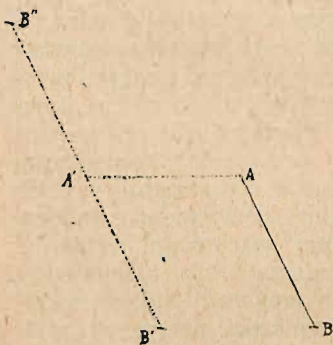


VIII. MECHANIKA TEORETYCZNA W PIERWSZEJ POŁOWIE XIX W.

Omawiane w poprzednim wykładzie dzieło Lagrange'a dało mechanice analitycznej postać zupełnie ukończonoj umiejętności. Jednym wzorem objęte zostały wszystkie zadania statyki i z jednego także, ściśle z tamtym związanego, wypływały rozwiązania wszystkich zadań dynamicznych. Objawiła się w tem dziele cała potęga analizy, mogącej przez jedno ogólne rozważanie, rozwiązywać wszystkie poszczególne zagadnienia; równocześnie wszakże uwydatniły się jej niedostatki, często nie pozwalające godzić jej metod ze specjalnemi warunkami zadań, — powodujące niejasności i niedostateczną przejrzystość wyników. To też gdy Lagrange, zmuszony był pracowicie wywodzić z ogólnej zasady prędkości przygotowanych, sześć znanych równań warunkowych równowagi, — Poinson, zwróciwszy się do metody syntetycznej, wyprowadził te równania geometrycznie z możliwości poszczególnych rodzajów ruchu ciała.

Ludwik Poinson, urodzony w r. 1777, profesor analizy i mechaniki w Szkole Politechnicznej paryskiej, wydał w r. 1804 dzieło: *Elements de statique*. Po zgonie Lagrange'a w r. 1813 wszedł na jego miejsce do Akademji. W 1852 został senatorem, a zmarł w 1859. Do

mechaniki wprowadził Poinot nowe pojęcie pary sił. Wynikło ono z następującego rozważania. Jeżeli wszystkie działające siły są przyłożone do jednego punktu ciała, lub przynajmniej w jednym punkcie schodzą się ich kierunki, to można je łatwo dodawać do siebie zapomocą równoległoboku sił i graficznie wyznaczyć ogólne ich działanie. W przeciwnym razie, trzeba przed dodawaniem sprowadzić najprzód wszystkie siły do jednego punktu ciała, a to jest nie możebne bez wprowadzenia nowej siły. Jeżeli chcemy siłę AB przenieść do punktu A' tegoż samego ciała, to niemożemy zrobić tego inaczej, jak przyjmując, że w A' przyłożone są dwie siły, równe, równoległe



Rys. 33.

i w przeciwnych kierunkach działające. Otrzymuje się więc oprócz siły $A'B'$ przyjętej, jako przeniesiona siła AB , jeszcze system sił AB i $A'B''$. Te równe i wprost przeciwne siły równoległe nie mają żadnej wypadkowej, nie można ich zastąpić żadną siłą pojedynczą, nie wywołują więc żadnego przesunięcia, lecz tylko obrót ciała. Poinot nazwał ten system parą sił. Jej moment obrotu jest propor-

cjonalny do iloczynu, z wielkości sił działających przez ich odległość. Wykazać można przez proste wykreślenie, że para sił na swojej płaszczyźnie albo też na płaszczyznach równoległych może być dowolnie przesuwana lub obracana, — że więc działanie jej zależy tylko od jej momentu i położenia jej płaszczyzny. Jeżeli wyobrazimy

sobie do tej płaszczyzny wystawioną prostopadłą i na niej odciętą długość, proporcjonalną do wielkości momentu, to ta długość i jej kierunek wyznaczają w zupełności parę sił. Poincot nazwał tę długość osią pary. Dodawanie par sił, położonych na płaszczyznach równoległych, sprowadza się tym sposobem do dodawania długości. Dalej, przez prosty wykres dowiedzionem zostało, że pary, połączone na płaszczyznach do siebie nierównoległych, sprowadzić się dają do jednej pary, której oś otrzymaną być może z osi par składowych zapomocą równoległoboku sił.

