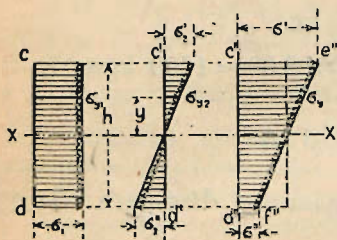


E. Wytrzymałość złożona.

§ 44. Wytrzymałość złożona na zginanie i rozciąganie (ciągnienie) lub ściskanie (ciśnienie).

Jeżeli na belkę zginaną w sposób wyżej omawiany działa siła osiowa (wywierająca ściskanie lub rozciąganie), to w każdym miejscu belki wystąpią naprężenia zginające, oraz naprężenia ściskające, względnie rozciągające. Dla otrzymania najw. naprężeń, trzeba jedno do drugich dodać.



Rys. 193, 194 i 195.

Z § 32 wiemy, że naprężenia z powodu siły osiowej rozkładają się jednostajnie na cały przekrój o wysokości h (rys. 193) i wynoszą

$$\sigma = \pm \frac{P}{F}, \text{ gdzie znak } + \text{ oznacza}$$

rozciąganie, znak $-$ ściskanie. Ponieważ zaś na całej długości belki działa ta sama siła P , przeto naprężenie σ_1 jest stałe w każdym jej punkcie.

Naprężenia zginające w dowolnym punkcie belki oddalonym o y od środka ciężkości przekroju wynoszą $\sigma_y = \pm \frac{M}{I} y$ (§ 37); zatem naprężenie sumaryczne w dowolnym punkcie:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_y = \frac{P}{F} + \frac{My}{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 163$$

W pewnym punkcie przekroju belki naprężenia σ_1 (ściskanie lub rozciąganie) rozkładają się w postaci prostokąta (por. rys. 193), natomiast naprężenie zginające wedle rys. 194. Jeżeli mamy siłę P rozciągającą, to σ_1 jest rozciąganiem (+). Jeżeli więc z naprężeń zginających górne są rozciągające, zaś dolne ściskające, to u góry naprężenia się sumują, u dołu odejmują. Odcinając na $c''d''$ (rys. 195) u góry $c''e'' = \sigma_1 + \sigma_2$, zaś u dołu $d''f'' = \sigma_1 + \sigma_2$ (w kierunku przeciwnym) otrzymamy wykres naprężeń sumarycznych, przedstawiający się w postaci trapezu. Z wykresu tego widać, że najw. naprężenia powstaną tam, gdzie naprężenia ciągnące sumują się z najw. naprężeniami ciągnącymi z powodu zginania (rys. 195) w warstwie skrajnej, gdzie:

$$\sigma_2 = \frac{Me}{I} = \frac{M}{W}$$

Największe naprężenia w przekroju wynoszą zatem:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Me}{I} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad 164$$

i będą oczywiście największe w warstwie skrajnej tego przekroju, w którym jest największy moment M . Najmniejsze naprężenie powstaje w warstwie skrajnej dolnej, gdzie $\sigma'' =$

$= \frac{P}{F} - \frac{M}{W}$. W danym przykładzie jest ono również rozciąganiem, jak i w warstwie dolnej. Jeżeli jednak $\frac{M}{W}$ będzie większe

niż $\frac{P}{F}$, to w warstwie dolnej wystąpi ściskanie o wielkości

$\sigma = -\left(\frac{P}{F} - \frac{M}{W}\right)$; zatem wykres naprężeń przedstawi się wedle rys. 204. Mamy wtedy w jednym punkcie naprężenie równe zeru, więc oś obojętną w przekroju.

Jeżeliby wreszcie największe naprężenie cisnące $\frac{M}{W} = \frac{P}{F}$, to w przekroju wystąpią wyłącznie naprężenia rozciągające o największej wartości $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{2P}{F}$ w warstwie skrajnej górnej, natomiast w warstwie dolnej $\sigma = 0$. Naprężenia warstwy środkowej, t. j. w odległości $e = \frac{h}{2}$ od górnej i od dolnej

warstwy wynoszą $\sigma = \frac{P}{F} + 0 = \frac{P}{F}$; są zatem dla belki o przekroju symetrycznym równe naprężeniu z powodu siły osiowej. W przekrojach niesymetrycznych nastąpi to w warstwie przechodzącej przez środek ciężkości przekroju (por. § 37).

Dla belki o przekroju prostokąta mamy;

$$F = bh, \quad W = \frac{bh^2}{6}, \quad \text{a stąd: } \sigma = \frac{P}{bh} \pm \frac{6M}{bh^2} = \frac{1}{bh} \left(P \pm \frac{6M}{h} \right) \quad . \quad 165$$

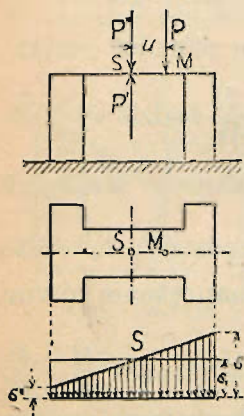
Mając obliczyć belkę narażoną na zginanie i ściskanie (ew. rozciąganie), obliczamy zwykle najpierw przekrój na zginanie; zamiast obliczonego bierzemy jednak większy i dla tego przyjętego kontrolujemy, czy naprężenia obliczone wedle

wzoru $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$ są mniejsze od naprężenia dopuszczalnego,

t. j. czy $k \geq \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$.

§ 45. Ściskanie (ciśnienie) i rozciąganie (ciągnienie) mimośrodowe.

Zupełnie tak samo rozdzielają się naprężenia, gdy na przekrój działa siła P ściskająca, lub rozciągająca, ale mimośrodkowa, t. j. nie zaczepiająca w środku przekroju. Zachodzi tu identycznie ten sam wypadek (rys. 196).



Rys. 196.

Niech np. środek ciężkości przekroju będzie w S ; natomiast punkt zaczepienia siły P w M . W punkcie S możemy zaczepić dwie siły równe i wprost przeciwne sobie, a znoszące się $P' - P'' = 0$; stan równowagi nie ulegnie więc zmianie. Ugrupujmy teraz siły inaczej, podobnie jak to czyniliśmy w § 37. Na przekrój będą działać wtedy:

1. siła osiowa P'' ;
2. para sił PP' , której moment wynosi $P \cdot u$.

Siła P'' wywoła naprężenia ściskające o wielkości $\sigma_1 = \frac{P''}{F} = \frac{P}{F}$; natomiast para sił naprężenia zginające o największej wartości $\sigma_2 = \frac{M}{W} = \frac{Pu}{W}$.

