecznicy mostowej obciążonej kołami wozu stojących na niej / por. rys.89/.
P = 1000 kg; odstęp kół s = 1,80 m. Oddziaływania A = B = = P = 1000 kg.
Otrzymamy tu:
$$M = Pa = 1000 \cdot 0{,}60 = 600 \text{ kgcm.}$$
Siła poprzeczna na długości między obu siłami:
$$T =$$
Siła poprzeczna między A a B:
$$T = A = 1000 \text{ kg.}$$

31. Podciąg stalowy o rozpiętości 6,00 m przenosi obciążenie wedle rys.8 . Znaleźć jego momenty i siły poprzeczne.
Oddziaływanie A wynosi:
$$A = \frac{1}{6{,}0} \; / \; 2000 \cdot 5{,}0 + 4000 \cdot 3{,}2 + 3000 \cdot 1{,}2 / = 4400 \text{ kg}$$
Zatem oddziaływanie B:
$$B = 2000 + 4000 + 3000 - 4400 = 4600 \text{ kg.}$$
Siła poprzeczna między A a P_1 wynosi $T = A = 4400$ kg
" " " P_1 a P_2 " $T = A - P_1 = 2400$ kg
" " " P_2 a P_3 " $T_2 = A - P_1 - P_2 = = 1600$ kg
Siła poprzecz. między P_3 a B wynosi $T_2 = A - P_1 - P_2 - P_3 = = - B = - 4600$ kg.
Największy moment występuje tam, gdzie siła poprzeczna zmienia znak t.j. pod ciężarem P_2; otrzymujemy tam:
$$M = A \cdot 2{,}8 - P_1 \cdot 2{,}8 = 8720 \text{ kgm} = 872000 \text{ kgcm.}$$
Chcąc znaleźć najw. moment wykreślnie, kreślimy wielobok sił przy czym przyjęliśmy odległość biegunową H = 6 ton, oraz wielobok momentów. Otrzymamy z niego M = 8,7 cm = 870 kgcm, co prawie zupełnie zgadza się z wartością obliczoną.

§ 25. Obciążenie jednostajne zupełne.

Często mamy do czynienia z obciążeniem innego rodzaju, niż ciężary skupione, o których dotychczas mówiliśmy. Weźmy np. pod uwagę belki stropowe, które dźwigają ciężar podłogi na całej swej długości, lub dach, który obciążony jest na całej lub na części powierzchni warstwą śniegu. Tu obciążenie jest rozłożone na całej belce albo na jej części. Jeśli ten ciężar rozłożony jest równo / np. równo gruba warstwa śniegu/, to obciążenie nazywamy jednostajnym lub równomiernym; jeśli zaś nadto rozciąga się na całą długość belki, to nazywamy je jednostajnym zupełnym lub jednostajnym całkowitym. Wielkość obciążenia jaka przypada na jednostkę długości nazywamy obciążeniem jednostkowym, jednostkę długości zaś bardzo często jednostką bieżącą, np. 1 m bieżący, co zwykle pisze się 1 mb, 1 cmb i t.d., dlatego też jednostką obciążenia jednostkowego jest 1 kg na 1 mb, co pisze się 1 kg/mb, 1 t/mb, 1 kg/cmb i t.d. Jeśli np. na długości 1 m złożone jest 150 kg, to napiszemy: ciężar jednostkowy g = 150 kg/mb.
W rzeczywistości mamy do czynienia z ciężarem jednostajnie rozłożonym / biorąc rzecz praktycznie/ najczęściej przy obliczaniu ciężaru własnego stropów, dachów, mostów i t.p. konstrukcji.

...ile chodzi o obciążenie użytkowe / zmienne/, to ciężar rozłożony jednostajnie, spotykamy stosunkowo rzadko; np. sprzęty w pokoju, ludzie przechodzący mostem, nie są to obciążenia rozłożone jednostajnie. Jednakowoż nie mogąc przewidzieć, gdzie i jaki ciężar stanie, oraz dla uproszczenia rachunku przyjmujemy obciążenie użytkowe najczęściej jako rozłożone jednostajnie na jednostce powierzchni w wielkościach określonych przez odpowiednie przepisy, a zależnych od przeznaczenia i rodzaju ubikacji, od rodzaju obciążenia i t.d. Np. dla mieszkań zwykłych przyjmuje się u nas obciążenie użytkowe 200 kg/m^2, dla małych domków mieszkalnych o jednej lub dwu kondygnacjach 150 kg/m^2, dla szkół 300 kg/m^2 i t.d.

Dla obliczenia oddziaływań, sił poprzecznych T i momentów M przyjmiemy, że takie obciążenie ciągłe składa się z szeregu sił skupionych, działających jedna tuż obok drugiej. Niech obciążenie jednostkowe wynosi g kg/mb, to jego wypadkowa na długości a wynosi ga i zaczepia w połowie długości a / rys.31/; obciążenie więc na długości całej belki l równe jest zatem:

$$G = gl \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 37$$

Obciążenie to rozkłada się równo na obie podpory, a zatem oba oddziaływania są równe i wynoszą:

$$A = B = \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{2} gl \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ 38$$

Siła poprzeczna w dowolnym punkcie C równa się sumie sił zewnętrznych po lewej stronie przekroju / z uwzględnieniem znaków/ tj. oddziaływaniu A / działającemu do góry/ pomniejszonemu o obciążenie na części belki od podpory A do punktu C, więc:

$$T_m = A - gx = \tfrac{1}{2} gl - gx = g/\tfrac{1}{2}l - x/ = gz \quad 39$$

gdzie z równe jest oddaleniu punktu C od środka belki.

Zatem siła poprzeczna w dowolnym punkcie belki dla obciążenia całkowitego jednostajnego równa jest obciążeniu jednostkowemu pomnożonemu przez odległość tego punktu od środka belki. Na podporze więc / t.j. właściwie niezmiernie blisko od podpory/ siła poprzeczna $T = \tfrac{1}{2} gl = A$; natomiast w środku belki, gdzie $z = 0$, siła poprzeczna $T = 0$; wreszcie na podporze B : $T = -\tfrac{1}{2} gl = -B$, gdyż z mierzyć musimy w kierunku przeciwnym niż poprzednio, tj. ujemny.

Wykreślnie przedstawić możemy rozkład sił poprzecznych odcinając na podporze A siłę $A = \tfrac{1}{2} gl$ w górę od przyjętej osi poziomej m m', na podporze B tę samą siłę $-\tfrac{1}{2} gl$ pod osią i łącząc otrzymane w ten sposób punkty m i n linią prostą. Rzędne pionowe między osią a linią mn przedstawiają wielkość siły poprzecznej w każdym punkcie. / Np. st jest siłą poprzeczną w punkcie C; w środku rzędna jest równa zeru, gdyż $T = 0$/.

