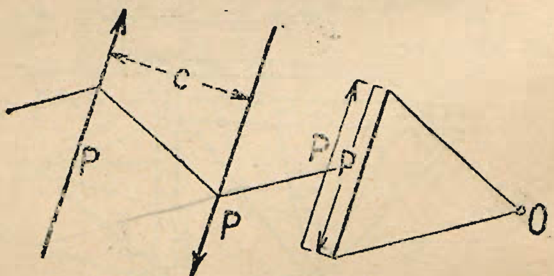
liśmy je w wielobokach sił wedle § 13. Następnie wykreśliliśmy wielobok sznurowy $a'b'c'd'e'$ dla sił pionowych, zaś $a''b''c''d''e''$ dla poziomych. Wypadkowa przechodzi przez punkt r przecięcia wypadkowych $a'r$ i $a''r$; wielkość jej $R = rt$ znaleźliśmy w równoległoboku sił części $rstu$. Wyniki obu wykresów „a“ (rys. 62) i „b“ (rys. 63) muszą być identyczne.

C. Moment statyczny.

§ 14. Para sił.

Jeśli w ostatnio rozpatrywanym wypadku sił równoległych, a przeciwnie skierowanych różnica sił jest niewielka, to wedle rys. 55 punkt zaczepienia wypadkowej oddala się znacznie od obu sił i to tem bardziej, im różnica ta jest mniejsza. Jeśli obie siły P_1 i P_2 są sobie wreszcie równe, to wypadkowa przesunie się w nieskończoność, gdyż boki wieloboku sznurowego będą tu równoległe (por. rys. 64), a tak samo równoległe byłyby i linje a_2b_1 i a_1b_2 z rys. 55, wielkość zaś wypadkowej spadnie do zera. $R = 0$. Siły takie

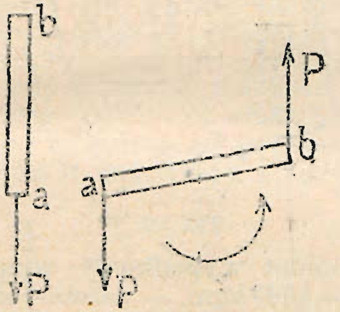


Rys. 64.

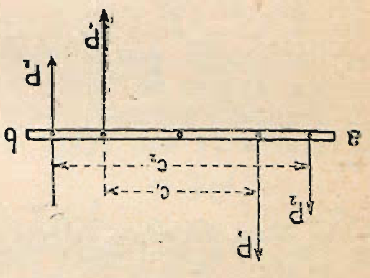
mimo to nie są w równowadze, ale tworzą t. zw. parę sił. Skutek jej jest całkiem inny niż pojedynczej siły; siła pojedyncza stara się bowiem posunąć ciało, na które działa; np. ciągnąc pręt ab w kierunku strzałki (rys. 65) posuwamy go w tymże kierunku. Natomiast para sił działając na jakieś ciało, stara się je obrócić; np. jeśli belkę ab ciągną dwie siły P w kierunkach równoległych, lecz przeciwnych, to belka ta obracać się będzie w kierunku oznaczonym strzałką (rys. 66).

To działanie obrotowe jest tem silniejsze, im większe są siły P i im większa jest ich odległość. Aby je więc określić, przyjmujemy jako jego miarę iloczyn siły P przez odległość obu sił c mierzoną prostopadle do sił (rys. 64). Iloczyn ten $M = Pc$ nazywamy momentem statycznym, zaś odległość „c" ramieniem momentu. Jeżeli moment stara się obrócić ciało, na które działa, w kierunku wskazówki na zegarze (rys. 69), nazywamy go momentem dodatnim ($+M$), jeśli w kierunku przeciwnym momentem ujemnym (—M).

Moment jest iloczynem siły przez długość; trzeba go więc wyrazić w jednostkach siły (kg, t) pomnożonych przez jednostki długości (cm, m). Odpowiednio do tego nazywamy jednostkę momentu kilogram-centymetrem (kgcm), ton-metrem (tm) i t. p., przyczem 1 tm = 1000 kg × 100 cm = = 100000 kgcm. Jeśli np. siła $P = 1500$ kg $= 1{,}5$ t, zaś odstęp



Rys. 65 i 66.

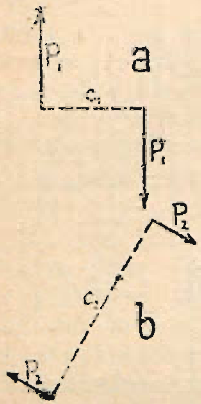


Rys. 67.

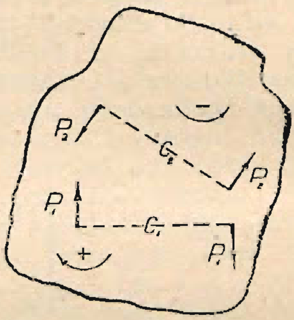
prostopadły $c = 50$ cm $= 0{,}5$ m, to moment wynosi $M = 1500$ kg × × 50 cm = 75000 kgcm lub $M = 1500$ kg × 0,5 m = 750 kgm lub 1,5 t × 0,5 m = 0,75 tm i t. d.

Biorąc pod uwagę belkę ab (rys. 67), zauważymy jednak, że ten sam obrót, co para sił P_1 w odległości c_1, sprawi para sił mniejszych P_2, działających w odległości c_2 większej; chodzi tylko o to, by iloczyn $M = P_1 c_1$ był równy iloczynowi $P_2 c_2$. Np. parę sił o momencie 1500 kg × 50 cm = 75000 kgcm możemy zastąpić parą sił o momencie $M = 1000$ kg × 75 cm = 75000 kgcm lub $M = 300$ kg × 250 cm = 75000 kgcm. Wogóle parę sił zastąpić można inną parą sił o tym samym momencie obrotu, działającą gdziekolwiek na tej samej płaszczyźnie. Np. moment $P_1 c_1$ (rys. 68) zastąpić można momentem $P_2 c_2$, byle $M = P_1 c_1 = P_2 c_2$ i byle kierunek obrotu był ten sam. I naodwrót: jeśli chcemy zrównoważyć parę sił, działającą na pewne ciało, to musimy zaczepić na niem inną parę sił, czyli inny moment o tej samej wielkości, lecz przeciwnym znaku, t. j. przeciwnym kierunku obrotu; np. na rys. 69 moment P_1c_1 został zrównoważony momentem $-P_2c_2$ o wielkości równej P_1c_1 obracającym w przeciwnym kierunku. (Znak „–“ oznacza obrót w przeciwnym kierunku).

Jeżeli na jedno i to samo ciało działają równocześnie dwa momenty, to działanie ich mierzy się algebraiczną sumą obu momentów. Np. jeśli na drążek *ab* (rys. 67) działają



Rys. 68



Rys. 69.

obie pary sił P_1c_1 i P_2c_2, to moment wypadkowy wynosi $M = P_1c_1 + P_2c_2 = (750 + 750)$ kgm $= 1500$ kgm. — Jeżeliby momenty P_1c_1 i P_2c_2 miały znaki przeciwne, np. gdyby $-P_1c_1$ obracało w kierunku przeciwnym wskazówki na zegarze, to wypadkowy moment wynosiłby $M = P_2c_2 - P_1c_1$. Jeżeliby P_1c_1 było co do wielkości równe P_2c_2, ale o znaku przeciwnym, to $M = P_2c_2 - P_1c_1 = 0$.

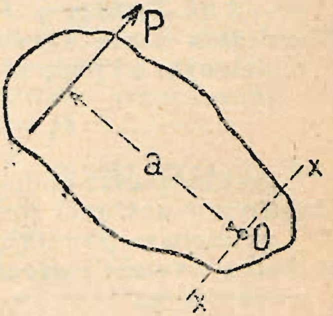
§ 15. Moment statyczny siły pojedynczej.

Jeśli na jakieś ciało, utwierdzone w p. O, działa siła P, to nastąpi obrót tegoż ciała około p. O w kierunku wskazanym strzałką (rys. 70). Miarą tego działania jest — jak przy parze sił — iloczyn siły P przez jej prostopadłą odległość od p. O, czyli t. zw. moment statyczny siły P względem p. O. Odległość a nazywamy ramieniem siły, p. O biegunem momentu. Moment obracający w kierunku wskazówki na zegarze (jak na rys. 70) naz. dodatnim, obracający w kierunku przeciwnym, momentem ujemnym.

Odległość siły P od równoległej osi X—X, przechodzącej przez p. O, jest wszędzie stała i równa a, przeto: Moment siły P względem wszystkich punktów na równoległej osi XX jest równy $M = Pa$.