Największe naprężenia sumaryczne wynoszą więc;

$$\sigma' = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{P}{F} \pm \frac{Pu}{W} \quad 166$$

Podobnie, jak w § 44, możemy dojść tu do różnych wykresów naprężeń (por. rys. 201—204) zależnie od wielkości siły P i odległości jej u od środka przekroju.

Przedewszystkiem ciekawy jest stan przejściowy (rys. 203), gdy w przekroju panują wyłącznie naprężenia jednego znaku, ale gdy we włóknie skrajnym panuje naprężenie równe zeru. Wtedy oś obojętna do t y k a przekroju czyli jest doń styczną, ale nie przecina go w żadnym punkcie.

Przykłady do § 123—125.

123. Listwy żelazne (szyny kopalniane) podtrzymują świetlnię ze szkła drutowego. Długość ich 2,36 m, nachylenie do poziomu $21^{\circ} 50'$, odstęp 55 cm. Por. rys. 197. Należy obliczyć ich wymiary, przyjmując ciężar śniegu 60 kg/m^2 połaci dachu, zaś z wiatru uwzględniając tylko składową pionową 20 kg/m^2 .

Na 1 m^2 połaci dachu przypada:

Ciężar własny pokrycia: szkło drutowe

7 mm grube 20 kg/m^2 połaci

listwy żelazne (przyjęto) 10 " "

Ciężar zmienny: śnieg 60 " "

wiatr 20 " "

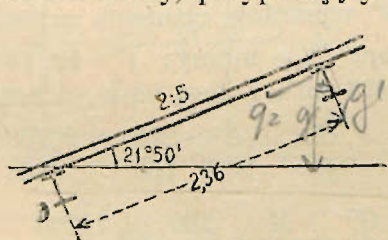
Razem na 1 m^2 powierzchni dachu $g = 110 \text{ kg/m}^2$.

Ciężar ten rozkłada się na dwie składowe: g_1 prostopadłą do połaci i g_2 równoległą do niej, przyczem:

$$g_1 = 110 \cos 21^{\circ} 50' = 110 \cdot 0,928 = 103 \text{ kg/m}^2$$

$$g_2 = 110 \sin 21^{\circ} 50' = 110 \cdot 0,371 = 42 \text{ kg/m}^2$$

Zatem ciężar całkowity, przypadający na jedną szynę:



Rys. 197.

$$G_1 = 2,36 \cdot 0,55 \cdot 103 = 134 \text{ kg}$$

$$G_2 = 2,36 \cdot 0,55 \cdot 42 = 54 \text{ kg}$$

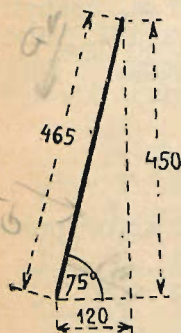
Ciężar G_1 wygina listwę i wywołuje najwyższy moment:

$$M = \frac{1}{8} G_1 l = \frac{1}{8} 134 \times 2,36 = 3953 \text{ kgcm.}$$

Ciężar G_2 działa jako siła osiowa ciągnąca; przyjmując szynę kopalnianą 50/3,8 o powierzchni $4,85 \text{ cm}^2$, a momencie wytrzymałości $W = 5,8 \text{ cm}^3$, otrzymamy największe naprężenie (rozciąganie):

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{G_2}{F} = \frac{3953}{5,8} + \frac{54}{4,85} = 682 + 12 = 694 \text{ kg/cm}^2.$$

124. Krokwie $\frac{1}{10}$ dachu wieżowego, obciążone ciężarem pionowym pokrycia 80 kg/m^2 powierzchni dachu i parciem wiatru 130 kg/m^2 powierzchni prostopadłym do niej, leżą w odstępach 70 cm. Należy znaleźć najw. naprężenie (por. rys. 198).



Rys. 198.

Obciążenie pionowe wynosi:

$$G = 0,70 \cdot 4,65 \cdot 80 = \text{ok. } 260 \text{ kg.}$$

Składowa G' prostopadła do kierunku krokwi:

$$G' = 260 \cdot \cos 75 = 260 \cdot 0,259 = \text{ok. } 62 \text{ kg.}$$

Składowa G'' równoległa do tegoż kierunku:

$$G'' = 260 \cdot \sin 75^\circ = \text{ok. } 250 \text{ kg}$$

Parcie wiatru:

$$W = 0,7 \cdot 4,65 \cdot 130 = \text{ok. } 430 \text{ kg.}$$

Ciężary G' i W wywołują moment zginający krokiew o wielkości:

$$M = \frac{(G' + W)l}{8} = \frac{(62 + 430)465}{8} = \text{ok. } 28700 \text{ kgcm.}$$

Składowa G'' wywołuje ciśnienie osiowe.

Dla przekroju $\frac{1}{10}$ mamy: $F = 10 \cdot 16 = 160 \text{ cm}^2$, zaś $W = \frac{1}{8} 10 \cdot 16^2 = 426 \text{ cm}^3$. Zatem najw. naprężenie:

$$\text{na rozciąganie: } \sigma = \frac{G''}{F} + \frac{M}{W} = \frac{250}{160} + \frac{28700}{426} = +69 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{na ściskanie: } \sigma = \frac{G''}{F} - \frac{M}{W} = \frac{250}{160} - \frac{28700}{426} = -65,8 \text{ kg/cm}^2$$

125. Na pręt o przekroju kwadratowym, którego bok wynosi b , działa siła P a) osiowo, b) w odległości $\frac{1}{4}b$ od osi, c) w krawędzi, d) w odległości b od osi (rys. 199). Należy znaleźć w każdym wypadku największe naprężenie.

$$\text{a) } \sigma_a = \frac{P}{b^2}$$

b) Dodajmy w punkcie środkowym przekroju dwie siły P' i P'' równe i wprost przeciwnie skierowane, co nie naruszy istniejącego stanu i złożmy siłę P' z siłą P ; otrzymamy wtedy siłę osiową $P'' = P$ i moment o wielkości

$$M = P \frac{b}{4}$$

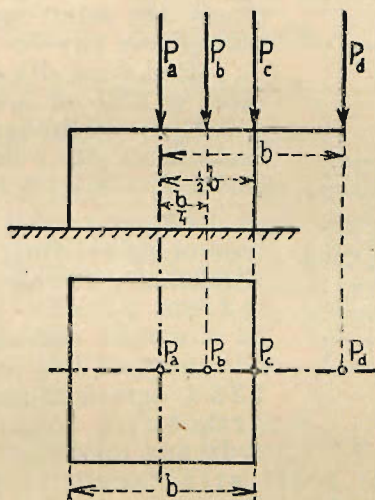
Z wzoru 164 otrzymamy wtedy:

$$\sigma_b = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{P}{b^2} + \frac{Pb}{4} \cdot \frac{6}{b^3} = \frac{5}{2} \frac{P}{b^2}$$

c) analogicznie do b) otrzymamy tu:

$$\sigma_c = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{P}{b^2} + \frac{Pb}{2} \cdot \frac{6}{b^3} = 4 \frac{P}{b^2}$$

d)
$$\sigma_d = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{P}{b^2} + Pb \cdot \frac{6}{b^3} = 7 \frac{P}{b^2}$$



Rys. 199.

