WYDAWNICTWO SKRYPTÓW ZWIĄZKU STUDENTÓW ARCHITEKTURY

STEFAN BRYŁA

STATYKA BUDOWLANA

CZ. I, II, III, IV.

ORAZ ZESZYT RYSUNKÓW.

[1942]
WARSZAWA 1939 R

[druk konspiracyjny]

Z S A

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI J. WAWRZYNOWICZ

SPIS RZECZY

I. PODSTAWY STATYKI BUDOWLI

A. Wstęp

B. Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie

C. Moment statyczny

D. Środki ciężkości figur płaskich

E. Belki najprostsze

./.

Str.

STEFAN BRYŁA STATYKA BUDOWLI Cz. II.

W Y T R Z Y M A Ł O Ś Ć   M A T E R I A Ł Ó W

A. W s t ę p.

SPIS RZECZY DO III,IV CZĘŚCI

S t a t y k i B u d o w l i .

Stefana Bryły

III. Belki kratowe i więzary dachowe.

IV. Mury i sklepienia.

Budowle ziemne.

I. PODSTAWY STATYKI BUDOWLI.

A. Wstęp.

§ 1. Pojęcia wstępne.

Budowlę inżynierską lub jej część stanowiącą dla siebie pewną całość konstrukcyjną, a wykonaną z pewnych materiałów połączonych w odpowiedni sposób ze sobą, nazywamy konstrukcją. Taką konstrukcją jest więc np. most stalowy, dach drewniany, mur ceglany i t.d. Zadaniem jej jest w pierwszym rzędzie przenieść na grunt ciężary, siły jakie na nią działają, i to pewnie, bezpiecznie tj. tak, aby stałość budowli nie była narażona na szwank, aby siły te nie zniwoczyły wytrzymałości, mocy konstrukcji. Wskutek tych t.zw. sił zewnętrznych / obciążeń/ powstają w budowli siły wewnętrzne, które muszą równoważyć siły zewnętrzne.

Naukę badającą i określającą warunki konieczne, aby utrzymała się ta równowaga sił zewnętrznych i wewnętrznych, oraz pozwalającą obliczyć wymiary konstrukcji nazywamy statyką budowli. Obliczenia te wykonuje się sposobem rachunkowym lub wykreślnym, zależnie od tego czy jeden czy drugi jest w danym wypadku wygodniejszy; bardzo często używa się dla kontroli obu metod równocześnie. Statykę, traktowaną sposobem wykreślnym, nazywamy statyką wykreślną.

§ 2. Pojęcie siły.

Przyczynę ruchu / lub spoczynku/ ciał nazywamy siłą. Istnienie sił poznajemy po ich wpływie na dane ciała. Istnieje więc np. siła ludzkich muskułów, siła ciężkości, siła pary, elektryczności, wiatru i t.d.

Dla określenia wielkości siły należy porównać ją z inną znaną powszechnie siłą, czyli z t.zw. jednostką siły. Za taką jednostkę przyjmuje się zwykle przy mniejszych siłach 1 kg, przy większych 1 tona / = 1000 kg/. Np. siła pionowa P = 250 kg oznacza, że siła P działa tak samo, jak działałby ciężar 250 kg zawieszony np. na sznurze.

Aby siłę dokładnie oznaczyć, trzeba znać jej 1/ wielkość, 2/ punkt zaczepienia t.j. punkt, w którym siła działa na ciało i 3/ kierunek tej siły.

W statyce wykreślnej oznacza się siły odcinkami prostych o odpowiedniej długości i kierunku, zachowując pewien stosunek długości odcinka do wielkości siły. Np. niech 1 cm przedstawia 100 kg, to dla oznaczenia siły 250 kg użyjemy prostej o długości 2,5 cm. Kierunek, w którym siła działa, znaczy się strzałką, skierowaną w tymże kierunku / rys. 1/. Nazywamy go zwrotem siły, tokiem siły, strzałką siły. Siłę nazywamy albo jedną literą /np. P, P_1, P_2, Q, G i t.d./ albo też dwiema / np. AB/, których porządek oznacza zarazem zwrot siły. Np. AB oznacza siłę działającą A do B, natomiast BA oznaczałoby siłę działającą od B do A. Punkt zaczepienia leżeć musi oczywiście w kierunku siły; można go jednak dowolnie wzdłuż niego przesuwać. Np. ciężar 20 kg zawieszony tuż przy haku ciągnie go z tą samą siłą, co takiż ciężar zawieszony na długim sznurku, a więc zaczepiający znacznie niżej.

Używając słowa " kierunek siły" mamy zwykle na myśli " zwrot siły".

./.

§ 3. Równowaga sił.

Jeśli w punkcie A, w którym działa siła P, zaczepimy siłę równą, a wprost przeciwną tej sile, np. siłę R / rys.2/, to ruch punktu A nie nastąpi, a stan taki nazywamy równowagą sił.

W myśl § 2 równowaga nastąpi też, gdy równe, a wprost przeciwne siły działają nie w tym samym punkcie, ale w dwu różnych punktach, leżących jednak na kierunku obu sił. Siłę R / rys.3/ można bowiem, przesunąć do punktu A i zrównoważyć ją z siłą P równą, a wprost przeciwną.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda konstrukcja budowlana musi być w równowadze. Wynika stąd, że siłom na ni, działającym / np. wiatr, śnieg, ciężar pokrycia dla dachów, ciężar ludzi, wozów dla mostów i t.d./ przeciwstawić musi sama siły, inne w sumie swej równe, a wprost przeciwne obciążeniu, czyli równoważące je. Siły te nazywamy oddziaływaniami, odporami lub reakcjami. Np. słup obciążony u góry siłą P wywołuje u dołu reakcję gruntu A = P. Również wewnątrz samego ciała powstaje przeciwdziałanie, równe i przeciwne sile P.

§ 4. Wypadkowa sił.

Na konstrukcję budowlaną działa zwykle nie jedna siła, ale równocześnie większa ilość sił zewnętrznych i to często działających na różne punkty. Zamiast uwzględnić je wszystkie po kolei w obliczeniu, staramy się dla uproszczenia roboty znaleźć taką jedną siłę, któraby zastąpiła wszystkie siły działające czyli złożyć je w jedną siłę, wywierającą ten sam wpływ na ciało, co wszystkie siły razem wzięte. Taką siłę nazywamy wypadkową, zaś siły, z których ona powstaje, składowemi.

Z drugiej strony koniaczną nieraz rzeczą jest zastąpić pewną daną siłę siłami innymi, które w swym działaniu są jej równowarte czyli rozłożyć ją na składowe.

Przy rozwiązywaniu obu tych zadań trzeba wziąć pod uwagę czy siły zaczepiają się w jednym i tym samym punkcie czy też w różnych punktach oraz czy działają w jednym i tym samym kierunku czy też w różnych kierunkach. Z kolei zajmiemy się więc składaniem i rozkładaniem sił dla poszczególnych wypadków.

B. Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie.

§ 5. Siły działające w jednej linii.

Wypadkowa R dwu lub więcej sił P_1, P_2, P_3 ... działających w jednej linii w tym samym kierunku równa się sumie wszystkich sił:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

Np. hak H ciągnięty jest tą samą siłą R = 4 kg bez względu na to, czy zaczepione są na nim trzy ciężary o wielkości łącznej $R = P_1 + P_2 + P_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ kg, czy też jeden ciężar o wielkości 4 kg.

Jeśli siły działają w kierunkach przeciwnych, to należy je odjąć od siebie, czyli " dodać algebraicznie"; siłom bowiem działającym w pewnym kierunku dajemy znak +, siłom w kierunku wprost przeciwnym znak -. Jeśli więc siła AB /rys.1/ ma znak +, to siła BA otrzyma znak - .

Np. pręt MN, na który działają siły $P_1 = 30$ kg i $P_2 = 20$ kg ciągnięty jest w kierunku siły większej t.j. P_1 z siłą $R = P_1 - P_2 = 30 - 20 = 10$ kg / rys. 4 i 5 /.

Przy większej ilości sił zasada składania pozostaje ta sama. Np. dla rys. 6 wypadkową jest $R = /P_1 + P_2/ - /P_3 + P_4/$. Wynika stąd reguła:

Wypadkowa sił, działających w jednej linii, równa się sumie algebraicznej sił składowych.

Jeśli suma sił, działających w jednym kierunku, równa się sumie sił, działających w kierunku przeciwnym, to wypadkowa $R = 0$, czyli następuje równowaga. Jeżeli np, na rys.5 siły P_1 i P_2 są sobie równe / i wprost przeciwne/ to pręt ten nie poruszy się wcale.

§ 6: Dwie siły działające na jeden punkt w różnych kierunkach.

Jeśli na dany punkt A / rys.7/ działają dwie siły o kierunkach tworzących ze sobą kąt np. $P_1 = AB$ oraz $P_2 = AC$, to wypadkową znajdziemy, kreśląc z punktu B równoległą do siły P_2 z C zaś równoległą do P_1. Przekątnia AD otrzymanego w ten sposób równoległoboku daje kierunek i wielkość wypadkowej R. Niech np. dwu ludzi stara się przeciągnąć sznurami jakiś ciężar A, jeden z nich w kierunku AB z siłą P_1, drugi w kierunku AC z siłą P_2, to ciężar znajdzie się ostatecznie w punkcie D. Równoległobok ABCD nazywamy równoległobokiem sił.