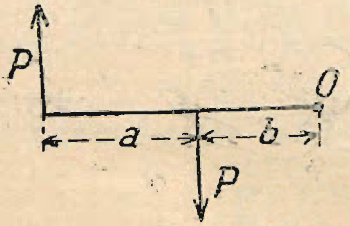
P.

Na mocy tego możemy wykazać, że moment pary sił jest stały dla każdego bieguna na płaszczyźnie. Z rys. 71 wynika moment obu sił względem dowolnego punktu O: $M = P(a+b) - Pb = Pa$. Moment zależy zatem tylko od wielkości i odległości sił P od siebie bez względu na odległość punktu O.

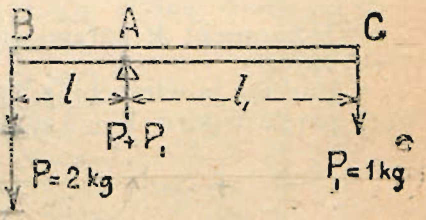


Rys. 70.

Weźmy pod uwagę belkę przytrzymaną w p. A (rys. 72). Jeśli w którymkolwiek jej punkcie umieścimy ciężar P, to belka obróci się około A. Obrót ten da się udaremnić wtedy, jeśli po drugiej stronie podpory umieścimy też ciężar o odpowiedniej wielkości działający w dół. Ciężar równoważący musi być wedle § 14 tem większy, im mniejsza będzie jego odległość od podpory A. Tę prostopadłą odległość siły P od A nazywamy ramieniem siły. Siła P, starając się



Rys. 71.



Rys. 72.

belkę obrócić, wywołuje względem A moment o wielkości Pl; również siła P_1 wywołuje moment $P_1 l_1$, ale o znaku przeciwnym (rys. 72).

Jeśli obrót nie ma nastąpić, t. j. jeśli belka ma pozostać w równowadze, muszą oba momenty być równe t. j.

$$Pl = P_1 l_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8$$

a stąd:

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8a$$

Jest to t. zw. równanie momentów. Dla $l = l_1$ mamy $P = P_1$; dla $l_1 = 2l$, $P = 2P_1$; ogólnie

$$\text{dla } l_1 = nl \qquad P = nP_1 \quad \ldots \ldots \quad 8b.$$

Niech np. drążek BC ma długość 30 cm. Jeśli podparty jest jak na rys. 72 w odległości 10 cm od p. B, to ciężar $P = 2$ kg uwieszony na jego końcu, wywoła moment $M = Pl = 2.10 = 20$ kgcm. Ciężar ten wywołałby obrót drążka. Aby drążek pozostał jednak w równowadze, trzeba w punkcie C, oddalonym od podpory o długość $l_1 = 20$ cm zawiesić ciężar

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} = \frac{2.10}{20} = 1 \text{ kg}.$$

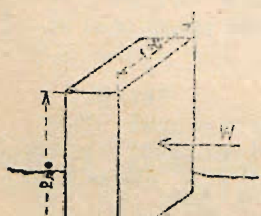
Jeśliby punkt podparcia leżał w środku, to należałoby obustronnie zawiesić równe ciężary $P = P_1$.

Właściwie powstają tu dwie pary sił. Siła P działając na belkę wywołuje prócz obrotu także ciśnienie, t. j siłę w A o wielkości też P (t. zw. oddziaływanie), ale skierowaną ku górze; powstaje więc para sił o momencie Pl. Podobnie siła P_1 wywołuje w A siłę P_1, więc i parę sił $-P_1l_1$. Jak wyżej powiedzieliśmy dwie te pary sił będą w równowadze, jeśli $Pl = P_1l_1$ czyli $Pl - P_1l_1 = 0$.

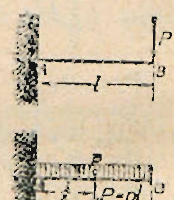
Przykłady 27—30.

27. Na mur pionowy, o wysokości 2,00 m, a długości 1,20 m, działa parcie wiatru z siłą 150 kg na 1 m² muru. Znaleźć moment M parcia wiatru względem podstawy muru (rys. 73).

Mur ma powierzchnię $2{,}00 \times 1{,}20 = 2{,}40$ m²; zatem wielkość parcia wiatru $W = 2{,}40 . 150 = 360$ kg; wypadkowa parcia



Rys. 73.



Rys. 74 i 75.

zaś zaczepia w połowie wysokości, więc w odległości 1 m od podstawy. Stąd moment $M = 360$ kg . 1,00 m = 360 kgm.

28. Chodnik wspiera się na wsporniku AB, umieszczonym w murze (rys. 74). Znaleźć moment ciężaru $P = 900$ kg względem punktu wmurowania A, jeśli $l = 1{,}20$ m, (Por. przykład 9).

Moment ten wynosi: $Pl = 900 . 120 = 108000$ kgcm.

29. Jak wielki będzie moment ciężaru P jak w przykł. 28, jeśli ciężar ten będzie rozłożony jednostajnie na całej długości wspornika (rys. 75).

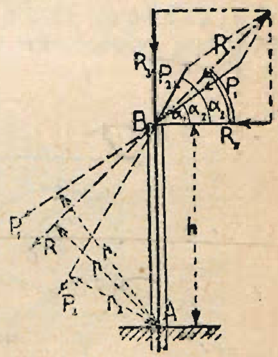
Jeśli ciężar jest rozłożony na całej długości, to moment możemy obliczyć biorąc ciężar jak gdyby skupiony był w środku, t. j. w odległości $\frac{l}{2}$ od punktu wmurowania A.

Wtedy moment: $M = P \cdot \frac{l}{2} = 900 \times \frac{120}{2} = 54000$ kgcm. tj. dwukrotnie mniejszy niż w przykładzie 28.

Ciężar jednostkowy p wynosi w tym razie:

$$p = \frac{P}{l} = \frac{900}{1{,}20} = 750 \text{ kg/mb.}$$

30. Na jarzmo mostowe (rys. 76) działają w punkcie B jednostronnie zastrzały wiązania rozporowego podwójnego $P_1 = 2500$ kg, $P_2 = 4000$ kg, przyczem kąty nachylenia ich do poziomu wynoszą $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = 35^0$. Jak wielki moment zginający wywierają te siły względem podstawy jarzma A, jeżeli wysokość punktu B ponad nią wynosi $h = 2{,}00$ m. (por. przykład 6).



Rys. 76.

a) Wypadkowa R sił P_1 i P_2 wynosi 6360 kg, zaś kąt jej nachylenia do poziomu $\alpha = 44^0 42'$. Odległość prostopadła wypadkowej od podstawy A wynosi więc: $p = h \cos \alpha = 2.00 \cos 44^0 42' = \backsim 2{,}00 . 0{,}709 = 1{,}42$ m*), zatem moment siły R względem podstawy $M = Rr = 6360 . 1{,}42 = 9031$ kgm.

b) Moment ten znaleźć możemy także inaczej. Rozłóżmy mianowicie siłę R na składową poziomą $R_x = 4520$ kg i pionową $R_y = 4470$ kg (por. przykład 6). Moment siły R jest równy mo mentowi obu tych składowych; moment siły R_y jest jednak zerem, gdyż kierunek jej przechodzi przez punkt A; moment M równa się zatem momentowi składowej poziomej R_x. Wtedy $M = R_x\, h = 4520 . 2{,}00 = 9040$ kgm.

(Różnica w obu wartościach na M pochodzi stąd, że w pierwszym rachunku zaokrągliliśmy wartości R i p; różnica ta jest zresztą bardzo mała).

(* Długość $p_1\ p_2$ możemy także znaleźć wprost z wykresu.

c) Wreszcie możemy znaleźć M, obliczając momenty obu sił składowych.

Ramię siły P_1 wynosi: $p_1 = h \cos\alpha_1 = 2,00 . 0,5 = 1,00$ m*), zaś ramię siły P_2

$$p_2 = h \cos\alpha_2 = 2,00 . 0,817 = 1634 \text{ m*)}$$

a stąd moment

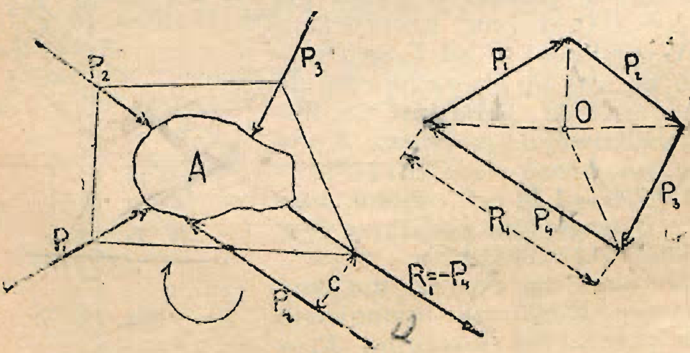
$$M = P_1 p_1 + P_2 p_2 = 2500 . 1,00 + 4000 . 1,634 = 2500 + 6536 = 9036 \backsim$$
$$\backsim 9040 \text{ kgm.}$$

Z tego przykładu widać, że wszystkie trzy drogi prowadzą do tego samego rezultatu.

