INŻ. DR STEFAN BRYŁA

PODRĘCZNIK STATYKI BUDOWLI

DLA ŚREDNICH SZKÓŁ TECHNICZNYCH

ZE 169 PRZYKŁADAMI I 307 RYSUNKAMI W TEKŚCIE
ORAZ 31 TABLICAMI POMOCNICZEMI

POLECONY DO UŻYTKU SZKOLNEGO ROZPORZĄDZENIEM
MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
Z DNIA 22-go STYCZNIA 1920 ROKU (NR. S. III. 5524/20)

WYDANIE DRUGIE ZMIENIONE I ROZSZERZONE

LWÓW i WARSZAWA — 1925
NAKŁADEM KSIĘGARNI POLSKIEJ BERNARDA POŁONIECKIEGO

Czcionkami drukarni Antoniego Gojawiczyńskiego Lwów ul. Kopernika l. 20.

SPIS RZECZY

I. PODSTAWY STATYKI BUDOWLI

A. Wstęp

B. Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie

C. Moment statyczny

C. Wytrzymałość na ścinanie

D. Wytrzymałość na zginanie

E. Wytrzymałość złożona

F. Wytrzymałość na wyboczenie

III. BELKI KRATOWE I WIĘZARY DACHOWE

IV. MURY i SKLEPIENIA

A. Mury wolno stojące

B. Sklepienia

C. Budowle ziemne

V. ZAKOŃCZENIE

VI. TABLICE

27/11 + 40.–

chleby jajka mleko sacharyna marmolada ocet 100.
chleb marmolada sól 20.-
chleb 25.-
owoce margaryna 16.50
chleb 20.-
jajka chleb 25.-
jajka chleb 25.-

Kura 80–
jajka 56–
[illegible] 30–
Krochmal
chleby 25.–
[illegible]
człowiek 20–
cukier 15
mięso 90
chleb 25

ERRATA

Strona	wiersz	od	zamiast:	ma być
28	15	góry	rys. 58	(rys. 58)
29	na rys 59 prawa skrajna siła		P_2	P_1
60	1	dołu	af	$a'f'$
61	9	"	$_1P$	P_1
69	17	góry	cb_1	$e''b$
69	18	"	ac	ae''
69	1	dołu	$P=1$	$P=ap$
71	8	góry	$\frac{pa\,(2\,l-a)}{2}$	$\frac{pa\,(2\,l-a)}{2\,l}$
71	8	"	$\frac{pa^2\,(2\,l-a)}{8\,l}$	$\frac{pa^2\,(2\,l-a)^2}{8\,l^2}$
79	13	"	fg	eb
79	14	"	gf	be
79	5	dołu	mO	$m0$
80	2	góry	b_0b'	b_0b''
80	3	"	$ab'b''c''c'd'd''f'f''e''$	$a'b'b''c''c'd'd''e'e''f''$
80	10	"	gf	be
80	16	"	(np. $b_1g_1=bg$)	(np. $d_1h_1=dh$)
80	17	"	(np. $d_1h_1=dh$)	(np. $b_1g_1=bg$)
80	18	"	af	$a'f'$
80	18	"	dodatnie	ujemne
80	18	"	ujemne	dodatnie
80	17	dołu	ΣPO_1	$\Sigma P-O_1$
80	5	"	$P_1=pl$	$P_1=pl_1$
80	2	"	ae	ac
81	3	góry	30	3 m
81	10	"	$\left(1/_2\,\frac{l_1}{2\,l}+1\right)$	$\left(\frac{l_1}{2\,l}+1\right)$
82	11	dołu	2000 (100 + 150)	— 2000 (100 + 150)
83	5	"	ujemnego	dodatniego
83	1	"	M	$-M$

mięso 100
Kura 10
światło
[illegible]
cielęcina 50

Strona	wiersz	od	zamiast:	ma być:
92	5	dołu	$-{}^1/_2 P_2 \frac{b}{2}$	$-{}^1/_2 P_2 \frac{b}{4}$
92	4	„	$-{}^1/_2 bp \frac{b}{2}$	$-{}^1/_2 bp \frac{b}{4}$
92	3	„	$\frac{a}{3}(a + {}^3/_2 b)p$	$\frac{p}{24}(8a^2 + 12ab + 3b^2)$
93	17	góry	Pa	P_a
93	17	„	$p\frac{a^2}{2}$	$p\frac{a^2}{2l}$
93	11	dołu	$-0 \cdot 128\, Pl$	$= 0 \cdot 128\, Pl$
94	2	góry	${}^1/_3 \frac{Px^2}{l^2}$	${}^1/_3 \frac{Px^3}{l^2}$
103	5	dołu	ściskanie	ścinanie
103	4	„	sworzni	sworznie
105	21	góry	T	/
105	22	„	//	T
105	23	„	T	//
105	24	„	//	T
105	25	„	T	//
105	26	„	//	T
105	30	„	Piaskowioc	Piaskowiec
109	14	dołu skreślić	Tabliczka naprężeń dopuszczalnych podana jest osobno.	
113	oznaczenie strony		131	113
117	12	góry	uległy	uległby
117	16	„	(rys. 159)	(rys. 155)
118	14	„	$c = 2d$	$e = 2d$
132	5	„	$\sum_{a}^{c'}$	$\sum_{e}^{e'} f'y'$
173	17	dołu	p. S w punktach	punktu S od punktu
201	11	„	AC	AF
217	8	„	$^1/_5$	1,5
219	1	„	suche smarowane	smarowane
224	13	„	Przykład 150	Przykłady 150 i 151.
256	17	dołu	$90^0-(\varphi+\varepsilon)+\nu+90^0+$ $+(\varphi+\varepsilon)=180^0$	$90^0-(\varphi+\varepsilon)+\nu+90^0-$ $-(\varphi-\varepsilon)=180^0$
259	5	góry	acd	aed
275	7	„	${}^1/_{24}(b^3-3bb_1+2b_1^3)\sigma_g$	$\frac{b^4-b^3b_1-5b^2b_1^2-b_1b^3+2b_1^4}{24(b+b_1)}$

I. Podstawy statyki budowli.

A. Wstęp.

§ 1. Pojęcia wstępne.

Budowlę inżynierską, lub jej część stanowiącą dla siebie pewną całość konstrukcyjną, a wykonaną z pewnych materjałów połączonych w odpowiedni sposób ze sobą, nazywamy konstrukcją, czyli zespołem, zeskładem. Taką konstrukcją jest więc np. most żelazny, dach drewniany, mur ceglany i t. d. Zadaniem jej jest w pierwszym rzędzie przenieść na grunt ciężary, siły, jakie na nią działają i to pewnie, bezpiecznie, tj. tak, aby stałość budowli nie była narażona na szwank, aby siły te nie zniweczyły wytrzymałości, mocy konstrukcji. Wskutek tych t. zw. sił zewnętrznych (obciążeń) powstają w budowli siły wewnętrzne, które muszą równoważyć siły zewnętrzne.

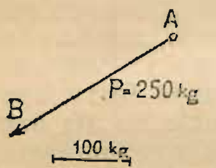
Naukę badającą i określającą warunki konieczne, aby utrzymała się ta równowaga sił zewnętrznych i wewnętrznych, oraz pozwalającą obliczyć wymiary konstrukcji nazywamy statyką budowli. Obliczenia te wykonuje się sposobem rachunkowym lub wykreślnym, zależnie od tego, czy jeden czy drugi jest w danym wypadku wygodniejszy; bardzo często używa się dla kontroli obu metod równocześnie. Statykę, traktowaną sposobem wykreślnym, nazywamy statyką wykreślną.

§ 2. Pojęcie siły.

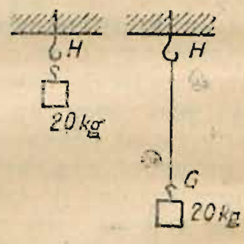
Przyczynę ruchu (lub spoczynku) ciał nazywamy siłą. Istnienie sił poznajemy po ich wpływie na dane ciała. Istnieje więc np. siła ludzkich muskułów, siła ciężkości, siła pary, elektryczności, wiatru i t. d.

Dla określenia wielkości siły należy porównać ją z inną znaną powszechnie siłą, czyli z t. zw. **jednostką siły**. Za taką jednostkę przyjmuje się zwykle przy mniejszych siłach 1 kg, przy większych 1 t (= 1000 kg). Np. siła pionowa $P = 250$ kg oznacza, że siła P działa tak samo, jak działałby ciężar 250 kg, zawieszony np. na sznurze.

Aby siłę dokładnie oznaczyć, trzeba znać nie tylko jej 1) **wielkość**, ale także jej 2) **punkt zaczepienia**, t. j. punkt, w którym siła działa na ciało, i 3) **kierunek** tej siły. W statyce wykreślnej oznacza się siły odcinkami prostych o odpowiedniej długości i kierunku, zachowując pewien stosunek długości odcinka do wielkości siły. Np. niech 1 cm przedstawia 100 kg, to dla oznaczenia siły 250 kg użyjemy prostej o długości 2,5 cm. Kierunek, w którym siła działa, czyli t. zw. zwrot (tok) siły, znaczy się strzałką, skierowaną w tymże kierunku (rys. 1). Siłę nazywamy albo jedną literą (np. P, P_1, P_2, O, G i t. d.) albo też dwiema (np. AB), których porządek oznacza zarazem zwrot siły. Np. AB oznacza siłę



Rys. 1.



Rys. 2 i 3.

działającą A do B, natomiast BA oznaczałoby siłę działającą od B do A. Punkt zaczepienia leżeć musi oczywiście na kierunku siły; można go jednak dowolnie wzdłuż niego przesuwać.

Poznać to możemy z rys 2 i 3. Ciężar 20 kg zawieszony tuż przy haku H ciągnie go z tą samą siłą, co takiż ciężar zawieszony na sznurku długim HG (rys. 3), a więc zaczepiający dużo niżej.

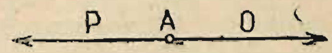
Używając słowa „kierunek siły" mamy zwykle na myśli „zwrot siły".

§ 3. Równowaga sił.

Jeśli w punkcie A, w którym działa siła P, zaczepimy siłę równą, a wprost przeciwną tej sile, np. siłę O (rys. 4), to ruch punktu A nie nastąpi, a stan taki nazywamy **równowagą sił**.

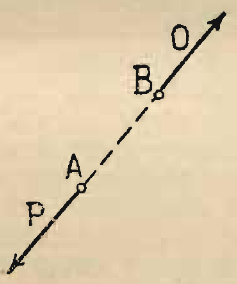
W myśl § 2 równowaga nastąpi też, gdy równe, a wprost przeciwne siły działają nie w tym samym punkcie, ale w dwu różnych punktach, leżących jednak na kierunku obu sił. Siłę O (rys. 5) można bowiem, przesunąć do punktu A i zrównoważyć ją z siłą P równą, a wprost przeciwną.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda konstrukcja budowlana musi być w równowadze. Wynika stąd, że siłom na nią dzia-

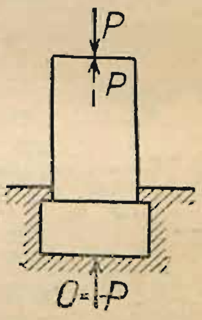


Rys. 4.