Zamiast kreślić cały równoległobok ABCD, wystarczy wykreślić trójkąt ABD lub ACD; trzeci bok tego trójkąta AD daje wprost kierunek i wielkość wypadkowej. Trójkąt ten nazywamy trójkątem sił / rys. 8 i 9/.

Ponieważ do punktu D dojść można albo drogą ABD albo ACD, przeto przy składaniu sił obojętny jest porządek, w jakim siły składamy, podobnie jak przy sumowaniu liczb obojętny jest porządek dodajników.

§ 7. Dowolna ilość sił działających na jeden punkt w różnych kierunkach.

Jeśli w danym punkcie działa większa ilość sił, to postąpimy w sposób następujący / rys.10 i 11/.

Składamy dowolne dwie siły np. P_1 i P_2 wedle rys.9 /§6/ w wypadkową R_1, następnie R_1 i P_3 w wypadkową R_2, która zastępuje więc siły P_1, P_2 i P_3; idąc dalej w ten sposób dochodzimy do ostatniej siły P_5, która złożona z wypadkową R_3 daje siłę R jako wypadkową wszystkich sił P_1 ... P_5. Rysowanie wypadkowych częściowych R_1, R_2, R_3, jest jednak zbyteczne; wystarczy bowiem poczynając od punktu A odnieść wszystkie siły P_1 ... P_5 w odpowiednich kierunkach. Otrzymany w ten sposób ciąg odcinków 0123450 nazywamy ciągiem sił lub wielobokiem sił, a prosta łącząca punkt początkowy 0 tego ciągu z punktem końcowym 5 oznaczona linią kreska - kropka -.-.-.-. t.zw. zamykająca, daje wielkość wypadkowej o zwrocie / strzałce/ od 0 do 5 / czyli 05/. Podobnie, jak przy składaniu dwu sił, obojętny jest i tu porządek, w jakim składamy większą ilość sił; należy tylko pamiętać, aby siły odnosić we właściwym kierunku, t.j. odpowiednio do strzałki.

./.

§ 8. Równowaga kilku sił w jednym punkcie.

Ponieważ wypadkowa R działa tak samo, jak wszystkie jej składowe razem wzięte, przeto dla zrównoważenia tych składowych wystarczy zaczepić w punkcie O / rys.12 i 13/ siłę równą, a wręcz przeciwną wypadkowej. Jeśli zatem wypadkowa ma wielkość R, a kierunek O4 / od O do 4/, to siła równoważąca musi mieć wielkość -R, a kierunek 4O / od 4 do O/. Jeśli tę siłę 4 O włączymy teraz w ciąg sił, to przy uwzględnieniu stałego kierunku strzałek będzie nim O1234O, t.j. punkt początkowy zejdzie się z końcowym. Wielobok / ciąg/ taki nazywamy zamkniętym.

Dla równowagi kilku sił przechodzących przez jeden punkt musi zamknąć się zatem odpowiedni ciąg sił.

Jeśli w tej samej linii prostej działa para sił, to równowaga nastąpi, gdy zaczepimy siłę -R równą sumie algebraicznej sił działających, ale o znaku przeciwnym. Por.rys.14; odsunięto tu dla lepszego uwydatnienia wykres siły R od wykresu sił P_1, P_2, P_3; w rzeczywistości leżą one w jednej prostej, mianowicie siła R działa w kierunku NO zaznaczonym linią kreskowaną.

§ 9. Rozkładanie sił.

Jeśli daną siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe, to zadanie to nie jest ściśle oznaczone. Czy weźmiemy bowiem pod uwagę siły P_1 i P_2, czy P'_1 i P'_2, czy wreszcie P_1'' i P_2'' / rys.15/, to każda z tych grup równowarta jest z daną siłą P. Dopiero, gdy znane nam będą albo a/ kierunki obu sił, albo b/ wielkość i kierunek jednej z nich, albo c/ wielkość obu sił, możemy zadanie rozwiązać. Wtedy mamy do czynienia z zagadnieniem wręcz przeciwnym niż w § 6. Sprowadza się ono w ogóle do zbudowania trójkąta / trójkąta sił / z danych trzech części składowych, mianowicie: w wypadku a/ z jednego boku, t.j. wielkości siły P i z kierunków obu pozostałych boków / sił składowych/, w wypadku b/ z dwu boków i ich kierunków czyli kąta między nimi zawartego; w wypadku c/ zachodzącym bardzo rzadko w praktyce, z trzech boków.

Zwykle dane są kierunki obu składowych, t.j. kąty α i β, jakie te składowe zawierają z siłą P, którą mamy rozłożyć. Wtedy na sile P = AB / rys.16/ kreślimy trójkąt o bokach AC i CB równoległych do danych kierunków; długości AC i CB otrzymane w ten sposób dają nam wprost wielkość sił P_1 i P_2.

§ 10. Rachunkowe składanie i rozkładanie sił.

Weźmy pod uwagę siłę P i przyjmijmy dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych x y / rys.17/. Jeżeli siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe równoległe do tych osi, to z trójkąta ABC otrzymamy na wielkość obu składowych wzór:

$$\left.\begin{aligned} P' &= P\cos\alpha \\ P'' &= P\sin\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

Wielkości P' i P" są zarazem rzutami siły P na osi spółrzędnych.

Wzory 2 posłużą również do wyznaczenia wypadkowej układu sił P_1, P_2 .. / por. rys.18/. Przyjmijmy znów dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych x y i odnosząc siły P_1, P_2 ... jedna po drugiej wedle § 7 odrzućmy je kolejno na obie osi. Wtedy rzuty poszczególnych sił / t.j. składowe sił równoległe do osi/ wynoszą:

$P'_1 = a\,b' = P_1 \cos a_1 \qquad P'_2 = b'c' = P_2 \cos a_2 \quad \ldots$

$P''_1 = a\,b'' = P_1 \sin a_1 \qquad P''_2 = b''c'' = P_2 \sin a_2 \quad \ldots$

Algebraiczne sumy rzutów poszczególnych sił, są rzutami wypadkowej na odpowiednie osi. Wynoszą one:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots = P_1' + P'_2 + \ldots = \Sigma P' \\ R_y &= P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots = P_1'' + P''_2 + \ldots = \Sigma P'' \end{aligned}\right\} \quad 3$$

Prawdziwą wielkość wypadkowej R znajdziemy składając jej rzuty R_x, R_y w jedną siłę wypadkową. Zamykają one z sobą kąt prosty; wypadkową znajdziemy zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa;

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Kierunek jej określa sie równaniem:

$$\cos a_r = \frac{R_y}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Przy obliczaniu R_x i R_y z wzoru 3 trzeba pamiętać, że zależnie od wielkości kąta a mogą poszczególne wyrazy przyjmować wartości ujemne i zerowe. Np. dla rys. 20 mamy:

$R_x = P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \cos a_3 - P_4 \cos a_4$

$R_y = P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 - P_3 \sin a_3 - P_4 \sin a_4$

Jeśli zachodzi równowaga sił, to muszą się spełnić warunki:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \Sigma P' = 0 \\ R_y &= \Sigma P'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6$$

t.j. Dla równowagi sił przechodzących przez jeden punkt musi suma ich rzutów na dwie dowolne osi spółrzędnych równać się zeru.

Jeżeli np. siły $P_1 \ldots P_5$ rzucone na dwie dowolne osi xx i x'x' / rys. 19/, dadzą dla obu tych osi sumę rzutów równą zeru, to pozostają one między sobą w równowadze.

Najwygodniej jest przyjmować dwie osi prostopadło do siebie, zazwyczaj przyjmujemy też jedną z nich pionową, drugą poziomą; są to kierunki najbardziej naturalne i najbardziej rzucające się w naturze w oczy. Wtedy zasada powyższa brzmi;

Dla równowagi sił przechodzacych przez jeden punkt suma składowych poziomych sił, oraz suma składowych pionowych muszą być równe zeru, dla każdej osi z osobna.

Przykłady 1 - 11.

1. Na filar ceglany cisną obustronnie sklepienia z siłą $P_1 = P_2 = 1600$ kg pod kątem 30°. Jak wielka siła / wypadkowa / działa na filar? / Ciężar własny filara należy pominąć/.

Wykreślnie otrzymujemy R = 1600 kg / rys. 21/; rachunkowo $R = 2P \sin 30^\circ = 2 \cdot 1600 \cdot \frac{1}{2} = 1600$ kg.

2. Filar ozdobny, jak na przykładzie 1, waży $G = 9200$ kg. Jak wielką siłą ciśnie filar na grunt?

Do ciężaru filara $G = 9200$ kg należy dodać siłę wypadkową ciśnień obu sklepień, również pionową. Zatem całkowite ciśnienie na grunt: $P = G + R = 9200 + 1600 = 10800$ kg.

3. Na mur pionowy o ciężarze $C = 6000$ kg ciśnie sklepienie pod kątem $\alpha = 30^\circ$ z siłą $P = 1000$ kg. Znaleźć całkowite ciśnienie na fundament muru ab. / rys. 22/.

Rachunkowo otrzymujemy / z wzoru 3/:

$R_x = 6000 . \cos 90^\circ + 1000 \cos 30^\circ = 0 + 1000 . 0{,}866 = 866$ kg co zaokrąglimy na $R_x = 870$ kg.

