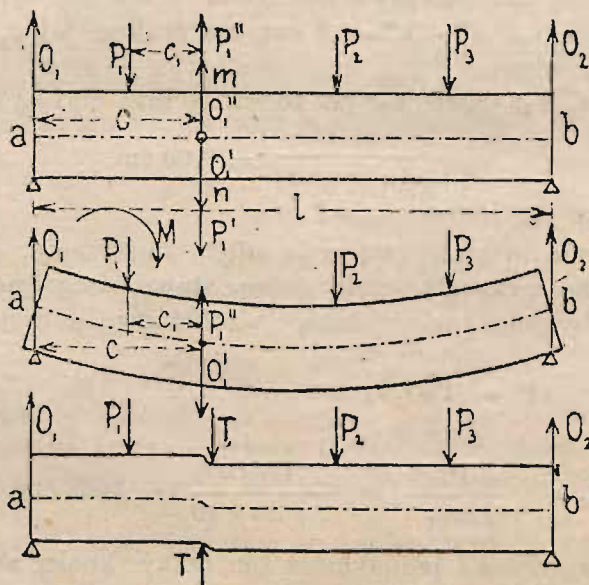


D. Wytrzymałość na zginanie.

§ 36. Obliczanie belek zginanych.

Weźmy pod uwagę belkę pracującą na zginanie pod wpływem sił P_1 , P_2 , P_3 i zbadajmy, jaki stan rzeczy zachodzi w dowolnym przekroju $m-n$ (rys. 151). Po lewej stronie tego przekroju działają dwie siły: oddziaływanie O_1 i siła P_1 . — Ale w równowadze belki nic się nie zmieni, jeśli w przekroju $a-b$ umieścimy cztery siły, a to: dwie siły pionowe, ale wprost przeciwnie sobie skierowane



Rys. 151, 152 i 153.

O_1' i O_1'' oraz dwie również pionowe i również przeciwne sobie siły P_1' i P_1'' ; bowiem wypadkowa tych sił równa się zeru*). — Otrzy-

*) Można by tak samo wziąć siły działające po prawej stronie, P_2 , P_3 i O_2 , gdyż ich wypadkowa równa jest co do wielkości i położenia wypadkowej sił O_1 i P_1 .

mane w ten sposób siły ($O_1, P_1, O_1', O_1'', P', P_1''$) możemy w dowolnym porządku złożyć ze sobą. Siły O_1 i O_1' oraz P_1 i P_1'' dadzą dwa momenty statyczne, których suma wyniesie:

$$M = O_1 c - P_1 c_1 \dots \dots \dots 94$$

zatem moment o wielkości znalezionej już poprzednio (wz. 27).

Ten moment zginający M stara się wygiąć przekrój mn w kierunku wskazówki na zegarze; ma zatem znak dodatni (por. § 14 i § 23), tak, że przekrój ten obróci się ostatecznie o pewien kąt, zajmując położenie $m'n'$ (fig. 154), pozostając przecież płaskim i po obrocie. Podobnie obróca się i inne przekroje, jednakowoż o inny kąt, skutkiem czego górne włókna belki skróca się, dolne natomiast wydłużają; w środku belki pozostanie jednak jedna warstwa ab (rys. 152), która długości nie zmieni. Warstwę tę nazywamy *warstwą obojętną*, a linię przecięcia jej st z pewnym przekrojem np. i pr , z przekrojem mn lub pr (rys. 154) *osią obojętną*. Przekroje mn które przedtem były pionowe, zajmą teraz położenie $m'n'$ i $p'r'$, pozostając jednak prostopadłymi do osi.

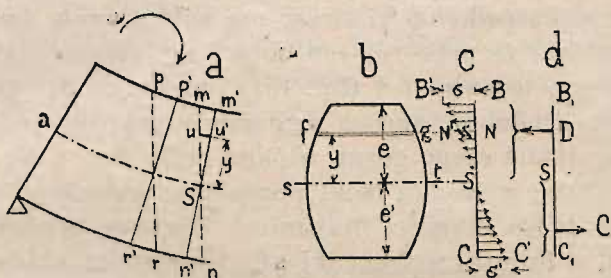
Dotychczas nie mówiliśmy nic o wpływie sił O_1'' i P_1' , które działają w badanym przekroju mn . Dadzą one siłę wypadkową, która wynosi:

$$T = O_1'' - P_1' = O_1 - P \dots \dots \dots 95$$

Siła ta jest zatem siłą poprzeczną o wielkości znalezionej już poprzednio w § 23 (por. wz. 22 i 26). Stara się ona przesunąć przekrój mn pionową względem przekroju leżącego, bardzo blisko obok niego, tak, by belka przybrała kształt wskazany na rys. 153.

Wskutek działania momentu M i siły poprzecznej T powstają wewnątrz belki nateżenia t , t. j. siły wewnętrzne. Nateżenia powstałe wskutek działania momentu nazywamy *zginającemi, gnącemi, normalnemi* (t. j. prostopadłemi do przekroju, gdyż taki mają kierunek); nateżenia wskutek siły poprzecznej nateżeniami ścinającemi. Te ostatnie są jednak zwykle w belkach drewnianych i żelaznych litych znacznie mniejsze od normalnych, toteż tutaj zajmować się nimi nie będziemy; natomiast ważne są dla obliczenia belek *nateżenia zginające*. Aby je obliczyć, trzeba przedewszystkiem znaleźć momenty belki w każdym jej punkcie.

Rys. 154 przedstawia płaszczyzny mn i pr narysowane w większej podziałce przed i po ugięciu. Widać na niej, że odkształcenia (przedłużenia wzgl. skrócenia) poszczególnych włókien nn' , mm' i t. d. mają się do siebie jak odległości ich od osi obojętnej st , przechodzącej przez punkt S , t. j. że $nn' : mm' = y : e$. Wiemy jednak, że (aż do granicy proporcjonalności) natężenia są



Rys. 154.

wprost proporcjonalne do odkształceń. Stąd wynika, że włókna najbardziej od osi oddalone będą nateżone najbardziej, zaś w samej osi będzie nateżenie równe zero. Oznaczając nateżenie w odległości y od osi obojętnej przez σ_y , nateżenie w warstwie skrajnej górnej przez σ , w warstwie dolnej przez σ' , otrzymamy na mocy podobieństwa trójkątów $\triangle ANN' \sim \triangle ABB' \sim \triangle ACC'$ (rys. 154c):

$$\begin{aligned} \sigma : \sigma_y &= e : y \\ \text{oraz: } \sigma' : \sigma_y &= e' : y \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma : \sigma_y &= e : y \\ \sigma' : \sigma_y &= e' : y \end{aligned}} \right\} 96$$

a stąd:

$$\sigma_y = \sigma \frac{y}{e} \text{ wzgl. } \sigma_y = \sigma' \frac{y}{e'} \quad 96a.$$

Zatem w każdym włóknie oddalonym o y od osi obojętnej panuje nateżenie σ_y , a więc stałe na całej szerokości paska fg. Jeżeli powierzchnia takiego paska w odległości y od osi obojętnej (rys. 154b) wynosi f , to suma nateżeń wszystkich jego włókien równa jest nateżeniu jednostkowemu σ_y pomnożonemu przez powierzchnię paska t. j. $f\sigma_y$. Ale $\sigma_y = \frac{\sigma}{e} y$, a więc

$$f \sigma_y = \frac{\sigma}{e} f y \text{ względnie } f \sigma_y = \frac{\sigma'}{e'} f y.$$

A zatem suma wszystkich nateżeń ciągnących w całej ciągnionej części belki (rys. 154 c i d):

$$D = \left(\frac{\sigma}{e} f_1 y_1 + \frac{\sigma}{e} f_2 y_2 + \dots \right) = \frac{\sigma}{e} (f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots) = \\ = \frac{\sigma}{e} \sum_0^e f y \dots \dots \dots 97, \text{ zaś suma nateżeń cisnących:}$$

$$C = \left(\frac{\sigma'}{e'} f'_1 y'_1 + \frac{\sigma'}{e'} f'_2 y'_2 + \dots \right) = \frac{\sigma'}{e'} (f'_1 y'_1 + f'_2 y'_2 + \dots) = \\ = \frac{\sigma'}{e'} \sum_0^{e'} f' y' \dots \dots \dots 97a.$$

Jeśli ma być równowaga w przekroju, t. j. jeśli nie ma nastąpić dalszy ruch obrotowy ani też postępowy, to muszą siły spełnić warunki tej równowagi, a więc (prócz innych) suma składowych poziomych musi być równa zeru, więc $C - D = 0$. Podstawiając wartości otrzymamy:

$$\frac{\sigma}{e} \sum_0^e f y - \frac{\sigma'}{e'} \sum_0^{e'} f' y' = 0$$

ponieważ zaś z rys. 154c wynika, że $\frac{\sigma}{e} = \frac{\sigma'}{e'}$ przeto

$$\frac{\sigma}{e} \left(\sum_0^e f y - \sum_0^{e'} f' y' \right) = 0 \dots \dots \dots 98.$$

Jeśli iloczyn równać ma się zeru, to jeden z mnożników musi być zerem; ponieważ zaś $\frac{\sigma}{e}$ zerem nie jest, przeto równanie spełni się tylko, o ile wyraz w nawiasie równa się zeru, t. j.:

$$\sum_0^e f y - \sum_0^{e'} f' y' = 0 \dots \dots \dots 99.$$

$f y$ jest momentem statycznym paska o powierzchni f względem osi obojętnej; zatem $\Sigma f y$ jest sumą m. stat. wszystkich pasków po jednej, — $\Sigma f' y'$ pasków po drugiej stronie osi, więc $\Sigma f y - \Sigma f' y'$ jest momentem stat. wszystkich pasków przekroju t. j. całego przekroju ze względu na oś. Wedle 99 ma on być równy zeru. Jednak linja, względem której suma momentów stat. pewnego przekroju = 0, przechodzi (wedle § 21) przez środek ciężkości tego przekroju, a zatem:

Oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju.

Jeśli jednak ma nastąpić równowaga, to i moment statyczny wszystkich sił działających musi równać się zeru. Na dany przekrój $m n$ działa: 1) moment M sił zewnątrznych ze względu na punkt S (o wielkości w danym przykładzie $M = O_1 c - P_1 c_1$), oraz 2) suma momentów *natężeń* względem punktu S . Siła wewnętrzna odpowiadająca paskowi f odległemu od osi obojętnej o y wynosi $f \sigma_y$, a jej moment względem S jest $f \sigma_y y = f \frac{\sigma}{e} y^2$. Dla wszystkich pasków powyżej osi obojętnej otrzymamy zatem:

$$\frac{\sigma}{e} f_1 y_1^2 + \frac{\sigma}{e} f_2 y_2^2 + \dots = \frac{\sigma}{e} (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + \dots) = \frac{\sigma}{e} \Sigma f y^2,$$

a podobnie poniżej osi: $\frac{\sigma'}{e'} \Sigma f' y'^2$. Wiemy wreszcie, że $\frac{\sigma}{e} = \frac{\sigma'}{e'}$

a stąd dla równości momentów:

$$M = \frac{\sigma}{e} (\Sigma f y^2 + \Sigma f' y'^2) = \frac{\sigma}{e} \Sigma f y^2 \dots \dots 100.$$

Wyraz $\Sigma f y^2$ składa się z bardzo wielu dodajników, z których każdy równy jest iloczynowi niezmiennie wąskiego paska, na jakie podzielimy przekrój, przez kwadrat jego odległości od osi obojętnej. Nazywamy go zaś momentem bezwładności I . Ponieważ mamy w nim powierzchnię f (cm²) mnożoną przez kwadrat długości y^2 (znowy cm²), przeto jednostką momentu bezwładności będą cm⁴ t. j. centymetry do potęgi czwartej.

