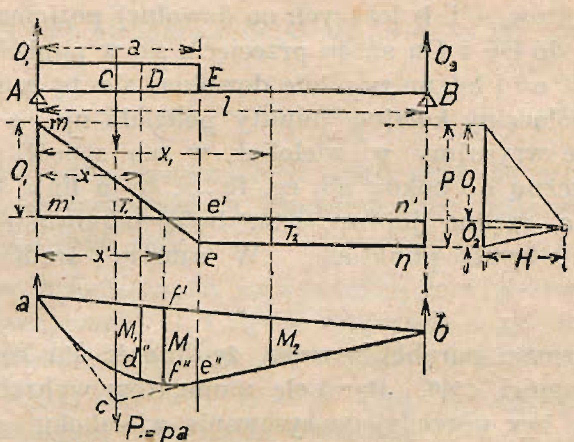
Z punktów a i b leżących na dowolnej poziomej prowadzimy równoległe do Oo i On aż do przecięcia się w punkcie d. Podzielmy długości ad i bd, na zupełnie dowolną, ale. tę samą, ilość części (np. 4) i połączmy kolejno punkty podziału np. e z g, f z h, a następnie wrysujmy w wielobok w ten sposób powstały linję krzywą styczną do boków ad, eg, fh..., to ta linja krzywa będzie parabolą, a rzędne jej np. w'w'' będą odpowiadały momentom w poszczególnych punktach. W samym środku otrzymamy rzędną $\frac{gl^2}{8}$.

Z własności paraboli wynika, że długość d'd równe jest dwukrotnej długości d'd''. Parabolę momentów wykreślić można zatem nawet bez uprzedniego rysowania wieloboku sił: wystarczy odciąć w środku belki długość $d'd = 2 \times \frac{1}{8} gl^2$ i narysować parabolę, zastosowawszy wyżej opisany sposób kreślenia.

Dla obciążenia *ciężarem skupionym* G w środku belki, otrzymujemy wedle wz. 33 największy moment $M = \frac{Gl}{4}$. Jeśli zatem całe obciążenie jednostajnie obciążonej belki G = gl zaczepimy w jej środku jako ciężar skupiony, to uzyskany moment będzie dwa razy większy niż dla ciężaru rozłożonego; w wykresie (rys. 95) otrzymalibyśmy moment równy d'd, zaś wykres momentów a d b. Zatem chcąc wyznaczyć linję momentów dla obciążenia jednostajnie rozłożonego, możemy *wykreślić linję momentów dla ciężaru skupionego o równej wielkości* G = gl *i wkreślić w nią parabolę styczną*, która będzie linją momentów ciężaru jednostajnie rozłożonego.

§ 26. Obciążenie jednostajne częściowe.

Przy obciążeniu, nie rozmieszczonem na całej belce, czyli t. zwanem obciążeniu częściowem postępujemy podobnie, jak przy całkowitem. Obciążenie na długości a wynoszące p a (rys. 96), zastępujemy ciężarem skupionym o tej samej wielkości P=a p i wykreślamy linję momentów a c b. Linja ta ważna jest jednak tylko na długości c b_1. Na długości obciążenia a c zastępujemy ją parabolą wykreśloną (jak w poprzednim paragrafie), a otrzymana w ten sposób powierzchnia ad'' f'' e'' b będzie powierzchnią momentów.



Rys. 96.

Rachunkowo otrzymamy wielkość oddziaływania biorąc moment oddziaływania O_1 i ciężaru P = 1 ze względu na punkt B:

$$O_1 l - p\,a\left(l - \frac{a}{2}\right) = 0$$

a stąd:

$$O_1 = \frac{pa}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) = \frac{pa}{2\,l}\,(2\,l - a) \qquad 42$$

Zatem wartość taka sama, jak gdyby ciężar P = a p był skupiony w odległości $\frac{a}{2}$ od lewej podpory O_1. Na drugie oddziaływanie mamy wzór:

$$O_2 = P - O_1 = \frac{p\,a}{2\,l} \;\ldots\ldots \qquad 42a$$

Przy kreśleniu linji sił poprzecznych musimy pamiętać o tem, że na części nieobciążonej BE siła poprzeczna nie zmienia się; natomiast na części obciążonej zmienia się, podobnie w § 25, t. j. wedle linji prostej. Wykres T otrzymamy zatem, odcinając na podporach oddziaływania (równe sile poprzecznej na podporze), na lewej O_1 =m'm, na prawej O_2=nn', prowadząc z n prostą poziomą n e aż do punktu e i łącząc punkt e z m.

Moment zginający w dowolnym punkcie D między A a E wynosi:

$$M_1 = O_1 x - \frac{px^2}{2} \qquad 43$$

zaś moment w punkcie poza długością obciążoną (między E a B)

$$M_2\, O_1\, x_1 - pa\left(x_1 - \frac{a}{2}\right) = O_2\,(l - x_1) \qquad 43a$$

Jeśli obciążenie częściowe działa na inną część belki (rys. 102), to najlepiej jest wyznaczyć największy moment wykreślnie. Wśrodku części obciążonej zaczepiamy ciężar skupiony o wielkości równej obciążeniu i kreślimy wielobok sznurowy w linjach prostych; tylko na długości obciążenia wkreślamy weń parabolę, podobnie jak w wypadku wyżej omawianym (rys. 96).

Miejsce największego momentu (t. j. przekroju niebezpiecznego) możemy obliczyć i tutaj. Jak wiadomo z § 23, występuje on w miejscu, gdzie siła poprzeczna równa jest zeru; obliczając więc moment w tem miejscu, otrzymamy jego największą wartość.

Weźmy np. pod uwagę obciążenie, podane na rys. 96, gdzie $P_1 = a\,p$. Jeżeli odległość przekroju niebezpiecznego od lewej podpory wynosi m, to całe obciążenie na długości m musi być równe oddziaływaniu (gdyż obciążenie to odjęte od oddziaływania daje na wynik zero).

Otrzymamy więc $pm = O_1$, a stąd, uwzględniwszy, że $P = a\,p$,

$$m = \frac{O_1}{p} = \frac{O_1 a}{P} \qquad 44$$

czyli wprowadzając wartość za O_1 z wz. 42

$$m = \frac{p\,a\,(2l - a)}{2l}\; a\, \frac{1}{ap} = \frac{a\,(l - 2)}{2l} \qquad 44a$$

Moment zginający w tym punkcie, a więc największy moment działający na belkę, wynosi (uwzględniając, że $O_1 = pm$)

$$\text{najw } M = O_1 m - p\,m\,\frac{m}{2} = O_1\, m - O_1\,\frac{m}{2} = O_1\,\frac{m}{2} \qquad 45$$

czyli

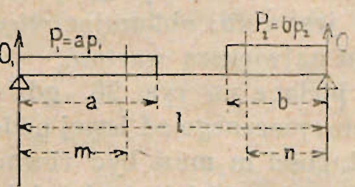
$$\text{najw. } M = \frac{p\,a\,(2l - a)}{2} \cdot \frac{a\,(l - a)}{2 \,.\, 2l} = \frac{p\,a^2\,(2\,l - a)}{8\,l^2} \qquad 45a$$

Obliczając najw. M dla różnych wartości „a“ przekonamy się, że bezwzględnie największy moment otrzymamy dla całkowitego obciążenia belki, t. j. gdy $l = a$. Jeżeli zatem obciążenie może (choć nie musi koniecznie!) działać na całą belkę, to dla obliczenia należy zastosować wzór: $M = \frac{1}{8} pl^2$.

