PODRĘCZNIK STATYKI BUDOWLI

Inż. Dr. STEFAN BRYŁA

PODRĘCZNIK STATYKI BUDOWLI

DLA ŚREDNICH SZKÓŁ TECHNICZNYCH

ZE 150 PRZYKŁADAMI I 264 RYS. W TEKŚCIE
ORAZ TABLICAMI POMOCNICZEMI

POLECONY DO UŻYTKU SZKOLNEGO ROZPORZĄDZENIEM MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO Z DNIA 22 STYCZNIA 1920 R. (Nr. S. III. 5524/20). Z ZAPOMOGĄ MINISTERSTWA ROBÓT PUBLICZNYCH

GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ
KRAKÓW — G. GEBETHNER I SPÓŁKA

OMYŁKI DRUKU.

Str.	wiersz	od	zamiast	ma być
7	8	góry	Otrzymamy	Otrzymany
„ 12	„ 15	„ dołu	„ P_y	„ R_y
„ 18	„ 7 i 8	„ góry	„ siłę P ściągnie	„ siłę w ścięgnie
„ 21	„ 1	„ „	„ jako	„ jedno
„ 23	„ 17	„ dołu	„ wielobokiem sił	„ wielobokiem lub ciągiem sił
„ 27	„ 7	„ „	„ $R = P_1 P_2 P_3 P_4$	„ $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$
„ 31	„ 10	„ „	po słowach: (rys. 63) należy dodać:	Łatwo zauważyć, że gdy po tym obrocie ciało znajdzie się w położeniu a′b′, to obie siły P wpadną w jedną linję, t. j. odległość ich będzie = 0.
„ 39	„ 5	„ góry	zamiast: OO	ma być: 0 O
„ 43	„ 4	„ „	„ $\frac{r - P_1}{P_2 - r}$	„ $\frac{r - p_1}{p_2 - r}$
„ 43	„ 6	„ „	„ $P_1 p_1 + p_2$	„ $P_1 p_1 + P_2 p_2$
„ 43	„ 9	„ dołu	„ $P_2 p' = P_3$	„ $P_2 p' + P_3 p'' + \dots$
„ 48	„ 3, 7 i 8	„ „	„ A	„ F
„ 54	„ 1	„ „	„ F^h	„ $F\frac{h}{2}$
„ 56	„ 13	„ góry	„ musiałyby się one	„ musiałaby się ona
„ 68	„ 10	„ „	„ kgm	„ kg
„ 74	„ 1	„ dołu	„ dodpór	„ podpór
„ 85	„ 10	„ „	należy dodać:	Podziałka sił 1 cm = 4000 kg, podziałka długości 1 cm = = 1,00 m.
„ 89	„ 1	„ „	zamiast: $pl_{\frac{1}{2}}$	ma być: $pl\frac{1}{2}$
„ 101	„ 14	„ góry	„ $= \frac{P}{F}$	„ $\sigma = \frac{P}{F}$
„ 102	„ 6	„ „	„ 4c m	„ 4 cm
„ 104	„ 9	„ dołu	„ $\frac{300}{20}15$	„ $\frac{300}{20} = 15$
„ 110	„ 3	„ góry	należy skreślić od „a również“	— do „na milimetry“
„ 112	„ 4	„ „	zamiast: pn.	ma być: np.
„ 117	„ 9	„ „	„ σ^d	„ σ_d
„ 141	„ 14	„ „	„ sloi	„ stoi
„ 160	„ 9	„ „	„ $- \frac{M_y}{W_y}$	„ $= \frac{M_y}{W_y}$
„ 160	„ 11	„ „	„ $= \frac{M_y}{W_y}$	„ $+ \frac{M_y}{W_y}$
„ 169	„ 2	„ dołu	„ cm^3	„ cm^2

PRZEDMOWA.

Do napisania książki niniejszej skłonił mnie zupełny brak polskiego podręcznika statyki budowli dla średnich szkół technicznych, a po części również wyczerpanie drugiego wydania takiegoż podręcznika dla inżynierów prof. Thulliego.

Układ podręcznika nie różni się zasadniczo od dzieł podobnych w innych językach; — zmiany, jakie wprowadziłem, większe uwzględnienie niektórych działów, pominięcie innych, spowodowało głównie pragnienie osiągnięcia większej przejrzystości i jasności podręcznika, oraz dostosowanie się do wymogów praktyki. Ten sam powód skłonił mnie do wprowadzenia bardzo znacznej ilości przykładów. Przy wyborze ich kierowałem się głównie również wymogami praktyki. Dlatego też np. ilość przykładów w dziale obliczania belek na zginanie jest tak wielka. Niektóre z przykładów są też niejako przygotowaniem do działów następnych, jak np. przykłady 6, 8, 9, albo 43, 44 i t. d. W podręczniku starałem się uwzględnić techniczną terminologję polską tak lwowską, jakoteż warszawską.

Przeznaczenie książki wykluczyło z góry możność użycia wyższej matematyki, oraz wogóle zawilszych wywodów, toteż w niektórych miejscach musiałem uciec się do dłuższej elementarnej drogi albo też pominąć zupełnie dowody, ograniczając się tylko do wyników (por. np. dział o parciu ziemi). Wzgląd ten spowodował też miejscami pewne nieścisłości wzgl. uproszczenia.

Anormalne warunki wojenne, w jakich pisałem podręcznik (zrazu jako jeniec cywilny), po największej części zupełny brak wszelkich pomocniczych książek, wreszcie również zupełny niemal brak jakiejkolwiek pomocy (choćby przy wykonywaniu potrzebnych rysunków) musiały odbić się ujemnie na podręczniku, którego niektóre wady już sam dzisiaj widzę. Pomimo tych braków, nie chcąc odraczać ukazania się książki, przystępuję do jej wydania, prosząc jedynie inżynierów polskich o sąd względny i pobłażliwy.

St. Bryła.

Tyflis — Kijów 1914 — 1916.

Podręcznik niniejszy wykończony został w r. 1916 i przesłany zawiązanemu w Moskwie Technicznemu Towarzystwu Wydawniczemu, którego zarząd postanowił go wydać, gdy tylko warunki na to pozwolą. Wskutek rewolucji bolszewickiej dopiero w r. 1919 znalazł się w kraju. Fundusze Towarzystwa nie pozwoliły jednak na wydanie książki w obecnych czasach.

Wydania książki podjęła się firma Gebethner i Wolff, a umożliwiło je poparcie Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświaty, które zatwierdziło ją jako podręcznik dla średnich szkół technicznych, oraz Ministerstwa Robót Publicznych, które udzieliło na wydawnictwo zapomogi w kwocie 20.000 mk., za które to poparcie składam im podziękowanie.

Również dziękuję serdecznie profesorom Czopowskiemu i Thulliemu, którzy z taką gotowością udzielili mi wielu cennych wskazówek, oraz inż. Nestorowiczowi za poparcie wydawnictwa.

St. Bryła.

Warszawa w marcu 1920.

I. Podstawy statyki budowli.

A. Wstęp.

§ 1. Pojęcia wstępne.

Część budowli inżynierskiej wykonaną z pewnych materjałów połączonych w odpowiedni sposób ze sobą nazywamy *konstrukcją*, czyli *zespołem, zeskładem*. Taką konstrukcyą będzie więc np. most żelazny, dach drewniany, mur ceglany i t. d. Zadaniem jej jest w pierwszym rzędzie przenieść na grunt *ciężary*, *siły*, jakie na nią działają i to bezpiecznie, tak, aby *stałość* budowli nie była narażona na szwank, aby siły te nie zniweczyły wewnętrznej wytrzymałości, mocy konstrukcji. Wskutek tych t. zw. *sił zewnętrznych* (obciążeń) powstają w budowli *siły wewnętrzne*, które muszą zrównoważyć siły zewnętrzne.

Naukę badającą i określającą warunki konieczne, aby utrzymała się ta *równowaga sił zewnętrznych i wewnętrznych*, oraz pozwalająca *obliczyć wymiary* konstrukcji nazywamy *statyką budowli*. Obliczenia te wykonuje się sposobem rachunkowym lub wykreślnym zależnie od tego, czy jeden czy drugi jest w danym wypadku wygodniejszy; bardzo często używa się dla kontroli obu metod równocześnie. Statykę traktowaną sposobem wykreślnym nazywamy *statyką wykreślną*.

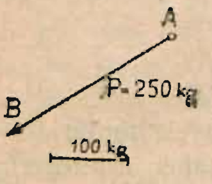
§ 2. Pojęcie siły.

Przyczynę ruchu (lub spoczynku) ciał nazywamy *siłą*. Istnienie sił poznajemy po ich wpływie na dane ciała. Istnieje więc np.

siła ludzkich muskułów, siła ciężkości, siła pary, elektryczności, wiatru i t. d.

Dla określenia wielkości siły należy porównać ją z inną znaną powszechnie siłą, czyli z t. zw. *jednostką siły*. Za taką jednostkę przyjmuje się zwykle przy mniejszych siłach 1 kg, przy większych 1 tonnę (=1000 kg). Np. siła pionowa P=250 kg oznacza, że siła P działa tak samo, jak działałby ciężar 250 kg, zawieszony np. na sznurze.

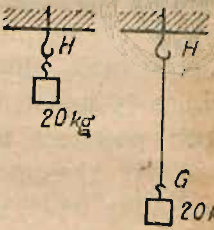
Aby siłę dokładnie oznaczyć, trzeba znać nietylko jej 1) *wielkość*, ale także jej 2) *punkt zaczepienia*, t. j. punkt, w którym siła działa na ciało, i 3) *kierunek* tej siły.



Rys. 1.

W statyce wykreślnej oznacza się siły odcinkami prostych o odpowiedniej długości i kierunku, zachowując pewien stosunek długości odcinka do wielkości siły. Np. niech 1 cm przedstawia 100 kg, to dla oznaczenia siły 250 kg użyjemy prostej o długości 2,5 cm. Kierunek, w którym siła działa, czyli t. zw. zwrot siły, znaczy się strzałką, skierowaną w tymże kierunku (rys. 1).