§ 16. Para sił jako wypadkowa układu sił.

Zdarzyć się może, że wielobok sił zamknie się, t. j. że wszystkie siły dadzą wypadkową równą zeru, ale nie zamknie się wielobok sznurowy, t. j. że pierwszy i ostatni promień wieloboku sznurowego nie przetną się na kierunku tej samej siły P). (Por. rys. 77).

Dla zbadania tego przypadku złóżmy wszystkie siły z wyjątkiem jednej np. P_4 w częściową wypadkową R_1 zapomocą wieloboku sznurowego. Wypadkowa R_1 musi być



Rys. 77.

równą i przeciwną sile P_4, gdyż tylko wtedy zamknie się wielobok sił, co zaznaczyliśmy na początku; jednakowoż siły P_4 i R_1 nie będą leżeć w jednej prostej, choć będą równoległe i równe. Innemi słowy otrzymujemy zatem jako wynik parę sił o wielkości $P_4 c$. Ciało, na które siły tak rozmieszczone działają, zostanie więc wprawione w ruch obrotowy i w równowadze tem samem nie będzie.

*) Długości p_2, p_1, możemy także znaleść wprost z wykresu.

Przykład 31.

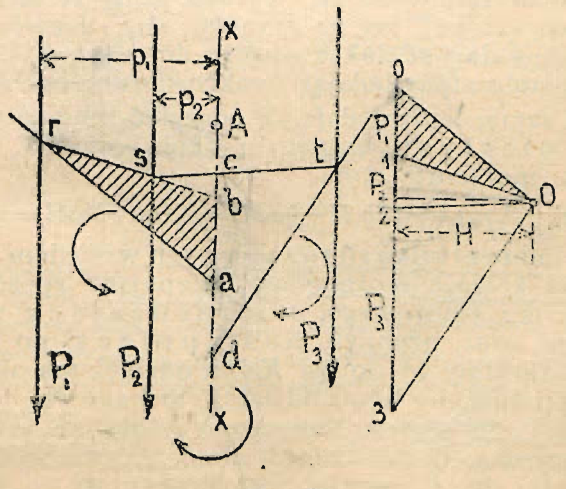
31. Jakie działanie wywrą na ciało A siły $P_1 = 270$ kg, $P_2 = 235$ kg, $P_3 = 235$ kg, $P_4 = 380$ kg, o kierunkach, podanych na rys. 77.

Złożywszy siły P_1, P_2 i P_3, otrzymujemy wypadkową częściową R_1 o wielkości $R_1 = -P_4$ oddaloną o $c = 11$ cm od P_4. Złożywszy zaś te dwie ostatnie siły, otrzymamy moment obracający w kierunku wskazówki na zegarze, więc dodatni, o wielkości: $M = P_4 . c = 380 . 11 = 4180$ kgcm.

Ciało będzie się zatem obracać w kierunku strzałki rys. 77.

§ 17. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił równoległych.

Moment statyczny wyznaczyć można także wykreślnie. Mając np. znaleźć moment jednej siły, np. P_1 układu sił, przedstawionego na rys. 78 względem p. A, prowadzimy przez ten punkt równoległą XX do tejże siły, a następnie przedłu-



Rys. 78.

żamy do XX dwa boki wieloboku sznurowego odpowiadające sile P_1.

Z podobieństwa zakreskowanych trójkątów $01O$ i abr otrzymamy wtedy proporcję:

$p_1 : ab = H : 01$ czyli $p_1 : ab = H : P_1$ skąd: $P_1 p_1 = ab . H = M_1$.

$P_1 p_1$ jest bowiem momentem statycznym M_1 siły P_1 względem p. A leżącego na osi XX czyli względem osi XX (por. § 15). Z równiania 9 wynika, że jest on równy odcinkowi ab, odciętemu promieniami wieloboku sznurowego równoległymi do $O0$ i $O1$, (t. j. do promieni wieloboku sił), odpowiednimi danej sile, pomnożonemu przez odległość biegunową H. Odcinek ba czytamy od dołu do góry, t. j od a do b, gdyż pierwszemu z promieni wieloboku sił $0O$ odpowiada promień sznurowy ar. Moment ten jest ujemny, gdyż obraca w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki na zegarze.

W ten sam sposób z podobieństwa trójkątów $12O$ i bcs udowodnić można, że moment statyczny siły P_2 względem osi XX równy jest iloczynowi odcinka bc i odległości biegunowej H.

Wreszcie, rozumując podobnie, dojdziemy do wniosku, że moment statyczny siły P_3 równy jest odcinkowi cd pomnożonemu przez H Moment ten jest jednakowoż dodatni, a odcinek cd czytać musimy z góry na dół, gdyż w wieloboku sił promień O_2 równoległy do ct idzie przed promieniem O_3 równoległym do td. Wynika stąd, że dla takiego położenia bieguna i sił, jak na rysunku, siły sprawiające momenty dodatnie dają odcinki z góry na dół, siłom zaś dającym momenty ujemne odpowiadają odcinki o kierunku przeciwnym.

Na tej samej figurze dają się odczytać momenty kilku sił równoległych względem danej osi XX. Np. siły P_1 i P_2 dają moment:

$$M_{12} = -(P_1 p_1 + P_2 p_2) = -(ab.H + bc.H) = -(ab + bc)H = -ac.H \quad 9a$$

Zatem moment kilku sił równoległych względem punktów na danej osi znaleźć możemy w następujący sposób: Promień wieloboku sznurowego, poprzedzający pierwszą z danych sił, oraz promień następujący po ostatniej z nich, przedłużamy aż do osi XX, a odcinek tak otrzymany na tej osi, pomnożony przez odległość biegunową, daje wielkość momentu statycznego danych sił względem osi XX.

Stąd wynika także bezpośrednio, że moment całego układu sił P_1, P_2, P_3 równy jest iloczynowi $ad.H$, gdyż:

$$M_{123} = -P_1 p_1 - P_2 p_2 + P_3 p_3 = (-ab - bc + cd)H = ad.H = \quad 9b$$

Moment ten jest dodatni, gdyż odcinek ad skierowany jest z góry na dół.

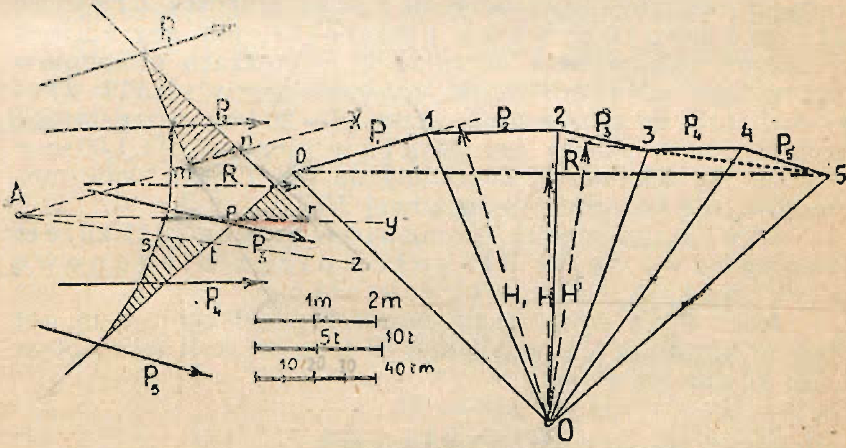
Wiemy, że (o ile nie zachodzi wypadek pary sił), wypadkowa układu sił leży w punkcie przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego. Jeśli zatem szukamy momentu układu sił ze względu na tę wypadkową, to suma odcinków na niej równa jest zeru (gdyż suma odcinków dodatnich równa jest sumie odcinków ujemnych). Np. na rys. 52 moment siły $P_1 ... P_5$ względem siły R równy jest zeru, a odcinek utworzony na niej promieniami skrajnymi, równoległymi do $0O$ i $5O$ równa się też zeru.

§ 18. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił dowolnych względem dowolnego bieguna.