$R_y = 6000 \sin 90^\circ + 1000 \sin 30^\circ = 6000 . 1 + 1000 . 0{,}5 = 6500$ kg, a zatem wypadkowa z wzoru 4:

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \sqrt{870^2 + 6500^2} = 6560 \text{ kg.}$$

4. Na komin działa w środku wysokości poziomo siła wiatru $P = 200$ kg, starając się wywrócić go około krawędzi A; sile tej przeciwdziała ciężar komina $C = 1500$ kg starając się utrzymać go w stałości. Należy znaleźć wypadkową / rys.23/.

Wykreślnie otrzymamy z równoległoboku sił wypadkową R wielkości 1510 kg, przechodzącą jeszcze przez podstawę AB komina. Komin więc nie wywróci się:

Rachunkowo:

$$R = \sqrt{200^2 + 1500^2 + 1500_2} = 1513 \text{ kg.}$$

5. Znaleźć rachunkowo wypadkową sił przedstawionych na rys. 18 i 19' przy czym:

$P_1 = 20$ kg, $P_2 = 40$ kg, $P_3 = 35$ kg, $P_4 = 30$ kg

$\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = -20^\circ$, $\alpha_4 = -15^\circ$

Stąd:

$R_x = 20 \cos 45^\circ + 40 \cos 60^\circ + 35 \cos 20^\circ - 30 \cos 30^\circ = 14{,}1 + 20 + 32{,}9 - 26{,}0 = + 41{,}0$ kg.

$R_y = 20 \sin 45^\circ + 40 \sin 60^\circ - 35 \sin 20^\circ - 30 \sin 30^\circ = 14{,}1 + 34{,}6 - 12{,}0 - 15{,}0 = + 21{,}7$ kg.

$$R = \sqrt{41{,}0^2 + 21{,}7^2} = 46{,}4 \text{ kg}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{+21{,}7}{+41{,}0} = 0{,}53$$

$$\alpha = 26^\circ 56'$$

6. Na wiązar dachowy działa siła $P = 1000$ kg wskutek wiatru. Znaleźć siły wewnętrzne w krokwiach AC i BC / rys.24/.

Z wykresu otrzymujemy siły $AC = P' = 360$ kg, $BC = P'' = 940$ kg. Na obu łożyskach A i B powstają również siły t.zw. oddziaływania czyli odpory A i B / por.§3/ równe siłom AC i BC, ale skierowane wręcz przeciwnie tj. tutaj ku górze.

7. Na ten sam wiązar dachowy działa siła $P = 1000$ kg wskutek wiatru w kierunku krokwi BC / rys.25/. Znaleźć siły wewnętrzne w AC i BC.

Z wykresu otrzymujemy siłę $AC = 0$ i siłę $AC = P = 1000$ kg. Na łożysku A nie ma żadnego oddziaływania. Na łożysku B oddziaływanie jest równe i przeciwne sile $P = 1000$ kg.

8. Na ten sam wiązar dachowy / rys.26/ działa pozioma siła W = 1000 kg. Znaleźć siły AC i BC.

Z równoległoboku sił otrzymujemy AC = 5.. kg, BC = 860 kg. Siła AC skierowana jest jednak ku górze, co znaczy, że stara się pręt AC podnieść i oderwać od podpory. Jeślibyśmy pręt AC przecięli, należałoby węzeł C przytrzymać np. liną; oddziały... na podporze A jest zatem rozciąganiem, a dach trzeba utwierdzić w A przeciw wyrwaniu czyli zakotwić.

9. Na wiązar dachowy działa siła wiatru o wypadkowej .. = = 150. kg w punkcie D. Znaleźć oddziaływania A i B jeśli łożysko A jest ruchome, zaś B stałe / rys.27/.

Na łożysku ruchomym występuje zawsze oddziaływanie pionowe, zatem jego kierunek i punkt zaczepienia /A/ są ustalone; kierunek ten przecina się z kierunkiem siły W w punkcie E, przez który przejść musi także oddziaływanie B, / gdyż siła W i oba oddziaływania są w równowadze/. Kierunek oddziaływania B będzie zatem BE. Z równoległoboku sił znajdziemy wielkość obu oddziaływań A = FE = = 83. kg i B = GE = 88. kg.

10. Na dwu filarach, ściągniętych kotwą stalową spoczywa sklepienie cisnące na filary z siłą P = 5000 kg pod kątem 30°. Ponieważ filary mają przenosić wyłącznie ciężary pionowe, przeto cała składowa pozioma siły / t.zw. parcie poziome/ ma przenieść się na kotwę. Należy znaleźć siłę w kotwie K / por.rys.28/.

Siła w kotwie K równa się składowej poziomej parcia P, wynosi więc: K = P cos 30° = 5000 . 0,866 = 4330 kg.

11. Na słup wiszący CD wiązania przedstawionego na rys. 29 przenosi się ciężar pionowy P = 6600 kg. Znaleźć siły wewnętrzne w krokwiach AC i BC, siłę H w ściągnie AB, oraz ciśnienia pionowe na łożyskach A i B.

Długość krokwi wynosi:

$$k = \sqrt{/\tfrac{l}{2}/^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5,0 \text{ m.}$$

Kąt nachylenia krokwi wynosi $\sin\alpha = h:k = 3:5 = 0,6$, więc $\alpha = 36°58'$.

Siła w słupie wiszącym CD P = 66.. kg.

Siła w obu krokwiach jest równa i wynosi / z trójkąta CEF/

$$K = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{6600}{2.0,6} = 5500 \text{ kg.}$$

Przekroiwszy wiązar poziomo łatwo zrozumiemy, że w krokwiach jest ciśnienie.

Siła K rozkłada się na podporze na dwie składowe H / siłę w ściągnie poziomym/ i A / względnie B równe oddziaływaniom pionowym/. Z trójkąta sił AGI otrzymamy więc:

$H = K \cos\alpha = 5500 \cos 36°58' = 4400$ kg.

Na drugim łożysku otrzymamy na H wartość taką samą. Oddziaływanie A wynosi / z trójkąta AGI/:

$A = B = K \sin\alpha = 5500 . 0,6 = 3300$ kg.

Te same wartości możemy otrzymać drogą rachunkową i w inny sposób.

Siły K i $\frac{P}{2}$ mają się do siebie, jak odpowiednio boki trójkąta ADC / gdyż trójkąty ADC i EFC są podobne/.

./.

$$K : \frac{P}{2} = k : h$$

$$K = \frac{Pk}{2h} = \frac{6600 \cdot 5{,}0}{2 \cdot 3{,}0} = 5500 \text{ kg.}$$

Z podobieństwa trójkątów ADC i AIG wynika dalej:

$$H : \frac{P}{2} = \frac{l}{2} : h \qquad H = \frac{Pl}{4h} = \frac{6600 \cdot 8{,}0}{4{,}0 \cdot 3{,}0} = 4400 \text{ kg}$$

$$V = \frac{P}{2} = 3300 \text{ kg}$$

Zatem te same wartości, zgadzające się zresztą i z rysunkiem.

W zadaniu 9 otrzymaliśmy na siłę w zastrzale zupełnie tą samą wartość $\frac{P}{2 \sin \alpha}$, co tutaj, pomimo, że siła P przenosiła się tam bezpośrednio na punkt C, zaś tu działa u dołu słupa wiszącego CD i przenosi się za jego pośrednictwem na zastrzały. Widać stąd, że w myśl § 2 punkt zaczepienia siły można przesunąć na jej kierunku dowolnie, a wpływ jej na wielkość sił składowych będzie ten sam. Sam słup jednak w przykładzie 11 przenosi siłę P = 6600 kg; gdyby zaś siła działała u góry, jak w przykładzie 10, to cały ciężar przenosiłby się odrazu na zastrzały a słup pozostawałby bez naprężenia.

Zadaniem poziomego ścięgna H jest przejąć składową poziomą sił w zastrzałach AC i BC. Gdyby tego ścięgna nie było, wiązanie cisnęłoby na mury ukośnie / por. przykłady 6-8/, oddziaływania byłyby równe siłom wewnętrznym w zastrzałach tj. równe K = 5500 kg.

§ 11. Siły o różnych kierunkach i punktach zaczepienia.

Dla wyznaczenia wypadkowej dwu sił działających w różnych punktach na jednej płaszczyźnie najlepiej zastosować jest zasadę podaną w § 2, wedle której punkt zaczepienia siły można swobodnie wzdłuż niej przesuwać. Przesuwamy go więc dla obu sił do punktu przecięcia obu kierunków A i składamy je tam następnie wedle § 6 w równoległobok sił, którego przekątnia daje wypadkową lub w trójkąt sił / rys.30/.

Jeśli na figurę płaską działa większa ilość sił / rys.37/, to składa się z sobą najpierw dwie dowolnie obrane siły np. P_1 i P_2 w wypadkową R_1. Zamiast składać na tym samym rysunku, wykreślamy je zwykle osobno $P_1 = 01$, $P_2 = 02$ / rys. 31 i 32/ i znajdujemy wypadkową 02, która określa nam kierunek i wielkość siły R_1; punkt jej zaczepienia będzie w a, t.j. w punkcie przecięcia właściwych kierunków sił P_1 i P_2. Następnie w ten sam sposób składamy siłę R_1 z trzecią składową P_3, a wreszcie R_2 z P_4. Wypadkowa R tych dwu sił ostatnich jest zarazem wypadkową wszystkich sił $P_1 \ldots P_4$.

