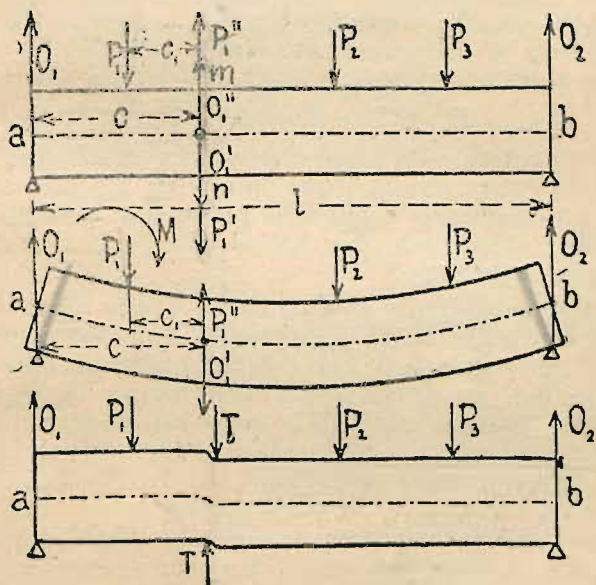


D. Wytrzymałość na zginanie.

§ 37. Obliczenie belek zginanych.

Weźmy pod uwagę belkę pracującą na zginanie pod wpływem sił P_1, P_2, P_3, \dots i zbadajmy, jaki stan rzeczy zachodzi w dowolnym przekroju mn (rys. 168). Po lewej stronie tego przekroju działają dwie siły: oddziaływanie O_1 i siła P_1 . W równowadze belki nic się jednak nie zmieni, jeśli w przekroju mn umieścimy cztery równoważące się siły, a to: dwie siły pionowe, ale wprost przeciwnie sobie skierowane O_1' i O_1'' , oraz dwie również pionowe i również przeciwnie sobie siły P_1' i P_1'' ; bowiem wypadkowa tych sił



Rys. 168, 169 i 170.

równa się zero*). Otrzymane w ten sposób siły ($O_1, P_1, O_1', O_1'', P_1', P_1''$) możemy w dowolnym porządku złożyć ze sobą. Siły O_1 i O_1' , oraz P_1 i P_1'' dadzą dwa momenty statyczne, których suma wyniesie:

$$M = O_1 c - P_1 c_1 \dots\dots\dots 123$$

zatem moment o wielkości znalezionej już poprzednio (wz. 27).

*) Można by tak samo wziąć siły działające po prawej stronie, P_2 i O_2 , gdyż ich wypadkowa równa jest co do wielkości i położenia wypadkowej sił O_1 i P_1 .

Ten moment zginający M stara się wygiąć przekrój mn w kierunku wskazówki na zegarze; ma zatem znak dodatni (porównaj §§ 14 i 23). Przekrój ten obróci się ostatecznie o pewien kąt, zajmując położenie mn (fig. 171), pozostanie przecież płaski i po obrocie. Podobnie obróca się i inne przekroje, jednakowoż o inny kąt, skutkiem czego górne włókna skrócą się, dolne natomiast wydłużą; w środku belki pozostanie jednak jedna warstwa ab (rys. 169), która długości nie zmieni. Warstwę tę nazywamy warstwą obojętną, a linię przecięcia jej st z pewnym przekrojem, np. z przekrojem mn lub pr (rys. 171), osią obojętną. Przekroje mn , które przedtem były pionowe, zajmą teraz położenie $m'n'$ i $p'r'$, pozostając jednak prostopadłemi do osi.

Dotychczas nie mówiliśmy nic o wpływie sił O_1'' i P_1' , które działają w badanym przekroju mn . Dadzą one siłę wypadkową, która wynosi:

$$T = O_1'' - P_1' = O_1 - P_1 \dots \dots \dots 124$$

Siła ta jest zatem siłą poprzeczną, znalezioną już poprzednio w § 23 (por. wz. 23 i 27). Stara się ona przesunąć przekrój mn pionowo względem przekroju, leżącego bardzo blisko obok niego, tak, by belka przybrała kształt, wskazany na rys. 163. 170

Wskutek działania momentu M i siły poprzecznej T powstają wewnątrz belki naprężenia, t. j. siły wewnętrzne. Naprężenia, powstałe wskutek działania momentu, nazywamy zginającemi, gnącemi, normalnemi (t. j. prostopadłemi do przekroju, gdyż taki mają kierunek); naprężenia wskutek siły poprzecznej naprężeniami ścinającemi. Te ostatnie są jednak zwykle w belkach drewnianych i żelaznych litych znacznie mniejsze od normalnych, to też tutaj zajmować się nimi nie będziemy. Natomiast ważne są dla obliczenia belek naprężenia zginające; aby je obliczyć, trzeba przedewszystkiem znaleźć momenty belki w każdym jej punkcie.

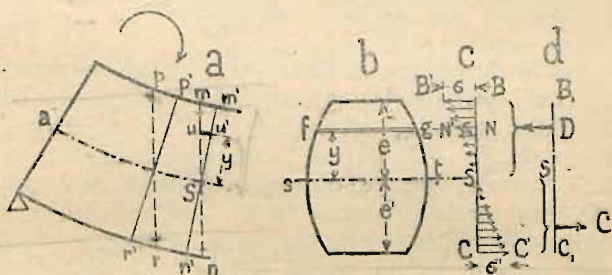
Rys. 171 przedstawia płaszczyzny mn i pr , narysowane w większej podziałce, przed i po ugięciu. Widać na niej, że odkształcenia (przedłużenia, względnie skrócenia) poszczególnych włókien nn' , mm' i t. d. mają się do siebie jak odległości ich od osi obojętnej st , przechodzącej przez punkt S , t. j., że $nn':mm' = y:e$. Wiemy jednak, że (aż do granicy proporcjonalności) naprężenia są wprost proporcjonalne do odkształceń. Stąd wynika, że włókna najbardziej od osi oddalone będą naprężone najbardziej, zaś w samej osi będzie naprężenie równe zeru. Oznaczając naprężenie w odległości y

od osi obojętnej przez σ_y naprężenie w warstwie skrajnej górnej przez σ , w warstwie dolnej przez σ' , otrzymamy na mocy podobieństwa trójkątów $\triangle ANN' \sim \triangle ABB' \sim \triangle ACC'$ (rys. 171c):

oraz: $\left. \begin{array}{l} \sigma:\sigma_y = e:y \\ \sigma':\sigma_y = e'y \end{array} \right\} 125$

a stąd: $\sigma_y = \sigma \frac{y}{\rho}$, względnie $\sigma_y = \sigma' \frac{y}{\rho}$ 125a

Zatem w każdym włóknie oddalonym o y od osi obrotowej panuje naprężenie σ_y , stałe na całej szerokości paska fg . Jeżeli powierzchnia takiego paska w odległości y od osi obrotowej (rys. 171b) wynosi f , to suma naprężeń wszystkich jego włókien równa jest naprężeniu σ_y , pomnożonemu przez powierzchnię paska, t. j. $f\sigma_y$. Ale $\sigma_y = \frac{\sigma}{e} y$, a więc $f\sigma_y = \frac{\sigma}{e} fy$, względnie $f\sigma_y = \frac{\sigma'}{e} fy$.



Rys. 171.

A zatem suma wszystkich naprężeń ściskających w całej ściskanej części belki (rys. 176c i d):

$$D = \left(\frac{\sigma}{e} f_1 y_1 + \frac{\sigma}{e} f_2 y_2 + \dots \right) = \frac{\sigma}{e} (f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots) = \frac{\sigma}{e} \sum_{i=1}^n f_i y_i \quad 126$$

zaś suma naprężeń rozciągających:

$$C = \left(\frac{\sigma'}{e'} f_1 y_1 + \frac{\sigma'}{e'} f_2 y_2 + \dots \right) = \frac{\sigma'}{e'} (f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots) = \frac{\sigma'}{e'} \sum_0^e f y \quad 126a$$

Jeśli ma być równowaga w przekroju, t. j. jeśli nie ma nastąpić dalszy ruch obrotowy ani też postępowy, to muszą się spełnić warunki tej równowagi, a więc (prócz innych)

suma składowych poziomych musi być równa zeru, więc $C=D=0$. Podstawiając wartości, otrzymamy:

$$\frac{\sigma}{e} \sum_0^e fy - \frac{\sigma'}{e'} \sum_0^{e'} f'y' = 0$$

ponieważ zaś z rys. 154c wynika, że $\frac{\sigma}{e} = \frac{\sigma'}{e'}$, przeto:

$$\frac{\sigma}{e} \left(\sum_0^e fy - \sum_0^{e'} f'y' \right) = 0 \quad 127$$

Jeśli iloczyn równać ma się zeru, to jeden z mnożników musi być zerem; ponieważ zaś $\frac{\sigma}{e}$ zerem nie jest, przeto równanie spełni się tylko, jeżeli wyraz w nawiasie równa

$$\sum_0^e fy - \sum_0^{e'} f'y' = 0 \quad 128$$

fy jest momentem statycznym paska o powierzchni f względem osi obojętnej; zatem $\sum fy$ jest sumą momentów stat. wszystkich pasków po jednej, — $\sum f'y'$ pasków po drugiej stronie osi, zaś $\sum fy - \sum f'y'$ jest momentem statycznym wszystkich pasków przekroju, t. j. całego przekroju ze względu na oś. Wedle 128 ma on być równy zeru. Jednak linja, względem której suma momentów statycznych pewnego przekroju = 0, przechodzi (wedle § 21) przez środek ciężkości tego przekroju, a zatem:

Oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju.

Jeśli jednak ma nastąpić równowaga, to i moment statyczny wszystkich sił działających musi równać się zeru. Na dany przekrój mn działa: 1. moment M sił z wewnętrznych ze względu na punkt S (o wielkości w danym przykładzie $M = O_1c - P_1c_1$), oraz 2. suma momentów naprężeń również ze względu na punkt S . Siła wewnętrzna, odpowiadająca paskowi f , odległemu od osi obojętnej o y wynosi $f\sigma_y$, a jej moment względem S jest $f\sigma_y y = f \frac{\sigma}{e} y^2$. Dla wszystkich pasków powyżej osi obojętnej otrzymamy zatem:

$$\frac{\sigma}{e} f_1 y_1^2 + \frac{\sigma}{e} f_2 y_2^2 + \dots = \frac{\sigma}{e} (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + \dots) = \frac{\sigma}{e} \sum fy^2, \text{ a po-}$$

dobnie poniżej osi: $\frac{\sigma'}{e'} \sum f' y'^2$. Wiemy wreszcie, że $\frac{\sigma}{e} = \frac{\sigma'}{e'}$ a stąd dla równości momentów:

$$M = \frac{\sigma}{e} (\Sigma f y^2 + \Sigma f' y'^2) = \frac{\sigma}{e} \Sigma f y^2 \quad . \quad . \quad . \quad 129$$

Wyraz $\Sigma f y^2$ składa się z bardzo wielu dodajników, z których każdy równy jest iloczynowi niezmiernie wąskiego paska, na jakie dzielimy przekrój, przez kwadrat jego odległości od osi obojętnej. Nazywamy go momentem bezwładności I . Ponieważ mamy w nim powierzchnię f (cm²) mnożoną przez kwadrat długości y^2 (znów cm²), przeto jednostką momentu bezwładności będą cm⁴, t. j. centymetry do potęgi czwartej. $\Sigma f y^2$ jest więc momentem bezwładności całego przekroju względem osi obojętnej. Otrzymujemy zatem:

$$M = \frac{\sigma}{e} I = \frac{\sigma_y}{y} I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130$$

Największe naprężenie będzie we włóknie najbardziej oddalonem od osi obojętnej, a zatem we włóknie skrajnem (jednem lub obu). Z równania 130 otrzymamy jego wartość:

$$\text{najw. } \sigma = \frac{M e}{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131$$

$$M = \text{najw. } \sigma \frac{I}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132$$

Dla danego przekroju $m n$ zmienny jest moment zależnie od obciążenia, natomiast I i e są stałe. Nazwijmy $\frac{I}{e} = W$, to

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133$$

$$M = \sigma W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134$$

Wielkość W nazywamy momentem wytrzymałości lub momentem oporu lub też wskaźnikiem przekroju; mierzymy go w cm³.