Widzimy stąd, jak szybko rosną naprężenia, jeśli siła odsuwa się od osi: w położeniu c) otrzymujemy największe naprężenie 4 razy większe, w położeniu d) 7 razy większe.

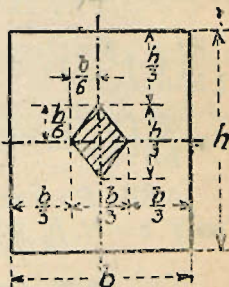
§ 46. Rdzeń (jądro) przekroju.

Weźmy pod uwagę przekrój poprzeczny belki zginanej o kształcie prostokątnym, dla którego $F = bh$, zaś $W = \frac{1}{6}bh^2$ (rys. 200). Jeśli mają w nim panować naprężenia wyłącznie o jednym znaku, to w myśl ostatniego zdania poprzedniego paragrafu oś obojętna nie może przecinać przekroju, ale może być co najwyżej doń styczna, a więc albo 1) leżeć w jednej krawędzi (np. ab), albo 2) przechodzić przez jedno z naroży, nie przecinając zupełnie jego boków (np. w linii mn).

Aby więc w przekroju, na który działa siła cisnąca, nie występowało rozciąganie, musi siła zaczepiać wewnątrz tak zw. środkowej (czyli średniej) trzeciej części przekroju.

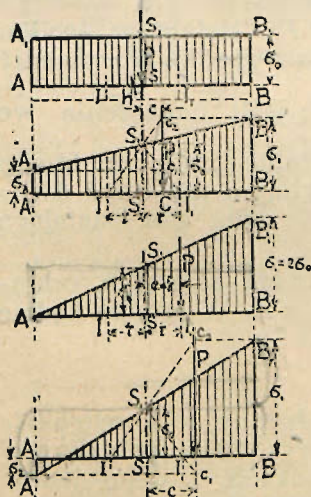
Wykresy naprężeń przy przesunięciu punktu zaczepienia siły P przedstawiają się zatem następująco dla pełnego przekroju prostokątnego:

a) Dla siły P , zaczepiającej w środku przekroju S , mamy na całej szerokości przekroju naprężenia o tej samej wielkości $\sigma = \frac{P}{F}$. Niech w przyjętej przez nas podziałce naprężeń długości $AA_1 = \sigma_0 = \frac{P}{F}$ kg/cm², to prostokąt AA_1BB_1 przed-



Rys. 200 a.

stawia rozkład naprężeń w omawianym wypadku (rys. 201).



Rys. 201, 202, 203 i 204.

zaś c odległością punktu zaczepienia siły P od środka. Dla wykreślnego znalezienia rozkładu naprężeń w tym wypadku postępujemy przeto w następujący sposób: Odcinamy

w środku $SS_1 = \sigma_0 = \frac{P}{bh}$; łączymy S_1 z punktami rdzennymi

I i I_1 oddalonymi od S o odległości $SI = \frac{1}{3} AS_1 = \frac{1}{6} AB$, przedłużamy S_1I_1 i S_1I do przecięcia się z kierunkiem siły P w C_1 ,

b) Jeśli siła P zaczepia w dowolnym punkcie osi głównej między środkiem S , a punktem rdzennym I lub I_1 , to największe naprężenia

$$\text{wynoszą: najw. } \sigma = \sigma_1 = \frac{P}{bh} + \frac{6Pc}{h^2} = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) = \sigma_0 \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \quad . \quad 168$$

$$\text{najmn. } \sigma = \sigma_2 = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) = \sigma_0 \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 168a$$

gdzie $\sigma_0 = \frac{P}{bh}$ jest naprężeniem powstającym, gdy siła P działa w środku ciężkości przekroju (por. wyp. a),

względnie C_2 i wykreślamy C_1A_1 i C_2B_1 równoległe do AB . Z podobieństwa trójkątów $\triangle CC_2I \sim SS_1I$ oraz $\triangle CC_1I \sim SS_1I$,

otrzymamy: $cc_2 : \sigma_0 = \left(\frac{h}{6} + c \right) : \frac{h}{6}$, a stąd $cc_2 = \frac{P}{bh} \left(\frac{h}{6} + c \right) \cdot \frac{6}{h} =$

$= \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) = \text{najw. } \sigma = \sigma_1$, oraz $cc_1 : \sigma_0 = \left(\frac{h}{6} - c \right) : \frac{h}{6}$, a stąd

$cc_1 = \frac{P}{bh} \left(\frac{h}{6} - c \right) \cdot \frac{6}{h} = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) = \text{najmn. } \sigma_2$.

c) Siła P zaczepia w punkcie rdzennym (np. w punkcie 1). Wtedy $c = \frac{1}{6}h$, więc rys 203):

$$\left. \begin{aligned} \text{najw. } \sigma &= \frac{P}{bh} + \frac{1}{6} \frac{bP}{b^2} \cdot \frac{6}{bh^2} = \frac{2P}{bh^2} = \sigma_1 \\ \text{najmn. } \sigma &= \frac{P}{bh} - \frac{1}{6} \frac{bP}{b^2} \cdot \frac{6}{bh^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots 169$$

Znaczy to, że naprężenie skrajne jest w tym wypadku dwukrotnie większe, niż gdyby siła P działała w środku ciężkości przekroju. W środku S w tym wypadku otrzymamy też naprężenie $\sigma_0 = \frac{P}{F}$. Innymi słowy: jeśli naprężenie we włóknach ma być równe naprężeniu dopuszczalnemu, to siła działająca na przekrój w punkcie rdzennym musi być dwukrotnie mniejsza, niżby mogła być ta sama siła działająca w środku.