łającym (np. wiatr, śnieg, ciężar pokrycia dla dachów, ciężar ludzi, wozów dla mostów i t. d.) przeciwstawić musi sama siły inne w sumie swej równe, a wprost przeciwne obciążeniu, czyli równoważące je. Siły te nazywamy oddziaływaniami, odporami lub reakcjami. Np. słup (rys. 6) obciążony u góry siłą P wywołuje u dołu reakcję gruntu $O = P$. Również wewnątrz samego ciała powstaje przeciwdziałanie równe i przeciwne sile P.



Rys. 5.



Rys. 6.

§ 4. Wypadkowa sił.

Na konstrukcję budowlaną działa zwykle nie jedna siła, ale równocześnie większa ilość sił zewnętrznych i to często działających na różne punkty. Zamiast uwzględnić je wszystkie po kolei w obliczeniu, staramy się dla uproszczenia roboty znaleźć taką jedną siłę, któraby zastąpiła wszystkie siły działające czyli złożyć je w jedną siłę, wywierającą ten sam wpływ na ciało, co wszystkie siły razem wzięte. Taką siłę nazywamy wypadkową, zaś siły, z których ona powstaje, składowemi.

Z drugiej strony konieczną nieraz rzeczą jest zastąpić pewną daną siłę siłami innemi, które w swem działaniu są jej równowarte czyli rozłożyć ją na składowe.

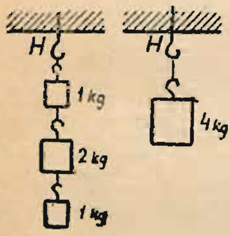
Przy rozwiązywaniu obu tych zadań trzeba wziąć pod uwagę czy siły zaczepiają w jednym i tym samym punkcie czy też w różnych punktach, oraz czy działają w jednym i tym samym kierunku czy też w różnych kierunkach. Z kolei zajmiemy się więc składaniem i rozkładaniem sił dla poszczególnych wypadków.

B. Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie.

§ 5. Siły działające w jednej linji.

Wypadkowa R dwu lub więcej sił P_1, P_2, P_3... działających w jednej linji w tym samym kierunku równa się sumie wszystkich sił:

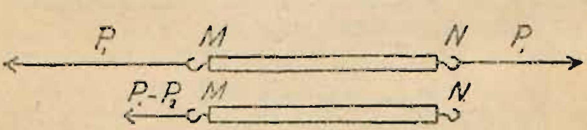
$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots \ldots \quad 1$$



Rys. 7 i 8.

Por. rys. 7 i 8 Hak H ciągnięty jest tą samą siłą $R = 4$ kg bez względu na to, czy zaczepione są na nim trzy ciężary o wielkości łącznej $R = P_1 + P_2 + P_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ kg, czy też jeden ciężar o wielkości 4 kg.

Jeśli siły działają w kierunkach przeciwnych, to należy je odjąć od siebie, czyli „dodać algebraicznie"; siłom bowiem działającym w pewnym kierunku dajemy znak $+$, siłom w kierunku wprost przeciwnym znak $-$. Jeśli więc siła AB (rys. 1) ma znak $+$, to siła BA otrzyma znak $-$.



Rys. 9 i 10.

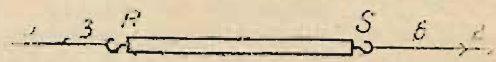
Np. pręt MN, na który działają siły $P_1 = 30$ kg i $P_2 = 20$ kg ciągnięty jest w kierunku siły większej, t. j. P_1 z siłą $R = P_1 - P_2 = 30 - 20 = 10$ kg (rys. 9 i 10).

Przy większej ilości sił zasada składania pozostaje ta sama. Np. dla rys. 11 wypadkową jest $R = (P_1 + P_2) - (P_3 + P_4)$. Wynika stąd reguła:

W y p a d k o w a s i ł, d z i a ł a j ą c y c h w j e d n e j l i n j i, r ó w n a s i ę s u m i e a l g e b r a i c z n e j s i ł s k ł a d o w y c h.

Rys. 11.

Jeśli suma sił, działających w jednym kierunku, równa się sumie sił, działających w kierunku przeciwnym, to wypadkowa $R = 0$, czyli następuje równowaga. Np. pręt RS (rys.



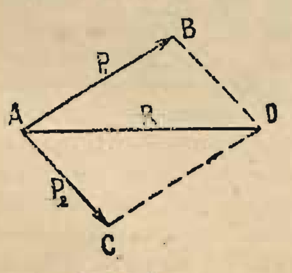
Rys. 12.

12) nie poruszy się wcale; albowiem w prawo ciągnie go siła $2 + 6 = 8$ kg, w lewo zaś $3 + 5 = 8$ kg, a wypadkowa $R = (2 + 6) - (3 + 5) = 8 - 8 = 0$.

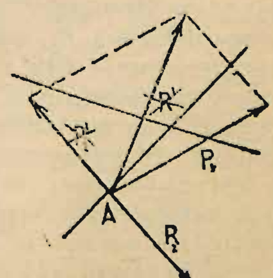
§ 6. Dwie siły działające na jeden punkt w różnych kierunkach.

Jeśli na dany punkt A (rys. 13) działają dwie siły o kierunkach, tworzących ze sobą pewien kąt, np. $P_1 = AB$ oraz $P_2 = AC$, to wypadkową znajdziemy, kreśląc z punktu B równoległą do siły P_2 z C zaś równoległą do P_1. Przekątnia AD otrzymanego w ten sposób równoległoboku daje kierunek i wielkość wypadkowej R. Niech np. dwu ludzi stara się przeciągnąć sznurami jakiś ciężar A, jeden z nich w kierunku AB z siłą P_1, drugi w kierunku AC z siłą P_2, to ciężar znajdzie się ostatecznie w punkcie D. Równoległobok $ABCD$ nazywamy r ó w n o l e g ł o b o k i e m s i ł.

Aby uniknąć pomyłek przy wyznaczaniu położenia siły wypadkowej R, należy przyjąć w wykresie o b i e siły działające o d w ę z ł a, t. j. jak na rys. 13., a nie jak na rys. 14.



Rys. 13.

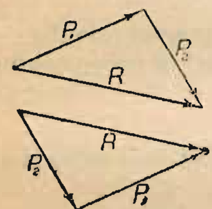


Rys. 14.

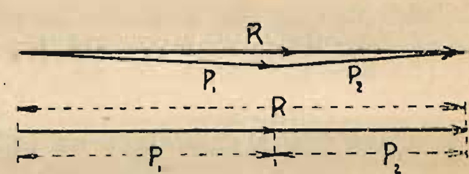
Wtedy dla sił odniesionych w ten sposób od punktu A, kierunek wypadkowej będzie też od A, a zatem ku przeciwległemu wierzchołkowi D równoległoboku sił. Na rys. 14 odniesiono jedną siłę od siły A, drugą do A, a więc i wypadkowa R' została znaleziona błędnie.

Zamiast kreślić cały równoległobok $ABCD$, wystarczy wykreślić trójkąt ABD lub ACD; trzeci bok tego trójkąta AD daje wprost kierunek i wielkość wypadkowej. Trójkąt ten nazywamy trójkątem sił (rys. 15 i 16).

Ponieważ do punktu D dojść można albo drogą ABD albo ACD, przeto przy składaniu sił obojętny jest porządek, w jakim siły składamy, podobnie przy sumowaniu liczb obojętny jest porządek dodajników.



Rys. 15 i 16.



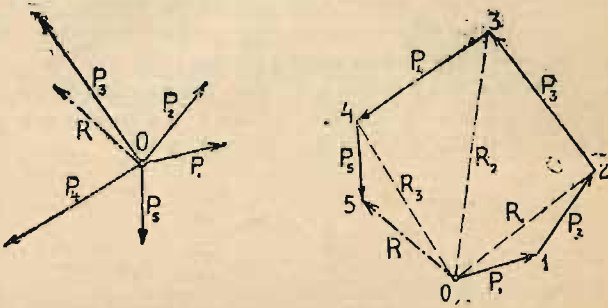
Rys. 17 i 18.

Uwaga: Dla sił, zamykających sobą bardzo ostry kąt, długość wypadkowej jest prawie równa sumie długości składowych (por. rys. 17), a ze zmniejszaniem się tego kąta aż do zera (t. j. dla sił idących w jednym i tym samym kierunku) równoległobok, względnie trójkąt sił przechodzi w jedną linję o długości równej sumie obu składowych, a więc identyczną z omówioną w § 5 (rys. 18).

§ 7. Dowolna ilość sił działających na jeden punkt w różnych kierunkach.

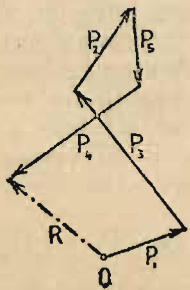
Jeśli w danym punkcie działa większa ilość sił, to postąpimy w sposób następujący (rys. 19 i 20).

Składamy dowolne dwie siły np. P_1 i P_2 wedle rys. 15 (§ 6) w wypadkową R_1, następnie R_1 i P_3 w wypadkową R_2, która zastępuje więc siły P_1, P_2 i P_3; idąc dalej w ten sposób dochodzimy do ostatniej siły P_5, która złożona z wypadkową R_3 daje siłę R jako wypadkową wszystkich sił $P_1 ... P_5$. Z rys. 20 widać jednak, że rysowanie wypadkowych częściowych R_1, R_2, R_3, jest zbyteczne; wystarczy bowiem poczynając od punktu A odnieść wszystkie siły $P_1 ... P_5$ w odpowiednich kierunkach. Otrzymany w ten sposób ciąg odcinków 0123450 nazywamy ciągiem sił lub wielobokiem sił, a prosta łącząca punkt początkowy 0 tego ciągu z punktem końcowym 5 oznaczona linją kreska—kropka —·—·—·—·t. zw. zamykająca, daje wielkość wypadkowej o zwrocie (strzałce) od 0 do 5 (czyli 05). Podobnie, jak przy składaniu dwu sił, obojętny jest i tu porządek, w jakim składamy większą ilość

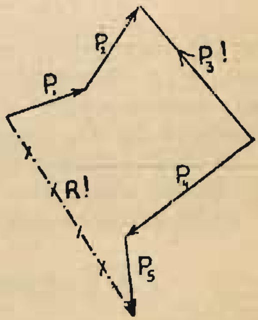


Rys. 19 i 20.

sił; należy tylko pamiętać, aby siły odnosić we właściwym kierunku, t. j. odpowiednio do strzałki. Np. na rys. 21 otrzymaliśmy wypadkową o wielkości dobrej mimo zmienionego



Rys. 21.