Podobnie otrzymamy dla włókna oddalonego o e' :

$$\sigma' = \frac{M e'}{I} = \frac{M}{W'} \left(\text{gdzie } \frac{I}{e'} = W' \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133a$$

$$M = \sigma' W' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134a$$

Najczęściej używamy przekrojów symetrycznych względem osi poziomej; dla nich oś obojętna (oś ciężkości) jest zarazem osią symetrii. Wtedy $e = e'$, $W = W'$.

Jeżeli moment ma znak dodatni, to w części górnej belki występuje ściskanie, oznaczane znakiem „—“, zaś w części dolnej wyciąganie, oznaczane znakiem „+“. Np. „— σ “ oznacza „ściskanie o wielkości σ “.

Największe naprężenia powstają zawsze we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej; inne włókna przenoszą siły o wiele mniejsze, niż wynosi ich wytrzymałość (względnie naprężenie dopuszczalne); nie są więc należyście wykorzystane. Staramy się dlatego zwykle o to, aby największą część materiału belki rozmieścić możliwie daleko od osi, co widać np. w belkach żelaznych **I**, **C** i t. d.

W belce narażonej na zginanie przybierają momenty zginające w poszczególnych miejscach różne wartości. Najpraktyczniej byłoby więc zastosować belkę o przekroju zmiennym, silniejszym tam, gdzie działają momenty większe, zaś słabszym, gdzie występują mniejsze. Jednakowoż belek takich używamy tylko w większych konstrukcjach; w mniejszych używa się zwykle belek drewnianych lub dźwigarów żelaznych o przekroju stałym na całej długości, a tem samem o stałym momencie wytrzymałości W i momencie bezwładności I . Wtedy wedle wzoru 130 $\sigma = \frac{M}{W}$ największe naprężenie wystąpi w przekroju, w którym moment jest największy; przekrój ten nazywamy dlatego przekrojem niebezpiecznym.

Ze względu na konieczną w budowlach inżynierskich pewność obliczamy wymiary belek tak, aby największe naprężenie (we włóknach skrajnych przekroju niebezpiecznego) było conajwyżej równe naprężeniu dopuszczalnemu. Dla najw. M musi być więc $\sigma = k_g$, a równanie 133 przybierze wtedy postać:

$$k_g \geq \frac{\text{najw. } M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135$$

Zwykle dany jest najw. M , oraz naprężenie dopuszczalne, którego nie można przekroczyć; natomiast w tablicach szukamy belki mającej moment wytrzymałości W równy obliczonemu lub większy; wtedy używamy wzoru:

$$W = \frac{\text{najw. } M}{k_g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 136$$

§ 38. Rachunkowe wyznaczenie momentu bezwładności prostokąta.

Podzielmy prostokąt o wysokości h , a podstawie b (rys. 172) na wąskie paski poziome o grubości g ; powierzchnia każdego paska niech wynosi f , zaś odstęp od osi xx niech będzie y . Momentem bezwładności jednego paska jest $I_1 = fy^2 = (bg)y^2$. Dla górnej połowy prostokąta mamy zatem $\frac{1}{2}I_x = bg(y_1^2 + y_2^2 + \dots)$, czyli

$$I_x = 2b(y_1^2g + y_2^2g + \dots) \quad 137$$

ale $y_2 = y_1 + g$, $y_3 = y_2 + g \dots$, a zatem:

$$y_2^3 = y_1^3 + 3y_1^2g + 3y_1g^2 + g^3$$

$$y_3^3 = y_2^3 + 3y_2^2g + 3y_2g^2 + g^3$$

Wartości g są jednak bardzo małe, a tem mniejsze są wartości g^2 i g^3 ; możemy je więc śmiało opuścić. Otrzymamy wtedy:

$$y_2^3 = y_1^3 + 3y_1^2g, \text{ więc } y_1^2g = \frac{y_2^3 - y_1^3}{3}$$

i podobnie

$$y_2^2g = \frac{y_3^3 - y_2^3}{3} \dots$$

Podstawiając wartości we wzór 137 otrzymujemy:

$$I_x = \frac{2}{3}b(y_2^3 - y_1^3 + y_3^3 - y_2^3 + y_4^3 - y_3^3 + \dots + y_n^3 - y_{n-1}^3), \text{ a upraszczając}$$

$$I_x = \frac{2}{3}b(y_n^3 - y_1^3) \quad 138$$

Ponieważ y_1 jest bardzo małe wobec y_n , więc tembardziej y_1^3 wobec y_n^3 ; możemy więc je opuścić; z drugiej strony y_n jest prawie równe $\frac{h}{2}$. Podstawmy więc te wartości, a otrzymamy:

$$I_x = \frac{2}{3}b \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{1}{12}bh^3 \quad 139$$

Uproszczenie, jakie w toku rachunku czyniliśmy, są tem bardziej dopuszczalne, im na węższe paski podzieliliśmy przekrój. Przy przyjęciu pasków niezmiernie wązkie błęd powstały znikną zupełnie.

Dla osi yy otrzymamy w ten sam sposób:

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3 \quad 140$$

Jeśli $h > b$, to I_x jest największym, I_y najmniejszym ze wszystkich momentów bezwładności, odniesionych do środka ciężkości.

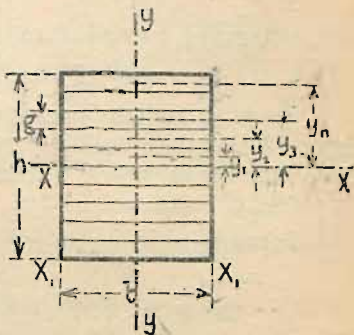
Moment wytrzymałości względem osi xx wynosi zatem:

$$W_x = \frac{I_x}{e} = \frac{1}{12}bh^3 \cdot \frac{2}{h} = \frac{1}{6}bh^2 \quad 141$$

zaś dla osi yy :

$$W_y = \frac{I_y}{e'} = \frac{1}{12}hb^3 \cdot \frac{2}{b} = \frac{1}{6}hb^2 \quad 142$$

Jeśli $h > b$, to W_x jest znów największym, W_y najmniejszym momentem wytrzymałości danego przekroju.



Rys. 172.

Dla przekroju kwadratowego o bokach a $h = b = a$, zatem

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4 \quad 143$$

$$W_x = W_y = \frac{1}{6} a^3 \quad 144$$

§ 39. Moment bezwładności ze względu na oś równoległą do pewnej osi ciężkości.

Niech I_0 będzie momentem bezwładności danego przekroju ze względu na oś ciężkości $x - x$, zaś I_1 szukany przez nas momentem bezwładności ze względu na oś $x_1 - x_1$, oddaloną o c od osi $x - x$.

Moment bezwładności I_0 wynosi (rys. 173).

$$I_0 = \sum f y^2.$$

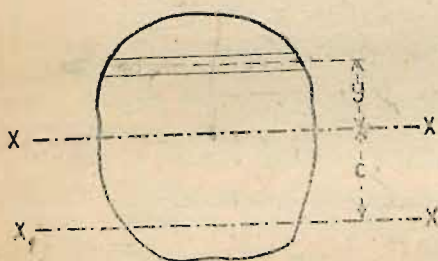
Zaś moment bezwładności I_0 względem osi x_1, x_1 :

$$I_1 = \sum f (y + c)^2 = \sum f y^2 + \sum 2 c f y + \sum f c^2 = I_0 + 2 c \sum f y + c^2 \sum f$$

Wyraz $2 c \sum f y$ jest równy zeru, gdyż $\sum f y$ jest momentem statycznym przekroju ze względu na oś ciężkości (por. § 21); wyraz $\sum f$ jest sumą powierzchni wszystkich pasków, a więc powierzchnią całego przekroju F , a zatem:

$$I_1 = I_0 + F c^2 \quad 145$$

T. j.: Moment bezwładności danego przekroju ze względu na oś odległą o długość c od środka ciężkości równa się momentowi



Rys 173.

momentowi bezwładności przekroju ze względu na oś ciężkości, równoległą do danej osi, więcej iloczynowi powierzchni F przez kwadrat odległości obu osi.

Wiemy, że dla prostokąta o wysokości h , a podstawie b moment bezwładności I względem osi ciężkości xx wynosi

$I = \frac{1}{12} b h^3$. Jeśli chcemy znaleźć I_1 względem podstawy, to odległość osi ciężkości xx od nowej osi $x_1 x_1$ (rys. 172) wynosi $\frac{1}{2} h$, a więc:

$$I_x = I_0 + F c^2 = \frac{1}{12} b h^3 + b h \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3} b h^3 \quad 146$$

Podobnie moment bezwładności względem pionowego boku prostokąta:

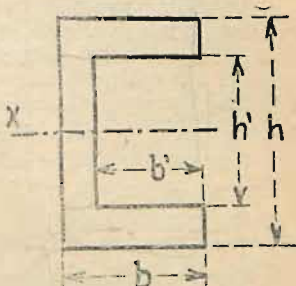
$$I_y = \frac{1}{3} b h^3 \quad 147$$

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3$$

Znając moment bezwładności prostokąta, oraz na podstawie wzoru 145, wyznaczyć możemy momenty bezwładności figur bardziej skomplikowanych, składających się z prostokątów, albo też figur, które w przybliżeniu możemy zamienić na prostokąty. Dla każdego prostokąta składowego znajdujemy moment bezwładności osobno, a następnie sumujemy je lub odejmujemy. Np. przekrój **C** (por. rys. 174) uważać możemy za prostokąt o wymiarach b, h , od którego trzeba odjąć prostokąt mniejszy o wymiarach b', h' . Wtedy:

$$I_x = \frac{1}{12} (bh^3 - b'h'^3) \quad . \quad . \quad . \quad 148$$

$$\text{zaś } W_x = \frac{2I_x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad 148a$$



Rys. 174.

W podobny sposób wyznaczamy momenty bezwładności przekrojów o kształcie np. **T** lub **I**. Przekroje takie spotykamy najczęściej w kształtownikach żelaznych, jednakowoż z zaokrągleniami, a także pochyleniami ścianek. Obliczając moment bezwładności, zamieniamy przekrój dany zwykle na przekrój złożony z prostokątów wyrównujących go co do powierzchni. Por. przykłady 96 i 102.

Zwykle jednakowoż zbyt częste jest wykonywanie tych działań, gdyż momenty bezwładności i momenty wytrzymałości najczęściej używanych przekrojów zestawione są w tablicach. Por. tablice kształtowników na końcu książki.

