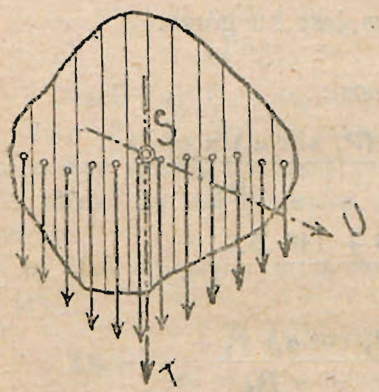
D. Środek ciężkości figur płaskich.

§ 21. Środek ciężkości.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię o jakimkolwiek dowolnym kształcie, wyciętą np. z blachy i podzielmy ją na wąskie równoległe paski w dowolnym kierunku (rys. 78). Każdy z tych pasków posiada pewien ciężar, a zatem posiada pewną siłę proporcjonalną do swojej powierzchni. Wypadkową SK tych wszystkich sił nazywamy *osią ciężkości*.



Rys. 78.

Jeśli ciężary pasków zaczepimy lub jeśli wogóle podział ich przeprowadzimy w innym kierunku, otrzymamy w podobny sposób inną oś ciężkości np. SU, przecinającą się z poprzednią w p. S. Można udowodnić, że *przez ten sam punkt S przechodzą wszystkie osi ciężkości danej figury; nazywamy go środkiem ciężkości*.

Z powyższego wynika ogólny sposób znalezienia środka ciężkości. Dany przekrój dzieli się na dowolne części, najczęściej paski, których środki ciężkości są znane albo łatwo dadzą się wyznaczyć, zaczepia się w nich siły proporcyonalne do powierzchni pasków i znajduje wypadkową tych sił. Oznaczając przez A_1, A_2... powierzchnie poszczególnych pasków, przez A powierzchnię całego przekroju, przez e_1, e_2... odległość ich środków ciężkości od dowolnej podstawy, otrzymamy (wedle wzoru 12) na odległość e środka ciężkości całego przekroju od tej samej podstawy wzór:

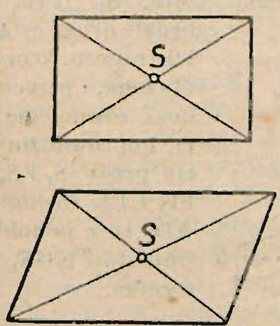
$$e = \frac{A_1 e_1 + A_2 e_2}{A} \quad \ldots\ldots \; 20.$$

Potem w tych samych punktach zaczepia się te same siły, ale w jakimś innym kierunku czyli poprostu obraca się daną figurę i znów szuka wypadkowej. W punkcie przecięcia obu wypadkowych leży środek ciężkości przekroju. Bardzo wąskie paski uważać można za linje proste, których środek ciężkości leży oczywiście w środku ich długości.

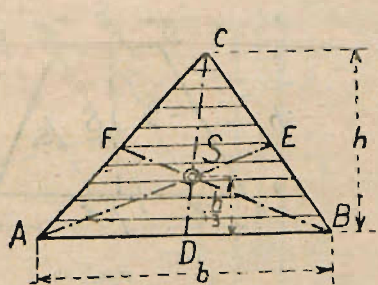
Zamiast rachować można też postąpić tak: Wycina się figurę o danym kształcie z materjału *jednolitego* np. z grubego kartonu i zawiesza w dowolnym punkcie, uważając, aby figura mogła swobodnie obrócić się około punktu zawieszenia. Na pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia, leży środek ciężkości. Zaznaczyć ją można przy pomocy nitki z ciężarkiem, przyłożonej do punktu zawieszenia. Jest to jedna oś ciężkości. Następnie zawiesza się figurę w innym punkcie, również dowolnie przyjętym i postępuje tak samo. Na przecięciu obu osi ciężkości leży środek ciężkości.

§ 22. Środki ciężkości pól niektórych figur płaskich.

1. *Prostokąt* (rys. 79). Podzieliwszy prostokąt na paski o równej szerokości, otrzymujemy równą powierzchnię każdego z nich; wypadkowa zatem leżeć będzie w środku geometrycznym S prostokąta. Podobnie otrzymamy środek ciężkości równoległoboku (rys. 80).



Rys. 79 i 80.



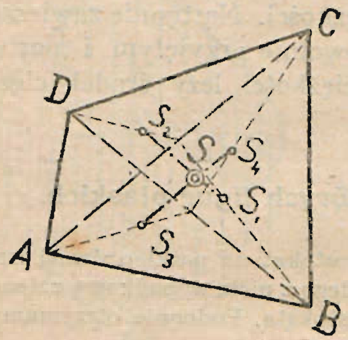
Rys. 81.

2. *Trójkąt.* Podzielmy trójkąt ABC (rys. 81) na wąskie paski równoległe do jednego z boków np. AB. Środek ciężkości każdego z nich leży w środku długości, więc środek ciężkości całego trójkąta leżeć musi na linji CD łączącej środek boku AB z p. C, a tem samem i wszystkie środki pa-

sków. Linja CD jest zatem osią ciężkości. W ten sam sposób dzieląc bok BC i łącząc p. E z A otrzymamy drugą oś ciężkości. Na ich przecięciu leży p. S.

Punkt przecięcia linji CD i AE (a więc i BF) dzieli te linje w stosunku 2 : 1 (np. CS : DS = 2 : 1 i t. d.); zatem linia pozioma MN przechodząca przez środek ciężkości oddalona jest od podstawy o trzecią część odpowiedniej wysokości.

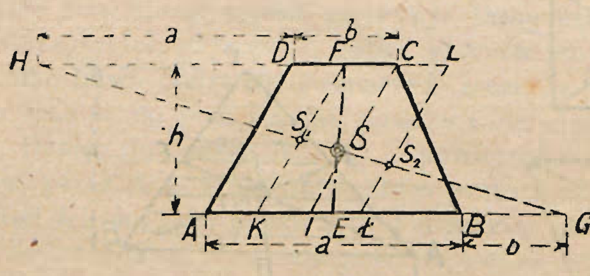
3. *Figura symetryczna* (rys. 79, 84 i n.) Oś symetrji jest tu zawsze osią ciężkości, gdyż po obu jej stronach powierzchnia przekroju rozłożona jest zupełnie tak samo. Jeżeli są dwie osi symetrji (np. rys. 79) to środek powierzchni leży w punkcie ich przecięcia, jeżeli tylko jedna, to trzeba znaleźć drugą oś ciężkości w jeden z podanych wyżej sposobów.



Rys. 82.

4. *Czworobok nieregularny* (rys. 82) dzielimy na dwa trójkąty ABC i ACD o środkach ciężkości S_1 i S_2, a potem na trójkąty ABD i BCD o środkach ciężk. S_3 i S_4. Środek ciężkości czworoboku leży na przecięciu linji S_1 S_2 i S_3 S_4.