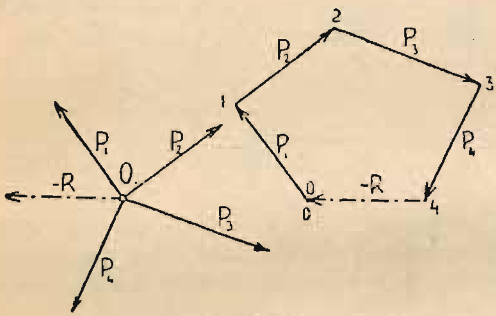
Rys. 22.

porządku, natomiast na rys. 22, wypadkowa ma fałszywą wielkość i kierunek, gdyż P_3 zostało odmierzone w kierunku przeciwnym.

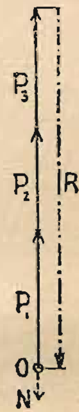
§ 8. Równowaga kilku sił w jednym punkcie.

Ponieważ wypadkowa R działa tak samo, jak wszystkie jej składowe razem wzięte, przeto dla zrównoważenia tych składowych wystarczy zaczepić w punkcie O (rys. 23) siłę równą, a wręcz przeciwną wypadkowej. Jeśli zatem wypadkowa ma wielkość R, a kierunek 04 (od 0 do 4), to siła równoważąca musi mieć wielkość $-R$, a kierunek 4 0 (od 4 do 0). Jeśli tę siłę 4 0 włączymy teraz w ciąg sił, to przy uwzględnieniu stałego kierunku strzałek będzie nim 012340, t. j. punkt początkowy zejdzie się z końcowym. Wielobok (ciąg) taki nazywamy zamkniętym.

Dla równowagi kilku sił przechodzących przez jeden punkt musi zamknąć się zatem odpowiedni ciąg sił.



Rys. 23.



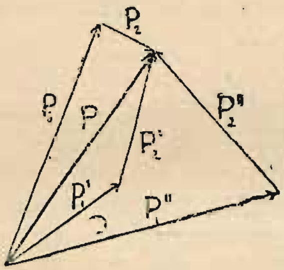
Rys. 24.

Jeśli w tej samej linji prostej działa parę sił, to równowaga nastąpi, gdy zaczepimy siłę $-R$ równą sumie algebraicznej sił działających, ale o znaku przeciwnym. Por. rys. 24, odsunięto tu dla lepszego uwydatnienia wykres siły R od wykresu sił P_1, P_2, P_3; w rzeczywistości leżą one w jednej prostej, mianowicie siła R działa w kierunku NO zaznaczonym linją kreskowaną.

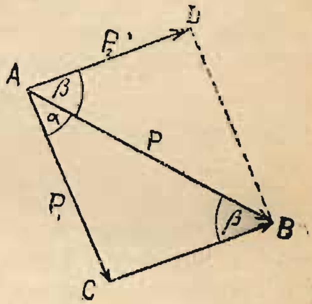
§ 9. Rozkładanie sił.

Jeśli daną siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe, to zadanie to nie jest ściśle oznaczone. Czy weźmiemy bowiem pod uwagę siły P_1 i P_2, czy P_1' i P_2', czy wreszcie P_1'' i P_2'' (rys. 25), to każda z tych grup równowarta jest z daną siłą P. Dopiero, gdy znane nam będą albo a) kierunki obu sił, albo b) wielkość i kierunek jednej z nich, albo c) wielkość obu sił, możemy zadanie rozwiązać. Wtedy mamy do czynienia z zagadnieniem wręcz przeciwnem niż w § 6. Sprowadza się ono wogóle do zbudowania trójkąta (trójkąta sił) z danych trzech części składowych, mianowicie: w wypadku a) z jednego boku, t. j. wielkości siły P i z kierunków obu pozostałych boków, (sił składowych), w wypadku b) z dwu boków i ich kierunków czyli kąta między nimi zawartego; w wypadku c) zachodzącym bardzo rzadko w praktyce, z trzech boków.

Zwykle dane są kierunki obu składowych, t. j kąty α i β, jakie te składowe zawierają z siłą P, którą mamy rozłożyć. Wtedy na sile $P=AB$ (rys. 26) kreślimy trójkąt o bokach AC i CB równoległych do danych kierunków; długości AC i CB otrzymane w ten sposób dają nam wprost wielkość sił P_1 i P_2.



Rys. 25.



Rys. 26.

Uwaga. Siła P_2 o wielkości CB działa nie w punkcie C, ale w A, tak, że CB daje tylko jej wielkość i kierunek, ale nie położenie. Aby więc uniknąć pomyłek, najlepiej trójkąt sił zrobić osobno, a od punktu A wykreślić siły składowe P_1 i P_2 równe i równoległe do sił znalezionych z tego osobno nakreślonego trójkąta sił. Również przez narysowanie równoległoboku sił (a nie trójkąta) unika się tej pomyłki.

§ 10. Rachunkowe składanie i rozkładanie sił.

Weźmy pod uwagę siłę P i przyjmijmy dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych $x\ y$ (rys. 27). Jeżeli siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe równoległe do tych osi, to z trójkąta ABC otrzymamy na wielkość obu składowych wzór:

$$\left.\begin{array}{l} P' = P \cos \alpha \\ P'' = P \sin \alpha \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

Wielkości P' i P'' są zarazem rzutami siły P na osi spółrzędnych.

Wzory 2 posłużą również do wyznaczenia wypadkowej układu sił P_1, P_2... (por. rys. 28). Przyjmijmy znów dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych $x\ y$ i odnosząc siły P_1, P_2... jedna po drugiej wedle § 7 odrzućmy je kolejno na obie osi. Wtedy rzuty poszczególnych sił (t. j. składowe sił równoległe do osi) wynoszą:

$$P'_1 = a\,b' = P_1 \cos\alpha_1 \qquad P'_2 = b'\,c' = P_2 \cos\alpha_2 \;\ldots$$

$$P''_1 = a\,b'' = P_1 \sin\alpha_1 \qquad P''_2 = b''c'' = P_2 \sin\alpha_2 \;\ldots$$

Algebraiczne sumy rzutów poszczególnych sił, są rzutami wypadkowej na odpowiednie osi. Wynoszą one:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots = P_1' + P'_2 + \ldots \\ R_y &= P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots = P_1'' + P''_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \;\ldots\; 3$$

Prawdziwą wielkość wypadkowej R znajdziemy składając jej rzuty R_x, R_y w jedną siłę wypadkową. Zamykają one z sobą kąt prosty; wypadkową znajdziemy zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa;

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \;\ldots\ldots\ldots\; 4$$

Kierunek jej określa się równaniem:

$$\cos\alpha_r = \frac{R_y}{R} \;\ldots\ldots\ldots\; 5$$

Przy obliczaniu R_x i R_y z wzoru 3 trzeba pamiętać, że zależnie od wielkości kąta α mogą poszczególne wyrazy przyjmować wartości ujemne i zerowe. Np. dla rys. 28 mamy:

$$R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 - P_4 \cos\alpha_4$$

$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 - P_3 \sin\alpha_3 - P_4 \sin\alpha_4$$

Jeśli zachodzi równowaga sił, to muszą się spełnić warunki: $R_x = 0 \qquad R_y = 0 \;\ldots\ldots\; 6$

tj. Dla równowagi sił przechodzących przez jeden punkt musi suma ich rzutów na dwie dowolne osi spółrzędnych równać się zeru.

Jeżeli np. siły $P_1 \ldots P_5$ rzucone na dwie dowolne osi xx i $x'x'$ (rys. 29), dadzą dla obu tych osi sumę rzutów równą zeru, to pozostają one między sobą w równowadze.

Najwygodniej jest przyjmować dwie osie prostopadłe do siebie; zazwyczaj przyjmujemy też jedną z nich pionową, drugą poziomą. Wtedy zasada powyższa brzmi;

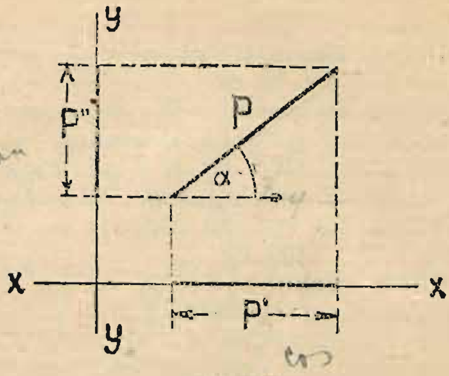
Dla równowagi sił przechodzących przez jeden punkt suma składowych poziomych sił, oraz suma składowych pionowych muszą być równe zeru, dla każdej osi z osobna.

Czasem zamiast rzutować, wygodniej jest znaleźć wielkość wypadkowej lub składowej na podstawie wykresu, uwzględniając prawa rozwiązywania trójkąta.

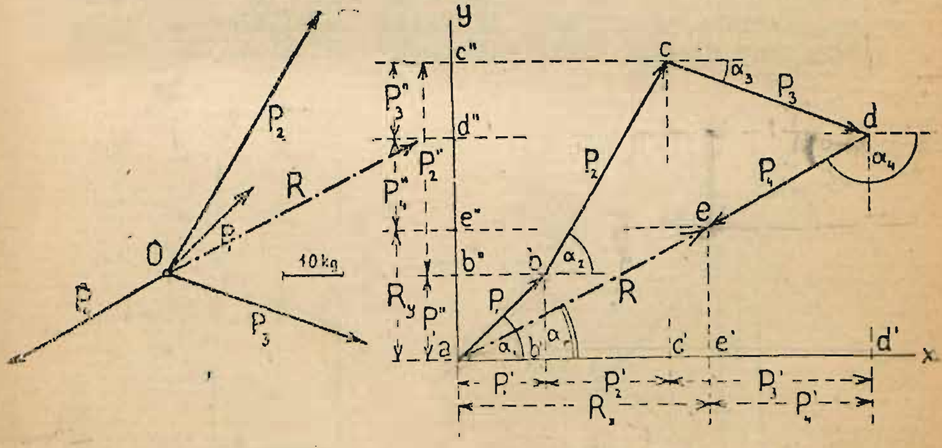
Dla dwu sił otrzymamy wtedy:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2 P_1 P_2 \cos\alpha} \;\ldots\; 4a$$

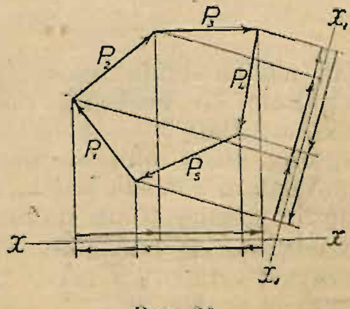
(Por. też przykład 16).



Rys. 27.



Rys. 28.



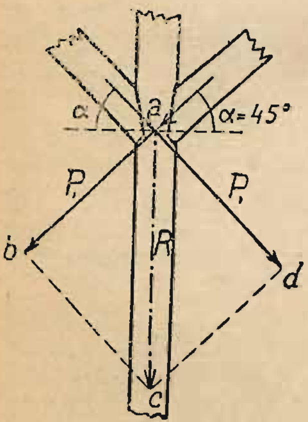
Rys. 29.