Przykłady 96—113.

96. Obliczyć moment bezwładności blachownicy o przekroju, podanym na rys. 175, uwzględniając przytem zmniejszenie momentu bezwł. wskutek dziur na nity 20 mm. Blachownica ma ściankę o wysokości $H=100$ cm, a grubości 1 cm, kątowniki 90.90.10 i nakładki 240.11.

Wedle rys. 158. $H=100$ cm, $h_1=98$ cm, $h_2=82$ cm, $g=1,1$ cm, $d=2$ cm, $c=3,5$ cm, $c_1=8$ cm, $c_2=1$ cm.

Moment bezwładności obliczymy, odejmując od momentu bezwładności prostokąta o podstawie B , a wysokości $(H+2g)$ momenty bezwładności prostokątów nie wchodzących w skład przekroju belki.

Otrzymamy wtedy:

$$I = \frac{1}{12} [(B-2d)(H+2g)^3 - 2cH^3 - 2(c_1-d)h_1^3 - 2c_2h_2^3], \text{ czyli:}$$

$$I = \frac{1}{12} [(24-2 \cdot 2)(100+2 \cdot 1,1)^3 - 2 \cdot 3,5 \cdot 100^3 - 2(8-2)98^3 - 2 \cdot 1 \cdot 82^3] = \\ = 498,299 \text{ cm}^4, \text{ okrągło } I = 498,300 \text{ cm}^4.$$

97. Znaleźć moment bezwładności przekroju, złożonego z blachy 100.8 i dwu kątowników 50.50.5 (rys. 176).

Moment bezwładności blachy wynosi:

$$I_b = \frac{1}{12} 0,8 \cdot 16^3 = 273,0 \text{ cm}^4.$$

Moment bezwładności jednego kątownika względem osi ciężkości równoległej do ramienia wynosi (według tablic) $I_0 = 11,2 \text{ cm}^4$; ponieważ zaś środek ciężkości jednego kątownika odległy jest od poziomej osi ciężkości xx całego przekroju o 6,59 cm, zaś jego przekrój wynosi $F = 4,79 \text{ cm}^2$, przeto jego moment bezwładności wzgl. osi xx ma wartość:

$$I_k = 11,2 + 4,79 \cdot 6,59^2 = 219,2 \text{ cm}^4.$$

Zaś moment bezwładności całego przekroju.

$$I = I_b + 2 I_k = 273,0 + 2 \cdot 219,2 = 711,4 \text{ cm}^4.$$

98. Znaleźć moment bezwładności i moment wytrzymałości przekroju podanego na rys. 91 (por. przykład 37).

Środek ciężkości przekroju leży w odległości 5 cm od osi mm (por. przykład 37). Zatem moment bezwładności:

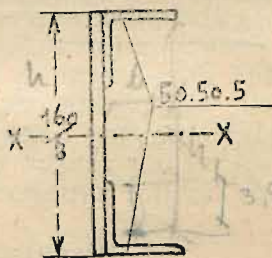
$$I = \frac{1}{3} (10 \cdot 5^3 - 2 \cdot 3,5 \cdot 1^3 + 7 \cdot 7^3 - 2 \cdot 2 \cdot 5^3) = \frac{1}{3} 3144 = 1048 \text{ cm}^4.$$

Zaś moment wytrzymałości:

$$W = \frac{I}{e} = \frac{1048}{7} = 149,7 \text{ cm}^3.$$



Rys. 175.



Rys. 176.

99. Znaleźć moment bezwładności i moment wytrzymałości przekroju jak w zadaniu 38 (rys. 92).

Przy pomocy tablic otrzymamy:

$$I_x = 2 \left(1,86 + 2,25 \cdot 5,87^2 \right) + 2 \left(\frac{0,4 \cdot 4^3}{12} + 4,0 \cdot 0,4 \cdot 6,23^2 \right) + \left(\frac{0,6 \cdot 15^3}{12} + 15 \cdot 0,6 \cdot 0,73^2 \right) = 158,7 + 134,9 + 173,6 = 467,1 \text{ cm}^4.$$

Obliczając moment wytrzymałości W , uwzględnić musimy odległość krawędzi dolnej, gdyż jest ona bardziej oddalona od osi ciężkości. Otrzymamy wtedy: $W = \frac{467,1}{8,23} = 56,7 \text{ cm}^3.$

100. Dźwigar INP 26 przykryty jest w miejscu styku przykładkami wedle rys. 177. Należy znaleźć ich moment wytrzymałości z uwzględnieniem 4 dziur na nity 16 mm.

Moment bezwładności przykładek pionowych wynosi:

$$I_1 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 20^3 = 1333 \text{ cm}^4.$$

Moment bezwładności przykładek poziomych:

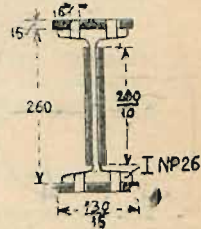
$$I_2 = \frac{1}{12} (13 - 1 \cdot 1,6) (29^3 - 26^3) = 5554 \text{ cm}^4.$$

Całkowity moment bezwładności:

$$I = 1333 + 5554 = 6887 \text{ cm}^4.$$

Zatem moment wytrzymałości:

$$W = \frac{6887}{14,5} = 475 \text{ cm}^3.$$



Rys. 177.

101. Jak należy rozstawić dwa ceowniki NP 24, jeżeli ich momenty bezwładności ze względu na obie osi mają być równe (rys. 178).

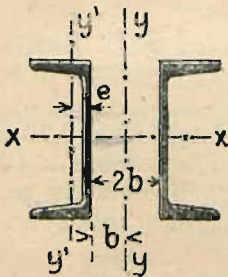
Jeżeli moment bezwładności jednego kształtownika względem osi xx wynosi I_x , względem osi yy I_y , zaś względem osi $y'y'$ przechodzącej przez środek ciężkości jednego kształtownika $I_{y'}$, to:

$$2 I_{y'} = 2 I_x = 2 [I_y + F(e + b)^2], \text{ a stąd:}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{F} \right) - e}$$

a zatem wedle tablic:

$$b = \sqrt{\frac{4056 - 282}{46,5}} - 2,38 = 6,35 \text{ cm}.$$



Rys. 178.

102. Znaleźć moment bezwładności przekroju dźwigara I 28a, osłabionego dwoma nitami (por. zadanie 40), przyjmując przekrój złożony z prostokątów (rys. 94).

Niech I oznacza moment bezwładności dźwigara nieosłabionego względem środka wysokości, I_1 względem osi x_1x_1 , zaś I_n moment bezwładności dziur na nity względem ich środka ciężkości, to otrzymamy, biorąc moment dźwigara nieosłabionego względem osi x_1x_1 :

$$I_1 = I + F s^2$$

Odejmując od tej wartości moment bezwładności dziur na nity względem tej samej osi x_1x_1 :

$$\left\{ I_n + F_n \left(u - \frac{g}{2} \right)^2 \right\}$$

$$\text{dostaniemy: } I_1 = I + F s^2 - \left[I_n + F_n \left(u - \frac{g}{2} \right)^2 \right]$$

Dla INP 28a otrzymamy $I_n = \frac{1}{12} 2,0 \cdot 1,7^3 = 0,7 \text{ cm}^4$, co jest wartością tak małą, że w ogólnym wzorze możemy ją zupełnie pominąć;

otrzymamy wtedy: $I_1 = I + F s^2 - F_n \left(u - \frac{g}{2} \right)^2$

Dla INP 28a (porównaj przykład 40):

$$I_1 = 10274 + 78,85 \cdot 1,24^2 - 6,8 (15,24 - 0,83)^2 = 10274 + 121 - 1410 = 8985 \text{ cm}^4.$$

103. O ile zmieni się moment wytrzymałości dźwigara $INP\ 28\ a$, osłabionego na jednej stopce dwoma nitami o średnicy 20 mm. (Por przykłady 40 i 102.)

Moment wytrzymałości dźwigara nieosłabionego wynosi:

$$W = 733,9\text{ cm}^3.$$

Moment bezwładności I_1 dźwigara osłabionego obliczyliśmy w przykładzie 99, otrzymując wartość $I_1 = 8985\text{ cm}^4$.

Zatem moment wytrzymałości:

$$W_1 = \frac{I_1}{u} = \frac{8985}{15,24} = 589,0\text{ cm}^3.$$

Wartość momentu wytrzymałości zmniejsza się więc o $W - W_1 = 733,9 - 589,0 = 144,9\text{ cm}^3$.

104. Znaleźć dźwigar **I** potrzebny dla obciążenia, jak na rys. 100 (przykład 44).

Największy moment zginający wynosi tutaj $M = 872000\text{ kgcm}$. Zatem potrzebny moment wytrzymałości:

$$W = \frac{M}{k_p} = \frac{872000}{1200} = 727\text{ cm}^3.$$

Użyjemy zatem dźwigara $NP\ 32$ ($W = 783\text{ cm}^3$). Bezpośrednio mniejszy dźwigar $NP\ 30$ ma moment wytrzymałości $W = 653\text{ cm}^3$.

105. Belki drewniane śpicherza leżą w odstępach $a = 0,70\text{ m}$ od środka do środka na murach odległych od siebie o $l = 4,38\text{ m}$. Należy znaleźć ich przekrój, jeśli ciężar własny powały wynosi 120 kg/m^2 , zaś ciężar zboża na niej spoczywającego warstwą $1,00\text{ m}$ grubą — 800 kg/m^3 .

Otrzymamy tu obciążenie jednej belki w kg/mb :

$$z = (120 + 800 \cdot 1,0) \cdot 0,7 = 644\text{ kg/mb}.$$

Rozpiętość teoretyczną l belek przyjmować należy w wielkości $1,05$ odstepu murów w świetle, zatem

$$l = 1,05 \cdot 4,38 = 4,60\text{ m},$$

na całej belce spoczywa zatem:

$$Z = 644 \cdot 4,60 = 2960\text{ kg},$$

a zatem moment zginający wynosi:

$$M = \frac{1}{8} Z l = \frac{1}{8} 2960 \cdot 4,60 = 170200\text{ kgcm.}^*)$$

Przyjmując naprężenie dopuszczalne 100 kg/cm^2 , otrzymamy potrzebny moment wytr. $W_p = \frac{170200}{100} = 1702\text{ cm}^3$; stosujemy więc belkę o przekroju $24/21\text{ cm}$ ($W = 2016\text{ cm}^3$).

*) Często liczymy moment wedle wzoru $M = \frac{1}{8} \cdot 1,05 \cdot g l^2$, otrzymując przez to nieco mniejszą wartość M .

Obliczenie dźwigarów A.

Odległość murów w świetle $l = 5,80$ m.

Odstęp dźwigarów $a = 1,16$ m

Teoretyczna rozpiętość dźwigarów $L = 1,025 l = 5,95$ m.

Ciężar całkowity: $Z = 5,95 \times 1,16 \times 900 = 6212$ kg.

Moment zgięcia: $M = \frac{1}{8} ZL = 462020$ kgcm.

Potrzebny moment wytrzymałości:

$$W = \frac{462020}{1200} = 385 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy INP 25 ($W = 397 \text{ cm}^3$); wtedy największe napężenie $\sigma = \frac{462020}{397} = 1164 \text{ kg/cm}^2$.

Obliczenie dźwigarów B.