$\Sigma f y^2$ jest więc momentem bezwładności całego przekroju względem osi obojętnej; więc:

$$M = \frac{\sigma}{e} I = \frac{\sigma_y}{y} I \dots \dots \dots 101.$$

Największe nateżenie będzie we włóknie najbardziej oddalonym od osi obojętnej, a zatem we włóknie skrajnem (jednem lub obu). Z równania 101 otrzymamy jego wartość:

$$\text{najw. } \sigma = \frac{Me}{I} \dots\dots\dots 102$$

$$M = \text{najw. } \sigma \frac{I}{e} \dots\dots\dots 103$$

Dla danego przekroju m i n zmienny jest moment zależnie od obciążenia, natomiast I i e są stałe. Nazwijmy $\frac{I}{e} = W$, to:

$$\sigma = \frac{M}{W} \dots\dots\dots 104$$

$$M = \sigma W \dots\dots\dots 105$$

Wielkość W nazywamy *momentem oporu* lub *momentem wytrzymałości* lub też *wskaźnikiem przekroju*; mierzymy go w cm^3 .

Podobnie otrzymamy dla włókna oddalonego o e'

$$\sigma' = \frac{Me'}{I} = \frac{M}{W'} \left(\text{gdzie } \frac{I}{e'} = W' \right) \dots\dots\dots 104a$$

$$M = \sigma' W' \dots\dots\dots 105a$$

Najczęściej używamy przekrojów symetrycznych względem osi poziomej; dla nich oś obojętna (oś ciężkości!) jest zarazem osią symetrii. Wtedy $e=e'$, $W=W'$.

Jeżeli moment ma znak dodatni, to w części górnej belki występuje ciśnienie, oznaczone znakiem „—”, zaś w części dolnej ciągnięcie, oznaczone znakiem „+”. Np. „— σ ” oznacza „ciśnienie o wielkości σ ”.

Największe nateżenia powstają zawsze we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej; inne włókna przenoszą siły o wiele mniejsze, niż wynosi ich wytrzymałość (wzgl. nateżenie dopuszczalne); nie są więc należycie wykorzystane. Staramy się dlatego zwykle o to, aby największą część materiału belki rozmieścić możliwie daleko od osi, co widać np. w belkach żelaznych I II i t. d.

W belce narażonej na zginanie przybierają momenty zginające w poszczególnych miejscach różne wartości. Najpraktyczniej byłoby więc zastosować belkę o przekroju zmiennym, silniejszym tam, gdzie działają momenty większe, zaś słabszym, gdzie występują mniejsze. Jednakowoż belek takich używamy tylko w większych konstrukcjach; w mniejszych używa się zwykle belek drewnianych lub dźwigarów żelaznych o przekroju stałym na całej długości, a tem samem o stałym momencie oporu W i momencie bezwładności I . Wtedy wedle wzoru 104 $\sigma = \frac{M}{W}$ naj-

większe natężenie wystąpi w przekroju, w którym moment jest największy; przekrój ten nazywamy dlatego przekrojem niebezpiecznym.

Ze względu na konieczną w budowlach inżynierskich pewność, obliczamy wymiary belek tak, aby największe natężenie (we włóknach skrajnych przekroju niebezpiecznego) było conajwyżej równe natężeniu dopuszczalnemu. Dla najw. M musi być więc $\sigma = k_g$, a równanie 104 przybierze wtedy postać:

$$k_g \geq \frac{\text{najw. } M}{W} \dots\dots\dots 106$$

Zwykle dany jest najw. M oraz natężenie dopuszczalne, którego nie można przekroczyć; natomiast w tablicach szukamy belki mającej równy obliczonemu lub większy moment oporu W ; wtedy używamy wzoru:

$$W = \frac{\text{najw. } M}{k_g} \dots\dots\dots 107.$$

§ 37. Rachunkowe wyznaczenie momentu bezwładności prostokąta.

Podzielmy prostokąt o wysokości h , a podstawie b (rys. 155) na wąskie paski poziome o grubości g ; powierzchnia każdego paska niech wynosi f , zaś odstęp od osi xx niech będzie y . Momentem bezwł. jednego paska

jest $I_1 = I_2 = (bg)y_2$. Dla górnej połowy prostokąta mamy zatem $\frac{1}{2}I_x = bg(y_1^2 + y_2^2 + \dots)$, czyli

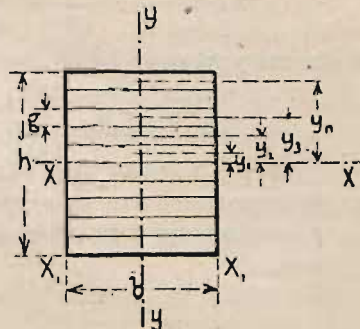
$$I_x = 2b(y_1^2 g + y_2^2 g + \dots) \dots 108$$

ale $y_2 = y_1 + g$, $y_3 = y_2 + g \dots$, a zatem:

$$y_2^3 = y_1^3 + 3y_1^2 g + 3y_1 g^2 + g^3$$

$$y_3^3 = y_2^3 + 3y_2^2 g + 3y_2 g^2 + g^3$$

Wartości g są jednak bardzo małe, a tem mniejsze są wartości g^2 i g^3 ; możemy je więc śmiało opuścić. Otrzymamy wtedy:



Rys. 155.

$$y_2^3 = y_1^3 + 3y_1^2 g, \text{ więc } y_1^2 g = \frac{y_2^3 - y_1^3}{3}$$

$$\text{i podobnie } y_2^2 g = \frac{y_3^3 - y_2^3}{3} \dots \dots$$

Podstawiając te wartości we wzór 108, otrzymujemy:

$$I_x = \frac{2}{3}b(y_2^3 - y_1^3 + y_3^3 - y_2^3 + y_4^3 - y_3^3 + \dots + y_n^3), \text{ a upraszczając:}$$

$$I_x = \frac{2}{3}b(y_n^3 - y_1^3) \dots \dots 109.$$

Ponieważ y_1 jest bardzo małe wobec y_n , więc tembardziej y_1^3 , wobec y_n^3 ; możemy więc je opuścić, z drugiej strony y_n jest prawie równe $\frac{h}{2}$.

Podstawmy więc te wartości, a otrzymamy:

$$I_x = \frac{2}{3}b \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} b h^3 \dots \dots 110.$$

Uproszczenie, jakie w toku rachunku czyniliśmy, są tem bardziej dopuszczalne, im na węższe paski podzieliliśmy przekrój. Dla przyjęcia pasków niezmiernie wąziutkich błąd powstały przez nie znika zupełnie.

Dla osi yy otrzymamy w ten sam sposób:

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3 \dots \dots 111.$$

Jeśli $h > b$, to I_x jest największym, I_y najmniejszym ze wszystkich momentów bezwł., odniesionych do środka ciężkości.

Moment wytrzymałości względem osi xx wynosi zatem:

$$W_x = \frac{I_x}{e} = \frac{1}{12} b h^3 \cdot \frac{2}{h} = \frac{1}{6} b h^2 \dots\dots\dots 112$$

zaś dla osi $y y'$:

$$W_y = \frac{I_y}{e'} = \frac{1}{12} h b^3 \cdot \frac{2}{b} = \frac{1}{6} h b^2 \dots\dots\dots 113.$$

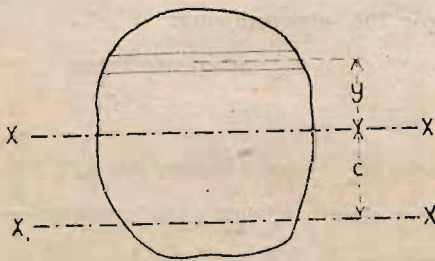
Jeśli $h > b$, to W_x jest znów największym, W_y najmniejszym momentem wytrzymałości danego przekroju.

Dla przekroju kwadratowego o bokach „ a ” $h = b = a$, zatem

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4 \dots\dots\dots 114$$

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6} \dots\dots\dots 115.$$

§ 38. Moment bezwładności ze względu na oś równoległą do pewnej osi ciężkości.



Rys. 156.

Niech I_0 będzie momentem bezwładności danego przekroju ze względu na oś ciężkości $X-X$, zaś I_1 szukany przez nas mom. bezwł. ze względu na oś X_1-X_1 .

Moment bezwł. I_0 wynosi (rys. 156).

$$I_0 = \sum f y^2.$$

Zaś moment bezwładności I_1 względem osi X_1X_1

$$I_1 = \sum f (y + c)^2.$$

Podnosząc do drugiej potęgi otrzymamy:

$$I_1 = \sum f (y + c)^2 = \sum f y^2 + \sum 2 c f y + \sum f c^2 = I_0 + 2 c \sum f y + c^2 \sum f$$

Wyraz $2 c \sum f y$ jest równy zeru gdyż $\sum f y$ jest momentem statycznym przekroju ze względu na oś ciężkości (por. § 21); wyraz $\sum f$ jest sumą powierzchni wszystkich pasków, a więc powierzchni całego przekroju F , a zatem:

$$I_1 = I_0 + Fc^2 \dots\dots 116.$$

T. j. Moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś odległą o długość c od środka ciężkości równa się momentowi bezwładności przekroju ze względu na oś ciężkości, równoległą do danej osi więcej iloczynowi powierzchni F przez kwadrat odległości obu osi.

Wiemy, że dla prostokąta o wysokości h , a podstawie b moment bezwładności I względem osi ciężkości xx wynosi $I = \frac{1}{12}bh^3$. Jeśli chcemy znaleźć I_1 względem podstawy, to odległość osi ciężkości xx od nowej osi x_1x_1 (rys. 155) wynosi $\frac{h}{2}$, a więc:

$$I'_x = I_0 + Fc^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3}bh^3 \dots\dots 117.$$

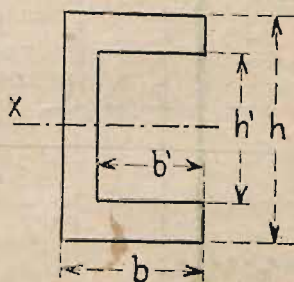
podobnie moment bezwł. względem pionowego boku prostokąta

$$I'_y = \frac{1}{3}hb^3 \dots\dots 118.$$

Znając moment bezwładności prostokąta oraz na podstawie wz. 116 wyznaczyć możemy momenty bezwł. figur bardziej skomplikowanych, składających się z prostokątów, albo też figur, które w przybliżeniu możemy zamienić na prostokąty. Dla każdego prostokąta składowego znajdujemy moment bezwł. osobno, a następnie sumujemy je lub odejmujemy. Np. przekrój kształtu C (por. rys. 157) uważać możemy za prostokąt o wymiarach b, h , od którego trzeba odjąć prostokąt mniejszy o wymiarach b', h' . Wtedy:

$$I_x = \frac{1}{12} (bh^3 - b'h'^3) \dots\dots 119.$$

$$\text{zaś } W_x = \frac{2I_x}{h}$$



Rys. 157.