Dla obliczenia momentu zgięcia M w danym punkcie, robimy to samo przyjęcie. Wtedy moment równa się momentowi oddziaływania zmniejszonemu o moment obciążenia na długości x. Długość x podzielić możemy na równą ilość / np.3/ części, a obciążenia tych części uważać za ciężary skupione g_1, g_2 ... Moment tych sił względem punktu C będzie wynosić: $g_1 r_1 + g_2 r_2$... Zamiast brać moment szeregu sił, możemy jednak wyznaczyć ich wypadkową i obliczyć jej moment względem C. Ponieważ siły g_1, g_2... są równe, przeto ich wypadkowa leży w środku długości x, a wielkość jej równa się sumie składowych obciążeń, czyli całemu obciążeniu na długości x, tj. gx. Moment tej wypadkowej względem punktu C wynosi więc $gx \cdot \tfrac{1}{2}x = g \cdot \tfrac{1}{2}x^2$. Moment zginający w punkcie C równa się zatem:

$$M = Ax - gx \cdot \tfrac{1}{2}x = g \cdot \tfrac{1}{2} l \cdot x - g\frac{x^2}{2} = \tfrac{1}{2}g \cdot x/ l - x/ \ . \ . \ 40$$

Największy moment obliczony wedle tego wzoru przypada w środku belki. Otrzymujemy tam mianowicie:

$x = \tfrac{1}{2}l$, a wtedy: $M = \tfrac{1}{2}g \cdot l \cdot \tfrac{1}{2}l = \frac{gl^2}{8}$ 41

./.

Nazwijmy całe obciążenie belki G, to G = gl; możemy więc napisać:

$$M = \frac{gl^2}{8} = gl\frac{l}{8} = \frac{Gl}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42$$

Dla obliczenia dźwigarów stropowych i t.p. wygodnie jest wyznaczyć obciążenie G i oddziaływania A i B w kilogramach, zaś momenty M w kilogramocentymetrach. W tym celu najlepiej jest obliczać:

a/ obciążenie całkowite G = gl kg, mnożąc g wyrażone w kg/mb przez długość l wyrażoną w metrach;

b/ oddziaływanie A = B = $\frac{1}{2}$G kg

c/największy moment ze wzoru M = 1/8 Gl, wyrażając G jak poprzednio w kg, natomiast l w centymetrach.

Dla wykreślnego znalezienia linii momentów moglibyśmy podobnie jak przy obliczeniu analitycznym przyjąć cały szereg sił skupionych, zastępujących obciążenie jednostajnie rozłożone i wykreślić dla nich wielobok sił i wielobok sznurowy, któryby tym samym odpowiadał linii momentów. Skrajne promienie sznurowe będą wtedy równoległe do skrajnych promieni wieloboku sznurowego / Oc || ad, On || bd/.

Tę żmudną pracę możemy jednak ominąć uwzględniając wzór 42. Obliczmy mianowicie dla poszczególnych punktów belki wartości momentów wedle tego wzoru i odetnijmy pionowo od linii ab w przyjętej skali momentów, a przekonamy się, że końce ich leżą na paraboli, której największa rzędna / w środku/wynosi: $\frac{gl^2}{8} = \frac{Gl}{8}$,

a której równanie podane jest we wzorze 4 .Parabola ta jest więc zupełnie zgodna z wielobokiem sznurowym, jakibyśmy uzyskali wedle sposobu wyżej podanego, a właściwie z krzywą sznurową, styczne podporowe będą więc równoległe do odpowiednich promieni wieloboku sił. Najłatwiej wykreślić ją w następujący sposób:

Z punktów a i b leżących na dowolnej poziomej prowadzimy równolegle do Oc i On aż do przecięcia się w punkcie d. Podzielmy długości ab i bd, na zupełnie dowolną, ale tę samą ilość części /np.4/ i połączmy kolejno punkty podziału np. e z g, f z h, a następnie wrysujmy w wielobok w ten sposób powstały linię krzywą styczną do boków ad, eg, fh .., to ta linia krzywa będzie parabolą, a rzędne jej np. w'w" będą odpowiadały momentom w poszczególnych punktach.

W samym środku otrzymamy rzędną $\frac{gl^2}{8}$.

Z własności paraboli wynika, że długość d'd równa jest dwukrotnej długości d'd". Parabolę momentów wykreślić można zatem nawet bez uprzedniego rysowania wieloboku sił; wystarczy odciąć w środku belki długość d'd = 2 × 1/8 gl² = $\frac{1}{4}$gl² w odpowiedniej podziałce i narysować parabolę, zastosowawszy wyżej opisany sposób kreślenia.

Dla obciążenia ciężarem skupionym G w środku belki otrzymujemy wedle wzoru 34 największy moment $M = \frac{Gl}{4}$.

Jeśli zatem całe obciążenie jednostajnie obciążonej belki G = gl zaczepimy w jej środku jako ciężar skupiony, to uzyskany moment będzie dwa razy większy niż dla ciężaru rozłożonego; w wykresie

./.

/ rys.81/ otrzymalibyśmy moment równy d'd, zaś wykres momentów adb. Zatem chcąc wyznaczyć linię momentów dla obciążenia jednostajnie rozłożonego, możemy wykreślić linię momentów dla ciężaru skupionego o równej wielkości G = gl i wkreślić w nią parabolę styczną, która będzie linią momentów ciężaru jednostajnie rozłożonego.

§ 26. Obciążenie jednostajne częściowe.

Przy obciążeniu. nie rozmieszczonym na całej belce, czyli t.zw. obciążeniu częściowym postępujemy podobnie, jak przy całkowitym. Obciążenie na długości a wynoszące pa / rys.82/, zastępujemy ciężarem skupionym o tej samej wielkości P = ap */ i wykreślamy linię momentów acb. Linia ta ważna jest jednak tylko na długości c"b. Na długości obciążenia ac" zastępujemy ją parabolą wykreśloną / jak w poprzednim paragrafie/, a otrzymana w ten sposób powierzchnia ad"f"c" b będzie powierzchnią momentów.

Rachunkowo otrzymamy wielkość oddziaływania, biorąc moment oddziaływania A i ciężaru P = ap ze względu na punkt B:

$$Al - pa/ l - \frac{a}{2} / = 0$$

a stąd:

$$A = \frac{pa}{l} / l - \frac{a}{2} / = \frac{pa}{2l} / 2 l - a/ \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43$$

Zatem wartość ta sama, jak gdyby ciężar P = ap był skupiony w odległości $\frac{a}{2}$ od lewej podpory A. Na drugie oddziaływanie mamy wzór:

$$B = P - B = \frac{pa}{2l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43a$$

Przy kreśleniu linii sił poprzecznych musimy pamiętać o tym, że na części nieobciążonej BE siła poprzeczna nie zmienia się; natomiast na części obciążonej zmienia się, podobnie jak w § 25, tj. wedle linii prostej. Wykres T otrzymamy zatem, odcinając na podporach oddziaływania / równe sile poprzecznej na podporze/, na lewej A = m'm, na prawej B = nn', prowadząc z n prostą poziomą na do punktu e i łącząc punkt e z m.

Moment zginający w dowolnym punkcie D między A a E wynosi:

$$M_1 = Ax - \frac{px^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44$$

zaś moment w punkcie poza długością obciążoną / między E a B/

$$M_2 = Ax_1 - pa/x_1 - \frac{a}{2}/ = A/ l - x_1/ \quad \ldots \quad 44a$$

Jeśli obciążenie częściowe działa na inną część belki, to najlepiej jest wyznaczyć największy moment wykreślnie. W środku części obciążonej zaczepiamy ciężar skupiony o wielkości równej obciążeniu i kreślimy wielobok sznurowy w liniach prostych; tylko na długości obciążenia wkreślamy weń parabolę, podobnie jak w wypadku wyżej omówionym / rys.82/.

