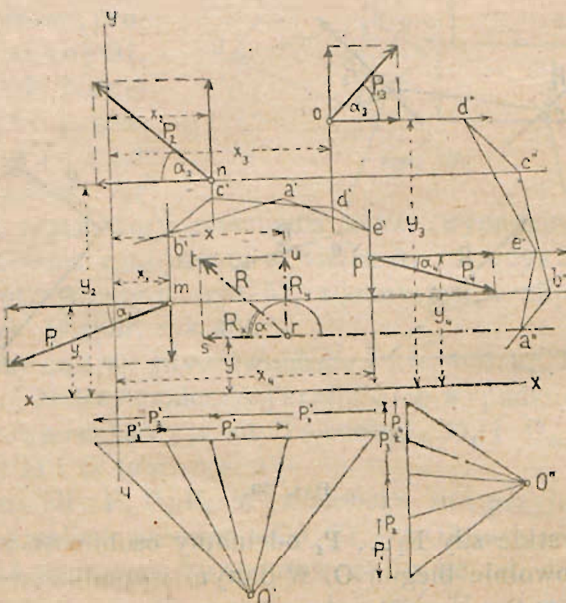
my osobno wielobok sił składowych poziomych, osobno pionowych, a dla nich też osobne wieloboki sznurowe.

Wykonaliśmy to na rys. 60. Ponieważ składowe idą po części we wprost przeciwnych kierunkach, przeto rozsunęliśmy je w wielobokach sił wedle § 13. Następnie wykreśliliśmy wielobok sznurowy a′ b′ c′ d′ e′ dla sił pionowych, zaś ą″ b″ c″ d″ e″ dla poziomych. Wypadkowa przechodzi przez punkt r przecięcia wypadkowych a′r i a″r; wielkość jej R=rt znaleźliśmy w równoległoboku sił częściowych rstu.

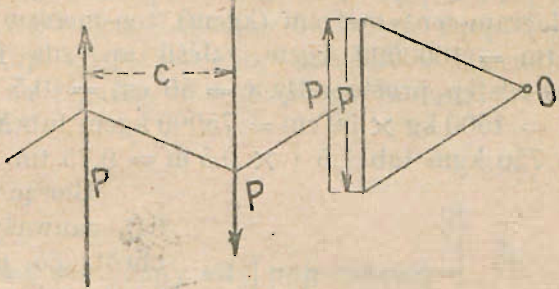


Rys. 60.

C. Moment statyczny.

§ 14. Para sił.

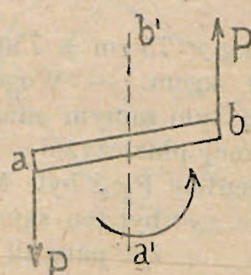
Jeśli w ostatnio rozpatrywanym wypadku sił równoległych, a *przeciwnie* skierowanych różnica sił jest niewielka, to wedle rys. 54 punkt zaczepienia wypadkowej oddala się znacznie od obu sił i to tem bardziej, im różnica ta jest mniejsza. Jeśli obie siły P_1 i P_2 są sobie wreszcie *równe*, to wypadkowa przesunie się w nieskończoność, gdyż boki wieloboku sznurowego będą tu równoległe (por. rys. 61), a tak samo równoległe byłyby i linje a_2b_1 i a_1b_2 z rys. 54; wielkość zaś wypadkowej spadnie do zera, $R=0$. Siły takie mimo to *nie są w równowadze*, ale tworzą t. zw. *parę sił*.



Rys. 61.

Skutek jej jest całkiem inny niż pojedynczej siły; siła pojedyncza stara się bowiem posunąć ciało, na które działa, np. ciągnąc pręt ab w kierunku wskazanym strzałką (rys. 62) *posuwamy* go w tymże kierunku; natomiast para sił działając na jakieś ciało, stara się je obrócić, np. jeśli belkę ab ciągną dwie siły P w kierunkach *równoległych*, lecz *przeciwnych*, to belka ta obracać się będzie w kierunku oznaczonym strzałką tak długo, aż przejdzie w położenie a′ b′ (rys. 63).

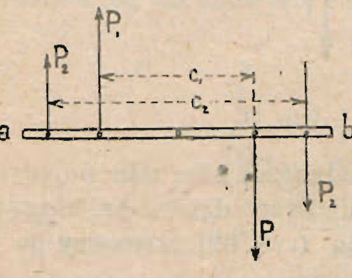
Rys. 62.



Rys. 63.

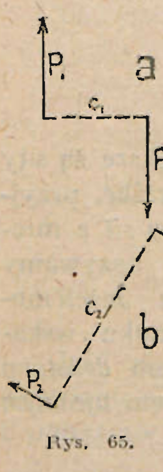
To działanie obrotowe jest tem silniejsze, im większe są siły P i im większa jest ich odległość. Aby je więc określić, przyjmujemy jako jego miarę *iloczyn siły* P *przez odległość obu sił* c mierzoną prostopadle do sił (rys. 61). Iloczyn ten $M=Pc$ nazywamy *momentem statycznym*, zaś odległość „c" *ramieniem momentu*. Jeżeli moment stara się obrócić ciało, na które działa, w kierunku wskazówki na zegarze (rys. 64) nazywamy go momentem *dodatnim* $(+M)$; jeśli w kierunku przeciwnym (rys. 63) momentem *ujemnym* $(-M)$.