W podobny sposób wyznaczamy momenty bezwładności przekrojów o kształcie np. T lub Γ . Przekroje takie spotykamy najczęściej w kształtownikach żelaznych, jednakowoż z zaokrągleniami, a także pochyleniami ścianek. Przy rachunku mom. bezwł. zamieniamy przekrój dany zwykle na przekrój złożony z prostokątów wyrównujących co do powierzchni przekrój dany. Por. przykł. 85 i 91.

Zwykle jednakowoż zbyteczne jest wykonywanie tych działań, gdyż momenty bezwładności najczęściej używanych przekrojów zestawione są w tablicach.

Przykłady 85 100.

85. Obliczyć moment bezwładności blachownicy o przekroju, podanym na rys. 158, uwzględniając przytem zmniejszenie I wskutek dziur na nity 20 m/m. Blachownica ma ściankę o wysokości $H = 100$ cm, a grubości 1 cm, kątowniki $90 \times 90 \times 10$ i nakładki 240×11 .

Wedle rys. 158: $H = 100$ cm, $h_1 = 98$ cm, $h_2 = 82$ cm, $g = 1,1$ cm, $d = 2$ cm, $c = 3,5$ cm, $c_1 = 8$ cm, $c_2 = 1$ cm.

Moment bezwładności obliczymy, odejmując od momentu bezwładności prostokąta o podstawie B, a wysokości $(H+2g)$ momenty bezwładności prostokątów nie wchodzących w skład przekroju belki. Otrzymamy wtedy:



Rys. 158.

$$I = \frac{1}{12} [(B-2d)(H+2g)^3 - 2cH^3 - 2(c_1-d)h_1^3 - 2c_2h_2^3], \text{ czyli:}$$

$$I = \frac{1}{12} [24-2,2)(100+2,1,1)^3 - 2,3,5 \cdot 100^3 -$$

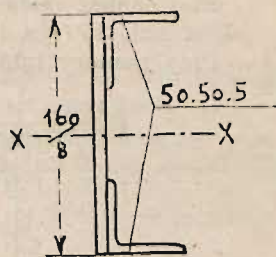
$$-2(8-2)98^3 - 2,1 \cdot 82^3] = 498,299 \text{ cm}^4 \text{ okrągłe } I = 498,300 \text{ cm}^4.$$

86. Znaleźć moment bezwładności przekroju, złożonego z blachy 160×8 i dwu kątowników $50 \cdot 50 \cdot 5$ względem osi xx (rys. 159).

Moment bezwładności blachy wynosi:

$$I_b = \frac{1}{12} 0,8 \cdot 16^3 = 273,0 \text{ cm}^4$$

Moment bezwładności jednej kątowniki względem osi ciężkości równoległej do ramienia wynosi (wedle tablic) $I_0 = 11,2 \text{ cm}^4$; ponieważ zaś środek ciężkości jednej kątowniki oddległy jest od poziomej osi ciężkości xx całego przekroju o 6,59 cm, zaś jej przekrój wynosi $F = 4,79 \text{ cm}^2$, przeto jej moment bezwł. wzgl. osi xx ma wartość



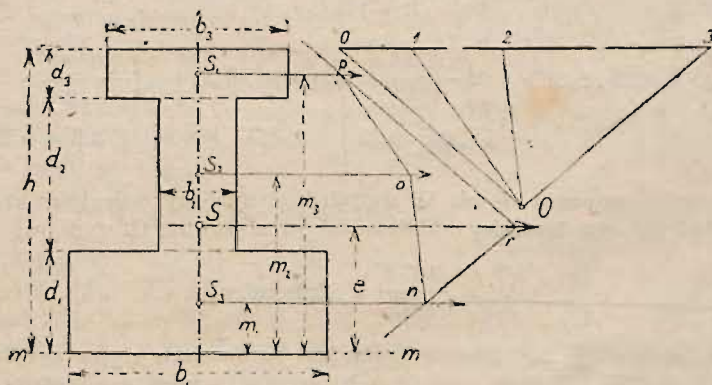
Rys. 159.

$$I_k = 11,2 + 4,79 \cdot 6,59^2 = 219,2 \text{ cm}^4$$

Zaś m. bezwł. całego przekroju.

$$I = I_b + 2I_k = 273,0 + 2 \cdot 219,2 = 711,4 \text{ cm}^4$$

87. Znaleźć moment bezwładności i moment wytrzymałości przekroju podanego na rys. 160 (por. zad. 34).



Rys. 160.

Środek ciężkości przekroju leży w odległości 5 cm od osi $m-m$ (por. zad. 34). Zatem mom. bezwł.:

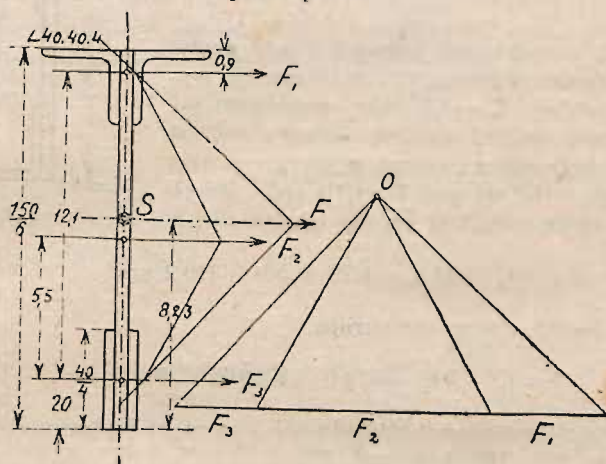
$$I = \frac{1}{3} (10,5^3 - 2,3 \cdot 5,1^3 + 7,7^3 - 2,2 \cdot 5^3) = \frac{1}{3} 3144 = 1048 \text{ cm}^4$$

Zaś moment wytrzymałości:

$$W = \frac{I}{e} = \frac{1048}{i} = 149,7 \text{ cm}^3$$

88. Znaleźć moment bezwładności i moment wytrzymałości przekro-
jak w zad. 35 (rys. 161).

Przy pomocy tablic otrzymamy:



Rys. 161.

$$I_x = 2 \left(1,86 + 2,25 \cdot 5,87^2 \right) + 2 \left(\frac{0,1 \cdot 4^3}{12} + 4,0 \cdot 0,4 \cdot 6,23^2 \right) + \left(\frac{0,6 \cdot 15^3}{12} + 15 \cdot 0,6 \cdot 0,73^2 \right) = 158,7 + 134,9 + 173,5 = 467,1 \text{ cm}^4.$$

Obliczając moment oporu W uwzględnić musimy odległość krawędzi
dolnej, gdyż jest ona bardziej oddalona od osi ciężkości. Otrzymamy wtedy:

$$W = \frac{467,1}{8,23} = 56,7 \text{ cm}^3.$$

89. Dźwigar I NP 26 przykryty jest w miejscu styku przykładka-
mi wedle rys. 162. Należy znaleźć ich moment oporu z uwzględnieniem
4 dziur na nity 16 m/m.

Moment bezwładności przykładek pionowych
wynosi:

$$I_1 = \frac{1}{12} 2 \cdot 1,0 \cdot 20^3 = 1333 \text{ cm}^4$$

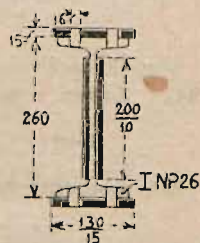
Moment bezwł. przykładek poziomych

$$I_2 = \frac{1}{12} (13 - 2 \cdot 1,6) (29^3 - 26^3) = 5554 \text{ cm}^4$$

Całkow. moment bezwładności

$$I = 1333 + 5554 = 6887 \text{ cm}^4$$

Zatem moment wytrzymałości



Rys. 162.

$$W = \frac{6887}{14,5} = 475 \text{ cm}^3$$

90. Jak należy rozstawić dwa ceowniki NP 24, jeżeli ich momenty bezwładności ze względu na obie osi mają być równe (rys. 163).

Jeżeli moment bezwł. jednej kształtówki względem osi xx wynosi I_x , względem osi yy I_y , wzgl. osi $y'y'$ przechodzącej przez środek ciężkości jednej kształtówki I'_y , to:

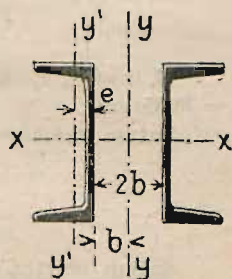
$$2I'_y = 2I_x = 2(I'_y + F(e+b)^2), \text{ a stąd:}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{F}\right) - e}$$

a zatem wedle tablic:

$$b = \sqrt{\frac{4056 - 282}{46,5}} - 2,38 = 6,35 \text{ cm.}$$

Zatem ceowniki należy rozsunąć o $2b=12,7 \text{ cm.}$



Rys. 163.

91. Znaleźć moment bezwładności przekroju dźwigara I 28a osłabionego dwoma nitami (por. zad. 37), przyjmując przekrój złożony z prostokątów (rys. 164).

Niech I oznacza moment bezwładności dźwigara nie osłabionego względem środka wysokości, I' względem osi x_1x_1 , I_n bezwł. dziur na nity względem ich środka ciężkości, to otrzymamy biorąc moment dźwigara nieosłabionego wzgl. osi x_1x_1 :

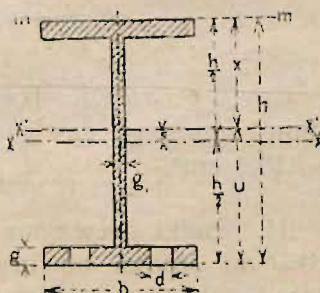
$$I' = I + F s^2$$

Odejmując od tej wartości moment bezwł. dziur na nity względem tej samej osi x_1x_1

$$\left\{ I_n + F_n \left(u - \frac{g}{2}\right)^2 \right\}$$

dostaniemy:

$$I_1 = I + F s^2 - \left[I_n + F_n \left(u - \frac{g}{2}\right)^2 \right]$$



Rys. 164.

Dla I NP 28 a otrzymamy $I_n = I_n' 2,0 \times 1,7^2 = 0,7 \text{ cm}^4$, co jest wartością tak małą, że w ogólnym wzorze możemy ją zupełnie pominać; otrzymamy wtedy:

$$I_1 = I + F s^2 - F_n \left(u - \frac{g}{2}\right)^2$$

Dla I NP 28a (porów. zad. 37).

$$I_1 = 10274 + 78 \cdot 85 \cdot 1,24^2 - 6 \cdot 8 (15 \cdot 24 - 0,85)^2 = \\ = 10274 + 121 - 1410 = 8985 \text{ cm}^4.$$

92. O ile zmieni się moment wytrzymałości dźwigara I NP 28a osłabionego na jednej stopce dwoma nitami o średnicy 20 mm. (Por. zad. 37 i 91).