Przykłady 1—17.

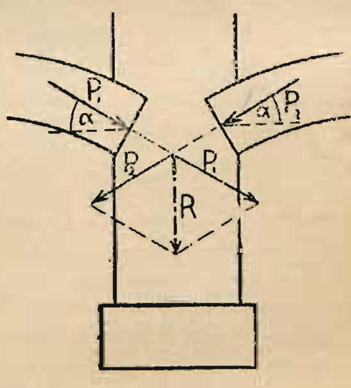
1. Na pal mostowy przenoszą się obustronnie z zastrzałów nachylonych pod kątem 45° siły $P_1 = P_2 = 2400$ kg. Z jaką siłą cisną one na słup? (rys. 30).

a) Rozwiązanie wykreślne: Przyjmujemy, że 1 cm rysunku przedstawia np. 1000 kg, odcinamy w przedłużeniu kierunków P_1 i P_2 siły 2400 kg, t. j. po 2,4 cm i składamy je według § 6. Długość przekątni *ac* odczytana w podziale sił daje wypadkową. Na rys. 30 długość *ac* wynosi 3,4 cm, zatem wypadkowa $R = 3400$ kg.

b) Rozwiązanie rachunkowe: Z wzoru 3 znajdziemy: $R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = 2 P \sin 45^0 = 2.2400 . 0{,}707 = 3394$ kg $= R$. (Składowa $R_x = P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 = O$, więc $R_y = R$). W porównaniu z wynikiem, jaki otrzymaliśmy w wykresie, mamy o 6 kg mniej. Błąd ten musiał się wkraść wskutek nieuniknionej niedokładności rysunku, jest jednak tak mały, że uwzględniać go nie potrzeba, tembardziej, że wyniki rachunkowe z reguły zaokrąglamy dla uzyskania większej przejrzystości rachunku.



Rys. 30.



Rys. 31.

2. Obliczyć, jak wielka siła przenosi się na ten sam słup, jeśli zestrzały nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 30^0$. Otrzymamy tu $R = R_y = 2 P \sin 30^0 = 2 \times 2400 \times \frac{1}{2} = 2400$ kg.

3. Na filar ceglany cisną obustronnie sklepienia z siłą $P_1 = P_2 = 1600$ kg pod kątem 30°. Jak wielka siła (wypadkowa) działa na filar? (Ciężar własny filara należy pominąć).

Zadanie to rozwiązuje się tak samo, jak zadanie 1; wykreślnie otrzymujemy $R = 1600$ kg (rys. 31). Rachunkowo: $R = 2 P \sin 30^0 = 2.1600 . {}^1/_2 = 1600$ kg.

4. Filar ceglany, jak na przykładzie 3, waży $G = 9200$ kg. Jak wielką siłą ciśnie filar na grunt?

Do ciężaru filara $G = 9200$ kg należy dodać siłę wypadkową ciśnień obu sklepień, również pionową. Zatem całkowite ciśnienie na grunt: $P = G + R = 9200 + 1600 = 10800$ kg.

5. Na mur pionowy o ciężarze $C = 6000$ kg ciśnie sklepienie pod kątem $\alpha = 30^0$ z siłą $P = 1000$ kg. Znaleźć całkowite ciśnienie na fundament muru ab. (rys. 32).

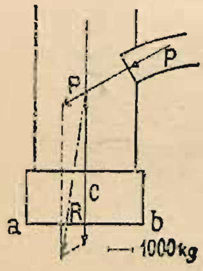
Rachunkowo otrzymujemy (z wzoru 3):

$R_x = 6000 \cos 90^0 + 1000 \cos 30^0 = 0 + 1000 . 0{,}866 = 866$ kg, co zaokrąglimy na $R_x = 870$ kg.

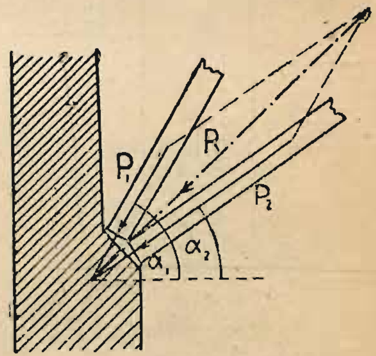
$R_y = 6000 \sin 90^0 + 1000 \sin 30^0 = 6000 . 1 + 1000 . 0{,}5 = 6500$ kg, a zatem wypadkowa z wzoru 4:

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \sqrt{870^2 + 6500^2} = 6560 \text{ kg}.$$

6. Na filar mostowy działają jednostronnie zastrzały wiązania rozporowego podwójnego $P_1 = 2500$ kg, $P_2 = 4000$ kg,



Rys. 32.



Rys. 33.

przyczem kąty nachylenia ich do poziomu, wynoszą $\alpha = 60^0$, $\alpha_2 = 35^0$. Znaleźć ich parcie na filar (rys. 33).

$R_x = 2500 \cos 60^0 + 4000 \cos 35^0 = 1250 + 3270 = 4520$ kg

$R_y = 2500 \sin 60^0 + 4000 \sin 35^0 = 2170 + 2300 = 4470$ kg

Całkowite parcie na filar:

$$R = \sqrt{4520^2 + 4470^2} = \sqrt{204304 + 199809} = 6360 \text{ kg}.$$

Kąt nachylenia parcia wypadkowego do poziomu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4470}{4520} = 0{,}989 \qquad \alpha = 44^0 42'$$

7. Na komin działa w środku wysokości pozioma siła wiatru $W = 200$ kg, starając się wywrócić go około krawę-

dzi A; sile tej przeciwdziała ciężar komina $C = 1500$ kg starając się utrzymać go w stałości. Należy znaleźć wypadkową (rys. 34).

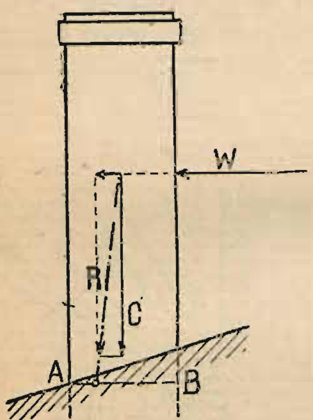
Wykreślnie otrzymamy z równoległoboku sił wypadkową R o wielkości 1510 kg, przechodząca jeszcze przez podstawę AB komina. Komin więc nie wywróci się.

Rachunkowo:

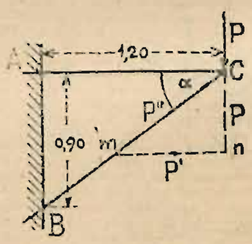
$$R = \sqrt{200^2 + 1500^2 + 1500_2} = 1513 \text{ kg}.$$

8. Znaleźć rachunkowo wypadkową sił przedstawionych na rys. 27 i 28, przyczem:

$$P_1 = 20 \text{ kg}, \quad P_2 = 40 \text{ kg}, \quad P_3 = 35 \text{ kg}, \quad P_4 = 30 \text{ kg}$$
$$\alpha_1 = 45^0, \quad \alpha_2 = 60^0 \quad \alpha_3 = -20^0, \quad \alpha_4 = -150^0.$$



Rys. 34.



Rys. 35.

Stąd:

$R_x = 20 \cos 45^0 + 40 \cos 60^0 + 35 \cos 20^0 - 30 \cos 30^0 = 14,1 + 20 + 32,9 - 26,0 = +41,0$ kg.

$R_y = 20 \sin 45^0 + 40 \sin 60^0 - 35 \sin 20^0 - 30 \sin 30^0 = 14,1 + 34,6 - 12,0 - 15,0 = +21.7$ kg.

$$R = \sqrt{41,0^2 + 21,7^2} = 46,4 \text{ kg}$$

$$tg\, \alpha = \frac{+21,7}{+41,0} = 0,53$$

$$\alpha = 26^0 56'$$

9. Chodnik wspiera się na wsporniku ABC, umieszczonym w murze (rys. 35). Znaleźć siły wewnętrzne w prętach wspornika, jeśli na C przenosi się ciężar $P = 800$ kg.

Z trójkąta sił *Cmn* otrzymamy:

$P' = 1070$ kg $\qquad P'' = 1330$ kg.

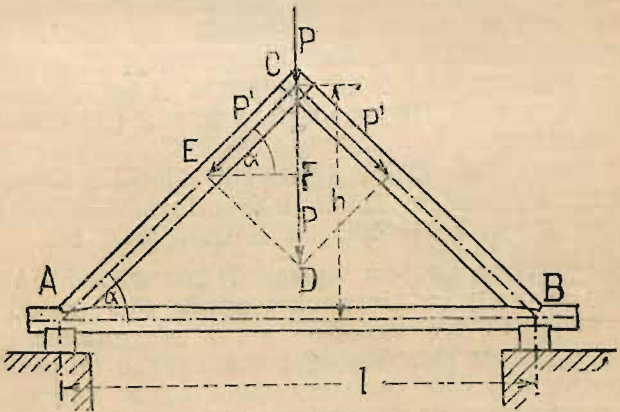
W *AC* panuje ściskanie, w *BC* rozciąganie. Gdybyśmy przekroili pręty *AC* i *BC*, a chcieli, aby punkt *C* nie zmienił położenia, musielibyśmy *AC* przytwierdzić np. sznurem, który byłby ciągnięty siłą *P*, zaś pręt *BC* należałoby podeprzeć.

Rachunkowo otrzymujemy:

$$tg\,\alpha = \frac{0{,}9}{1{,}2} = 0{,}75 \qquad \alpha = 36^0\,52'$$

$$P' = \frac{P}{tg\,\alpha} = \frac{800}{0{,}75} = 1067 \text{ kg}$$

$$P'' = \frac{P}{sin\,\alpha} = \frac{800}{0{,}60} = 1333 \text{ kg.}$$



Rys. 36.

10. W punkcie wierzchołkowym wiązara dachowego (rys. 36) działa pionowa siła $P = 1000$ kg. Znaleźć siły w zastrzałach *AC* i *BC*.

Rozkładamy wykreślnie siłę *P* otrzymując w obu zastrzałach siły równe $P' = 707$ kg. Rachunkowo znajdziemy z trójkąta *CEF*:

$$P' = \frac{P}{2\,sin\,\alpha} = \frac{1000}{2\,sin\,45^0} = 707 \text{ kg.}$$

Przekroiwszy zastrzały wiązara i rozumując jak w zad. 8, pojmiemy łatwo, że w zastrzałach panuje ściskanie.

11. Na więzar dachowy działa siła $W = 1000$ kg wskutek wiatru. Znaleźć siły wewnętrzne w krokwiach AC i BC (rys. 37).

Z wykresu otrzymujemy siły $AC = W' = 360$ kg, $BC = W'' = 940$ kg. Na obu łożyskach A i B powstają również siły, t. zw. oddziaływania czyli odpory O_1 i O_2 (por. § 3) równe siłom AC i BC, ale skierowane wręcz przeciwnie tj. tutaj ku górze.