Odległość murów w świetle $l = 4,50$ m.

Odstęp dźwigarów $a = 1,22$ m.

Teoretyczna rozpiętość dźwigarów $L = 1,05 l = 4,70$ m.

$Z = 4,50 \times 122 \times 900 = 4940$ kg

$M = \frac{1}{8} ZL = \frac{1}{8} 4940 \times 470 = 290300$ kgcm

$W = \frac{290300}{1200} = 242 \text{ cm}^3$. Przyjęto INP 21 ($W = 244 \text{ cm}^3$).

Obliczenie dźwigarów C.

Podciąg C przenosi: a) ciężar ściany; b) ciężar stropu, przenoszącego się nad bezpośrednio z połowy pola obciążenia B; c) oddziaływania trzech dźwigarów A; d) ciężar własny podciagu, narazie nieznany.

a) Ciężar ściany wynosi:

$Z_a = 3,80 \times 4,50 \times 0,30 \times 1300 = 6670$ kg, stąd moment w środku:

$$M_a = \frac{1}{8} Z_a L = \frac{1}{8} 6670 \times 470 = 392000 \text{ kgcm}.$$

b) Ciężar połowy pola B wynosi:

$$Z_b = 4,50 \times 0,61 \times 900 = 2470 \text{ kg},$$

$$M_b = \frac{1}{8} 2470 \times 470 = 145200 \text{ kgcm}.$$

c) Oddziaływania dźwigarów A wynoszą:

$$O_a = \frac{6060}{2} = 3030 \text{ kg}$$

9 50
1 05
22 50
4 50
4 70

a stąd oddziaływanie podciągu :

$$O_1 = \frac{1}{4,70} \left[3030 (3,1,16 + 0,10) + 3030 (2,1,16 + 1,10) + 3030 (1,16 + 0,10) \right] = \frac{3030}{4,70} (3,58 + 2,42 + 1,26) = 3030 \frac{7,26}{4,70} = 4680 \text{ kg.}$$

$$O_2 = 3 \cdot 3030 - 4680 = 4410 \text{ kg.}$$

Momenty zginające wynoszą zatem :

pod pierwszym ciężarem :

$$M_c' = 4410 \times 1,26 = 552800 \text{ kgcm.}$$

pod środkowym ciężarem :

$$M_c'' = 4410 \times 242 - 3030 \times 116 = 715740 \text{ kgcm.}$$

Ponieważ punkt m , w którym wspiera się dźwigar A środkowy na podciągu C, jest oddalony od środka belki tylko o 7 cm, co wobec długości $L = 4,70$ m jest wielkością bardzo nieznaczną, a moment belki wolno podpartej w środku belki mało co się zmienia, przeto możemy M_a , M_b i M_c'' wprost dodać i w ten sposób otrzymać największy moment z bardzo małym błędem. Otrzymamy wtedy:

$$M = M_a + M_b + M_c'' = 1252940 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{1208840}{1200} = 1044 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy 2 INP 28 ($W = 2,543 = 1084 \text{ cm}^3$); ważą one $2,48 = 96 \text{ kg/mb}$, zatem na długości 4,70 m wypada $4,70 \cdot 96 = 450 \text{ kg}$, do czego dodając 40 kg na usztywnienia, otrzymamy ciężar własny 490 kg.

Moment z powodu ciężaru własnego wynosi :

$$M_w = \frac{1}{8} 490 \cdot 4,70 = 28800 \text{ kgcm.}$$

Zatem moment całkowity: $M + M_w = 128174 \text{ kgcm}$, co

$$\text{wymaga } W = \frac{1281740}{1200} = 1068 \text{ cm}^3.$$

Zatrzymamy zatem dwa dźwigary INP 28.

Obliczenie ciosów oporowych:

Dźwigary A.

Oddziaływania: $O_A = \frac{Z}{2} = 3030 \text{ kg}$, zatem potrzebna

$$\text{powierzchnia } F = \frac{O_A}{k} = \frac{3030}{7} = 433 \text{ cm}^2.$$

1252940
28800
1281740

Przyjmujemy cios o wymiarach podstawy $20 \times 25 \text{ cm}$, którego $F_p = 500 \text{ cm}^2$.

Dźwigary B.

$$O_B = \frac{Z}{2} = \frac{4940}{2} = 2470 \text{ kg}$$

$$F_p = \frac{O_B}{k} = \frac{2470}{7} = 353 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy również cios $20 \times 25 \text{ cm}$ ($F = 500 \text{ cm}^2$).

Podciąg C.

$$O_c = \frac{Z_a}{2} + \frac{Z_b}{2} + O_1 = 3335 + 1235 + 4680 = 9250 \text{ kg}$$

Z powodu ciężaru własnego dźwigara $\frac{245}{9495 \text{ kg}}$

Oddziaływanie dźwigara A, który spoczywa na tym samym ciosie $O_A = 3030 \text{ kg}$. Zatem całkowita siła, przeniesiona na cios podporowy, wynosi: $R = 9495 + 3030 = 12525 \text{ kg}$.

Ponieważ otrzymalibyśmy cios zbyt wielki, przeto narożnik wymurujemy na cemencie, wtedy

$$k = 10 \text{ kg/cm}^2, \text{ zatem } F_p = \frac{12525}{10} = 1252,5 \text{ cm}^2.$$

Przyjęto $40 \times 40 \text{ cm}$ ($F = 1600 \text{ cm}^2$).

Na drugim łożysku wynosi oddziaływanie z uwzględnieniem ciężaru własnego dźwigara:

$$O_c' = 3335 + 1235 + 4410 + 245 = 922,5 \text{ kg}.$$

Murując również na cemencie, otrzymamy:

$$F_p = \frac{9225}{10} = 922,5 \text{ cm}^2.$$

Przyjęto $35 \times 30 \text{ cm}$ ($F = 1050 \text{ cm}^2$).

Długości rzeczywiste dźwigarów różnią się od teoretycznych o długość podparcia na ciosie; wynoszą one:

Dźwigary A INP 25, $l = 6,10 \text{ m}$, ilość 4

" A₁ INP 25, $l = 6,30 \text{ m}$, " 1

" B INP 21, $l = 5,00 \text{ m}$, " 3

" C INP 28, $l = 5,25 \text{ m}$, " 2

108. Należy obliczyć belkę żelazną dźwigającą ścianę grubości $0,30 \text{ m}$, wysoką $6,00 \text{ m}$ z otworami jak na rys. 180, jeżeli jeden z filarów podtrzymujących jest narożny.

Obciążenie P_1 na przestrzeni $a = 2,20$ m składa się z ciężaru muru od podpory lewej aż do osi okien z pominięciem otworów. Ciężar ten wynosi:

$$P_1 = \left[(2,20 + 0,60) 6,0 - 2 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot 2,40 \right] 0,30 \cdot 1600 = 7520 \text{ kg.}$$

Podobnie znaleziony ciężar P_2 wynosi:

$$P_2 = \left[(0,60 + 1,60) 6,0 - 2 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot 2,40 \right] 0,30 \cdot 1600 = 5570 \text{ kg.}$$

Ciężary te rozkładają się jednostajnie na przestrzeni $a = 2,20$ m, względnie $b = 1,60$ m.

Oddziaływanie O_1 wynosi więc:

$$O_1 = \frac{P_1 (l - \frac{1}{2} a) + P_2 \cdot \frac{1}{2} b}{1} = \frac{7520 \cdot (5,00 - 1,10) + 5570 \cdot 0,80}{5,00} =$$

$$= \frac{29328 + 4456}{5,00} = 6757 \text{ kg.}$$

Ciężar $P_1 = 7520$ kg jest większy od oddziaływania $O_1 = 6757$ kg, wobec czego, w myśl § 26, przekrój niebezpieczny leży na przestrzeni AC, a odległość jego od podpory A wynosi (wedle wzoru 45):

$$m = \frac{O_1 a}{P_1} = \frac{6757 \cdot 2,20}{7526} = 1,98 \text{ m.}$$

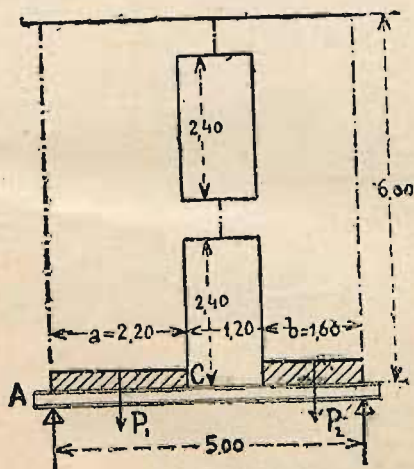
Moment zginający w tym punkcie wynosi:

$$M = \frac{O_1 m}{2} = \frac{6757 \cdot 1,98}{2} = 669000 \text{ kgcm.}$$

Zatem potrzebny moment wytrzymałości:

$$W = \frac{669000}{1200} = 558 \text{ cm}^3.$$

Moglibyśmy użyć więc dźwigara NP 29 o momencie wytrzymałości $W = 596 \text{ cm}^3$; lepiej będzie jednakowoż ze względu na podparcie ściany zastosować dwa dźwigary NP 22 ($W = 2 \cdot 278 = 556 \text{ cm}^3$).



Rys. 180

109. Należy obliczyć belkę żelazną, dzwigającą ścianę o grubości 0,30 m, wysokości 7,00 m, z otworami, jak na rys. 181, jeżeli oba filary podtrzymujące są środkowe.

W tym wypadku przenosi się na belkę obciążenie części muru ograniczonej prostą poziomą AB , rzędnemi, wychodzącymi z punktów A i B , jakoteż prostemi nachyleniemi pod kątem 60° do poziomu, przechodzącymi przez naroża otworu.

Obliczenie statyczne dźwigarów należałoby przeprowadzić z uwagi na ciężar ciągły, jednak celem uproszczenia

sposobu obliczania będziemy dzielili ciężar ciągły na paski, których ciężary zaczepiają w środku ciężkości odnośnych pasków.