Miejsce największego momentu / t.j. przekroju niebezpiecznego/

*/ Literami P i p oznaczać będziemy w ogóle ciężar ruchomy /zmienny i użyteczny/ w odróżnieniu od ciężaru stałego / własnego/, który najczęściej oznacza się literami G i g.

możemy obliczyć i tutaj. Jak wiadomo z § 23, występuje on w miejscu, gdzie siła poprzeczna równa jest zeru; obliczając więc moment w tym miejscu, otrzymamy jego największą wartość.

Weźmy np. pod uwagę obciążenie, podane na rys. 82, gdzie P = ap. Jeżeli odległość przekroju niebezpiecznego od lewej podpory wynosi m, to całe obciążenie na długości m musi być równe oddziaływaniu / gdyż obciążenie to odjęte od oddziaływania daje na wynik zero/.

Otrzymamy więc $m = A$, a stąd uwzględniwszy, że $P = ap$,

$$m = \frac{A}{p} = \frac{Aa}{P} \quad \ldots\ldots 45$$

czyli wprowadzając wartość za A z wzoru 43

$$m = \frac{pa\,/\,2l - a/}{2l} \cdot \frac{1}{p} = \frac{a\,/\,2l - a\,/}{2l} \quad \ldots\ldots 45a$$

Moment zginający w tym punkcie, a więc największy moment działający na belkę, wynosi / uwzględniając, że $A = pm$/

$$\text{najw. } M = Am - pm\frac{m}{2} = Am - A\frac{m}{2} = A\cdot\frac{m}{2} \quad \ldots\ldots 46$$

$$\text{czyli: najw. } M = \frac{pa\,/\,2l - a/}{2l}\cdot\frac{a\,/\,2l - a/}{2\cdot 2l} = \frac{pa^2/\,2l - a/^2}{8\,l^2} \quad 46a$$

Obliczając najw. M dla różnych wartości "a" przekonamy się, że bezwzględnie największy moment otrzymamy dla całkowitego obciążenia belki t.j., gdy $l = a$. Jeżeli zatem jest możliwe, że obciążenie działać będzie na całą belkę, to dla obliczenia należy zastosować wzór: $M = 1/8\,pl^2$.

Wypadek taki zachodzi np. przy obliczaniu belek stropowych. Działa na nie ciężar własny stropu z / nadsypką i podłogą/ oraz ciężar ruchomy p, który składa się z ciężaru sprzętów i ciężaru ludzi. Ciężar ten z reguły rozkłada się nierównomiernie, chcąc jednak belkę wykonać tak silnie, aby była wytrzymała na każdy rozkład tego obciążenia ruchomego, rozmieszczamy je na całej długości i obliczamy najw. moment ze wzoru:

$$\text{najw. } M = 1/8\,/g + p/\,l^2 = 1/8\,zl^2 = 1/8/G + P/\,l = 1/8\,Zl \quad 47$$

gdzie z / wzgl. Z/ jest obciążeniem całkowitym czyli zupełnym.

Dla obciążenia, jak rys. 83, może przekrój niebezpieczny przypaść na długość a, jeżeli obciążenie $P_1 = p_1a$ jest większe od oddziaływania, albo w przeciwnym wypadku na długość b. W pierwszym razie otrzymamy odległość $m = \frac{Aa}{P_1}$ tak samo, jak przy obciążeniu podanym na rys. 82; w drugim natomiast zamiast szukać odległości punktu niebezpiecznego od podstawy lewej, obliczymy ją od podpory prawej i otrzymamy w ten sam sposób:

$$n = \frac{B}{p_2} = \frac{Bb}{P_2} \quad \ldots\ldots 45b$$

Jeżeli obciążenie odsunięte jest obustronnie od podpór, wyznacza się miejsce najw. momentu podobnie / porównaj przykł. 34/.

Podobnie możemy postępować, jeśli oprócz obciążeń rozłożonych działają na belkę ciężary skupione; wtedy jednak prędzej prowadzi do celu metoda wykreślna / por. przykłady/.

./.

Przykłady 32 - 35.

32. Należy obliczyć oddziaływania i największy moment zginający dźwigara żelazobetonowego stropowego "a" / por.rys.86/ jeśli ciężar własny wynosi g = 380 kg/m², ciężar ruchomy p = 250 kg/m², zaś odstęp dźwigarów "a" od siebie n = 1,25 m.

Dźwigar a przenosi ciężar tak wielki, jaki wypada na pole zakreskowane pionowo, czyli t.zw. pole obciążenia. Powierzchnia jego wynosi w metrach kwadratowych:

1, 5 ln = 1,05 . 4,0 X 1,25 = 5,25 m².

Całkowite obciążenie na 1 m²:

z = g + p = 380 + 250 = 630 kg/m².

Całkowite obciążenie przypadające na dźwigar wynosi w kg:

Z = 1,05 lnz = 5,25 . 630 = 3310 kg.

Zatem największy moment zginający w kgcm:

M = 1/8 Zl . 1, 5 l = 1/8 3310 . 420 = 173780 kgcm.

33. Jaki największy moment przenosi się na podciąg stalowy, który ma podtrzymać ścianę o grubości 0,3 cm, 7,7 m wysoką, z otworami według rys.84, jeżeli w punkcie a belka podparta jest na skrajnym filarze budynku / por.§ 29/.

Jeżeliby w murze nie było żadnych otworów, to na belkę przenosiłby się ciężar muru leżącego przed belką, a ograniczonego liniami pionowymi przechodzącymi przez podpory */. Jednakowoż z części muru leżącej nad otworami przenosi się połowa na filar lewy, a połowa na prawy. W danym wypadku więc ciężar muru ponad otworami / niezakreskowanej/ przenosi się na filar prawy i na belkę wcale nie oddziaływa, reszta zaś, t.j. ciężar części zakreskowanej, na filar lewy - i ten obciąża belkę.

Całkowity ciężar, przenoszący się na belkę znajdziemy więc, obliczając ciężar muru abcf na długości / 3 + ½ 1,2 / = 3,60 m, a następnie odejmując ciężar odpowiedniej części otworów, t.j. dwu połówek drzwi:

$$P = \left/ 3,60 . 7,7 - 2 . \frac{1,2}{2} . 2,60 \right/ 0,3 . 1600 =$$

$$= 13284 \approx 13300 \text{ kg}.$$

Oddziaływanie wynosi wtedy / według wzoru 43/:

$$A = \frac{13300 . / 4,2 - 1,5 /}{4,2} = 8550 \text{ kg}.$$

Przekrój niebezpieczny oddalony jest od podpory o odległość:

$$x = \frac{Aa}{P} = \frac{8550 . 3,00}{13300} = 1,93 \text{ m}$$

Największy moment wynosi zaś:

$$M = \frac{Am}{2} = \frac{8550 . 193}{2} = 825075 \approx 825100 \text{ kgcm}$$

34. Znaleźć największy moment zginający, przenoszący się na belkę, podtrzymującą ścianę z cegły pustej 0,15 m grubą, 4 m wysoką z otworami, jak na rys.85.