5. *Trapez* (rys. 83). Podobnie jak w trójkącie, tak i w trapezie jedną z osi ciężkości jest linja EF, łącząca środek boku CD ze środkiem podstawy AB. Dla znalezienia drugiej osi ciężk. możemy podzielić trapez na równoległobok ADCI o środku ciężkości S_1 i trójkąt BCI o środku ciężk. S_2. Prosta S_1 S_2 będzie drugą osią ciężkości trapezu, która, przedłużona, przecina oba boki równoległe w G i H. Poprowadźmy wreszcie przez S_1 i S_2 proste FK i LL równoległe do AD, to z podobieństwa trójkątów KGS_1 i LGS_2 wynika:



Rys. 83.

$$KS_1 : LS_2 = \frac{h}{2} : \frac{h}{3} = 3 : 2$$

$$KS_1 : LS_2 = KG : LG = 3 : 2, \text{ a stąd}$$

$$LG = \tfrac{2}{3}\ KG, \text{ więc}$$

$$KL = \tfrac{1}{3}\ KG \text{ i } LG = 2\ KL.$$

Jeśli boki równoległe razem wynoszą AB = a, CD = b, to

$$IK = AK = \frac{b}{2} \qquad IL = \frac{a-b}{3}, \text{ więc } LB = 2\ IL = \tfrac{2}{3}(a-b)$$

$$KL = \frac{b}{2} + \frac{a-b}{3} \qquad LG = 2\left(\frac{b}{2} + \frac{a-b}{3}\right) = b + \tfrac{2}{3}(a-b)$$

$$BG = LG - LB = [\,b + \tfrac{2}{3}(a-b)\,] - \tfrac{2}{3}(a-b) = b,$$

Punk G można więc znaleść odcinając na przedłużeniu boku AB długość b. —

Zupełnie podobnie da się udowodnić, że p. H otrzymamy, odcinając długość a na przedłużeniu boku CD. Wynika stąd reguła:

Dla znalezienia środka ciężkości trapezu należy więc poprowadzić a) prostą EF łączącą środki boków równoległych trapezu, b) prostą GH, którą otrzymamy odcinając na przedłużeniu boku górnego bok dolny, a na przedłużeniu dolnego górny — i łącząc otrzymane w ten sposób punkty G i H. Środek ciężkości leży na przecięciu linji EF i GH.

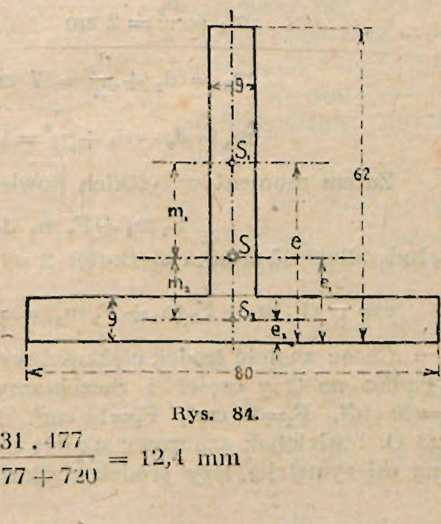
Przykłady 33 — 38.

33. Znaleźć rachunkowo środek ciężkości teownika NP. 8

a) Dzieląc przekrój na dwa prostokąty (por. rys. 84), otrzymamy powierzchnię jednego $F_1 = 9 \,.\, 53 = 477\ mm^2$, $F_2 = 80 \,.\, 9 = 720\ mm^2$ a więc odległość „e" środków ciężkości przekroju od podstawy ze wzoru 20:

$$e_1 = \frac{F_1 e_1 + F_2 e_2}{F_1 + F_2} = \frac{477 \,.\, 35.5 + 720 \,.\, 4.5}{477 + 720} = 16{,}9\ mm.$$

b) Tę samą wartość otrzymamy ze wzoru 7. Wypadkowa dwu sił równoległych o tym samym boku dzieli mianowicie odstęp między niemi w odwrotnym stosunku do ich wielkości. Odległość środków ciężkości obu prostokątów wynosi $m = m_1 + m_2 = 31$ mm; siły zaś zaczepiające w nich są równe powierzchniom prostokątów. Zatem $m_1 : m_2 = F_2 : F_1$, czyli $(m_1 + m_2) : m_2 = (F_2 + F_1) : F_1$, a stąd:



Rys. 84.

$$m_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{F_1 + F_2} = \frac{31 \,.\, 477}{477 + 720} = 12{,}4\ mm$$

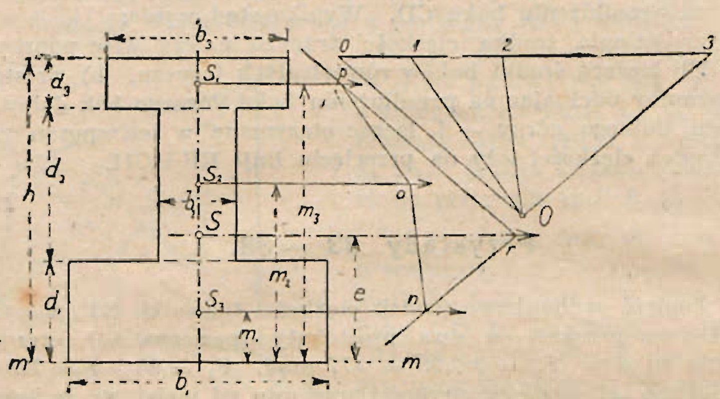
a stąd $e_1 = m_2 + 4,5 = 12,4 + 4,5 = 16,9$ mm
czyli ta sama wartość co wyżej obliczona.

34. Znaleść środek ciężkości przekroju podanego na rys. 85. ($b_1 = 10$ cm, $b_2 = 3$ cm, $b_3 = 7$ cm, $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 6$ cm, $d_3 = 2$ cm).

Powierzchnie poszczególnych prostokątów wynoszą:

$$F_1 = b_1 d_1 = 10.4 = 40 \text{ cm}^2$$
$$F_2 = b_2 d_2 = 3.6 = 18 \text{ cm}^2$$
$$F_3 = b_3 d_3 = 7.2 = 14 \text{ cm}^2$$

Pow. całego przekroju $F = 72$ cm²



Rys. 85.

Odległość poszczególnych prostokątów od osi mm

$$m_1 = \frac{d_1}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$m_2 = d_1 + \frac{d_2}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$m_3 = d_1 + d_2 + \frac{d_3}{2} = 11 \text{ cm}.$$

Zatem moment wszystkich powierzchni względem mm

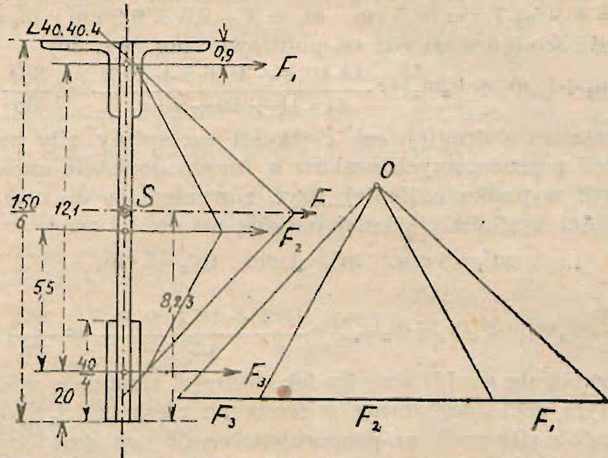
$$F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3 = Fe$$

a stąd odległość środka siężkości S od osi mm:

$$e = \frac{1}{F}(F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3) = \frac{1}{72}(40.2 + 18.7 + 14.11) = 5 \text{ cm}$$

Chcąc znaleść środek ciężkości wykreślnie, dzielimy przekrój w danym wypadku na trzy części i zaczepiamy w ich środkach siły o wielkości $F_1 = 40$ cm², $F_2 = 18$ cm², $F_3 = 14$ cm². Następnie wykreślamy wielobok sił 0123 O, i wielobok sznurowy n o p r; na przecięciu boków skrajnych nr i pr. (i na osi symetrji) leży środek ciężkości ciała.