Wykreślnie otrzymamy więc rozkład naprężeń, odnosząc w B długość $BB_1 = 2\sigma_0$ i łącząc B_1 z A . W środku będzie wtedy: $SS_1 = \frac{1}{2}BB_1 = \sigma_0 = \frac{P}{F}$.

d) Jeśli siła wyjdzie poza punkt rdzenny, to konstrukcja pozostanie taka sama, jak w b (por. rys. 204); jednakowoż będziemy mieć naprężenia o obu znakach, t. j. po jednej stronie przekroju ściskanie, po drugiej rozciąganie; oś obojętna przecina przekrój w O . Rozkład naprężeń będzie jednak inny, jeśli materiał nie jest wytrzymały na rozciąganie (np. mur na zaprawie wapiennej). Przypadek ten omówimy niżej (§ 60).

Podstawmy wedle rys. 200 $k' = c + i = c + \frac{h}{6}$

$k'' = c - i = c - \frac{h}{6}$, to:

$$\left. \begin{aligned} \text{najw.} + \sigma &= \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{c}{i} \right) = \frac{P}{bh} \cdot \frac{i+c}{i} = \frac{P k'}{bh i} = \sigma_0 \frac{k'}{i} \\ \text{najw.} - \sigma &= \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{c}{i} \right) = \frac{P}{bh} \cdot \frac{i-c}{i} = -\frac{P k''}{bh i} = -\sigma_0 \frac{k''}{i} \end{aligned} \right\} 170$$

O ile naprężenie σ_s ($= \text{najw.} - \sigma$) przekroczy granicę podaną na str. 170 (dla zaprawy cementowej 3 kg/cm^2 , dla zaprawy cementowo-wapiennej $1,5 \text{ kg/cm}^2$), to należy przyjąć, że w tem miejscu szew pęknął i liczyć, jak dla muru nie-wytrzymałego na rozciąganie (por. § 60).

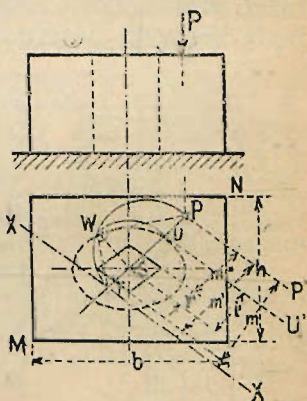
§ 47. Wyznaczenie osi obojętnej.

Jeżeli punkt zaczepienia siły nie leży w osi głównej, to oś obojętna nie będzie równoległa do osi symetrii, a położenie jej znaleźć możemy przy pomocy elipsy środkowej. W tym celu łączymy punkt zaczepienia siły P ze środkiem przekroju S , a w punkcie przecięcia U linii SP z elipsą prowadzimy styczną UU' do niej. Oś obojętna XX będzie równoległa do tej stycznej (rys. 205).

Da się udowodnić, że odstęp środka S od punktu styczności elipsy środkowej SU jest średnią geometrycznie proporcjonalną między odległością p. S w punktach zaczepienia siły, a odległością osi obojętnej, mierzoną na prostej SP , tj. że:

$$SU^2 = SP \cdot ST$$

$$\text{czyli: } ST = \frac{SU^2}{SP} \dots \dots 171$$



Rys. 205

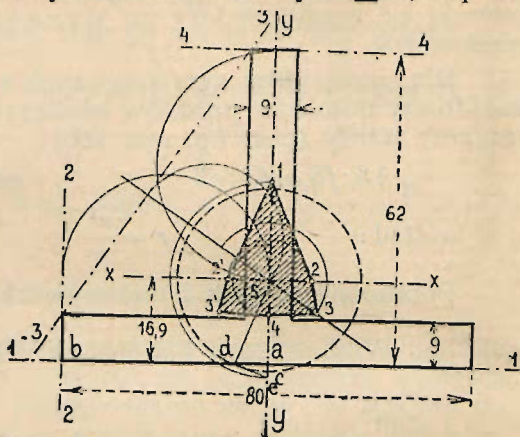
Długość ST możemy wyznaczyć też wykreślnie. W tym celu prowadzimy w S prostą do PT i odcinamy na niej $SW = SU$ (najlepiej prowadząc z S łuk o promieniu $r = SU$); wreszcie w W prowadzimy WT prostopadle do PW , która odcina na linii PS punkt T , przez który przechodzi oś obojętna.

Jeśli punktem zaczepienia siły jest punkt leżący wewnątrz elipsy środkowej, np. p. T , to znowu ważne jest równanie $SU^2 = SP \cdot ST$, a więc oś obojętna będzie przechodzić przez punkt P i będzie równoległa do stycznej w U , t. j. do UU' . Ośią obojętną będzie więc linia PP' .

II. E. Wytrzymałość złożona.

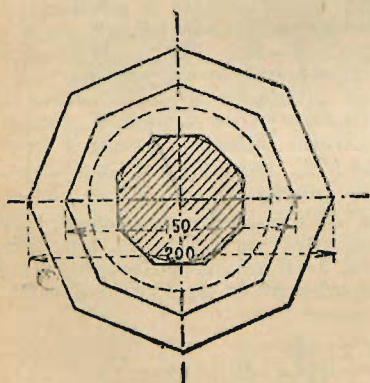
łuk bc promieniem $sc = sd$ (jest nim tutaj promień koła bezwładności), a z punktu d przecięcia prostej 11 i łuku cd kreślimy $de \perp sd$; — punkt 1 leżący po przeciwnej stronie punktu s w tej samej odległości będzie punktem jędrnym odpowiednim osi 11. Punkty jędrne 2, 3 i 4 odpowiadające kolejnym położeniom osi 22, 33 i 44 znajdziemy w sposób taki sam jak w zadaniu poprzednim.

Jeślibyśmy mieli do czynienia z elipsą bezwładności, to dla każdego położenia osi trzeba wyznaczyć odpowiednią oś sprzężoną i na niej wykonać o m a w i a n a konstrukcję dla znalezienia punktu jędrnego.

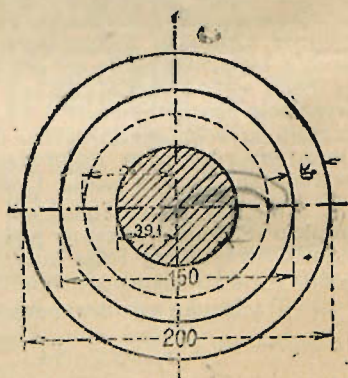


Rys. 207.