Moment wytrzymałości dźwigara nieosłabionego wynosi:

$$W = 733,9 \text{ cm}^3.$$

M. bezwł. I_1 dźwigara osłabionego obliczyliśmy w zad. 91 w wartości $I_1 = 8985 \text{ cm}^4$.

Zatem moment wytrzymałości:

$$W_1 = \frac{I_1}{11} = \frac{8985}{15,24} = 582,0 \text{ cm}^3.$$

Zatem wartość momentu wytrzymałości zmniejsza się o $W - W_1 = 733,9 - 582,0 = 151,9 \text{ cm}^3$.

93. Znaleźć dźwigar I potrzebny dla obciążenia jak na rys. 94 (zad. 41).

Największy moment zginający wynosi tutaj $M = 872000 \text{ kgcm}$. Zatem potrzebny moment wytrzymałości:

$$W = \frac{M}{k_g} = \frac{872000}{1000} = 872 \text{ cm}^3.$$

Użyjemy zatem dźwigara NP.16 ($W = 1068 \text{ cm}^3$). Bezpośrednio mniejszy dźwigar NP 15 ma moment wytrzymałości $W = 840,1 \text{ cm}^3$.

94. Belki drewniane spichrza leżą w odstępach $a = 0,70 \text{ m}$ od środka do środka na murach odległych od siebie o $l = 4,60 \text{ m}$. Należy znaleźć ich przekrój jeśli ciężar własny powały wynosi 120 kg/m^2 , zaś ciężar zboża na niej spoczywającego warstwą $1,00 \text{ m}$ grubą — 800 kg/m^3 .

Otrzymamy tu obciążenie jednej belki w kg/m

$$z = (120 + 800 \cdot 1,0) \cdot 0,7 = 644 \text{ kg/m}$$

na całej belce spoczywa zatem:

$$Z = 644 \cdot 4,60 = 2960 \text{ kg}$$

a zatem moment zginający wynosi:

$$M = \frac{1}{8} Z l = \frac{1}{8} 2960 \cdot 450 = 170200 \text{ kg/cm.}$$

Przyjmując natężenie dopuszczalne 100 kg/cm^2 , otrzymamy

$$\text{potrzebny moment oporu } W_p = \frac{170200}{100} = 1702 \text{ cm}^3; \text{ zastosujemy}$$

więc belkę o przekroju $24/21 \text{ cm}$ ($W=2016 \text{ cm}^3$). *)

95. Jak wielki ciężar jednostajnie rozłożony uniesie belka drewniana o wymiarach $22/16$, jeśli służy jako wspornik o długości $l = 200 \text{ cm}$ ($k_g = 80 \text{ kg/cm}^2$).

Moment zginający belki wspornikowej jednostajnie obciążonej wynosi:

$$M = \frac{p l^2}{2}, \text{ czyli } p = \frac{2 M}{l^2} = p l.$$

Zaś moment oporu służy z momentem zgięcia w związku:

$$M = W k_g.$$

$$\text{Otrzymamy zatem dla } W = \frac{b l^2}{6} = \frac{1}{6} 16 \cdot 22^2 = 1290 \text{ cm}^3$$

$$p = \frac{2 W k_g}{l} = \frac{2 \cdot 1290 \cdot 80}{200} = 1032 \text{ kg,}$$

czyli ciężar jednostajnie rozłożony o wielkości:

$$p = \frac{P}{l} = \frac{1032}{2,00} = 516 \text{ kg/mb.}$$

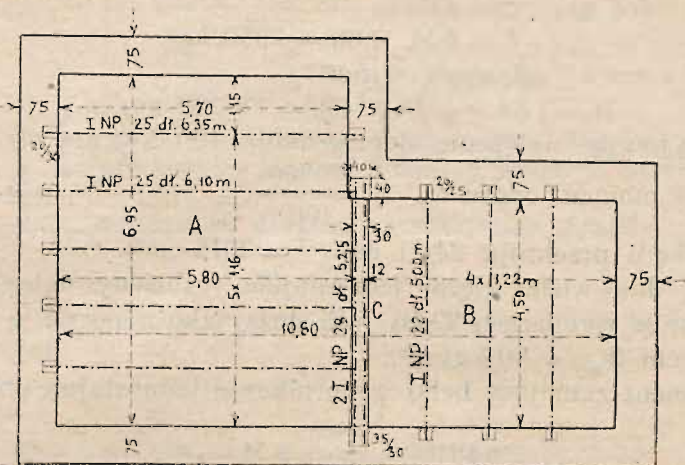
96. Obliczyć dźwigary *A*, *B* i *C* stropu betonowego między dźwigarami żelaznymi (rys. 165). Ciężar własny stropu $g = 400 \text{ kg/m}^2$, ciężar ruchomy 500 kg/m^2 , Podciąg *C* dźwiga nadto ścianę pierwszego piętra o grubości 30 cm , z cegły pustej ($g=1300 \text{ kg/m}^3$) o wysokości $3,80 \text{ m}$.

Obliczenie dźwigarów A:

Długość dźwigarów $l = 5,00 \text{ m}$, odstęp $a = 1,16 \text{ m}$.

Ciężar całkowity: $Z=5,8 \cdot 1,16 \cdot 900 = 6056 \text{ kg}$.

*) Właściwie należałoby liczyć długość belek od środka do środka podpory; jednakowoż przy natężeniach dopuszczalnych stosunkowo niewielkich i małych belkach można śmiało brać rozpiętość w świetle za rozpiętość teoretyczną.



Rys. 165.

Moment zgięcia $M = \frac{1}{8} 6056 \cdot 580 = 439000 \text{ kgcm.}$

Potrzebny moment wytrzymałości $W = \frac{M}{\text{kg} \cdot 1000} = \frac{439000}{\text{kg} \cdot 1000} = 439 \text{ cm}^3$

Przyjmujemy I NP 25 ($W=444,3 \text{ cm}^3$); wtedy najw. natężenie $\sigma = \frac{439000}{444,3} = 990 \text{ kg/cm}^2$. Jeden z dźwigarów jest krótszy; zachowany jednak ten sam profil I NP 25 .

Obliczenie dźwigarów B:

$l = 4,50 \text{ m, } a = 1,22 \text{ m}$

$Z = 4,50 \cdot 1,22 \cdot 900 = 4940 \text{ kg}$

$M = \frac{1}{8} Z l = \frac{1}{8} 4940 \cdot 450 = 278000 \text{ kgcm:}$

Przyjęto I NP 22 ($W=312,2 \text{ cm}^3$).

Obliczenie podciagu C:

Podciąg C przenosi a) ciężar ściany, b) ciężar stropu przenoszącego się nań bezpośrednio z połowy pola obciążenia B, c) oddziaływanie trzech dźwigarów A, d) ciężar własny podciagu, narażenie nieznany.

a) Ciężar ściany wynosi $Z_a = 4,50 \cdot 3,80 \cdot 0,3 \cdot 1300 = 6670 \text{ kg}$.
stad moment w środku $M_a = \frac{1}{8} 6670 \cdot 450 = 375100 \text{ kgcm.}$

b) Ciężar połowy pola B wynosi:

$$Z_b = 4,50 \cdot 0,61 \cdot 900 = 2470 \text{ kg}$$

$$M_b = \frac{1}{8} 2470 \cdot 450 = 139000 \text{ kgcm}$$

c) Oddziaływanie dźwigarów A wynoszą:

$$O_a = \frac{6056}{2} = 3028 \text{ ok. } 3030 \text{ kg.}$$

A stąd oddziaływania podciągu:

$$O_1 = \frac{1}{4,5} (3030 \cdot 3 \cdot 1,16 + 3030 \cdot 2 \cdot 1,16 + 3030 \cdot 1,16) =$$

$$= \frac{1}{4,5} (3 + 2 + 1) 3030 \cdot 1,16 = 4686 \text{ kg}$$

$$O_2 = 3 \cdot 3030 - 4686 = 1404 \text{ kg.}$$

Momenty zginające wynoszą zatem:

Pod pierwszym ciężarem: $M'_c = 1404 \cdot 116 = 162864 \text{ kgcm}$

Pod środkowym ciężarem: $M''_c = 1404 \cdot 232 - 3030 \cdot 116 = 671000 \text{ kgcm}$

Ponieważ punkt m, w którym wspiera się dźwigar A środkowy na podciągu C, jest oddalony od środka belki tylko o 7 cm, co w obec długości $l = 4,50 \text{ m}$ jest wielkością bardzo nieznaczną, a moment belki wolno podpartej w środku belki mało co się zmienia, przeto możemy momenty M_a , M_b i M''_c wprost dodać i w ten sposób otrzymać największy moment z bardzo małym błędem. Otrzymamy wtedy:

$$M = M_a + M_b + M''_c = 375100 + 139000 + 671000 = 1185100 \text{ kgcm.}$$

Przyjmijmy zatem 2 dźwigary I NP 28 ($W = 2.608,8 = 1217,6 \text{ cm}^3$, wobec potrzebnego $W_p = \frac{1185100}{1000} = 1185,1 \text{ cm}^3$). Wąż one $2.53,6 = 107 \text{ kg/mb}$, zatem na długości $4,5 \text{ m}$ $4,5 \cdot 107 = 481,5 \text{ kg}$, do czego dodając ok. 35 kg na usztywnienia, otrzymujemy ciężar własny całkowity 520 kg.

Moment z powodu ciężaru własnego wynosi $M_w = \frac{1}{8} 520 \cdot 450 = 29250 \text{ kgcm}$ zatem moment całkowity $M + M_w = 1.185.100 +$

+ 29300 = 1,214.400 kgcm, co wymaga $W = \frac{1214400}{1000} = 1214,4 \text{ cm}^3$.

Zatrzymamy zatem dwa dźwigary NP 28.

Należy jeszcze obliczyć ciosy podporowe pod dźwigarami.

Dźwigary A.

Oddziaływanie $O = \frac{Z}{2} = \frac{6056}{2} = 3028 \text{ ok. } 3030 \text{ kg}$, zatem po-

trzebna powierzchnia: $F_p = \frac{O}{k_c} = \frac{3030}{5} = 606 \text{ cm}^2$.

Przyjmujemy cios o podstawie $20 \times 30 \text{ cm}$, (powierz. 600 cm^2).

Dźwigary B.

$$O = \frac{Z}{2} = \frac{4940}{2} = 2470 \text{ kg.}$$

$$F_p = \frac{R}{k_c} = \frac{2470}{5} = 494 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy cios $20 \times 25 \text{ cm}^2$ ($A = 500 \text{ cm}^2$).

Podciąg C.

Oddziaływanie:

$$O_c = \frac{Z_a}{2} + \frac{Z_b}{2} + O_1 = 3335 + 1235 + 4686 = 9256 \text{ ok. } 9260 \text{ kg.}$$

Z powodu ciężaru własnego 260 „

Oddziaływanie dźwigara A, który spoczywa na tym samym ciosie: 3030 „

Razem $R = 12520 \text{ kg}$.