W zupełnie podobny sposób, co w § 17 udowodnić można, że moment siły P_1 względem punktu A (por. rys. 79) równy jest odcinkowi mn na osi AX równoległej do siły P_1 pomnożonemu przez odległość biegunową H_1 odpowiednią sile P_1:

$$M_1 = mn . H_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

Podobne wartości otrzymamy dla sił następnych, wziętych pojedynczo, odległość biegunowa jest tutaj jednakowoż dla każdej siły inna. Dla znalezienia momentu wszystkich sił $P_1 ...$



Rys. 79.

P_5 zauważmy, że zamiast nich możemy wziąć **w y p a d k o w ą** i c h R i dla niej obliczyć moment. Wynosić on będzie:

$$M_R = pr . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

(Moment ten jest dodatni).

Zatem moment statyczny układu dowolnych sił $P_1 P_2 ...$ względem p. A, znaleźć możemy w następujący sposób: Przez p. A prowadzimy oś Ay równoległą do wypadkowej R, a długość odcięta na tejże osi skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, pomnożona przez odległość biegunową wypadkowej H daje moment statyczny wszystkich sił względem punktu A.

Odległość biegunową uważać można także za siłę, a mianowicie za prostopadłą do wypadkowej składową sił, określonych skrajnymi bokami wieloboku sił, t. j. sił I i V (por. rys. 50 str. 23) lub sił $O0$ i $O5$ (rys. 79). Ponieważ zaś moment $M = pr . H$, przeto najlepiej jest przyjąć tę odległość biegunową w okrągłej liczbie np. 1, 2, 4, 5, 10, 20 ton, co znacznie ułatwia rachunek. Ważne to jest zwłaszcza dla sił równoległych.

Wyżej, w § 14, zaznaczyliśmy, że moment mierzy się w kgm (lub tm), że zatem, aby otrzymać moment, trzeba pomnożyć siłę przez długość. Jeśli zatem we wzorze 11 (też 9 lub 10) jeden mnożnik (najczęściej H) uważamy za siłę, to mnożnik drugi (zwykle odcinek pr) mierzyć musimy w jednostkach długości.

Niech np. odcinek pr odczytamy w skali długości, ma długość 1,20 m, zaś odległość biegunowa w skali sił $H = 20$ ton, to moment będzie wynosił $M = H . pr = 20$ t. 1,2 m = = 24 tm = 24000 kgm. Zamiast jednak mnożyć w ten sposób, możemy, uwzględniając skalę sił i skalę długości, przyjąć dla momentów nową podziałkę, tak, aby odcinek pr można było odrazu odczytać w jednostkach momentów (np. w kgm lub tm). Długość wyobrażająca w skali długości 1,00 m pomnożona przez $H = 20$ ton, przedstawiać będzie teraz w skali momentów moment 20 t. 1,00 m = = 20 tm. Tę też długość określimy na rys. 79 jako skalę momentów (dla odległości biegunowej H).

Skala (podziałka) momentów równa jest zatem iloczynowi skali długości przez biegunową mierzoną w jednostkach sił.

Jeżeli np. 1 cm w skali długości przedstawia 1 m, zaś długość biegunową przyjęliśmy 10 t, to w skali momentów 1 cm równa się 10 tm.

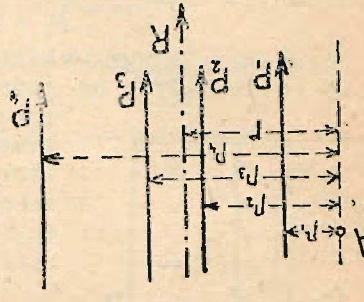
Przykład 32.

32. Jak wielki moment wywołują w rys. 79 siły P_4 i P_5 względem punktu A.

Wypadkowa sił P_4 i P_5 jest równoległa do linji 35 oznaczonej w wieloboku sił linją kropkowaną. Prowadzimy więc przez punkt A linję Az równoległą do 35 i przedłużamy do niej promienie wieloboku sznurowego równoległe do $3O$ i do $O5$, otrzymując odcinek st wynoszący (w skali długości) $st = 0{,}88$ m. Odległość biegunowa odpowiednia siłom P_4 i P_5 (t. j. ich wypadkowej) wynosi $H' = 22{,}4$ t. Siły P_4 i P_5 wywołują przeto względem punktu A moment o wielkości $M' = 22{,}4 \text{ t} \times 0{,}88 \text{ m} = 19{,}7$ tm.

§ 19. Rachunkowe składanie sił równoległych.

Z § 15 wynika, że w ogólności każda siła P_n na danej płaszczyźnie wywołuje około każdego punktu na tejże płaszczyźnie moment obrotu o wielkości $P_n . p_n$ gdzie p_n oznacza prostopadłą odległość siły od tego punktu. Ponieważ zaś układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową, przeto i całkowite działanie obrotowe czyli moment obrotu tej wypadkowej musi być równy sumie momentów wszystkich sił składowych około tego samego punktu (rys. 80 por. § 17) czyli:



Rys. 80.

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P\,p = \Sigma P p \quad . \; . \; . \; 12$$

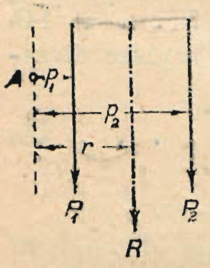
Udowodnić to da się w sposób następujący (por. rys. 81):

Niech P_1 i P_2 będą dwiema siłami równoległemi, które należy złożyć w wypadkową R, to moment siły R względem dowolnego punktu A wynosi:

$$Rr = (P_1 + P_2)\, r = P_1 r + P_2 r$$

$$Rr = P_1 p_1 + P_1 (r - p_1) + P_2 p_2 - P_2 (p_2 - r)$$

$$= P_1 p_1 + P_2 p_2 + [P_1 (r - p_1) - P_2 (p_2 - r)]$$



Rys. 81

ale $\dfrac{r - p_1}{p_2 - r} = \dfrac{P_2}{P_1}$ wedle 7.

a stąd $P_1 (r - p_1) = P_2 (p_2 - r)$, a więc:

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 \quad . \; . \; . \; . \; 12a$$

Podobnie przeprowadza się dowód dla większej ilości sił.

Równanie 12 pozwala nam znaleźć rachunkowo wielkość i położenie wypadkowej układu sił równoległych. Otrzymamy tu bowiem, przyjmując zupełnie dowolnie punkt obrotu A (rys. 80),

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots$$

a stąd
$$r = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 12b$$

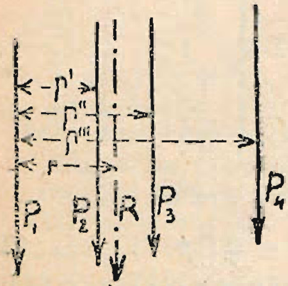
gdzie
$$R = P_1 + P_2 + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 13$$

Niekiedy wygodnie jest przyjąć punkt obrotu na jednej z sił np. na P_1, a wtedy (rys. 82):

$$Rr = P_1 . 0 + P_2 p' + P_3 p'' + \ldots$$

$$r = \frac{P_2 p' + P_3 p'' + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots} \quad \ldots \ldots \quad 12c$$

Podobnie przeprowadza się też rachunkowe rozkładanie sił równoległych na dwie (por. rys. 13) składowe. Mając np. rozłożyć siłę R (rys. 53) na składowe P_1 i P_2, obieramy jako środek momentu punkt leżący na jednej z tych sił, np. na P_2. Wtedy moment siły P_2 względem tego punktu jest zerem; otrzymamy zatem:



Rys. 82.

$$P_1 (a + b) = Rb$$

a stąd $$P_1 = \frac{b}{a+b} R \quad \ldots \quad 14$$

Wielkość siły P_2 otrzymać możemy, przyjmując środek momentu na kierunku P_1.

Otrzymamy wtedy: $P_2 (a + b) = Ra$,

a stąd $$P_2 = \frac{a}{a+b} R \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14a$$

Łatwiej jednak znajdziemy ją z warunku, że suma sił składowych P_1 i P_2 musi być równa sile R czyli: $R = P_1 + P_2$, a stąd:

$$P_2 = R - P_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14b$$

Wstawiajac wartość na P_1 w równanie powyższe otrzymamy:

$$P_2 = R - \frac{b}{a+b} R = \frac{a}{a+b} R \quad \ldots \ldots \quad 14c$$

zatem tę samą wartość co we wzorze 14a.

§ 20. Rachunkowe składanie sił o różnych kierunkach nie przechodzących przez jeden punkt, a leżących na płaszczyźnie.