Wypadek taki zachodzi np. przy obliczaniu belek stropowych. Działa na nie ciężar własny stropu (z nadsypką i podłogą) oraz ciężar ruchomy p, który składa się z ciężaru sprzętów i ciężaru ludzi. Ciężar ten z reguły rozkłada się całkiem nierównomiernie, chcąc jednak belkę wykonać tak silną, aby była wytrzymała na każdy rozkład tego obciążenia ruchomego, rozmieszczamy je na całej długości i obliczamy najw. moment ze wzoru,

$$\text{najw. } M = \tfrac{1}{8}(g + p)\, l^2 = \tfrac{1}{8} z\, l^2 = \tfrac{1}{8}(G + P)\, l = \tfrac{1}{8} Z\, l \qquad 46$$

gdzie z (wzgl. Z) jest obciążeniem całkowitem czyli zupełnem.



Rys. 97.

Dla obciążenia, jak rys. 97, może przekrój niebezpieczny przypaść na długość a, jeżeli obciążenie $P_1 = p_1 a$ jest większe od oddziaływania, albo w przeciwnym wypadku na długość b. W pierwszym razie otrzymamy odległość $m = \frac{O_1 a}{P_1}$ całkiem tak samo, jak przy obciążeniu podanem na fig. 96; w drugim natomiast zamiast szukać odległości punktu niebezpiecznego od podstawy lewej, obliczymy ją od podpory prawej i otrzymamy w ten sam sposób:

$$n = \frac{O_2}{p_2} = \frac{O_2 b}{P_2} \qquad 44b$$

Podobnie możemy postępować, jeśli oprócz obciążeń rozłożonych działają na belkę ciężary skupione; wtedy jednak prędzej prowadzi do celu metoda wykreślna (por. przykłady).

Przykłady 42 48.

42. Należy obliczyć oddziaływania i największy moment zginający dźwigara żelaznego stropowego „a“ (por. rys. 103), jeśli

ciężar własny stropu wynosi $g = 300$ kg/m², ciężar ruchomy $p=250$ kg/m², zaś odstęp dźwigarów „a" od siebie $n=1{,}25$ m.

Dźwigar a przenosi ciężar tak wielki, jaki wypada na pole zakreskowane pionowo, czyli t. zw. *pole obciążenia*. Powierzchnia jego wynosi w metrach kwadratowych:

$$ln = 4{,}00 \times 1{,}25 = 5{,}00 \text{ m}^2$$

Całkowite obciążenie na 1 m²:

$$z = g + p = 300 + 250 = 550 \text{ kg/m}$$

Całkowite obciążenie przypadające na dźwigar wynosi w kg:

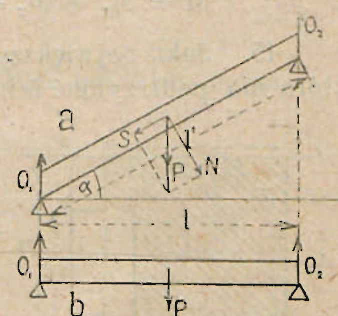
$$Z = l\,n\,z = 5{,}00 \,.\, 550 = 2750 \text{ kg}$$

Zatem największy moment zginający w kgcm:

$$M = \tfrac{1}{8}\, Z\, l = \tfrac{1}{8}\, 2750 \,.\, 550 = 189060 \text{ kgcm}$$

43. Jaki moment zginający przenosi się na dźwigar policzkowy schodów, jeśli długość jego ukośna wynosi l', długość pozioma l, zaś obciążenie jednostajnie rozłożone P kg (rys. 98).

Jeśli α jest kątem nachylenia belki do poziomu, to rozłożywszy siłę P na prostopadłą i równoległą do belki, otrzymamy pierwszą z nich $N = P\cos\alpha$. Działa ona prostopadle na dźwigar o długości $l' = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, zatem wywołuje moment zginający o wielkości $M = \frac{1}{8}\, N\, l' = \frac{1}{8}\, Z \cos\alpha \left(\dfrac{l}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{8}\, Z\, l$, więc tak wielki, jak gdyby dla dźwigara poziomego o długości l obciążonego ciężarem Z (por. rys. 98b).

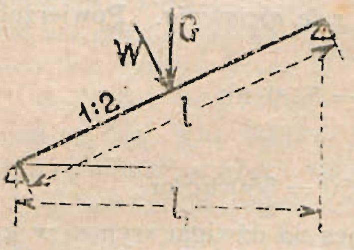


Rys. 98.

Składowa równoległa do policzka S wywołuje w nim siłę osiową, zwykle tak małą, że ją pomijamy w obliczeniach.

44. Krokiew dachowa o długości ukośnej $l = 3{,}35$ m, a poziomej $l_1 = 3{,}00$ m, obciążona jest na całej długości swej ciężarem pionowym, wynoszącym $G=430$ kg, oraz parciem wiatru prosto-

padłem do połaci dachu, o wielkości W = 240 kg. Należy znaleść całkowity moment zginający (rys. 99).



Rys. 99.

Ciężar pionowy i parcie wiatru rozkładają się jednostajnie na całej długości. Otrzymamy zatem z wz. 41

$$M_1 = \tfrac{1}{8} G l_1 = \tfrac{1}{8} 430 . 300 = 16130 \text{ kgcm}$$

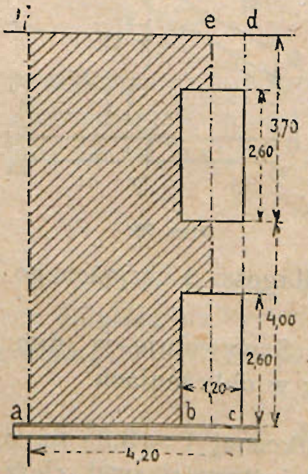
gdzie l jest długością *poziomą* (t. j. rzutem poziomym krokwi) gdyż ciężar G jest pionowy (por. prz. 43). Dla parcia wiatru musimy w rachunku uwzględnić długość belki *ukośną*, (gdyż wiatr działa prostopadle do połaci); otrzymamy zatem:

$$M_2 = \tfrac{1}{8} Wl = \tfrac{1}{8} 240 . 335 = 10050 \text{ kgcm}.$$

Oba największe momenty przypadają na środek belki; zatem najw. moment sumaryczny wynosi:

$$M = M_1 + M_2 = 16130 + 10050 = 26180 \text{ kgcm}.$$

45. Jaki największy moment przenosi się na belkę żelazną, która ma podtrzymać ścianę grubości 0,30 cm., 7,70 m. wysoką, z otworami wedle rys. 100.



Rys. 100.

Jeżeliby w murze nie było żadnych otworów, to na belkę przenosiłby się ciężar muru leżącego przed belką, a ograniczonego linjami pionowemi przechodzącemi przez podpory*). Jednakowoż z części muru leżącego nad otworami przenosi się połowa na filar lewy, połowa na prawy. W danym wypadku więc część muru ponad otwo-

*) Dla ścian wyższych przyjąć można, że na dźwigar przenosi się obciążenie tylko części muru ograniczonej linjami wychodzącemi z obu dodpór dźwigara ku sobie pod kątem 60°.

rami nie zakreskowane przenosi się na filar prawy i na belkę wcale nie oddziaływa, reszta zaś, t. j. część zakreskowana, na filar lewy — i ta obciąża belkę.