Moment jest iloczynem siły przez długość; trzeba go więc wyrazić w jednostkach siły (kg, t) pomnożonych przez jednostki długości (cm, m); odpowiednio do tego nazywamy jednostkę momentu kilogram-centymetrem (kgcm), ton-metrem (tm) i t. p., przyczem 1 tm = 1000000 kgcm. Jeśli np. siła $P = 1500$ kg $= 1{,}5$ t zaś odstęp prostopadły $c = 50$ cm $= 0{,}5$ m to moment wynosi $M = 1500$ kg $\times$ 50 cm $= 75000$ kgcm lub $M = 1500$ kg $\times$ 0,5 m $=$ $= 750$ kgm lub 1,5 t $\times$ 0,5 m $= 0{,}75$ tm i t. d.

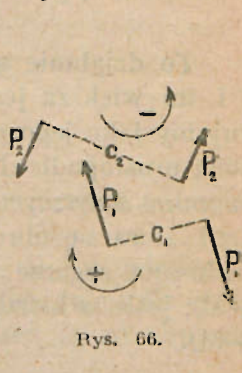


Rys. 64.

Biorąc pod uwagę belkę ab (rys. 64), zauważymy jednak, że ten sam obrót, co para sił P_1 w odległości c_1 sprawi para sił mniejszych P_2 działających w odległości c_2 większej; chodzi tylko o to, by iloczyn $M = P_1c_1$ był równy iloczynowi P_2c_2. Np. parę sił o momencie 1500 kg $\times$ 50 cm $= 75000$ kgcm możemy zastąpić parą sił o momencie $M =$ $= 1000$ kg $\times$ 75 cm $= 75000$ kgcm lub $M = 300$ kg $\times$ 250 cm $=$ $= 75000$ kgcm. — Wogóle parę sił zastąpić można inną parą sił o tym samym momencie obrotu, działającą *gdziekolwiek* na tej samej płaszczyźnie. Np. moment P_1c_1 (rys. 65) zastąpić można momentem P_2c_2, byle $M = P_1c_1 = P_2c_2$ i byle kierunek obrotu był ten sam. I naodwrót: jeśli chcemy zrównoważyć parę sił działającą na pewne ciało, to musimy zaczepić na niem inną parę sił, czyli inny moment o tej samej wielkości lecz przeciwnym znaku, t. j. przeciwnym kierunku obrotu, np. na rys. 66 moment P_1c_1 został zrównoważony momentem $-P_2c$ o wielkości równej P_1c_1 obracającym w przeciwnym kierunku. (Znak „—" oznacza obrót w przeciwnym kierunku).



Rys. 65.

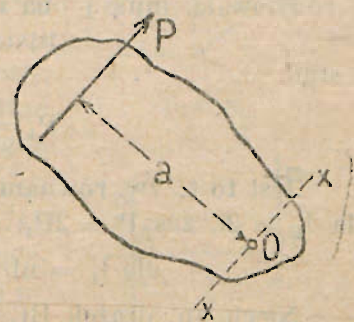


Rys. 66.

Jeżeli na jedno i to samo ciało działają równocześnie dwa momenty, to działanie ich mierzy się algebraiczną sumą obu momentów. Np. jeśli na drążek ab (rys. 64) działają obie pary sił P_1c_1 i P_2c_2, to moment wypadkowy wynosi $M = P_1c_1 + P_2c_2 =$ $= (750 + 750)$ kgm $= 1500$ kgm.—Jeżeliby momenty P_1c_1 i P_2c_2 miały znaki przeciwne (np. gdyby — P_1c_1 obracało w kierunku przeciwnym wskazówki na zegarze, to wypadkowy moment wynosiły $M = P_2c_2 - P_1c_1 = 0$).

§ 15. Moment statyczny siły pojedyńczej.

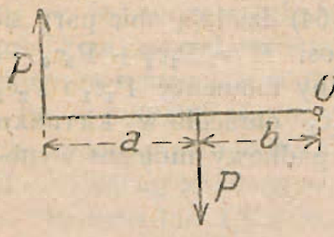
Jeśli na jakieś ciało, utwierdzone w p. O działa siła P, to nastąpi obrót tegoż ciała około p. O w kierunku wskazanym strzałką (rys. 67). Miarą tego działania jest — jak przy parze sił — iloczyn siły P przez jej prostopadłą odległość od p. O, czyli t. zw. *moment statyczny* siły P względem p. A. Odległość *a* nazywamy ramieniem siły, p. O biegunem momentu. Moment obracający w kierunku wskazówki na zegarze (jak na rys. 67) naz. dodatnim, obracający w kierunku przeciwnym, momentem ujemnym.



Rys. 67.

Odległość siły P od równoległej osi X — X, przechodzącej przez p. O, jest wszędzie stała i równa *a*, przeto: *Moment siły* P *względem wszystkich punktów na równoległej osi* XX *jest równy* $M = Pa$.

Na mocy tego możemy wykazać, że *moment pary sił jest stały dla każdego bieguna* na płaszczyźnie. Z rys. 68 wynika moment obu sił względem dowolnego punktu O: $M = P(a + b) - Pb = Pa$. Moment zależy zatem tylko *od wielkości i odległości sił* P *od siebie* bez względu na odległość punktu O.



Rys. 68.

Weźmy pod uwagę pręt przytrzymany w p. A (rys. 69). Jeśli w którymkolwiek jego punkcie umieścimy ciężar P, to jest pręt obróci się około A. Obrót ten da się udaremnić wtedy, jeśli po drugiej stronie podpory umieścimy też ciężar o odpowiedniej wielkości działający w dół. Ciężar równoważący musi być wedle § 14 tem większy, im mniejsza będzie jego odległość od podpory A. Tę prostopadłą odległość siły P od A nazywamy *ramieniem siły*. Siła P, starając się belkę obrócić, wywołuje względem A moment o wielkości Pl; również siła P_1 wywołuje moment $P_1 l_1$, ale o znaku przeciwnym (rys. 69).