Jeśli mamy znaleźć drogą rachunkową wielkość i położenie wypadkowej układu sił o różnych kierunkach, a nie przechodzących przez jeden punkt, postępujemy w sposób następujący (rys. 63).

Przyjmujemy dowolny punkt jako biegun momentu, a zarazem przeprowadzamy przezeń dwie prostopadłe do siebie osi układu spółrzędnych *(X, Y)* i rozkładamy wszystkie siły na składowe w kierunkach *X* i *Y*. Następnie wyznaczamy R_x i R_y, wypadkowe składowych równoległych do osi *X* i *Y*, a te wypadkowe częściowe złożone w wypadkową *R* dadzą wypadkową wszystkich sił działających. Rachunkowo otrzymamy:

moment statyczny składowych równoległych do osi x:

$$P_1 y_1 \cos a_1 + P_2 y_2 \cos a_2 + \ldots = R_x y \quad \ldots \quad 15$$

moment statyczny składowych równoległych do osi y:

$$P_1 x_1 \sin a_1 + P_2 x_2 \sin a_2 + \ldots = R_y x \quad \ldots \quad 15a$$

gdzie $R_x = P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots \ldots \ldots \quad 16$

$$R_y = P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots \ldots \ldots \quad 16a$$

Z równań tych znajdziemy:

$$x = \frac{P_1 x_1 \sin a_1 + P_2 x_2 \sin a_2 + \ldots}{P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots} \quad \ldots \quad 17$$

$$y = \frac{P_1 y_1 \cos a_1 + P_2 y_2 \cos a_2 + \ldots}{P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots} \quad \ldots \quad 17a$$

x i y są spółrzędnemi jednego punktu, przez który przechodzi wypadkowa *R*. Wielkość jej wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \ldots \ldots \quad 18$$

Jeśli zachodzi równowaga, to wypadkowa równa się zeru, a tem samem i jej moment oraz moment wszystkich sił względem dowolnego punktu równa się też zeru, zatem:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + \ldots &= 0 \\ P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + \ldots &= 0 \\ P_1 x_1 \sin a_1 + P_2 x_2 \sin a_2 + \ldots &= 0 \\ P_1 y_1 \cos a_1 + P_2 y_2 \cos a_2 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 19$$

Przykłady 33—35.

33. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej układu sił wedle rys. 56 (por. przykład 20).

Jako biegun momentu weźmiemy punkt początkowy układu *A*, gdyż mamy podane wprost odległości sił od tego punktu. Wielkość wypadkowej *R* wynosi:

$$R = 1600 + 1400 + 1800 + 1200 = 6000 \text{ kg}$$

$$x = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots}{R} =$$

$$= \frac{1600 \cdot 0{,}9 + 1400 \cdot 2{,}5 + 1800 \cdot 3{,}3 + 1200 \cdot 4{,}6}{6000} = 2{,}69 \text{ m}$$

Ten sam wynik otrzymamy, biorąc momenty poszczególnych sił względem punktu leżącego na jednej z nich np. względem P_1. Wtedy otrzymamy:

$$x' = \frac{P_1 . 0 + P_2 (p_2 - p_1) + P_3 (p_3 - p_1) + P_4 (p_4 - p_1)}{R} =$$

$$= \frac{1400 . 1,6 + 1800 . 2,4 + 1200 . 5,7}{6000} = 1,79 \text{ m}.$$

Odległość wypadkowej od punktu A wynosi:

$x = 1,79 + 0,9 = 2,69$ m, zatem jak wyżej.

W zadaniu 20 znaleźliśmy wykreślnie wypadkową o tej samej wielkości i tem samem położeniu. Różnica między odległością 1,80 m, a 1,79 m jest bardzo mała i nie ma znaczenia.

34. Dane są trzy siły równoległe $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 800$ kg, $P_3 = 700$ kg. Należy znaleźć ich wypadkową R i jej położenie oraz obliczyć dwie siły równoległe O_1 i O_2, przechodzące przez punkty M i N, a równoważące je. (Por. zad. 25 i rys. 61).

Dla znalezienia wypadkowej obliczymy moment względem jednej z sił np. P_3; otrzymamy wtedy:

$$P_1 (60 + 80) + P_2 . 80 - Rr = 0$$

gdzie $R = P_1 + P_2 + P_3 = 400 + 800 + 700 = 1900$ kg. Zatem:

$$r = \frac{1}{1900} (400 . 140 + 800 . 80) = 62 \text{ cm}.$$

Jeżeli siły O_1 i O_2 mają być w równowadze z siłą R (czyli z siłami P_1, P_2, P_3), to moment ich względem dowolnego punktu musi być równy i wprost przeciwny momentowi siły R. Obierzmy punkt ten na kierunku (nieznanej jeszcze) siły O_2, to otrzymamy:

$$O_1 (20 + 60 + 80 + 70) - R (62 + 70) = 0$$

a stąd: $$O_1 = \frac{R . (62 + 70)}{20 + 60 + 80 + 70} = \frac{1900 . 132}{230} = 1090 \text{ kg}$$

zaś $O_2 = R - O_1 = 1900 - 1090 = 810$ kg, zatem wartości te same, co znalezione wykreślnie w przykładzie 25.

Jeżeli siły P_1, P_2, P_3 działają na belkę podpartą siłami O_1 i O_2, to te ostatnie nazywamy **oddziaływaniami** belki (porównaj § 3 i 23).

35. Znaleźć wypadkową układu sił przedstawionego na rys. 62 i 63 sposobem rachunkowym, jeśli:

$P_1 = 680$ kg,	$P_2 = 600$ kg,	$P_3 = 400$ kg,	$P_4 = 500$ kg,
$\alpha_1 = 20^0$	$\alpha_2 = 42^0$	$\alpha_3 = 47^0$	$\alpha_4 = 17^0$
$x_1 = 1,10$ m,	$x_2 = 2,00$ m,	$x_3 = 4,30$ m,	$x_4 = 5,00$ m,
$y_1 = 1,80$ m,	$y_2 = 4,20$ m,	$y_3 = 5,20$ m,	$y_4 = 2,60$ m,

(Porównaj przykład 26).

Jako biegun momentu przyjmiemy początek układu A. Otrzymamy wtedy:

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + \ldots = -680 \cos 20^0 - 600 \cos 42^0 + 400 \cos 47^0 + \\ + 500 \cos 17^0 = -680 . 0{,}940 - 600 . 0{,}743 + 400 . 0{,}682 + 500 . 0{,}956 = \\ = -639 - 446 + 273 + 478 = -334 \text{ kg}.$$

Znak — oznacza, że siła R_x skierowana jest w lewo.

$$R_y = P_1 \sin \alpha_1 + \ldots = -680 \sin 20^0 + 600 \sin 42^0 + 400 \sin 57 - \\ - 500 \sin 17^0 = -680 . 0342 + 600 . 0669 + 400 . 0{,}731 + 500 . 0{,}292 = \\ = -233 + 401 + 292 - 146 = +314 \text{ kg}.$$

Znak + oznacza, że siła R_y skierowana jest ku górze.

Odstęp siły R_y od punktu A wynosi:

$$x = \frac{P_1 x_1 \sin \alpha_1 + \ldots}{P_1 \sin \alpha_1 + \ldots} = \frac{(P_1 \sin \alpha_1) x_1 + \ldots}{R_y} = \\ = \frac{+233 . 1{,}1 - 401 . 2{,}0 - 292 . 4{,}3 + 146 . 5{,}0}{-314} = +3{,}35 \text{ m}$$

$$y = \frac{P_1 y_1 \cos \alpha_1 + \ldots}{P_1 \cos \alpha_1 + \ldots} = \frac{(P_1 \cos \alpha_1) y_1 + \ldots}{R_x} = \\ = \frac{-639 . 1{,}8 - 446 . 4{,}2 + 273 . 5{,}2 + 478 . 2{,}6}{334} = +1{,}08 \text{ m}.$$

Przez punkt określony spółrzędnemi $x = +3{,}35$ m, $y = +1{,}08$ m przechodzi zatem wypadkowa. Wielkość jej wynosi:

$$R = \sqrt{R_{x^2} + R_{y^2}} = \sqrt{334^2 + 314^2} = 445 \text{ kg}.$$

Kierunek jej określić możemy zapomocą kąta α, jaki R tworzy z osią X. Wynosi on:

$$tg\, \alpha = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{314}{334} = -0{,}943$$

skąd:

$$\alpha = -43^0 20', \text{ względnie } \alpha' = 90^0 + 43^0 20' = 133^0 20'.$$

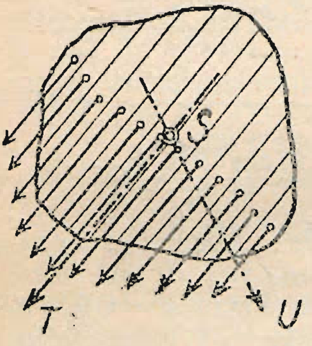
D. Środek ciężkości figur płaskich.