Całkowity ciężar, przenoszący się na belkę znajdziemy więc, obliczając ciężar muru (a b e f) na długości $(3{,}00 \times \frac{1}{2}\, 1{,}20) = 3{,}60$ m, a następnie, odejmując ciężar odpowiedniej części otworów t. j: dwu połówek drzwi

$$P = \left(3{,}60 \,.\, 7{,}70 - 2 \,.\, \frac{1.20}{2} \,.\, 2{,}60\right) 0{,}30 \,.\, 1600 = 13284 \backsim 13300 \text{ kg.}$$

Oddziaływanie wynosi wtedy (wedle wz. 42):

$$O_1 = \frac{13300 \,.\, (4{,}20 - 1.50)}{4{,}20} = 8550 \text{ kg.}$$

Przekrój niebezpieczny oddalony jest od podpory o odległość:

$$m = \frac{O_1 a}{P} = \frac{8550 \,.\, 3.00}{13300} = 1{,}93 \text{ m.}$$

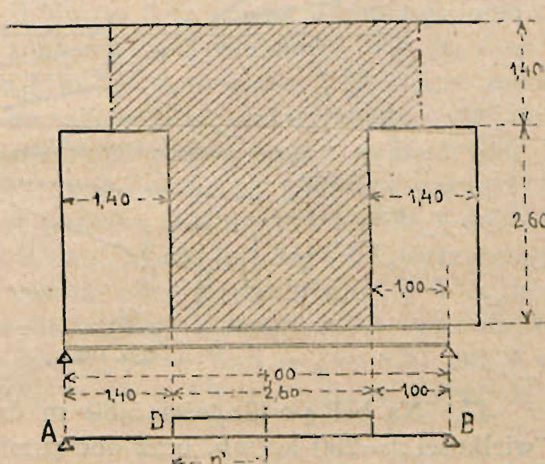
Największy moment wynosi zaś.

$$M = \frac{O_1 m}{2} = \frac{8550 \,.\, 193}{2} = 825075 \backsim 825100 \text{ kgcm.}$$

46. Znaleźć największy moment zginający, przenoszący się na belkę, podtrzymującą ścianę z cegły pustej 0,15 m grubą, 4 m wysoką z otworami, jak na rys. 101.

Na belkę przenosi się ciężar muru od osi do osi drzwi o wielkości:

$$P = [(0{,}70 + 2{,}60 + 0{,}70)\; 4{,}00 - 2 \,.\, 0{,}70 \,.\, 2{,}60] \,.\; 0{,}15 \,.\, 1300 = 2410 \text{ kg.}$$



Rys. 101.

Oddziaływanie wynosi:

$$O_1 = 2410 \cdot \frac{(\frac{1}{2}\,2{,}60 + 1{,}00)}{5{,}00} = \frac{2410 \cdot 2{,}30}{5{,}00} = 1109 \sim 1110 \text{ kg}$$

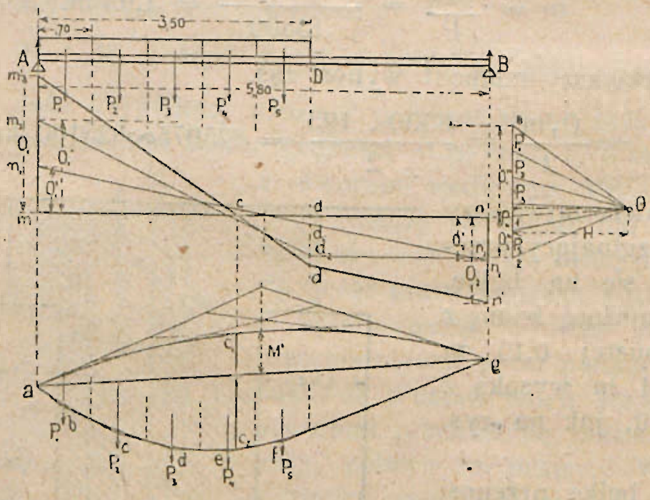
Długość m' obliczona z wzoru 42, przedstawiać tu będzie odległość przekroju niebezpiecznego od punktu D; wynosi ona:

$$m' = \frac{O_1 a}{P} = \frac{1110 \cdot 2{,}60}{2410} = 1{,}20 \text{ m}$$

Momentu zginającego nie możemy oczywiście obliczać bezpośrednio z wz. 45, ale sposobem ogólnym:

$$\text{najw. } M = O_1 (140 + m') - \frac{O_1 m'}{2} = O_1 \left(140 + m' - \frac{m'}{2}\right) =$$

$$= O_1 \left(140 + \frac{m'}{2}\right) = 1110\,(140 + 60) = 222000 \text{ kgcm.}$$



Rys. 102.

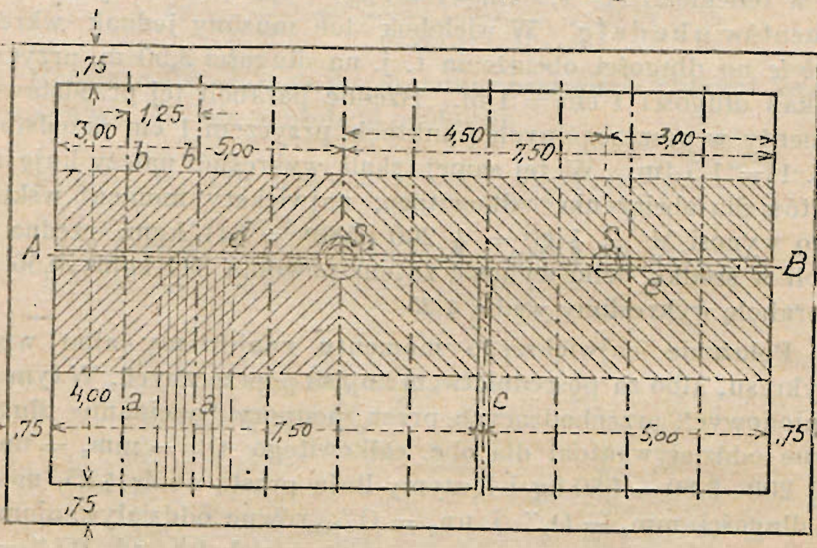
47. Na belkę o długości 5,80 m działa obciążenie całkowite o wielkości g=200 kg/mb, oraz obciążenie częściowe p=500 kg/mb na długości 3,50 m (rys. 102). Należy znaleźć największy moment wykreślnie.

Aby znaleźć wykreślnie linię momentów dla obciążenia częściowego, dzielimy ją na pewną ilość np. 5 części, z których każda obejmująca obciążenie na długości $\frac{3.50}{5} = 0,70$ m, przedstawia ciężar $P = 0,70 \,.\, 500 = 350$ kg. Odcinamy kolejno pięć sił $P_1 \ldots P_5$ w wieloboku sił w skali 1 cm = 1000 kg, i obierając biegun w odległości $H = 1,5$ cm $= 1500$ kg $= 1,5$ t, kreślimy wielobok momentów a b c d e f g. W wielobok ten musimy jednak wkreślić *parabolę* na długości obciążenia t. j. na długości 3,50 m, przyczem w skali długości 1 cm = 1 m. Rzędne paraboli tej przedstawiają momenty w poszczególnych punktach, przyczem 1 cm przedstawia 1,5 . 1 = 1,5 tm. W tej samej skali wykreślić należy linję momentów dla obciążenia całkowitego; największy moment wskutek niego wynosi $M' = \frac{1}{8} gl^2 = \frac{1}{8} 200 \,.\, 580^2 = 841$ kgm; rzędna paraboli w środku belki wynosić zatem powinna 841 kgm $= 0,56$ cm, a parabolę wykreślimy wedle § 25.

Położenie największego momentu znajdziemy albo wprost z wykresu, albo za pośrednictwem linji sił poprzecznych. W tym celu na pionowych przechodzących przez podpory odcinamy długości równe oddziaływaniom dla obc. całkowitego $O'_1 = mm_1 = nn_1 = \frac{1}{2} 200 \,.\, 5,80 = 580$ kg i łączymy linją prostą wedle § 25, następnie długości $mm_2 = O_2''$ i $nn_2 = O''_2$ równe oddziaływaniom dla obciążenia częściowego znalezionym z wieloboku sił ($O_1'' = 01$ i $O''_2 = 12$) i łączymy linję m_2d_2 i d_2n_2 wedle § 26. Aby znaleść linję sił poprzecznych dla obciążenia sumarycznego, odcinamy na podporze lewej długość mm' równą sumie oddziaływań lewych $mm' = mm_1 + mm_2 = O_1' + O_1'' = O_1$, na podporze prawej długość $nn' = O_2' + O_2'' = O_2$, w punkcie D długość $dd' = dd_1 + dd_2$ i łączymy linją łamaną m' d' n', która jest linją sil poprzecznych. Przybiera ona wartość równą zeru w punkcie c, w którym to punkcie otrzymujemy też największy moment. Odpowiednia długość rzędnej wieloboków momentów wynosi $c_1c_2 = 1,51$ cm, a ponieważ w skali momentów 1 cm = 1,5 tm, przeto najw. $M = 1,51 \,.\, 1,5 = 2,27$ tm.