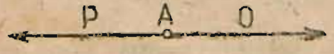
Siłę nazywamy albo jedną literą (np. P, P_1, P_2, O,G i t. d.) albo też dwiema (np. AB), których porządek oznacza zarazem tok siły. Np. AB oznacza siłę działającą od A do B, natomiast BA oznaczałoby siłę działającą od B do A. Punkt zaczepienia leżeć musi oczywiście na kierunku siły; można go jednak dowolnie wzdłuż niego przesuwać.



Rys. 2 i 3.

Poznać to możemy z rys. 2 i 3. Ciężar 20 kg zawieszony tuż przy haku H ciągnie go z tą samą siłą, co takiż ciężar zawieszony na sznurku długim HG (rys. 3), a więc zaczepiający dużo niżej.

§ 3. Równowaga sił.

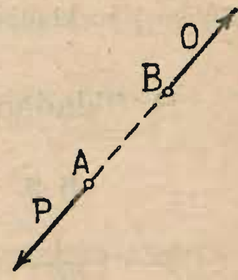


Rys. 4.

Jeśli w punkcie A, w którym działa siła P, zaczepimy siłę równą, a wprost przeciwną tej sile, np. siłę

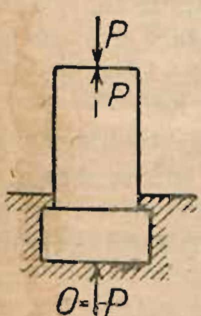
O (rys. 4), to ruch punktu A nie nastąpi, a stan taki nazywamy *równowagą sił.*

W myśl § 2 równowaga nastąpi też, gdy równe, a wprost przeciwne siły działają nie w tym samym punkcie, ale w dwu różnych punktach, leżących jednak na kierunku obu sił. Siłę O (por. rys. 5) można bowiem, przesunąć do punktu A i zrównoważyć ją z siłą P równą a wprost przeciwną.



Rys. 5.

Wyżej powiedzieliśmy, że każda konstrukcja budowlana musi być w równowadze. Wynika stąd, że siłom na nią działającym (np. wiatr, śnieg, ciężar pokrycia dla dachów, ciężar ludzi, wozów dla mostów i t. d.) przeciwstawić musi sama siły inne w sumie swej równe, a wprost przeciwne obciążeniu, czyli równoważące je. Siły te nazywamy *oddziaływaniami*, *odporami*, lub *reakcjami*. Np. słup (rys. 6) obciążony u góry siłą P wywołuje u dołu reakcję gruntu O=P. Również wewnątrz samego ciała powstaje przeciwdziałanie równe i przeciwne sile P.



Rys. 6.

§ 4. Wypadkowa sił.

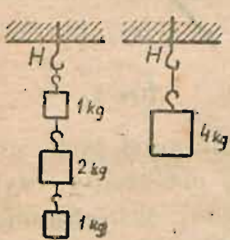
Na konstrukcję budowlaną działa zwykle nie jedna siła, ale równocześnie większa ilość sił zewnętrznych i to często działających na różne punkty. Zamiast uwzględniać je wszystkie po kolei w obliczeniu, staramy się dla uproszczenia roboty znaleść taką jedną siłę, którąby zastąpiła wszystkie siły działające czyli *złożyć je w jedną siłę* wywierającą ten sam wpływ na ciało, co wszystkie siły razem wzięte. Taką siłę nazywamy *wypadkową*, zaś siły, z których ona powstaje, *składowemi.*

Z drugiej strony konieczną nieraz rzeczą jest zastąpić pewną daną siłę siłami innemi, które w swem działaniu są jej równowarte czyli *rozłożyć* ją na składowe.

Przy rozwiązywaniu obu tych zadań trzeba wziąć pod uwagę czy siły zaczepiają w jednym i tym samym punkcie czy też w różnych punktach, oraz czy działają w jednym i tym samym kierunku czy też w różnych kierunkach. Z kolei zajmiemy się więc składaniem i rozkładaniem sił dla poszczególnych wypadków.

B. Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie.

§ 5. Siły działające w jednej linii.



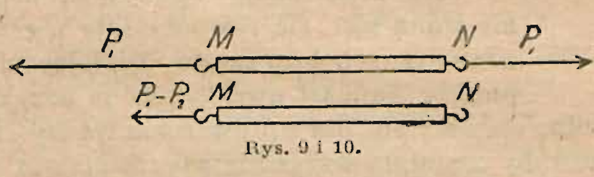
Rys. 7 i 8.

Wypadkowa R dwu lub więcej sił P_1, P_2, P_3... działających w jednej linii w tym samym kierunku równa się sumie wszystkich sił:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 1.$$

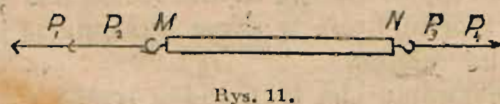
Por. rys. 7 i 8. Hak H ciągnięty jest tą samą siłą $R = 4$ kg bez względu na to, czy zaczepione są na nim trzy ciężary o wielkości łącznej $R = P_1 + P_2 + P_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ kg, czy też jeden ciężar o wielkości 4 kg.

Jeśli siły działają w kierunkach przeciwnych, to należy je odjąć od siebie, czy czyli „dodać algebraicznie"; siłom bowiem działającym w pewnym kierunku dajemy znak +, siłom w kierunku wprost przeciwnym znak —. Jeśli więc siła AB (rys. 1) ma znak +, to siła BA otrzyma znak —.



Rys. 9 i 10.

Np. pręt MN, na który działają siły $P_1 = 30$ kg i $P_2 = 20$ kg ciągnięty jest w kierunku siły większej t. j. P_1 z siłą $R = P_1 - P_2 = 30 - 20 = 10$ kg (rys. 9 i 10).



Rys. 11.

Przy większej ilości sił zasada składania pozostaje ta sama. Np. dla rys. 11 wypadkową jest $R=(P_1+P_2)-(P_3+P_4)$. Wynika stąd reguła:

Wypadkowa sił działających w jednej linii równa się sumie algebraicznej sił składowych.

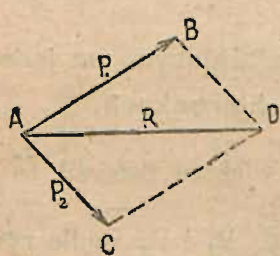
Jeśli suma sił działających w jednym kierunku równa się sumie sił działających w kierunku przeciwnym, to wypadkowa $R=0$,

Rys. 12.

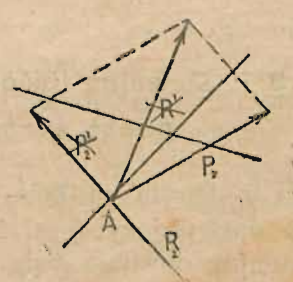
czyli następuje równowaga. Np. pręt RS (rys. 12) nie poruszy się wcale; albowiem w prawo ciągnie go siła $2+6=8$ kg, zaś w lewo $3+5=8$ kg, a wypadkowa $R=(2+6)-(3+5)=8-8=0$.

§ 6. Dwie siły działające na jeden punkt w różnych kierunkach.

Jeśli na dany punkt A (rys. 13) działają dwie siły o kierunkach tworzących ze sobą pewien kąt, np. $P_1=AB$ oraz $P_2=AC$, to wypadkową znajdziemy, kreśląc z punktu B równoległą do siły P_2, zaś z C równoległą do P_1. Przekątnia AD otrzymanego w ten sposób równoległoboku daje kierunek i wielkość wypadkowej R. Niech np. dwu ludzi stara się przeciągnąć sznurami jakiś ciężar A, jeden z nich w kierunku AB z siłą P_1, drugi w kierunku AC z siłą P_2, to ciężar znajdzie się ostatecznie w punkcie D. Równoległobok ABDC nazywamy *równoległobokiem sił.*

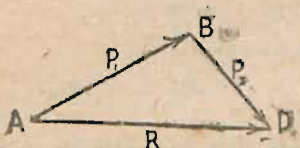


Rys. 13.



Rys. 14.

Aby uniknąć pomyłek przy wyznaczaniu położenia siły wypadkowej R należy przyjąć w wykresie *obie* siły działające *od węzła*, t. j. jak na rys. 13, a nie jak na rys. 14. Wtedy dla sił odniesionych w ten sposób *od* punktu A kierunek wypadkowej będzie też *od* A, a zatem ku przeciwległemu wierzchołkowi D równoległoboku sił. Na rys. 14 odniesiono jedną siłę od siły A, drugą do A, a więc i wypadkowa R′ została znaleziona błędnie.

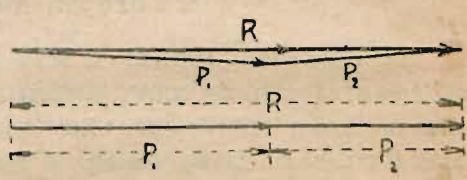


Rys. 15.

Zamiast kreślić cały równoległobok ABDC wystarczy wykreślić trójkąt ABD lub ACD; trzeci bok tego trójkąta AD daje wprost kierunek i wielkość wypadkowej. Trójkąt ten nazywamy *trójkątem sił* (rys. 15).

Ponieważ do punktu D dojść można albo drogą ABD albo ACD, przeto przy składaniu sił *obojętny jest porządek, w jakim siły składamy*, podobnie jak przy sumowaniu liczb obojętny jest porządek dodajników.

Zaznaczę tu, że dla sił zamykających z sobą bardzo ostry kąt, długość wypadkowej jest prawie równa sumie długości składowych (por. rys. 16), a ze zmniejszaniem się tego kąta aż do zera (t. j. dla sił idących w jednym i tym samym kierunku) równoległobok względnie trójkąt sił przechodzi w jedną linię o długości równej sumie obu składowych, a więc identyczną z omówioną w § 5 (rys. 17).

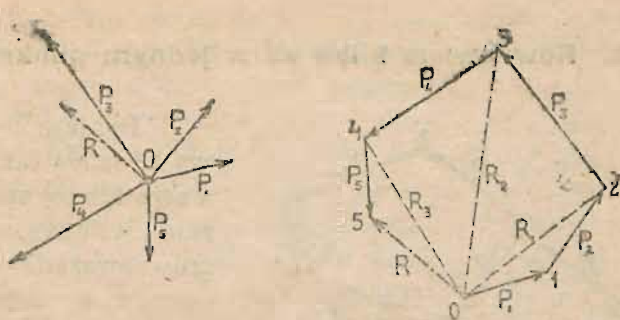


Rys. 16 i 17.