128. Znaleźć rachunkiem promień rdzenny przekroju ośmiobocznego pustego i wykreślić rdzeń, jeśli promień koła opisanego zewnętrznego wynosi $D = 2,00$ m, promień koła opisanego wewnętrznego $d = 1,50$ m (rys. 208).



Rys. 208.



Rys. 209.

Dla osi poziomej otrzymujemy z tablic:

$$I = 0,0547 (2,00^4 - 1,50^4) = 0,54904 \text{ m}^4 = 54905000 \text{ cm}^4$$

$$F = \frac{\pi}{4} (2,00^2 - 1,50^2) = 1,375 \text{ m}^2 = 13750 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{I}{e} = \frac{2I}{D} = \frac{0,54905}{1,00} = 0,54905 \text{ m}^3 = 549050 \text{ cm}^3$$

$$r = \frac{W}{F} = \frac{549050}{13750} = \text{ok. } 40 \text{ cm.}$$

129. Znaleźć drogą rachunkową promień rdzenny przekroju kołowego wydrążonego, jeśli średnica zewnętrzna $D = 2,00$ m, średnica wewnętrzna $d = 1,50$ m (rys. 209).

Wedle tablic promień koła bezwładności wynosi tutaj:

$$i = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} \quad e = \frac{D}{2}, \text{ zatem:}$$

$$a = \frac{i^2}{e} = \frac{1}{16} (D^2 + d^2) \cdot \frac{2}{D} = \frac{1}{8} \left(D + \frac{d^2}{D} \right)$$

Widzimy stąd, że rdzeń jest tem większy, im mniejsza jest grubość pierścienia $g = \frac{1}{2} (D - d)$.

Do tej samej wartości dojdziemy z wzoru:

$$r = \frac{W}{F} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi (D^2 - a^2)} = \frac{D^2 + d^2}{8D} = \frac{1}{8} \left(D + \frac{d^2}{D} \right)$$

$$\text{U nas: } r = \frac{1}{8} \left(2,00 + \frac{1,50^2}{2,00} \right) = 0,391 \text{ m} = 39,1 \text{ cm}$$

Rdzeń jest kołem o promieniu r .

F. Wytrzymałość na wyboczenie.

§ 49. Wytrzymałość na wyboczenie.

Weźmy pod uwagę wysmukły pręt np. żelazny AB i obciążmy go siłą osiową P . Pod jej wpływem pręt zwolna zacznie się wyginać, przybierając kształt AB' (rys. 142). Jeśli siłę P będziemy zwiększać, to i wygięcie będzie wzrastało, aż ostatecznie, gdy siła osiągnie pewną wielkość, pręt wygnie się do położenia AB'' i ostatecznie złamie. Mówimy, że pręt się wyboczył. Zniszczenie jego nie nastąpi więc przez zgniecenie, mimo, że mamy do czynienia z siłą ściskającą, ale przez złamanie, spowodowane wygięciem się pręta w bok, czyli wyboczenie, a wytrzymałość, jaką pręt wykazuje w chwili wyboczenia nazywamy wytrzymałością na wyboczenie.

Jasna rzecz, że pręt wyboczy się tem prędzej, im jest dłuższy, im większa jest siła P , im ma większy współczynnik sprężystości, wreszcie im ma mniejszy przekrój (t. j. mniejszy moment bezwładności). Bardzo znaczny wpływ na wytrzymałość prętów na wyboczenie ma także sposób utwierdzenia końców pręta. Np. pał, wbity silnie w ziemię albo podparty zastrzałami tak, że wygiąć się może tylko wedle rys. 211, udźwignie znacznie więcej, nie wybacząc się, niż pał, oparty tylko na belce na czop, a zatem mogący się wygiąć wedle rys. 210.

Wzór, wyprowadzony przez Eulera teoretycznie przy uwzględnieniu wszystkich wyżej wspomnianych okoliczności, podaje, że największą siłą, jaką udźwignie pręt o długości l_0 i momencie bezwładności I jest:

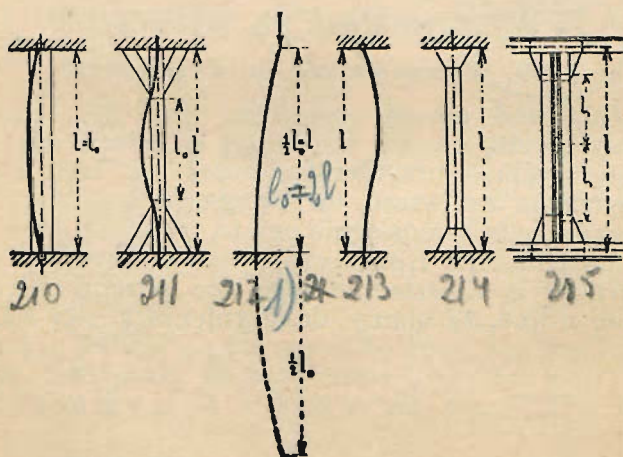
$$P = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \approx \frac{10 EI}{l_0^2} \quad 175$$

Siłę P nazywamy siłą wybaczającą.

Jest to t. zw. wzór Eulera na wyboczenie. Jeżeli chcemy uwzględnić, że dla n -tej pewności siła działająca może być tylko $\frac{1}{n}$ -tą częścią siły wybaczającej, to otrzymamy wzór:

$$P \leq \frac{10 EI}{n l_0^2} \quad 176$$

(n przyjmujemy zwykle dla drzewa $n = 10$, dla żelaza zlewnego i spawanego $n = 4$ do 5, dla żeliwa $n = 6$ do 8.)



Rys. 210—215.

Wzór ten ważny jest jednak jedynie wtedy, gdy oba końce słupa są tylko przytrzymane, t. j. dadzą się wolno obracać około punktów końcowych, np. jeśli słup drewniany połączony jest z podwaliną i oczepem na czop (rys 210). Słup AB o jednym końcu utwierdzonym, drugim wolnym (jak np. słup telegraficzny) wygnie się tak, jak wygiąłby się słup BC o obu końcach BC przytrzymanych, a długości

$l_0 = 2l$ (rys. 212). Aby zatem użyć wzoru 176, należy podstawić za l wartość $l_0 = 2l$. Wzór przybierze wtedy postać:

$$P = \frac{10 EI}{n l_0^2} = \frac{10 EI}{4 n l^2} = 2,5 \frac{EI}{n l^2} \quad 177$$

Długość tę l_0 , którą we wzór Eulera 175, względnie 176, należy wstawić zamiast długości rzeczywistej pręta l , nazywamy długością wolną.