Jeśli obrót nie ma nastąpić, t. j. jeśli belka ma pozostać w równowadze, muszą oba momenty być równe, t. j.:

$$Pl = P_1 l_1 \quad \ldots\ldots\ 8$$

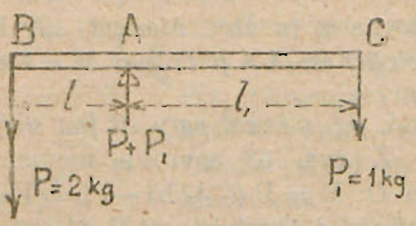
a stąd:

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} \quad \ldots\ldots\ 8a$$

Jest to t. zw. równanie momentów. Dla $l = l_1$ mamy $P = P_1$; dla $l_1 = 2l$, zaś $P = 2P_1$; ogólnie

$$\text{dla } l_1 = nl \qquad P = nP_1 \ \ldots\ldots\ 8b.$$

Niech np. drążek BC ma długość 30 cm. Jeśli podparty jest jak na rys. 69 w odległości 10 cm od p. B, to ciężar P=2 kg uwieszony na jego końcu, wywoła moment M = Pl = 2.10 = 20 kgcm. Ciężar ten wywołałby obrót drążka. Aby drążek pozostał jednak w równowadze, trzeba w punkcie C, oddalonym od podpory o długość l_1=20 cm zawiesić ciężar



Rys. 69.

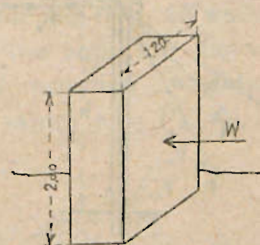
$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} = \frac{2.10}{20} = 1 \text{ kg.}$$

Jeśliby punkt podparcia leżał w środku, to należałoby obustronnie zawiesić równe ciężary $P = P_1$.

Właściwie powstają tu dwie pary sił. Siła P działając na belkę wywołuje prócz obrotu takie ciśnienie t. j. siłę w A o wielkości też P (t. zw. oddziaływanie), ale skierowaną ku górze; powstaje więc para sił o momencie Pl. Podobnie siła P_1 wywołuje w A siłę P_1; więc i parę sił—P_1l_1. Jak wyżej powiedzieliśmy dwie te pary sił będą w równowadze, jeśli $Pl=P_1l_1$ czyli $Pl-P_1l_1=0$.

Przykłady 24—27.

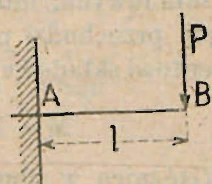
24. Na mur pionowy o wysokości 2,00 m., a długości 1,20 m. działa parcie wiatru z siłą 150 kg. na 1 m² muru. Znaleźć moment M parcia wiatru względem podstawy muru (rys. 70).



Rys. 70.

Mur ma powierzchnię $2{,}00 \times 1{,}20 = 2{,}40$ m²; zatem wielkość parcia wiatru wynosi $W=2{,}40 \,.\, 150=360$ kg; wypadkowa parcia zaś zaczepia w połowie wysokości, więc w odległości 1 m. pod podstawy. Stąd moment $M = 360$ kg . $1{,}00$ m $= 360$ kgm.

25. Chodnik wspiera się na wsporniku AB, umieszczonym w murze (rys. 71). Znaleźć moment ciężaru $P=800$ kg względem punktu wmurowania A, jeśli $l=1{,}20$ m. (Por. przykł. 8).



Rys. 71.

Moment ten wynosi

$$Pl = 800 \,.\, 120 = 96000 \text{ kg cm.}$$

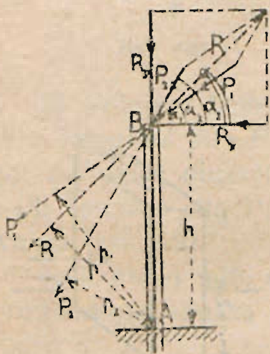
26. Jak wielki będzie moment ciężaru P jak w przykł. 25, jeśli ciężar ten będzie rozłożony jednostajnie na całej długości wspornika?

Jeśli ciężar jest rozłożony na całej długości, to moment możemy obliczać biorąc ciężar jak gdyby skupiony był w środku, t. j. w odległości $\frac{l}{2}$ od punktu wmurowania A. Wtedy moment:

$$M = P \,.\, \frac{l}{2} = 800 \times \frac{120}{2} = 48000 \text{ kgcm.}$$

t. j. dwukrotnie mniejszy niż w przykł. 25.

27. Na jarzmo mostowe (rys. 72) działają w punkcie B jednostronnie zastrzały wiązania rozporowego podwójnego $P_1 = 2500$ kg, $P_2 = 4000$ kg przyczem kąty nachylenia ich do poziomu wynoszą $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = 35^0$. Jak wielki moment zginający wywierają te siły względem podstawy jarzma A, jeżeli wysokość punktu B ponad nią wynosi h=2,00 m. (por. zad. 5).