12. Na ten sam więzar dachowy działa siła $W = 1000$ kg wskutek wiatru w kierunku krokwi BC (rys. 38). Znaleźć siły wewnętrzne w AC i BC.

Z wykresu otrzymujemy siłę $AC = 0$, i siłę $AC = W = 1000$ kg. Na łożysku A niema żadnego oddziaływania. Na łożysku B oddziaływanie jest równe i przeciwne sile $W = 1000$ kg.

13. Na ten sam więzar dachowy (rys. 39) działa pozioma siła $W = 1000$ kg. Znaleźć siły AC i BC.

Z równoległoboku sił otrzymujemy $AC = 500$ kg, $BC = 860$ kg. Siła AC skierowane jest jednak ku górze, co znaczy, że stara się pręt AC podnieść i oderwać od podpory. Jeślibyśmy pręt AC przekroili, należałoby węzeł C przytrzymać n. p. liną; oddziaływanie na podporze A jest zatem rozciąganiem, a dach trzeba utwierdzić w A przeciw wyrwaniu czyli zakotwić.

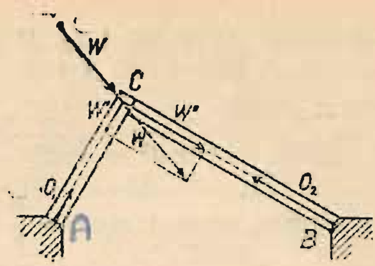
14. Na więzar dachowy działa siła wiatru o wypadkowej $W = 1500$ kg w punkcie D. Znaleźć oddziaływania O_1 i O_2 jeśli łożysko A jest ruchome, zaś B stałe (rys. 40).

Na łożysku ruchomem występuje zawsze oddziaływanie pionowe, zatem jego kierunek i punkt zaczepienia (A) są ustalone; kierunek ten przecina się z kierunkiem siły W w punkcie E, przez który przejść musi także oddziaływanie O_2, (gdyż siła W i oba oddziaływania są w równowadze). Kierunek oddziaływania O_2 będzie zatem BE Z równoległoboku sił znajdziemy wielkość obu oddziaływań $O_1 = FE = 830$ kg i $O_2 = GE = 880$ kg.

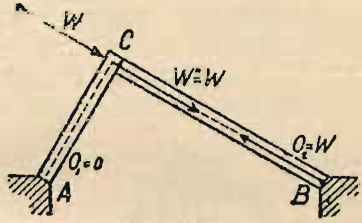
15. Na dwu filarach, ściągniętych kotwą żelazną, spoczywa sklepienie cisnące na filary z siłą $P = 5000$ kg pod kątem 30°. Ponieważ filary mają przenosić wyłącznie ciężary pionowe, przeto cała składowa pozioma siły P (t. zw. parcie poziome) ma przenieść się na kotew. Należy znaleźć siłę w kotwie K (por. rys. 41).

Siła w kotwie K równa się składowej poziomej parcia P, wynosi więc: $K = P \cos 30^0 = 5000 . 0{,}866 = 4330$ kg.

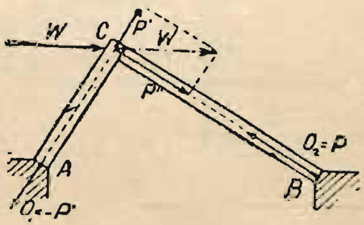
16. Na słup wiszący CD wiązania przedstawionego na rys. 42 przenosi się ciężar pionowy $P = 6600$ kg. Znaleźć siły



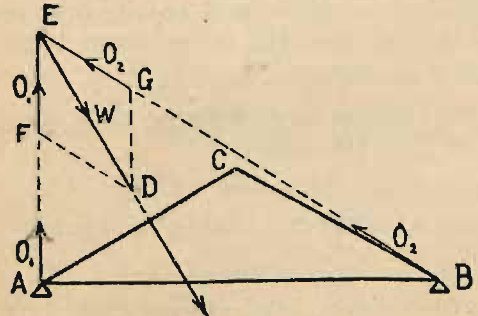
Rys. 37.



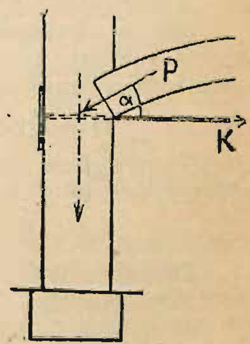
Rys. 38.



Rys. 39.



Rys. 40.



Rys. 41.

wewnętrzne w krokwiach AC i BC, siłę H w ścięgnie AB, oraz ciśnienia pionowe na łożyskach A i B.

Długość krokwi wynosi:

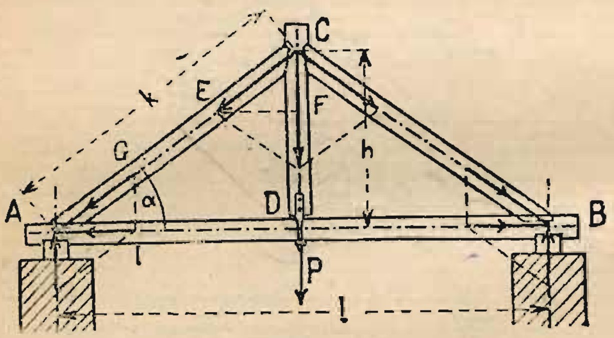
$$k = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5,00 \text{ m.}$$

Kąt nachylenia krokwi wynosi: $\sin \alpha = \frac{h}{k} = \frac{3}{5} = 0,6$

$$\alpha = 36^0\,50'$$

Siła w słupie wiszącym CD $P = 6600$ kg.

Siła w obu krokwiach jest równa i wynosi (z trójkąta CEF) $K = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{6600}{2.0,6} = 5500$ kg. Przekroiwszy więzar



Rys. 42.

poziomo, łatwo zrozumiemy, że w krokwiach jest ciśnienie (por. zadanie 8 i 9).

Siła K rozkłada się na podporze na dwie składowe H (siłę w ścięgnie poziomem) i A (względnie B równe oddziaływaniom pionowym). Z trójkąta sił AGI otrzymamy więc:

$$H = K \cos \alpha = 5500 \cos 36^0\,50' = 4400 \text{ kg.}$$

Na drugiem łożysku otrzymamy na H wartość taką samą. Oddziaływanie A wynosi (z trójkąta AGI)

$$A = B = K \sin \alpha = 5500.0,6 = 3300 \text{ kg.}$$

Te same wartości możemy otrzymać drogą rachunkową i w inny sposób:

Siły K i $\frac{P}{2}$ mają się do siebie, jak odpowiednie boki trójkąta ADC (gdyż trójkąty ADC i EFC są podobne).

$$K : \frac{P}{2} = k : h$$

$$K = \frac{Pk}{2h} = \frac{6600 \,.\, 5{,}0}{2 \,.\, 3{,}0} = 5500 \text{ kg}.$$

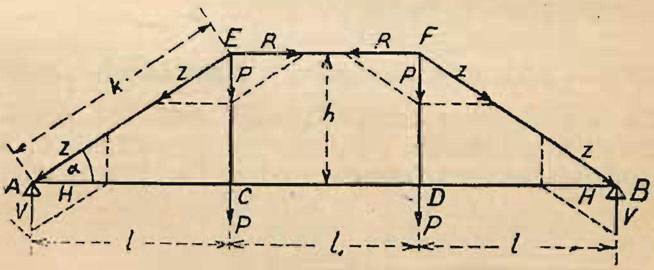
Z podobieństwa trójkątów ADC i AIG wynika dalej:

$$H : \frac{P}{2} = \frac{l}{2} : \text{h} \qquad H = \frac{Pl}{4h} = \frac{6600 \,.\, 8{,}0}{4{,}0 \,.\, 3{,}0} = 4400 \text{ kg}$$

$$V = \frac{P}{2} = 3300 \text{ kg}.$$

Zatem te same wartości, zgadzające się zresztą i z rysunkiem.

W zadaniu 9 otrzymaliśmy na siłę w zastrzale zupełnie tą samą wartość $\frac{P}{2 \sin \alpha}$, co tutaj, pomimo, że siła P przenosiła się tam bezpośrednio na punkt C, zaś tu działa u dołu



Rys. 43.

słupa wiszącego CD i przenosi się za jego pośrednictwem na zastrzały. Widać stąd, że w myśl § 2 punkt zaczepienia siły można przesunąć na jej kierunku dowolnie, a wpływ jej na wielkość sił składowych będzie ten sam. Sam słup jednak w przykładzie 16 przenosi siłę $P = 6600$ kg: gdyby zaś siła działała z góry, jak w przykładzie 10, to cały ciężar przenosiłby się odrazu na zastrzały a słup pozostawałby bez naprężenia.

Zadaniem poziomego ścięgna H jest przejąć składową poziomą sił w zastrzałach AC i BC. Gdyby tego ścięgna nie było, wiązanie cisnęłoby na mury ukośnie (por. przykłady 11—13), oddziaływania byłyby równe siłom wewnętrznym w zastrzałach, tj. równe $K = 5500$ kg.

17. Podwójne wiązanie wiszące (rys. 43) dźwiga w punktach C i D ciężary P, przenoszące się wprost na słupy wi-

szące CE i DF. Jakie siły wewnętrzne powstają w prętach wiązania?

Ze słupa CE przenosi się siła na zastrzał AE i rozporę EF. Siły Z i R występujące w AE i EF znajdujemy z odpowiedniego równoległoboku sił w p. E; siła Z przenosi się następnie na łożyska A, gdzie rozkłada się na poziomą siłę H, przejętą przez ścięgno AB i pionową $V = P$, która jest zarazem równa oddziaływaniu łożyska i ciśnie na mur w A. Po drugiej stronie takie same siły występują w F i B.

Rachunkowo otrzymamy:

$$Z = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Pk}{h}$$

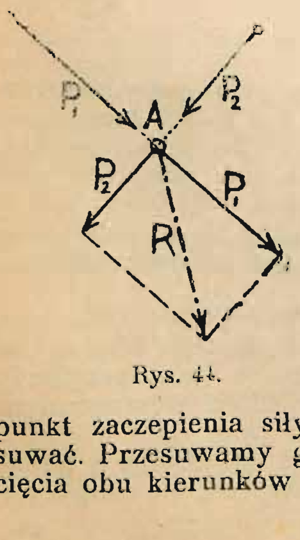
$$H = R = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{Pl}{h}$$

$$V = P$$

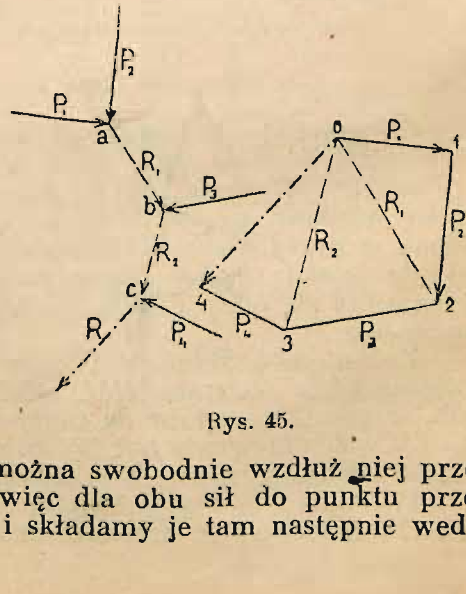
Wykrójmy z więzara węzeł E, krając przez pręty Z, P i R, a łatwo z wieloboku sił znajdziemy, że w Z i R panuje ściskanie, zaś w P rozciąganie.