§ 7. Dowolna ilość sił działających na jeden punkt w różnych kierunkach.

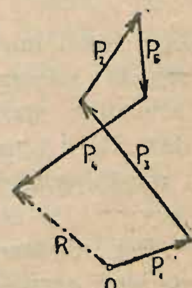
Jeśli w danym punkcie działa większa ilość sił, to postąpimy w sposób następujący: (rys. 18 i 19).

Składamy dowolne dwie siły np. P_1 i P_2 wedle rys. 15 (§ 6) w wypadkową R_1, następnie R_1 i P_3 w wypadkową R_2, która za-



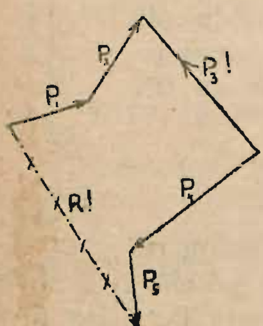
Rys. 18 i 19.

stępuje więc siły P_1, P_2 i P_3; idąc dalej w ten sposób dochodzimy do ostatniej siły P_5, która złożona z wypadkową R_3 daje siłę R jako wypadkową wszystkich sił P_1... P_5.



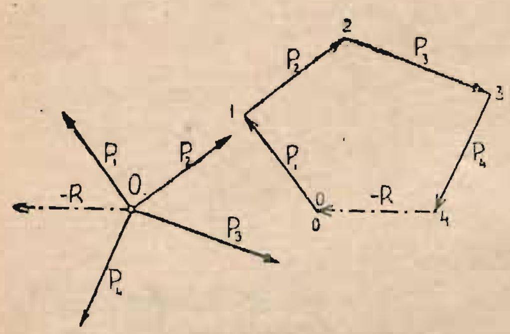
Rys. 20.

Z rys. 19 widać jednak, że rysowanie wypadkowych częściowych R_1, R_2, R_3 jest zbyteczne; wystarczy bowiem poczynając od punktu A odnieść wszystkie siły P_1... P_5 w odpowiednich kierunkach. Otrzymamy w ten sposób ciąg odcinków 0123450 nazywamy *ciągiem sił* lub *wielobokiem sił*, a prosta łącząca punkt początkowy 0 tego ciągu z punktem końcowym 5, t. zw. *zamykająca* daje wielkość wypadkowej o zwrocie (strzałce) od 0 do 5 (czyli 05). Podobnie, jak przy składaniu dwu sił, obojętny jest i tu porządek, w jakim składamy większą ilość sił; należy tylko pamiętać, aby siły odnosić we właściwym kierunku, t. j. odpowiednio do strzałki. Np. na rys. 20 otrzymaliśmy wypadkową o wielkości dobrej mimo zmienionego porządku, natomiast na rys. 21, wypadkowa ma fałszywą wielkość i kierunek, gdyż P_3 zostało odmierzone w kierunku przeciwnym.



Rys. 21

§ 8. Równowaga kilku sił w jednym punkcie.

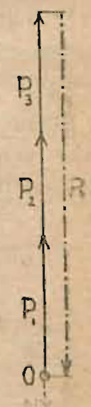


Rys. 22.

Ponieważ wypadkowa R działa tak samo, jak wszystkie jej składowe razem wzięte, przeto dla zrównoważenia tych składowych wystarczy zaczepić w punkcie O (rys. 22) siłę równą, a wręcz przeciwną wypadkowej. Jeśli zatem wypadkowa ma wielkość R, a kierunek O4 (od O do 4), to siła równoważąca musi mieć wielkość—R, a kierunek 4O (od 4 do O). Jeśli tę siłę 4O włączymy teraz w ciąg sił, to przy uwzględnieniu stałego kierunku strzałek będzie nim O1234O, t. j. punkt początkowy zejdzie się z końcowym. Wielobok (ciąg) taki nazywamy *zamkniętym*. Prawo wypowiadamy w sposób następujący:

Dla równowagi kilku sił przechodzących przez jeden punkt musi zamknąć się odpowiedni ciąg sił.

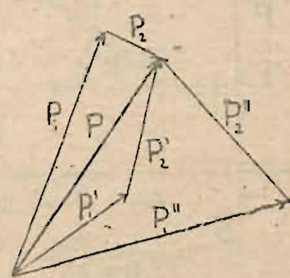
Jeśli w tej samej linii prostej działa parę sił, to równowaga nastąpi, gdy zaczepimy siłę—R równą sumie algebraicznej sił działających, ale o znaku przeciwnym. Por. rys. 23; rozsunięto tu dla lepszego uwydatnienia siłę R od sił P_1, P_2, P_3; w rzeczywistości leżą one w jednej prostej, mianowicie siła R działa w kierunku ON zaznaczonym linią kreskowaną.



Rys. 23.

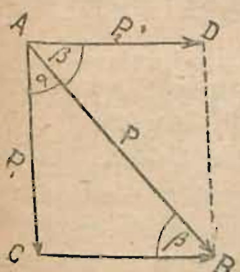
§ 9. Rozkładanie sił.

Jeśli daną siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe, to zadanie to nie jest ściśle oznaczone. Czy weźmiemy bowiem pod uwagę siły P_1 i P_2, czy P_1' i P_2' czy wreszcie P_1'' i P_2'' (rys. 24), to każda z tych grup równowartna jest z daną siłą P. Dopiero, gdy znane nam będą albo: a) *kierunki obu sił*, albo b) *wielkość i kierunek jednej z nich*, możemy zadanie rozwiązać. Wtedy mamy do czynienia z zagadnieniem wręcz przeciwnem niż w § 6. Sprowadza się ono wogóle do zbudowania trójkąta (trójkąta sił) z danych trzech części składowych, mianowicie: w wypadku a) z jednego boku t. j. wielkości siły P i z kierunków obu pozostałych boków, (sił składowych), w wypadku b) z dwu boków i ich kierunków, czyli kąta między nimi zawartego.



Rys. 24.

Zwykle dane są kierunki obu składowych, t. j. kąty α i β, jakie te składowe zawierają z siłą P, którą mamy rozłożyć. Wtedy na sile P = AB (rys. 25) kreślimy trójkąt o bokach AC i CB równoległych do danych kierunków; długości AC i CB otrzymane w ten sposób dają nam wprost wielkość sił P_1 i P_2.



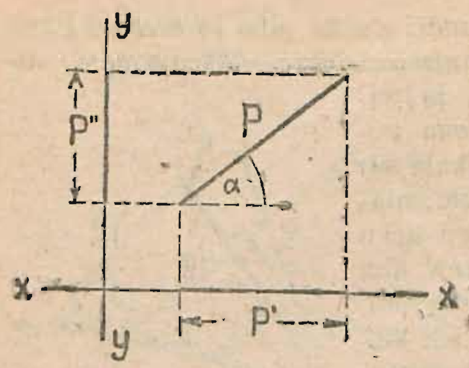
Rys. 25.

Uwaga. Siła P_2 działa nie w punkcie C, ale w A, tak, że BC daje tylko jej *wielkość* i *kierunek*, ale nie położenie. Aby więc uniknąć pomyłek, najlepiej trójkąt sił zrobić osobno, a od punktu A wykreślić siły składowe P_1 i P_2 równe i równoległe do sił znalezionych z tego osobno nakreślonego trójkąta sił. Również przez narysowanie równoległoboku sił (a nie trójkąta) unika się tej pomyłki.

§ 10. Rachunkowe składanie i rozkładanie sił.

Weźmy pod uwagę siłę P i przyjmijmy dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych x y (rys. 26). — Jeżeli siłę P mamy rozłożyć na dwie składowe równoległe do tych osi, to z trójkąta ABC otrzymamy na wielkość obu składowych wzór:

$$\left.\begin{aligned} P' &= P \cos \alpha \\ P'' &= P \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad 2$$



Rys. 26.

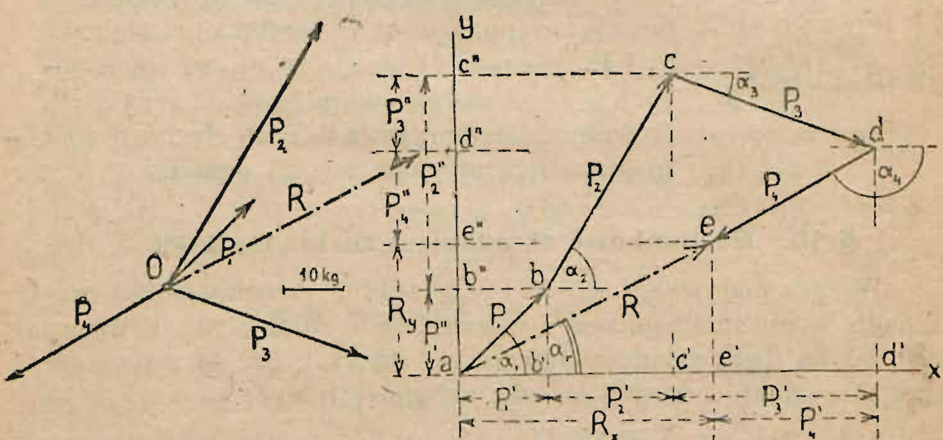
Wielkości P′ i P″ są zarazem *rzutami* siły P na osi spółrzędnych.

Wzory 2 posłużą również do wyznaczenia wypadkowej układu sił P_1, P_2... (por. rys. 27 i 28). Przyjmijmy znów dowolny układ prostopadłych osi spółrzędnych x y i odnosząc siły P_1, P_2... jedna po drugiej wedle § 7 *odrzućmy* je kolejno na obie osi. Wtedy rzuty poszczególnych sił (t. j. składowe sił równoległe do osi) wynoszą:

$$P'_1 = a\,b' = P_1 \cos \alpha_1 \qquad P'_2 = b'c' = P_2 \cos \alpha_2 \quad \ldots$$
$$P''_1 = a\,b'' = P_1 \sin \alpha_1 \qquad P''_2 = b''c'' = P_2 \sin \alpha_2 \quad \ldots$$

Algebraiczne sumy rzutów poszczególnych sił są rzutami wypadkowej na odpowiednie osi. Wynoszą one:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots &&= P'_1 + P'_2 + \ldots \\ R_y &= P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \ldots &&= P''_1 + P''_2 + \ldots \end{aligned}\right\} 3$$



Rys. 27 2 .