48. Należy obliczyć momenty zginające działające na belki stropu betonowego między dźwigarami żelaznymi, ułożone na rzu-

cie poziomym podanym na rys. 103. Dźwigary a wspierają się na podciągu d, dźwigary b na podciągu e, leżąc w odstępie n=1,25 m od siebie. Na podciągu e spoczywa słup pierwszego piętra S_1 o ciężarze $S_1=10000$ kg. Dźwigar c oraz podciągi d i e oparte na murach i na słupie parterowym S_2, dźwigają prócz tego ściankę gipsową 3,50 m wysoką o ciężarze 100 kg/m₂. Ciężar własny stropu wynosi 300 kg/m₂, ciężar ruchomy 250 kg/m₂.



Rys. 103.

Dźwigary a: (por. przykł. 42)—Przenosi się na nie obciążenie $g+p=z=300+250=550$ kg/m² z szerokości $n=1,25$ m, zaś długości $l=4,00$ m. Całkowite obciążenie wynosi:

$$Z_a = l n z = 4,00 \,.\, 1,25 \,.\, 550 = 2750 \text{ kg}$$

Zatem największy moment:

$$M_a = \tfrac{1}{8} Z_a l = \tfrac{1}{8}\, 2750 \,.\, 550 = 189060 \text{ kgcm.}$$

Pole obciążenia dźwigaru a zakreskowane jest pionowemi kreskami.

Dźwigary b:

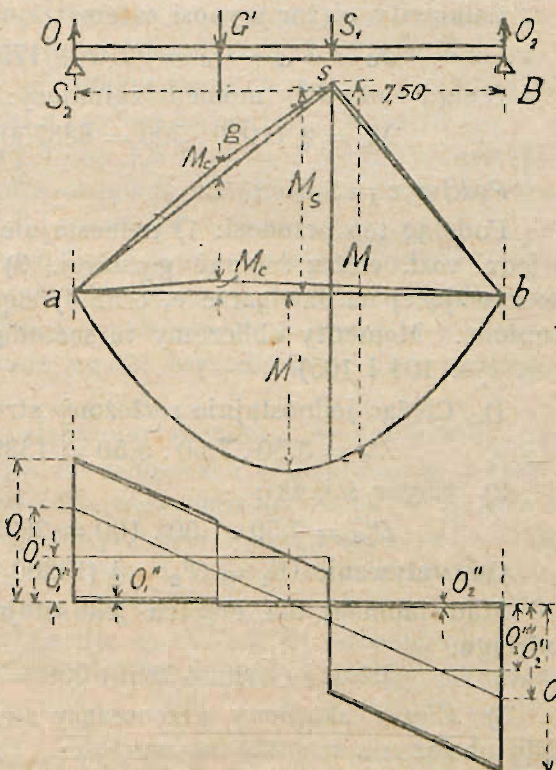
$l = 3,00$ m $n = 1,25$ m $z = 550$ kg/m₂

$$Z_b = l\,n\,z = 3{,}00 \,.\, 1{,}25 \,.\, 550 = \backsim 2060 \text{ kg}$$

$$M_b = \tfrac{1}{8}\, Z_b\, l = \tfrac{1}{8}\, 2060 \,.\, 550 = 141630 \text{ kgcm.}$$

Dźwigar c.

Prócz ciężaru stropu o wielkości powyżej obliczonej Z_a przenosi się na ten dźwigar ciężar ścianki gipsowej o wielkości $G = 3{,}50 \,.\, 400 \,.\, 100 = 1400$ kg, wywołując moment $M_g = \frac{1}{8} G l = \frac{1}{8} 1400 \,.\, 400 = 70000$ kgcm.



Rys. 101.

Zatem całkowity ciężar przenoszący się na ten dźwigar wynosi:

$Z = Z_a + G = 2750 + 1400 = 4150$ kg

zaś całkowity moment:

$M = M_a + M_g = 189060 + 70000 = 259060$ kgcm.

Podciąg $d = AS_2$.

Ponieważ dźwigary leżą dość gęsto, przeto zamiast obliczać momenty jak dla ciężarów skupionych, możemy liczyć je jak dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, który przenosi się na podciąg z powierzchni zakreskowanej ukośnie w lewo. Otrzymamy wtedy przy szerokości pola obciążenie $\frac{4{,}00 + 3{,}00}{2} = 3{,}50$ m, a długości $l = 5{,}00$ m obciążenie:

$$Z_d' = 3{,}500 \,.\, 5{,}00 \,.\, 550 = 9265 \backsim 9270 \text{ kg.}$$

Prócz tego na dźwigar ten przenosi się ciężar ścianki gipsowej o wielkości

$$G_d = 3{,}50 \,.\, 5{,}00 \,.\, 100 = 1750 \text{ kg}.$$

Całkowity ciężar wynosi zatem

$$Z_d = Z'_d + G_d = 9270 + 1750 = 11020 \text{ kg}$$

A stąd całkowity moment zginający:

$$M_d = \tfrac{1}{8}\, 11020 \,.\, 500 = 688750 = 688800 \text{ kgm}.$$

Podciąg e = S_2B.

Podciąg ten przenosi: 1) jednostajnie rozłożony ciężar stropu, 2) jedn. rozł. ciężar ścianki gipsowej, 3) połowę ciężaru ścianki spoczywającej na dźwigarze c, oraz 4) ciężar słupa S, jako ciężary skupione. Momenty obliczamy tu metodą rachunkowo-wykreślną (por. rys. 104 i 105).

1) Ciężar jednostajnie rozłożony stropu wynosi:

$$Z'_e = 3{,}50 \,.\, 7{,}50 \,.\, 5{,}50 = 13897 \backsim 13900 \text{ kg}.$$

2) Ciężar ścianki:

$$Z''_e = 3{,}50 \,.\, 7{,}50 \,.\, 100 = 2625 \backsim 2630 \text{ kg}$$

Oddziaływanie $O'_1 = O'_2 = \frac{1}{2}\,(13900 + 2630) = 8265$ kg

Stąd moment dla ciężaru jednostajnie rozłożonego *w środku* podciągu:

$$M' = \tfrac{1}{8}\,(13900+2630)\; 750 = 1549700 \text{ kgm} = 15{,}50 \text{ tm}$$

3) Ciężar skupiony przenoszący się przez dźwigar c z powodu obciążenia ścianką ma wartość:

$$G' = \tfrac{1}{2}\, G = 700 \text{ kg}$$

Oddziaływanie powstające na słupie S_2 wynosi:

$$O''_1 = \frac{5{,}00}{7{,}50} \,.\, 700 = 466 \backsim 470 \text{ kg} \qquad O''_2 = 700 - 470 = 230 \text{ kg}$$

Zatem moment zginający w punkcie C:

$$M_c = 470 \,.\, 250 = 117500 \text{ kgm} = 1{,}18 \text{ tm}$$

4) Oddziaływanie na słupie S_2 z powodu obciążenia słupem S_1 wynosi:

$$O_1''' = \frac{3{,}00}{7{,}30} \,.\, 10000 = 4000 \text{ kg} \qquad O_2''' = 10000 - 4000 = 6000 \text{ kg}$$

A stąd moment zginający w punkcie S_1:

$$M_s = 4000 \cdot 450 = 1800000 \text{ kgcm} = 18 \text{ tm}.$$

Momenty te możemy wykreślić w dowolnej skali momentów; wtedy otrzymamy dla obciążeń 1 i 2 parabolę, dla obciążeń 3 i 4 zaś trójkąty o wierzchołkach w C wzgl. w S_2. W rysunku przyjęliśmy podziałkę 1 mm = 100000 kgcm = 1 tm. Od linji ab odcięliśmy ku górze trójkąt o rzędnej najwyższej M_s = 18 tm = 18 mm, oraz drugi o rzędnej M_c = 1,8 mm = 1,8 tm, a następnie odnieśliśmy rzędne trójkąta drugiego na obwodzie pierwszego trójkąta, otrzymując kształt momentów trapezowy agsb o największej rzędnej w pionowej punktu S_1. Poniżej linji ab wykreśliliśmy parabolę momentów dla ciężaru jednostajnie rozłożonego o największej rzędnej 15,5 t = 15,5 m/m, a łącząc ją z poprzednio otrzymaną powierzchnią agsb, otrzymamy wykres sumarycznych momentów.