§ 21. Środek ciężkości.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię o jakimkolwiek dowolnym kształcie, wyciętą np z blachy, i podzielmy ją na wąskie równoległe paski w dowolnym kierunku (rys. 83). Każdy z tych pasków posiada pewien ciężar, a zatem posiada pewną siłę proporcjonalną do swojej powierzchni. Wypadkową ST tych wszystkich sił nazywamy osią ciężkości.

Jeśli ciężary pasków zaczepimy lub jeśli wogóle podział ich przeprowadzimy w innym kierunku, otrzymamy w podobny sposób inną oś ciężkości np. SU, przecinającą się z poprzednią w p. S. Można udowodnić, że przez ten sam punkt S przechodzą wszystkie osie ciężkości danej figury; nazywamy go środkiem ciężkości.

Z powyższego wynika ogólny sposób znalezienia środka ciężkości. Dany przekrój dzieli się na dowolne części, najczęściej paski, których środki ciężkości są znane albo łatwo dadzą się wyznaczyć, zaczepia się w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków i znajduje wypadkową tych sił. Oznaczając przez F_1, F_2... powierzchnie poszczególnych pasków, przez F powierzchnię całego przekroju, przez e_1, e_2... odległości ich środków ciężkości od dowolnej podstawy, otrzymamy (wedle wzozu 12) na odległość e środka ciężkości całego przekroju od tej samej podstawy wzór:



Rys. 83.

$$e = \frac{F_1 e_1 + F_2 e_2}{F} \quad . \; . \; . \quad 20$$

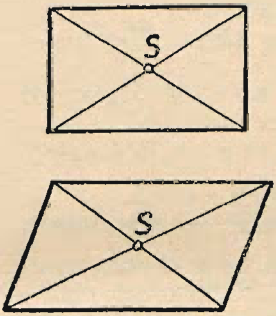
Potem w tych samych punktach zaczepia się te same siły, ale w jakimś innym kierunku czyli poprostu obraca się daną figurę i znów szuka wypadkowej. W punkcie przecięcia obu wypadkowych leży środek ciężkości przekroju. Bardzo wąskie paski uważać można za linje proste, których środek ciężkości leży oczywiście w środku ich długości.

Zamiast rachować można też postąpić tak: Wycina się figurę o danym kształcie z materjału jednolitego np. z grubego kartonu i zawiesza w dowolnym punkcie, uważając, aby figura mogła swobodnie obrócić się około punktu zawieszenia. Na pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia, leży środek ciężkości. Zaznaczyć ją można przy pomocy nitki z ciężarkiem, przyłożonej do punktu zawieszenia. Jest to jedna oś ciężkości. Następnie zawiesza się figurę w innym punkcie, również dowolnie przyjętym i postępuje się tak samo. Na przecięciu obu osi ciężkości leży środek ciężkości.

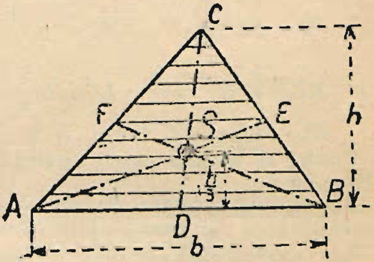
§ 22. Środki ciężkości pól niektórych figur płaskich.

1. Prostokąt (rys. 84). Podzieliwszy prostokąt na paski o równej szerokości, otrzymujemy równą powierzchnię każdego z nich; wypadkowa zatem leżeć będzie w środku geometrycznym S prostokąta. Podobnie otrzymamy środek ciężkości równoległoboku (rys. 85).

2. Trójkąt. Podzielmy trójkąt ABC (rys. 86) na wąskie paski równoległe do jednego z boków, np. do AB. Środek ciężkości każdego z nich leży w środku długości, więc środek ciężkości całego trójkąta



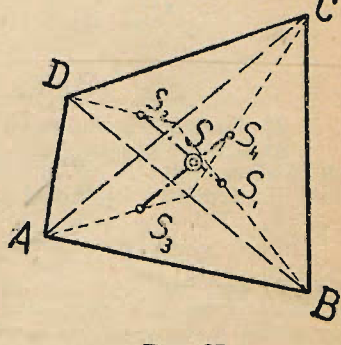
Rys. 84 i 85.



Rys. 86.

leżeć musi na linji CD łączącej środek boku AB z p. C, a tem samem i wszystkie środki pasków. Linja CD jest zatem osią ciężkości. W ten sam sposób, dzieląc bok BC i łącząc p. E z A otrzymamy drugą oś ciężkości. Na ich przecięciu leży p. S.

Punkt przecięcia linji CD i AE (a więc i BF) dzieli te linje w stosunku 2:1 (np. $CS:DS = 2:1$ i t. d.); zatem linja pozioma MN przechodząca przez środek ciężkości oddalona jest od podstawy o trzecią część odpowiedniej wysokości.



Rys. 87.

3. Figura symetryczna. Oś symetrji jest tu zawsze osią ciężkości, gdyż po obu jej stronach powierzchnia przekroju rozłożona jest zupełnie tak samo. Jeżeli są dwie osi symetrji (np. rys 84), to środek powierzchni leży w punkcie ich przecięcia; jeżeli tylko jedna, to trzeba znaleźć drugą oś ciężkości w jeden ze sposobów podanych w § 21.

4. Czworobok nieregularny (rys. 87) dzielimy na dwa trójkąty ABC i ACD o środkach ciężkości S_1 i S_2, a potem na trójkąty ABD i BCD o środkach ciężkości S_3 i S_4. Środek ciężkości czworoboku leży na przecięciu linji $S_1 S_2$ i $S_3 S_4$.

5. Trapez (rys. 88). Podobnie jak w trójkącie, tak i w trapezie jedną z osi ciężkości jest linja EF, łącząca środek boku CD ze środkiem podstawy AB. Dla znalezienia drugiej osi ciężkości, możemy

podzielić trapez na równoległobok $ADCI$ o środku ciężkości S_1 i trójkąt BCI o środku ciężkości S_2. Prosta $S_1 S_2$ będzie drugą osią ciężkości trapezu, która, przedłużona, przecina oba boki równoległe w G i H. Poprowadźmy wreszcie przez S_1 i S_2 proste FK i $ŁL$ równoległe do AD, to z podobieństwa trójkątów KGS_1 i $ŁGS_2$ wynika:

$$KS_1 : ŁS_2 = \frac{h}{2} : \frac{h}{3} = 3:2$$

$$KS_1 : ŁS_2 = KG : ŁG = 3:2, \text{ a stąd}$$

$$ŁG = {}^2/_3\, KG, \text{ więc}$$

$$KŁ = {}^1/_3\, KG \text{ i } ŁG = 2\, KŁ.$$

Jeśli boki równoległe razem wynoszą $AB = a$, $CD = b$, to

$$IK = AK = \frac{b}{2} \qquad IŁ = \frac{a-b}{3}, \text{ więc } ŁB = 2\, IŁ = {}^2/_3 (a-b)$$

$$KŁ = \frac{b}{2} + \frac{a-b}{3} \qquad ŁG = 2\left(\frac{b}{2} + \frac{a-b}{3}\right) = b + {}^2/_3 (a-b)$$

$$BG = ŁG - ŁB = [\,b + {}^2/_3 (a-b)] - {}^2/_3 (a-b) = b,$$

Punkt G można więc znaleźć odcinając na przedłużeniu boku AB długość b.

Zupełnie podobnie da się udowodnić, że p. H otrzymamy, odcinając długość a na przedłużeniu boku CD. Wynika stąd reguła:

Dla znalezienia środka ciężkości trapezu należy poprowadzić a) prostą EF łączącą środki boków równoległych trapezu, b) prostą GH, którą otrzymamy odcinając na przedłużeniu boku górnego bok dolny, a na przedłużeniu dolnego górny — i łącząc otrzymane w ten sposób punkty G i H. Środek ciężkości leży na przecięciu linji EF i GH

Rachunkowo określa się położenie ciężkości trapezu (por. rys. 89), z wzorów:

$$e = \frac{h}{3}\,\frac{2a+b}{a+b} \qquad e_1 = h - e = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$$

Przykłady 36—41.