Przykłady 12 i 13.

12. Na filarze murowanym wspierają się dwa sklepienia, jedno sisnące siłą P_1 = 1250 kg, drugie siłą P_2 = 1670 kg. Ciężar filara wynosi P = 3720 kg. Należy znaleźć wypadkową tych sił / rys.33/.

./.

Przedłużamy siłę P_1 aż do przecięcia z kierunkiem siły P i w punkcie a prowadzimy aż równoległą do R_1 wypadkowej sił P i P_1, której wielkość i kierunek znajdziemy z trójkąta sił 012. Następnie przedłużamy tę wypadkową R_1 aż do przecięcia się z siłą P_2 i zupełnie tak samo jak poprzednio znajdujemy wielkość i położenie wypadkowej wszystkich sił R = 5400 kg, którą to wielkość odczytaliśmy z wykresu.

13. Na połowę sklepienia AB / rys. 34/ działa w kluczu / t.j. w p.B/ siła pozioma H / t.zw. rozpór poziomy czyli parcie poziomo/, oraz ciężary poszczególnych części sklepienia i nadsypki C_1 ... C_4. Znaleźć ciśnienie, jakie wywiera sklepienie na przyczółek AA x/.

Siłę H składamy z ciężarem części sklepienia C_1, otrzymując z trójkąta sił 01 C wypadkową R_1, która przechodzi przez punkt przecięcia siły H z ciężarem C_1. Siłę R_1 składamy tak samo z ciężarem C_2, otrzymując wypadkową R_2, a postępując w ten sam sposób dalej, znajdziemy ostatecznie wypadkową R_4 siły R_3 i ciężaru C_4, która to wypadkowa R_4 jest ciśnieniem, jakie sklepienie wywiera na przyczółek.

/ Linię łamaną H, R_1, R_2, R_3, R_4 nazywamy liniąciśnienia lub linią naporową. Będziemy o niej mówić później/.

§ 12. Wielobok sznurowy.

Jeżeli punkty przecięcia poszczególnych sił znajdują się bardzo daleko, tak, że składanie ich według prawideł podanych wyżej byłoby wielce utrudnione lub nawet niemożliwe, wtedy dla znalezienia wypadkowej używamy sposobu innego / rys.35 i nast./

Siłę P_1 rozkładamy na dwie dowolne składowe I i II. Jeśli przyjmiemy kierunki obu, to tym samym wielkość ich wypadnie wprost z trójkąta sił / rys.36/. Podobnie czynimy z siłą P_2 w ten sposób jednak, że za jedną z jej składowych przyjmiemy siłę II' równą i wprost przeciwną sile II, a leżącą w jej przedłużeniu; z rys.36 znajdziemy wtedy odrazu kierunek i wielkość drugiej składowej III. Podobnie postępujemy z każdą z pozostałych sił P_3 i P_4, otrzymując w ten sposób kolejno 8 sił: I,II,II',III,III',IV,IV',V, które zupełnie zastępują siły dane P_1 ... P_4. Siły II i II' są jednak sobie równe i wręcz przeciwne, a więc znoszą się wzajemnie, podobnie jak III i III', IV i IV', tak, że ostatecznie siły P_1... P_4, zastępujemy dwiema siłami I i V. Siły te w sposób znany z § 6 składamy w wypadkową R_1, która jest zarazem wypadkową wszystkich danych sił P_1 ... P_4. Wielkość i kierunek jej określa odcinek 04.

Zamiast rysować cztery osobno trójkąty sił możemy je zesunąć w jeden rysunek / rys.37/, przedstawiający wielobok, którego boki są odpowiednio równoległe do sił P_1, P_2 .. i I,II,II' ..., badanego układu. Położenie punktu 0 określone jest kierunkami I i II, przyjętymi zupełnie dowolnie; jeślibyśmy obrali te kierunki inaczej, otrzymalibyśmy inny punkt 0'; rezultat byłby jednak ten sam. Zamiast więc przyjmować kierunki, możemy przyjąć dowolnie punkt 0 t.zw. biegun, a położenie jego określi z góry położenie składowych I ....V. Wielobok 01234 nazywamy wielobokiem lub ciągiem sił; linie I,II ... promieniami biegunowymi; odległość bieguna 0 od wypadkowej R odległością biegunową, zaś wielobok mnop wielobokiem

x/ Przyczółkiem nazywamy budowlę, na której wspiera się sklepienie / lub inna belka/.

./.

sznurowym; jeśli bowiem sznur obciążymy siłami P_1 ... P_4, to przybierze on kształt linii mnop. Poszczególne części wieloboku sznurowego mn,no,op nazywamy promieniami wieloboku sznurowego lub promieniami sznurowymi.

Dla znalezienia wypadkowej R dowolnej ilości sił, nie przechodzących przez jeden punkt należy zatem wykreślić wielobok tych sił, przyjmując dowolnie biegun O, a następnie poprowadzić wielobok sznurowy mn... równolegle do promieni biegunowych / wychodząc z punktu m obranego dowolnie na sile P_1/.

Wypadkowa R przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych mr i pr, a kierunek i wielkość jej znajdujemy z wieloboku sił.

Pamiętać należy, że ilość promieni biegunowych i promieni sznurowych jest zawsze o jeden większa od ilości sił.

Wypadkowa R zastępuje działaniem swoim wszystkie siły układu P_1, P_2 ...; jeśli zatem chcemy otrzymać stan równowagi, to musimy wprowadzić siłę -R równą, a wprost przeciwną wypadkowej. Wtedy do czterech boków wieloboku sił: 01,12,23,34 przychodzi bok piąty 40, łączący punkt ostatni 4 z punktem początkowym 0, czyli, jak mówimy, ciąg sił zamyka się.

W wieloboku sznurowym siła -R przechodzić musi przez punkt r przecięcia boków mr i pr równoległych do promieni 00 i 40; wielobok sznurowy mnop uzupełnia się zatem bokami mr i pr czyli zamyka się również. Zatem:

Siły działające na płaszczyźnie w różnych punktach i różnych kierunkach pozostają zatem w równowadze, jeśli zamknie się nie tylko ich wielobok sił, ale także wielobok sznurowy.

§ 13. Siły równoległe.

Mając znaleźć wypadkową układu sił równoległych postępujemy tak samo. Wtedy wielobok sił 01234 / rys.38/, redukuje się do prostej, na której kolejno odcinamy wielkości poszczególnych sił. Przyjąwszy biegun O, kreślimy promienie sznurowe mr, mn ... równoległe do promieni o0, 10 ... Wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia r promieni skrajnych mr i pr; wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił. Jeśli która z sił / np. P_3/ posiada strzałkę przeciwną innym, np. działa w górę / rys.39/ to odcina się ją od punktu 2 też ku górze / długość 23/. Siły następne P_4, P_5 odcina się oczywiście od 3. Wielkość wypadkowej jest algebraiczną sumą poszczególnych sił.

Dla lepszego uwydatnienia sił, skierowanych w różnych kierunkach, narysowaliśmy je na rys.39 nieco rozsunięte, oczywiście z zachowaniem równoległości / por.rys.14/.

Dla dwu sił równoległych / rys.40/ skierowanych w jedną stronę wielobokiem sznurowym będzie trójkąt mnr, gdyż wielobok sił ma trzy promienie Oo, 01, 02. Trójkąt △ ntr jest podobny do △ 010; zaś △ ntr∼ △ 012.

Otrzymamy więc równanie:

nt : tr = 01 : o1 = 01 : P_1 . . . . a
nt : tr = 01 : o2 = 01 : P_2 . . . . b

Dzieląc równanie a przez b, dostaniemy:

$$\frac{nt \cdot tr}{tr \cdot nt} = \frac{01 \cdot P_2}{01 \cdot P_1}$$

./.

czyli po uproszczeniu: $\dfrac{mt}{nt} = \dfrac{P_2}{P_1}$ 7

Łatwo udowodnić, że kierunki sił P_1, P_2 i R dzielą każdą prostą w tym samym stosunku co prostą mn, t.j., że

$m't' : n't' = mt : nt;$

Stąd wynika roguła: Wypadkowa dwu sił równoległych o tej samej strzałce dzieli odstęp między nimi w odwrotnym stosunku do ich wielkości.

Położenie siły wypadkowej możemy znaleźć więc w sposób następujący: Na kierunku siły P_1 odcinamy wielkość siły P_2, na kierunku P_2 siłę P_1 i łączymy wodle rys.41. Wtedy $a_2c : b_1c = P_2 : P_1$, a więc wypadkowa R przechodzi przez punkt c.

Wypadkowa dwu sił równoległych i równych o tej samej strzałce leży w środku między nimi.

Dla dwu sił równoległych o przeciwnych kierunkach postępujemy podobnie. Tu jednak siła P_2 jest skierowana odwrotnie niż w poprzednim wypadku / rys.42/ i dlatego też proste łączące punkty a_1 z b_2 oraz b_1 z a_2 przecinają się w punkcie c leżącym poza obiema siłami. Wypadkowa ma tutaj kierunek siły większej, a wielkość równą różnicy obu sił $R = P_2 - P_1$.

Na tej samej zasadzie polega rozkładanie sił. Jak wiadomo jednak z § 9, dana siła da się rozłożyć jednoznacznie tylko na dwie siły składowe.