Słup o jednym końcu utwierdzonym, a drugim przytrzymanym (rys. 213), obliczać należy dla długości wolnej $l_0 = 0,707 l$, t. j. dla

$$P \leq \frac{20 EI}{n l^2} \quad 178$$

Dla obu końców utwierdzonych (rys. 211) otrzymamy $l_0 = \frac{1}{2} l$, więc:

$$P \leq \frac{40 EI}{n l^2} \quad 179$$

Za utwierdzony uważać można koniec słupa tylko wtedy, gdy styczna linii ugięcia w miejscu wmurowania nie zmieni się podczas wyboczenia, więc, gdy słup (drewniany) jest albo silnie wbity albo podparty zastrzałami czy przyporami, albo (żelazny) przynitowany bardzo mocno na blachach węzłowych. Dla dachów żelaznych, gdzie pręty są przynitowane do blach nieznaczną ilością nitów (rys. 215), przyjmujemy dla pewności:

$$l_0 = 0,8 l \text{ do } l \quad 180$$

Zazwyczaj jednak i w tych wypadkach przyjmujemy mniejsze l_0 , tj. $l_0 = 0,8 l$. Wedle przepisów M. R. P. należy też przyjmować dla wolno stojących słupów o wszechstronnem utwierdzeniu:

$$l_0 = 0,8 l \quad 181$$

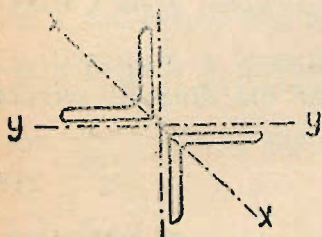
zaś dla słupów żeliwnych:

$$l_0 = l \quad 182$$

Tę samą wartość należy przyjmować też dla słupów z żelaza zlewnego i spawanego, o ile utwierdzenie końcowe nie jest bardzo silne, względnie, o ile mają one na końcach przeguby.

We wzorach powyższych należy uwzględniać moment bezwładności I najmniejszy z momentów bezwładności dla tych kierunków, dla których pręt może się wyboczyć. Czasem zdarza się, że wyboczenie nie może nastąpić w kierunku, dla którego moment bezwładności I jest najmniejszy. Np.

na rys. 216 pręt, złożony z dwu kątowników, przynitowanych do blachy węzłowej, nie może wyboczyć się pełną swoją długością dla osi xx , dla której moment bezwładności I jest najmniejszy, gdyż wtedy musiałyby skrócić się jego końce, przynitowane do blach węzłowych, co jest niemożliwe, o ile blachy są silne, a pręt niedługi. Należy zatem uważać pręt za utwierdzony w tym kierunku i liczyć go na wyboczenie dla kierunku yy równoległego do ramion kątowników.



Rys. 216.

Wogóle jednak, jeżeli pręt ma różną długość wolną i różny moment bezwładności w obu kierunkach, należy obliczać go dla obu tych kierunków. Zdarza się to najczęściej w ściskanych prętach belek kratowych (por. str. 187), gdzie często

usztynienie w płaszczyźnie belki (przy pomocy blach węzłowych) jest większe niż w płaszczyźnie prostopadłej do belki i tak: dla prętów skrzyżowanych w połowie długości dla wyboczenia w płaszczyźnie kraty należy przyjmować $l_0 = 0,5 l$, zaś dla wyboczenia w płaszczyźnie prostopadłej do kraty $l_0 = 0,67 l$. Jeżeli pas ściskany jest usztyniony poprzecznie w każdym węźle (np. w dachu przy pomocy płatwi), to w płaszczyźnie kraty przyjmuje się $l_0 = 0,8 l$ (wzór 181), zaś w płaszczyźnie prostopadłej do kraty $l_0 = l$.

Wzór Eulera daje wartości zgodne z rzeczywistością tylko dla prętów bardzo smukłych, t. j. bardzo wysokich przy małym momencie bezwładności. Doświadczenia czynione przez Tetmajera doprowadziły go ostatecznie do ustalenia wzorów na wyboczenie innych niż eulerowskie.

Powierzchnia F_p na wyboczenie dla siły P jest mianowicie większa, aniżeli powierzchnia $F_0 = \frac{P}{k_c}$, potrzebna tylko na ściskanie dla tej samej siły. Możemy więc ogólnie napisać, że

$$F_p = \frac{F_0}{\beta} = \frac{P}{k_c \beta} \quad k_c = \frac{P}{F_0 \beta} \quad 183$$

Jeżeli $k_c = \frac{P}{F_0}$ jest naprężeniem dopuszczalnym na ściskanie, to analogicznie możemy nazwać $k_w = \frac{P}{F_p}$ naprężeniem dopuszczalnym na wyboczenie. Wtedy otrzymamy:

skanie, to analogicznie możemy nazwać $k_w = \frac{P}{F_p}$ naprężeniem dopuszczalnym na wyboczenie. Wtedy otrzymamy:

$$k_w = \frac{P}{F_0 \beta} = \frac{k_c}{\beta} \cdot k_e \beta \dots \dots \dots 184$$

$$\text{a stąd:} \quad k_w = \beta k_c \dots \dots \dots 185$$

Spółczynnik β jest mniejszy od jednostki ($\beta < 1$); nazywamy go dlatego współczynnikiem zmniejszającym.

Tetmajer (a po nim Jasiński) na mocy szeregu doświadczeń doszedł do wyniku, że współczynnik zmniejszający β jest zależny od materiału, od długości wolnej i od najmniejszego promienia bezwładności przekroju. Mianowicie dla poszczególnych wartości $\frac{l_0}{i}$ otrzymał wartości na β , podane u nas w tablicach.

Chcąc obliczyć zatem przekrój na wyboczenie, musimy znać $\frac{l_0}{i}$. Długość wolną l_0 można zgóry podać, znając rodzaj konstrukcji, wedle wskazówek podanych wyżej; natomiast promień bezwładności i jest nieznany, gdyż nie znamy jeszcze przekroju obliczonego. Wiemy tylko, że za i przyjmując należy najmniejszy promień bezwładności, możliwy ze względu na kierunki, w jakich może nastąpić wyboczenie.