36. Znaleźć rachunkowo środek ciężkości teownika NP 8.

a) Dzieląc przekrój na dwa prostokąty (por. rys. 90), otrzymamy ich powierzchnie: $F_1 = 9.53 = 447\ \mathrm{mm}^2$, $F_2 = 80.9 = 720\ \mathrm{mm}^2$; a więc odległość „$e$" środków ciężkości przekroju od podstawy ze wzoru 20:

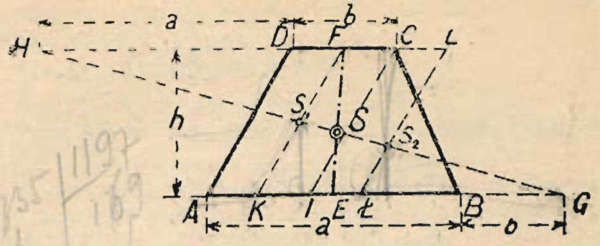
$$e_1 = \frac{F_1 e + F_2 e_2}{F_1 + F_2} = \frac{477 \,.\, 35{,}5 + 720 \,.\, 4{,}5}{477 + 720} = 16{,}9 \text{ mm}.$$

b) Tę samą wartość otrzymamy ze wzoru 7. Wypadkowa dwu sił równoległych o tym samym toku dzieli mianowicie odstęp między niemi w odwrotnym stosunku do ich wielkości. Odległość środków ciężkości obu prostokątów wynosi: $m = m_1 + m_2 = 31$ mm; siły zaś zaczepiające w nich są równe powierzchniom prostokątów. Zatem $m_1 : m_2 = F_2 : F_1$, czyli $(m_1 + m_2) : m_2 = (F_2 + F_1) : F_1$, a stąd:

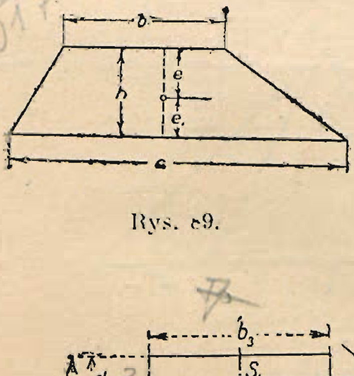
$$m_2 = \frac{(m_1 + m_2)\, F_1}{F_1 + F_2} = \frac{31 \,.\, 477}{477 + 720} = 12{,}4 \text{ mm, a stąd } e_1 = m_2 + 4{,}5 = 12{,}4 + 4{,}5 =$$

$= 16{,}9$ m czyli ta sama wartość, co wyżej obliczona.

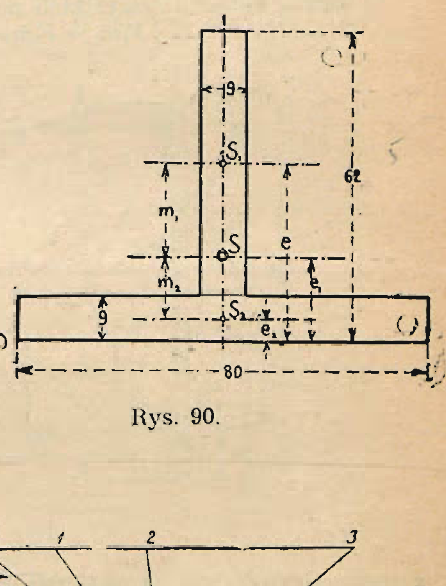
37. Znaleźć środek ciężkości przekroju podanego na rys. 91 ($b_1 = 10$ cm, $b_2 = 3$ cm, $b_3 = 7$ cm, $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 6$ cm, $d_3 = 2$ cm).



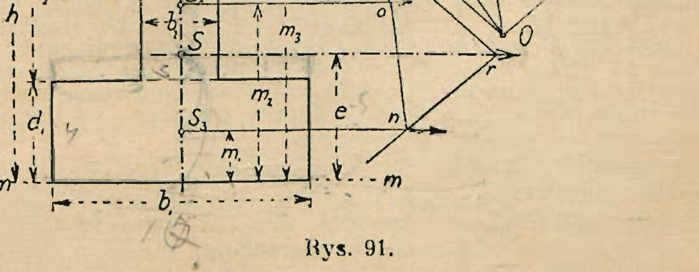
Rys. 88.



Rys. 89.



Rys. 90.



Rys. 91.

Powierzchnie poszczególnych prostokątów wynoszą:

$$F_1 = b_1 d_1 = 10.4 = 40 \text{ cm}^2$$
$$F_2 = b_2 d_2 = 3.6 = 18 \text{ cm}^2$$
$$F_3 = b_3 d_3 = 7.2 = 14 \text{ cm}^2$$

Pow. całego przekroju $F = 72 \text{ cm}^2$

Odległości poszczególnych prostokątów od osi mm:

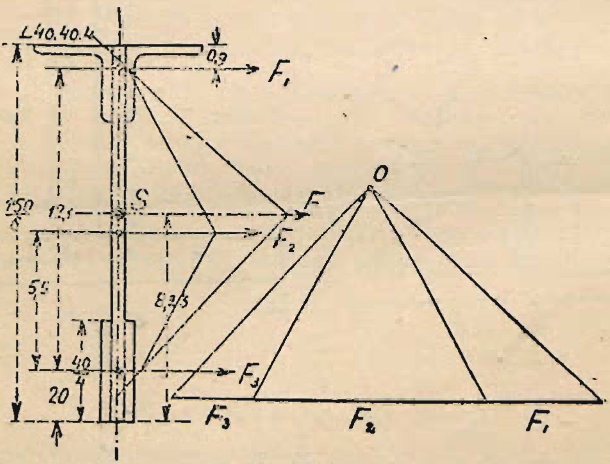
$$m_1 = \frac{d_1}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$m_2 = d_1 + \frac{d_2}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$m_3 = d_1 + d_2 + \frac{d_3}{2} = 11 \text{ cm}.$$

Zatem moment wszystkich powierzchni względem osi mm:

$$F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3 = Fe$$



Rys. 92.

a stąd odległość środka ciężkości S od osi mm:

$$e = \frac{1}{F}(F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3) = \frac{1}{72}(40.2 + 18.7 + 14.11) = 5 \text{ cm}$$

Chcąc znaleźć środek ciężkości wykreślnie, dzielimy przekrój w danym wypadku na trzy części i zaczepiamy w ich środkach siły o wielkości $F_1 = 40 \text{ cm}^2$, $F_2 = 18 \text{ cm}^2$, $F_3 = 14 \text{ cm}^2$. Następnie wykreślamy wielobok sił $0123O$, i wielobok sznurowy $nopr$; na przecięciu boków skrajnych nr i pr (i na osi symetrji) leży środek ciężkości ciała.

38. Należy znaleźć środek ciężkości przekroju jak na rys. 92 uwzględniając tablice kształtowników.

Powierzchnia 2 kątowników 30 30.4 wynosi	$F_1 =$	$2.2{,}25 = 4{,}5 \text{ cm}^2$
Powierzchnie blachy	$F_2 =$	$15.0{,}6 = 9{,}0 \text{ cm}^2$
Powierzchnie płaskowników 40.4	$F_3 =$	$2.4{,}0\ 0{,}4 = 3{,}2 \text{ cm}^2$
Całkowita powierzchnia	$F =$	$16{,}7 \text{ cm}^2$

Biorąc moment względem osi przechodzącej przez środek ciężkości płaskowników otrzymamy:

$$m = \frac{4{,}5 \,.\, 12{,}1 + 9 \,.\, 5{,}5}{16{,}7} = 6{,}23 \text{ m.}$$

Środek ciężkości oddalony jast zatem od dolnej krawędzi o długość $6{,}23 + 2{,}0 = 8{,}23$ cm.

Tę samą wartość otrzymaliśmy wykreślnie.