Jakiegokolwiek siły działają na ciało, sprowadzić je można zawsze do jednej siły i jednej pary sił. Warunkiem więc równowagi jest zniknięcie siły wypadkowej i pary wypadkowej, czyli, wyrażając się geometrycznie, niemożność ruchu postępowego i obrotowego. Rzucając wypadkową sił na trzy osie spółrzednych, a wypadkową par na trzy płaszczyzny spółrzednych i przyrównywując do zera każdą z otrzymanych sześciu wielkości, otrzymujemy sześć warunków równowagi mechaniki analitycznej, które wyrażają, że ani przesunięcia w trzech prostopadłych do siebie kierunkach, ani obrót około osi równoległych do tych kierunków nie mogą mieć miejsca.

W drugim wydaniu statyki z r. 1824 pomieścił jeszcze Poincot oddzielną rozprawę: *Mémoire sur la composition des moments et des aires*, a to tak dla rozjaśnienia teorii par sił, jak i dla podania ogólnych nader interesujących twierdzeń, dotyczących wielkości pary wypadkowej oraz dla rozwinięcia zastosowania pary sił do zadań dynamicznych. Znaczenie i wartość swej nowej metody w mechanice, scharakteryzował w przedmowie: „Dana będzie“ mówił: „sposobność do przekonania się, że para sił ma znaczenie nie pojedynczego przypadku, lecz istotnego elementu, którego brakło dotąd w mechanice... Zauważyć przytem łatwo, że składanie

par sił odpowiada w dynamice składaniu ruchów obrotowych... i że następnie, ponieważ ruchu ciała nie możemy sobie inaczej uzmysłwić, jak tylko jako równoczesne posuwanie i obrót około jednego punktu, przeto równoległobok sił i równoległobok par stanowią dwie nierozdzielne zasady zupełnej analizy ruchu ciała wymiarów skończonych, wynikające z samej natury rzeczy. Wkońcu zauważyć będzie można, jak łatwą jest metoda par sił i o ile jest wyższą od dawnej metody, jeżeli zobaczymy, jak z niej wypływają bezpośrednio: wszystkie własności równowagi, twierdzenie Eulera o odniesionej do poszczególnych osi sumie momentów systemu sił, moment maximum i płaszczyzna pól niezmienna Laplace'a, -- jak ona daje nam możność uzupełnić te części mechaniki nowymi twierdzeniami, odnoszącemi się do tak nazwanej przez nas osi centralnej momentów i do jedynej płaszczyzny pola minimum, wśród nieskończonej liczby pól maximum, względem wszystkich ognisk możliwych w przestrzeni".

Do rozważania widocznego ruchu ciała, możliwego przechodzenia tegoż z jednego oznaczonego położenia do drugiego, o czem także była wzmianka w przedmowie, której urywki przytoczyłem, przystąpił Poincot wyczerpująco w innej poważnej rozprawie: *Théorie nouvelle de la rotation des corps* z r. 1834. Traktuje tam przede wszystkim składanie i rozkładanie obrotów, jakoteż ruch ciała około punktu stałego. Dla tego ostatniego rozwija najprzód charakterystyczne twierdzenie, według którego obrót ciała około punktu stałego urzeczywistniony być może przez toczenie się nierozdzielnie związanego z ciałem ostrokągu po innym ostrokągu stałym, którego wierzchołek schodzi się zawsze z wierzchołkiem pierwszego.

Zainicjowanych przez Poincota we Francji metod geometryczno-syntetycznych trzymano się stale w Anglii

od czasów Newtona, przykładając największą wagę do wyczerpującego rozwiązywania poszczególnych zadań mechaniki, zaczerpniętych z fizykalno-technicznej rzeczywistości. Pogląd Poinsota na tę sprawę taki był mniej więcej. Nie dość jest sprowadzić zadanie dynamiki do układu równań, zawierających obok wyrazów skończonych co najwyżej kwadratury, i nierównie więcej chodzi o przedstawienie badanego ruchu w sposób widoczny tak, aby się miało przed oczyma cały jego przebieg, w czasie i przestrzeni. Dążenia te popierane były wymaganiami pedagogicznymi, częściowo przynajmniej, gdyż często w podręcznikach lub zbiorach zadań spotykano wiele przykładów schematycznych, nie zaczerpniętych z doświadczenia, lub podawane były dla wprawy pewne ogólne i ściśle metody całkowania, w nader małym stopniu uwzględniające stosunki rzeczywiste. Kierunek syntetyczny w mechanice popierany był także potrzebami fizyki i techniki, które w XIX stuleciu, obok wynikających dawniej wyłącznie z astronomji, coraz więcej się uwydatniały. Doprowadziły one nawet do wytworzenia odrębnych gałęzi mechaniki: fizycznej i technicznej, stojących względem mechaniki teoretycznej nie w przeciwieństwie, lecz w zwykłym stosunku nauk stosowanych do ich podstaw teoretycznych.