Postępujemy więc w sposób następujący: obliczamy powierzchnię potrzebną na ściskanie $F_0 = \frac{P}{k_c}$, przyjmujemy przekrój F_u o powierzchni większej np. około $1\frac{1}{2}$ —2 razy i dla tego przyjętego przekroju obliczamy promień bezwładności i , stosunek $\frac{l_0}{i}$, oraz współczynnik β i kontrolujemy, czy

naprężenie $\sigma = \frac{P}{F_u \beta}$ jest równe naprężeniu dopuszczalnemu k_c (lub czy przynajmniej bardzo zbliża się do niego). Jeśli σ jest większe od k_c , to musimy przyjąć przekrój F_u'' większy i cały rachunek powtórzyć. Jeśli zaś σ jest znacznie mniejsze od k_c , to z uwagi na konieczną zwykle oszczędność konstrukcji przyjmujemy przekrój F_u''' mniejszy, tak jednak, aby jeszcze pozostać w granicach naprężenia dopuszczalnego.

Obecnie używa się coraz częściej wzorów Tetmajera lub Jasińskiego w miejsce dawniejszego wzoru Eulera.

Ponieważ niektóre władze wymagają wykazu największych naprężeń, które nie mogą przekroczyć naprężenia dopuszczalnego, przeto poszczególni konstruktorowie wprowadzili następujący sposób wyznaczania najw. naprężeń przy wyboczeniu. Jeżeli F_0 jest przekrojem na ściskanie, obliczo-

nym dla pewnego k_c (np. $k_c = 1000 \text{ kg/cm}^2$), to $F_p = \frac{F_0}{\beta}$ jest przekrojem, przy którym naprężenie na wyboczenie jest też równe $k_w = k_c$. Jeżeli zatem zastosujemy w konstrukcji przekrój użyteczny F_u , to naprężenie w nim będzie wynosiło

$$\sigma_w = \frac{F_p}{F_u} k_w.$$

Przy obliczaniu na wyboczenie konstrukcji żelaznych, których przekroje łączy się na nity, oblicza się promień bezwładności i bez odtrącenia powierzchni nitów; natomiast przy obliczeniu przekroju użytecznego F_u odejmuje się powierzchnię nitów.

Jeśli przekrój jest złożony z paru kształtowników (por. przykłady 135 i nast.), to należy połączyć je ze sobą na całej długości pręta; chodzi bowiem o to, by poszczególne części nie wyboczyły się zosobna, przyczem wedle przepisów M. R. P. pewność przeciw wyboczeniu każdej części zosobna między łącznikami powinna być co najmniej dwukrotnie większa od pewności na wyboczenie całego słupa na całkowitej długości. Odstęp łączników l_1 zależy więc od przekroju (od promienia bezwładności) pojedynczego kształtownika; zwykle dla mniejszych słupów przyjmuje się jednak, nie licząc, $l_1 = 30\text{--}50 \text{ cm}$.

Jeżeli słup jest ściskany mimoosiowo, (względnie narażony prócz obciążenia osiowego i na moment zginający), należy wyznaczyć naprężenia, wywołane obciążeniem i momentem zginającym.

Spółczynniki zmniejszające ustawione zostały na podstawie doświadczeń dla słupów żelaznych, drewnianych i żelbetonowych (żelazno-betonowych). Natomiast dla filarów mурowanych i betonowych, gdzie wpływ smukłości słupa jest również bardzo znaczny, uwzględnia się wedle przepisów M. R. P. wpływ siły (osiowej) przez zmniejszenie naprężenia dopuszczalnego.

Dla smukłych słupów z kamienia naturalnego, dla których stosunek wysokości do najmniejszego wymiaru poprzecznego wynosi więcej niż 10, należy przyjmować mianowicie pewność 25-krotną, podczas gdy dla słupów niższych zadowolnić się można pewnością 15-krotną. Odpowiednio do tego zmniejszają się też naprężenia dopuszczalne (porównaj tablice).

Dla słupów i murów z cegły, oraz z betonu uzależnione jest naprężenie dopuszczalne od smukłości jeszcze ściślej (por. tablice). Np. dla murów z cegły maszynowej na zaprawie cementowej przy stosunku najmn. boku do wysokości

$\frac{\text{najmn. } b}{h}$	0,5	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1
------------------------------	-----------	-----	-----	------	-----	------	-----

wynosi naprężenie dopusz. 14 10 8 7 6 5 kg/cm²
(przyczem pośrednie wartości należy interpolować linjowo,
tj. wedle linii prostej).

Takie zmniejszanie naprężenia dopuszczalnego zależnie od smukłości jest właściwie również zastosowaniem współczynnika zmniejszającego.

Przykłady 130—138.

130. Jakie obciążenie P może udźwignąć słup drewniany 4 m długi o przekroju 24.18 cm, obustronnie utwierdzony zastrzałami? Obliczenie należy przeprowadzić wedle Eulera dla $n=10$, $E=120000 \text{ kg/cm}^2$.

Najmniejszy moment bezwł. wynosi dla prostokąta:

$$I = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 11664 \text{ cm}^4.$$

Wedle wzoru 179:

$$P = 40 \frac{EI}{nl^2} = 40 \frac{120000 \cdot 11664}{10 \cdot 400^2} = 35000 \text{ kg.}$$

131. Słup okrągły pusty żeliwny o średnicach $D=140$ mm i $d=100$ mm, a długości 5 m narażony jest na ściskanie. Jak wielki ciężar zdoła unieść dla $n=8$, a obu końców utwierdzonych? Obliczenie należy przeprowadzić wedle Eulera.

$$I = \frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 1395 \text{ cm}^4$$

$$P = 10 \frac{EI}{n l^2} = 10 \frac{1,000,000 \cdot 1395}{8.500^2} = 6980 \text{ kg.}$$

Naprężenie na ściskanie wynosi tu tylko 92 kg/cm₂ (por. przykład 67), skąd widać ogromny wpływ wyboczenia.

132. Obliczyć słup jak w przykł. 130 wedle Tetmajera. Najmniejszy promień bezwładności wynosi:

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{11664}{24 \cdot 18}} = 5,2 \text{ cm}$$

$$\frac{l_0}{1} = \frac{1/2 \cdot 400}{5,2} = 38,5 \quad \beta = 0,78$$

Przyjmując naprężenie dopuszczalne dla drzewa twardego $k_c = 80 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy z wzoru 183:

$$\text{najw. dop. } P = k_c F_p = 80 \cdot 0,78 \cdot (24 \cdot 18) = 26900 \text{ kg.}$$

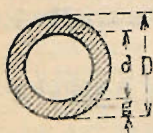
Widzimy stąd, że słup ten sam, liczony wedle Tetmajera, dopuszcza tylko mniejsze obciążenie.