35. Należy znaleść środek ciężkości przekroju jak na rys. 86, uwzględniając tablice kształtówek.



Rys. 86.

Powierzchnia 2 kątówek 30.30.4 wynosi $F_1 = 2.2,25 = 4,5$ cm²
Powierzchnie blachy $F_2 = 15.0,6 = 9,0$ „
Powierzchnie wstęg żelaznych 40.4 $F_3 = 2.4.0.0.4 = 3,2$ „

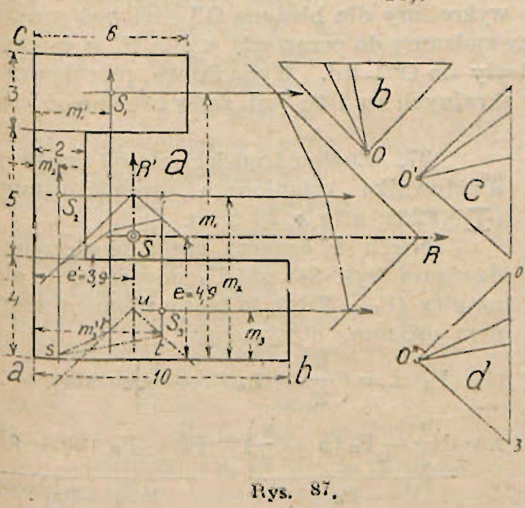
Całk. powierzchnia $F =$ 16,7 cm²

Biorąc moment względem osi przechodzącej przez środek ciężkości wstęg otrzymamy:

$$m = \frac{4.5 \,.\, 12.1 + 9 \,.\, 5.5}{16,7} = 6,22 \text{ cm.}$$

Środek ciężkości oddalony jest zatem od dolnej krawędzi o długość 6,23+2,0=8,23 cm.

Tę samą wartość otrzymaliśmy wykreślnie.



Rys. 87.

36. Znaleść środek ciężkości przekroju podanego na rys. 87.

a) Powierzchnie poszczególnych pasków wynoszą:

$F_1 = 3 \,.\, 6 = 18$ cm²
$F_2 = 5 \,.\, 2 = 10$ cm²
$F_3 = 4 \,.\, 10 = 40$ cm²

Odległości ich środków ciężkości od dowolnie wybranej prostej, np. od podstawy ab:

$$m_1 = 4 + 5 + 1{,}5 = 10{,}5 \text{ cm} \quad m_2 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5 \text{ cm} \quad m_3 = 2 \text{ cm}$$

Odległość środka ciężkości od podstawy (por. wz. 20)

$$e = \frac{1}{F}(F_1m_1 + F_2m_2 + F_3m_3) = \frac{18.10{,}5 + 10.6{,}5 + 40.2}{18 + 10 + 40} = \frac{334}{68} = 4{,}9 \text{ cm}$$

Dla znalezienia drugiej osi ciężkości zaczepimy siły proporcjonalne do powierzchni poszczególnych pasków w innym dowolnie obranym kierunku. W danym wypadku najlepiej użyć równoległego do ac. Otrzymamy wtedy odległości środków ciężkości pasków od ac:

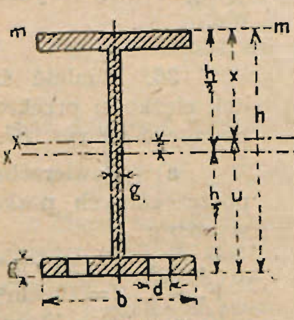
$$m'_1 = 3 \text{ cm.} \quad m'_2 = 1 \text{ cm} \quad m'_3 = 5 \text{ cm.}$$

a stąd:

$$e' = \frac{1}{F}(F_1m_1' + F_2m_2' + F_3m_3') = \frac{18.3 + 10.1 + 40.5}{68} = \frac{264}{68} = 3{,}9 \text{ cm.}$$

b) Wykreślnie znajdziemy środek ciężkości zapomocą wieloboku sznurowego. W tym celu zaczepiamy w środkach ciężkości $S_1 S_2 S_3$ poszczególnych prostokątów siły poziome proporcjonalne do ich powierzchni $F_1 F_2 F_3$ kreślimy wielobok sił i dla przyjętego bieguna O wielobok sznurowy, z którego otrzymamy jedną oś ciężkości SR. Następnie te same siły zaczepiamy w innym kierunku, np. pionowym. Ponieważ jednak siły następować będą teraz w porządku F_2, F_1, F_3, przeto w tym też porządku kreślimy drugi wielobok sił z biegunem R′ i znajdziemy drugą oś ciężkości SO′. Na przecięciu linii SR i SR′ leży środek ciężkości całego przekroju S, zgodnie z poprzednim rachunkowym wynikiem.

Moglibyśmy jednak znaleść pionową oś ciężkości SR′ nie zmieniając wcale porządku sił. Wykreślmy mianowicie wielobok sił pionowych $F_1 F_2 F_3$, nie zmieniając ich porządku i wykreślmy dla bieguna O″ wielobok sznurowy. Pierwszy bok tegoż odprowadzamy do przecięcia z siłą F, w punkcie r, stąd kreślimy bok rs równoległy do O″1 itd. Wypadkową, przechodzącą przez punkt przecięcia boków skrajnych ru i tu jest znów ta sama oś ciężkości pionowa SR′.



Rys. 87.

37. Znaleść środek ciężkości przekroju dwutownika osłabionego dwoma nitami. ($\perp$ NP28a; nity ϕ 20 mm).

Niech F oznacza znaną powierzchnię dźwigara (rys. 88) zaś F_n powierzchnię obu na nity ($F_n = 2$ dg), to biorąc moment względem osi mm, otrzymamy

$$(F - F_n)\, x = F\frac{h}{2} - F_n\left(h - \frac{g}{2}\right) \text{ a stąd}$$

$$x = \frac{F\frac{h}{2} - F_n\left(h - \frac{g}{2}\right)}{F - F_n} = \frac{Fh - F_n\,(2h - g)}{2\,(F - F_n)}$$

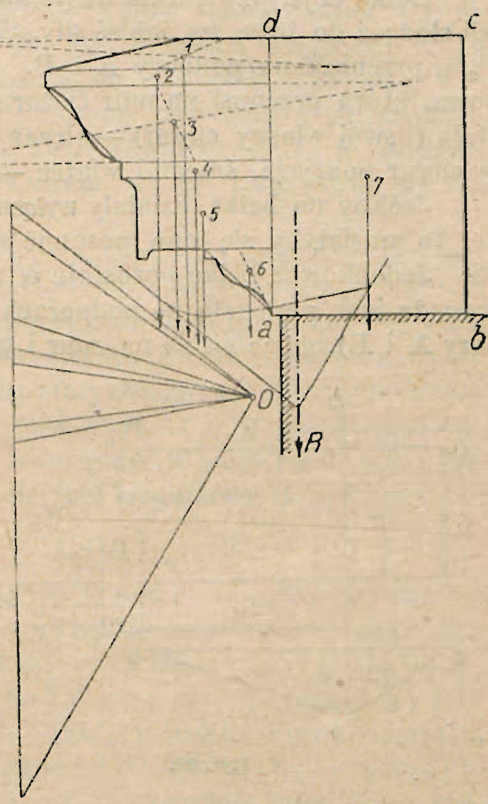
W przykładzie szczegółowym otrzymamy

$F = 78{,}85\ cm^2$ (por. tablice kształtówek) $F_n = 2 . 2{,}0 . 1{,}7 = 6{,}8\ cm^2$

$$x = \frac{78{,}75 . 14 - 6{,}8 . (28 - 0{,}85)}{78{,}85 - 6{,}8} = \frac{1103{,}9 - 184{,}6}{78{,}85 - 6{,}8} = 12{,}76\ cm.$$

Środek ciężkości przesunął się zatem o odległość $S = \frac{h}{2} - x = 14{,}0 - 12{,}76 = 1{,}24$ cm od pierwotnego położenia.