Dla znalezienia największego momentu wykreśliliśmy linję sił poprzecznych, odcinając na podporach oddziaływania i kreśląc linję, podobnie jak w zad. 47, otrzymaliśmy skok w punktach, w których działają ciężary skupione G' i S_2. Punkt zerowy linji tej przypada na punkt S_2, tu więc występuje największy moment, którego wielkość znajdziemy, biorąc sumę momentów wszystkich sił po prawej stronie przekroju (gdyż po tej stronie występuje mniejsza ilość sił, a tem samem otrzymujemy prostszy rachunek). Stąd największy moment:

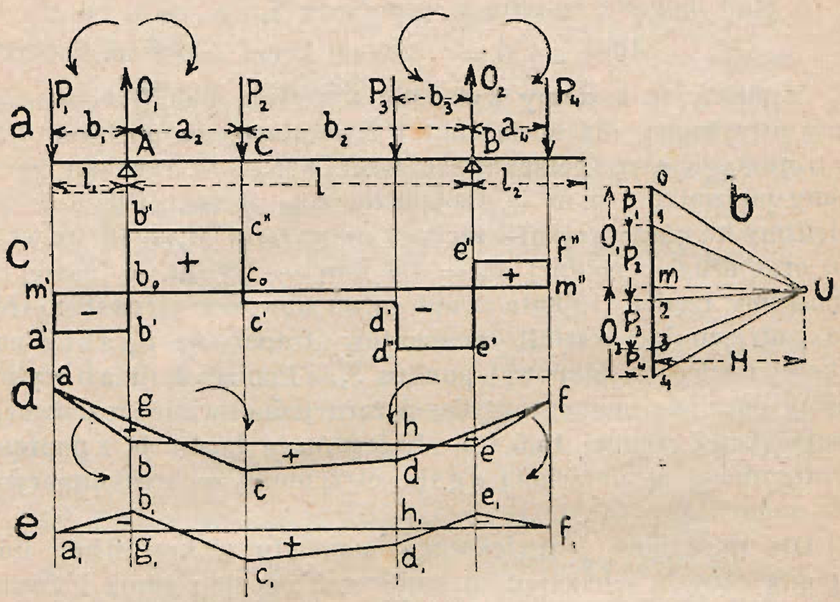
$$M = (O_2 + O_2' + O_2'') \cdot 3{,}00 - (3{,}5 \cdot 550 + 3{,}5 \cdot 100)\, 3{,}0 \cdot 1{,}5 =$$
$$= (8265 + 230 + 6000)\, 3{,}0 - 10240 = 33250 \text{ kgm} = 33{,}25 \text{ tm}.$$

Tę samą ilość otrzymaliśmy też z wykresu.

§ 27. Belka wystająca czyli przewieszona.

Jeżeli belka wystaje poza punkty podparcia, to nazywamy ją *belką wystającą, przewieszoną* lub *wspornikową*[1]) (por. rys. 105). Użyć jej możemy np. wtedy, gdy dźwigar stropowy ma zarazem pode-

[1]) Wystające części nazywamy wspornikami.



Rys. 105.

przeć balkon lub wykusz, jeśli nie chcemy podeprzeć tych konstrukcji osobnymi dźwigarami.

Obliczenie belki wystającej przeprowadza się na zupełnie tej samej zasadzie, co belki omawianej w poprzednich ustępach. Kreślimy wielobok sił 0 1 2 3 4 0 i wielobok sznurowy (rys. 105 d), prowadząc promienie tegoż w następującym porządku: do siły P_1 bok ba ∥ 00, między P_1 a P_2 bok ac ∥ 10..., wreszcie bok fe ∥ 40. Boki ab i fe przedłużamy aż do przecięcia się z kierunkami oddziaływań w punktach b i e, które, połączone ze sobą, dają zamykającą fg. Promień 0m wieloboku sił równoległy do gf daje wielkość oddziaływań $O_1 = m0$ i $O_2 = 4\,m$.

Linję sił poprzecznych wykreślimy od osi m′ m″. Między siłą P_1 a oddziaływaniem O_1, siła poprzeczna $T = P_1$; jest więc ujemna t. j. działa w dół (jak siła P_1); wielkość jej na rysunku przedstawia się rzędna m′a′. Między O_1 a P_2 siła poprzeczna $T = O_1 - P_1$; w wykresie otrzymaliśmy ją, odcinając $b'b'' = O_1$, a wtedy $T = b'b'' - b'b_0 = b_0b'$. Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy linję schodkową, $a'b'b''c''c'd'd''f'f''e''$, która w trzech miejscach t. j. na obu podporach, oraz w punkcie działania siły P_2 zmienia znak, a tem samem przyjmuje wartość równą zeru. W tych też punktach występują *największe momenty*, które trzeba wyznaczyć dla obliczenia belki. Moment w punkcie c jest *dodatni*, natomiast momenty na podporach, t. zw. *momenty podporowe* mają znak *ujemny*, gdyż leżą w wykresie ponad zamykającą gf.

Dla wygodniejszego znalezienia momentów, zwłaszcza w częściach wystających, kreślimy nieraz linję momentów nb podstawie poziomej (rys. 105e), w ten sposób, że na dowolnie obranej linji poziomej $a_1 f_1$, odnosimy wielkość momentów. Rzędne leżące w wykresie 106d *pod* linją abef, odnosimy *pod* linję a_1f_1 (np. $b_1g_1=bg$) leżące *nad* abef odnosimy też *nad* a_1f_1 (np. $d_1h_1 = dh$). Wtedy momenty ponad linją af, będą dodatnie, zaś pod nią ujemne.

Rachunkowo znajdziemy oddziaływania (np. O_1), biorąc moment wszystkich sił działających na belkę ze względu na podporę (np. B). Otrzymamy wtedy:

$$-P_1(b_1+l)+O_1 l-P_2b_2-P_3b_3+P_4b_4=0$$

a stąd

$$O_1=\frac{1}{l}(P_1\,.\,(b_1+l)+P_2b_2+P_3b_3-P_4b_4) \qquad 47$$

Oddziaływanie O_2 znajdziemy z równania:

$$O_1+O_2=P_1+P_2+P_3+P_4$$

a stąd

$$O_2=P_1+P_2+P_3+P_4-O_1 \qquad 48$$

Moment podporowy M obliczymy, biorąc moment wszystkich sił po lewej stronie, t. j. w danym wypadku siły P_1 względem p. A:

$$M_1=-P_1b_1 \qquad 49$$

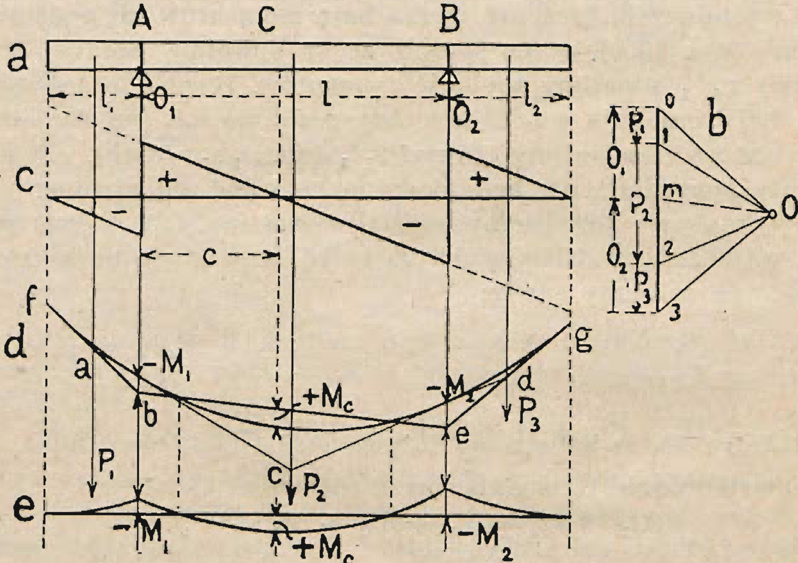
Podobnie na drugiej podporze:

$$M_2=-P_4b_4 \qquad 49a$$

Największy moment *dodatni* w punkcie C:

$$M_c=-P_1(b_1+a_2)+O_1a_2 \qquad 50$$

Jeżeli belka obciążona jest ciężarem jednostajnym, (fig. 106), postępujemy całkiem tak samo. Dzielimy obciążenie np. na trzy części, zaczepiamy wedle § 25 i 26 w środkach ciężkości ich ciężary $P_1 = pl_1$, $P_2 = pl$, $P_3 = pl_2$ i kreślimy wielobok b a c d e. Styczne końcowe, równoległe do 00 i do 30 przedłużamy do pionowych podporowych, zaś punkty b i e łączymy zamykającą b e. Do stycznych a f, a e, c d i d g kreślimy wreszcie parabolę momentów.



Rys. 106.

która też jest w części środkowej dodatnia, w skrajnych — ujemna. Prowadząc wreszcie w wieloboku sił promień $Om \parallel be$, otrzymamy oddziaływanie $O_1 = m0$ i $O_2 = 30$, a tem samem możemy wykreślić linję sił poprzecznych podobnie, jak dla ciężarów skupionych (por. też §§ 25 i 26). Największe momenty wystąpią oczywiście tam, gdzie siła poprzeczna $T = 0$.

Rachunkowo otrzymamy oddziaływania O_1; ustawiając równanie momentów względem podpory B. Wtedy:

$$- gl_1 \left(\tfrac{1}{2} l_1 + l\right) + O_1 l - \tfrac{1}{2} gl^2 + \tfrac{1}{2} gl_2^2 = 0$$

a stąd

$$O_1 = gl_1 \left(\tfrac{1}{2} \frac{l_1}{2l} + 1\right) + \tfrac{1}{2} gl - \tfrac{1}{2} g \frac{l_2^2}{l} \qquad 51$$

Najw. moment w środkowej części belki wynosi zatem;

$$M_c = \tfrac{1}{2} g \left(l_1 + c\right)^2 - O_1 c \qquad 52$$

Momenty podporowe wynoszą:

$$M_1 = - \tfrac{1}{2} gl_1^2 \qquad M_2 = - \tfrac{1}{2} gl_2^2 \qquad 53$$

Na tej zasadzie znajdziemy momenty dla ciężarów kombinowanych (skupionych i rozłożonych).

Jeżeli część belki wystająca jest długa i silnie obciążona, zaś pozostała część belki wcale nie, lub też bardzo mało, to zdarzyć się może, że na podporze przeciwległej wypadnie oddziaływanie *ujemne*. Oznacza to, że belka w tem miejscu ma tendencję podniesienia się, i że trzeba ją tam silnie obciążyć lub zakotwić (por. przykład 50).

Przykłady 49 i 50.

49. Obliczyć oddziaływania, siły poprzeczne i największe momenty belki wystającej o wymiarach i obciążeniu wskazanych na rys. 105:

Oddziaływanie O_1 wynosi (wedle wz. 47):

$$O_1 = \frac{1}{4{,}50} (2.000 \,.\, 5{,}50 + 4000 \,.\, 3.0 + 2500 \,.\, 1.0 - 1500 \; 1{,}0) = 5333 \text{ kg}$$

Wedle wz. 48:

$$O_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - O_1 = 2000 + 4000 + 2500 + 1500 - 5333 =$$
$$= 10000 - 5333 = 4667 \text{ kg.}$$

Moment na podporze A wynosi:

$$M_1 = - P_1 b_1 = - 2000 \,.\, 100 = - 200000 \text{ kgcm}$$

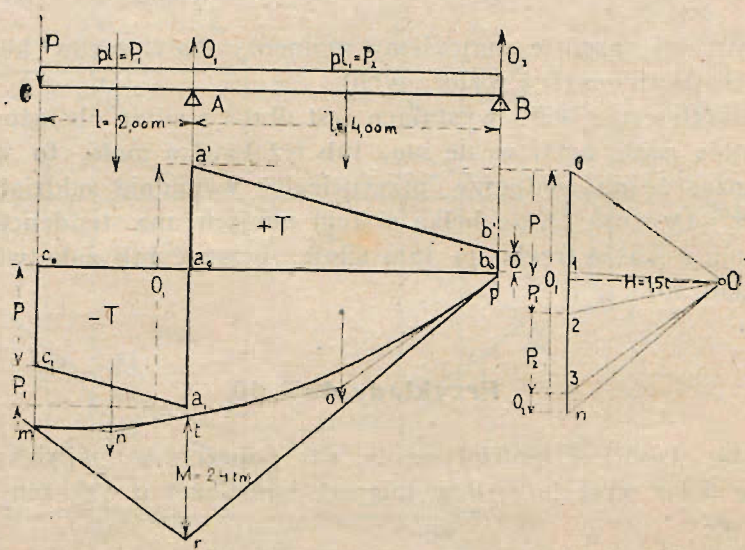
moment na podporze B:

$$M_2 = - P_4 b_4 = 1500 \,.\, 1.00 = - 150000 \text{ kgcm}$$

najw. moment dodatni w punkcie C:

$$Mc = -P_1(b_1 + a_2) + O_1 a_2 = 2000\ (100 + 150) - 5333\ .\ 150 =$$
$$= 500000 + 800000 = +\ 300000\ \text{kgcm}.$$

50. Należy znaleść największy moment działający na belkę jednostronnie wystającą, obciążoną ciężarem jednostajnie rozłożonym p = 200 kg/mb na całej długości oraz ciężarem skupionym P = 1000 kg na wystającym końcu belki (rys. 107):



Rys. 107.

Obciążenie na części belki CA wynosi:

$$P_1 = 2,0\ .\ 200 = 400\ \text{kg}$$

Obciążenie na części belki AB:

$$P_2 = 4,0\ .\ 200 = 800\ \text{kg}.$$

Moment względem punktu B:

$$-P\ .\ (l_1 + l) - P_1 \left(\frac{l_1}{2} + l\right) + O_1 l - P_2 \frac{l_1}{2} = 0,$$

a stąd

$$O_1 = \frac{1}{l}\left[P_1(l_1+l)+P_1\left(\frac{l_1}{2}+l\right)+P_2\frac{l_1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4,0}[1000 \,.\, 6,0 + 400 \,.\, 5,0 + 800 \,.\, 2] = 2400 \text{ kg}.$$

Ponieważ suma obciążeń równa jest sumie oddziaływań, przeto:

$$O_1 + O_2 = P + P_1 + P_2$$

a zatem

$$O_2 = P + P_1 + P_2 - O_1 = 1000 + 400 + 800 - 2400 = 2200 - 2400 = -200 \text{ kg}.$$

Znak „—" oznacza oddziaływanie *ujemne*. Ciężar P jest mianowicie tak wielki, że belka ma tendencję podniesienia się na podporze B; trzeba ją więc tu przytrzymać. Linja sił poprzecznych, wykreślona dla tych wartości, wskazuje punkt zerowy tylko na podporze A; tu więc występuje największy moment. Wynosi on:

$$M = -\left(Pl_1 + P_1\frac{l_1}{2}\right) = -l_1\left(P + \tfrac{1}{2}P_1\right)$$

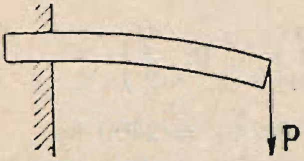
więc:

$$M = -(1000 + \tfrac{1}{2}\,400) \,.\, 2,0 = -2400 \text{ kgm} = -240000 \text{ kgcm}.$$

Obliczając belkę wykreślnie, rysujemy wielobok sił 0 1 2 3 0, przyjąwszy odległość biegunową H = 1,5 t, następnie prowadzimy promienie wieloboku sznurowego mr ∥ 00, m n ∥ 10.... Zamykające łączyć musi punkty przecięcia promieni skrajnych z kierunkami oddziaływań t. j. r i p. Nie otrzymaliśmy zatem nigdzie momentu ujemnego, zaś oddziaływania mają wartość O_1 = 0n i O_2 = n3, z których ostatnie, skierowane ku górze, daje wartość ujemną o wielkości O_2 = — 200 kg. Największy moment występuje na podporze A i wynosi M = rt . H = 1,6 m. 1,5 t = 2,4 tm = 240.000 kgcm.