39. Znaleść środek ciężkości przekroju podanego na rys. 93.

a) Powierzchnie poszczególnych pasków wynoszą:

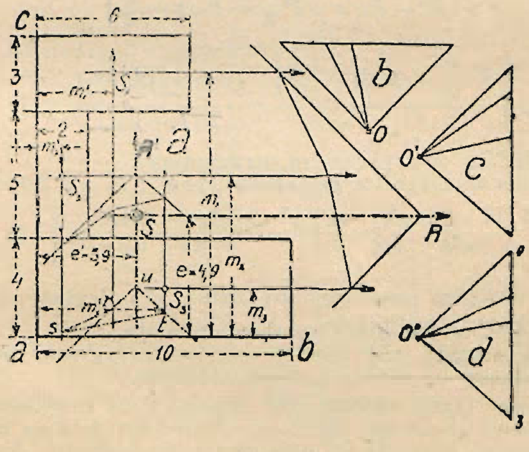
$F_1 = 3 \,.\, 6 = 18$ m² $\quad F_2 = 5 \,.\, 2 = 10$ cm² $\quad F_3 = 4 \,.\, 10 = 40$ cm²

Odległości ich środków ciężkości od dowolnie wybranej prostej, np. od podstawy ab:

$m_1 = 4 + 5 + 1{,}5 = 10{,}5$ cm $\quad m_2 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5$ cm $\quad m_3 = 2$ cm

Odległość środka ciężkości od podstawy (porównaj wzór 20):

$$e = \frac{1}{F}(F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3) = \frac{18 \,.\, 10{,}5 + 10 \,.\, 6{,}5 + 40 \,.\, 3}{18 + 10 + 40} = \frac{334}{68} = 4{,}9 \text{ cm.}$$



Rys. 93.

Dla znalezienia drugiej osi ciężkości zaczepiamy siły proporcjonalne do powierzchni poszczególnych pasków w innym dowolnie obranym kierunku. W danym wypadku najlepiej użyć równoległego do ac. Otrzymamy wtedy odległości środków ciężkości pasków od ac:

$m'_1 = 3$ cm $\quad m'_2 = 1$ cm $\quad m'_3 = 5$ cm,

a stąd:

$$e' = \frac{1}{F}(F_1 m_1' + F_2 m_2' + F_3 m_3') = \frac{18 \,.\, 3 + 10 \,.\, 1 + 40 \,.\, 5}{68} = \frac{264}{68} = 3{,}9 \text{ cm.}$$

b) Wykreślnie znajdziemy środek ciężkości zapomocą wieloboku sznurowego. W tym celu zaczepiamy w środkach ciężkości S_1, S_2, S_3 poszczególnych prostokątów siły poziome proporcjonalne do ich powierzchni F_1, F_2, F_3 (rys. 92 b), kreślimy wielobok sił i, dla przyjętego bieguna O, wielobok sznurowy, z którego otrzymamy jedną oś ciężkości SR. Następnie te same siły zaczepiamy w innym kierunku, np. pionowym. Ponieważ jednak siły następować będą teraz w porządku F_2, F_1, F_3, przeto w tym też porządku kreślimy drugi wielobok sił z biegunem R' (rys. 92c) i znajdujemy drugą oś ciężkości SO'. Na przecięciu linji SR i SR' leży środek ciężkości całego przekroju S, zgodnie z poprzednim rachunkowym wynikiem.

Moglibyśmy jednak znaleźć pionową oś ciężkości SR', nie zmieniając wcale porządku sił. Wykreślmy mianowicie wielobok sił pionowych F_1, F_2, F_3 (rys. 92d), nie zmieniając ich porządku i wykreślmy dla bieguna O'' wielobok sznurowy. Pierwszy bok tegoż doprowadzamy do przecięcia z siłą F_1 w punkcie r, stąd kreślimy bok rs równoległy do $O''1$ itd Wypadkową, przechodzącą przez punkt przecięcia boków skrajnych ru i tu jest znów ta sama oś ciężkości pionowa SR'.

40. Znaleźć środek ciężkości przekroju dwuteownika osłabionego dwoma nitami. ($\perp$ NP 28 a; nity Φ 20 mm).

Niech F oznacza znaną powierzchnię dźwigara (rys. 94), zaś F_n powierzchnię obu dziur na nity ($F_n = 2\,dg$), to biorąc moment względem osi mm, otrzymamy:

$$(F - F_n)\,x = F\frac{h}{2} - F_n\left(h - \frac{g}{2}\right)$$

a stąd:
$$x = \frac{F\dfrac{h}{2} - F_n\left(h - \dfrac{g}{2}\right)}{F - F_n} = \frac{Fh - F_n(2h - g)}{2\,(F - F_n)}$$

W przykładzie szczegółowym otrzymamy:
$F = 78{,}85\ \text{cm}^2$ (porównaj tablice kształtowników): $F_n = 2 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}7 = 6{,}8\ \text{cm}^2$

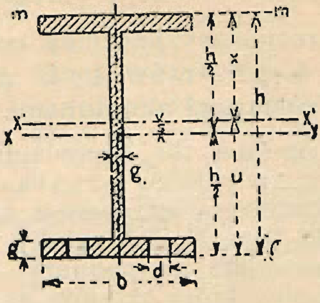
$$x = \frac{78{,}75 \,.\, 14 - 6{,}8 \,.\, (28 - 0{,}85)}{78{,}85 - 6{,}8} = \frac{1103{,}9 - 184{,}6}{78{,}85 - 6{,}8} = 12{,}76\ \text{cm}.$$

Środek ciężkości przesunął się zatem o odległość $S = \frac{h}{2} - x =$ $= 14{,}0 - 12{,}76 = 1{,}24$ cm od pierwotnego położenia.

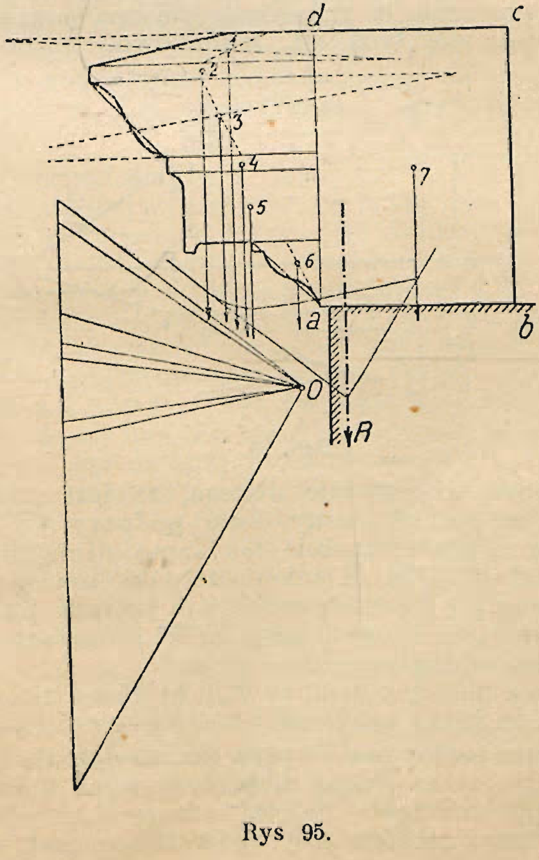
41. Należy zbadać, czy środek ciężkości gzymsu, podanego na rys. 95 jest podparty na murze poniżej leżącym.

W tym celu trzeba zbadać, czy pionowa oś ciężkości przechodzi przez podstawę. Dzielimy więc przekrój kamienia na paski, przyczem dla większej wygody z prostokąta podpartego bezpośrednio $abcd$ tworzymy osobną powierzchnię. Pozostałe paski o kształtach prostokątnych, trapezowych i trójkątnych otrzymaliśmy, wyrównując łuki w linje proste i opuszczając zupełnie małe występy, prawie nie wpływające na położenie środka ciężkości. Powierzchnie pasków wynoszą: $F_1 = 183\ \text{cm}^2$, $F_2 = 132\ \text{cm}^2$, $F_3 = 548\ \text{cm}^2$, $F_4 = 87\ \text{cm}^2$, $F_5 = 364\ \text{cm}^2$, $F_6 = 91\ \text{cm}^2$, $F_7 = 2090\ \text{cm}^2$. Środki ciężkości trapezów F_1 i F_3 znaleźliśmy wedle § 22—5, środek trójkąta F_6 wedle § 22—3. Wreszcie zapomocą wieloboku sił z biegunem O wyznaczyliśmy pionową oś ciężkości R, przyczem zmieniliśmy porządek sił wedle kolejnego następstwa ich kierunków ($F_2, F_3, F_1, F_4 \ldots$) podobnie, jak w przykładzie 39.

Z wykresu okazało się, że pionowa oś ciężkości przecina jeszcze podstawę, że zatem środek ciężkości jej podparty, a gzyms przy danem obciążeniu nie spadnie. Jednakowoż wypadkowa R przechodzi bardzo blisko krawędzi zewnętrznej i niewielkie obciążenie części wystającej na zewnątrz przypadkowym ciężarem mogłoby spowodować przesunięcie wypadkowej poza krawędź, a tem samem obrót i spadnięcie gzymsu. Dla uzyskania pewności należałoby gzyms w części cd obciążyć, a tem samem uzyskać przesunięcie wypadkowej R na prawo.



Rys. 94.



Rys 95.