Rys. 72.

a) Wypadkowa R sił P_1 i P_2 wynosi 6360 kg, zaś kąt jej nachylenia do poziomu $\alpha = 44^0 42'$. Odległość prostopadła wypadkowej od podstawy A wynosi więc:

$$p = h\cos\alpha = 2,00 \cos 44^0 42' = \backsim 2,00 . 0,709 = 1,42 \text{ m*)},$$

zatem moment siły R względem podstawy

$$M = Rr = 6360 . 1,42 = 9031 \text{ kgm}.$$

b) Moment ten znaleść możemy także inaczej. Rozłóżmy mianowicie siłę R na składową poziomą $R_x = 4520$ kg i pionową $R_y = 4470$ kg (por. zad. 5). Moment siły R jest równy momentowi obu tych składowych; moment siły R_y jest jednak zerem, gdyż kierunek jej przechodzi przez punkt A; moment M równa się zatem momentowi składowej poziomej R_x. Wtedy

$$M = R_x h = 4520 . 2,00 = 9040 \text{ kgm}.$$

(Różnica w obu wartościach na M pochodzi stąd, że w pierwszym rachunku zaokrągliliśmy wartości R i p; różnica ta jest zresztą bardzo mała).

c) Wreszcie możemy znaleść M, obliczając momenty obu sił składowych. Ramię siły P_1 wynosi

$$p_1 = h\cos\alpha_1 = 2,00 . 0,5 = 1,00 \text{ m}$$

zaś ramię siły P_2

$$p_2 = h\cos\alpha_2 = 2,00 . 0,817 = 1,634 \text{ m}$$

---

*) Długość p możemy także znaleźć wprost z wykresu.

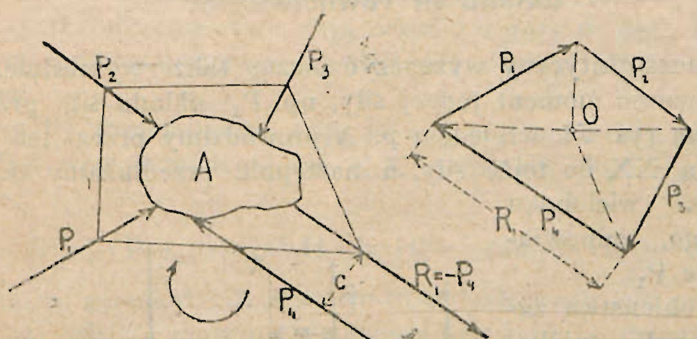
a stąd moment

$$M = P_1p_1 + P_2p_2 = 2500 \cdot 1{,}00 + 4000 \cdot 1{,}634 = 2500 + 6536\,\text{kgm} = \\ = 9036 \backsim 9040\ \text{kgm}.$$

Z tego przykładu widać, że wszystkie trzy drogi prowadzą do tego samego rezultatu.

§ 16. Para sił jako wypadkowa układu sił.

Zdarzyć się może, że wielobok sił zamknie się (t. j. że wszystkie siły dadzą wypadkową równą zeru), ale nie zamknie się wielobok sznurowy (t. j. że pierwszy i ostatni promień wieloboku sznurowego nie przetną się na kierunku tej samej siły P).



Rys. 73.

Dla zbadania tego przypadku (por. rys. 73), złóżmy wszystkie siły *z wyjątkiem jednej* np. P_4 w częściową wypadkową R_1 zapomocą np. wieloboku sznurowego. Wypadkowa R_1 musi być *równą i przeciwną* sile P_4, gdyż tylko wtedy zamknie się wielobok sił, co zaznaczyliśmy na początku; jednakowoż siły P_4 i R_1 *nie będą leżeć w jednej prostej*, choć będą równoległe i równe. Innemi słowy otrzymujemy zatem jako wynik *parę sił* o wielkości P_4c. Ciało, na które siły tak rozmieszczone działają, zostanie wprawione w *ruch obrotowy* i w równowadze tem samem *nie będzie*.

Przykład 28.

28. Jakie działanie wywrą na ciało A siły $P_1 = 270$ kg, $P_2 = 235$ kg, $P_3 = 235$ kg, $P_4 = 380$ kg, o kierunkach, podanych na rys. 73.

Złożywszy siły P_1, P_2 i P_3, otrzymujemy wypadkową częściową R_1 o wielkości $R_1 = -P_4$ oddaloną o c. = 11 cm od P_4. Złożywszy zaś te dwie ostatnie siły, otrzymamy moment obracający w kierunku wskazówki na zegarze, więc dodatni, o wielkości:

$$M = P_4 \,.\, c = 380 \,.\, 11 = 4180 \text{ kgcm}.$$

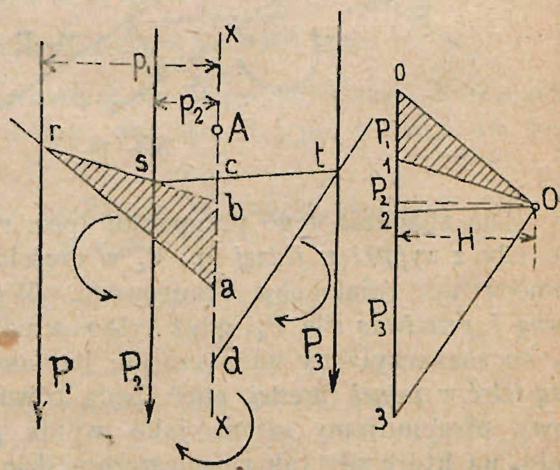
Ciało będzie się zatem obracać w kierunku strzałki na rys. 73.

§ 17. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił równoległych.