§ 28. Belka jednym końcem utwierdzona (wspornik).

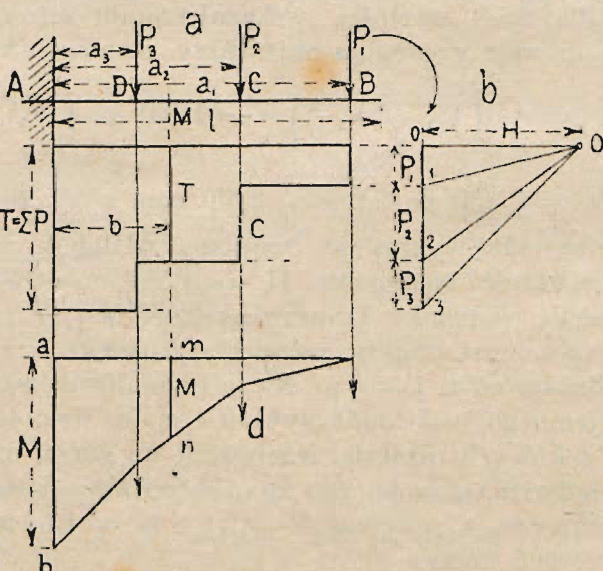
Prócz belek osobno podpartych spotykamy w budownictwie bardzo często belki *wmurowane jednym końcem* w ścianę czyli *wsporniki*, np. belki, podtrzymujące galerje, balkony (rys. 108). Każdy ciężar, umieszczony na takiej belce (i sam ciężar własny belki) stara



Rys. 108.

się obrócić około punktu A w kierunku strzałki (por. rys. 109); w równowadze utrzymuje się belka tylko dzięki ciężarowi muru, jaki spoczywa na jej wmurowanym końcu.

Siły poprzeczne i momenty oblicza się podobnie, jak dla wypadków poprzednich. Dla sił P_1, P_2, P_3 kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy, a promienie tego ostatniego dają wielkość momentu w dowolnym punkcie. Np. długość mn odczytana w skali momentów daje wielkość momentu zginającego w punkcie M; zaś długość a b wielkość momentu na podporze. Jak widzimy, *największy jest tu moment podporowy.*



Rys. 100.

Rachunkowo otrzymamy moment w punkcie M:

$$M = -P(a_1 - b) - P_2(a_2 - b) \qquad 54$$

na podporze

$$\text{najw. } M = -P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 \qquad 55$$

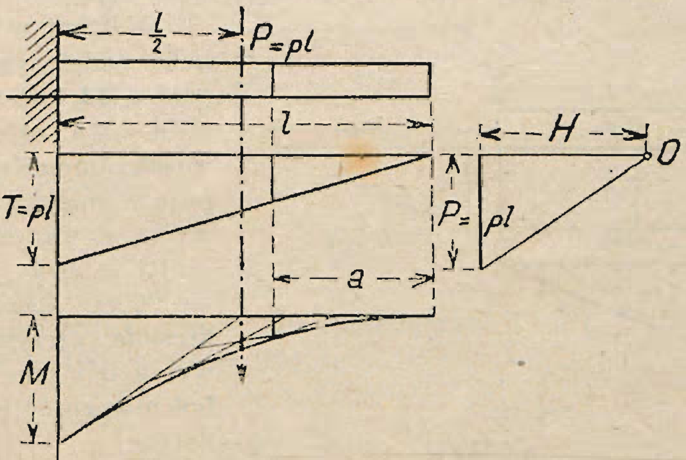
Siła poprzeczna w każdym punkcie równa jest sumie wszystkich sił po jednej (tu prawej) stronie przekroju, więc na długości BC:

$$T = -P_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 56$$

na długości CD:

$$T = -(P_1 + P_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 56a$$

i t. d. Stąd wykreślnie otrzymujemy linję schodkową (rys. 109c). Siła poprzeczna ma znak ujemny, gdyż wszystkie siły działają w dół.



Rys. 110.

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego (rys. 110) znajdujemy moment zginający w punkcie M, skupiając obciążenie na długości a w środku i biorąc jego moment względem punktu M:

$$M = pa \frac{a}{2} = p \frac{a^2}{2} \qquad 57$$

Na podporze moment wynosi:

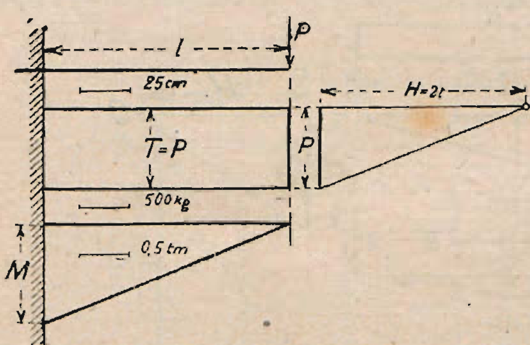
$$\text{najw. } M = pl \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{2} \qquad 58$$

Jeśli całkowite obciążenie pl nazwiemy P, to wzór ten otrzymamy w postaci:

$$\text{najw. } M = \frac{Pl}{2} \qquad 59$$

Przykłady 51 i 52.

31. Ciężar P = 800 kg umieszczony jest na końcu wspornika o długości l = 1,20 cm (rys. 111). Jakie momenty i siły poprzeczne działają na wspornik (por. przykład 25).



Rys. 111.

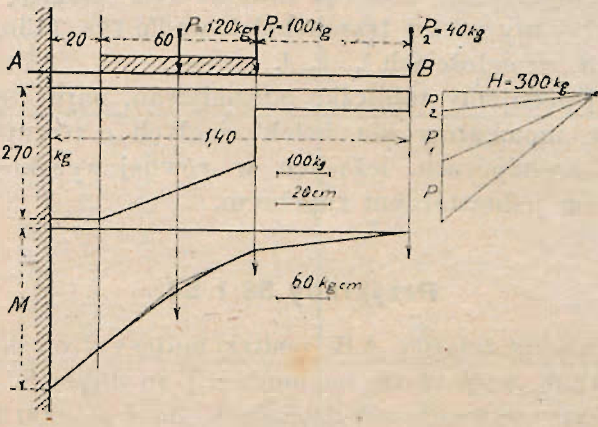
Moment w punkcie belki oddalonym o długość a od końca wynosi M = Pa, zatem największy moment występuje w miejscu wmurowania i wynosi M = = Pl = 800 . 120 = = 96000 kgcm. Wykreślnie otrzymaliśmy wynik ten sam. Wielobok momentów jest trójkątem.

Siła poprzeczna w każdym punkcie belki T = P; wielobok sił poprzecznych ograniczają zatem dwie linje równoległe w odstępie P.

52. Wyznaczyć linję momentów i sił poprzecznych wspornika, obciążonego ciężarem jednostajnie rozłożonym p=200 kg/mb na długości 60 cm, oraz ciężarami skupionymi P_1 = 100 kg i P_2 = 40 kg (por. rys. 112).