*/ Dla ścian wyższych przyjąć można, że na dźwigar przenosi się obciążenie tylko części muru ograniczonej liniami wychodzącymi z obu podpór dźwigara ku sobie pod kątem 60° / por.§ 29/.

./.

Na belkę przenosi się ciężar muru od osi do osi drzwi o wielkości: P_1 = [illegible] / [illegible],7 + 2,6 + [illegible],7 / 4,[illegible] - 2 . [illegible],7 . 2,6 [illegible] ,15 . . 13[illegible] = 241[illegible] kg.

Oddziaływanie wynosi:

$$A = 241 \cdot \frac{/ \frac{1}{2}\, 2{,}6 + 1{,}0 /}{5{,}[illegible]} = \frac{241 \cdot 2{,}3}{5{,}[illegible]} = 11[illegible]9 \backsim 111[illegible] \text{ kg} .$$

Długość m' obliczona z wzoru 43 przedstawiać tu będzie odległość przekroju niebezpiecznego od punktu D; wynosi ona:

$$m' = \frac{Aa}{P_1} = \frac{111[illegible] . 2{,}6[illegible]}{241[illegible]} = 1{,}20 \text{ m.}$$

Momentu zginającego nie możemy oczywiście obliczać bezpośrednio z wzoru 46, ale sposobem ogólnym:

$$\text{najw. } M = A / 14[illegible] + m'/ - \frac{A\, m'}{2} = A / 140 + m' - \frac{m'}{2}/ =$$

$$= A/ 14[illegible] + \frac{m'}{2} / = 111[illegible] / 14[illegible] + 6 / = 222[illegible] \text{ kgcm.}$$

35. Obliczyć strop żelazobetonowy na rzucie poziomym, podanym na rys. 86.

Na podciągu c spoczywa słup pierwszego piętra S_1 o ciężarze S_1 = 1[illegible] kg. Dźwigar c i podciągi d oraz e, oparte na murach i na słupie parterowym S_2, dźwigają prócz tego ściankę gipsową 3,5 m wysoką o ciężarze 10[illegible] kg/m². Ciężar własny stropu wynosi 30[illegible] kg/m², ciężar ruchomy 25[illegible] kg/m².

Dźwigary a.

Całkowite obciążenie wynosi:

Z_a = lnz = 4,[illegible] X 1,25 X 55[illegible] = 275[illegible] kg

M_a = 1/8 Z_al . 1,05 = 1/8 . 275[illegible] X 4[illegible] X 1,[illegible]5 = 144[illegible] kgcm

Dźwigary b.

Z_b = lnz = 3,[illegible] X 1,25 X [illegible]55 = $\backsim$ 2[illegible]6 kg

M_b = 1/8 Z_bl . 1,05 = 1/8 . 2[illegible]6 X 3[illegible] X 1,[illegible]5 = 777[illegible] kgcm.

Dźwigar c.

Prócz ciężaru stropu o wielkości powyżej obliczonej Z_a przenosi się na ten dźwigar ciężar ścianki gipsowej o wielkości G = = 3,50 X 4[illegible] X 1[illegible] = 140[illegible] kg, wywołującemoment M_G = 1/8 Gl . 1,[illegible]5 = = 1/8 14[illegible] X 4[illegible] X 1,05 = 735[illegible] kgcm.

Z = Z_a + G = 275[illegible] + 140[illegible] = 415[illegible] kg.

M = M_a + M_G = 1444[illegible] + 735[illegible] = 2179[illegible] kgcm.

Podciąg d = AS_2.

Ponieważ dźwigary leżą dość gęsto, przeto zamiast obliczać momenty jak dla ciężarów skupionych, możemy liczyć je jak dla ciężaru jednostajnie rozłożonego. Otrzymamy wtedy przy szerokości pola obciążenia

$\frac{1}{2}$ / 4,[illegible] + 3,[illegible] / = 3,5[illegible] m, a długości l = 5,[illegible] m obciążenie:

Z'_d = 3,5[illegible] X 5,0[illegible] 55[illegible] = 9265 $\backsim$ 927[illegible] kg.

Prócz tego na dźwigar ten przenosi się ciężar ścianki gipsowej o wielkości

G_d = 3,50 X 5,[illegible] X 1[illegible] = 175[illegible] kg.

Całkowity ciężar wynosi zatem:

Z_d = Z'_d + G_d = 927[illegible] + 175[illegible] = 11[illegible]2[illegible] kg.

A stąd M_d = 1/8 1102[illegible] [illegible] 5[illegible] = 68875 $\backsim$ 6888[illegible] kgcm.

./.

Podciąg c = S_2B / por.rys.87/.

Podciąg ten przenosi: 1/ jednostajnie rozłożony ciężar stropu, 2/ jednostajnie rozłożony ciężar ścianki gipsowej, 3/ połowę ciężaru ścianki spoczywającej na dźwigarze c, oraz 4/ ciężar słupa S. Momenty obliczamy metodą rachunkowo-wykreślną.

1/ Ciężar jednostajnie rozłożony stropu wynosi:

$Z'_c = 3,50 \times 7,50 \times 5,50 = 13897 \backsim 139..$ kg.

2/ Ciężar ścianki:

$Z''_c = 3,50 \times 7,5 \times 1.. = 2625 \backsim 263$ kg.

Oddziaływanie $S_2' = B' = \frac{1}{2}$ / 139.. + 263 / = 8265 /

M' = 1/8 / 139 + 263 / 750 = 15497 . kgcm = 15,5.. tm.

3/ Ciężar skupiony, przenoszący się przez dźwigar c z powodu obciążenia ścianką, na wartość:

$G' = \frac{1}{2}\ G = 70.$ kg.

Oddziaływanie powstające na słupie S_2 wynosi:

$$S_2'' = \frac{5,..}{7,5..} \times 7.. = 466 \backsim 470 \text{ kg} \quad B'' = 7.. - 47. = 23.. \text{ kg}$$

Zatem moment zginający w punkcie C:

M_c = 47. × 25. = 1175.. kgcm = 1,18 tm.

4/ Oddziaływanie na słupie S_2 z powodu obciążenia słupem S_1 wynosi:

$$S_2''' = \frac{3,..}{7,3.} \times 1.... = 4... \text{ kg} \quad B''' = 1.... - 4... = 6... \text{ kg.}$$

A stąd moment zginający w punkcie S_1:

M_s = 4... × 45 = 18..... kgcm = 18 tm.

Momenty te możemy wykreślić w dowolnej skali momentów; wtedy otrzymamy dla obciążeń 1 i 2 parabolę, dla obciążeń 3 i 4 zaś trójkąty o wierzchołkach w C względnie w S_2. W rys.87 przyjęliśmy podziałkę 1 mm = 10.... kgcm = 1 tm. Od linii ab odcięliśmy ku górze trójkąt o rzędnej najwyższej M_s = 18 tm = 18 mm, oraz drugi o rzędnej M_c = 1,8 mm = 1,8 tm, a następnie odnieśliśmy rzędne trójkąta drugiego na obwodzie pierwszego trójkąta, otrzymując kształt momentów trapezowy a .. s b o największej rzędnej w pionowej punktu S_1. Poniżej linii ab wykreśliliśmy parabolę momentów dla ciężaru jednostajnie rozłożonego o największej rzędnej 15,5 t = 15,5 mm, a łącząc ją z poprzednio otrzymaną powierzchnią a.sb otrzymamy wykres sumarycznych momentów.