Moment statyczny wyznaczyć można także wykreślnie. Mając np. znaleść moment jednej siły, np. P_1 układu sił, przedstawionego na rys. 74 względem p. A prowadzimy przez ten punkt równoległą XX do tejże siły, a następnie przedłużamy do XX dwa boki wieloboku sznurowego, odpowiadające sile P_1.

Z podobieństwa zakreskowanych trójkątów 010 i abr otrzymamy wtedy proporcję $p_1 : ab = H : 01$ czyli $p_1 : ab = H : P_1$ skąd: $P_1 p_1 = ab \,.\, H = M_1 \ldots\ldots 9$

$P_1 p_1$ jest bowiem momentem statycznym M_1 siły P_1 względem p. A leżącego na osi XX czyli względem osi XX (por. § 15).



Rys. 74.

Z równania 9 wynika, że jest on równy *odcinkowi* a b, odciętemu promieniami wieloboku sznurowego równoległymi do Oo i O1, (t. j. do promieni wieloboku sił), odpowiednimi danej sile, *pomnożonemu przez odległość biegunową* H. Odcinek a b czytamy od dołu do góry, t. j. od a do b, gdyż pierwszemu z promieni wieloboku sił OO odpowiada promień sznurowy a r. Moment ten jest ujemny, gdyż obraca w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki na zegarze.

W ten sam sposób z podobieństwa trójkątów 12O i b c s udowodnić można, że moment statyczny siły P_2 względem osi X X równy jest iloczynowi odcinka b c i odległości bieg. H.

Wreszcie, rozumując podobnie, dojdziemy do wniosku, że m. st. siły P_3 równy jest odcinkowi c d pomnożonemu przez H. Moment ten jest jednakowoż dodatni, a odcinek c d czytać musimy z góry na dól, gdyż w wieloboku sił promień O_2 równoległy do ct idzie przed promieniem O_3 równoległym do t d. Wynika stąd, że dla takiego położenia bieguna i sił, jak na rysunku, siły sprawiające momenty dodatnie dają odcinki z góry na dół, siłom zaś dającym momenty ujemne odpowiadają odcinki o kierunku przeciwnym.

Na tej samej figurze dają się odczytać momenty *kilku sił równoległych* względem danej osi X X. Np. siły P_1 i P_2 dają moment:

$$M_{12} = -(P_1 p_1 + P_2 p_2) = -(ab.H + bc.H) = -(ab + bc) H = -ac.H \ldots 9a$$

Zatem moment kilku sił równoległych względem punktów na danej osi znaleść możemy w następujący sposób: Promień wieloboku sznurowego, *poprzedzający* pierwszą z danych sił oraz promień *następujący* po ostatniej z nich, przedłużamy aż do osi X X, a odcinek tak otrzymany na tej osi, pomnożony przez odległość biegunową, daje wielkość momentu stat. danych sił względem osi X X.

Stąd wynika także bezpośrednio, że moment całego układu sił P_1 P_2 P_3 równy jest iloczynowi ad. H, gdyż:

$$M_{123} = -P_1 p_1 - P_2 p_2 + P_3 r_3 = (-ab - bc + cd) H = a d. H = \ldots . 9b$$

Moment ten jest dodatni, gdyż odcinek ad skierowany jest z góry na dół.

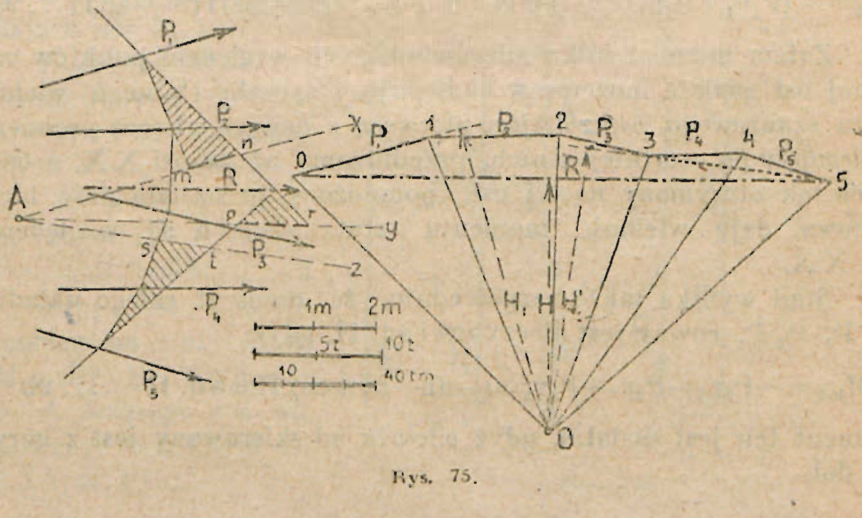
Wiemy, że (o ile nie zachodzi wypadek pary sił), wypadkowa układu sił leży w punkcie przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego. Jeśli zatem szukamy momentu układu sił *ze względu na tę wypadkową*, to suma odcinków na niej równa jest zeru (gdyż suma odcinków dodatnich równa jest sumie odcinków ujemnych). Np. na rys. 51 moment siły $P_1 \ldots P_6$ względem siły R równy jest zeru, a odcinek utworzony na niej promieniami skrajnymi, równoległymi do oO — i 5O równa się też zeru.

§ 18. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego układu sił dowolnych względem dowolnego bieguna.