Prawdziwą wielkość wypadkowej R znajdziemy składając jej rzuty R_x, R_y w jedną siłę wypadkową. Zamykają one z sobą kąt prosty; wypadkową znajdziemy zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

Kierunek jej określa się równaniem:

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

Przy obliczaniu R_x i R_y z wzoru 3 trzeba pamiętać, że zależnie od wielkości kąta α mogą poszczególne wyrazy przyjmować wartości ujemne i zerowe. Np. dla rys. 27 wzgl. 28 mamy:

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 - P_4 \cos \alpha_4$$
$$R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \sin \alpha_3 - P_4 \sin \alpha_4$$

Jeśli zachodzi równowaga sił, to muszą się spełnić warunki:

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6.$$

tj. *Dla równowagi sił przechodzących przez jeden punkt musi suma ich rzutów na dwie dowolne osi spółrzędnych równać się zeru.*

Najczęściej przyjmujemy jedną oś poziomą, drugą pionową. Wtedy zasada powyższa brzmi:

Dla równowagi sił przechodzących przez jeden punkt suma składowych poziomych sił oraz suma składowych pionowych muszą być równe zeru dla każdej osi zosobna.

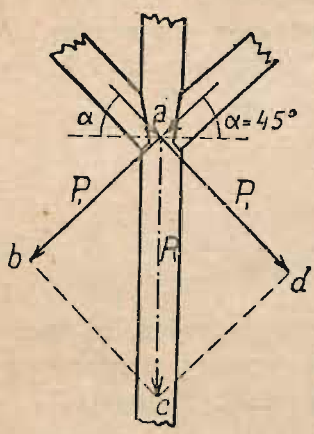
Czasem zamiast rzutować, wygodniej jest znaleść wielkość wypadkowej lub składowej wprost z wykresu (por. przykł. 15).

Dla dwu sił otrzymamy wtedy:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2 P_1 P_2 \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4a.$$

Przykłady:

1. Na pal mostowy przenoszą się obustronnie z zastrzałów nachylonych pod kątem 45° siły $P_1 = P_2 = 2400$ kg. Z jaką siłą cisną one na słup? (rys. 29).



Rys. 29.

a) Rozwiązanie wykreślne: Przyjmujemy, że 1 cm. rysunku przedstawia np. 1000 kg., odcinamy w przedłużeniu kierunków P_1 i P_2 siły 2400 kg., t. j. po 2,4 cm. i składamy je według § 6. Długość przekątni ac odczytana w podziale sił daje wypadkową. Na rys. 29 długość ac wynosi 3,4 cm., zatem wypadkowa $R = 3400$ kg.

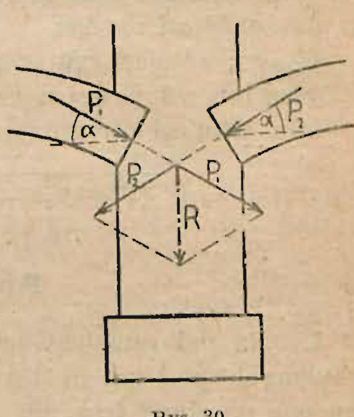
b) Rozwiązanie rachunkowe: Z wzoru 3 znajdziemy: $R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = 2 P \sin 45^0 = 2.2400 . 0{,}707 = 3394$ kg $= R$. (Składowa $R_x = P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 = 0$, więc $R_y = R$). W porównaniu z wynikiem, jaki otrzymaliśmy w wykresie, mamy o 6 kg mniej. Błąd ten musi się wkraść wskutek nieunikniońej niedokładności rysunku, jest jednak tak mały, że uwzględniać go nie potrzeba, tembardziej, że wyniki rachunkowe z reguły zaokrąglamy dla uzyskania większej przejrzystości rachunku.

2. Obliczyć, jak wielka siła przenosi się na ten sam słup, jeśli zestrzały nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 30^0$.

Otrzymamy wtedy $R = P_y = 2 P \sin 30 = 2 \times 2400 \frac{1}{2} = 2400$ kg.

3. Na filar ceglany cisną obustronnie sklepienia z siłą $P_1 = P_2 = 1600$ kg pod kątem 30^0. Jak wielka siła (wypadkowa) działa na filar? (Ciężar własny filara należy pominąć).

Zadanie to rozwiązuje się tak samo, jak zad. 1; wykreślnie otrzymujemy $R = 1600$ kg (rys. 30). Rachunkowo: $R = 2 P \sin 30^0 = 2.1600 . \frac{1}{2} = 1600$ kg.



Rys. 30.

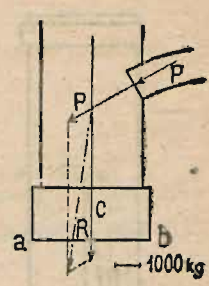
4. Na mur pionowy o ciężarze $C = 6000$ kg ciśnie sklepienie pod kątem $\alpha = 30^0$ z siłą $P = 1000$ kg. Znaleźć całkowite ciśnienie na fundament muru ab. (rys. 31).

Rachunkowo otrzymujemy (z wz. 3):

$R_x = 6000 \cos 90^0 + 1000 \cos 30^0 = 0 + 1000 . 0{,}866 = 866$ kg, co zaokrąglimy na $R_x = 870$ kg.

$R_y = 6000. \sin 90^0 + 1000 \sin 30^0 = 6000 . 1 + 1000 . 0{,}5 = 6500$ kg, a zatem wypadkowa z wzoru 4:

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y} = \sqrt{870^2 + 6500^2} = 6560 \text{ kg}.$$



Rys. 31.

5. Na filar mostowy działają jednostronnie zastrzały wiązania rozporowego podwójnego $P_1 = 2500$ kg, $P_2 = 4000$ kg, przyczem kąty nachylenia ich do poziomu, wynoszą $\alpha = 60^0$, $\alpha_2 = 35^0$. Znaleźć ich parcie na filar (rys. 32).

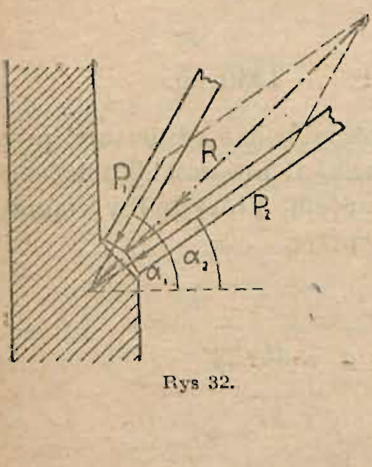
$$R_x = 2500 \cos 60^0 + 4000 \cos 35 = 1250 + 3270 = 4520 \text{ kg}$$
$$R_y = 2500 \sin 60^0 + 4000 \sin 35 = 2170 + 2300 = 4470 \text{ kg}$$

Całkowite parcie na filar:

$$R = \sqrt{4520^2 + 4470^2} = \sqrt{204304 + 199809} = 6360 \text{ kg}$$

Kąt nachylenia parcia wypadkowego do poziomu

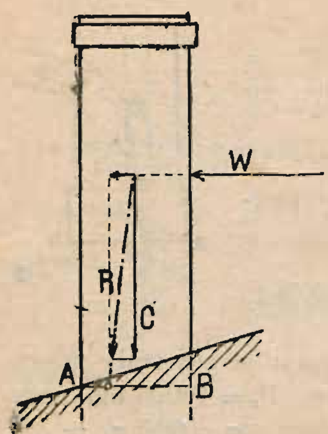
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4470}{4520} = 0{,}989 \qquad \alpha = 44^0\,42'$$



Rys 32.

6. Na komin działa w środku wysokości pozioma siła wiatru $W = 200$ kg, starając się wywrócić go około krawędzi A; natomiast ciężar komina $C = 1500$ kg stara się utrzymać go w stałości. Należy znaleźć wypadkową (rys. 33).

Wykreślnie otrzymamy z równoległoboku sił wypadkową R o wielkości 1510 kg, przechodząca jeszcze przez podstawę AB komina. Komin więc nie wywróci się.



Rys. 33.

Rachunkowo:

$$R = \sqrt{200^2 + 1500^2} = 1513 \text{ kg}.$$

7. Znaleźć rachunkowo wypadkową sił przedstawionych na rys. 27 i 28, przyczem

$P_1 = 20$ kg, $P_2 = 40$ kg, $P_3 = 35$ kg, $P_4 = 30$ kg
$\alpha_1 = 45^0$, $\alpha_2 = 60^0$, $\alpha_3 = -20^0$, $\alpha_4 = -150^0$.

Stąd:

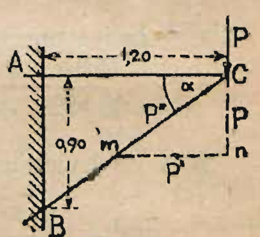
$R_x = 20 \cos 45 + 40 \cos 60 + 35 \cos 20 - 30 \cos 30 = 14,1 + 20 + 32,9 - 26,0 = + 41,0$ kg

$R_y = 20 \sin 45 + 40 \sin 60 - 35 \sin 20 - 30 \sin 30 = 14,1 + 34,6 - 12,0 - 15,0 = + 21.7$ kg

$$R = \sqrt{41,0^2 + 21,7^2} = 46,4 \text{ kg}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{+ 21.7}{+ 41,0} = 0,53$$

$$\alpha = 26^0 \, 56'$$



Rys. 34.

8. Chodnik wspiera się na wsporniku ABC, umieszczonym w murze (rys. 34). Znaleść siły wewn. wspornika, jeśli na p. C przenosi się ciężar $P = 800$ kg.