Jeżeli np. siłę R / rys.40/ mamy rozłożyć na siły P_1 i P_2, o nieznanej zgóry wielkości, to odniósłszy jej wielkość 02 w wieloboku sił, przyjmujemy biegun O i kreślimy wielobok sił o2O, a następnie promienie mr i nr wieloboku sznurowego równoległo do promieni O0 i 2O. Jeżeli siły P_1 i P_2 mają być w równowadze z siłą R, to wielobok sznurowy musi się zamknąć, a więc jego bokiem musi być mn. Ale w wieloboku sił promień przechodzący między siłami P_1 i P_2 musi być równoległy do tego boku mn. Kreślimy więc O1 ‖ mn i otrzymujemy wielkość sił składowych $P_1 = o1$, $P_2 = 12$.

Przykłady 14 - 18.

14. Znaleźć wielkość i położenie układu sił równoległych P_1 ... P_4, wedle rys.43.

Wykreślamy wielobok sił w dowolnej podziałce n.p. przyjmując 1 cm = 2000 kg, przyjmujemy dowolnie biegun O i równoległe do promieni oO, 1O, kreślimy promienie sznurowe mr, mn.. Przedłużając promienie skrajne mr i pr do przecięcia, otrzymujemy położenie wypadkowej, której odległość od np. siły P_1, wynosi około 1,80 m. Wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił:

$$R = 1600 + 1400 + 1800 + 1200 = 6000 \text{ kg.}$$

15. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej dwu sił równoległych $P_1 = 20$ ton, $P_2 = 40$ ton, działających w odległości 3,00 m od siebie w tym samym kierunku / rys.44/.

Ze wzoru 7 otrzymujemy $mt : nt = P_2 : P_1 = 40 : 20 = 2 : 1$, zatem $mn : nt = / mt + nt/ : nt = / 2 + 1 / : 1 = 3 : 1$.

Dzielimy zatem odstęp mn między siłami P_1 i P_2 na trzy części; wypadkowa przechodzi w odległości 1/3 mn = 1,00 m od siły większej, tj. od P_2 i ma wielkość

$$R = P_1 + P_2 = 20 + 40 = 60 \text{ ton.}$$

./.

16. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej dwu sił równoległych P_1 = 20 ton, P_2 = 40 ton, działających w kierunkach przeciwnych w odległości 3,00 m od siebie / rys.45/.

Z rys.42 otrzymujemy: $b_2a_1 : a_1c = / P_2 - P_1 / : P_1$, zatem wypadkowa R oddalona jest od siły większej P_2 o odległość

$$a_1c = b_2a_1 \frac{P_1}{P_2 - P_1}$$

W danym wypadku otrzymamy:

$$a_1c = 3,00 \cdot \frac{20}{40 - 20} = 1,50 \text{ m.}$$

Wielkość wypadkowej R = 40 - 20 = 20 ton.

17. Na filarze murowanym wspierają się dwa sklepienia, jedno cisnące siłą P_1 = 1250 kg, drugie siłą P_2 = 1670 kg. Ciężar filaru wynosi P = 3720 kg / rys.46/. Należy znaleźć wypadkową tych sił za pomocą wieloboku sznurowego / por. przykład 12/.

Wykreślamy wielobok sił o123, a następnie przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy wielobok sznurowy, prowadząc ad || Oo' ab || O1, br || O2, cd || O3. Następnie przedłużamy promienie skrajne ad i cd aż do przecięcia się w punkcie d, przez który przechodzi także wypadkowa R. Wielkość jej i kierunek znajdziemy z wieloboku sił, gdyż R = o3.

Wynik otrzymany na rys.52 zgodny jest w zupełności z wynikiem przykł. 12 / por. rys.33/.

18. Dane są trzy siły równoległe P_1 = 400 kg, P_2 = 800 kg, P_3 = 700 kg. Należy znaleźć wykreślnie ich wypadkową, oraz obliczyć jak wielkie muszą być dwie równoważące je siły równoległe A i B, przechodzące przez punkty M i N / por. rys.47/.

Odnosimy siły P_1 P_2 P_3 w wieloboku sił i przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy promienie Oo, O1, O2, O3, a następnie równoległe do nich boki wieloboku sznurowego fb, bc, dc, df. Wypadkowa R o wielkości $R = P_1 + P_2 + P_3$ = 400 + 800 + 700 = 1900 kg, przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych.

Jeśli siły A i B mają zrównoważyć siłę R, to musi zamknąć się na nich wielobok sznurowy. W tym celu przedłużamy promienie skrajne bf, aż do a, zaś df do e, t.j. do kierunków sił A i B; promieniem sznurowym zamykającym będzie zatem ab. Promień wieloboku sił odpowiadający siłom A i B musi być równoległy do ab; będzie nim zatem Om, zaś długość om i m3 odcięte nim dają wprost wielkości oddziaływań A i B.

18a. Znaleźć wypadkową układu sił podanego na rys.48 sposobem wykreślnym.

Wszystkie siły $P_1 \ldots P_4$ odcinamy osobno w wieloboku sił i obieramy dowolnie biegun O; w danym wypadku wewnątrz wieloboku, gdyż w ten sposób otrzymamy najwygodniejsze kierunki promieni. Jeżelibyśmy bowiem biegun przyjęli zewnątrz wieloboku, to promienie zamykałyby z sobą bardzo ostre kąty, a tym samym i dokładność konstrukcji ucierpiałaby znacznie. Następnie kreślimy promienie sznurowe, a więc ab || O5, bc || O1 i t.d. Przez punkt przecięcia boków skrajnych t.j. przez punkt a przechodzi wypadkowa R, której wielkość i kierunek znajdziemy w wieloboku sił, łącząca punkty o i 4.

./.

C. Moment statyczny.

§ 14. Para sił.

Jeśli w ostatnio rozpatrywanym wypadku sił równoległych, a przeciwnie skierowanych różnica sił jest niewielka, to wedle rys.42 punkt zaczepienia wypadkowej oddala się znacznie od obu sił i to tym bardziej, im różnica ta jest mniejsza. Jeśli obie siły P_1 i P_2 są sobie wreszcie równe, to wypadkowa przesunie się w nieskończoność, gdyż boki wieloboku sznurowego będą tu równoległe / por.rys.49/, a tak samo równoległe byłyby i linie a_2b_1 i a_1b_2 z rys.42, wielkość zaś wypadkowej spadnie do zera. R = 0. Siły takie mimo to nie są w równowadze, ale tworzą t.zw. parę sił. Skutek jej jest całkiem inny niż pojedyńczej siły; siła pojedyńcza stara się bowiem posunąć ciało, na które działa; np. ciągnąc pręt ab w kierunku strzałki /rys. 50/ posuwamy go w tymże kierunku. Natomiast para sił działająca na jakieś ciało, stara się je obrócić; np. jeśli belkę ab ciągną dwie siły P w kierunkach równoległych, lecz przeciwnych, to belka ta obracać się będzie w kierunku oznaczonym strzałką / rys.51/.

To działanie obrotowe jest tym silniejsze, im większe są siły P i im większa jest ich odległość. Aby je więc określić, przyjmujemy jako jego miarę iloczyn siły P przez odległość obu sił c mierzoną prostopadle do sił / rys.49/. Iloczyn ten M = Pc nazywamy momentem statycznym, zaś odległość "c" ramieniem momentu. Jeżeli moment stara się obrócić ciało, na które działa, w kierunku wskazówki na zegarze, nazywamy go momentem dodatnim / + M/, jeśli w kierunku przeciwnym momentem ujemnym / -M/.

Moment jest iloczynem siły przez długość; trzeba go więc wyrazić w jednostkach siły / kg,t/ pomnożonych przez jednostki długości / cm,m/. Odpowiednio do tego nazywamy jednostkę momentu kilogramcentymetrem / kgcm/, tonmetrem /tm/ i t.p., przyczym 1 tm = = 1000 kg x 100 cm = 100000 kgcm. Jeśli np, siła P = 1500 kg = = 1,5 t, zaś odstęp prostopadły c = 50 cm = 0,5 m, to moment wynosi M = 1500 kg x 50 cm = 75000 kgcm lub M = 1500 kg x 0,5 m = = 750 kgm lub 1,5 t x 0,5 m = 0,75 tm i t.d.

Wogóle Każdą parę sił zastąpić można inną parą sił o tym samym momencie obrotu, działającą gdziekolwiek na tej samej płaszczyźnie. Np. moment P_1c_1 / rys.52/ zastąpić można momentem P_2c_2, byle $M = P_1c_1 = P_2c_2$ i było kierunek obrotu był ten sam. I naodwrót: jeśli chcemy zrównoważyć parę sił, działającą na pewne ciało, to musimy zaczepić na nim inną parę sił, czyli inny moment o tej samej wielkości, lecz przeciwnym znaku, t.j. przeciwnym kierunku obrotu; np. na rys.60 moment P_1c_1 został zrównoważony momentem $-P_2c_2$ o wielkości równej P_1c_1, obracającym się w przeciwnym kierunku./ Znak "-" oznacza obrót w przeciwnym kierunku/.