W zupełnie podobny sposób, co w § 17 udowodnić można, że moment siły P_1 względem punktu A (por. rys. 75) równy jest odcinkowi mn na osi AX równoległej do siły P_1 pomnożonemu przez odległość biegunową H_1 odpowiednią sile P_1:

$$M_1 = mn.\ H_1 \ldots\ldots 10$$

Podobne wartości otrzymamy dla sił następnych, wziętych pojedyńczo, jednakowoż odl. biegunowa jest tutaj dla każdej siły inna. Dla znalezienia momentu wszystkich sił $P_1 \ldots P_5$ zauważmy, że za-



Rys. 75.

miast nich wziąć możemy *wypadkową ich* R i dla niej obliczyć moment. Wynosić on będzie:

$$M_R = pr. \ H \ldots\ldots \quad 11$$

(Oba momenty są dodatnie).

Zatem moment statyczny układu dowolnych sił $P_1 P_2 \ldots$ względem p. A znaleźć możemy w następujący sposób. Przez p. A prowadzimy oś Ay równoległą do wypadkowej R, a długość odcięta na tejże osi skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, pomnożona przez odległość biegunową wypadkowej H daje moment statyczny wszystkich sił względem punktu A.

Odległość biegunową uważać można także za siłę, a mianowicie za prostopadłą do wypadkowej składową sił, określonych skrajnymi bokami wieloboku sił, t. j. sił I i V (por. rys. 50 § 12) lub sił Oo i O5 (rys. 75). Ponieważ zaś moment wedle wzoru M = pr. H, przeto najlepiej jest przyjąć tę odległość biegunową w *okrągłej* liczbie np. 1, 2, 4, 5, 10, 20 ton, co znacznie ułatwia rachunek. Ważne to jest zwłaszcza dla sił równoległych.

Wyżej, w § 14 zaznaczyliśmy, że moment mierzy się w kgm (lub tm), że zatem, aby otrzymać moment, trzeba pomnożyć *siłę* przez *długość*. Jeśli zatem we wzorze 11 (też 9 lub 10) jeden mnożnik (najczęściej H) uważamy za siłę, to mnożnik drugi (zwykle odcinek pr) mierzyć musimy w jednostkach długości.

Niech np. odcinek pr odczytany *w skali długości*, ma długość 1,20 m. zaś odległość w *skali sił* H = 20 ton, to moment będzie wynosił M = H. pr = 20 t. 1,2 m = 24 tm = 24000 kgm. Zamiast jednak mnożyć w ten sposób, możemy, uwzględniając skalę sił i skalę długości, *przyjąć dla momentów nową podziałkę*, tak, aby odcinek pr można było odrazu odczytać w jednostkach momentów (np w kgm lub tm). Długość wyobrażająca *w skali długości* 1,00 m pomnożona przez H = 20 ton, przedstawiać będzie teraz *w skali momentów* moment 20 t. 1,00 m = 20 tm. Tę też długość określimy na rys. 75 jako skalę momentów (dla odległości bieg. H).

Skala (podziałka) *momentów równa jest zatem iloczynowi skali długości przez biegunową mierzoną w jednostkach sił.*

Jeżeli np. 1 cm w skali długości przedstawia 1 m, zaś długość biegunową przyjęliśmy 10 t, to w skali momentów 1 cm. równa się 10 tm.

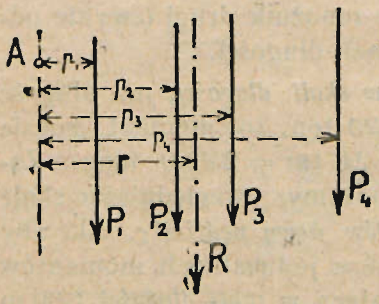
Przykład 29.

29. Jak wielki moment wywołują w rys. 75 siły P_4 i P_5 względem punktu A.

Wypadkowa sił P_4 i P_5 jest równoległa do linji 35 oznaczonej w wieloboku sił linją kropkowaną. Prowadzimy więc przez punkt A linję A z równoległą do 35 i przedłużamy do niej promienie wieloboku sznurowego równolegle do 03 i do 05, otrzymując odcinek st wynoszący (w skali długości) $st = 0,88$ m. Odległość biegunowa odpowiednia siłom P_4 i P_5 (t. j. ich wypadkowej) wynosi $H' = 22,4$ t. Siły P_4 i P_5 wywołują przeto względem punktu A moment o wielkości $M' = 22,4 \text{ t} \times 0,88 \text{ m} = 19,7$ tm.

§ 19. Rachunkowe składanie sił równoległych.

Z § 15 wynika, że w ogólności każda siła P_n na danej płaszczyźnie wywołuje około każdego punktu na tejże płaszczyźnie moment obrotu o wielkości $P_n r_n$, gdzie r_n oznacza prostopadłą odległość siły od tego punktu. Ponieważ zaś układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową, przeto i całkowite działanie obrotowe czyli moment obrotu tej wypadkowej musi być równy sumie momentów wszystkich sił składowych około tego samego punktu (por. § 17) czyli:



Rys. 76.

$$R r = P_1 r_1 + P_2 r_2 + \ldots + P_n r_n = \Sigma P r \ldots\ldots 12$$

Udowodnić to da się w sposób następujący:

Niech P_1 i P_2 będą dwiema siłami równoległemi, które należy złożyć w wypadkową R, to moment siły R względem A wynosi:

$$Rr = (P_1 + P_2)\, r = P_1 r + P_2 r.$$

$$Rr = P_1 p_1 + P_1 (r - p_1) + P_2 p_2 - P_2 (p_2 - r).$$

$$= P_1 p_1 + P_2 p_2 + [\,P_1 (r - p_1) - P_2 (p_2 - r)\,]$$

ale $\dfrac{r - p_1}{p_2 - r} = \dfrac{P_2}{P_1}$ wedle 7.