Ponieważ otrzymalibyśmy cios zbyt wielki, przeto narożnik wymurujemy na cemencie; wtedy $k_c = 10 \text{ kg}$. Zatem

$$F_p = \frac{12520}{10} = 1252 \text{ cm}^2. \text{ Przyjęło } 40 \times 40 \text{ cm } (F = 1600 \text{ cm}^2).$$

Na łożysku drugim wynosi oddziaływanie z uwzględnieniem ciężaru własnego dźwigara $O'_c = 3325 + 1235 + 4404 + 260 = 9224 \text{ ok. } 9230 \text{ kg}$. Murując również na cemencie otrzymamy:

$$F_p = \frac{9230}{10} = 923 \text{ cm}^2 \text{ Przyjęto } 35 \times 30 \text{ cm } (F = 1050 \text{ cm}^2).$$

Długości rzeczywiste dźwigarów różnią się od teoretycznych o długość podparcia na ciosie; wynoszą one:

Dźwigary	A	I	NP 25	l=6,10 m	ilość 4
„	A ₁	„	„	l=6,25 m	„ 1
„	B	I	NP 25	l=5,00 m	„ 3
„	C	I	NP 28	l=5,25 m	„ 2

97. Należy obliczyć belkę żelazną dźwigającą ścianę grubości 0,30 m, wysoką 6,00 m z otworami jak na rys. 116.

Obciążenie P_1 na przestrzeni $a=2,20$ m składa się z ciężaru muru od podpory lewej aż do osi okien z pominięciem otworów *). Ciężar ten wynosi:

$$P_1 = \left[(2,20 + 0,60) 6,0 - 2 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot 2,40 \right] 0,30 \cdot 1600 = 7520 \text{ kg.}$$

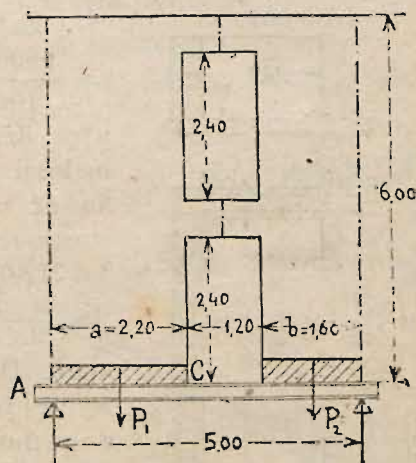
Podobnie znaleziony ciężar P_2 wynosi:

$$P_2 = \left[(0,60 + 1,60) 6,0 - 2 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot 2,40 \right] 0,30 \cdot 1600 = 5570 \text{ kg.}$$

Ciężar ten rozkłada się jednostajnie na przestrzeni $b=1,60$ m. Oddziaływanie O_1 wynosi więc:

$$O_1 = \frac{P_1 (l - \frac{1}{2} a) + P_2 \cdot \frac{1}{2} b}{l} = \frac{7520 \cdot (5,00 - 1,10) + 5570 \cdot 0,80}{5,00} = \frac{29328 + 4456}{5,00} = 6757 \text{ kg.}$$

*) Por. uw. na str. 74.



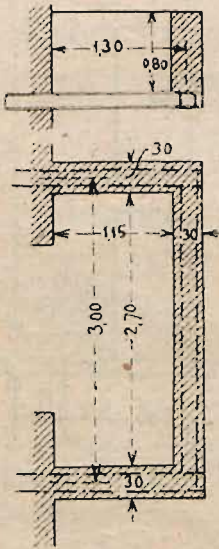
Rys. 166.

Ciężar $P_1 = 7520$ kg jest większy od oddziaływania $O_1 = 6757$ kg, wobec czego w myśl § 26, przekrój niebezpieczny leży na przestrzeni AC, a odległość jego od podpory A wynosi (wedle wz. 44):

$$m = \frac{O_1 a}{P_1} = \frac{6757 \cdot 2.20}{7526} = 1.98 \text{ m.}$$

Moment zginający w tym punkcie wynosi:

$$M = \frac{O_1 m}{2} = \frac{6757 \cdot 1.98}{2} = 669000 \text{ kg/cm.}$$



Rys. 167.

Zatem potrzebny moment oporu $W = \frac{669000}{1000} = 669 \text{ cm}^3$. Moglibyśmy użyć

więc dźwigara NP 30 o momencie wytrzymałości $W = 733.1 \text{ cm}^3$; lepiej będzie jednakowoż ze względu na podparcie ściany zastosować dwa dźwigary NP 23 ($W = 2 \cdot 356.3 = 712.6 \text{ cm}^3$).

98. Obliczyć konstrukcję żelazną balconu. Obciążenie podłogi (stałe i ruchome) wynosi 600 kg/cm^2 ; balustradę stanowi mur o grubości 6.25 cm , wysokości 0.8 m . (rys. 167).

a) Obliczenie dźwigara CD. Jest on obciążony podłogą z szerokości $\frac{1.30}{2} \text{ m}$ oraz murem.

$$P = 3.0 \left(\frac{1}{2} 1.30 \cdot 600 + 0.8 \cdot 0.25 \cdot 1600 \right) = 2130 \text{ kg.}$$

$$M = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} 2130 \cdot 300 = 79875 = \text{ok. } 79900 \text{ kg/cm.}$$

$$\text{Potrzebny moment wytrzymałości } W = \frac{79900}{1000} = 79.9 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto zatem 2 dźwigary NP 10 ($W = 2 \times 41.6 = 83.2 \text{ cm}^3$).

b) *Obliczenie dźwigarów AC i BD.* Przenosi się na nie w p. C (wzgl. D) oddziaływanie dźwigara CD; oraz na całej długości AC (wzgl. BD) ciężar muru.

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2130 = 1065 \text{ ok. } 1070 \text{ kg}$$

$$M_1 = 1070 \cdot 130 = 139100 \text{ kgcm}$$

$$P_2 = 1,30 \cdot 0,8 \cdot 0,25 \cdot 1600 = \text{ok. } 420 \text{ kg}$$

$$M_2 = 420 \cdot \frac{130}{2} = 27300 \text{ kgcm.}$$

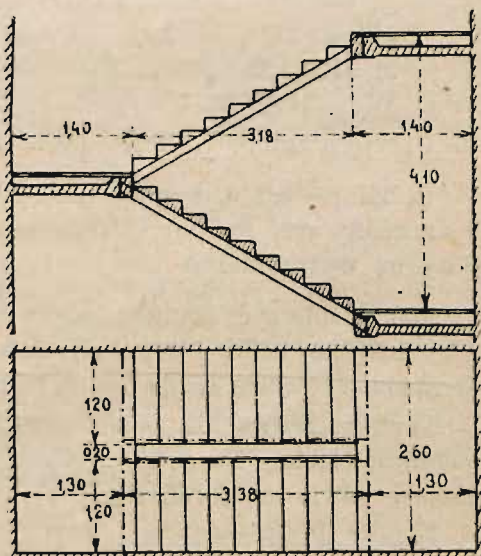
$$\text{Zatem moment całkowity } M = M_1 + M_2 = 139100 + 27300 = 166400 \text{ kgcm.}$$

$$\text{Potrzebny moment oporu } W = \frac{166400}{1000} = 166,4 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Przyjmujemy 2 dźwigary NP 14 (} W = 2 \cdot 94,2 = 188,4 \text{ cm}^3 \text{).}$$

99. Należy obliczyć konstrukcję schodów żelaznych o wymiarach podanych na rys. 168.

Obliczenie statyczne schodów redukuje się do obliczenia wymiarów dźwigarów: policzkowego AB i podestowego*) CD. Jeśli długość pierwszego wynosi l , zaś drugiego l' , szerokość ramienia b , podestu b' , zaś obciążenie (stałe i ruchome) z wzgl. z' kg/m^2 rzutu poziomego, to obciążeniem policzka jest $Z = \frac{1}{2} b l z$, zaś najw. momentem $M = \frac{1}{8} Z l =$



Rys. 168.

$= \frac{1}{16} b z l^2$. Na dźwigar podestowy działają natomiast: a) od-

*) „Zawratnicy“.

działywania dźwigarów policzkowych o wielkości $\frac{1}{2}Z$ w odległości b od podpór; b) ciężar jednostajnie rozłożony przenoszący się z powo-
 podestu o wielkości $Z' = \frac{1}{2}b'l'z'$; moment zginający wynosi
 więc: $M_1 = \frac{1}{2}Z \cdot b + \frac{1}{8}Z'l' = \frac{1}{2}Zb + \frac{1}{8}b'l'z'$ *)

a) Obliczenie dźwigara policzkowego ($z = 650 \text{ kg/m}^2$):

$$l = 3,18 + 0,10 + 0,10 = 3,38 \text{ m}, \quad b = 1,20 \text{ m}, \text{ zatem}$$

$$Z = 0,60 \cdot 3,38 \cdot 650 = 1396 \text{ prz. } 1400 \text{ kg}$$

$$M = \frac{1}{8} 1400 \cdot 3,38 = 62650 \text{ kgcm}$$

$$W_p = \frac{M}{k_g} = \frac{62650}{1000} = 62,7 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy $\overline{\text{I}}$ NP 12 o momencie wytrzymałości $W = 65,4 \text{ cm}^3$

b) Obliczenie dźwigara podestowego (z powodu ciężkiej konstrukcji podestu $z' = 700 \text{ kg/m}^2$).

$$\frac{1}{2}Z = \frac{1}{2} 1400 = 700 \text{ kg} \quad Z' = \frac{1}{2} \cdot 1,40 \cdot 2,60 \cdot 700 = 2550 \text{ kg}$$

$$M = 700 \cdot 1,20 + \frac{1}{8} 2550 \cdot 2,60 = 84000 + 82880 = 166880 \text{ kgcm}$$

$$W_p = 166,9 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto zatem $\overline{\text{I}}$ NP 18 ($W = 184,6 \text{ cm}^3$).

Jeżeli podest wykonano jako sklepienie, to dźwigar podestowy narażony jest na parcie poziome tego sklepienia i obliczać go należy na wytrzymałość złożoną (por. § 41).

100. Obliczyć grubość płyty z żeliwa (żelaza lanego) tworzącej łożysko belki blaszanej, obliczone w przykładzie 72, jeśli wytrzymałość żelaza lanego na zginanie $k_g = 300 \text{ kg/cm}^2$.

Płyta z żeliwa ma za cel rozłożenie ciśnienia na większą powierzchnię ciosu. Na mocy jednak prawa działania i przeciwdziałania sił równoważących się (§ 3) cios cisnie na płyt z tą samą siłą, z jaką płyta na cios, t. j. w danym przykładzie przenosi się na nią ciśnienie $p = 15 \text{ kg/cm}^2$ **). Ciśnienie to stara się wygiąć tę część płyty, która wystaje poza szerokość podstawy belki t. j.

*) Właściwie oddziaływania $\frac{1}{2}Z$ działają zwykle nie w odległości b od podpór, ale w odległości nieco mniejszej z uwagi na to, że dźwigary policzkowe są nieco wsunięte pod stopnie; różnica jest jednak bardzo mała.

**) Por. rys. 130, gdzie ciśnienie zaznaczone jest strzałkami.

na szerokości $c = \frac{b-a}{2} = \frac{35-22}{2} = 6.5 \text{ cm}$;

część ta działa więc jako wspornik jednostajnie obciążony ciężarem jednostkowym $p = 15 \text{ kg/cm}^2$ (rys. 169).