Ciężar jednostajnie rozłożony ma wielkość łączną P = 200 . 0,6 = = 120 kg/mb. Dla tego ciężaru oraz dla obu ciężarów skupionych wykreślamy wedle § 28 wielobok momentów, w który następnie wkreśliliśmy na przestrzeni ciężaru rozłożonego (t. j. 60 cm)

parabolę. Największy moment wynosi: $M = P \,.\, \left(0{,}20 + \frac{0{,}60}{2}\right) +$
$+ P_1 \,.\, 90 + P_2 \,.\, 1{,}40 = 120 \,.\, 0{,}50 + 100 \,.\, 090 + 40 \,.\, 1{,}40 =$
$= 206$ kgm $= 20600$ kgcm. Tę samą wartość otrzymaliśmy z wykresu.

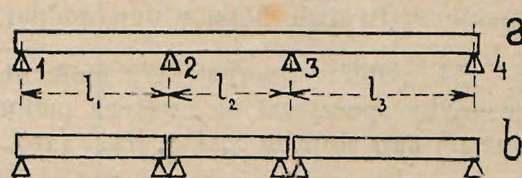


Rys. 112.

Linja sił poprzecznych, podana na rys. 112, nie wymaga bliższych wyjaśnień. Najw. siła poprzeczna $T = P + P_1 + P_2 =$ $= 120 + 100 + 40 = 260$ kg.

§ 29. Belka ciągła.

Jeżeli belka spoczywa na większej ilości podpór, niż dwie, nazywamy ją *belką ciągłą* (rys. 113a). Dokładne obliczenie jej jest znacznie trudniejsze, niż belek prostych; trzeba bowiem zbadać najpierw ugięcie belki (por. § 42), a powtóre oddziaływanie, siły poprzeczne i momenty zależą w znacznym stopniu od wysokości podpór. Jeśli np. podpora środkowa leży niżej od skrajnych, to dźwiga mniej, t. j. oddziaływanie jej jest mniej-



Rys. 113.

sze, niż gdyby leżała w równej wysokości z niemi; zmieniają się też siły poprzeczne i momenty. A że, nawet zbudowawszy podpory w równej wysokości, nigdy nie możemy być pewni, czy która z nich się nie obniży *), przeto rzadko tylko używamy belek ciągłych i raczej stosujemy na ich miejscu odpowiednią ilość belek wolno podpartych. Tak np. zamiast belki ciągłej, podanej na rys. 113a użyjemy raczej trzech belek wedle rys. 113b, o (prawie) tych samych rozpiętościach l_1, l_2, l_3.

Poniżej podajemy tabliczkę oddziaływań, najw. sił poprzecznych i najw. momentów dla belek ciągłych o równych przęsłach $l_1 = l_2 = l_3$, a podporach, leżących w równej wysokości, obciążonych ciężarem jednostajnym zupełnym.

Przykłady 53 i 54.

53. Podciąg żelazny AB, podtrzymujący strop sklepiony między dźwigarami, wspiera się na murach i na słupie S. Należy znaleźć największy moment nań działający dla $z = 600$ kg/m² (rys. 114 i 115).

Wedle tabl. na str. 93 największy moment dla belki ciągłej dwuprzęsłowej wynosi $M = -\frac{1}{8} zl^2$. W danym wypadku $z = 2 \cdot \frac{4.0}{2} \cdot 600 = 2400$ kg/mb, zatem $M = -\frac{1}{8}\, 2400 \cdot 7{,}5^2 =$ $= -1687{,}5$ kgm i na ten też moment należy belkę obliczyć.

Jeżeliby belka była złożona z dwu, podpartych jedna w A i S, druga w S i B, to najw. moment wynosiłby też $M = \frac{1}{8} zl^2$, co znaczy, że dla zwykle używanych w budownictwie lądowem, musielibyśmy dać te same wymiary dla belki ciągłej, co dla dwu belek wolno podpartych. Ponieważ zaś obliczenie belki ciągłej nie jest nigdy zbyt pewne z powodów, podanych w § 29, przeto zastosujemy tu dwie belki wolno podparte.

54. Obliczyć największy moment zgięcia podciągu AB, w razie gdyby spoczywał na czterech podporach, t. j. na murach A i B oraz na *dwu* słupach S_1 i S_2 (rys. 116).

*) Np. może mur w jednem miejscu osiąść więcej, niż w drugiem.

Ilość przęseł	Oddziaływanie	Największe siły poprzeczne	Momenty podporowe *)	Największe momenty dodatnie	
2	$O_1 = O_3 = \frac{3}{8} z l =$ $= 0{,}375\ z l$ $O_2 = \frac{5}{4} z l = 1{,}25\ z l$	$T_1 = T_3 = O_1 =$ $= \frac{3}{8} z l = 0{,}375\ z l$ $T_2 = \frac{1}{2} O_2 = \frac{5}{8} z l$ $= 0{,}625\ z l$	$M_1 = M_3 = 0$ $M_2 = -\frac{1}{8} z l^2 =$ $= -0{,}125\ z l^2$	najw. $+ M =$ $= 0{,}07\ z l^2$	..60
3	$O_1 = O_4 = 0{,}4\ z l$ $O_2 = O_3 = 1{,}1\ z l$	$T_1 = T_4 = O_1 = 0{,}4\, z l$ $- T_2 = + T_3 = 0{,}6\, z l$ $+ T_2 = - T_3 = 0{,}5\, z l$	$M_1 = M_4 = 0$ $M_2 = M_3 =$ $= -0{,}1\ z l^2$	w przęsłach skrajnych najw. $+ M =$ $= 0{,}08\ z l^2$ w przęśle środkowem najw. $+ M =$ $= 0{,}025\ z l^2$	...61

*) Zarazem największe momenty ujemne.

Mamy tu do czynienia z belką trójprzęsłową o równych przęsłach. Momenty podporowe są ujemne i wynoszą wedle wz. 61:

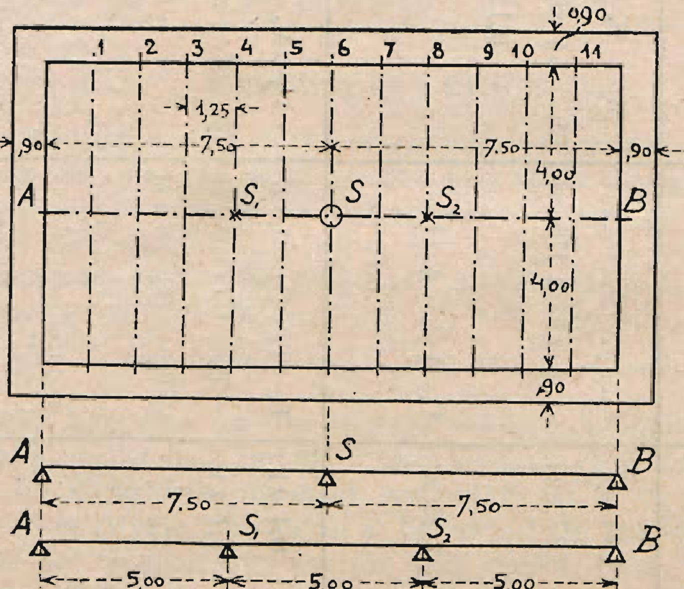
$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{10}\, z\, l^2 = -\frac{1}{10}\, 2400 \,.\, 5{,}0^2 = -6000 \text{ kgm.}$$

Moment dodatni w przęśle skrajnem:

$$M = +0.08\, z\, l^2 = +0{,}08 \,.\, 2400 \,.\, 5{,}0^2 = -4800 \text{ kg m.}$$

Moment dodatni w przęśle środkowem:

$$M' = +0.025\, z\, l^2 = +0{,}025 \,.\, 2400 \,.\, 5{,}0^2 = +1500 \text{ kgm.}$$



Rys. 114, 115 i 116.