Dla znalezienia największego momentu wykreśliliśmy linię sił poprzecznych, odcinając na podporach oddziaływania; otrzymaliśmy skok w punktach, w których działają ciężary skupione G' i S_2. Punkt zerowy linii tej przypada na punkt S2, tu więc występuje największy moment, którego wielkość znajdziemy, biorąc sumę momentów wszystkich sił po prawej stronie przekroju / gdyż po tej stronie występuje mniejsza ilość sił, a tym samym otrzymujemy prostszy rachunek/. Stąd największy moment:

M = / B + B' + B"/ . 3,.. - / 3,5 . 55 + 3,5 . 1 /3,. . . 1,5 = / 8265 + 23. + 6.. / 3,. - 1.2. = 3325 kgcm = = 33,25 tm.

Tę samą ilość otrzymaliśmy też z wykresu.

§ 27. Belka wystająca, czyli wspornikowa.

Jeżeli belka wystaje poza punkty podparcia, to nazywamy ją

*/ Reakcje nazywamy literami S_2 i B, gdyż takie oznaczenie mamy na planie / rys.97/.

./.

belką wystającą, wspornikową[x] lub przewieszoną / por.rys.88/. Użyć jej możemy np. wtedy, gdy dźwigar stropowy ma zarazem podeprzeć balkon lub wykusz.

Obliczenie belki wystającej przeprowadza się na zupełnie tej samej zasadzie, co belki omawianej w poprzednich ustępach. Kreślimy wielobok sił 012340 i wielobok sznurowy / rys. 99d/, prowadząc promienie tegoż w następującym porządku: do siły P_1 bok ba ‖ 01, między P_1 a P_2 bok ac ‖ 10 .., wreszcie bok fe ‖ 40. Boki ab i fe przedłużamy aż do przecięcia się z kierunkami oddziaływań w punktach b i e, które, połączone ze sobą, dają zamykającą eb. Promień 0m wieloboku sił równoległy do be daje wielkość oddziaływań A = m0 i B = 4m.

Linię sił poprzecznych wykreślimy od osi m'm". Między siłą P_1 a oddziaływaniem A, siła poprzeczna $T = P_1$ działa w dół / jak siła P_1/, jest ujemna; wielkość jej na rysunku więc przedstawia rzędna m'a'. Między A a P_2 siła poprzeczna $T = A - P_1$; w wykresie otrzymaliśmy ją, odcinając b"b" = A, a wtedy T = I'b" - b'bo = bob". Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy linię schodkową, a'b'b"c"c' d'd"e'e"f", która w trzech miejscach, t.j. na obu podporach, oraz w punkcie działania siły P_2 zmienia znak, a tym samym przyjmuje wartość równą zeru. W tych też punktach występują największe momenty, które trzeba wyznaczyć dla obliczenia belki. Moment w punkcie c jest dodatni, natomiast momenty na podporach t.zw. momenty podporowe mają znak ujemny, gdyż leżą w wykresie ponad zamykającą be.

Dla wygodniejszego znalezienia momentów, zwłaszcza w częściach wystających, kreślimy nieraz linię momentów na podstawie poziomej / rys. 88e/ w ten sposób, że na dowolnie obranej linii poziomej a_1f_1 odnosimy wielkość momentów. Rzędne leżące w wykresie 88d pod linią abef, odnosimy pod linię a_1f_1 / np. $d_1h_1 = dh$/ leżące nad abef odnosimy też nad a_1f_1 / np. $b_1g_1 = bg$/. Wtedy momenty ponad linią a'f', będą ujemne zaś pod nią dodatnie.

Rachunkowo znajdujemy zwykle jedno oddziaływanie / np.A/, biorąc moment wszystkich sił działających na belkę ze względu na drugą podporę / np. B/. Otrzymamy wtedy:

$$- P_1 / b_1 + l / + Al - P_2b_2 - P_3b_3 + P_4b_4 = 0$$

$$\text{a stąd } A = \frac{1}{l} / P_1 ./b_1 + l/ + P_2b_2 + P_3b_3 - P_4b_4/ \quad \ldots\ldots \quad 48$$

Oddziaływanie B znajdziemy z równania:

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum P$$

$$\text{a stąd} \quad B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - A = \sum P - A \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49$$

Moment podporowy M obliczymy, biorąc moment wszystkich sił po lewej stronie, t.j. w danym wypadku siły P_1 względem p.A:

$$M_1 = - P_1b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50$$

Podobnie na drugiej podporze:

$$M_2 = P_4b_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50a$$

Największy moment dodatni w punkcie C:

$$M_c = - P_1 / b_1 + a_2/ + Aa_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51$$

Jeżeli belka obciążona jest ciężarem jednostajnym / rys.89/, postępujemy tak samo. Dzielimy obciążenie np. na trzy części, zaczepiamy wedle § 25 i 26 w środkach ciężkości ich ciężary $P_1 =$ $= pl$; $P_2 = pl$; $P_3 = pl_2$ i kreślimy wielobok bacde. Styczne końcowe, równoległe do 0c i do 30 przedłużamy do pionowych podporowych, zaś punkty b i e łączymy zamykającą be. Do stycznych af, ac, cd i dg kreślimy wreszcie parabolę momentów, która też ma w części środkowej rzędne dodatnie, w skrajnych - ujemne. Prowadząc wreszcie

x/ Wystające części nazywamy wspornikami.

./.

w wieloboku sił promień OM ∥ bc, otrzymamy oddziaływanie A = m. i B = 3m, a tym samym możemy wykreślić linię sił poprzecznych podobnie, jak dla ciężarów skupionych /por. też §§ 25 i 26/. Największe momenty wystąpią oczywiście tam, gdzie siła poprzeczna T = 0.

Rachunkowo otrzymamy oddziaływanie A, ustawiając równanie momentów względem podpory B. Wtedy:

$$- gl_1 / \tfrac{1}{2}l_1 + l/ + Al - \tfrac{1}{2}gl^2 + \tfrac{1}{2}gl_2^2 = 0$$

a stąd

$$A = gl_1/ \frac{l_1}{2l} + 1/ + \tfrac{1}{2}gl - \tfrac{1}{2}g\frac{l_2^2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 51$$

$$B = g/ l_1 + l + l_2/ - A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 51a$$

Najw. moment w środkowej części belki wynosi zatem:

$$M_c = \tfrac{1}{2}g/l_1 + c/^2 - Ac \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 53$$

Momenty podporowe wynoszą:

$$M_1 = -\tfrac{1}{2}gl_1^2 \qquad M_2 = -\tfrac{1}{2}gl_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 54$$

Na tej zasadzie znajdziemy momenty dla ciężarów kombinowanych / skupionych i rozłożonych/.

Jeżeli część belki wystająca jest długa i silnie obciążona, zaś pozostała część belki wcale nie, lub też bardzo mało, to zdarzyć się może, że na podporze przeciwległej wypadnie oddziaływanie ujemne. Oznacza to, że belka w tym miejscu ma tendencję podniesienia się i że trzeba ją tam silnie obciążyć lub zakotwić.