Weźmy pod uwagę 1 cm długości płyty prostopadle do rysunku. Moment zginający na pasku o tej szerokości wynosi:

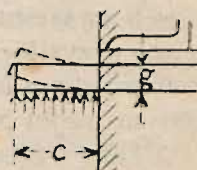
$$M = \frac{pc^2}{2} = \frac{15 \cdot 6.5^2}{2} = 317 \text{ kgcm}$$

a zatem potrzebny moment wytrzymałości:

$$W_p = \frac{317}{300} = 1.06 \text{ cm}^3.$$

Przekrój badanego paska jest prostokątem o szerokości 1 cm, a wysokości różnej grubości płyty g , zatem jego moment oporu wynosi $W = \frac{1}{6} 1 \cdot g^3$; ponieważ zaś $W = W_p$, przeto $\frac{1}{6} 1 \cdot g^3 = 1.06 \text{ cm}^3$, czyli:

$$g = \sqrt[3]{6 \cdot 1.06} = 2.52 \text{ t. j. ok. } 2.6 \text{ cm}.$$

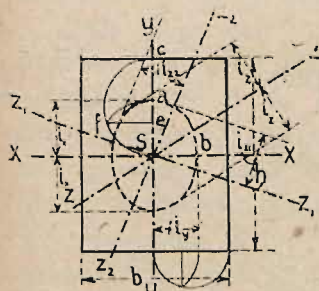


Rys. 169.

§ 39. Elipsa bezwładności.

Jeżeli F jest powierzchnią, zaś I momentem bezwładności ze wzgl. na oś ciężkości XX prostokąta (rys. 170), to możemy znaleźć taką długość i_x , aby spełniło się równanie:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \dots 120.$$



Rys. 170.

Podobnie możemy znaleźć i dla innych osi ciężkości, np. dla osi ZZ , moment bezwł. I_z oraz długość $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$. Poprowadźmy przez

moment bezwł. I_z oraz długość $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$. Poprowadźmy przez

punkt S szereg osi Z w różnych położeniach Z_1, Z_2, \dots i dla każdego z nich wykreślimy równoległą w odległości z_{z1}, z_{z2}, \dots , to przekonamy się, że wszystkie one będą stycznymi do elipsy, którą nazywamy *środkową elipsą bezwładności*. Długości i_x, i_z odpowiadające poszczególnym osiom XX, ZZ... nazywamy *promieniami bezwładności*.

Taką elipsę bezwładności wyznaczyć możemy nietylko dla prostokąta, ale dla każdego przekroju. Dla przekrojów symetrycznych osi główne tej elipsy leżą zawsze na osiach symetrii, a półosi elipsy S_a , wzgl. S_b , są równe promieniom bezwładności względem osi XX wzgl. YY. Osi elipsy środkowej nazywamy *osiami głównymi* bezwładności; jeżeli bowiem będziemy badali momenty bezwładności względem osi XX, YY, ZZ, Z_1Z_1, \dots to okaże się, że największym będzie moment wzgl. jednej osi głównej (w danym przypadku wzgl. XX), najmniejszym m. bezwł. względem drugiej osi głównej; zaś wszystkie inne momenty bezwł. przybiorą wartości pośrednie. Obliczywszy zatem promienie bezwładności główne, możemy na nich wykreślić elipsę, która będzie elipsą bezwładności.

Dla prostokąta otrzymamy:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F} = \left(\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{bh} \right) = \frac{h^2}{12} \dots \dots 120a$$

a stąd:

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h\sqrt{3}}{6} = 0,289h \dots \dots 120b.$$

Rozłożmy $\frac{h^2}{12}$ na czynniki $\frac{h}{6}$ i $\frac{h}{2}$ (gdyż $\frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{12}$), to

i_x jest średnią geometryczną między nimi, gdyż:

$$\frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} : \frac{h}{2} = i_x^2$$

czyli .

$$\frac{h}{6} : i_x = i_x : \frac{h}{2}$$

Podobną regułą znajdziemy dla drugiej osi głównej YY:

$$\frac{b}{6} : i_y = i_y : \frac{b}{2}$$

Z tej proporcji wynika, że dla wykreslnego znalezienia głównych promieni bezwładności dla *prostokąta* użyć możemy nast. konstrukcji: Na długości $Sc = \frac{h}{2}$ zakreślamy półkole; w odległości $Se = \frac{h}{6}$ od S prowadzimy następnie prostopadłą do średnicy Sc , a promień $Sf = Sc$ koła zakreślonego z S da średnią geometryczną między $Sc = \frac{h}{2}$ i $Se = \frac{h}{6}$, t. j. główny promień bezwładności i_x . Podobnie znaleźć możemy drugi główny promień bezwł. i_y . Konstrukcja ta ważna jest *tylko dla przekroju prostokątnego pełnego* (rys. 170). Dla innych przekrojów znajdziemy „i” ze wz. 120.

Mając wykreśloną elipsę bezwładności znaleźć możemy bardzo łatwo moment bezwł. względem którejkolwiek osi przechodzącej przez jej środek np. I_z . Prowadzimy mianowicie styczną do elipsy równoległą do danej osi ZZ ; niech *prostopadła* jej odległość od osi ZZ wynosi i_z , to moment bezwł. wzgl. ZZ :

$$I_z = i_z^2 F \dots\dots\dots 121.$$

Jeżeli momenty bezwładności I_x i I_y są równe, t. j. $I_x = I_y$, to wedle wzoru 120, również równe będą promienie bezwładności $i_x = i_y$, zaś elipsa bezwładności przechodzi w koło, które nazywamy *kołem bezwładności*. Jak wyżej powiedzieliśmy, styczne poprowadzone do elipsy bezwładności, leżą w odległościach i_x , i_y , i_z od równoległych osi, tutaj więc dla każdego kierunku $i_x = i_y = i_z$; zatem *momenty bezwł. dla każdej osi ciężkości są równe*. Zachodzi to przedewszystkiem wtedy, jeśli przekrój ma momenty bezwł. równe względem *dwu* dowolnych osi, a więc gdy przekrój jest tak samo rozłożony względem dwu osi, np. kwadrat, koło, pierścień kołowy i t. d., może zajść jednak i w wypadkach innych. Por. np. przykł. 102, gdzie dla teownika promienie bezwładności są prawie zupełnie równe.

Przykłady 101—103.

101. Obliczyć osi główne bezwładności dźwigara NP 28 (rys. 171.)
Ze względu na oś poziomą otrzymujemy:

$$I_x = \frac{1}{12} [12 \cdot 28^3 - (12 - 1,1) (28 - 3,4)^3] = 8430 \text{ cm}^4$$

Ze względu na oś pionową:

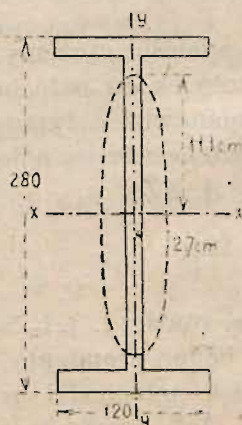
$$I_y = \frac{1}{12} [2 \cdot 1,7 \cdot 12^3 + (28 - 3,4) 1,1^3] = 486 \text{ cm}^4$$

Powierzchnia przekroju

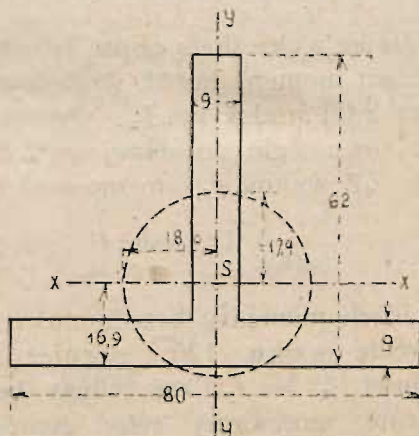
$$F = 2,12 \cdot 1,7 + (28 - 3,4) 1,1 = 67,9 \text{ cm}^2$$

A stąd połowy osi głównych elipsy bezwładności:

$$i_x = \sqrt{\frac{8430}{67,9}} = 11,1 \text{ cm} \quad i_y = \sqrt{\frac{486}{67,9}} = 2,7 \text{ cm}$$



Rys. 171.



Rys. 172.

102. Znaleźć rachunkowo główne momenty bezwładności I_x i I_y , oraz osi elipsy środkowej teownika NP. 8.

Dzieląc przekrój na dwa prostokąty (por. rys. 172), otrzymamy odległość środka ciężkości przekroju od podstawy e ze wzoru:

$$e = \frac{9 \cdot 53 \cdot 35,5 + 80 \cdot 9 \cdot 4,5}{9 \cdot 53 + 80 \cdot 9} = 16,9 \text{ mm (por. zad. 33).}$$

Moment bezwładności względem osi mm wynosi $I_m = I_x + Fe^2$, a stąd:
 $I_x = I_m - Fe_1^2$, gdzie $e_1 = e - 9 = 16,9 - 9 = 7,9 \text{ mm}$

$$I_m = \frac{1}{12} (9 \cdot 53^3 + 80 \cdot 9^3) = 463072 \text{ mm}^4$$

$$Fe_1^2 = (9 \cdot 53 + 80 \cdot 9) 7,9^2 = 74705 \text{ mm}^4$$

$$\text{zatem } I_x = 463072 - 74705 = 388367 \text{ mm}^4 = 38,84 \text{ cm}^4$$

Ze względu na oś yy znajdziemy zatem:

$$I_y = I_{y_2} (9 \cdot 80^2 + 53 \cdot 9^2) = 387219 \text{ mm}^4 = 38,72 \text{ cm}^4$$

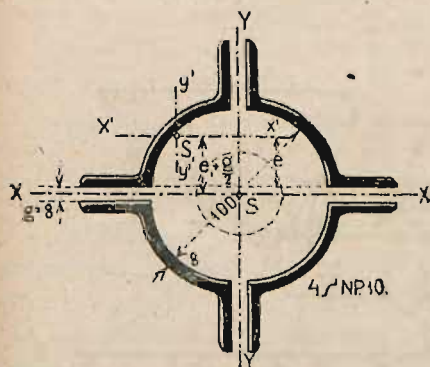
Z powodu symetrii jedną osią główną jest yy , druga jest od niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości. Wartość połówek osi głównych elipsy środkowej znajdziemy ze wzoru:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$$

zatem:

$$i_x = \sqrt{\frac{38,84}{11,97}} = 1,80 \text{ cm} \quad i_y = \sqrt{\frac{38,72}{11,97}} = 1,79 \text{ cm}$$

Promienie główne elipsy bezwładności są tu prawie równe, elipsa zbliża się zatem do koła.



Rys. 173.