Jeżeli na jedno i to samo ciało działają równocześnie dwa momenty, to działanie ich mierzy się algebraiczną sumą obu momentów. Np. jeśli na drążek działają obie pary sił P_1c_1 i P_2c_2, to moment wypadkowy wynosi $M = P_1c_1 + P_2c_2$. Jeżeli momenty P_1c_1 i P_2c_2 miały znaki przeciwne, np. gdyby $-P_2c_2$ obracało się w kierunku przeciwnym wskazówki na zegarze / rys.53/, to wypadkowy moment wynosiłby $M = P_1c_1 - P_2c_2$. Jeżeliby P_1c_1 było co do wielkości równe P_2c_2, ale o znaku przeciwnym, to $M = P_2c_2 - P_1c_1 = 0$, czyli obrotu nie ma.

./.

§ 15. Moment statyczny siły pojedyńczej.

Jeśli na jakieś ciało, utwierdzone w p.O, działa siła P, to nastąpi obrót tegoż ciało około p.O w kierunku wskazanym strzałką /rys. 54/. Miarą tego działania jest - jak przy parze sił - iloczyn siły przez jej prostopadłą odległość od p.O, czyli t.zw. moment statyczny siły P względem p.O. Odległość a nazywamy ramieniem siły, p.O biegunem momentu. Moment obracający siłę w kierunku wskazówki na zegarze / jak na rys.54/ naz. dodatnim, obracający w kierunku przeciwnym, momentem ujemnym.

Odległość siły P od równoległej osi X-X, przechodzącej przez p.O, jest wszędzie stała i równa a, przeto: Moment siły P względem wszystkich punktów na równoległej osi XX jest równy M = Pa.

Na mocy tego możemy wykazać, że moment pary sił jest stały dla każdego bieguna na płaszczyźnie. Z rys.55 wynika moment obu sił względem dowolnego punktu O : M = P / a + b / - Pb = Pa. Moment zależy zatem tylko od wielkości i odległości sił od siebie bez względu na odległość punktu O.

Weźmy pod uwagę belkę przytrzymaną w p.A / rys.56/. Jeśli w którymkolwiek jej punkcie umieścimy ciężar P to belka obróci się około A. Obrót ten da się udaremnić wtedy, jeśli po drugiej stronie podpory umieścimy też ciężar o odpowiedniej wielkości działający w dół. Ciężar równoważący musi być wedle § 14 tym większy, im mniejsza będzie jego odległość od podpory A. Tę prostopadłą odległość siły P od A nazywamy ramieniem siły. Siła P, starając się belkę obrócić, wywołuje względem A moment o wielkości Pl; również siła P_1 wywołuje moment P_1l_1, ale o znaku przeciwnym / rys.56/.

Jeśli obrót nie ma nastąpić, t.j. jeśli belka ma pozostać w równowadze, muszą oba momenty być równe t.j.

$$Pl = P_1l_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8$$

a stąd:

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8a.$$

Jest to t.zw. równanie momentów. Dla $l = l_1$ mamy $P = P_1$; dla $l_1 = 2l$, $P = 2P_1$; ogólnie

$$\text{dla } l_1 = nl \quad P = nP_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8b.$$

Niech np. drążek BC ma długość 30 cm. Jeśli podparty jest jak na rys.56 w odległości 10 cm od p.B, to ciężar P = 2 kg uwieszony na jego końcu, wywoła moment M = Pl = 2.10 = 20 kgcm. Ciężar ten wywołałby obrót drążka. Aby drążek pozostał jednak w równowadze, trzeba w punkcie C, oddalonym od podpory o długość l_1 = 20 cm zawiesić ciężar

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} = \frac{2.10}{20} = 1 \text{ kg}$$

Jeśliby punkt podparcia leżał w środku, to należałoby obustronnie zawiesić równe ciężary $P = P_1$.

Właściwie powstają tu dwie pary sił. Siła P działająca na belkę wywołuje prócz obrotu także ciśnienie, t.j. siłę w A o wielkości też P / t.zw. oddziaływanie/, ale skierowaną ku górze; powstaje więc para sił o momencie Pl. Podobnie siła P_1 wywołuje w A siłę P_1, więc i parę sił $-P_1l_1$. Jak wyżej powiedzieliśmy dwie te pary sił będą w równowadze, jeśli $Pl = P_1l_1$, czyli $Pl - P_1l_1 = 0$.

./.

Przykłady 19 - 21.

19. Na mur pionowy o wysokości 2,00 m, a długości 1,20 m, działa parcie wiatru z siłą 150 kg na 1 m^2 muru. Znaleźć moment M parcia wiatru względem podstawy muru / rys. 57/.

Mur ma powierzchnię 2,00 x 1,20 = 2,40 m^2; zatym wielkość parcia wiatru P = 2,40 . 150 = 360 kg; wypadkowa parcia zaś zaczepia w połowie wysokości, więc w odległości 1 m od podstawy. Stąd moment M = 360 kg . 1,00 m = 360 kgm.

20. Chodnik wspiera się na wsporniku AB, umieszczonym w murze / rys. 58/. Znaleźć moment ciężaru P = 900 kg względem punktu wmurowania A, jeśli l = 1,20 m.

Moment ten wynosi: Pl = 900 . 120 = 108000 kgcm.

21. Jak wielki będzie moment ciężaru P jak w przykł. 20 jeśli ten będzie rozłożony jednostajnie na całej długości wspornika /rys. 59/.

Jeśli ciężar jest rozłożony na całej długości, to moment możemy obliczyć biorąc ciężar jak gdyby skupiony był w środku, t.j. w odległości $\frac{l}{2}$ od punktu wmurowania A.

$$\text{Wtedy moment: } M = P \cdot \frac{l}{2} = 900 \times \frac{120}{2} = 54000 \text{ kgcm},$$ tj. dwukrotnie mniejszy niż w przykł. 20.

Ciężar jednostkowy p wynosi w tym razie:

$$p = \frac{P}{l} = \frac{900}{1,20} = 750 \text{ kg/mb.}$$

§ 16. Para sił jako wypadkowa układu sił.

Zdarzyć się może, że wielobok sił zamknie się, t.j. że wszystkie siły dadzą wypadkową równą zeru, ale nie zamknie się wielobok sznurowy, t.j. że pierwszy i ostatni promień wieloboku sznurowego nie przetną się na kierunku tej samej siły P. /Por. rys. 60/.

Dla zbadania tego przypadku złóżmy wszystkie siły z wyjątkiem jednej np. P_4 w częściową wypadkową R_1 za pomocą wieloboku sznurowego. Wypadkowa R_1 musi być równą i przeciwną sile P_4, gdyż tylko wtedy zamknie się wielobok sił, co zaznaczyliśmy na początku, jednakowoż siły P_4 i R_1 nie będą leżeć w jednej prostej, choć będą równoległe i równe. Innymi słowy otrzymujemy zatym jako wynik parę sił o wielkości P_4c. Ciało, na które siły tak rozmieszczone działają, zostanie więc wprawione w ruch obrotowy i w równowadze tym samym nie będzie.

Przykład 22.

22. Jakie działanie wywr, na ciało A siły P_1 = 270 kg, P_2 = = 235 kg, P_3 = 235 kg, P_4 = 380 kg, o kierunkach, podanych na rys. 60.

Złożywszy siły P_1, P_2 i P_3, otrzymujemy wypadkową częściową R_1 o wielkości $R_1 = -P_4$ oddaloną o c = 11 cm od P_4. Złożywszy zaś te

./.

dwie ostatnie siły, otrzymamy moment obracający w kierunku wskazówki na zegarze, więc dodatni, o wielkości $M = P_4 . c = 380 . 11 = 4180$ kgcm.

Ciało będzie się zatem obracać w kierunku strzałki /rys.60/.

§ 17. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił równoległych.

Moment statyczny wyznaczyć można także wykreślnie. Mając np. znaleźć moment jednej siły, np. P_1 układu sił, przedstawionego na rys,61 względem p.A, prowadzimy przez ten punkt równoległą XX do tejże siły, a następnie przedłużamy do XX dwa boki wieloboku sznurowego odpowiadające sile P_1.

Z podobieństwa zakreskowanych trójkątów o1O i abr otrzymamy wtedy proporcję

$p_1:ab = H:o1$ czyli $p_1:ab = H:P_1$ stąd $P_1p_1 = ab.H = M_1$ 9

P_1p_1 jest bowiem momentem statycznym M_1 siły P_1 względem p.A leżącego na osi XX czyli względem osi XX / por. § 15/. Z równania 9 wynika, że jest on równy odcinkowi ab, odciętemu promieniami wieloboku sznurowego, równoległymi do Oo i O1 / tj. do promieni wieloboku sił/, odpowiednimi danej sile, pomnożonemu przez odległość biegunową H. Odcinek bo czytamy od dołu do góry tj. od a do b, gdyż pierwszemu z promieni wieloboku sił oO odpowiada promień sznurowy ar. Moment ten jest ujemny, gdyż obraca się w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki na zegarze.

W ten sam sposób z podobieństwa trójkątów 120 i bcs udowodnić można, że moment statyczny siły P_2 względem osi XX równy jest iloczynowi odcinka bc i odległości biegunowej H.

Wreszcie rozumując podobnie, dojdziemy do wniosku, że moment statyczny siły P_3 równy jest odcinkowi cd pomnożonemu przez H. Moment ten jest jednakowoż dodatni, a odcinek cd czytać musimy z góry na dół, gdyż w wieloboku sił promień O2 równoległy do ct idzie przed promieniem O3, równoległym do td. Wynika stąd, że dla takiego położenia bieguna i sił, jak na rysunku, siły sprawiające momenty dodatnie dają odcinki z góry na dół, siłom zaś dającym momenty ujemne odpowiadają odcinki o kierunku przeciwnym.