§ 11. Siły o różnych kierunkach i punktach zaczepienia.

Dla wyznaczenia wypadkowej dwu sił działających w różnych punktach na jednej płaszczyźnie najlepiej zastosować jest zasadę podaną w § 2, wedle której



Rys. 44.



Rys. 45.

punkt zaczepienia siły można swobodnie wzdłuż niej przesuwać. Przesuwamy go więc dla obu sił do punktu przecięcia obu kierunków A i składamy je tam następnie wedle

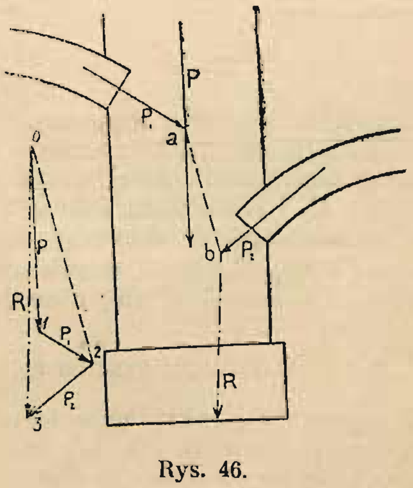
§ 6 w równoległobok sił, którego przekątnia daje wypadkową lub w trójkąt sił (rys. 44).

Jeśli na figurę płaską działa większa ilość sił (rys. 45), to składa się z sobą najpierw dwie dowolnie obrane siły np. P_1 i P_2 w wypadkową R_1. Zamiast składać na tym samym rysunku, wykreślamy je zwykle osobno $P_1 = 01$, $P_2 = 02$ (rys. 45) i znajdujemy wypadkową 02, która określa nam kierunek i wielkość siły R_1; punkt jej zaczepienia będzie w a, t. j. w punkcie przecięcia właściwych kierunków sił P_1 i P_2. Następnie w ten sam sposób składamy siłę R_1 z trzecią składową P_3, a wreszcie R_2 z P_4. Wypadkowa R tych dwu sił ostatnich jest zarazem wypadkową wszystkich sił $P_1 \dots P_4$.

Przykłady 18 i 19.

18. Na filarze murowanym wspierają się dwa sklepienia, jedno cisnące siłą $P_1 = 1250$ kg, drugie siłą $P_2 = 1670$ kg. Ciężar filara wynosi $P = 3720$ kg. Należy znaleźć wypadkową tych sił (rys. 46).

Przedłużamy siłę P_1 aż do przecięcia z kierunkiem siły P i w punkcie a prowadzimy ab równoległą do R_1 wypadkowej sił P i P_1, której wielkość i kierunek znajdziemy z trój-

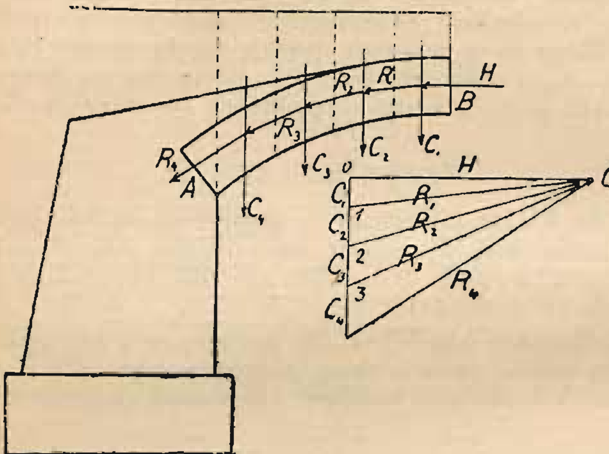


Rys. 46.

kąta sił 012. Następnie przedłużamy tę wypadkową R_1 aż do przecięcia się z siłą P_2 i zupełnie tak samo jak poprzednio znajdujemy wielkość i położenie wypadkowej wszystkich sił $R = 5400$ kg, którą to wielkość odczytaliśmy z wykresu.

19. Na połowę sklepienia AB (rys. 47) działa w kluczu (t. j. w p. B) siła pozioma H (t. zw. rozpór poziomy czyli parcie poziome), oraz ciężary poszczególnych części sklepienia i nadsypki $C_1 \ldots C_4$. Znaleźć ciśnienie, jakie wywiera sklepienie na przyczółek AA*).

Siłę H składamy z ciężarem części sklepienia C_1, otrzymując z trójkąta siłę $01\,O$ wypadkową R_1, która przechodzi



Rys. 47.

przez punkt przecięcia siły H z ciężarem C_1. Siłę R_1 składamy tak samo z ciężarem C_2, otrzymując wypadkową R_2, a postępując w ten sam sposób dalej, znajdziemy ostatecznie wypadkową R_4 siły R_3 i ciężaru C_4, która to wypadkowa R_4 jest ciśnieniem, jakie sklepienie wywiera na przyczółek.

(Linję łamaną H, R_1, R_2, R_3, R_4 nazywamy linją ciśnienia lub linją naporową. Będziemy o niej mówić szerzej w § 64).

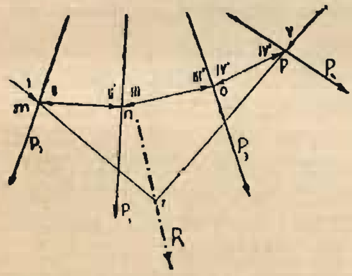
§ 12. Wielobok sznurowy.

Zdarza się często, że punkty przecięcia poszczególnych sił znajdują się bardzo daleko, tak, że składanie ich wedle prawideł podanych w poprzednim paragrafie, byłoby wielce utrudnione lub nawet niemożliwe. Wtedy dla znalezienia wypadkowej używamy sposobu innego (rys. 48 i nast.).

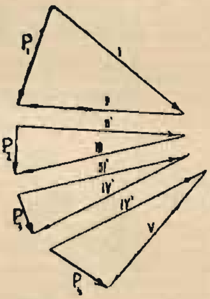
---

*) Przyczółkiem nazywamy budowlę, na której wspiera się sklepienie (lub inna belka).

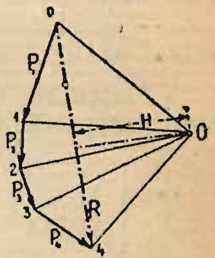
Siłę P_1 rozkładamy na dwie dowolne składowe *I* i *II*. Jeśli przyjmiemy kierunki obu, to tem samem wielkość ich wypadnie wprost z trójkąta sił (rys. 49). Podobnie czynimy z siłą P_2 w ten sposób jednak, że za jedną z jej składowych przyjmiemy siłę *II'* równą i wprost przeciwną sile *II*, a leżącą w jej przedłużeniu; z rys. 49 znajdziemy wtedy odrazu kierunek i wielkość drugiej składowej *III*. Podobnie postępujemy z każdą z pozostałych sił P_3 i P_4, otrzymując w ten sposób kolejno 8 sił: *I*, *II*, *II'*, *III*, *III'*, *IV*, *IV'*, *V*, które zupełnie zastępują siły dane $P_1 \ldots P_4$. Siły *II* i *II'* są jednak sobie równe i wręcz przeciwne, a więc znoszą się wzajemnie, podobnie jak *III* i *III'*, *IV* i *IV'*, tak, że ostatecznie siły $P_1 \ldots P_4$ zastępujemy dwiema siłami *I* i *V*. Siły te w sposób znany z § 6 składamy w wypadkową *R*, która jest zarazem



Rys. 48.



Rys. 49



Rys. 50.

wypadkową wszystkich danych sił $P_1 \ldots P_4$. Wielkość i kierunek jej określa odcinek 04.

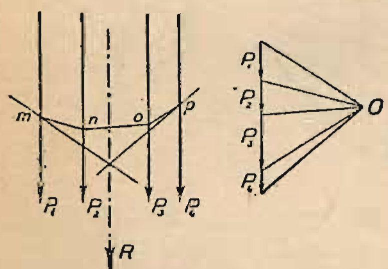
Zamiast rysować cztery osobne trójkąty sił możemy je zesunąć w jeden rysunek (rys. 50), przedstawiającą wielobok, którego boki są odpowiednio równoległe do sił P_1, $P_2 \ldots$ i *I*, *II*, *II'*,... badanego układu. Położenie punktu *O* określone jest kierunkami *I* i *II*, przyjętymi zupełnie dowolnie; jeślibyśmy obrali te kierunki inaczej, otrzymalibyśmy inny punkt *O'*; rezultat byłby jednak ten sam. Zamiast więc przyjmować kierunki, możemy przyjąć dowolnie punkt *O* t. zw. biegun, a położenie jego określi z góry położenie składowych *I*... *V*. Wielobok 01234 nazywamy wielobokiem lub ciągiem sił; linie *I*, *II*... promieniami biegunowymi; odległość bieguna *O* od wypadkowej *R* odległością biegunową, zaś wielobok *mnop* wielobokiem sznurowym; jeśli bowiem sznur obciążymy siłami $P_1 \ldots P_4$, to przybierze on kształt linji *mnop*. Poszczególne części wieloboku sznurowego *mn*, *no*, *op* nazywamy promieniami wieloboku sznurowego lub promieniami sznurowymi.

Dla znalezienia wypadkowej R dowolnej ilości sił, nie przechodzących przez jeden punkt należy zatem wykreślić wielobok tych sił, przyjmując dowolnie biegun O, a następnie poprowadzić wielobok sznurowy *mn*... równolegle do promieni biegunowych (wychodząc z punktu *m* obranego dowolnie na sile P_1).

Wypadkowa R przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych *mr* i *pr*, a kierunek i wielkość jej znajdujemy z wieloboku sił.

Pamiętać należy, że ilość promieni biegunowych i promieni sznurowych jest zawsze o jeden większa od ilości sił.

Mając znaleźć wypadkową układu sił równoległych postępujemy tak samo. Wtedy wielobok sił 01234 (rys. 51), redukuje się do prostej, na której kolejno odcinamy wielkości poszczególnych sił. Przyjąwszy biegun O, kreślimy promienie sznurowe *mr*, *mn*... równoległe do promieni oO, $1O$... Wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia *r* promieni skrajnych *mr* i *pr*; wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił.



Rys. 51.