38. Należy zbadać, czy środek ciężkości gzymsu, podanego na rys. 89, jest podparty na murze poniżej leżącym.



Rys. 89.

W tym celu wystarczy zbadać, czy pionowa oś ciężkości przechodzi przez podstawę. Dzielimy więc przekrój kamienia na paski, przyczem dla większej wygody z prostokąta podpartego bezpośrednio a b c d tworzymy osobną powierzchnię. Pozostałe paski o kształtach prostokątnych, trapezowych i trójkątnych otrzymaliśmy, wyrównując łuki w linje proste i opuszczając zupełnie małe występy, prawie nie wpływające na położenie środka ciężkości. Powierzchnie pasków wynoszą: $F_1 = 183\ cm^2$, $F_2 = 132\ cm^2$, $F_3 = 548\ cm^2$, $F_4 = 87\ cm^2$, $F_5 = 364\ cm^2$, $F_6 = 91\ cm^2$, $F_7 = 2090\ cm^2$, Środki ciężkości trapezów F_1 i F_3 znaleźliśmy wedle § 22—5, środek trójkąta F_6 wedle § 22_1—3. Wreszcie zapomocą wieloboku sił z biegunem O wyznaczyliśmy pionową oś ciężkości R, przyczem zmieniliśmy porządek sił wedle kolejnego następstwa ich kierunków (F_2, F_3, F_1 F_4...) podobnie, jak w przykładzie 36.

Z wykresu okazało się, że pionowa oś ciężkości przecina jeszcze podstawę, że zatem środek ciężkości jest podparty.

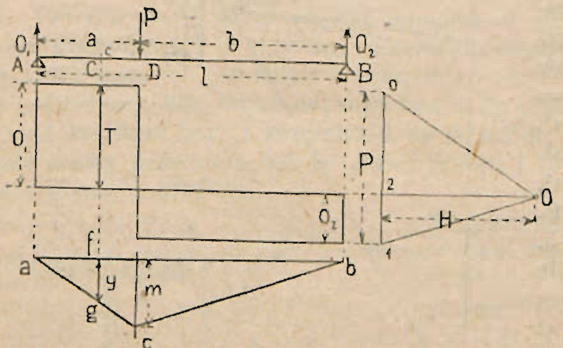
E. Belki najprostsze.

§ 23. Wykreślne wyznaczenie oddziaływań, sił poprzecznych i momentów belki prostej obciążonej ciężarami skupionymi.

Przystąpimy obecnie do omawiania sił, działających w płaszczyźnie na t. zw. *belkę prostą*.

Belką czyli dźwigarem nazywamy konstrukcyjną część budowli służącą do tego, by jakieś siły, ciężary, działające na nią, P_1, P_2..., przenieść na podpory A i B. Taką belką jest np. belka stropowa, która przenosi na mur ciężar stropu, ciężary, jakie na niej stoją (i swój własny ciężar),—więzar dachowy, przenoszący na mury ciężar pokrycia, śniegu i wiatru,—most i t. d.

Jeśliby na belkę działały *wyłącznie obciążenia* jako siły zewnętrzne, to musiałyby się one posunąć w kierunku wypadkowej tych sił. Jednakowoż belka pozostaje w równowadze, a pozostaje dlatego, że jest podparta na podporach (na rys. 90 mamy dwie podpory A i B), gdzie ciśnie na mur i gdzie zupełnie tak samo ciśnie mur na nią (por. przykłady 22 i 31). Ciśnienie to, jakie mur wywiera na belkę, nazywamy *oddziaływaniem* podpór lub *odporem*). Dla obliczenia wymiarów belki potrzebne jest wyznaczenie tego oddziaływania.



Rys. 90.

Jeśli oddziaływanie występujące przy obciążeniu pionowem są też pionowe, to belkę nazywamy *belką prostą*.

Ponieważ belka pod wpływem obciążenia pozostaje w równowadze tylko dzięki oddziaływaniom, które równoważą działanie obciążenia, przeto zadanie: „znaleść oddziaływanie" znaczy znaleść siły, powstające pod wpływem obciążenia w punktach podparcia belki i równoważące to obciążenie“ (por. przykłady 22 i 31).

Weźmy najpierw pod uwagę belkę prostą, obciążoną tylko jednym ciężarem P.—Postępując wedle § 13, przyjmujemy dla siły P = 01 biegun O i kreślimy doń promienie O1 i Oo, oraz równolegle do nich promienie a c i c b wieloboku sznurowego. Jeśli oddziaływania O_1 i O_2 mają równoważyć się z siłą P, to wielobok ten musi się zamknąć. a nastąpi to wtedy, gdy połączymy jego punkty skrajne a i b; dlategoteż tę prostą nazywamy *linją zamykającą* lub krótko *zamykającą*. Łączy ona oba oddziaływania t. j. siły O_1 i O_2, a więc równoległy do niej promień ciągu sił łączyć musi biegun O z punktem 2 dzielącym oba oddziaływania. Wykreśliwszy ten promień O2, otrzymujemy tem samem wielkość oddziaływań: $O_1 = 20$ i $O_2 = 12$, które równoważą siłę P. Zamyka się bowiem wtedy ciąg sił (gdyż suma sił 20 i 12 równa się sile P = 01) oraz ciąg sznurowy.