Na tej samej figurze dają się odczytać momenty kilku sił równoległych względem danej osi XX. Np. siły P_1 i P_2 dają moment:

$M_{12} = -/P_1p_1 + P_2p_2/ = -/ab.H + bc.H/ = -/ab + bc/H = -ac.H$ 9a

Zatem moment kilku sił równoległych względem punktów na danej osi znaleźć możemy w następujący sposób: promień wieloboku sznurowego, poprzedzający pierwszą z danych sił, oraz promień następujący po ostatniej z nich" przedłużamy aż do osi XX, a odcinek tak otrzymany na tej osi, pomnożony przez odległość biegunową daje wielkość momentu statycznego danych sił względem osi XX.

Stąd wynika także bezpośrednio, że moment całego układu sił P_1, P_2, P_3 równy jest iloczynowi ad.H, gdyż:

$$M_{123} = -P_1p_1 - P_2p_2 + P_3p_3 = / -ab - bc + cd/H = ad.H \quad . . . . 9b$$

Moment ten jest dodatni, gdyż odcinek ad skierowany jest z góry na dół.

Wiemy, że / o ile nie zachodzi wypadek pary sił/ wypadkowa układu sił leży w punkcie przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego. Jeśli zatem szukamy momentu układu sił ze względu na tę wypadkową, to suma odcinków na niej równa jest zeru / gdyż su-odcinków dodatnich równa jest sumie odcinków ujemnych/. Np. na rys. 52 moment siły $P_1 \ldots P_5$ względem siły R równy jest zeru, a odcinek utworzony na niej promieniami skrajnymi równoległymi do 0 i 5 równa się też zeru.

§ 18. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił dowolnych względem dowolnego bieguna.

W zupełnie podobny sposób, co w § 17 udowodnić można, że moment siły P_1 względem punktu A / patrz rys.62/ równy jest odcinkowi mn na osi AX równoległej do siły P_1 pomnożonemu przez odległość biegunową H_1 odpowiedniej sile P_1:

$$M_1 = mn \cdot H_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10$$

Podobne wartości otrzymamy dla sił następnych, wziętych pojedyńczo, odległość biegunowa jest tutaj jednak też dla każdej siły inna. Dla znalezienia momentu wszystkich sił $P_1 \ldots P_5$ zauważmy, że zamiast nich możemy wziąć wypadkową ich R i na niej obliczyć moment. Wynosić on będzie:

$$M = pr \cdot H \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11$$

Moment ten jest dodatni.

Zatem moment statyczny układu dowolnych sił $P_1 P_2 \ldots$ względem p.A znaleźć możemy w następujący sposób: przez p.A prowadzimy oś Ay równoległą do wypadkowej R, a długość odciętą na tejże osi skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, pomnożona przez odległość biegunową wypadkowej H daje moment statyczny wszystkich sił względem punktu A.

Odległość biegunową uważać można także za siłę, a mianowicie za prostopadłą do wypadkowej składową sił, określonych skrajnymi bokami wieloboku sił, t.j. sił I i V / patrz rys.42/ lub sił 0 i 05 / rys.62/. Ponieważ zaś moment M = pr.H, przeto najlepiej jest przyjąć tę odległość biegunową okrągłej liczbie np. 1, 2, 4, 5, 10, 20 ton, co znacznie ułatwia rachunek. Ważne to jest zwłaszcza dla sił równoległych.

Wyżej, w § 14, zaznaczyliśmy, że moment mierzymy w tm / lub w tcm/, że zatem, aby otrzymać moment, trzeba pomnożyć siłę przez długość. Jeśli zatem we wzorze 11 / też 9 lub 10/ jeden mnożnik / najczęściej H/ uważamy za siłę, to mnożnik drugi / zwykle odcinek pr/ mierzyć musimy w jednostkach długości.

Niech np. odcinek pr odczytany w skali długości, ma długość 1,20 m, zaś odległość biegunowa w skali sił H = 20 ton, to moment będzie wynosił M = H . pr = 20 t . 1,2 m = 24 tm = 2400 kgm. Zamiast jednak mnożyć w ten sposób, uwzględniając skalę sił i skalę długości, przyjąć dla momentów nową podziałkę, tak, aby odcinek pr można było odrazu odczytać w jednostkach momentów / np w kgm lub tm/. Długość wykreślona w skali długości 1,00 m pomnożona przez H = 20 ton, przedstawiać będzie teraz w skali momentów moment 20 t . 1,00 m = 20 tm. Tę też długość określimy na rys.62 jako skalę momentów / dla odległości biegunowej H/.

Skala / podziałka/ momentów równa jest zatem iloczynowi skali długości przez biegunową mierzoną w jednostkach sił.

Jeżeli np. 1 cm w skali długości przedstawia 1 m, a odległość biegunową przyjęliśmy 10 t, to w skali momentów 1 cm równa się 10 tm.

Przykład 23.

23. Jak wielki moment wywołują w rys.62 siły P_4 i P_5 względem punktu A.

Wypadkowa sił P_4 i P_5 jest równoległa do linii 35 oznaczonej w wieloboku sił linią kropkowaną. Prowadzimy więc przez punkt A linię Az równoległą do 35 i przedłużamy do niej promienie wieloboku sznurowego równoległe do 30 i do 05, otrzymując odcinek st wynoszący /w skali długości/ st = 0,88 m. Odległość biegunowa odpowiednia sił P_4 i P_5 / t.j. ich wypadkowej/ wynosi H' = 22,4 t. Siły P_4 i P_5 wywołują przeto względem punktu A moment o wielkości M' = 22,4 x 0,88 m = 19,7 tm.

§ 19. Rachunkowe składanie sił równoległych.

Z § 15 wynika, że w ogólności każda siła P_n na danej płaszczyźnie wywołuje około każdego punktu na tejże płaszczyźnie moment obrotu o wielkości $P_n p_n$, gdzie p_n oznacza prostopadłą odległość siły od tego punktu. Ponieważ zaś układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową, przeto i całkowite działanie obrotowe czyli moment obrotu tej wypadkowej musi być równy sumie momentów wszystkich sił składowych około tego samego punktu / rys.63 por.§ 17/ czyli:

$$Rr = P_1p_1 + P_2p_2 + \dots + P_np_n = \Sigma Pp \quad \dots\dots 12$$

Udowodnić to da się w sposób następujący / por.rys.64/.

Niech P_1 i P_2 będą dwiema siłami równoległymi, które należy złożyć w wypadkową R, to moment siły R względem dowolnego punktu A wynosi:

$$Rr = /P_1 + P_2/r = P_1r + P_2r$$

$$Rr = P_1p_1 + P_1/r - p_1/ + P_2p_2 - P_2/p_2 - r/$$

$$= P_1p_1 + P_2p_2 + [P_1/r - p_1/ - P_2/p_2 - r/]$$

ale $$\frac{r - p_1}{p_2 - r} = \frac{P_2}{P_1}$$ wedle 7.

a stąd $P_1/r - p_1/ = P_2/p_2 - r/$, a więc

$$Rr = P_1p_1 + P_2p_2 \quad \dots\dots\dots\dots 12a$$

Podobnie przeprowadza się dowód dla większej ilości sił.

Równanie 12 pozwala nam znaleźć rachunkowo wielkość i położenie wypadkowej układu sił równoległych. Otrzymamy tu bowiem, przyjmując zupełnie dowolnie punkt obrotu A / rys. 63/.

$$Rr = P_1p_1 + P_2p_2 + \dots$$

a stąd $$r = \frac{P_1p_1 + P_2p_2 + \dots}{R} \quad \dots\dots\dots\dots 12b$$

gdzie $$R = P_1 + P_2 + \quad \dots\dots\dots\dots 13$$

./.

Niekiedy wygodnie jest przyjąć punkt obrotu na jednej z sił np. na P_1, a wtedy / rys.65/:

$$Rr = P_1 \cdot 0 + P_2p' + P_2p'' + \dots$$

$$r = \frac{P_2p' + P_2p'' + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 12c$$

Podobnie przeprowadza się też rachunkowo rozkładanie sił równoległych na dwie / por. rys.7/ składowe. Mając np. rozłożyć siłę R / rys.40/ na składowe P_1 i P_2, obieramy jako środek momentu punkt leżący na jednej z tych sił, np, na P_2. Wtedy moment siły P_2 względem tego punktu jest zerem; otrzymamy zatem:

$$P_1 / a + b / = Rb$$

$$\text{a stąd} \quad P_1 = \frac{b}{a+b} R \quad \dots\dots\dots\dots \quad 14$$

Wielkość siły P_2 otrzymać możemy, przyjmując środek momentu na kierunku P_1.
Otrzymamy wtedy: $P_2 / a + b / = Ra$

$$\text{a stąd} \quad P_2 = \frac{a}{a+b} R \quad \dots\dots\dots\dots \quad 14a$$

Łatwiej jednak znajdziemy ją z warunku, że suma sił składowych P_1 i P_2 musi być równa sile R czyli:

$$R = P_1 + P_2, \text{ a stąd}$$

$$P_2 = R - P_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad 14b$$

Wstawiając wartość na P_1 w równanie powyższe otrzymamy:

$$P_2 = R - \frac{b}{a+b} R = \frac{a}{a+b} R \quad \dots\dots \quad 14c$$

zatem tę samą wartość co we wzorze 14a.