Z trójkąta sił C m n otrzymamy:

$$P' = 1070 \text{ kg} \qquad P'' = 1330 \text{ kg}.$$

W AC panuje ściskanie, w BC rozciąganie i gdybyśmy przekroili pręty AC i BC, a chcieli, aby punkt C nie zmienił położenia, musielibyśmy AC przytwierdzić np. sznurem, który byłby ciągnięty siłą P', zaś pręt BC należałoby podeprzeć.

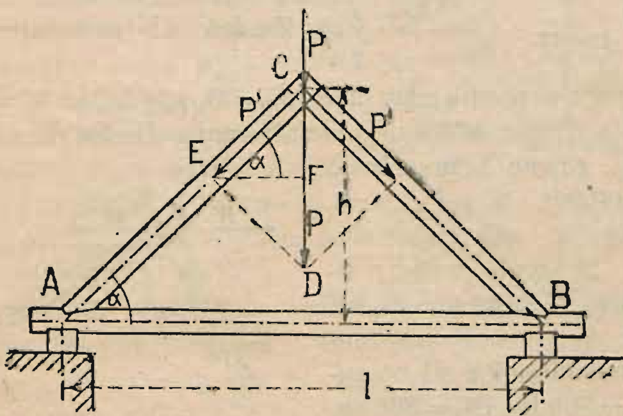
Rachunkowo otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0.9}{1,2} = 0,75 \qquad \alpha = 36^0 \, 52'$$

$$P' = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{800}{0{,}75} = 1067 \text{ kg}$$

$$P'' = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{800}{0{,}60} = 1333 \text{ kg.}$$

9. W punkcie wierzchołkowym więzara dachowego (rys. 35) działa pionowa siła P = 1000 kg. Znaleść siły w zastrzałach AC i BC.



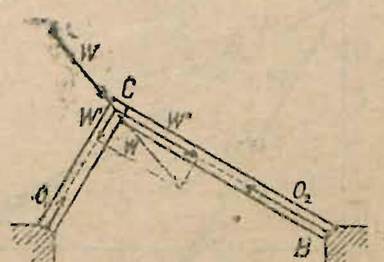
Rys. 35.

Rozkładamy wykreślnie siłę P otrzymując w obu zastrzałach siły równe P' = 707 kg. Rachunkowo znajdziemy z trójkąta CEF:

$$P' = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1000}{2 \sin 45} = 707 \text{ kg.}$$

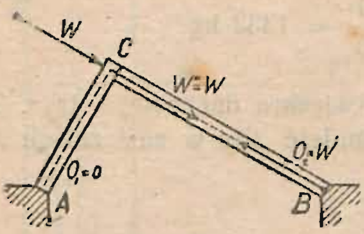
Przekroiwszy zastrzały więzara i rozumując jak w zad. 8 pojmiemy łatwo, że w zastrzałach panuje ciśnienie.

10. Na więzar dachowy działa siła W = 1000 kg wskutek wiatru. Znaleść siły wewn. w krokwiach AC i BC (rys. 36).



Rys. 36.

Z wykresu otrzymujemy siły AC = W' = 360 kg, BC = W'' = = 940 kg. Na obu łożyskach A i B powstają również siły, t. zw. oddziaływania czyli odpory O_1 i O_2 (por. § 3) równe siłom w AC i BC, ale skierowane wręcz przeciwnie t. j. tutaj ku górze.

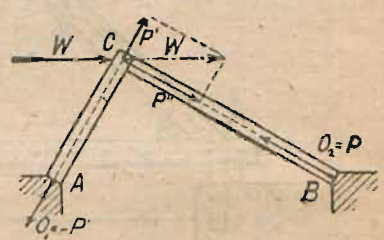


Rys. 37.

11. Na ten sam wiązar dachowy działa siła W = 1000 kg wskutek wiatru w *kierunku krokwi* BC. (rys. 37). Znaleść siły wewnętrzne w AC i BC.

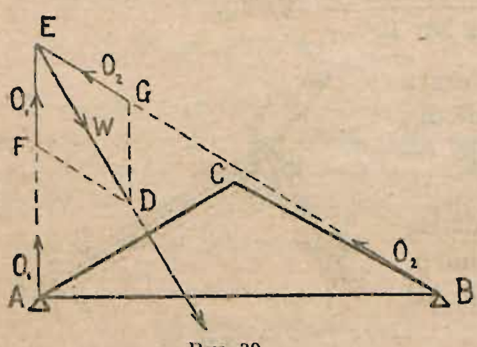
Z wykresu otrzymujemy siłę AC = 0, siłę BC = W = 1000 kg. Na łożysku A niema żadnego oddziaływania. Na łożysku B oddziaływanie jest równe i przeciwne sile W = 1000 kg.

12. Na ten sam ciężar dachowy (rys. 38) działa *pozioma* siła W = 1000 kg. Znaleść siły AC i BC.



Rys. 38.

Z równoległoboku sił otrzymujemy AC = 500 kg, BC = 860 kg. Siła AC skierowane jest jednak ku górze, co znaczy, że stara się pręt AC podnieść i oderwać od podpory. Jeślibyśmy pręt AC przekroili, należałoby węzeł C przytrzymać np. liną. Oddziaływanie na podporze A jest zatem *ciągnieniem*, a dach trzebaby utwierdzić w A przeciw wyrwaniu, czyli zakotwić.

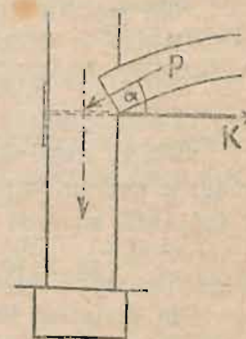


Rys. 39.

13. Na połać AC wiązaru dachowego działa siła wiatru W = 1500 kg w punkcie D. Znaleść oddziaływanie O_1 i O_2 jeśli łożysko A jest ruchome, zaś B stałe (rys. 39).

Na łożysku ruchomem występuje zawsze oddziaływanie *pionowe*, zatem jego kierunek i punkt zaczepienia (A) są ustalone; kierunek ten przecina się z kierunkiem siły W w punkcie E, przez który przejść musi także oddziaływanie O_2, (gdyż siła W i oba oddziaływania są w równowadze). Kierunek oddziaływania O_2 będzie zatem BE. Z równoległoboku sił znajdziemy wielkość obu oddziaływań $O_1 = FE = 830$ kg i $O_2 = GE = 880$ kg.

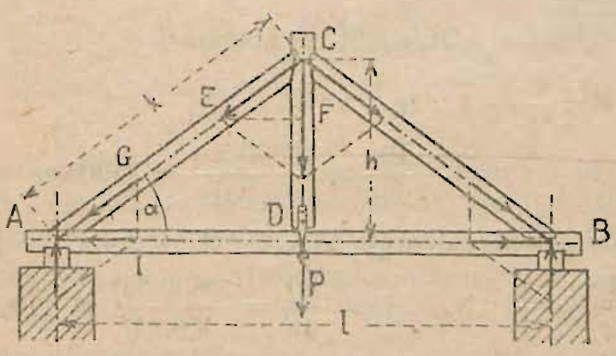
14. Na dwu filarach, ściągniętych kotwą żelazną, spoczywa sklepienie cisnące na filary z siłą $P = 5000$ kg pod kątem 30°. Ponieważ filary mają przenosić wyłącznie ciężary pionowe, przeto cała składowa pozioma siły P (t. zw. parcie poziome) ma przenieść się na kotwę. Należy znaleść siłę w kotwie K (por. rys. 40).



Rys. 40.

Siła w kotwie K równa jest składowej poziomej parcia P, wynosi więc: $K = P \cos 30° = 5000 . 0{,}866 = 4330$ kg.

15. Na słup wiszący CD wiązania przedstawionego na rys. 41 przenosi się ciężar pionowy $P = 6600$ kg. Znaleść siły wewnętrzne



Rys. 41.

w krokwiach AC i BC, siłę H w ścięgnie AB, oraz ciśnienie pionowe w łożyskach A i B.

Długość krokwi wynosi $k = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5{,}00$ m

Kąt nachylenia krokwi wynosi: $\sin\alpha = \frac{h}{k} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$$\alpha = 36^{0}\,50'$$

Siła w słupie wiszącym $P = 6600$ kg.

Siła w obu krokwiach jest równa i wynosi (z trójkąta CEF) $K = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{6600}{2.06} = 5500$ kg. Przekroiwszy więzar poziomo łatwo zrozumiemy że w krokwiach jest ciśnienie (por. zad. 8 i 9).

Siła K rozkłada się na podporze na dwie składowe H (siłę P ściągnie poziomem) i A (wzgl. B równe oddziaływaniom pionowym). Z trójkąta sił AGI otrzymamy więc:

$$H = K\cos\alpha = 5500\cos 36^{0}\,50' = 4400 \text{ kg.}$$

Na drugiem łożysku otrzymamy na H wartość taką samą. Oddziaływanie A wynosi (z trójkąta AGI)

$$A = B = K\sin\alpha = 5500.0{,}6 = 3300 \text{ kg.}$$

Te same wartości możemy otrzymać drogą rachunkową i w inny sposób.

Siły K i $\frac{P}{2}$ mają się do siebie, jak odpowiednie boki trójkąta ADC (gdyż trójkąty ADC i EFC są podobne).

$$K : \frac{P}{2} = k : h$$

$$K = \frac{Pk}{2h} = \frac{6600.5{,}0}{2.3{,}0} = 5500 \text{ kg.}$$

Z podobieństwa trójkątów ADC i AIG wynika dalej:

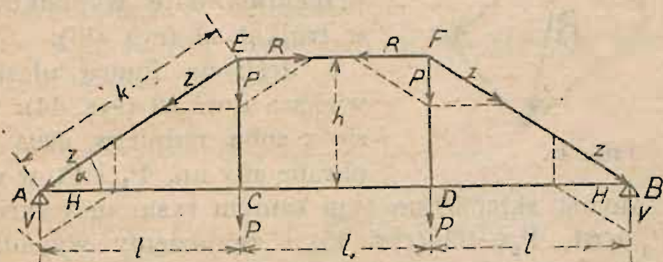
$$H : \frac{P}{2} = \frac{l}{2} : h \qquad H = \frac{Pl}{4h} = \frac{6600.8{,}0}{4{,}0.3{,}0} = 4400 \text{ kg}$$

$$V = \frac{P}{2} = 3300 \text{ kg.}$$

Zatem te same wartości, zgadzające się zresztą i z rysunkiem. W zadaniu 9 otrzymaliśmy na siłę w zastrzale zupełnie tą samą wartość $\frac{P}{2\sin\alpha}$ co tutaj, pomimo, że siła P przenosiła się tam bezpośrednio na punkt C, zaś tu działa u dołu słupa wiszącego CD i przenosi się za jego pośrednictwem na zastrzały. Widać stąd, że w myśl § 2 punkt zaczepienia siły można przesunąć na jej kierunku dowolnie, a wpływ jej na wielkość sił składowych będzie ten sam. Sam słup jednak w przykładzie 15 przenosi siłę P = 6600 kg; gdyby zaś siła działała z góry, jak w przykł. 9, to cały ciężar przenosiłby się odrazu na krokwie, a słup pozostałby bez natężenia.