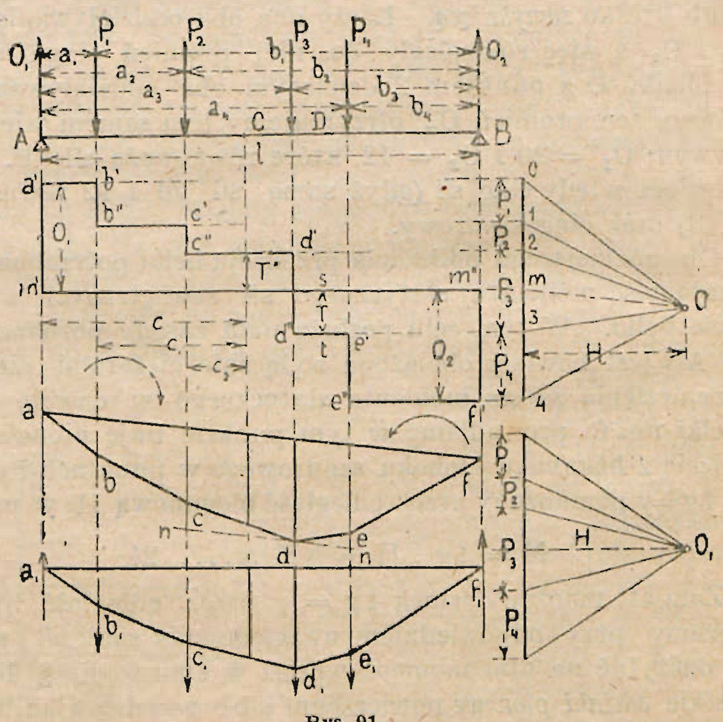
Dla późniejszego obliczenia przekroju belki potrzebna jest także znajomość momentu statycznego sił zewnętrznych w każdym punkcie belki. W tym celu posłużą nam zasady poznane w § 17; belka AB jest bowiem obciążona wyłącznie ciężarami pionowymi. Dla znalezienia zatem momentu statycznego w dowolnym punkcie belki np. C, prowadzimy w tym punkcie linję pionową aż do przecięcia z bokami wieloboku sznurowego w punktach f i g, a odcinek f g=y pomnożony przez odległość biegunową H w punkcie C:

$$M = fg \,.\, H = yH \; \ldots\ldots \; 21$$

Zamiast mnożyć odcinek f g = y przez odległość biegunową H możemy przy odpowiedniem uwzględnieniu skali sił i skali długości odczytać na nim moment wprost w kgm wedle § 18. Wtedy wszystkie *odcinki pionowe* powierzchni a b c przedstawiać będą bezpośrednio *momenty* w odnośnych punktach belki. Powierzchnia ta określa zatem wprost rozkład momentów wzdłuż belki przy danem obciążeniu dlatego nazywa się *powierzchnią momentów*. Największy moment występuje w punkcie działania ciężaru i wynosi $M_n = mH$, a przekrój belki w tym punkcie nazywamy ***przekrojem niebezpiecznym***, gdyż tu zachodzi największe niebezpieczeństwo złamania belki.

Moment działający na belkę nazywamy często także *momentem zginającym*, gdyż stara się on wygiąć belkę i to tem więcej, im jest większy.

Podobnie postępuje się dla obciążenia belki kilku ciężarami skupionymi (rys. 91). Znajdujemy przedewszystkiem wielobok sznurowy a b c d e f, prowadzimy zamykającą a f i z bieguna O kreślimy równoległy doń promień O m, który odetnie oba oddziaływania $O_1 = mO$ i $O_2 = 4m$. Odcinki pionowe powierzchni a b c d e f,



Rys. 91.

t. zw. powierzchni momentów, zamkniętej wielobokiem sznurowym, odczytane w odpowiedniej skali, przedstawiają momenty zginające w poszczególnych punktach belki.

Dla obliczenia belki potrzebne jest wprowadzenie jeszcze jednego pojęcia. Znajdźmy mianowicie dla dowolnego punktu C wypadkową T wszystkich sił działających po jednej np. lewej stronie przekroju. Jeśli na belkę poziomą działają wyłącznie siły pionowe, to wypadkowa ta będzie t. zw. siłą poprzeczną.

Jeśli p. C leży między punktem zaczepienia sił P_2 i P_3, to po lewej jego stronie działają siły O_1, P_1 i P_2, a więc wypadkowa T tych sił równa ich sumie będzie siłą poprzeczną. Ale siły O_1, P_1 i P_2 działające po *lewej* stronie p. C_1 są w równowadze z siłami P_3, P_4 i O_2 po *prawej* stronie, więc i ich wypadkowa jest równa tej samej sile poprzecznej T, tylko z przeciwnym znakiem. Wynika stąd, że—jeśli chodzi o bezwzględną wielkość, to obojętną jest rzeczą czy obliczając T, uwzględnimy siły po lewej stronie przekroju, czy po prawej. Najczęściej uwzględniamy lewą i znak po tej stronie jest miarodajny dla siły poprzecznej.

Pomiędzy *dwiema sąsiedniemi siłami skupionemi* niema na belce żadnej siły; dla wszystkich przeto punktów na tej przestrzeni wartość siły poprzecznej pozostaje ta sama, równa sumie sił po jednej (lewej) stronie przekroju badanego C. Np. dla wszystkich punktów pomiędzy P_2 a P_3

$$T'' = O_1 - P_1 - P_2 \qquad 22$$

W wieloboku sił otrzymamy tę wartość

$$T'' = m0 - 01 - 12 = m2.$$

Odetnijmy tę wielkość $T'' = m2$ pod przekrojem badanym C i poprowadźmy przez jej końce proste poziome m'm'' i c''d' na długości pomiędzy siłami P_2 a P_3, to każdy pionowy odcinek poprowadzony między P_2 a P_3 przedstawiać będzie wielkość siły poprzecznej w danem miejscu belki. Podobnie możemy uczynić i w innych miejscach, a wtedy otrzymalibyśmy wykres rozkładu sił poprzecznych na całej belce.

Wykres ten wykonujemy jednak zwykle inaczej. Poprowadźmy mianowicie z bieguna O promienie O2 i Om, *równolegle* do *boków* cd *i* af *wieloboku sznurowego* przeciętych przekrojem CC', to odcinek m2 na wieloboku sił przedstawi nam *siłę poprzeczną w danym punkcie.* (Jest to sposób znalezienia wykreślnego siły poprzecznej, używany bardzo często zwłaszcza przy obciążeniach rozłożonych, o czem mówić będziemy poniżej). Prowadząc z m i 2 na długości między P_2 a P_3 linje poziome, otrzymamy znowu wykres ten sam, co poprzednio, wskazujący wielkość siły poprzecznej w każdym punkcie na długości między P_2 a P_3. Znajdźmy tak samo siłę poprzeczną T dla innych przekrojów belki i wykreślmy odpowiednie poziome a'b' b''c' ... e''f' to linja schodkowa otrzymana w ten sposób będzie przedstawiać rozkład sił poprzecznych na całej belce. Np. siła poprzeczna w punkcie D przedstawia się w postaci odcinka st, odciętego linią sił poprzecznych na pionowej przeprowadzonej przez D.

W miejscu, w którem suma odjemników w wyrazie

$$T = O_1 - P_1 - P_2 - P_3 - \dots$$

jest mniejsza od 0, siła poprzeczna przyjmuje wartość ujemną. Na rys. 91 następuje to w punkcie zaczepienia siły P_2, co uwidacznia się w rysunku przez to, że wykres sił poprzecznych przesuwa się pod linją m' m''. (Por. np. rzędną st.)

Wyżej wspomnieliśmy, że przekrój, w którym moment zginający przybiera największą wartość, nazywamy przekrojem niebezpiecznym. Znajduje się on tam, gdzie prosta nn przeprowadzona równolegle do zamykającej af jest styczna do wieloboku momentów, t. j. w punkcie d. Promień O2 równoległy do promienia linji sznurowej cd bezpośrednio na lewo od d leży tuż ponad punktem m, zaś promień O3 równoległy do de tuż pod m. Siła poprzeczna na lewo od przekroju niebezp. ma znak „+”, na prawo znak „—”. *Przekrój niebezpieczny leży więc w punkcie, w którym siła poprzeczna zmienia znak*, na rys. 91 w punkcie działania siły P_3.