Moment dodatni belki wystającej jest tym mniejszy, im większe obciążenie jest na wsporniku. Jeżeli belka dźwiga zatem obciążenie stałe oraz obciążenie ruchome, to dla obliczenia najw. momentu dodatniego / pomiędzy podporami/ należy obciążenie ruchome umieścić najniekorzystniej, a więc wspornika nie obciążać. Dla obliczenia najw. momentu podporowego / ujemnego/ należy natomiast obciążenie ruchome umieścić i na wsporniku; wielkość obciążenia pomiędzy punktami podporowymi nie wpływa na wielkość momentu podporowego./ Por. przykład 36/.

Przykłady 36 - 37.

36. Obliczyć oddziaływania, siły poprzeczne i największe momenty belki wystającej o wymiarach i obciążeniu wskazanych na rys. 88, przyjmując, że w podziałce sił 1 cm = kg, zaś w podziałce długości 1 cm = m.

Oddziaływanie A wynosi / wedle wzoru 48/:

$$A = \frac{1}{4{,}50} / 2{,}000 \,.\, 5{,}50 + 4000 \,.\, 3{,}0 + 2500 \,.\, 1{,}0 - 1500 \,.\, 1{,}0/ = 5333 \text{ kg.}$$

Wedle wzoru 49: $B = \Sigma P - A = 2000 + 4000 + 2500 + 1500 - 5333 = 10000 - 5333 = 4667$ kg.

Moment na podporze A wynosi:

$M_1 = - P_1b_1 = - 2000 \,.\, 100 = - 200000$ kgcm.

moment na podporze B:

$M_2 = - P_4b_4 = 1500 \,.\, 1{,}00 = - 150000$ kgcm

najw. moment dodatni w punkcie C:

$M_c = - P_1 / b_1 + a_2 / + Aa_2 = - 2000/100 + 150/ - 5333 \,.\, 150 =$
$= 500000 + 800000 = + 300000$ kgcm.

37. Obliczyć oddziaływania, siły poprzeczne i momenty zgięcia belki wystającej, obciążonej ciężarem stałym g = 500 kg/mb i ruchomym p = 500 kg/mb. Ciężar ruchomy należy przyjąć: a/ rozłożony na

./.

całej długości belki, b/ pomiędzy podporami, c/ na wspornikach /por. rys.89/.

a/ Ciężar rozłożony na całej długości belki.

Oddziaływanie A równa się oddziaływaniu B z powodu symetrii.

$A = \frac{1}{2} (g + p) (3,00 + 5,00) = 3600$ kg $= B$.

Siła poprzeczna na podporze A /właściwie tuż obok podpory/ w części wystającej belki jest więc:

$T'_a = - (g + p) \cdot 1,50 = - 1350$ kg, zaś w A, tuż obok podpory, w części środkowej jest:

$T''_a = \frac{1}{2} (g + p) \cdot 5,00 = 2250$ kg.

Moment zginający na podporze A:

$$M_a = - (g + p) \frac{1,50^2}{2} = 1012,5 \text{ kgm.}$$

Moment zginający w środku belki tj. w przekroju M:

$$M_m = 3600 \cdot 2,50 - 3600 \cdot \frac{1,50 + 2,50}{2} = 3600 (2,50 - 2,00) = 1800 \text{ kgm.}$$

b/ Ciężar ruchomy tylko między podporami.

Oddziaływanie na podporze A:

$A = (g + p) \cdot 2,50 + g \cdot 1,50 = 2250 + 750 = 3000$ kg $= B$

Siła poprzeczna na podporze A /na lewo od podpory/:

$T'_a = - g \cdot 1,50 = - 750$ kg,

zaś na prawo od podpory:

$T''_a = (g + p) \cdot 2,50 = 2250$ kg.

Moment zginający na podporze A:

$$M_a = - g \frac{1,50^2}{2} = - 562,5 \text{ kgm}$$

Moment zginający w środku belki:

$$M_m = 3000 \cdot 2,50 - (g + p) \frac{2,50^2}{2} - g \cdot 1,50 \left(2,50 + \frac{1,5}{2}\right) =$$

$$= 7500 - 2812,5 - 2437,5 = 2250 \text{ kgm.}$$

c/ Ciężar ruchomy tylko na wspornikach:

Oddziaływanie na podporze A:

$A = (g + p) \cdot 1,50 + g \cdot 2,50 = 1350 + 1250 = 2600$ kg.

Siła poprzeczna na podporze A na lewo od podpory jest więc:

$T'_a = - (g + p) \cdot 1,50 = - 1350$ kg

na prawo od podpory

$T''_a = g \cdot 2,50 = 1250$ kg.

Moment zginający na podporze A:

$$M_a = - (g + p) \frac{1,50^2}{2} = 1012,5 \text{ kgm.}$$

Moment zginający w środku belki:

$$M_m = 2600 \cdot 2,50 - (g + p) \cdot 1,5 \left(\frac{1,5}{2} + 2,50\right) -$$

$$- g \cdot \frac{2,50^2}{2} = 6500 - 4387,5 - 1562,5 = 550 \text{ kgm.}$$

Widzimy zatem, że najw. moment na podporze otrzymujemy dla obciążenia wspornika, - obciążenie przęsła jest obojętne; - zaś najw. moment w środku belki dla obciążenia przęsła przy wspornikach nieobciążonych.

./.

§ 28. Belka jednym końcem utwierdzona / wspornik/.

Prócz belek podpartych spotykamy w budownictwie bardzo często belki wmurowane jednym końcem w ścianę czyli wsporniki, np. belki podtrzymujące galerje, balkony / rys. 58 i 59/. Każdy ciężar umieszczony na takiej belce / i sam ciężar własny belki/ stara się obrócić belkę około punktu A w kierunku strzałki / por. rys. 9 /; w równowadze utrzymuje się belka tylko dzięki ciężarowi muru, jaki spoczywa na jej wmurowanym końcu.

Siły poprzeczne i momenty oblicza się podobnie jak dla wypadków poprzednich. Dla sił P_1, P_2, P_3 kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy, a promienie tego ostatnie dają wielkość momentu w dowolnym punkcie. Np. długość mn odczytana w skali momentów daje wielkość momentu zginającego w punkcie B; zaś długość ab wielkość momentu na podporze. Jak widzimy, największy jest tu moment podporowy.

Rachunkowo otrzymamy moment w punkcie M:

$$M = -P_1 / a_1 - b/ - P_2 / a_2 - b/ \quad \ldots\ldots \quad 55$$

na podporze:

$$\text{najw. } M = -P_1a_1 - P_2a_2 - P_3a_3 \quad \ldots\ldots \quad 56$$

Siła poprzeczna w każdym punkcie równa jest sumie wszystkich sił po jednej / tu prawej/ stronie przekroju, więc na długości BC:

$$T = -P_1 \quad \ldots\ldots \quad 57$$

na długości CD:

$$T = - /P_1 + P_2/ \quad \ldots\ldots \quad 57a$$

i t.d. Stąd wykreślnie otrzymujemy linię schodkową / rys. 1 2/. Siła poprzeczna ma znak ujemny, gdyż wszelkie siły działają w dół.