16. Podwójne wiązanie wiszące (rys. 42) dźwiga w punktach C i D ciężary P, przenoszące się wprost na słupy wiszące CE i DF. Jakie siły wewn. powstają w prętach wiązania?

Ze słupa CE przenosi się siła na zestrzał AE i rozporę EF. Siły Z i R występujące w AE i EF znajdujemy z odpowiedniego



Rys. 42.

równoległoboku sił w p. E; siła Z przenosi się następnie na łożyska A, gdzie rozkłada się na poziomo siłę H, przejętą przez ścięgno AB i pionową V = P, która jest zarazem równa oddziaływaniu łożyska i ciśnie na mur w A. Po drugiej stronie takie same siły występują w F i B.

Rachunkowo otrzymamy:

$$Z = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Pk}{2h}$$

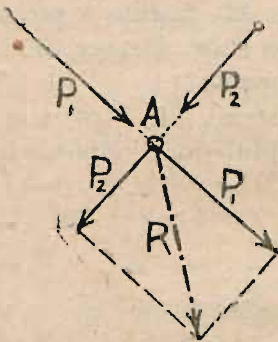
$$H = R = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{Pl}{4h}$$

$$V = P$$

Wykrójmy z więzara węzeł E, krając przez pręty Z, P i R, a łatwo z wieloboku sił znajdziemy, że w Z i R panuje ciśnienie, zaś w P rozciąganie.

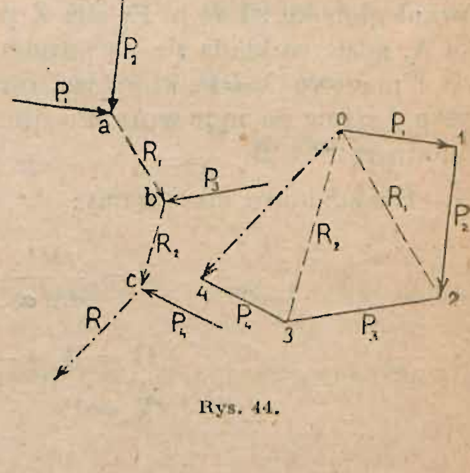
§ 11. Siły o różnych kierunkach i punktach zaczepienia.

Dla dwu sił działających w różnych punktach *na jednej płaszczyźnie* najlepiej zastosować jest zasadę podaną w § 2, wedle której punkt zaczepienia siły można swobodnie wzdłuż niej przesuwać. Przesuwamy go więc dla obu sił do punktu przecięcia obu kierunków A i składamy je tam następnie wedle § 6 w równoległobok sił, którego przekątnia daje wypadkową — lub w trójkąt sił (rys. 43).



Rys. 43.

Jeśli na figurę płaską działa większa ilość sił (rys. 44), to składa się z sobą najpierw *dwie* dowolnie obrane siły np. P_1 i P_2 w wypadkową R_1. Zamiast składać na tym samym rysunku wykreślamy je osobno $P_1 = 01$, $P_2 = 02$ (rys. 45) i znajdziemy wypadkową 02, która określa nam kierunek i wielkość siły R_1; natomiast punkt jej zaczepienia będzie w a t. j. w punkcie przecięcia właściwych kierunków sił składowych P_1 i P_2. Następnie w ten sam sposób składamy siłę R_1 z trzecią składową P_3, a wreszcie R_2 z P_4. Wypadkowa R tych dwu sił ostatnich jest zarazem wypadkową wszystkich sił P_1—P_4.



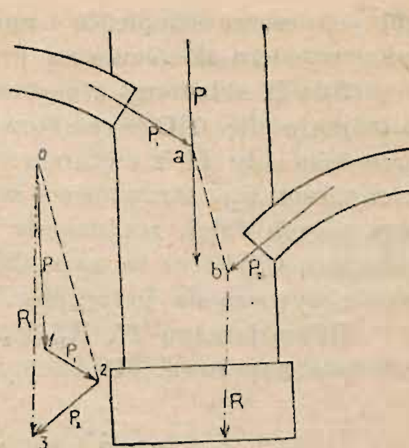
Rys. 44.

Przykłady 17 i 18.

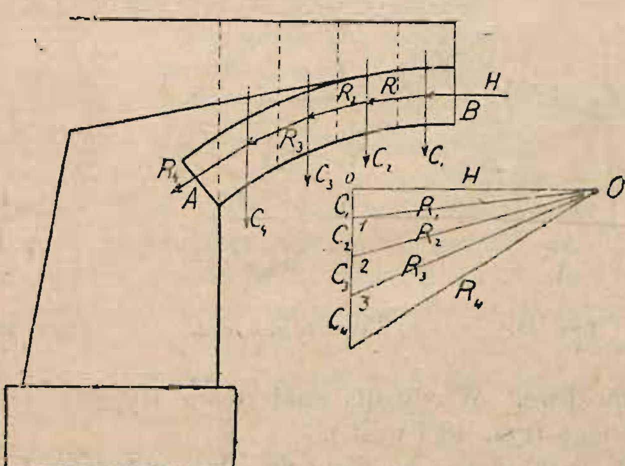
17. Na filarze murowanym wspierają się dwa

sklepienia, jako cisnące siłą $P_1 = 1250$ kg, drugie siłą $P_2 = 1670$ kg. Ciężar filara wynosi $P = 3720$ kg. Należy znaleść wypadkową tych sił (rys. 46).

Przedłużamy siłę P_1 aż do przecięcia z kierunkiem siły P i w punkcie a prowadzimy ab równoległą do R_1 wypadkowej sił P i P_1, której wielkość i kierunek znajdziemy z trójkąta sił 012. Następnie przedłużamy tę wypadkową R_1 aż do przecięcia się z siłą P_2 i zupełnie tak samo jak poprzednio znajdujemy wielkość i położenie wypadkowej wszystkich sił $R = 5400$ kg, którą to wielkość odczytaliśmy z wykresu.



Rys. 45. Rys. 46.



Rys. 47.

18. Na połowę sklepienia AB (rys. 47) działa w kluczu (t. j. w p. B) siła zwana parciem poziomem H, oraz ciężary poszcze-

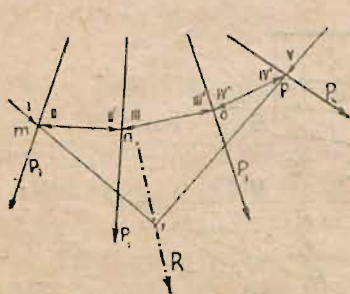
gólnych części sklepienia i nadsypki $C_1 \ldots C_4$. Znaleść ciśnienie, jakie wywiera sklepienie na przyczółek AA*)

Siłę H składamy z ciężarem części sklepienia C_1, otrzymując z trójkąta sił 010 wypadkową R_1, która przechodzi przez punkt przecięcia siły H z ciężarem C_1. Siłę R_1 składamy tak samo z ciężarem C_2, otrzymując wypadkową R_2, a postępując w ten sam sposób dalej, znajdziemy ostatecznie wypadkową R_4 siły R_3 i ciężaru C_4, która to wypadkowa R_4 jest ciśnieniem, jakie sklepienie wywiera na przyczółek.

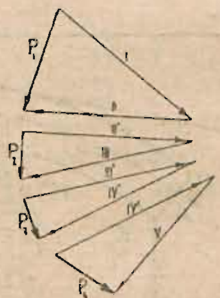
(Linię łamaną H, R_1, R_2, R_3, R_4 nazywamy linią ciśnienia lub linią naporową. Będziemy o niej mówić szerzej w § 62).

§ 12. Wielobok sznurowy.

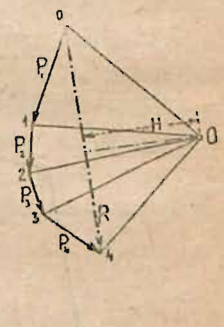
Zdarza się często, że punkty przecięcia poszczególnych sił znajdują się bardzo daleko, tak, że składanie ich wedle prawideł podanych w poprzednim paragrafie, byłoby wielce utrudnione lub



Rys. 48.



Rys. 49 a, b, c, d.



Rys. 50.

nawet niemożliwe. Wtedy dla znalezienia wypadkowej używamy sposobu innego (rys. 48 i nast.).

Siłę P_1 rozkładamy na dwie dowolne składowe I i II. Jeśli przyjmiemy kierunki obu, to tem samem wielkość ich wypadnie wprost z trójkąta sił (rys. 49a). Podobnie czynimy z siłą P_2 w ten

*) Przyczółkiem nazywamy budowlę, na której wspiera się sklepienie (lub inna belka).

sposób jednak, że za jedną z jej składowych przyjmiemy siłę II' równą i wprost przeciwną sile II, a leżącą w jej przedłużeniu; z rys. 49b znajdziemy wtedy odrazu kierunek i wielkość drugiej składowej III. Podobnie postępujemy z każdą z pozostałych sił P_3 i P_4, otrzymując w ten sposób kolejno 8 sił: I, II, II', III, III', IV, IV', V, które zupełnie zastępują siły dane P_1... P_4. Ale siły II i II' są sobie równe i wręcz przeciwne, a więc znoszą się wzajemnie, podobnie jak III i III', IV i IV', tak, że ostatecznie siły P_1... P_4 zastępujemy *dwiema* siłami I i V. Siły te w sposób znany z § 6 składamy w wypadkową R, która jest zarazem wypadkową wszystkich danych sił P_1... P_4. Wielkość i kierunek jej określa odcinek 04.