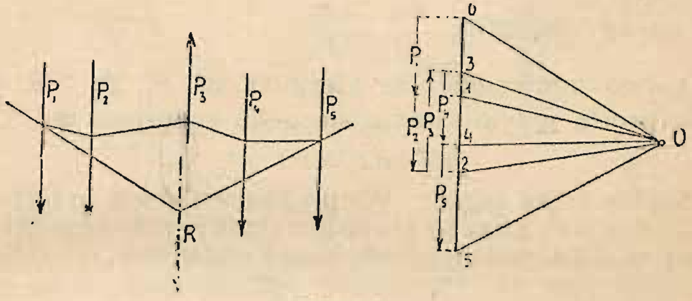
Wypadkowa R zastępuje działaniem swojem wszystkie siły układu P_1, P_2...; jeśli zatem chcemy otrzymać stan równowagi, to musimy wprowadzić siłę $-R$ równą, a wprost przeciwną wypadkowej. Wtedy do czterech boków wieloboku sił: 01, 12, 23, 34 przychodzi bok piąty 40, łączący punkt ostatni 4 z punktem początkowym O, czyli, jak mówimy, ciąg sił zamyka się.

W wieloboku sznurowym siła $-R$ przechodzić musi przez punkt *r* przecięcia boków *mr* i *pr* równoległych do promieni $0O$ i $4O$; wielobok sznurowy *mnop* uzupełnia się zatem bokami *mr* i *pr* czyli zamyka się również. Zatem:

Siły działające na płaszczyźnie w różnych punktach i różnych kierunkach pozostają zatem w równowadze, jeśli zamknie się nietylko ich wielobok sił, ale także wielobok sznurowy.

§ 13. Siły równoległe.

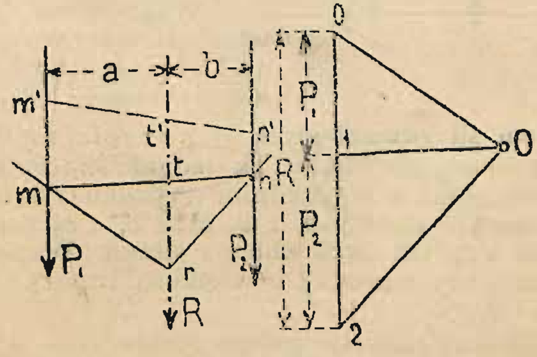
Wypadkową sił równoległych znaleźć możemy również zapomocą wieloboku sznurowego. Ponieważ jednak wszystkie siły mają ten sam kierunek, przeto w wieloboku sił będą leżeć w jednej linji równoleglej do tegoż kierunku; siły odcina się w nim jedna po drugiej. Jeśli która z sił (np. P_3) posiada strzałkę przeciwną innym, np. działa w górę (rys. 52),



Rys. 52.

to odcina się ją od punktu 2 też ku górze (długość 23). Siły następne P_4, P_5 odcina się oczywiście od 3. Wielkość wypadkowej jest algebraiczną sumą poszczególnych sił.

Dla lepszego uwydatnienia sił, skierowanych w różnych kierunkach, narysowaliśmy je na rys. 52 nieco rozsunięte, oczywiście z zachowaniem równoległości (por. rys. 24).



Rys. 53.

Dla dwu sił równoległych (rys. 53) skierowanych w jedną stronę wielobokiem sznurowym będzie trójkąt mnr, gdyż wielobok sił ma trzy promienie $O0$, $O1$, $O2$. Trójkąt $\triangle$ mtr jest podobny do $\triangle\, O10$, zaś $\triangle$ ntr $\backsim$ $\triangle\, O12$.

Otrzymamy więc równanie:

$$mt : tr = O1 : 01 = O1 : P_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad a$$

$$nt : tr = O1 : 02 = O1 : P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad b$$

Dzieląc równanie *a* przez *b*, dostaniemy:

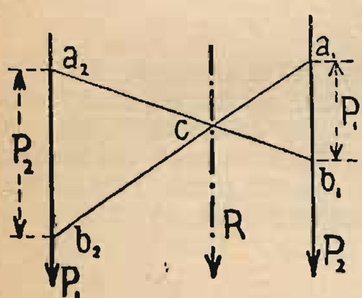
$$\frac{mt \,.\, tr}{tr \,.\, nt} = \frac{O1 \,.\, P_2}{O1 \,.\, P_1}$$

czyli po uproszczeniu: $\frac{mt}{nt} = \frac{P_2}{P_1}$ 7

Łatwo udowodnić, że kierunki sił P_1, P_2 i R dzielą każdą prostą w tym samym stosunku co prostą *mn*, t. j., że

$$m't' : n,t' = mt : nt.$$

Stąd wynika reguła: **Wypadkowa dwu sił równoległych o tej samej strzałce dzieli odstęp między niemi w odwrotnym stosunku do ich wielkości.**



Rys. 54.

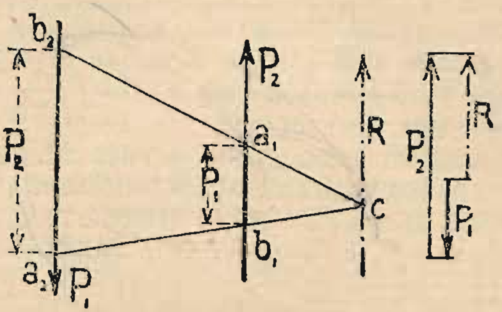
Położenie siły wypadkowej możemy znaleźć więc w sposób następujący: Na kierunku siły P_1 odcinamy wielkość siły P_2, na kierunku P_2 siłę P_1 i łączymy wedle rys. 54. Wtedy $a_2c : b_1c = P_2 : P_1$, a więc wypadkowa R przechodzi przez punkt *c*.

Wypadkowa dwu sił równoległych i równych **o tej samej strzałce** leży **w środku** między niemi.

Dla dwu sił równoległych o **przeciwnych** kierunkach postępujemy podobnie. Tu jednak siła P_2 jest skierowana odwrotnie niż w poprzednim wypadku (rys. 55) i dlatego też proste łączące punkty a_1 z b_2 oraz b_1 z a_2 przecinają się w punkcie *c* leżącym poza obiema siłami. Wypadkowa ma tutaj kierunek siły większej, a wielkość równą różnicy obu sił $R = P_2 - P_1$.

Na tej samej zasadzie polega rozkładanie sił. Jak wiadomo jednak z § 9, dana siła da się rozłożyć **jednoznacznie** tylko na **dwie** siły składowe.

Jeżeli np. siłę R (rys. 53) mamy rozłożyć na siły P_1 i P_2, o nieznanej zgóry wielkości, to odniósłszy jej wielkość 02 w wieloboku sił, przyjmujemy biegun O i kreślimy wielobok sił $02\,O$, a następnie promienie mr i nr wieloboku sznurowego równoległe do promieni $0\,O$ i $2\,O$. Jeżeli siły P_1 i P_2 mają być w równowadze z siłą P, to wielobok sznurowy musi się zamknąć, a więc trzecim jego bokiem musi



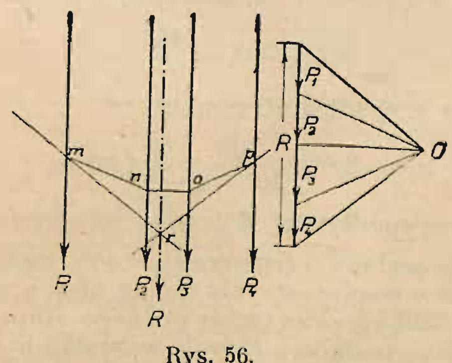
Rys. 55.

być mn. Ale w wieleboku sił promień przechodzący między siłami P_1 i P_2 musi być równoległy do tego boku mn. Kreślimy więc $O1 \parallel mn$ i otrzymujemy wielkość sił składowych $P_1 = 01$, $P_2 = 12$.

Przykłady 20—26.

20. Znaleźć wielkość i położenie układu sił równoległych $P_1 \dots P_4$, wedle rys. 56.

Wykreślamy wielobok sił w dowolnej podziałce n. p. przyjmując 1 cm = 2000 kg, przyjmujemy dowolnie biegun O



Rys. 56.

i równoległe do promieni $0O$, $1O$, kreślimy promienie sznurowe mr, mn... Przedłużając promienie skrajne mr i pr do przecięcia, otrzymujemy położenie wypadkowej, której odległość od np. siły P_1, wynosi około 1,80 m. Wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił:

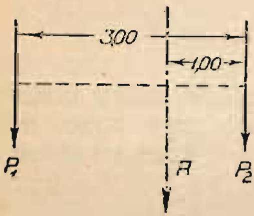
$$R = 1600 + 1400 + 1800 + 1200 = 6000 \text{ kg}.$$

21. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej dwu sił równoległych $P_1 = 20$ ton, $P_2 = 40$ ton, działających w odległości 3,00 m od siebie w tym samym kierunku (rys. 57).

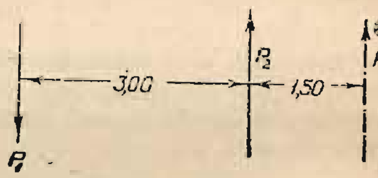
Ze wzoru 7 otrzymujemy $mt : nt = P_2 : P_1 = 40 : 20 = 2 : 1$, zatem $mn : nt = (mt + nt) : nt = (2 + 1) : 1 = 3 : 1$.

Dzielimy zatem odstęp mn między siłami P_1 i P_2 na trzy części; wypadkowa przechodzi w odległości $\frac{1}{3}$ $mn = 1{,}00$ m od siły większej, tj. od P_2 i ma wielkość

$$R = P_1 + P_2 = 20 + 40 = 60 \text{ ton}.$$



Rys. 57.



Rys. 58.

22. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej dwu sił równoległych $P_1 = 20$ ton, $P_2 = 40$ ton, działających w kierunkach przeciwnych w odległości 3,00 m od siebie rys. 58.

Z rys. 55 otrzymujemy: $b_2a_1 : a_1c = (P_2 - P_1) : P_1$, zatem wypadkowa R oddalona jest od siły większej P_2 o odległość

$$a_1c = b_2a_1 \frac{P_1}{P_2 - P_1}$$

W danym wypadku otrzymamy:

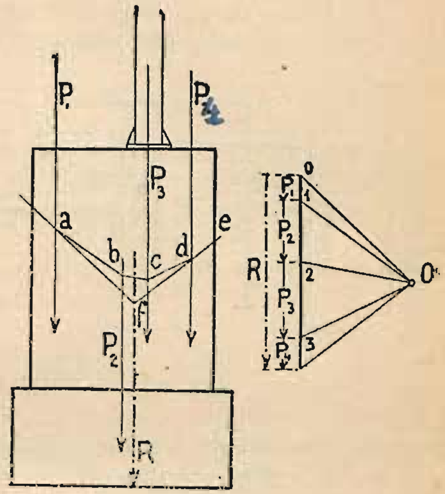
$$a_1c = 3{,}00 \cdot \frac{20}{40 - 20} = 1{,}50 \text{ m}.$$

Wielkość wypadkowej $R = 40 - 20 = 20$ ton.