Różne sposoby weszły w użycie przy rozwiązywaniu zadań dynamiki. Były to najprzód obrazowania geometryczne, związane z rozkwitem nowej geometrii i szkołą twórcy geometrii wykreślnej Gasparda Monge'a. Podawana dziś na wstępie podręczników mechaniki teoria wektorów opiera się na pracach Poinsota, Chasles'a i Moebius'a. Prace Poinsot'a ugruntowały czysto geometryczną teorię ruchu, nieuwzględniającą ani czasu, ani siły. Niektóre jej szczegóły podawał już Arystoteles. Galileusza teoria spadku ciał była także przeważnie geome-

tryczną a wiele podobnych twierdzeń spotyka się w piśmach Descartes'a, Roberval'a, Huyghensa, Jana Bernoulliego i Eulera. Na potrzebę wytworzenia nauki o ruchu bez względu na siły, które ten ruch powodują, pierwszy zwrócił uwagę filozof Kant, dzieląc w swej pracy *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* z r. 1786 całą naukę o ruchu na cztery części: 1) foronomję, uważającą ruch jako czystą ilość, 2) dynamikę, traktującą ruch jako jedną z własności materji, 3) mechanikę, rozważającą związek między materją a siłą i 4) fenomenologję, o ruchu jako zjawisku, przedstawiającem się naszemu zmysłom. Nazwa „foronomji“ używaną była już dawniej na oznaczenie nauki o ruchu, i mówiąc o Eulerze, wspomniałem wydane w 1716 dzieło Herrmana pod tym tytułem, zawierające rozwiązania zadań mechaniki metodą syntetyczną. Słynny organizator zwycięstwa z czasów rewolucji francuskiej, matematyk Lazare Carnot, w dziele *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* z r. 1803, rozwijał pomysł czysto geometrycznej nauki o ruchu, a nasz filozof Hoene Wroński, w pierwszym numerze swego czasopisma *Sphinx* z r. 1818, w artykule: *System architektoniczny bezwzględny wiedzy ludzkiej*, podzielił matematykę czystą na geometrję, algorytmję i foronomję. Ta ostatnia nazwa utrzymywała się dość długo, aż dopiero Ampère w swoim *Essai sur la philosophie des sciences* z r. 1834 wprowadził nazwę kinematyki (od greckiego *κίνημα*=ruch), odtąd powszechnie przyjętą.

Matematyk francuski Michał Chasles (1793—1880), twórca nowej geometrji, zbogacił kinematykę pojęciami: osi chwilowej obrotu i ślizgania i teorią środka chwilowego obrotu, której jeden przypadek rozważany był już przez Descartes'a; związał własności układów linii prostych,

płaszczyzn i punktów z ruchem ciała stałego. W Niemczech, przez czas pewien jedynym przedstawicielem kinematyki był astronom lipski Jan August Moebius (1790—1868). Wprowadził on do nauki pojęcie wektora i pracował nad metodami analizy geometrycznej, które stały się drugim środkiem pomocniczym, używanym do wywodów przy rozwiązywaniu zadań mechaniki. Metod tych dostarczyły: analiza wektorów Hamiltona, rachunek barycentryczny Moebiusa i nauka o wielkościach rozciągłych matematyka szczecińskiego Hermana Grassmana (1809—1877).

Obok obrazowań geometrycznych przyjęły udział w rozwoju kierunku syntetycznego mechaniki pojęcia czysto mechaniczne, na czele których stoi pojęcie pracy. Pierwszy określił je ściśle inżynier i profesor Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu Gustaw Coriolis (1792—1843), autor dwóch dzieł: *Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines* z r. 1829 i *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* z r. 1835. W tem drugim dziele opracowany był wyczerpująco ruch kuli na płaszczyźnie poziomej z uwzględnieniem tarcia. Zbogacił nadto Coriolis mechanikę twierdzeniem o przyspieszeniu, powtarzanem we wszystkich podręcznikach. Praca, której pojęcie ustalił, używaną była już dawniej przy rozwiązywaniu zadań, jako iloczyn z siły przez drogę przebieżoną. Carnot w r. 1781 nazywał ten iloczyn momentem aktywności. Monge — skutkiem dynamicznym, dopiero inżynier wojskowy francuski Jan Wiktor Poncelet (1788—1867) w swych wykładach w Szkole Artylerji w Metz wprowadził w r. 1826 nazwę pracy, którą wszakże spotyka się wcześniej, w pismach angielskiego lekarza Tomasza Younga. W dziele Younga *Lectures on natural philosophy* z r. 1807 czytamy: „We wszystkich prawie przypadkach,

napotykanych w mechanice praktycznej, praca, którą należy zużyć dla wywołania ruchu, jest proporcjonalna nie do momentu ale do energii ruchu, jaką daje... wyraz energja (wszakże) użyty być winien na oznaczenie iloczynu z masy lub ciężaru ciała przez kwadrat z liczby, wyrażającej jego prędkość."