Dla jednego ciężaru P umieszczonego na końcu wspornika / rys. 91/ otrzymujemy najw. moment / na podporze/:

$$\text{najw. } M = Pl \quad \ldots\ldots \quad 58$$

$$T = P \quad \ldots\ldots \quad 59$$

Wielobok momentów jest tu trójkątem o najw. rzędnej w miejscu wmurowania, wielobok sił poprzecznych prostokątem o / stałej/ wysokości T = P.

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego / rys.92/ znajdujemy moment zginający w punkcie M, skupiając obciążenie na długości a w środku i biorąc jego moment względem odpowiedniego punktu:

$$M = -pa \cdot \tfrac{1}{2} a = -\tfrac{1}{2} pa^2 \quad \ldots\ldots \quad 60$$

Na podporze moment wynosi:

$$\text{najw. } M = -pl \cdot \tfrac{1}{2} l = -\tfrac{1}{2} pl^2 \quad \ldots\ldots \quad 61$$

Jeśli całkowite obciążenie pl nazwiemy Q, to wzór ten otrzymamy w postaci:

$$\text{najw. } M = -\tfrac{1}{2} Ql \quad \ldots\ldots \quad 62$$

Przykłady 38 - 39.

38. Ciężar P = 900 kg umieszczony jest na końcu wspornika o długości l = 1,2 cm / por.rys.58/. Jakie momenty i siły poprzeczne działają na wspornik / por. przykład 2 /.

Największy moment występuje w miejscu wmurowania i wynosi M = Pl = - 900 . 120 = 108000 kgcm. Wykreślnie otrzymaliśmy wynik ten sam.

Siła poprzeczna w każdym punkcie belki T = P = 900 kg.

39. Ciężar 750 kg/mb rozłożony jest jednostajnie na całej długości wspornika o dług. 1,20 m / rys.59/. Znaleźć momenty i siły poprzeczne / por. przykład 21/.

./.

$$\text{Najw. } M = -p\frac{l^2}{2} = -75 \cdot \frac{1{,}2^2}{2} = 540 \text{ kgm} = 54000 \text{ kgcm}$$

Również ze wzoru 59 otrzymamy:

$P = pl = 75 \times 1{,}20 = 90$ kg,

$$\text{najw.} M = -\frac{Pl}{2} = \tfrac{1}{2}\,90 \cdot 1{,}20 = 540 \text{ kgcm.}$$

Jeżeli zatem ciężar / P = 90 kg / rozłożony jest na całej długości wspornika, to najw. moment jest dwukrotnie mniejszy, niż dla tegoż ciężaru, ale skupionego i umieszczonego na końcu belki.

§ 29. Obciążenie niejednostajne.

W rzeczywistości rzadko tylko zdarzają się belki obciążone jednostajnie. Np. belki stropowe obciążone są z reguły sprzętami, względnie ludźmi, zupełnie nieregularnie. Mimo jednak, obliczając tak te belki, jak i wiele innych, przyjmujemy, że obciążone są one ciężarem zupełnie jednostajnym; ułatwia to bowiem obliczenie, a nadto zapewnia bezpieczeństwo wobec tego, że nie można przewidzieć, gdzie i jakie ciężkie przedmioty będą umieszczone, a zupełnie to samo dotyczy i innych dźwigarów.

Zdarzają się jednakowoż wypadki, w których z góry przyjąć winniśmy obciążenie niejednostajne. Zachodzi to przy obliczaniu belek i podciągów podtrzymujących wysokie ściany, przy obliczaniu belek dźwigających stropy o nieregularnym kształcie itd. W pierwszym wypadku z powodu następującego: Mur, dzięki wiązaniu cegieł i dzięki zaprawie w razie zawalenia się podciągu nie załamałby się wedle pionowych prostych AM i BN wychodzących z podpór, ale utworzyłoby się niejako sklepienie o kształcie zbliżonym do paraboli AFB podtrzymującej wyższe części muru. / por. rys.93/. Zamiast tej paraboli przyjmuje się bardzo często dla wygody obliczenia i dla zabezpieczenia pewności konstrukcji trójkąt ACB. Tak też polecają obliczać takie podciągi Polskie Normy i przyjmować pochylenie prostych ograniczających się pod kątem 60° x/. W razie gdy w ścianie znajdują się otwory / okna, drzwi itp./ należy proste ograniczające przesunąć tak, aby nie przecinały otworu / por. rys.94/.

Weźmy pod uwagę belkę obciążoną ciężarem rozłożonym niejednostajnie np. wedle rys.95. W celu wyznaczenia linij momentów dzielimy powierzchnię obciążenia na poszczególne części o kształcie możliwie prostym, w danym wypadku na trapezy i trójkąty, i obliczamy ich ciężary. Np. ciężar na długości AC wynosi $P_1 = \frac{a}{2}/p_1 + p_2/$ i zaczepia w środku ciężkości trapezu ACC'A', który łatwo możemy określić wedle § 22.5. Podobnie znajdziemy ciężary $P_2 = \frac{b}{2}/p_2+p_3/$, $P_3 = \frac{c}{2}/p_3 + p_4/$, oraz $P_4 = \frac{d}{2}p_4$. Ostatni ciężar zaczepia w środku ciężkości trójkąta EBE', więc odległości 2/3d od podpory B. Kreślimy teraz wielobok sił 1234 i wielobok sznurowy, prowadząc

x/ Wedle N. szerokość filara narożnego, podtrzymującego tak obliczony podciąg powinna być conajmniej równa 0,5 l; jeżeli jest mniejsza od 0,4 l, to podciąg mamy obliczać na cały ciężar ściany ograniczonej liniami pionowymi, jeżeli szerokość filara jest większa od 0,4 l, a mniejsza od 0,5 l podciąg należy obliczać na obciążenie pośrednie między trójkątowym a pełnym.

./.

promienie tegoż równolegle do promieni wieloboku sił, a więc ap ∥ o , pr ∥ 1 ..., a wreszcie zamykającą ab. W długościach odpowiadających poszczególnym częściom obciążenia ac, cd.. wkreślamy linie krzywe, styczne do wieloboku w punktach a,c,d..., które dają właściwy kształt linij momentów. Krzywe te dla obciążenia trójkątowego i trapezowego są parabolami sześciennymi.

Linie sił poprzecznych wykreślamy od osi a'b', odcinając w m' rzędną a'a", w c' rzędną c'c" i t.d. Linia sił poprzecznych jest krzywą, przechodzącą przez punkty a",c", d", e",b", i to parabolą drugiego stopnia dla obciążenia stopniowego lub trapezowego x/. Największy moment występuje w miejscu, gdzie linia sił poprzecznych przecina oś, t.j., gdzie ma rzędną równą zeru, w danym wypadku w punkcie m.

Znalezienie największego momentu rachunkiem jest tu zazwyczaj dość uciążliwe, dlatego z reguły postępujemy drogą wykreślną, albo przynajmniej miejsce najw. momentu znajdujemy drogą wykreślną, a wielkość tegoż obliczamy, co zresztą najczęściej wykonuje się też dla kontroli rachunku wykreślnego. Można też podzielić obciążenie na bardzo wąskie paski i w poszczególnych punktach obliczać momenty rachunkowo. Największy z momentów tak obliczonych nie będzie wprawdzie z reguły momentem bezwzględnie największym, ale różnica wielka nie będzie.