§ 20. Rachunkowe składanie sił o różnych kierunkach nie przechodzących przez jeden punkt, a leżących na płaszczyźnie.

Jeśli mamy znaleźć drogą rachunkową wielkość i położenie wypadkowej układu sił o różnych kierunkach, a nie przechodzących przez jeden punkt, postępujemy w sposób następujący.

Przyjmujemy dowolny punkt jako biegun momentu a zarazem przeprowadzamy przezeń dwie prostopadłe do siebie osi układu spółrzędnych / X,Y/ i rozkładamy wszystkie siły na składowe w kierunkach X i Y. Następnie wyznaczamy R_x i R_y, wypadkowe składowych równoległych do osi X i Y, a te wypadkowe częściowe złożone w wypadkową R dadzą wypadkową wszystkich sił działających. Rachunkowo otrzymujemy:

./.

moment statyczny składowych równoległych do osi x, t.j. składowych poziomych:

$$P_1y_1\cos a_1 + P_2y_2\cos a_2 + \ldots = R_x y = M_x \qquad 15$$

moment statyczny składowych równoległych do osi y, t.j. składowych pionowych:

$$P_1x_1\sin a_1 + P_2x_2\sin a_2 + \ldots = R_y x = M_y \qquad 15a$$

gdzie

$$R_x = P_1\cos a_1 + P_2\cos a_2 + \ldots \qquad 16$$

$$R_y = P_1\sin a_1 + P_2\sin a_2 + \ldots \qquad 16a$$

Z równań tych znajdziemy:

$$x = \frac{P_1x_1 \sin a_1 + P_2x_2 \sin a_2 + \ldots}{P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots} \qquad 17$$

$$y = \frac{P_1y_1 \cos a_1 + P_2y_2 \cos a_2 + \ldots}{P_1\cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots} \qquad 17a$$

x i y są spółrzędnymi jednego punktu, przez który przechodzi wypadkowa R. Wielkość jej wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \ \ldots\ldots \qquad 18$$

§ 21. Równowaga układu sił na płaszczyźnie.

Jeżeli zachodzi równowaga sił na płaszczyźnie, to wypadkowa ich musi się równać zeru, a także moment wszystkich tych sił wobec dowolnego punktu na tej płaszczyźnie musi też być równy zeru. Wypadkowa sił równa się jednak zeru, jeżeli suma rzutów tych sił na dwie dowolne osi równa się zeru. Zaznyczaj bierzemy pod uwagę dwie osi spółrzędnych, prostopadłe do siebie, mianowicie oś x poziomą i oś y pionową / por. § 10/. Otrzymamy wtedy trzy równania. mówiące, że równowaga sił zachodzi, jeżeli:

a/ Suma składowych pionowych równa się zeru:

$$\sum P \cos a = \sum P_x = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 19a$$

b/ suma składowych poziomych równa się zeru

$$\sum P \sin a = \sum P_y = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 19b$$

c/suma momentów tych sił z uwagi na dowolny punkt równa się zeru / punkt ten obieramy tak, jak jest najdogodniej dla naszych obliczeń/:

$$\sum M = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 19c$$

Dwa pierwsze z tych równań mówią, że belka, na którą te siły działają, nie ulega żadnemu przesunięciu, równanie trzecie, że nie ulega ona żadnemu obrotowi. Są to trzy t.zw. równania równowagi.

Postępując według § 20 otrzymamy zamiast trzeciego równania / $\sum M = 0$/ dwa równania. Wtedy równania równowagi napiszemy w nast. formie:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots &= \sum P \cos a = \sum P_x = 0 \\
P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots &= \sum P \sin a = \sum P_y = 0 \\
P_1 y_1 \cos a_1 + P_2 y_2 \cos a_2 + \ldots &= \sum P y \cos a = \sum M_x = 0 \\
P_1 x_1 \sin a_1 + P_2 x_2 \sin a_2 + \ldots &= \sum P x \sin a = \sum M_y = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 19d$$

Równowagę sił na płaszczyźnie można też zbadać wykreślnie przy pomocy wieloboku sznurowego /§ 12/.

Przykłady 24 – 26.

24. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej układu sił według rys. 43 /por. przykład 14/.

Jako biegun momentu weźmiemy punkt początkowy układu A, gdyż mamy podane wprost odległości sił od tego punktu. Wielkość wypadkowej R wynosi:

$$R = 1600 + 1400 + 1800 + 1200 = 6000 \text{ kg}$$

$$x = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots}{R} =$$

$$= \frac{1600 \cdot 0{,}9 + 1400 \cdot 2{,}5 + 1800 \cdot 3{,}3 + 1200 \cdot 4{,}6}{6000} = 2{,}69 \text{ m}$$

Ten sam wynik otrzymamy biorąc momenty poszczególnych sił względem punktu leżącego na jednej z nich np. względem P_1. Wtedy otrzymamy:

$$x' = \frac{P_1 \cdot 0 + /p_2 - p_1/ P_2 + /p_3 - p_1/ P_3 + /p_4 - p_1/ P_4}{R} =$$

$$= \frac{1400 \cdot 1{,}6 + 1800 \cdot 2{,}4 + 1200 \cdot 3{,}7}{6000} = 1{,}79 \text{ m}$$

Odległość wypadkowej od punktu A wynosi:
$x = 1{,}79 + 0{,}9 = 2{,}69$ m, zatem jak wyżej.

W zadaniu 20 znaleźliśmy wykreślnie wypadkową o tej samej wielkości i tym samym położeniu. Różnica między odległościami 1,80 m, a 1,79 m jest bardzo mała i nie ma znaczenia.

25. Dane są trzy siły równoległe $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 800$ kg, $P_3 = 700$ kg. Należy znaleźć ich wypadkową R i jej położenie /por. zad. 18 i rys. 40/ rys. 47

Dla znalezienia wypadkowej obliczymy moment względem jednej z sił np. P_3; otrzymamy wtedy:

$$P_1 /60 + 80/ + P_2 \cdot 80 - Rr = 0$$

gdzie

$$R = P_1 + P_2 + P_3 = 400 + 800 + 700 = 1900 \text{ kg; Zatem:}$$

$$r = \frac{1}{1900} \; /400 \cdot 140 + 800 \cdot 80/ = 63 \text{ cm.}$$

./.

26. Dany jest układ sił jak w zadaniu 24. Należy znaleźć dwie siły równoległe A i B, przechodzące przez punkty M i N, a równoważące ten układ.

Jeżeli siły A i B mają być w równowadze z siłą R czyli z siłami F_1, F_2, F_3, to moment ich względem dowolnego punktu musi być równy i wprost przeciwny momentowi siły R. Obierzmy punkt ten na kierunku / nieznanej jeszcze/siły B, to otrzymamy:

$$A/20 + 60 + 80 + 70/ - R/62 + 70/ = 0$$

$$\text{a stąd: } A = \frac{R./62 + 70/}{20 + 60 + 80 + 70} = \frac{1900 \,.\, 132}{230} = 1090 \text{ kg}$$

zaś B = R - A = 1900 - 1090 = 810 kg, zatem wartości te same, co znaleziono wykreślnie w przykładzie 18.

Jeżeli siły F_1, F_2, F_3 działają na belkę podpartą siłami A i B, to te ostatnie nazywamy oddziaływaniami belki / porównaj § 3 i 23/.

D. Środek ciężkości figur płaskich.

§ 22. Środek ciężkości.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię o jakimkolwiek dowolnym kształcie, wyciętą np. z blachy, i podzielmy ją na wąskie równoległe paski w dowolnym kierunku / rys.66/. Każdy z tych pasków posiada pewien ciężar, a zatem posiada pewną siłę proporcjonalną do swojej powierzchni. Wypadkową ST tych wszystkich sił nazywamy osią ciężkości.

Jeśli ciężary pasków zaczepimy lub jeśli w ogóle podział ich przeprowadzimy w innym kierunku, otrzymamy w podobny sposób inną oś ciężkości np. SU, przecinającą się z poprzednią w p.S. Można udowodnić, że przez ten sam punkt S przechodzą wszystkie osie ciężkości danej figury; nazywamy go środkiem ciężkości.

Z powyższego wynika ogólny sposób znalezienia środka ciężkości. Dany przekrój dzieli się na dowolne części, najczęściej paski, których środki ciężkości są znane albo łatwo dadzą się wyznaczyć, zaczepia się w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków i znajduje wypadkową tych sił. Oznaczając przez F_1, F_2 ... powierzchnie poszczególnych pasków, przez F powierzchnię całego przekroju, przez e_1, e_2 ... odległość ich środków ciężkości od dowolnej podstawy, otrzymamy / wedle wzoru 12/ na odległość e środka ciężkości całego przekroju od tej samej podstawy wzór:

$$e = \frac{F_1 e_1 + F_2 e_2}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20$$

Potem w tych samych punktach zaczepia się te same siły, ale w jakimś innym kierunku, czyli po prostu obraca się daną figurę i znów szuka wypadkowej. W punkcie przecięcia obu wypadkowych leży środek ciężkości przekroju. Bardzo wąskie paski uważać można za linie proste, których środek ciężkości leży oczywiście w środku ich długości.

./.