103. Obliczyć promień bezwładności przekroju słupa złożonego z 4 ćwierćkółek NP 10 o grubości ścian 8 mm (rys. 173).

Zamiast wprowadzać w obliczenie cztery ćwierćkółki obliczymy promień bezwładności dla jednej, tak samo umieszczonej względem wspólnego środka ciężkości wszystkich czterech. Jeżeli bowiem powierzchnia *tak samo rozmieszczona* *wzrasta w tym samym stopniu co moment bezwładności*, to otrzymamy:

$$i = \sqrt{\frac{n I_1}{n F}} = \sqrt{\frac{I_1}{F}} \dots 122$$

W danym przykładzie wynosi:

Powierzchnia jednej kształtówki $F = 12,0 \text{ cm}^2$

Moment bezwładn. jednej kształtówki względem osi ciężkości $x'x'$

$$I_0 = 82,7 \text{ cm}^4$$

Odległość środka ciężkości kształtówki od osi xx całego przekroju

$$e = 3,47 + 0,4 = 3,87 \text{ cm}$$

zatem moment bezwładności kształtówki względem osi xx

$$I_0 = I_0 + Fe^2 = 82,7 + 12,0 \cdot 3,87^2 = 261,4 \text{ cm}^4$$

a stąd promień bezwładności:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{261,4}{12}} = 4,67 \text{ cm.}$$

ciężkości pasków od osi będą $y_1, y_2, y_3 \dots$, a ich powierzchnie $F_1, F_2, F_3 \dots$, to moment bezwładności paska pierwszego będzie:

$$I_1 = F_1 y_1^2 = (F_1 y_1) \cdot y_1.$$

Iloczyn $m_1 = F_1 y_1$ przedstawia moment statyczny paska pierwszego względem osi. Jeśli będziemy uważać ten moment statyczny za siłę, to iloczyn $m_1 y_1 = (F_1 y_1) y_1 = F_1 y_1^2$ przedstawiać będzie zarazem moment statyczny siły $m_1 = F_1 y_1$ względem osi XX ; jest on jednak równy *momentowi bezwładności* I_1 paska względem tejże osi, gdyż:

$$m_1 y_1 = F_1 y_1 y_1 = F_1 y_1^2 = I_1.$$

Podobne wyniki otrzymamy i dla następnych pasków; będzie więc

$$\begin{aligned} I_2 &= F_2 y_2^2 = m_2 y_2 \\ I_3 &= F_3 y_3^2 = m_3 y_3 \dots \end{aligned}$$

Dla całego przekroju zaś (t. j. dla wszystkich pasków):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots$$

Zacznemy w środkach ciężkości poszczególnych pasków siły proporcjonalne do ich powierzchni, a równoległe do XX (por. § 17) i wykreślimy dla nich wielobok sznurowy prst, to wedle § 18 odcinki $ab \dots$ pomnożone przez odległość biegunową H_1 przedstawiają momenty statyczne poszczególnych pasków względem XX

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= ab \cdot H_1 \\ m_2 &= bc \cdot H_1 \dots \end{aligned} \right\} \dots 123$$

Zaś moment statyczny całego przekroju wynosi:

$$M = m_1 + m_2 + \dots = ab \cdot H_1 + bc \cdot H_1 + \dots = a'e H_1 \dots 123a.$$

Te momenty uważamy teraz za siły i z kolei wyznaczamy momenty statyczne momentów statycznych $m_1, m_2 \dots$ w ten sam sposób; wynoszą one: $m_1 y_1, m_2 y_2 \dots$. Obieramy w tym celu biegun O_2 w odległości biegunowej H_2 i kreślimy dlań t. zw. „drugi wielobok sznurowy” $p'r's't'$. Długości $a'b' \dots$ odcięte na osi XX przedłużeniami odpowiednich boków wieloboku sznurowego pomnożone przez H_2 przedstawiają momenty statyczne sił $m_1 = (ab \cdot H_1) \dots$

a tem samym momenty bezwładności pasków $F_1, F_2 \dots$ gdyż $a'b' \cdot H_2 = m_1 y_1 = (F_1 y_1) y_1 = F_1 y_1^2$ więc:

$$I_1 = a'b' \cdot H_1 \cdot H_2 \dots \dots \dots 124.$$

Podobnie otrzymamy $I_2 = b'e' \cdot H_1 \cdot H_2 \dots$, zaś długość $a'e' = n$ pomnożona przez obie długości biegunowe równa jest momentowi bezwładności całego przekroju względem osi XX:

$$I = n \cdot H_1 \cdot H_2 \dots \dots \dots 125$$

Ponieważ moment bezwładności wyraża się w jednostkach długości do czwartej potęgi, przeto jedna z wielkości $n H_1 H_2$ (z reguły n) musi być wyrażona w jednostkach powierzchni (cm^2), zaś dwie drugie (H_1, H_2) w jednostkach długości.

2 Metoda Mohra

Dla powierzchni $F_1, F_2 \dots$ uważanych za siły, kreślimy tylko jeden wielobok sznurowy prst; tak samo jak przy metodzie Culmanna; wtedy:

$$m_1 = F_1 y_1 = ab \cdot H_1$$

zatem

$$I_1 = F_1 y_1^2 = ab \cdot H_1 y_1 = ab \cdot y_1 \cdot H_1$$

Ale powierzchnia trójkąta Δabp równa jest $\frac{1}{2} \cdot ab \cdot y_1$, a więc $ab \cdot y_1$ jest podwójną powierzchnią Δabp ; stąd:

$$I_1 = 2 \times (\text{pow. } \Delta abp) \times H_1 \dots \dots \dots 126$$

To samo ważne jest oczywiście dla wszystkich pasków; więc moment bezwładności całego przekroju wynosi:

$$I = 2 H_1 \text{ pow (aep) } \dots \dots \dots 127$$

Moment bezwładności równa się zatem *powierzchni ograniczonej osią, wielobokiem sznurowym i przedłużeniami boków skrajnych, pomnożonej przez podwójną odległość biegunową.*

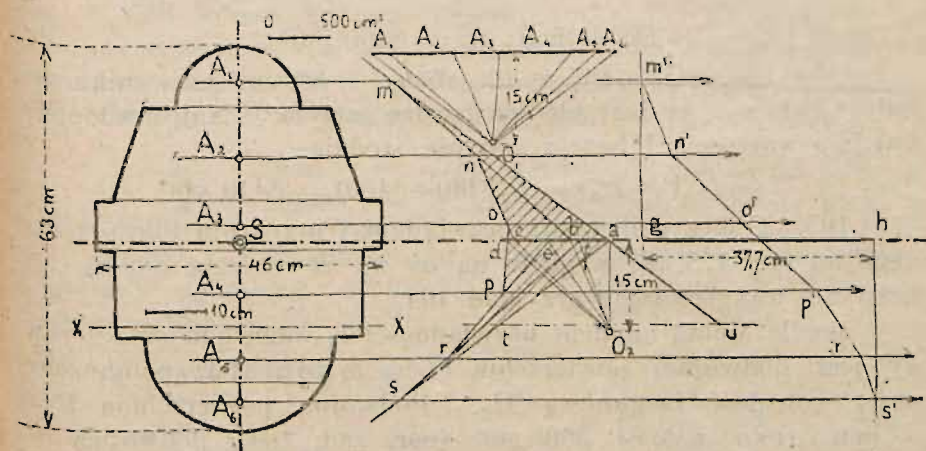
Przykłady 104 105.

104. Znaleźć wykreslnie moment bezwładności przekroju filara podanego na rys. 175, ze względu na poziomą oś ciężkości.

Przedewszystkiem musimy znaleźć środek ciężkości przekroju. W tym celu dzielimy przekrój na szereg pasków poziomych, z których A_1 i A_6 są prostokątami, A_2 i A_5 trapezami (A_3 w przybliżeniu), zaś A_4 i A_6 odcinkami koła, których środek ciężkości znaleźć można albo z tablic, albo w przybliżeniu, zamieniając je na trapezy. Rachunkowo wyznaczone powierzchnie tych pasków wynoszą:

$$\begin{array}{lll} F_1 = 157 \text{ cm}^2 & F_2 = 525 \text{ cm}^2 & F_3 = 368 \text{ cm}^2 \\ F_4 = 600 \text{ cm}^2 & F_5 = 198 \text{ cm}^2 & F_6 = 155 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Powierzchnie te odnieśliśmy następnie w przyjętej skali powierzchni w wieloboku sil o wierzchołku O_1 , przyjąwszy odległość biegunową $H_1 = 15 \text{ cm}$. Równoległe do boków tego wieloboku wykresliliśmy następnie wielobok sznurowy $mnpqrs$, którego skrajne boki ma i sa przedłużone do a wyznaczają poziomą oś ciężkości S_h .



Rys. 175.

Promienie tego wieloboku sznurowego (pierwszego) przedłużamy teraz do osi Sh, mianowicie mn do b, ne do c, rp do e, sr do f i otrzymujemy w ten sposób odcinki ab, bc, cd, de, ef, fa. Przyjmując drugi biegun O_2 w odległości H_2 równej też 15 cm. kreślimy znów równoległe do promieni O_2a, O_2b ..., drugi wielobok sznurowy $m'n'o'p'r's'$, którego skrajne boki $m'g$ i $s'h$ przedłużamy aż do poziomej osi ciężkości Sh, otrzymując ostatecznie odcinek $n=gh=37,7$ cm. Wedle Culmanna otrzymamy zatem:

$$I'_0 = n \cdot H_1 \cdot H_2 = 37,7 \cdot 15 \cdot 15 = 8482,5 \text{ ok. } 8480 \text{ cm}^4.$$

Tę samą wartość znajdziemy wedle Mohra. W tym celu należy pomnożyć powierzchnię $A = mnopr sa$ przez podwójną odległość biegunową H_1 . Powierzchnię tę można znaleźć obliczając kolejno powierzchnie trójkątów mba, ncb i t. d.

Otrzymamy wtedy:

Trójkąt:	Wysokość h:	Podstawa b:	Podwójna powierzchnia bh:
m b a	26,0 cm	6,0 cm	156 cm ²
n c b	13,9 ..	9,0 ..	125 ..
d o c	1,9 ..	1,0 ..	2 ..
p d e	8,5 ..	6,5 ..	56 ..
r e f	19,2 ..	5,0 ..	96 ..
s f a	26,0 ..	4,8 ..	125 ..

$$2 F = 560 \text{ cm}^2$$

a zatem $I''_0 = 2 F H_1 = 560 \cdot 15 = 8400 \text{ cm}^4$.

Otrzymaliśmy zatem wynik różny o 80 cm⁴ od wyniku metody Culmanna, co jest błędem bardzo małym*). Najprawdopodobniejszą wartością I będzie wartość średnia:

$$I = \frac{1}{2} (I'_0 + I''_0) = \frac{1}{2} (8480 + 8400) = 8440 \text{ cm}^4.$$

105. Obliczyć moment bezwładności przekroju filara podanego na rys. 175, ze względu na oś xx równoległą do osi ciężkości Sh, uwzględniając przykład 104.

Wedle Mohra moment bezwładności I_x względem osi xx równy jest podwójnej powierzchni $F' = mnoprstu$, pomnożonej przez odległość biegunową H_1 . Podwójna powierzchnia $F' = mnopr sa$ wynosi 560 cm² (por. zad. 104); podwójna po-

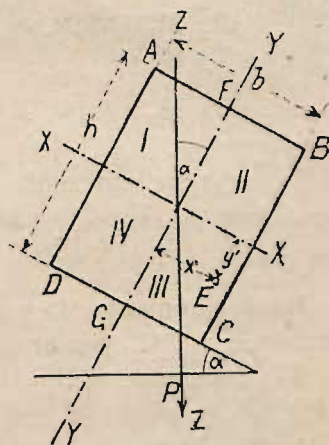
*) Błąd dopuszczalny wynosi 3‰.

wierzchnia trójkąta atu $F'' = 35,8 \cdot 13,6 = 488 \text{ cm}^2$. zatem
 $F' = F + F'' = A + A' = 560 + 488 = 1048 \text{ cm}^2$. a stąd:

$$I_x = 1048 \cdot 15 = 15720 \text{ cm}^4.$$

§ 41. Napięcie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że w płaszczyźnie, w której działają ciężary, leży jedna z osi głównych przekroju, t. j. że np. w rys. 155 lub 170 siły działają w linii yy . Niekiedy jednakowoż obciążenie występuje w płaszczyźnie zamykającej z osiami pewien kąt. Weźmy np. pod uwagę drewniane płatwie dachowe (rys. 176); zwykle ustawia się je w płaszczyźnie dachu, natomiast ciężar P pokrycia i śniegu działa pionowo, t. j. w linii ZZ , zawierającej z osią główną YY kąt, np. α (zaś z osią XX kąt $90 - \alpha$).