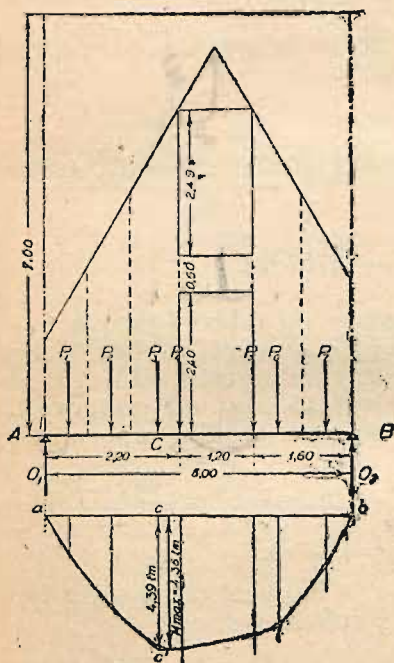
Ciężary pasków będą zatem:

$$P_1 = 0,3 \cdot 0,7 \frac{1,65 + 2,85}{2} 1600 = 756 \text{ kg.}$$

$$P_2 = 0,3 \cdot 0,7 \frac{2,85 + 4,05}{2} 1600 = 1160 \text{ kg.}$$

$$P_3 = 0,3 \cdot 0,8 \frac{4,05 + 5,40}{2} 1600 = 1625 \text{ kg.}$$

$$P_4 = P_5 = 0,3 \frac{0,60 \cdot 1,20 \cdot 1600}{2} + 0,3 \frac{1,20 \cdot 1,05 \cdot 1600}{4} = 325 \text{ kg.}$$



Rys. 181.

$$P_6 = 0,3 \cdot 0,8 \frac{5,40 + 4,00}{2} 1600 = 1805 \text{ kg.}$$

$$P_7 = 0,3 \cdot 0,8 \frac{4,00 + 2,60}{2} 1600 = 1268 \text{ kg.}$$

Oddziaływanie O_1 wynosi więc:

$$O_1 = \frac{P_1 (l - 0,38) + P_2 (l - 1,07) + P_3 (l - 1,84) + P_4 (l - 2,20)}{5,00} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{P_5(l-3,40) + P_6 \cdot 1,22 + P_7 \cdot 0,36}{5,00} = \frac{756 \cdot 4,62 + 1160 \cdot 3,93}{5,00} + \\
 &+ \frac{1625 \cdot 3,16 + 325 \cdot 2,80 + 325 \cdot 1,60 + 1805 \cdot 1,22 + 1268 \cdot 0,43}{5,00} = \\
 &= \frac{3493 + 4559 + 5135 + 910 + 520 + 2202 + 546}{5,00} = \frac{17365}{5,00} = 3473 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

$$O_2 = 3791 \text{ kg.}$$

Chodzi teraz o znalezienie przekroju najniebezpieczniejszego, a więc przekroju, w którym moment statyczny jest największy. Uskuteczmy to drogą analityczną, badając przekrój po przekroju w miejscach działania ciężarów.

$$M_1 = 1,32 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3,04 \text{ tm}$$

$$M_3 = 4,39 \text{ tm}$$

$$M_4 = 4,37 \text{ tm}$$

$$M_5 = 3,90 \text{ tm}$$

$$M_6 = 3,62 \text{ tm}$$

$$M_7 = 1,63 \text{ tm}$$

zatem najw. $M = M_3 = 4,39 \text{ tm.}$

$$\text{Potrzebny moment wytrzymałości } W = \frac{439000}{1200} = 366 \text{ cm}^3.$$

Moglibyśmy użyć więc dźwigara $NP 25$ o momencie wytrzymałości $W = 397 \text{ cm}^3$; lepiej jednakowoż będzie ze względu na podparcie ściany zastosować dwa dźwigary $NP 19$ ($W = 2 \cdot 186 = 372 \text{ cm}^3$).

110. Obliczyć konstrukcję żelazną balkonu. Obciążenie podłogi (stałe i ruchome) wynosi 600 kg/m^2 ; balustradę stanowi mur o grubości $0,25 \text{ m}$, wysokości $0,80 \text{ m}$ (rys. 182).

a) Obliczenie dźwigara CD . Jest on obciążony

podłogą z szerokości $\frac{1,30}{2} \text{ m}$ oraz murem.

$$P = 3,0 \left(\frac{1}{2} 1,30 \cdot 600 + 0,8 \cdot 0,25 \cdot 1600 \right) = 2130 \text{ kg.}$$

$$M = \frac{1}{8} Pl = \frac{1}{8} 2130 \cdot 300 = 79875 = \text{ok. } 79900 \text{ kgcm.}$$

$$\text{Potrzebny moment wytrzymałości } W = \frac{79900}{1200} = 66,6 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto zatem 2 dźwigary $NP 10$ ($W = 2 \cdot 34,2 = 68,4 \text{ cm}^3$).

b) Obliczenie dźwigarów AC i BD . Przenosi się na nie w p. C (względnie D) oddziaływanie dźwigara CD ; oraz na całej długości AC (względnie BD) ciężar muru.

$$P_1 = \frac{1}{2} 2130 = 1065 \text{ około } 1070 \text{ kg.}$$

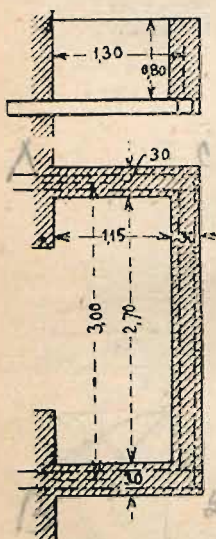
$$M_1 = 1070 \cdot 130 = 139100 \text{ kgcm.}$$

$$P_2 = 1,30 \cdot 0,8 \cdot 0,25 \cdot 1600 = \text{około } 420 \text{ kg.}$$

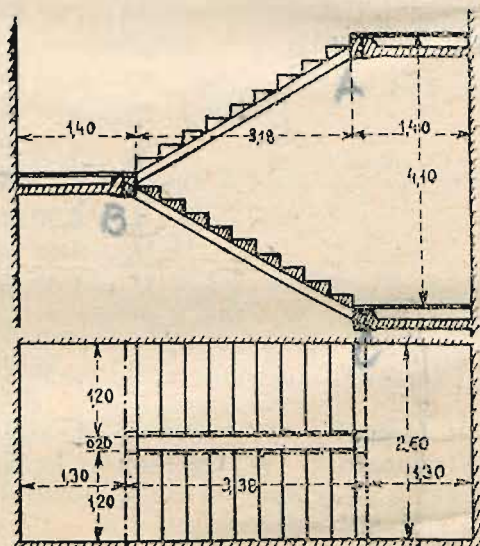
$$M_2 = 420 \cdot \frac{130}{2} = 27300 \text{ kgcm.}$$

Zatem moment całkowity:

$$M = M_1 + M_2 = 139100 + 27300 = 166400 \text{ kgcm.}$$



Rys. 182.



Rys. 183.

Potrzebny moment wytrzymałości $W = \frac{166400}{1200} = 138,7 \text{ cm}^3$.

Przyjmujemy 2 dźwigary INP 14 ($W = 2 \cdot 81,9 = 163,8 \text{ cm}^3$).

111. Należy obliczyć konstrukcję schodów żelaznych o wymiarach podanych na rys. 183.

Obliczenie statyczne schodów redukuje się do obliczenia wymiarów dźwigarów: policykowego AB i podestowego CD . Jeśli długość (w rzucie) pierwszego wynosi l , zaś drugiego l' , szerokość ramienia b , podestu b' , zaś obciążenie (stałe i ruchome) z , względnie z' kg/m^2 rzutu poziomego, to obciążeniem policyka jest $Z = \frac{1}{2} b'lz$, zaś największym momentem $M = \frac{1}{8} Zl =$

$= \frac{1}{16} b z l^2$. Na dźwigar podestowy (spocznikowy) działają natomiast: a) oddziaływania dźwigarów polickowych o wielkości $\frac{1}{2} Z$ w odległości b od podpór, b) ciężar jednostajnie rozłożony, przenoszący się z połowy podestu o wielkości $Z' = \frac{1}{2} b' l' z'$; moment zginający wynosi więc:

$$M_1 = \frac{1}{2} Z b + \frac{1}{8} Z' l' = \frac{1}{2} Z b + \frac{1}{16} b' l' z'^*.$$

a) Obliczenie dźwigara polickowego ($z = 650 \text{ kg/m}^2$):

$$l = 3,18 + 0,10 + 0,10 = 3,38 \text{ m}, \quad b = 1,20 \text{ m}, \quad \text{zatem}$$

$$Z = 0,60 \cdot 3,38 \cdot 650 = 1396 \text{ kg, przyjm. } 1400 \text{ kg}$$

$$M = \frac{1}{8} 1400 \cdot 3,38 = 62650 \text{ kgcm.}$$

$$W_p = \frac{M}{k_g} = \frac{62650}{1200} = 52,4 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy INP 12 o momencie wytrzymałości $W = 54,7 \text{ cm}^3$.

b) Obliczenie dźwigara spocznikowego (z powodu ciężkiej konstrukcji podestu $z' = 700 \text{ kg/m}^2$).

$$\frac{1}{2} Z = \frac{1}{2} 1400 = 700 \text{ kg} \quad Z' = \frac{1}{2} \cdot 1,40 \cdot 2,60 \cdot 700 = 2550 \text{ kg.}$$

$$M = 700 \cdot 1,20 + \frac{1}{8} 2550 \cdot 2,60 = 84000 + 82880 = 166880 \text{ kgcm.}$$

$$W_p = 139,0 \text{ cm}^3$$

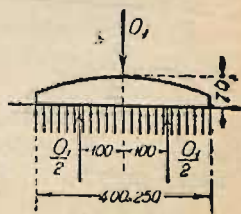
Przyjęto INP 17 ($W = 137,0 \text{ cm}^3$).

Jeżeli spocznik wykonano jako sklepienie, to dźwigar spocznikowy narażony jest na parcie poziome tego sklepienia i obliczać go należy na wytrzymałość złożoną.

112. Obliczyć wymiary łożyska dachowego (rys. 184) dla oddziaływania $O_1 = 11700 \text{ kg}$.

Przyjmujemy wymiary płyty żelaznej $40 \cdot 25 = 1000 \text{ cm}^2$. Wtedy ciśnienie na cios, na którym spoczywa płyta, wynosi

$$\sigma = \frac{11700}{40 \cdot 25} = 11,7 \text{ kg/cm}^2.$$



Rys. 184.

Dla obliczenia łożyska przyjmujemy, że oddziaływanie więzara O_1 przenosi się na łożysko w jednym punkcie, więc w środku łożyska. U dołu łożyska ciśnienie na cios prze-

*) Właściwie oddziaływania $\frac{1}{2} Z$ działają zwykle nie w odległości b od podpór, ale w odległości nieco mniejszej, z uwagi na to, że dźwigary polickowe są nieco wsunięte pod stopnie; różnica jest jednak bardzo mała.

nosić się będzie jednostajnie, uważać więc możemy połowę łożyska za wspornik, na który działa od dołu ku górze obciążenie jednostajne o wielkości $11,7 \text{ kg/cm}^2$ o łącznej wielkości (dla połowy łożyska) $\frac{1}{2} O_1$. Wtedy moment działający na łożysko wyniesie: $M = 5850 \cdot 10 = 58500 \text{ kgcm}$.

Jeżeli łożysko w środku ma grubość $60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$, to moment wytrzymałości wynosi: $W = \frac{1}{6} 25.7^2 = 204 \text{ cm}^3$, a

zatem najw. naprężenie $\sigma = \frac{58500}{204} = 287 \text{ kg/cm}^2$.

Przyjmując wymiary ciosu $50.40 = 2000 \text{ cm}^2$, otrzymamy

najw. ciśnienie na mur $\sigma = \frac{11700}{2000} = 5,9 \text{ kg/cm}^2$.

113. Obliczyć grubość płyty żeliwnej, tworzącej łożysko blachownicy, obliczone w przykładzie 80.

Płyta żeliwna ma za cel rozłożenie ciśnienia na większą powierzchnię ciosu. Na mocy jednak prawa działania i przeciwdziałania sił równoważących się (§ 3) cios ciśnie na płytę z tą samą siłą, z jaką płyta na cios, t. j. w danym przykładzie przenosi się na nią ciśnienie $p = 15 \text{ kg/cm}^2$). Ciśnienie to stara się wygiąć tę część płyty, która wystaje poza szerokość podstawy belki, t. j. na szerokości



Rys. 185.

kości $c = \frac{b-a}{2} = \frac{35-22}{2} = 6,5 \text{ cm}$; część ta

działa więc jako wspornik jednostajnie obciążony ciężarem jednostkowym $p = 15 \text{ kg/cm}^2$ (rys. 185).