133. Jaką siłą ściskającą przenieść może dźwigar I NP 30 o długości 6,00 m obustronnie utwierdzony?

Z tablic $i = 2,55 \text{ cm}$.

$$\frac{l_0}{i} = \frac{1,600}{2,55} = 117,5 \quad \beta = 0,40$$

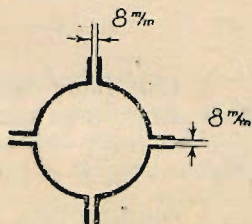
$$\text{najw. dop. } P = k \beta F = 1200 \cdot 0,4 \cdot 69 = 33100 \text{ kg.}$$



Rys. 217



Rys. 218



Rys. 219.

134. Obliczyć przekrój słupa żeliwnego, obciążonego osiowo siłą 13,5 t, o długości wolnej 3,00 m (naprężenie dopuszczalne na ściskanie $k_c = 500 \text{ kg/cm}^2$) (por. rys. 217).

$$F_n = \frac{13500}{500} = 27,0 \text{ cm}^2$$

Przyjmując przekrój kołowy pusty o zewnętrznej średnicy $D = 18 \text{ cm}$, wewnętrznej $d = 15 \text{ cm}$, otrzymujemy

$$F_u = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (18^2 - 15^2) = 77,7 \text{ cm}^2.$$

Promień bezwładności $i = \frac{1}{4} \sqrt{18^2 + 15^2} = 5,86 \text{ cm}$

$$\frac{l_0}{i} = \frac{300}{5,86} = 51 \quad \beta = 0,38 \quad F_p = \frac{27,0}{0,38} = 71,0 \text{ cm}^2.$$

Zatem przekrój obrany wystarczy.

135. Obliczyć przekrój słupa składającego się z czterech kątowników w kwadrat dla obciążenia 67500 kg, a długości wolnej 4,50 m (rys. 218).

$$F_0 = \frac{67500}{1200} = 56 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy 4 kątowniki 100.100.12 o powierzchni użytecznej (po odtrąceniu dziur na nity) $F_u = 90,9 - 15,4 = 75,5 \text{ cm}^2$.

Moment bezwładności kątowników wynosi:

$$I = 4 (204,6 + 22,72 \cdot 13,1^2) = 16414 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{16414}{90,9}} = 13,45 \text{ cm} \quad \frac{l_0}{i} = \frac{450}{13,45} = 33,4 \quad \beta = 0,76$$

$F_p = \frac{F_0}{\beta} = \frac{56}{0,76} = 73,8 \text{ cm}^2$, więc mniej niż F_u . Przekrój przyjęty zatem wystarczy.

136. Obliczyć wymiary słupa żelaznego, przenoszącego ciężar osiowy $P = 24000 \text{ kg}$, jeśli długość wolna wynosi 3,90 m. Słup należy wytworzyć z ćwierćkołowników rozsuniętych o grubość blach węzłowych $g = 8 \text{ mm}$ (por. rys. 219).

Przekrój potrzebny na ściskanie: $F_0 = \frac{24000}{1200} = 20,0 \text{ cm}^2$.

Ze względu na wyboczenie przyjmujemy jednak przekrój większy, złożony z 4 ćwierćkołowników $NP 10$ o grubości ścian 8 mm, którego powierzchnia użyteczna wynosi: $F_u = 4 \cdot 12,0 - 4 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \cdot 2 = 40,32 \text{ cm}^2$, zaś moment bezwładności:

$$I = 4 \left[I_x + F \left(e_1 + \frac{g}{2} \right)^2 \right] = [82,7 + 12 (3,47 + 0,4)^2] = 1049,7 \text{ cm}^4$$

(porównaj przykład 103), zaś promień bezwładności $i =$

$$= \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{1049,7}{48}} = 4,67 \text{ cm}.$$

Wedle Telmajera-Jasińskiego dla $\frac{l_0}{i} = \frac{390}{4,67} = 83,5$ otrzymujemy współczynnik zmniejszający $\beta = 0,56$. Wtedy przekrój, potrzebny na wyboczenie $F_p = \frac{F_0}{\beta} = \frac{20,0}{0,56} = 35,7 \text{ cm}^2$. Przyjęty przekrój wystarczy przeto w zupełności.

137. Jaką siłę osiową przeniosą słupy betonowe kwadratowe o przekroju $30/30 \text{ cm}$, o wysokościach $h = 3,00 \text{ m}$ i $h = 2,00 \text{ m}$, gdy wytrzymałość betonu wynosi 150 kg/cm^2 ?

W słupach i filarach największe naprężenie dopuszczalne zależne jest od stosunków najmniejszej grubości do wysokości.

Dla słupa o wysokości 3,00 m wypada $\frac{g}{h} = \frac{0,30}{3,00} = 0,10$,

zatem współczynnik zmniejszający na ściskanie $\varphi = 0,05$.

Najw. siła osiowa, jaka może być przeniesiona przez słup:

$$P = \varphi k_c F = 0,05 \cdot 150 \cdot 30 \cdot 30 = 6750 \text{ kg.}$$

Dla słupa o wysokości 2,00 m wypada $\frac{g}{h} = \frac{0,30}{2,00} = 0,15$,
zatem współczynnik zmniejszający na ściskanie $\varphi = 0,067$.

Najw. siła osiowa, jaka może być przeniesiona przez ten słup:

$$P = \varphi k_c F = 0,067 \cdot 150 \cdot 30 \cdot 30 = 9045 \text{ kg.}$$

138. Jaką siłę osiową przeniesie słup z cegły maszynowej na zaprawie cementowej o przekroju $30/30$ cm, a wysokościach $h = 3,00$ m i $h = 2,00$ m.

Dla słupa o wysokości $h = 3,00$ m $\frac{g}{h} = \frac{0,30}{3,00} = 0,10$, zatem najw. naprężenie dopuszczalne na ciśnienie $k_c = 5 \text{ kg/cm}^2$.

Najw. siła osiowa, jaka może być przeniesiona przez słup:

$$P = F k_c = 30 \cdot 30 \cdot 5 = 4500 \text{ kg.}$$

Dla słupa o wysokości 2,00 m $\frac{g}{h} = \frac{0,30}{2,00} = 0,15$ wynosi:

$$k_c = 6 \text{ kg/cm}^2.$$

Najw. siła mogąca być przeniesiona przez słup:

$$P = F k_c = 30 \cdot 30 \cdot 6 = 5400 \text{ kg.}$$