Rys. 176.

Ciężar ten wywołuje w danym przekroju belki moment zgięcia M . Rozłóżmy ten moment na dwa momenty składowe, działające w płaszczyznach osi głównych XX i YY , to wynoszą one:

$$M_x = M \cos \alpha \quad (\text{w płaszczyźnie prostopadłej do } XX)$$

$$M_y = M \sin \alpha \quad (\text{w płaszczyźnie prostopadłej do } YY).$$

Każdy z tych momentów składowych wywołuje odpowiednie napięcie zginające. W dowolnym punkcie przekroju E powstaje zatem napięcie:

$$\left. \begin{aligned} \text{wskutek } M_x \quad \sigma_1 &= \frac{M \cos \alpha \cdot y'}{J_x} = \frac{M_x y'}{J_x} \\ \text{wskutek } M_y \quad \sigma_2 &= \frac{M \sin \alpha \cdot x'}{J_y} = \frac{M_y x'}{J_y} \end{aligned} \right\} \dots 129.$$

Ponieważ zaś oba momenty, a zatem i oba natężenia występują równocześnie, przeto natężenie w punkcie E równa się sumie natężeń $\sigma_1 + \sigma_2$:

$$\sigma = \frac{M_x v'}{J_x} + \frac{M_y x'}{J_y} \dots \dots \dots 129.$$

Głównie chodzi nam oczywiście o natężenia największe. Występują one we włóknaach skrajnych t. j. w punktach A i C.

Otrzymamy tam:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } M_x \text{ najw. } \sigma_1 &= \frac{M_x \frac{h}{2}}{J_x} = \frac{M_x}{W_x} \\ \text{dla } M_y \text{ najw. } \sigma_2 &= \frac{M_y \frac{h}{2}}{J_y} = \frac{M_y}{W_y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 130.$$

Sumaryczne natężenie w A i C wynosi więc:

$$\text{najw. } \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \dots \dots \dots 131.$$

Jeżeli moment M jest dodatni, to M_x wywołuje ciśnienie w częściach I i II, ciągnienie w III i IV; natomiast M_y ciśnienie w I i IV, ciągnienie w II i III; zatem w częściach I i III natężenia sumują się ze sobą, zaś w II i IV odejmują od siebie. Bezwzględnie zatem biorąc, otrzymamy największe natężenie w punktach A i C; w A najw. $(+\sigma) = + \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right)$, w B najw. $(-\sigma) = - \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right)$.

Naturalnie największe natężenie nie może przekroczyć natężenia dopuszczalnego, więc:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq k_g \dots \dots \dots 132.$$

Belkę o potrzebnych wymiarach znajduje się tu za pomocą prób. W tym celu przyjmuje się jej przekrój na oko i wyznacza dlań natężenie z wzoru $\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$. Jeżeli obliczone w ten sposób natężenie jest większe od dopuszczalnego k_g , to przyjęliśmy belkę za słabą, jeżeli jest mniejsze, to za silną. Wtedy bierze się

dźwigar silniejszy (względnie słabszy) i ponawia obliczenie, aż natężenie σ możliwie zbliży się do nat. dop. k pozostając przecież mniejsze od niego.

Przykłady 106 i 107.

106. Platew dachu żelaznego umieszczona jest prostopadle do połacidachowej, nachylonej w spadku 1:3 do poziomu. Odstęp więzarów wynosi 3,20 m, odległość płatwi w rzucie poziomym 2,60 m, obciążenie 130 kg/m² rzutu poziomego. Z powodu położenia między wysokimi sąsiednimi budynkami wiatru nie potrzeba uwzględniać. ($k=1000$ kg/cm²).

Obciążenie płatwi wynosi:

$$Z = 3,2 \cdot 2,6 \cdot 130 = 1080 \text{ kg.}$$

Ciężar Z rozkłada się na Z' działający prostopadle i Z'' działający równolegle do połaci. Przy nachyleniu 1:3, t.j. $\alpha = 18^\circ 26'$ otrzymamy:

$$Z' = Z \cos \alpha = 1080 \cos 18^\circ 26' = 1025 \text{ kg}$$

$$Z'' = Z \sin \alpha = 1080 \sin 18^\circ 26' = 341 \text{ kg}$$

a stąd:

$$M_x = \frac{1}{8} Z' l = \frac{1}{8} 1025 \cdot 3,20 = 41000 \text{ kgcm}$$

$$M_y = \frac{1}{8} Z'' l = \frac{1}{8} 341 \cdot 3,20 = 13640 \text{ kgcm}$$

Przyjmijmy \perp NP. 18 ($W_x = 184,6 \text{ cm}^3$, $W_y = 26,6 \text{ cm}^3$), wtedy:

$$\sigma = \frac{41000}{184,6} + \frac{13640}{26,6} = 222 + 513 = 735 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenia są bardzo małe, przyjmijmy zatem przekrój mniejszy. np. \perp NP. 15 ($W_x = 112,0 \text{ cm}^3$, $W_y = 17,1 \text{ cm}^3$). Wtedy

$$\sigma = \frac{41000}{112,0} + \frac{13640}{17,1} = 366 + 795 = 1161 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenia przekroczyły tu granicę dopuszczalną ($k_s = 1000$ kg/cm²); przyjmijmy zatem \perp NP 16. ($W_x = 133,4 \text{ cm}^3$, $W_y = 19,9 \text{ cm}^3$); teraz:

$$\sigma = \frac{41000}{133,4} + \frac{13640}{19,9} = 308 + 681 = 989 \text{ kg/cm}^2.$$

Wartość ta zbliża się znacznie do dopuszczalnej; zatrzymamy przeto dźwigar NP 16.

107. Obliczyć dla zad. 106 płatew drewnianą.

Przyjmując przekrój 18/16 cm, otrzymamy natężenie:

$$\sigma = \frac{41000}{864} + \frac{13640}{167} = 48 + 18 = 66 \text{ kg/cm}^2,$$

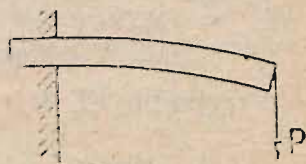
zatem mniejsze od dopuszczalnego. Przekroju mniejszego nie dajemy, gdyż otrzymalibyśmy natężenie zbyt wielkie.

§ 42. Ugięcie belki.

Wyżej (§ 29) zaznaczyliśmy, że każda belka narażona na działanie momentu zginającego ugina się. Włókna rozciągane bowiem wydłużają się, ściskane skracają, a belka przyjmuje wskutek tego kształt krzywy (rys. 177 i 178). Ugięcie to będzie oczywiście tem większe, im większa jest *dlugość* belki i im większe *obciążenie* p.



Rys. 177.



Rys. 178.

natomiast tem mniejsze, im belka jest silniejszą, t. j. im ma większy *moment bezwładności* I. Wreszcie ugięcie będzie większe, gdy materiał bardziej się wydłuża t. j. gdy ma większy współczynnik wydłużenia α lub też, co na jedno wychodzi, mniejszy współczynnik sprężystości E. Największe ugięcie nazywamy *strzałką ugięcia* belki. Znaając wielkość i rodzaj obciążenia belki, możemy wyznaczyć jej ugięcie; nie podajemy tu jednak samego obliczenia, ale tylko wzory na największe ugięcie dla najczęściej przychodzących rodzajów obciążenia.

Przepisy budowlane podają zwykle granicę wielkości strzałki ugięcia; najczęściej dla ciężaru stałego nie powinna ona przekraczać $\frac{1}{500}$ części długości belki:

$$f \leq \frac{1}{500} l \dots\dots\dots 137$$

W normalnych wypadkach strzałka ugięcia pozostaje poniżej tej granicy; jednakowoż przy belkach długich, a stosunkowo słabo obciążonych należy wzór ten uwzględnić, a dźwigar obliczać na *zginanie i ugięcie*.

Strzałka ugięcia wynosi:

dla belki wolno podpartej, obciążonej ciężarem całkowitym, jednostajnie rozłożonym:

$$f = \frac{5}{384} \frac{gl^4}{EI} \dots\dots\dots 133$$

dla belki wolno podpartej, obciążonej ciężarem skupionym, umieszczonym w środku rozpiętości:

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \dots\dots\dots 134$$

dla belki jednym końcem wmurowanej, obciążonej ciężarem całkowitym, jednostajnie rozłożonym:

$$f = \frac{1}{8} \frac{gl^4}{EI} \dots\dots\dots 135$$

dla belki jednym końcem wmurowanej, obciążonej ciężarem skupionym na końcu (t. j. w odległości l od miejsca wmurowania):

$$f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI} \dots\dots\dots 136.$$

Przykłady 108 i 109.

108. Obliczyć wymiary belki żelaznej wolno podpartej o długości $l = 8,00$ m, obciążonej ciężarem jednostajnie rozłożonym

$g = 200 \text{ kg/mb}$, jeżeli ugięcie nie może być większe niż $\frac{1}{500}$ długości.

Na zginanie otrzymamy:

$$G = 200 \cdot 8,0 = 1600 \text{ kg.}$$

$$M = \frac{1}{8} Gl = \frac{1}{8} \cdot 1600 \cdot 8,00 = 1600 \text{ kgm}$$

$$W_p = \frac{160000}{100} = 160 \text{ cm}^3$$

Moglibyśmy zatem użyć na zginanie dźwigara NP 18 ($W = 181,6 \text{ cm}^3$). Obliczmy jednak strzałkę ugięcia:

$$f = \frac{5}{384} \frac{Gl^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{Gl^3}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1600 \cdot 800^3}{2150000 \cdot 1662} = 2,98 \text{ cm.}$$

Strzałka wygięcia jest większa od dopuszczalnej, która wynosi $f' = \frac{1}{500} l = \frac{1}{500} 800 = 1,6 \text{ cm}$.

Ze względu na ugięcie musimy zastosować dźwigar NP 22 o momencie bezwładności $I = 3434 \text{ cm}^4$.

$$\text{Ugięcie będzie } f = \frac{5}{384} \frac{Gl^3}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{1600 \cdot 800^3}{2150000 \cdot 3434} = 1,44 \text{ cm.}$$

109. Jak wielkie będzie ugięcie dźwigara NP 22 w przykładzie poprzednim, jeżeli ciężar $G = 1600 \text{ kg}$ będzie działał jako skupiony w środku belki?

Wedle wzoru 134 otrzymamy wtedy:

$$f = \frac{Gl^3}{48 EI} = \frac{1600 \cdot 800^3}{48 \cdot 2150000 \cdot 3434} = 2,32 \text{ cm.}$$

Widzimy więc, że w tym wypadku ugięcie będzie znacznie większe i przekroczyłoby granicę dopuszczalną.