Weźmy pod uwagę 1 cm długości płyty prostopadłe do rysunku. Moment zginający na pasku o tej szerokości wynosi:

$$M = \frac{pc^2}{2} = \frac{15 \cdot 6,5^2}{2} = 317 \text{ kgcm},$$

a zatem potrzebny moment wytrzymałości dla $k_b = 300 \text{ kg/cm}^2$:

$$W_p = \frac{317}{300} = 1,06 \text{ cm}^3.$$

Przekrój badanego paska jest prostokątem o szerokości 1 cm, a wysokości równej grubości płyty g , zatem jego moment wytrzymałości wynosi $W = \frac{1}{6} 1 \cdot g^3$; ponieważ zaś $W = W_p$, przeto $\frac{1}{6} 1 \cdot g^3 = 1,06 \text{ cm}^3$ czyli:

$$g = \sqrt[3]{6 \cdot 1,06} = 2,52, \text{ t. j. ok. } 2,6 \text{ cm}.$$

*) Por. rys. 148, gdzie ciśnienie zaznaczone jest strzałkami.

§ 40. Elipsa bezwładności.

Jeżeli F jest powierzchnią, zaś I momentem bezwładności prostokąta (rys. 186) ze względu na oś ciężkości XX , to możemy znaleźć taką długość i_x , ażeby spełniło się równanie:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{F}} 149$$

Podobnie możemy znaleźć i dla innych osi ciężkości, na przykład dla osi ZZ, moment bezwładności I_z , oraz długość

$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$. Poprowadźmy przez punkt S szereg osi Z w różnych położeniach $Z_1, Z_2 \dots$ i dla każdego z nich wykreślmy równoległą w odległości $i_{z_1}, i_{z_2} \dots$ to przekonamy się, że wszystkie one będą stycznymi do elipsy, którą nazywamy **środkową elipsą bezwładności**. Długości i_x, i_z odpowiadające poszczególnym osiom $XX, ZZ \dots$ nazywamy **promieniami bezwładności**.

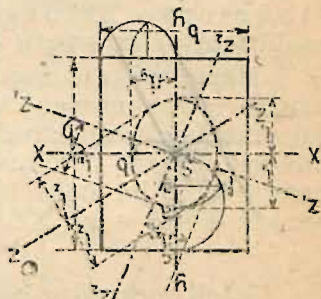
Taką elipsę bezwładności wyznaczyć możemy nie tylko dla prostokąta, ale dla każdego przekroju. Dla przekrojów symetrycznych osi główne tej elipsy leżą zawsze na osiach symetrii, a półosi elipsy S_a , względnie S_b , są równe promieniom bezwładności względem osi XX , względnie YY . Osi elipsy środkowej nazywamy osiami głównymi bezwładności; jeżeli bowiem będziemy badali momenty bezwładności względem osi XX , YY , ZZ , Z_1, Z_2, \dots to okaże się, że największym będzie moment względem jednej osi głównej (w danym przypadku względem XX), najmniejszym moment bezwładności względem drugiej osi głównej; zaś wszystkie inne momenty bezwładności przybiorą wartości pośrednie. Obliczywszy zatem promienie bezwładności główne, możemy na nich wykreślić elipsę, która będzie elipsą bezwładności.

Dla prostokąta otrzymamy:

$$I_x = \frac{I_x}{F} = \left(\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{bh} \right) = \frac{h^2}{12} \dots \dots \dots 149a$$

a stąd:

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h\sqrt{3}}{6} = 0,289 h \quad . \quad . \quad . \quad 149b$$



Rys. 186.

bezwładności jednej z tych części względem wspólnego środka ciężkości. Jeżeli bowiem powierzchnia tak samo rozmieszczona wzrasta w tym samym stopniu, co moment bezwładności,

to otrzymamy: $i = \sqrt{\frac{nI}{nF}} = \sqrt{\frac{I}{F}} \dots \dots \dots 151$

(Porównaj przykład 116.)

Przykłady 114—116.

114. Obliczyć osi główne bezwładności dźwigara NP 28 (rys. 187). Ze względu na oś poziomą otrzymujemy:

$$I_x = \frac{1}{12} \left[12 \cdot 28^3 - (12 - 1,1) (28 - 3,4)^3 \right] = 8430 \text{ cm}^4$$

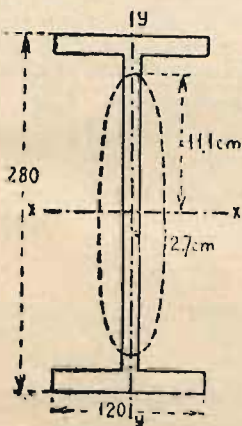
Ze względu na oś pionową

$$I_y = \frac{1}{12} \left[2 \cdot 1,7 \cdot 12^3 + (28 - 3,4) 1,1^3 \right] = 486 \text{ cm}^4$$

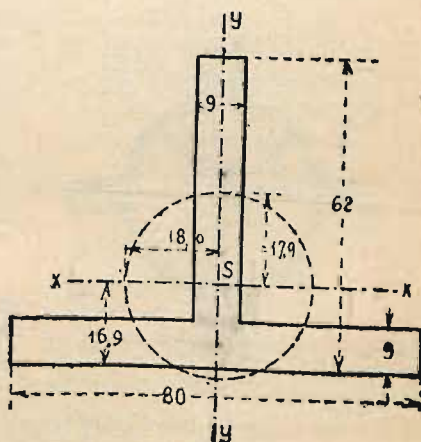
Powierzchnia przekroju $F = 2 \cdot 12 \cdot 1,7 + (28 - 3,4) 1,1 = 67,9 \text{ cm}^2$.

A stąd połowy osi głównych elipsy bezwładności:

$$i_x = \sqrt{\frac{8430}{67,9}} = 11,1 \text{ cm} \qquad i_y = \sqrt{\frac{486}{67,9}} = 2,7 \text{ cm}.$$



Rys. 187.



Rys. 188.

115. Znaleźć rachunkowo główne momenty bezwładności I_x i I_y , oraz osi elipsy środkowej teownika NP. 8

Dzieląc przekrój na dwa prostokąty (por. rys. 188), otrzymamy odległość środka ciężkości przekroju od podstawy e ze wzoru:

$$e = \frac{9,53 \cdot 35,5 + 80 \cdot 9 \cdot 4,5}{9,53 + 80 \cdot 9} = 16,9 \text{ mm (porównaj przykład 36).}$$

Moment bezwładności względem podstawy wynosi $I_m = I_x + Fe_1^2$,
 a stąd: $I_x = I_m - Fe_1^2$, gdzie $e_1 = e - 9 = 16,9 - 9 = 7,9$ mm.

$$I_m = \frac{1}{8} (9,53^3 + 80,9^3) = 463072 \text{ mm}^4.$$

$$Fe_1^2 = (9,53 + 80,9) 7,9^2 = 74705 \text{ mm}^4.$$

zatem: $I_x = 463072 - 74705 = 388367 \text{ mm}^4 = 38,84 \text{ cm}^4$.

Ze względu na oś yy znajdziemy zatem:

$$I_y = \frac{1}{12} (9,80^3 + 53,9^3) = 387219 \text{ mm}^4 = 38,72 \text{ cm}^4.$$

Z powodu symetrii jedną osią główną jest yy , druga jest do niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości. Wartość połówek osi głównych elipsy środkowej znajdziemy ze wzorów:

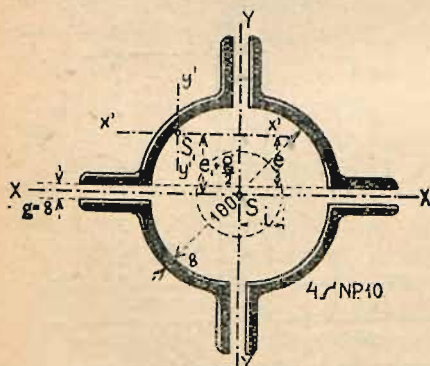
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$$

$$\text{zatem: } i_x = \sqrt{\frac{38,84}{11,97}} = 1,80 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{38,72}{11,97}} = 1,79 \text{ cm}.$$

Promienie główne elipsy bezwładności są tu prawie równe, elipsa zbliża się zatem do koła.



Rys. 189.

116. Obliczyć promień bezwładności przekroju słupa złożonego z 4 ćwierćkołowników NP 10 o grubości ścian 8 mm (rys. 189).

Zastosujemy tu wzór 151.

Powierzchnia jednego kształownika $F = 12,0 \text{ cm}^2$.

Moment bezwładności jednego kształownika względem osi ciężkości $x'x'$:

$$I_0 = 82,7 \text{ cm}^4.$$

Odległość środka ciężkości kształownika od osi xx całego przekroju:

$$e = 3,47 + 0,4 = 3,87 \text{ cm}.$$

Zatem moment bezwładności kształownika względem osi xx :

$$I_x = I_0 + Fe^2 = 82,7 + 12,0 \cdot 2,87^2 = 261,4 \text{ cm}^4;$$

a stąd promień bezwładności:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{261,4}{12}} = 4,67 \text{ cm}.$$

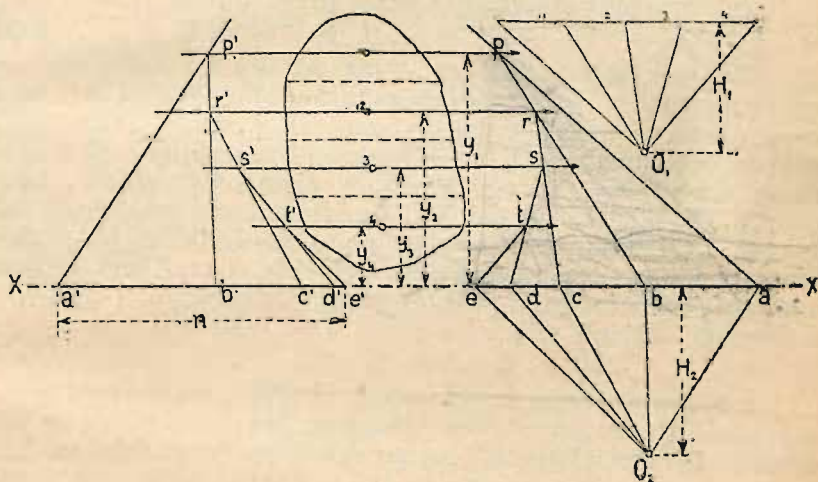
Ponieważ kształowniki są tak samo rozmieszczone względem obu osi, przeto $i_y = i_x$.

Elipsa bezwładności jest tu więc kołem bezwładności.

§ 41. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności.