Zamiast rysować cztery osobne trójkąty sił możemy je zesunąć w jedną figurę (fig. 50), przedstawiającą wielobok, którego boki są odpowiednio równoległe do sił P_1, P_2.. i I, II, II',... badanego układu. Położenie punktu O określone jest kierunkami I i II, przyjętymi zupełnie dowolnie; jeślibyśmy obrali te kierunki inaczej, otrzymalibyśmy inny punkt O'. Zamiast więc przyjmować kierunki, możemy przyjąć dowolnie *punkt* O t. zw. *biegun*, a położenie jego określi z góry położenie składowych I... V. Wielobok 0 1 2 3 4 nazywamy *wielobokiem sił;* linie I, II... *promieniami biegunowymi;* odległość bieguna O od wypadkowej R *odległością biegunową,* zaś wielobok m n o p *wielobokiem sznurowym;* jeśli bowiem sznur obciążymy siłami P_1... P_4, to przybierze on kształt linii m n o p. Poszczególne części wieloboku sznurowego m n, n o, o p naz. *promieniami wieloboku sznurowego* lub *promieniami sznurowymi.*

Dla znalezienia wypadkowej R *dowolnej ilości sił, nie przechodzących przez jeden punkt należy zatem wykreślić wielobok tych sił, przyjmując dowolnie biegun* O, *a następnie poprowadzić wielobok sznurowy* m n... *równolegle do promieni biegunowych* (wychodząc z punktu m obranego *dowolnie* na sile P_1). *Wypadkowa* R *przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych* m r i p r, *a kierunek i wielkość jej znajduje się z wieloboku sił*

Pamiętać należy, że ilość promieni biegunowych i promieni sznurowych jest zawsze o jeden większa od ilości sił.

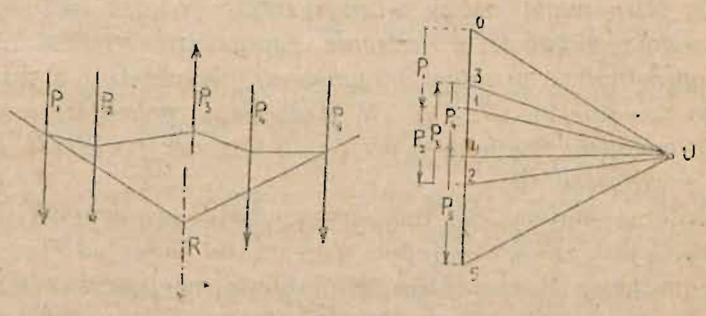
Wypadkowa R zastępuje działaniem swojem wszystkie siły układu P_1, P_2...; jeśli zatem chcemy otrzymać stan równowagi, to musimy wprowadzić siłę —R równą a wprost przeciwną wypadkowej. Wtedy do czterech boków wieloboku sił: 01, 12, 23, 34 przychodzi bok piąty 40, łączący punkt ostatni 4 z punktem początkowym O, czyli, jak mówimy, *ciąg sił zamyka się*. W wieloboku sznurowym siła —R przechodzić musi przez punkt r przecięcia boków m r i p r równoległych do promieni oO i 4O; wielobok sznurowy m n o p uzupełnia się zatem bokami m r i p r czyli *zamyka się* również. Wynika stąd następująca reguła:

Siły działające na płaszczyźnie w różnych punktach i różnych kierunkach pozostają w równowadze, jeśli zamknie się nietylko ich wielobok sił, ale także wielobok sznurowy.

§ 13. Siły równoległe.

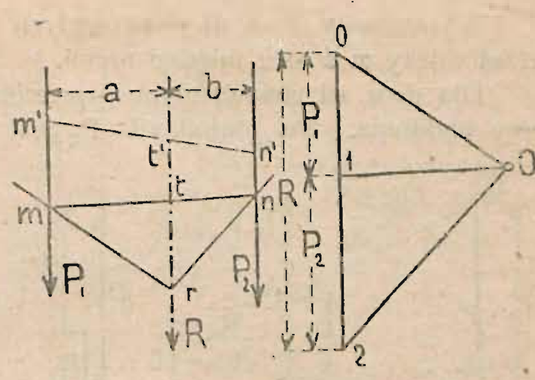
Wypadkową sił równoległych znaleźć możemy również zapomocą wieloboku sznurowego. Ponieważ jednak wszystkie siły mają ten sam kierunek, przeto w wieloboku sił będą leżeć w *jednej* linii równoległej do tegoż kierunku; siły odcina się w nim jedna po drugiej. Jeśli jednak która z sił (np. P_3) posiada strzałkę przeciwną innym, np. działa w górę (rys. 51), to odcina się ją od punktu 2 też ku górze (długości 23), poczem od 3 odcina się siły następne P_4. P_5 ku dołowi, podobnie jak P_1 i P_2. Wielkość wypadkowej jest oczywiście *algebraiczną sumą* poszczególnych sił.

Dla lepszego uwydatnienia sił, skierowanych w różnych kierunkach, narysowaliśmy je na rys. 51 nieco rozsunięte, oczywiście z zachowaniem równoległości (por. rys. 23).



Rys. 51

Dla dwu sił równoległych (rys. 52). skierowanych w jedną stronę wielobokiem sznurowym będzie trójkąt mnr, gdyż wielobok sił ma trzy promienie O0, O1, O2. Trójkąt △ mtr jest podobny do △ O10, zaś △ ntr ∞ △ O12. Otrzymamy więc równania:



Rys. 52.

$$mt : tr = O1 : 01 = O1 : P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a$$
$$nt : tr = O1 : 02 = O1 : P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b$$

Dzieląc równanie a przez b, dostaniemy:

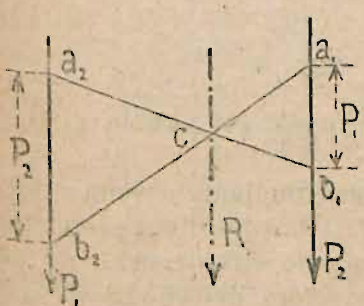
$$\frac{mt \, . \, tr}{tr \, . \, nt} = \frac{O1 \, . \, P_2}{O1 \, . \, P_1}$$

czyli po uproszczeniu:

$$\frac{mt}{nt} = \frac{P_2}{P_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7.$$

Łatwo udowodnić, że kierunki sił P_1, P_2 i R dzielą *każdą* prostą w tym samym stosunku co prostą mn, t. j. że

$$m't' : n't' = mt : nt.$$



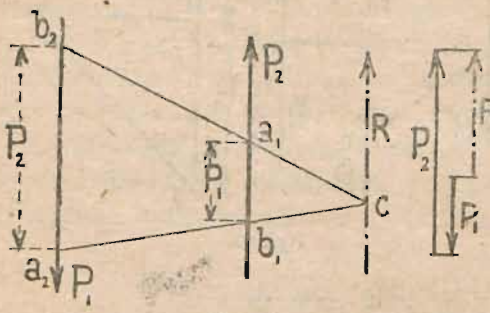
Rys. 53.

Stąd wynika reguła: *Wypadkowa dwu sił równoległych o tej samej strzałce dzieli odstęp między niemi w odwrotnym stosunku do ich wielkości.*

Położenie wypadkowej możemy znaleść więc w sposób następujący: Na kierunku siły P_1 odcinamy wielkość siły P_2, na kierunku P_2 siłę P_1 i łączymy wedle rys. 53. Wtedy $a_2c : b_1c = P_2 : P_1$, a więc wypadkowa przechodzi przez punkt c.

Wypadkowa dwu sił równoległych i równych o tej samej strzałce leży *w środku* między niemi.

Dla dwu sił równoległych o *przeciwnych* kierunkach postępujemy podobnie. Tu jednak siła P_2 jest skierowana odwrotnie niż w poprzednim wypadku (rys. 54) i dlatego też proste łączące punkty a_1 z b_1 oraz b_2 z a_1 przecinają się w punkcie c leżącym poza obiema siłami. Wypadkowa ma tutaj kierunek siły większej, a wielkość równą różnicy obu sił $R = P_2 - P_1$.



Rys. 54.

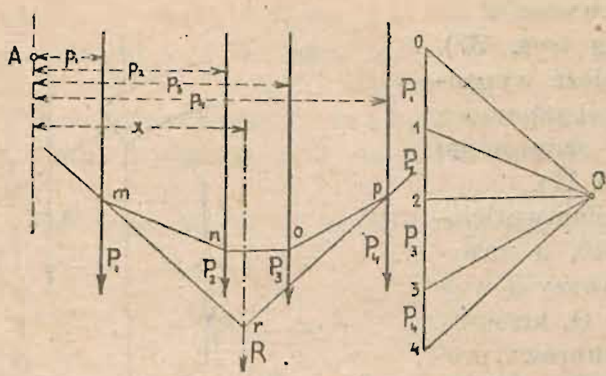
Na tej samej zasadzie polega rozkładanie sił. Jak wiadomo jednak z § 9, dana siła da się rozłożyć *jednoznacznie* tylko na *dwie* siły składowe.

Jeżeli np. siłę R (rys. 52) mamy rozłożyć na siły P_1 i P_2, o nieznanej z góry wielkości, to odniósłszy jej długość 02 w wieloboku sił, przyjmujemy biegun O i kreślimy wielobok sił 02O, a następnie promienie mr i rn wieloboku sznurowego równoległe do promieni OO i 2O. Jeżeli siły P_1 i P_2 mają być w równowadze z siłą P, to wielobok sznurowy musi się zamknąć, a więc trzecim jego bokiem musi być mn. Ale w wieloboku sił promień przechodzący między siłami P_1 i P_2 musi być równoległy do tego boku mn. Kreślimy więc O1 ∥ mn i otrzymujemy wielkość sił składowych $P_1 = 01$, $P = 12$.

Przykłady 19—23.