Niekiedy wygodnie jest mieć wykres momentów taki, aby linja zamykająca af była *pozioma*. Nie mając oddziaływań, a więc promienia Om wieloboku sznurowego, nie możemy tego uzyskać, postępujemy przeto tak: Wykreślamy w zwykły sposób wielobok sił z biegunem O i wielobok sznurowy abcdef, a prowadząc promień Om // af znajdujemy oddziaływanie m0 i 4m. Następnie kreślimy *drugi wielobok* sił, przyjmując jednak biegun O_1 *na poziomej* przechodzącej *przez znany już punkt* m. Wielobok sznurowy a'b'c'd'e'f' wykreślony dla tego bieguna O_1 ma zamykającą af poziomą, gdyż równoległą do poziomej linji O_1m.

§ 24. Rachunkowe wyznaczenie sił poprzecznych i momentów dla układu ciężarów skupionych.

Pierwszem zadaniem przy obliczeniu jakiejkolwiek belki, a więc i tutaj, jest znalezienie oddziaływań. Jak wiemy, oba oddziaływania muszą być w równowadze z siłami zewnętrznemi, w danym więc wypadku wyznaczenie ich nastąpi wedle § 19. Jeśli ma nastąpić równowaga, to moment wszystkich sił działających (t. j. obciążeń i oddziaływań) względem któregolwiek punktu na danej płaszczyźnie musi się równać zeru. Ustawmy równanie momentów względem B, to:

$$O_1 l - P_1 b_1 - P_2 b_2 - \ldots = 0,$$

a stąd oddziaływanie

$$O_1 = \frac{1}{l}(P_1 b_1 + P_2 b_2 + \ldots) \qquad 23$$

Drugie oddziaływanie B najlepiej i najłatwiej znaleźć na mocy zasady, że dla równowagi suma wszystkich sił (obciążeń i oddziaływań) musi być równa zeru, t. j. musi być:

$$O_1 + O_2 - P_1 - P_2 - \ldots = 0 \qquad 24$$

a stąd:

$$O_2 = P_1 + P_2 + \ldots - O_1 \qquad 25$$

Wielkość oddziaływania O_2 znaleźć można także niezależnie od oddziaływania O_1 z równania momentów odniesionego od punktu A. Wtedy będziemy mieli:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots - O_2 l = 0$$

$$O_2 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots}{l} \qquad 23$$

Jeśli w ten sposób obliczymy O_2 (z wz. 23a), to możemy skontrolować dobroć obliczenia na mocy wz. 24. Musi się spełnić mianowicie równanie:

$$P_1 + P_2 + \ldots = O_1 + O_2$$

czyli:

$$P_1 + P_2 \ldots = \frac{1}{l}(P_1 b_1 + P_2 b_2 + \ldots + P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{l}\Big[P_1 (a_1 + b_1) + P_2 (a_2 + b_2) + \ldots\Big]$$

ale
$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = .., = l_1$$
a stąd:
$$P_1 + P_2 + ... = \frac{1}{l} (P_1 l + P_2 l + ... = \frac{1}{l} (P_1 + P_2 ...) = P_1 + P_2 ...$$

Podobną kontrolę należy wykonywać o ile możności jak najczęściej przy wszystkich obliczeniach statycznych.

Siłę poprzeczną T w dowolnym punkcie C znajdziemy, obliczając sumę sił działających po lewej stronie danego punktu C; wtedy:
$$T'' = O_1 - P_1 - P_2 \qquad 26$$

Moment zginający zaś obliczamy, biorąc sumę momentów wszystkich sił działających po lewej stronie przekroju ze względu na dany punkt C; wtedy:
$$M'' = O_1 c - P_1 c_1 - P_2 c_2 \qquad 27$$

Jeśli na belkę działa tylko *jeden ciężar* (rys. 90) wtedy otrzymamy wzory powyższe w następującej formie:
$$O_1 = P\frac{b}{l} \qquad O_2 = P\frac{a}{l} \qquad 28$$

Siła poprzeczna między lewą podporą a punktem D:
$$T = O_1 \qquad 29$$

Siła poprzeczna między punktem D a podporą prawą:
$$T = O_1 - P = P\frac{b}{l} - P = \frac{P}{l}(b-l) = -P\frac{a}{l} = -O_2 \qquad 29a$$

Moment w punkcie działania ciężaru:
$$M = O_1 a = \frac{a\,b}{l} P \qquad 30$$

Jeśli na belkę działa *jedna siła w środku belki,* to otrzymamy (rys. 92):
$$\text{Oddziaływanie } O_1 = O_2 = \frac{P}{2} \qquad 31$$

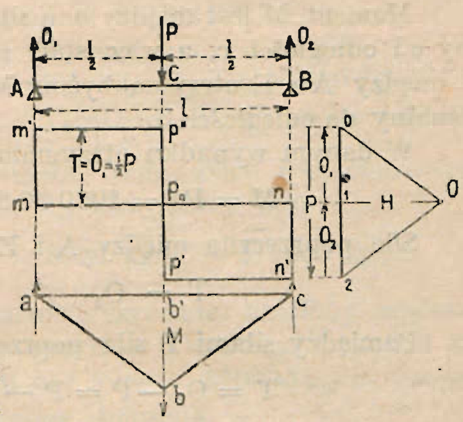
Siła poprzeczna między A a C:
$$T = O_1 = \frac{P}{2} \qquad 32$$

Siła poprzeczna między C a B:

$$T = \frac{P}{2} - P = - \quad 32a$$

Moment w środku belki:

$$M = O_1 \frac{l}{2} \frac{Pl}{4} \quad 33$$



Rys. 92.

Przykłady 39—41.

39. Obliczyć oddziaływanie siły poprzeczne i momenty belki wolno podpartej o długości l = 5 m, obciążonej ciężarem P = 2t stojącym w środku belki (rys. 92):

$$O_1 = \frac{1}{2} P = 1t$$

$$T = 1t \text{ wzgl. } T' = -1t$$

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{1}{4} \; 2{,}0 \,.\, 5{,}0 = 2{,}5 \text{ tm} = 250000 \text{ kgcm.}$$

Wykreślnie znaleźliśmy wartości te same.

40. Znaleść najw. moment zgięcia poprzecznicy mostowej skutkiem ciężaru kół wozu stojących na niej wedle rys. 93:

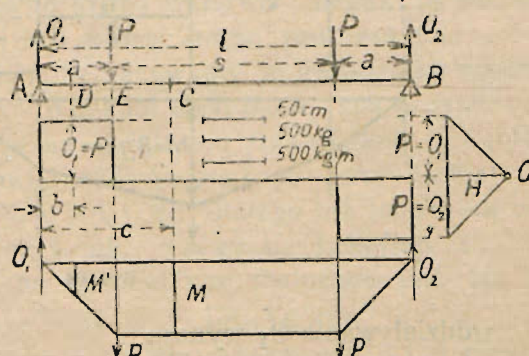
P = 1000 kg,

odstęp kól s = 1,80 m.

Oddziaływania

$O_1 = O_2 = P = 1000$ kg.