1. Metoda Culmanna.

Dla przekroju nieregularnego najłatwiej jest znaleźć moment bezwładności wykreślnie, przyczem tok postępowania jest analogiczny do wykreślnego wyznaczenia momentu statycznego układu sił równoległych (§ 17). Dzielimy dany przekrój (rys. 190) na szereg bardzo wąskich pasków równoległych do danej osi bezwładności i wyznaczamy następnie ich wielkość i środki ciężkości. Paski powinny być tak wąskie, aby z wystarczającą dokładnością można było uważać je za prostokąty, trapezy lub trójkąty. Wtedy położenie osi ciężkości znaleźć można wedle § 22. Szerokie prostokąty należy podzielić na parę węższych. Jeśli odstępów środków cięż-



Bys. 190.

kości pasków od osi będą y_1, y_2, y_3, \dots , a ich powierzchnie F_1, F_2, F_3, \dots , to moment bezwładności pierwszego paska będzie:

$$I_1 = F_1 \cdot y_1^2 = (F_1 y_1) \cdot y_1 \quad . \quad . \quad . \quad 152$$

Iloczyn $m_1 = F_1 y_1$ przedstawia moment statyczny paska pierwszego względem osi. Jeśli będziemy uważać ten moment statyczny za siłę, to iloczyn $m_1 y_1 = (F_1 y_1) y_1 = F_1 y_1^2$ przedstawiać będzie zarazem moment statyczny siły $m_1 = F_1 y_1$ względem osi XX ; jest on jednak równy momentowi bezwładności I_1 paska względem tejże osi, gdyż:

$$m_1 y_1 = F_1 y_1 y_1 = F_1 y_1^2 = I_1.$$

Podobne wyniki otrzymamy i dla następnych pasków będzie więc:

$$I_2 = F_2 y_2^2 = m_2 y_2^2$$

$$I_3 = F_3 y_3^2 = m_3 y_3^2 \dots$$

Dla całego przekroju zaś (t. j. dla wszystkich pasków):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 + \dots$$

Zaczepmy w środkach ciężkości poszczególnych pasków siły proporcjonalne do ich powierzchni, a równoległe do XX (por. §. 17) i wykreślmy dla nich wielobok sznurowy *prst*, to wedle § 18 odcinki *ab*... pomnożone przez odległość biegunową H_1 przedstawiają momenty statyczne poszczególnych pasków względem XX:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= ab \cdot H_1 \\ m_2 &= bc \cdot H_1 \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 153$$

Zaś moment statyczny całego przekroju wynosi:

$$M = m_1 + m_2 + \dots = ab \cdot H_1 + bc \cdot H_1 + \dots = ae \cdot H_1 \dots \dots 153a$$

Te momenty uważamy teraz za siły i z kolei wyznaczamy momenty statyczne momentów statycznych $m_1, m_2 \dots$ w ten sam sposób; wynoszą one: $m_1 y_1, m_2 y_2 \dots$. Obieramy w tym celu biegun O_2 w odległości biegunowej H_2 i kreślimy dlań t. zw. „drugi wielobok sznurowy” *p'r's't'*. Długości *a'b'*..., odcięte od osi XX przedłużeniami odpowiednich boków wieloboku sznurowego, pomnożone przez H_2 przedstawiają momenty statyczne sił $m_1 = (ab \cdot H_1) \dots$, a tem samem momenty bezwładności pasków $F_1, F_2 \dots$, gdyż $a'b' \cdot H_2 = m_1 y_1 = (F_1 y_1) y_1 = F_1 y_1^2$, więc:

$$I_1 = a'b' \cdot H_1 \cdot H_2 \dots \dots \dots 154$$

Podobnie otrzymamy $I_2 = b'c' \cdot H_1 \cdot H_2 \dots$, zaś długość *a'e'* = n pomnożona przez obie długości biegunowe równa jest momentowi bezwładności całego przekroju względem osi XX:

$$I = n \cdot H_1 \cdot H_2 \dots \dots \dots 155$$

Ponieważ moment bezwładności wyraża się w jednostkach długości do czwartej potęgi, przeto jedna z wielkości $n H_1 H_2$ (z reguły n) musi być wyrażona w jednostkach powierzchni (cm^2), zaś dwie drugie ($H_1 \cdot H_2$) w jednostkach długości.

2. Metoda Mohra.

Dla powierzchni $F_1, F_2 \dots$ uważanych za siły, kreślimy tylko jeden wielobok sznurowy *prst*, tak samo jak przy metodzie Culmanna; wtedy

$$m_1 = F_1 y_1 = ab \cdot H_1$$

$$\text{zatem } I_1 = F_1 y_1^2 = ab \cdot H_1 y_1 = ab \cdot y_1 \cdot H_1.$$

Ale powierzchnia trójkąta $\triangle abp$ równa jest $\frac{1}{2} \cdot ab \cdot y_1$, a więc $ab \cdot y_1$ jest podwójną powierzchnią $\triangle abp$; stąd:

$$I_1 = 2 \times (\text{pow. } \triangle abp) \times H_1 \dots \dots \dots 156$$

To samo ważne jest oczywiście dla wszystkich pasków; więc moment bezwładności całego przekroju wynosi:

$$I = 2 H_1 \cdot \text{pow. } (aep) \dots \dots \dots 157$$

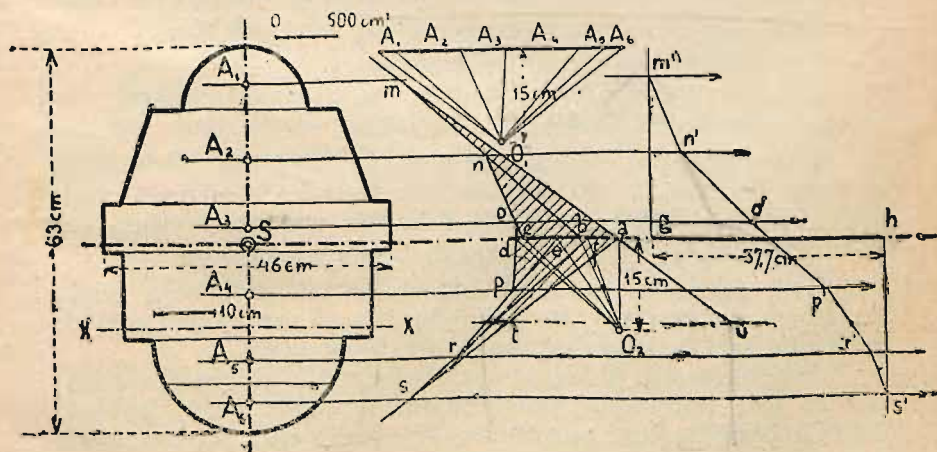
Moment bezwładności równa się zatem powierzchni ograniczonej osią, wielobokiem sznurowym i przedłużeniami boków skrajnych pomnożonej przez podwójną odległość biegunową.

Przykłady 117—118.

117. Znaleźć wykreślić moment bezwładności przekroju filara, podanego na rys. 191 ze względu na poziomą oś ciężkości.

Przedewszystkiem musimy znaleźć środek ciężkości przekroju. W tym celu dzielimy przekrój na szereg pasków poziomych, z których A_1 i A_4 są prostokątami, A_2 i A_5 trapezami (A_5 w przybliżeniu), zaś A_1 i A_6 odcinkami koła, których środek ciężkości znaleźć można albo z tablic, albo, w przybliżeniu, zamieniając je na trapezy. Rachunkowo wyznaczone powierzchnie tych pasków wynoszą:

$$\begin{array}{lll} F_1 = 157 \text{ cm}^2 & F_3 = 525 \text{ cm}^2 & F_5 = 368 \text{ cm}^2 \\ F_2 = 600 \text{ cm}^2 & F_4 = 198 \text{ cm}^2 & F_6 = 155 \text{ cm}^2 \end{array}$$



Rys. 191.

Powierzchnie te odnieśliśmy następnie w przyjętej skali powierzchni w wieloboku sił o wierzchołku O_1 , przyjąwszy odległość biegunową $H_1 = 15$ cm. Równolegle do boków tego wieloboku wykreśliśmy następnie wielobok sznurowy $mnoprsa$, którego skrajne boki ma i sa przedłużone do a wyznaczają poziomą oś ciężkości Sh .

Promienie tego wieloboku sznurowego (pierwszego) przedłużamy teraz do osi Sh , mianowicie mn do b , no do c , rp do e , sr do f i otrzymujemy w ten sposób odcinki ab , bc , cd , de , ef , fa . Przyjmując drugi biegun O_2 w odległości H_2 równej też 15 cm, kreślimy znów równolegle do promieni O_2a , O_2b ... drugi wielobok sznurowy $m'n'o'p'r's'$, którego skrajne boki $m'g$ i $s'h$ przedłużamy aż do poziomej osi ciężkości Sh , otrzymując ostatecznie odcinek $n = gh = 37,7$ cm.

Wedle Culmanna otrzymamy zatem:

$$I_0 = n \cdot H_1 \cdot H_2 = 37,7 \cdot 15 \cdot 15 = 8482,5 \text{ ok. } 8480 \text{ cm}^4.$$

Znajdziemy teraz moment bezwład. wedle Mohra. W tym celu należy pomnożyć powierzchnię $F = mnoprsa$ przez podwójną odległość biegunową H_1 . Powierzchnię tę można znaleźć, obliczając kolejno powierzchnie trójkątów mba , ncb itd.

Otrzymamy wtedy:

Trójkąt: Wysokość h : Podstawa b : Podwójna powierzchnia bh :

mba	26,0 cm	6,0 cm	156 cm ²
ncb	13,9 "	9,0 "	125 "
doc	1,9 "	1,0 "	2 "
pde	8,5 "	6,5 "	56 "
ref	19,2 "	5,0 "	96 "
sfa	26,0 "	4,8 "	125 "
			<hr/>
			$2 F = 560 \text{ cm}^2$

a zatem $I_0'' = 2 F H_1 = 560 \cdot 15 = 8400 \text{ cm}^4$.

Otrzymaliśmy zatem wynik różny o 80 cm⁴ od wyniku metody Culmanna, co jest błędem bardzo małym*). Najprawdopodobniejszą wartością I będzie wartość średnia:

$$I = \frac{1}{2} (I_0' + I_0'') = \frac{1}{2} (8480 + 8400) = 8440 \text{ cm}^4.$$

118. Obliczyć moment bezwładności przekroju filara podanego na rys. 191, ze względu na oś xx równoległą do osi ciężkości Sh , uwzględniając przykład 117.

Wedle Mohra moment bezwładności I_x względem osi xx równy jest podwójnej powierzchni $F' = mnoprslu$, pomnożonej przez odległość biegunową H_1 . Podwójna powierzchnia

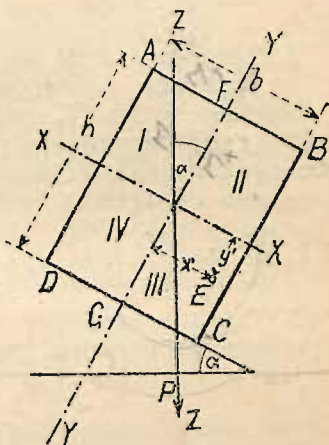
*) Błąd dopuszczalny wynosi 3%.

$F = mnoprsta$ wynosi 560 cm^2 (por. zadanie 117); podwójna powierzchnia trójkąta atu $F'' = 35,8 \cdot 13,6 = 488 \text{ cm}^2$, zatem $F' = F + F'' = A + A' = 560 + 488 = 1048 \text{ cm}^2$, a stąd:

$$I_x = 1048 \cdot 15 = 15720 \text{ cm}^4.$$

§ 42. Naprężenia w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że w płaszczyźnie, w której działają ciężary, leży jedna z osi głównych przekroju, t. j., że np. w rys. 172 lub 186 siły działają w linii yy . Często jednakowoż obciążenie działa w płaszczyźnie zamykającej z temi osiami pewien kąt. Weźmy np. pod uwagę drewniane płatwie dachowe (rys. 192). Zwykle ustawia się je w płaszczyźnie dachu, natomiast ciężar P pokrycia i śniegu działa pionowo, t. j. w linii ZZ , zawierającej z osią główną YY kąt np. α , (zaś z osią XX kąt $90 - \alpha$). Ciężar ten wywołuje w danym przekroju belki moment zgięcia M . Rozłożmy ten moment na dwa momenty składowe, działające w płaszczyznach osi głównych XX i YY , to wynoszą one:



Rys. 192.