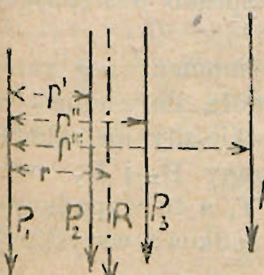
a stąd $P_1 (r - p_1) = P_2 (p_2 - r)$, a więc:

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 12a.$$

Podobnie przeprowadza się dowód dla większej ilości sił.

Równanie 12 pozwala nam znaleźć rachunkowo wielkość i położenie wypadkowej układu sił równoległych. Otrzymamy tu bowiem, przyjmując zupełnie dowolnie punkt obrotu A (rys. 76).

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots$$



Rys. 77.

a stąd $r = \dfrac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots}{R}$ ...12b

gdzie $R = P_1 + P_2 + \dots$ 13.

Niekiedy wygodnie jest przyjąć punkt obrotu na jednej z sił np. na P_1 a wtedy: (rys. 77):

$$Rr' = P_1 \,.\, 0 + P_2 p' + P_3 p'' + \dots$$

$$r' = \frac{P_2 p' + P_3 p'' + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots} \; . \; . \; . \; 12c.$$

Podobnie przeprowadza się też rachunkowe rozkładanie sił równoległych na dwie (por. rys. 13) składowe. Mając np. rozłożyć siłę R (rys. 52) na składowe P_1 i P_2 obieramy jako środek momentu punkt leżący na jednej z tych sił np. na P_2. Wtedy moment siły P_2 względem tego punktu jest zerem; otrzymamy zatem:

$$P_1 (a + b) = Rb$$

a stąd

$$P_1 = \frac{b}{a + b} R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 14.$$

Wielkość siły P_2 otrzymać możemy przyjmując środek momentu na kierunku P_1. Łatwiej jednak znajdziemy ją z warunku, że suma sił składowych P_1 i P_2 musi być równa sile R czyli $R = P_1 + P_2$, a stąd:

$$P_2 = R - P_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14a$$

Wstawiając wartość na P_1 i równanie otrzymamy:

$$P_2 = R - \frac{b}{a+b} R = \frac{a}{a+b} R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14b$$

§ 20. Rachunkowe składanie sił o różnych kierunkach nie przechodzących przez jeden punkt, a leżących na płaszczyźnie.

Jeśli mamy znaleźć drogą rachunkową wielkość i położenie wypadkowej układu sił o różnych kierunkach, a nie przechodzących przez jeden punkt, postępujemy w sposób następujący (rys. 60).

Przyjmujemy dowolny punkt jako biegun momentu, a zarazem przeprowadzamy przezeń dwie prostopadłe do siebie osi układu spółrzędnych (X,Y) i rozkładamy wszystkie siły na składowe w kierunkach X i Y. Następnie wyznaczamy R_x i R_y, wypadkowe składowych równoległych do osi X i Y, a te wypadkowe częściowe złożone w wypadkową R dadzą wypadkową wszystkich sił działających. Rachunkowo otrzymamy:

moment statyczny składowych równoległych do osi x:

$$P_1 y_1 \cos\alpha + P_2 y_2 \cos\alpha_2 + \ldots = R_x y \quad \ldots \quad 15$$

moment statyczny składowych równoległych do osi y:

$$P_1 x_1 \sin\alpha + P_2 x_2 \sin\alpha \text{ i } + \ldots = R_y x \quad \ldots \quad 15a$$

gdzie $R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots$ 16

$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots$ 16a

Z równań tych znajdziemy:

$$x = \frac{P_1 x_1 \sin\alpha_1 + P_2 x_2 \sin\alpha_2 + \ldots}{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots} \quad 17$$

$$y = \frac{P_1 y_1 \cos\alpha_1 + P_2 y_2 \cos\alpha + \ldots}{P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots} \quad 17a$$

x i y są spółrzędnemi jednego punktu, przez który przechodzi wypadkowa R. Wielkość jej wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad 18$$

Jeśli zachodzi równowaga, to wypadkowa równa się zeru, a tem samem i jej moment i moment *wszystkich* sił względem dowolnego punktu równa się też zeru, zatem:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots = 0 \\ P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots = 0 \\ P_1x_1 \sin\alpha_1 + P_2x_2 \sin\alpha_2 + \ldots = 0 \\ P_1y_1 \cos\alpha_1 + P_2y_2 \cos\alpha_2 + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad 19$$

Przykład 30 — 32.

20. Znaleźć wielkość i położenie wypadkowej układu sił wedle rys. 55 (por. przykład 19).

Jako biegun momentu weźmiemy punkt początkowy układu A, gdyż mamy podane wprost odległości sił od tego punktu. Wielkość wypadkowej R wynosi:

$$R = 1600 + 1400 + 1800 + 1200 = 6000 \text{ kg}$$

$$x = \frac{P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots}{R} =$$

$$= \frac{1600 \,.\, 0{,}9 + 1400 \,.\, 2{,}5 + 1800 \,.\, 3{,}3 + 1200 \,.\, 4{,}6}{6000} = 2{,}69 \text{ m.}$$

Ten sam wynik otrzymamy, biorąc momenty poszczególnych sił *względem punktu leżącego na jednej z nich* np. względem P_1. Wtedy otrzymamy:

$$x' = \frac{P_1 \,.\, 0 + P_2(p_2 - p_1) + P_3(p_3 - p_1) + P_4(p_4 - p_1)}{R} =$$

$$= \frac{1400 \,.\, 1{,}6 + 1800 \,.\, 2{,}4 + 1200 \,.\, 5{,}7}{6000} = 1{,}79 \text{ m}$$

W zadaniu 19 znaleźliśmy wykreślnie wypadkową o tej samej wielkości i tem samem położeniu.