23. Na filar ceglany o ciężarze $P_2 = 4000$ kg działają ciężary pionowe stropów wspierających się na nim o wielkości $P_1 = 1600$ kg i $P_4 = 2000$ kg, oraz ciężar górnego słupa $P_3 = 5000$ kg. Należy znaleźć wypadkową R tych wszystkich ciężarów sposobem wykreślnym (rys 59).

Na linji 0 1 2 3 4 odcinamy kolejno siły $P_1 \ldots P_4$ i przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy promienie wieloboku sił $O0$, $O1$... Następnie prowadzimy linję $af \parallel O0$, $ab \parallel O1$

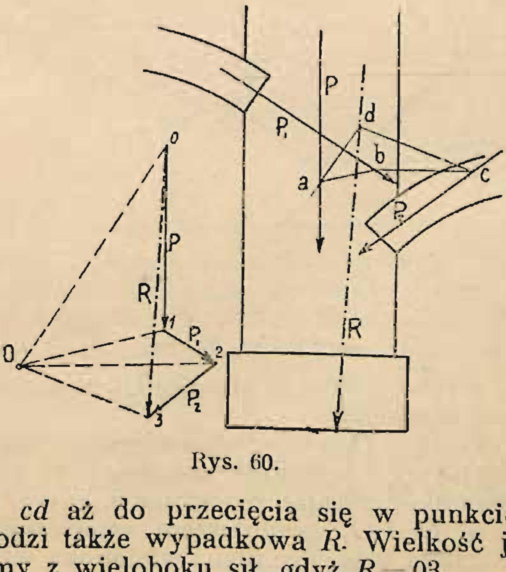
i t. d., otrzymując w ten sposób wielobok sznurowy. Skrajne boki tego wieloboku *af* i *ef* przecinają się w punkcie *f*, przez który przechodzi wypadkowa *R* wszystkich ciężarów; wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \Sigma P = 1600 + 4000 + 5000 + 2000 = 12600$ kg.



Rys. 59.

24. Na filarze murowanym wspierają się dwa sklepienia, jedno cisnące siłą $P_1 = 1250$ kg, drugie siłą $P_2 = 1670$ kg Ciężar filara wynosi $P = 3720$ kg (rys. 60). Należy znaleźć wypadkową tych sił zapomocą wieloboku sznurowego (por. przykład 18).

Wykreślamy wielobok sił 0123, a następnie przyjąwszy dowolnie biegun *O*, kreślimy wielobok sznurowy, prowadząc *ad* $\parallel$ *O*0, *ab* $\parallel$ *O*1, *br* $\parallel$ *O*2, *cd* $\parallel$ *O*3. Następnie przedłużamy promienie

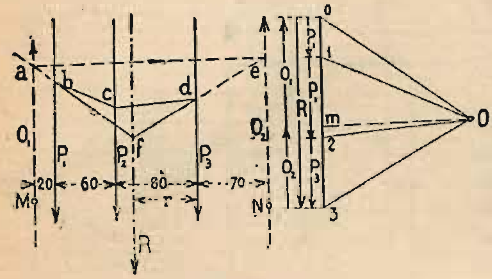


Rys. 60.

skrajne *ad* i *cd* aż do przecięcia się w punkcie *d*, przez który przechodzi także wypadkowa *R*. Wielkość jej i kierunek znajdziemy z wieloboku sił, gdyż $R = 03$.

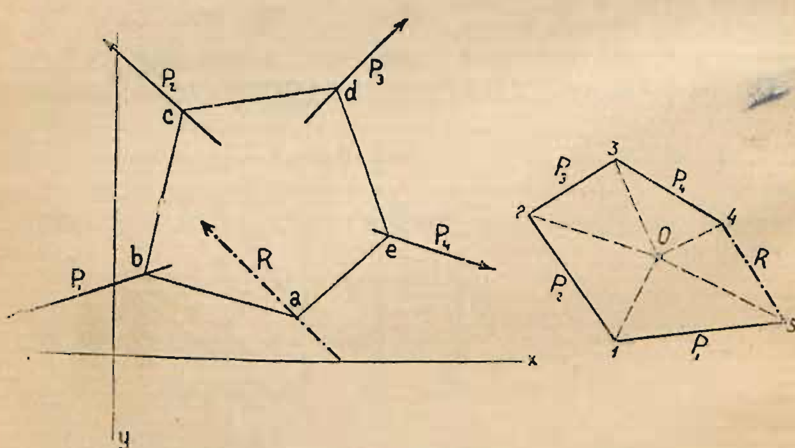
Wynik otrzymany na rys. 60, zgodny jest w zupełnośc z wynikiem przykł. 18 (por. rys. 46).

25. Dane są trzy siły równoległe $P_1 = 400$kg, $P_2 = 800$ kg, $P_3 = 700$ kg. Należy znaleźć wykreślnie ich wypadkową, oraz obliczyć jak wielkie muszą być dwie równoważące je siły równoległe O_1 i O_2, przechodzące przez punkty M i N (por. rys. 61).



Rys. 61.

Odnosimy siły P_1 P_2 P_3 w wieloboku sił i przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy promienie $O0$, $O1$, $O2$, $O3$, a następnie równolegle do nich boki wieloboku sznurowego fb, bc, dc, df. Wypadkowa R o wielkości $R = P_1 + P_2 + P_3 =$



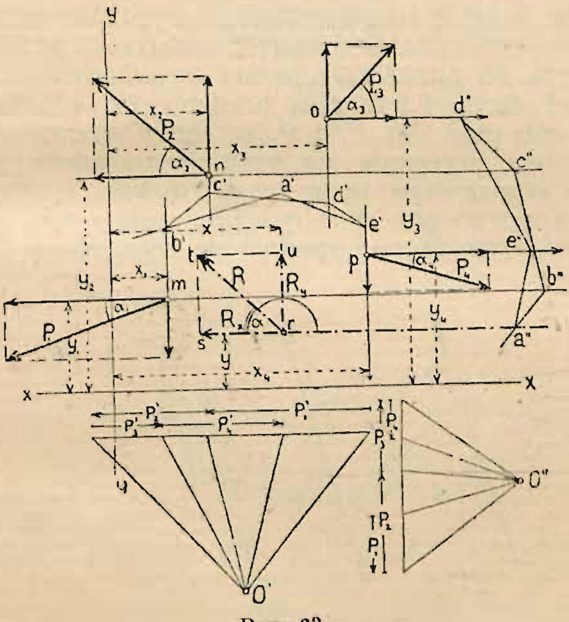
Rys. 62.

$= 400 + 800 + 700 = 1900$ kg, przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych.

Jeśli siły O_1 i O_2 mają zrównoważyć siłę R, to musi zamknąć się na nich wielobok sznurowy. W tym celu przedłużamy promienie skrajne bf, aż do a, zaś df do e, t. j. do kierunków sił O_1 i O_2; promieniem sznurowym zamykającym będzie zatem ab. Promień wieloboku sił, odpowiadający siłom O_1 i O_2, musi być równoległy do ab; będzie nim zatem Om, zaś długość $0m$ i m 3 odcięte nim dają wprost wielkości oddziaływań O_1 i O_2.

26. Znaleść wypadkową układu sił podanego na rys. 62 sposobem wykreślnym.

a) Wszystkie siły $P_1 \ldots P_4$ odcinamy osobno w wieloboku sił i obieramy dowolnie biegun O; w danym wypadku wewnątrz wieloboku, gdyż w ten sposób otrzymamy najwygodniejsze kierunki promieni. Jeżelibyśmy bowiem biegun przyjęli zewnątrz wieloboku, to promienie zamykałyby z sobą



Rys. 63.

bardzo ostre kąty, a tem samem i dokładność konstrukcji ucierpiałaby znacznie. Następnie kreślimy promienie sznurowe, a więc $ab \parallel O5$, $bc \parallel O1$ i t. d. Przez punkt przecięcia boków skrajnych t. j. przez punkt a przechodzi wypadkowa R, której wielkość i kierunek znajdziemy w wieloku sił, łącząca punkty 0 i 4.

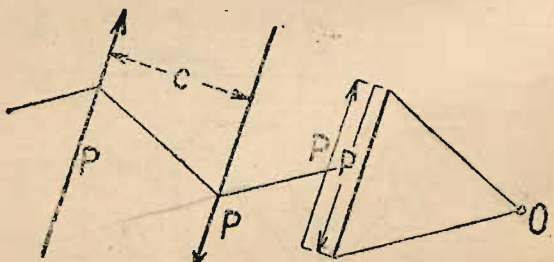
b) Czasem zdarza się, że wygodniej jest w wykresie użyć składowych (np. poziomych i pionowych) sił. W tym celu kreślimy osobno wielobok sił składowych poziomych, osobno pionowych, a dla nich też osobne wieloboki sznurowe.

Wykonaliśmy to na rys. 63 Ponieważ składowe idą po części we wprost przeciwnych kierunkach, przeto rozsunęliśmy je w wielobokach sił wedle § 13. Następnie wykreśliliśmy wielobok sznurowy $a'b'c'd'e'$ dla sił pionowych, zaś $a''b''c''d''e''$ dla poziomych. Wypadkowa przechodzi przez punkt r przecięcia wypadkowych $a'r$ i $a''r$; wielkość jej $R = rt$ znaleźliśmy w równoległoboku sił części $rstu$. Wyniki obu wykresów „a" (rys. 62) i „b" (rys. 63) muszą być identyczne.

C. Moment statyczny.

§ 14. Para sił.

Jeśli w ostatnio rozpatrywanym wypadku sił równoległych, a przeciwnie skierowanych różnica sił jest niewielka, to wedle rys. 55 punkt zaczepienia wypadkowej oddala się znacznie od obu sił i to tem bardziej, im różnica ta jest mniejsza. Jeśli obie siły P_1 i P_2 są sobie wreszcie równe, to wypadkowa przesunie się w nieskończoność, gdyż boki wieloboku sznurowego będą tu równoległe (por. rys. 64), a tak samo równoległe byłyby i linje a_2b_1 i a_1b_2 z rys. 55; wielkość zaś wypadkowej spadnie do zera. $R = 0$. Siły takie



Rys. 64.

mimo to nie są w równowadze, ale tworzą t. zw. parę sił. Skutek jej jest całkiem inny niż pojedynczej siły; siła pojedyncza stara się bowiem posunąć ciało, na które działa; np. ciągnąc pręt ab w kierunku strzałki (rys. 65) posuwamy go w tymże kierunku. Natomiast para sił działając na jakieś ciało, stara się je obrócić; np. jeśli belkę ab ciągną dwie siły P w kierunkach równoległych, lecz przeciwnych, to belka ta obracać się będzie w kierunku oznaczonym strzałką (rys. 66).

To działanie obrotowe jest tem silniejsze, im większe są siły P i im większa jest ich odległość. Aby je więc określić,