$M_x = M \cos \alpha$ (w płaszczyźnie prostopadłej do XX).

$M_y = M \sin \alpha$ (w płaszczyźnie prostopadłej do YY).

Każdy z tych momentów składowych wywołuje odpowiednie naprężenia zginające. W dowolnym punkcie przekroju E powstaje naprężenie:

$$\left. \begin{aligned} \text{wskutek } M_x \quad \sigma_1 &= \frac{M \cos \alpha \cdot y'}{J_x} = \frac{M_x y'}{J_x} \\ \text{wskutek } M_y \quad \sigma_2 &= \frac{M \sin \alpha \cdot x'}{J_y} = \frac{M_y x'}{J_y} \end{aligned} \right\} \dots 158$$

Ponieważ zaś oba momenty, a zatem i oba naprężenia występują równocześnie, przeto naprężenie w punkcie E równa się sumie naprężeń $\sigma_1 + \sigma_2$:

$$\sigma = \frac{M_x y'}{J_x} + \frac{M_y x'}{J_y} \dots 159$$

Głównie chodzi nam oczywiście o naprężenia największe. Występują one we włóknach skrajnych, t. j. w punktach A i C.

Otrzymamy tam:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } M_x \quad \text{najw. } \sigma_1 = \frac{M_x \cdot \frac{1}{2} h}{J_x} = \frac{M_x}{W_x} \\ \text{dla } M_y \quad \text{najw. } \sigma_2 = \frac{M_y \cdot \frac{1}{2} h}{J_y} = \frac{M_y}{W_y} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 160$$

Sumaryczne naprężenia w A i C wynoszą więc:

$$\text{najw. } \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \dots \dots \dots 161$$

Jeżeli moment M jest dodatni, to M_x wywołuje ściskanie w częściach I i II, rozciąganie w III i IV; natomiast M_y ściskanie w I i IV, rozciąganie w II i III; zatem w częściach I i III naprężenia sumują się ze sobą, zaś w II i IV odejmują od siebie. Bezwzględnie zatem biorąc, otrzymamy największe naprężenia w punktach A i C; w A najw. $(+\sigma) =$

$$= + \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right), \text{ w B najw. } (-\sigma) = - \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right).$$

Naturalnie największe naprężenie nie może przekroczyć naprężenia dopuszczalnego, więc:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq k_g \dots \dots \dots 162$$

Belkę o potrzebnych wymiarach znajduje się tu za pomocą prób. W tym celu przyjmuje się przekrój na oko i wy-

znacza naprężenie z wzoru $\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$. Jeżeli obliczone

w ten sposób naprężenie jest większe od dopuszczalnego k_g , to przyjęliśmy belkę za słabą, jeżeli jest mniejsze, to może za silną. Wtedy bierze się dźwigar silniejszy (względnie słabszy) i ponawia obliczenie, aż naprężenie σ możliwie zbliży się do naprężenia dop. k_g , pozostając przecież mniejsze od niego.

Przykłady 119—120.

119. Płatew dachu żelaznego umieszczona jest prostopadle do połaci dachowej, nachylonej w spadku 1:3 do poziomemu. Odstęp więzarów wynosi 3,20 m, odległość płatwi w rzucie poziomym 2,60 m, obciążenie 130 kg/m² rzutu poziomego. Z powodu położenia między wysokimi sąsiednimi budynkami wiatru nie potrzeba uwzględniać.

Obciążenie płatwi wynosi:

$$Z = 3,2 \cdot 2,6 \cdot 130 = 1080 \text{ kg.}$$

CieŜar Z rozkłada się na Z' działający prostopadle i Z'' działający równolegle do połaci. Przy nachyleniu $1:3$, t. j. $\alpha = 18^\circ 26'$ otrzymamy:

$$Z' = Z \cos \alpha = 1080 \cos 18^\circ 26' = 1025 \text{ kg}$$

$$Z'' = Z \sin \alpha = 1080 \sin 18^\circ 26' = 341 \text{ kg}$$

a stąd:

$$M_x = \frac{1}{8} Z' l = \frac{1}{8} 1025 \cdot 320 = 41000 \text{ kgcm}$$

$$M_y = \frac{1}{8} Z'' l = \frac{1}{8} 341 \cdot 320 = 13640 \text{ kgcm}$$

Przyjmijmy $INP. 18$ ($W_x = 161 \text{ cm}^3$, $W_y = 19,8 \text{ cm}^3$), wtedy:

$$\sigma = \frac{41000}{161} + \frac{13640}{19,8} = 255 + 689 = 944 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenia są bardzo małe, przyjmijmy zatem przekrój mniejszy, np. $INP. 17$ ($W_x = 137 \text{ cm}^3$, $W_y = 17,1 \text{ cm}^3$). Wtedy:

$$\sigma = \frac{41000}{137} + \frac{13640}{17,1} = 300 + 795 = 1095 \text{ kg/cm}^2.$$

120. Obliczyć dla zadania 119 płatew drewnianą.

Przyjmując przekrój $14/16 \text{ cm}$, otrzymamy naprężenie:

$$\sigma = \frac{41000}{597,3} + \frac{13640}{523} = 68,7 + 2,61 = 71,3 \text{ kg/cm}^2,$$

zatem mniejsze od dopuszczalnego. Przekroju mniejszego nie dajemy, gdyż otrzymalibyśmy naprężenia zbyt wielkie.

§ 43. Ugięcie belki.

Wyżej (§ 30) zaznaczyliśmy, że każda belka naraŜona na działanie momentu zginającego ugina się. Włókna rozciągane bowiem wydłużają się, ściskane skracają, a belka przyjmuje wskutek tego kształt krzywy (rys. 141 i 116). Ugięcie to będzie oczywiście tem większe, im większa jest długość belki l i im większe obciążenie p , natomiast tem mniejsze, im belka jest silniejsza, t. j. im ma większy moment bezwładności I . Wreszcie ugięcie będzie większe, gdy materiał bardziej się wydłuża, t. j. gdy ma większy współczynnik wydłużenia czyli mniejszy współczynnik sprężystości E . Największe ugięcie nazywamy strzałką ugięcia belki. Znając wielkość i rodzaj obciążenia belki, możemy wyznaczyć jej ugięcie; nie podajemy tu jednak samego obliczenia, ale tylko wzory na największe ugięcia dla najczęściej przychodzących rodzajów obciążenia.

Przepisy budowlane podają zwykle granicę wielkości strzałki ugięcia. Wedle przepisów polskich nie powinna ona przekraczać:

dla belek żelaznych $f \leq \frac{1}{500} l$

„ „ drewnianych pojedynczych $f \leq \frac{1}{400} l$

„ „ „ złożonych . $f \leq \frac{1}{300} l$

gdzie l jest rozpiętością belki.

W normalnych wypadkach strzałka ugięcia pozostaje poniżej tej granicy; jednakowoż przy belkach długich, a stosunkowo słabo obciążonych należy wzór ten uwzględnić, a dźwigar obliczać na zginanie i ugięcie:

Strzałka ugięcia wynosi:

1. Dla belki wolno podpartej, obciążonej ciężarem całkowitym jednostajnie rozłożonym:	$f = \frac{5 pl^4}{384 EI} = \frac{5 Pl^3}{384 EI}$
2. Dla belki wolno podpartej, obciążonej ciężarem rozłożonym wedle trójkąta symetrycznego o największej rzędnej w środku (fig. 123):	$f = \frac{Pl^3}{60 EI}$
3. Dla belki wolno podpartej, obciążonej ciężarem rozłożonym wedle trójkąta o największej rzędnej na podporze (fig. 125):	$f = 0,013 \frac{Pl^3}{EI}$
4. Dla belki wolno podpartej obciążonej ciężarem skupionym umieszczonym w środku rozpiętości:	$f = \frac{Pl^3}{48 EI}$
5. Dla belki jednym końcem wmurowanej, obciążonej ciężarem całkowitym, jednostajnie rozłożonym:	$f = \frac{pl^4}{8 EI} = \frac{Pl^3}{8 EI}$
6. Dla belki jednym końcem wmurowanej, obciążonej ciężarem skupionym P na końcu (t. j. w odległości l od miejsca wmurowania):	$f = \frac{Pl^3}{3 EI}$
7. Dla belki jednym końcem wmurowanej, obciążonej ciężarem rozłożonym wedle trójkąta o najw. rzędnej w miejscu wmurowania (fig. 126):	$f = \frac{Pl^3}{15 EI}$

Dla wypadków 1, 2, 4 największe ugięcie występuje w środku rozpiętości belki; dla wypadku 3 w odległości $x = 0,481 l$ tej od podpory, na której rzędna obciążenia jest największa; dla wypadków 5, 6, 7 na końcu wystającym belki (wspornika)

Przykłady 121—122.

121. Obliczyć wymiary belki żelaznej wolno podpartej o długości $l = 8,00$ m, obciążonej ciężarem jednostajnie rozłożonym $g = 200$ kg/mb, jeżeli ugięcie nie może być większe niż $\frac{1}{500}$ długości.

Na zginanie otrzymamy:

$$G = 200 \cdot 8,0 = 1600 \text{ kg.}$$

$$M = \frac{1}{8} Gl = \frac{1}{8} \cdot 1600 \cdot 8,00 = 1600 \text{ kgm}$$

$$W_p = \frac{160000}{1200} = 133,3 \text{ cm}^3$$

Moglibyśmy zatem użyć na zginanie dźwigara NP.17 ($W = 137,0 \text{ cm}^3$).

Obliczmy jednak strzałkę ugięcia:

$$f = \frac{5}{384} \frac{gl^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{Gl^3}{EI} = \frac{5}{384} \frac{1600 \cdot 800^3}{2150000 \cdot 1166} = 4,26 \text{ cm.}$$

Strzałka ugięcia jest większa od dopuszczalnej, która wynosi:

$$f' = \frac{1}{500} l = \frac{1}{500} 800 = 1,6 \text{ cm.}$$

Ze względu na ugięcie musimy zastosować dźwigar NP 23 o momencie bezwładności:

$$I = 3607 \text{ cm}^4.$$

Ugięcie będzie:

$$f = \frac{5}{384} \frac{Gl^3}{EI} = \frac{5}{384} \frac{1600 \cdot 300^3}{2150000 \cdot 3607} = 1,38 \text{ cm.}$$

122. Jak wielkie będzie ugięcie dźwigara NP 23 w przykładzie poprzednim, jeżeli ciężar $G = 1600$ kg będzie działał jako skupiony w środku belki?

Wedle wzoru 134 otrzymamy wtedy:

$$f = \frac{Gl^3}{48 EI} = \frac{1600 \cdot 800^3}{48 \cdot 2150000 \cdot 3607} = 2,2 \text{ cm.}$$

Widzimy więc, że w tym wypadku ugięcie będzie znacznie większe i przekroczyłoby granicę dopuszczalną.