31. Dane są trzy siły równoległe $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 800$ kg, $P_3 = 700$ kg. Należy znaleźć ich wypadkową R i jej położenie, oraz obliczyć dwie siły równoległe O_1 i O_2, przechodzące przez punkty M i N, a równoważące je. (Por. zad. 22 i rys. 58).

Dla znalezienia wypadkowej obliczymy moment względem jednej z sił np. P_3; otrzymamy wtedy:

$$P_1 (60 + 80) + P_2 . 80 - Rr = 0$$

gdzie $R = P_1 + P_2 + P_3 = 400 + 800 + 700 = 1900$ kg. Zatem:

$$r = \frac{1}{1900} (400 . 140 + 800 . 80) = 62 \text{ cm}.$$

Jeżeli siły O_1 i O_2 mają być w równowadze z siłą R (czyli z siłami P_1, P_2, P_3), to moment ich względem dowolnego punktu musi być równy i wprost przeciwny momentowi siły R. Obierzmy punkt ten na kierunku (nieznanej jeszcze) siły O_2, to otrzymamy:

$$O_1 (20 + 60 + 80 + 70) - R (62 + 70) = 0$$

a stąd:

$$O_1 = \frac{R (62 + 70)}{20 + 60 + 80 + 70} = \frac{1900 . 132}{230} = 1090 \text{ kg}$$

$$\text{zaś } O_2 = R - O = 1900 - 1090 = 810 \text{ kg},$$

zatem wartości te same, co znalezione wykreślnie w przykł. 22.

Jeżeli siły P_1, P_2, P_3 działają na belkę podpartą siłami O_1 i O_2, to te ostatnie nazywamy *oddziaływaniami* belki (por. § 3 i 23).

32. Znaleść wypadkową układu sił przedstawionego na rys. 59 i 60, sposobem rachunkowym, jeśli:

$P_1 = 680$ kg,	$P_2 = 600$ kg,	$P_3 = 400$ kg,	$P_4 = 500$ kg,
$\alpha_1 = 20^0$	$\alpha_2 = 42^0$,	$\alpha^3 = 47^0$,	$\alpha_4 = 17^0$.,
$x_1 = 1{,}10$ m,	$x_2 = 2{,}00$ m,	$x_3 = 1{,}30$ m,	$x_4 = 5{,}00$ m,
$y_1 = 1{,}80$ m,	$y_2 = 1{,}20$ m,	$y_3 = 5{,}20$ m,	$y_4 = 2{,}60$ m.

(Por. przykład 23)

Jako biegun momentu przyjmiemy początek układu A. Otrzymamy wtedy:

$$R_x = P_1 \cos\alpha_1 + \ldots = -680 \cos 20 - 600 \cos 42 + 400 \cos 47 + 500 \cos 17$$
$$-680 \,.\, 0{,}940 - 600 \,.\, 0{,}743 + 400 \,.\, 0{,}682 + 500 \,.\, 0{,}956 = -639 -$$
$$-446 + 273 + 478 = -334 \text{ kg}.$$

Znak — oznacza, że siła R_x skierowana jest w lewo.

$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + \ldots = -680 \sin 20 + 600 \sin 42 + 400 \sin 47 -$$
$$-500 \sin 17 = -680 \,.\, 0{,}342 + 600 \,.\, 0{,}669 + 400 \,.\, 0{,}731 + 500 \,.\, 0{,}292$$
$$= -233 + 401 + 292 - 146 = +314 \text{ kg}.$$

Znak + oznacza, że siła R_y skierowana jest ku górze.

Odstęp siły R_y od punktu A wynosi:

$$x = \frac{P_1 x_1 \sin\alpha_1 + \ldots}{P_1 \sin\alpha_1 + \ldots} = \frac{(P_1 \sin\alpha_1)\, x_1 + \ldots}{R_y} =$$

$$= \frac{+233 \,.\, 1{,}1 - 401 \,.\, 2{,}0 - 292 \,.\, 4{,}3 + 146 \,.\, 5{,}0}{-314} = +3{,}35 \text{ m}$$

$$y = \frac{P_1 y_1 \cos\alpha_1 + \ldots}{P_1 \cos\alpha_1 + \ldots} = \frac{(P_1 \cos\alpha_1)\, y_1 + \ldots}{R_x} =$$

$$= \frac{-639 \,.\, 1{,}8 - 446 \,.\, 4{,}2 + 273 \,.\, 5{,}2 + 478 \,.\, 2{,}6}{334} = +1{,}08 \text{ m}$$

Przez punkt określony spółrzędnemi $x = +3{,}35$ m, $y = +1{,}08$ m przechodzi zatem wypadkowa. Wielkość jej wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{334^2 + 314^2} = 455 \text{ kg}.$$

Kierunek jej określić możemy zapomocą kąta α, jaki R tworzy z osią X. Wynosi on:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{314}{334} = -0{,}943$$

skąd

$$\alpha = -43^0 20', \text{ wzgl. } \alpha' = 90^0 + 43^0 20' = 133^0 20'.$$