W wypadkach prostszych droga rachunkowa prowadzi prędzej do celu. Np. dla obciążenia por.rys.96 w kształcie trójkąta równoramiennego, / a więc symetrycznie rozmieszczonego/, najw. moment występuje w środku belki. Wtedy otrzymamy mianowicie:

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot p = \tfrac{1}{4}\, lp \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63$$

Oddziaływania: $A = B = P_1 = \frac{1}{4}\, lp$ 63a

Najw. moment / w środku belki/:

$$\text{najw. } M = A\,\frac{l}{2} - P_1\,\frac{l}{6} = \tfrac{1}{4}\, pl\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = 1/12\; pl^2 \; \ldots\ldots \quad 64$$

Jeżeli całkowite obciążenie belki wynosi $P = \frac{1}{2}\, pl$ to

najw. $M = 1/6\; Pl$ 65

względnie " $M = 1/3\; P_1 l$ 65a

Siła poprzeczna w środku belki: $T = 0$ 66

W dowolnym punkcie X otrzymujemy rzędną obciążenia

$$p_x = \frac{px}{\frac{1}{2}l} = \frac{2px}{l}$$, a więc obciążenie na długości x:

$$P_x = \tfrac{1}{2}\, x \cdot \frac{2px}{l} = \frac{px^2}{l} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 67$$

a stąd moment w punkcie x:

$$M_x = Ax - \frac{px^2}{l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{pl}{4} \cdot x - 1/3\; p\,\frac{x^3}{l} = \frac{px(3l^2 - 4x^2)}{12l}$$

Linia momentów jest zatem parabolą sześcienną.

Siła poprzeczna w punkcie x wynosi:

$$T_x = A - \frac{px^2}{l} = \tfrac{1}{4}\, pl - \frac{px^2}{l} = \frac{p(l^2 - 4x^2)}{4l} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 68$$

Linia sił poprzecznych jest zatem parabolą.

x/ Gdyby na pewnej części belki było obciążenie jednostajne, to na tej części linia sił poprzecznych będzie prostą.

./.

Przykłady 40 - 43.

40. Obliczyć największy moment zginający belki żelazobetonowej trzymającej ścianę z cegły zwykłej o grubości 0,42 m, / por. rys. 97/.

Jeżeli rozpiętość w świetle wynosi $l_o = 3,60$ m, to teoretyczny odstęp punktów podparcia belki wynosi: $l = 1,05\ l_o = 1,05 \cdot 3,60 = 3,78$ kg.

Całkowity ciężar muru działający na belkę:

$$P = 3,78 \cdot \frac{3,28}{2} \cdot 0,42 \cdot 1600 = 4240 \text{ kg.}$$

$$\text{Oddziaływania } A = B = \frac{P}{2} = 2120 \text{ kg.}$$

Największy moment zginający w środku rozpiętości belki:

$$M = \frac{Pl_1}{12} = \frac{4240 \cdot 3,78}{12} = 1336 \text{ kgm.}$$

41. Na podciąg stalowy o długości 5,00 m działa obciążenie wedle rys. 113. Znaleźć największy moment zginający drogą rachunkową.

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\ 1000 \times 500 = 250 \text{ kg} \qquad P_2 = 1,50 \times 500 = 750 \text{ kg}$$

$$A = B = P_1 + P_2 = 250 + 750 = 1000 \text{ kg.}$$

Największy moment zginający w środku rozpiętości belki:

$$M = A\frac{l}{2} - P_1/\frac{b}{2} + \frac{a}{3}/ - P_2\frac{b}{4} = 1000 \cdot 2,50 - 250\ /\ 1,50 +$$

$$+ \frac{1,00}{3}\ / - 750\ \frac{1,50}{2} = 2500 - 458 - 562 = 1480 \text{ kgm.}$$

42. Pal AB podparty górą na belce mostowej B, zaś dołem na podwalinie A, podtrzymuje zastawkę AB / por.rys.118/. Jak wielki moment przenosi się na pal, jeżeli woda sięga do poziomu B. Odstęp sąsiedni pali od siebie wynosi b = 1,50 m.

Parcie wody P działające w dolnej jednej trzeciej wysokości ma wielkość:

$$P = \frac{h^2}{2}\, g_w b = \frac{2,50^2}{2} = 1000 \cdot 1,50 = 4,69 \text{ t.}$$

Oddziaływanie / względnie ciśnienie na belkę mostową/, przeniesione przez pal w punkcie B wynosi wedle wzoru 73:

$$BA = \frac{P}{3} = 1,57 \text{ t,}$$

zaś poziome ciśnienie pala / oddziaływanie podwaliny/ w punkcie A:

$$A = 2/3\ P = 3,13 \text{ t.}$$

Największy moment występuje w odległości a = 0,577 h = = 0,577 X 2,50 = 1,44 m, od punktu B, a więc w wysokości 2,50 - 1,44 = 1,06 m od dna i wynosi wedle wzoru 75.

$$\text{najw. } M = 0,128\ Pl = 0,128 \cdot 4,69 \cdot 2,50 = 1503 \text{ kgm.}$$

43. Pal AB o długości l = 2,50 m podparty górą na belce mostowej B, zaś dołem na podwalinie A, podtrzymuje zastawkę. Obliczyć, jak wielki moment przenosi się na pal, jeżeli woda sięga do poziomu h = 1,50 m. / Por. rys.115/.

./.

Wypadkowa parcia wody P działa w dolnej jednej trzeciej trójkąta parcia wody i wynosi:

$$P = \frac{1}{2} h^2 b g_w = 1,69 \text{ t.}$$

Ciśnienie w p.B znajdziemy z równania:

$$B l = P \frac{h}{3} \qquad \text{skąd:} \qquad B = P \frac{h}{3l} = 0,34 \text{t}$$

Ciśnienie pala / oddziaływanie podwaliny/ w punkcie A będzie:

$$A = P - B = 1,69 - 0,34 = 1,35 \text{ t.}$$

Moment w przekroju D, odległym o / x + d/ od podpory B wynosi:

$$M_x = B\,/\,x + d/ - \frac{1}{2} x^2 b g_w \frac{x}{3} = 1/6\, b g_w \left[3\,/\,x + d/\, h^2 - x^2\right]$$

Miejsce działania najw. momentu otrzymamy na zasadzie, że siła poprzeczna w tym przekroju jest zerem:

$$T = B - P_x \qquad \text{gdzie } P_x = g_w b \frac{x^2}{2}$$

Podstawiając wartość za B i P_x i przyrównując ostatecznie T / siłę poprzeczną/ do zera, otrzymamy:

$$T = B - P_x = 0$$

$$1/6 \frac{h^3}{l} b g_w - \frac{1}{2} x^2 b g_w = 0$$

$$\text{skąd} \qquad x = \sqrt{\frac{h^3}{3l}} = 0,67 \text{ m}$$

Wstawiając wartość za x w równanie na M_x, otrzymamy najw. moment:

$$M_{max} = B\,/\,x + d/ - 1/6\, b g_w x^3 = 0,34\,/\,0,67 + 1,00\,/ -$$
$$- 1/6\; 1,50 \;.\; 1,00 \;.\; 0,67^3 = 0,568 - 0,075 = 0,483 \text{ tm.}$$