Moment w punkcie C w odległości c od podpory lewej:



Rys. 93.

$$M = O_1c - P\,(c-a) = Pc - P\,(c-a) = Pa \quad 34$$

Moment M jest między obu siłami (t. j. na długości s) niezależny od odległości c, a więc stały i wynosi $M = Pa$. Dla punktu D między A a E otrzymalibyśmy $M' = O_1 b = Pb$, wprost proporcjonalny do odległości b.

W danym wypadku otrzymamy:

$$M = Pa = 1000 \,.\, 0{,}60 = 600 \text{ kg cm.}$$

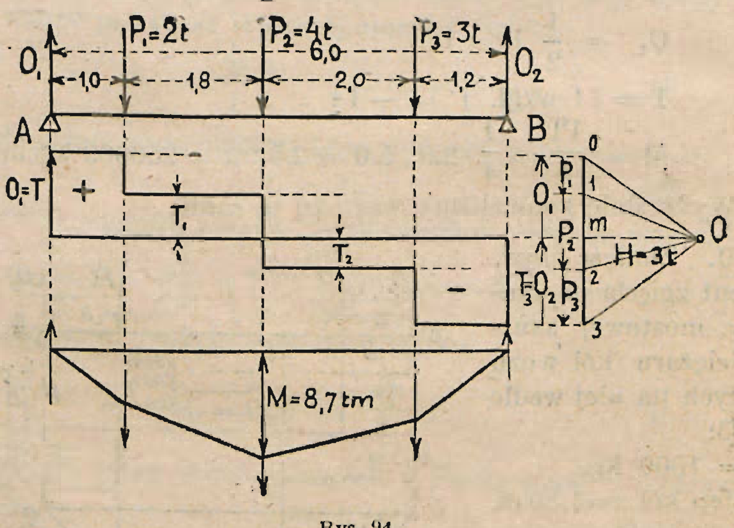
Siła poprzeczna między A i E wynosi:

$$T = O_1 \qquad 35$$

Pomiędzy siłami P siła poprzeczna równa się zeru, gdyż

$$T = O_1 - P = P - P = 0 \qquad 35a$$

41. Dźwigar o rozpiętości 6,00 m przenosi obciążenie wedle rys. 94. Znaleźć jego momenty i siły poprzeczne.



Rys. 94.

Oddziaływanie O_1 wynosi:

$$O_1 = \frac{1}{6{,}0}\,(2000 \,.\, 5{,}0 + 4000 \,.\, 3{,}2 + 3000 \,.\, 1{,}2) = 4400 \text{ kg}$$

Zatem oddziaływanie O_2:

$$O_2 = 2000 + 4000 + 3000 - 4400 = 4600 \text{ kg}$$

Siła poprzecz. między A a P_1 wynosi $T = O_1 = 4400$ kg
„ „ „ P_1 a P_2 „ $T_1 = O_1 - P_1 = 2400$ kg
„ „ „ P_2 a P_3 „ $T_2 = O_1 - P_1 - P_2 = 1600$ kg
„ „ „ P_3 a B „ $T_2 = O - {}_1P_1 - P_2 - P_3 = -B = -4600$ kg

Największy moment występuje tam, gdzie siła poprzeczna zmienia znak, t. j. pod ciężarem P_2; utrzymamy tam:

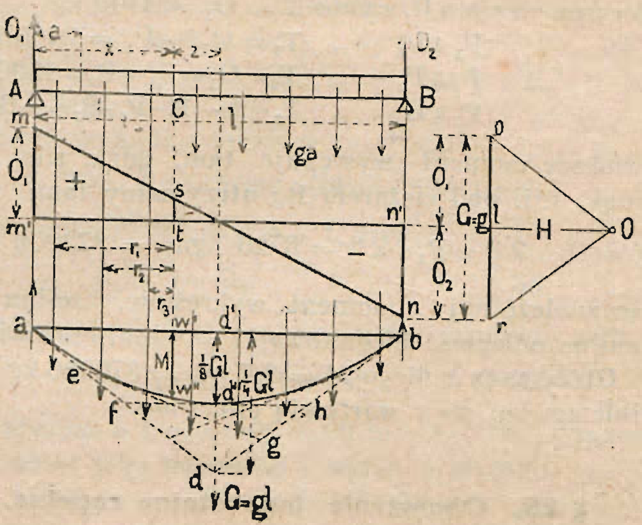
$$M = O_1 \cdot 2{,}8 - P_1 \cdot 2{,}8 = 8720 \text{ kgm} = 872000 \text{ kgcm}.$$

Chcąc znaleźć najw. moment wykreślnie, kreślimy wielobok sił, przyjmując odległość biegunową H = 6 ton, oraz wielobok momentów. Otrzymany z niego M = 8,7 cm = 870000 kgcm, co prawie zupełnie zgadza się z wartością obliczoną.

§ 25. Obciążenie jednostajne zupełne.

Często mamy do czynienia z obciążeniem innego rodzaju, niż ciężary skupione, o których dotychczas mówiliśmy. Weźmy np. pod uwagę belki stropowe, które dźwigają ciężar podłogi na całej swej długości, lub dach, który obciążony jest na całej lub na części powierzchni warstwą śniegu. Tu spotykamy się z obciążeniem *rozłożonem* na całej belce albo na jej części. Jeśli ten ciężar rozłożony jest równo (np. równo gruba warstwa śniegu), to obciążenie nazywamy *jednostajnem* lub *równomiernem*; jeśli zaś nadto rozciąga się na *całą długość belki*, to nazywamy je *jednostajnem zupełnem* lub *jednostajnem całkowitem*. Wielkość obciążenia, jaka przypada na jednostkę długości nazywamy *obciążeniem jednostkowem*; jednostkę długości zaś bardzo często *jednostką bieżącą* (np. 1 m bieżący, co zwykle pisze się 1 mb, 1 cm b i t. d.); dlatego też jednostką obc. jednostkowego jest 1 kg na 1 mb, co pisze się 1 kg/mb, 1 t/mb, 1 kg/cmb i t. d. Jeśli np. na długości 1 m rozłożone jest 150 kg, to napiszemy: ciężar jednostkowy p = 150 kg/mb.

Dla obliczenia oddziaływań, siły poprzecznej T i momentu M przyjmiemy, że takie obciążenie ciągłe składa się z szeregu sił skupionych, działających jedna tuż obok drugiej. Niech obciążenie jednostkowe wynosi g kg/mb, to jego wypadkowa na dłu-



Rys. 95.

gości a wynosi g a i zaczepia w połowie długości a (rys. 95); obciążenie więc na długości całej belki l równe jest zatem:

$$G = g l \;\ldots\ldots\; 36.$$

Obciążenie to rozkłada się równo na obie podpory, a zatem oba oddziaływania są równe i wynoszą:

$$O_1 = O_2 = \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{2} g l \;\ldots\ldots\; 37.$$

Siła poprzeczna w dowolnym punkcie C równa się sumie sił zewnętrznych po lewej stronie przekroju (z uwzględnieniem znaków) t. j. oddziaływaniu O_1 (działającemu do góry) pomniejszonemu o obciążenie na części belki od podpory A do punktu C, więc:

$$T_m = O_1 - g x = \frac{gl}{2} - gx = g\left(\frac{l}{2} - x\right) = g z \;\ldots\ldots\; 38.$$

gdzie z równe jest oddaleniu punktu C od środka belki.