19. Znaleść wielkość i położenie wypadkowej układu sił $P_1 \dots P_4$ wedle rys. 55.

Wykreślamy wielobok sił 01234, przyjmujemy dowolnie biegun O i równolegle do promieni OO, 1O... kreślimy promienie sznurowe mr, mn... Przedłużając promienie skrajne mr i pr do przecięcia, otrzymujemy punkt r, przez który przechodzi wypadkowa R. Wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił. (Por. prz. 30).

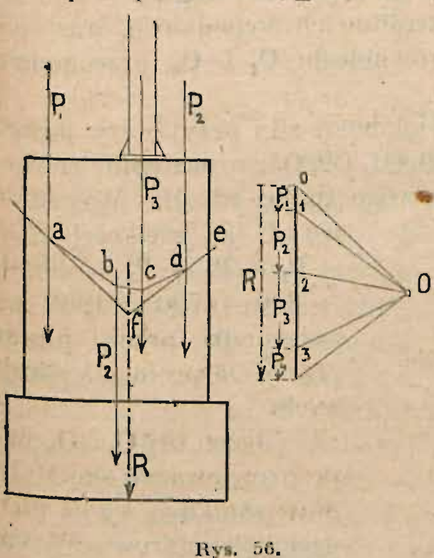


Rys. 55.

20. Na filar ceglany o ciężarze $P_2 = 4000$ kg działają ciężary pionowe stropów wspierających się na nim o wielkości $P_1 = 1600$ kg i $P_4 = 2000$ kg, oraz ciężar górnego słupa $P_3 = 5000$ kg. Należy znaleźć wypadkową R tych wszystkich ciężarów sposobem wykreślnym (rys. 56).

Na linji 0 1 2 3 4 odcinamy kolejno siły P_1... P_4 i przyjąwszy dowolnie biegun 0, kreślimy promienie wieloboku sił O0, O1.... Następnie prowadzimy linję af || O0, ab || O1 i t. d., otrzymując w ten sposób wielobok sznurowy. Skrajne boki tego wieloboku af i ef przecinają się w punkcie f, przez który przechodzi wypadkowa R wszystkich ciężarów; wielkość jej równa jest sumie wszystkich sił

$$R = P_1 P_2 P_3 P_4 = \Sigma P =$$
$$= 1600 + 4000 + 5000 + =$$
$$= 2000 = 12600 \text{ kg}.$$

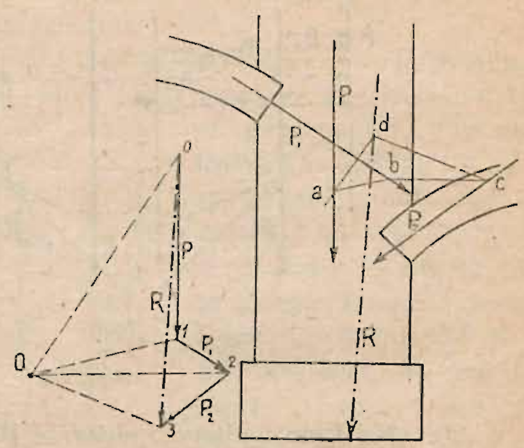


Rys. 56.

21. Na filarze murowanym wspierają się dwa sklepienia, jedno cisnące siłę $P_1 = 1250$ kg, drugie siłą $P_2 = 1670$ kg. Cię-

żar filara wynosi $P = 3720$ kg (rys. 57). Należy znaleźć wypadkową tych sił zapomocą wieloboku sznurowego (por. przykł. 17).

Wykreślamy wielobok sił 0 1 2 3, a następnie przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy wielobok sznurowy, prowadząc a d || O0, a b || O1, b r || O2, c d || O3. Następnie przedłużamy promienie skrajne a d i c d aż do przecięcia się



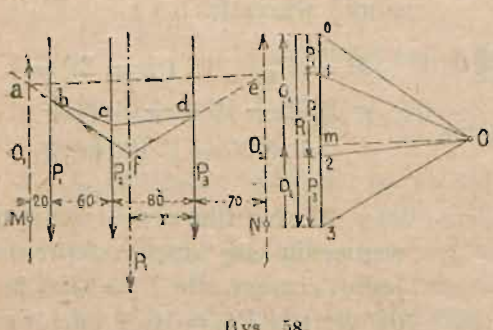
Rys. 57.

w punkcie d, przez który przechodzi także wypadkowa R. Wielkość jej i kierunek znajdziemy w wieloboku sił, gdyż $R = 03$.

Wynik otrzymany na rys. 57, zgodny jest w zupełności z wynikiem przykł. 17 (por. rys. 46).

22. Dane są trzy siły równoległe $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 800$ kg, $P_3 = 700$ kg, Należy znaleźć wykreślnie ich wypadkową, oraz obliczyć dwie równoważące je siły równoległe O_1 i O_2, przechodząc przez punkty M i N (por. rys. 58).

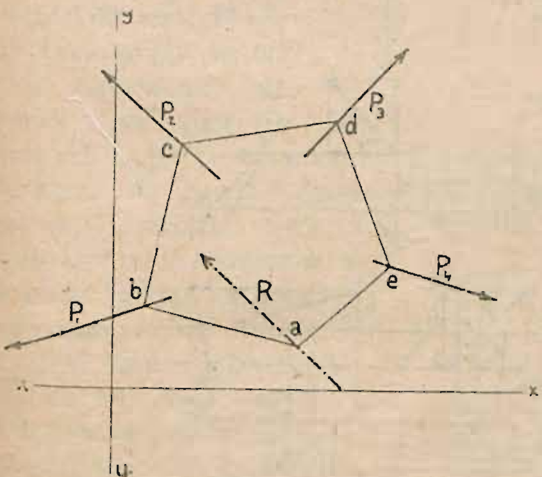
Odnosimy siły P_1 P_2 P_3 w wieloboku sił i przyjąwszy dowolnie biegun O, kreślimy promienie O0, O1, O2, O3, a następnie równolegle do nich boki wieloboku sznurowego fb, bc, cd, df. Wypadkowa R o wielkości $R = P_1 + P_2 + P_3 = 400 + 800 + 700 = 1900$ kg, przechodzi przez punkt przecięcia promieni skrajnych.

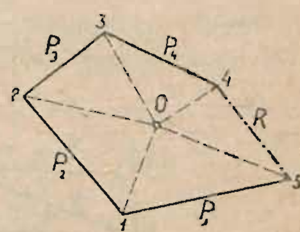


Rys. 58.

Jeżeli siły O_1 i O_2 mają zrównoważyć siłę R, to musi zamknąć się na nich wielobok sznurowy. W tym celu przedłużamy promienie skrajne bf, aż do a, zaś df do e. t. j. do kierunków sił O_1 i O_2; promieniem sznurowym zamykającym będzie zatem ab. Promień wieloboku sił, odpowiadający siłom O_1 i O_2 musi być równoległy do ab, będzie nim zatem Om. zaś długość Om i m3 odcięte nim dają wprost wielkości oddziaływań O_1 i O_2.

23. Znaleść wypadkową układu sił podanego na rys. 59 sposobem wykreślnym.



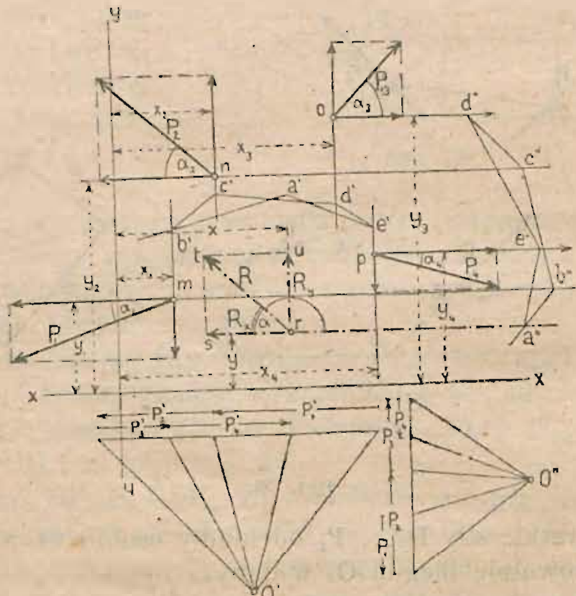


Rys. 59.

a) Wszystkie siły $P_1 \ldots P_4$ odcinamy osobno w wieloboku sił i obieramy dowolnie biegun O, w danym wypadku wewnątrz wieloboku, gdyż w ten sposób otrzymamy najwygodniejsze kierunki promieni. Jeżelibyśmy bowiem biegun przyjęli zewnątrz wieloboku, to promienie zamykałyby z sobą bardzo ostre kąty, a tem samem i dokładność konstrukcji ucierpiałaby znacznie. Następnie kreślimy promienie sznurowe, a więc ab ∥ O5, bc ∥ O1 i t. d. Przez punkt przecięcia boków skrajnych t. j. przez punkt a przechodzi wypadkowa R, której wielkość i kierunek znajdziemy w wieloboku sił, łącząne punkty 0 i 4.

b) Czasem zdarza się, że wygodniej jest w wykresie użyć składowych (np. poziomych i pionowych) sił. W tym celu kreślimy osobno wielobok sił składowych poziomych, osobno pionowych, a dla nich też osobne wieloboki sznurowe.

Wykonaliśmy to na rys. 60. Ponieważ składowe idą po części we wprost przeciwnych kierunkach, przeto rozsunęliśmy je w wielobokach sił wedle § 13. Następnie wykreśliliśmy wielobok sznurowy a′ b′ c′ d′ e′ dla sił pionowych, zaś a″ b″ c″ d″ e″ dla poziomych. Wypadkowa przechodzi przez punkt r przecięcia wypadkowych a′r i a″r; wielkość jej R=rt znaleźliśmy w równoległoboku sił częściowych rstu.



Rys. 60.

C. Moment statyczny.

§ 14. Para sił.

Jeśli w ostatnio rozpatrywanym wypadku sił równoległych, a *przeciwnie* skierowanych różnica sił jest niewielka, to wedle rys. 54 punkt zaczepienia wypadkowej oddala się znacznie od obu sił