Wynika stąd, że *siła poprzeczna* w dowolnym punkcie belki *dla obciążenia całkowitego jednostajnego równa jest obciążeniu jednostkowemu pomnożonemu przez odległość tego punktu od środka belki.* Na podporze więc (t. j. właściwie niezmiernie blizko od podpory) siła poprzeczna $T = \frac{gl}{2} = O_1$; natomiast w środku belki, gdzie $z = 0$ siła poprzeczna $T = 0$; wreszcie na podporze B: $T = -\frac{gl}{2} = -O$ gdyż z mierzyć musimy w kierunku przeciwnym niż poprzednio, t. j. ujemnym.

Wykreślnie przedstawić możemy rozkład sił poprzecznych odcinając na podporze A siłę $O_1 = \frac{gl}{2}$ w górę od przyjętej osi poziomej $m'm'$, na podporze B tę samą siłę $-\frac{gl}{2}$ pod osią i łącząc otrzymane w ten sposób punkty m i n linją prostą. Rzędne pionowe między osią a linją mn przedstawiają wielkość siły poprzecznej w każdym punkcie. (Np. st jest siłą poprzeczną w punkcie C; w środku rzędna jest równa zeru, gdyż $T = 0$).

Dla obliczenia momentu zgięcia M w danym punkcie, robimy to samo przyjęcie. Wtedy moment równa się momentowi oddziaływania zmniejszonemu o moment obciążenia na długości x. Długość x podzielić możemy na pewną ilość (np. 3) części, a obciążenia tych części uważać za ciężary skupione g_1, g_2, g_3... Moment tych sił względem punktu C będzie wynosić: $g_1r_1 + g_2r_2 + g_3r_3 + \ldots$ Zamiast brać moment szeregu sił, możemy jednak wyznaczyć ich wypadkową i obliczyć jej moment względem C. Ponieważ siły $g_1, g_2 \ldots$ są równe, przeto ich wypadkowa leży w środku długości x, a wielkość jej równa się sumie składowych obciążeń, czyli całemu obciążeniu na długości x t. j. gx. Moment tej wypadkowej względem punktu C wynosi więc $gx \cdot \frac{x}{2} = g\frac{x^2}{2}$. Moment zginający w punkcie C równa się zatem:

$$M = O_1x - g\frac{x^2}{2} = g\frac{l}{2}x - g\frac{x^2}{2} = \frac{g}{2}x\,(l - x) \qquad 39$$

Największy moment obliczony wedle tego wzoru przypada w środku belki. Otrzymujemy tam mianowicie $x = \frac{l}{2}$, a wtedy:

$$M = \frac{1}{2}g \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = g\frac{l^2}{8} \qquad 40$$

Nazwijmy całe obciążenie belki G; to G = gl; możemy więc napisać

$$M = gl\frac{l}{8} = \frac{Gl}{8} \qquad 41$$

Zatem *największy moment belki wolno podpartej przy obciążeniu całkowitem jednostajnem równa się obciążeniu całej belki pomnożonemu przez $\frac{1}{8}$ część rozpiętości belki.*

Dla celów praktycznych najwygodniej jest wyznaczyć obciążenie G i oddziaływanie O_1 i O_2 w *kilogramach*, zaś momenty M w *kilogramcentymetrach*. W tym celu najlepiej jest obliczać;

a) Obciążenie całkowite G = gl kgm, mnożąc g wyrażone w $^{kg}/_{mb}$ przez długość l wyrażoną w *metrach*.

b) Oddziaływanie $O_1 = O_2 = \frac{G}{2}$ kg.

c) Największy moment ze wzoru $M = \frac{1}{8}$ Gl, wyrażając G jak poprzednio w *kg*, natomiast l w *centymetrach*.

Dla wykreślnego znalezienia linji momentów moglibyśmy podobnie jak przy obliczeniu analitycznym przyjąć cały szereg sił skupionych, zastępujących obciążenie jednostajnie rozłożone i wykreślić dla nich wielobok sił i wielobok sznurowy, któryby tem samem odpowiadał linji momentów. Skrajne promienie sznurowe będą wtedy równoległe do skrajnych promieni wieloboku sznurowego (Oo // ad_1 On // bd).

Tę żmudną pracę możemy jednak ominąć uwzględniając wzór 39. Obliczmy mianowicie dla poszczególnych punktów belki wartości momentów wedle tego wzoru i odetnijmy pionowo od linji a b w przyjętej skali momentów, a przekonamy się, że końce ich leżą na paraboli, której największa rzędna (w środku) wynosi $\frac{gl^2}{8} = \frac{Gl}{8}$. Parabola ta jest więc zupełnie zgodna z wielobokiem sznurowym*), jakibyśmy uzyskali wedle sposobu wyżej podanego; styczne podporowe będą więc równoległe do odpowiednich promieni wieloboku sił. Najłatwiej wykreślić ją w następujący sposób:

---

*) Wielobok sznurowy jest tutaj właściwie *krzywą sznurową*.

Z punktów a i b leżących na dowolnej poziomej prowadzimy równoległe do Oo i On aż do przecięcia się w punkcie d. Podzielmy długości ad i bd, na zupełnie dowolną, ale. tę samą, ilość części (np. 4) i połączmy kolejno punkty podziału np. e z g, f z h, a następnie wrysujmy w wielobok w ten sposób powstały linję krzywą styczną do boków ad, eg, fh ..., to ta linja krzywa będzie parabolą, a rzędne jej np. w′w″ będą odpowiadały momentom w poszczególnych punktach. W samym środku otrzymamy rzędną $\frac{gl^2}{8}$.

Z własności paraboli wynika, że długość d′d równe jest dwukrotnej długości d′d″. Parabolę momentów wykreślić można zatem nawet bez uprzedniego rysowania wieloboku sił: wystarczy odciąć w środku belki długość $d'd = 2 \times \frac{1}{8}\, gl^2$ i narysować parabolę, zastosowawszy wyżej opisany sposób kreślenia.

Dla obciążenia *ciężarem skupionym* G w środku belki, otrzymujemy wedle wz. 33 największy moment $M = \frac{Gl}{4}$. Jeśli zatem całe obciążenie jednostajnie obciążonej belki $G = gl$ zaczepimy w jej środku jako ciężar skupiony, to uzyskany moment będzie dwa razy większy niż dla ciężaru rozłożonego; w wykresie (rys. 95) otrzymalibyśmy moment równy d′d, zaś wykres momentów a d b. Zatem chcąc wyznaczyć linję momentów dla obciążenia jednostajnie rozłożonego, możemy *wykreślić linję momentów dla ciężaru skupionego o równej wielkości* $G = gl$ *i wkreślić w nią parabolę styczną*, która będzie linją momentów ciężaru jednostajnie rozłożonego.

§ 26. Obciążenie jednostajne częściowe.

Przy obciążeniu, nie rozmieszczonem na całej belce, czyli t. zwanem obciążeniu częściowem postępujemy podobnie, jak przy całkowitem. Obciążenie na długości a wynoszące p a (rys. 96), zastępujemy ciężarem skupionym o tej samej wielkości $P = a\,p$ i wykreślamy linję momentów a c b. Linja ta ważna jest jednak tylko na długości c b_1. Na długości obciążenia a c zastępujemy ją parabolą wykreśloną (jak w poprzednim paragrafie), a otrzymana w ten sposób powierzchnia ad″f″e″b będzie powierzchnią momentów.