Tę równoważność pracy i siły żywej (lub energii) użył Poncelet jako wyborny środek pomocniczy do rozwiązywania zadań mechaniczno-technicznych w swem słynnem dziele: *Introduction à la mécanique industrielle* (Metz 1829), stawiając w niem ogólną zasadę przenoszenia pracy mechanicznej, jako prawo podstawowe. Co do ogólności tej zasady wyraża się on charakterystycznie: „Zasada prędkości przygotowanych, stosowana do rzeczywistych ruchów ciał, przy uwzględnieniu wszystkich sił wewnętrznych i zewnętrznych, które ruch przyspieszają i opóźniają, prowadzi istotnie przez proste i czysto elementarne sumowanie otrzymanych ilości pracy do zasady przenoszenia pracy, do równości sumy sił żywych ($m v^2$) i zdwojonej sumy algebraicznej wszystkich prac. Rozważana w ten sposób, mieści w sobie ta zasada wszystkie prawa wzajemnego działania sił i to w takim kształcie, który ułatwia ich zastosowanie w mechanice technicznej, to jest w tej części mechaniki, którąby właśnie nazwać należało nauką o pracy sił.“ Przy końcu teoretycznej części swego dzieła wraca raz jeszcze Poncelet do sprawy przekształcenia pracy i wykazuje, że nigdy ani pracy, ani siły żywej nie można z niczego otrzymać ani jej absolutnie zniszczyć i że wszelkie wytwarzanie pracy lub siły żywej polega tylko na ich przekształceniu.

W rzędzie obrazowań mechanicznych stanęły także metody statyki wykreślnej, polegające właściwie na zastosowaniu wieloboków sił i wieloboków sznurowych.

Opracowywali je: Lamé i Clapayron, Poncelet, Brix i inni, opierając się na twierdzeniu Varignonona, o którym wspominałem, mówiąc o jego *Nouvelle mécanique* z roku 1725. Poncelet starał się z szeregów wyrażań rachunkowych wyciągać wykresy — a w swych wykładach w Szkole Wojskowej w Metz stosował wielobok sznurowy do wyznaczania środka ciężkości.

Obok zapoczątkowanego przez Poincota we Francji kierunku geometryczno-syntetycznego rozwijały się dalej w pierwszej połowie XIX w. metody analityczne. Na drogę, wytkniętą przez Lagrange'a, wstępuje najprzód jego uczeń Simeon Dionizy Poisson (1781—1840), autor wydanego w r. 1811 w Paryżu *Traité de Mécanique* i wielu rozpraw z dziedziny matematyki, fizyki i astronomji. Przez poparcie wywodów analitycznych przystępnym tekstem i licznymi figurami książka Poissona przyczyniła się więcej do rozpowszechnienia zasad nauki, od podstawowego dzieła Lagrange'a. Wyłożona w niej balistyka utrzymuje się dotąd w podręcznikach. Poisson zbogacił mechanikę licznymi poszukiwaniami. Zajmując się teorią przeszkód w biegu ciał niebieskich, zapoczątkował przekształcenie równań dynamicznych Lagrange'a, dokończone następnie przez Hamiltona; rozwiązał powtórnie zadanie ruchu obrotowego ciała stałego około jakiegokolwiek punktu jego osi niezależnie od rozwiązania, jakie podał Lagrange; pierwszy badał ruch ciała ważkiego w zetknięciu z płaszczyzną stałą i opracował z pełnem powodzeniem teorię bąka, kręcącego się na płaszczyźnie, którą to teorię usiłował zapoczątkować Euler; podał pierwszą teorię ogólną uderzenia ciał sztywnych. Równania Poissona, odnoszące się do ruchu obrotowego, zastosował później Cournot (1801—1877) do przypadku, gdy się uwzględnia tarcie, a Puiseux (1820—1883) do ruchu bryły obrotowej na płaszczyźnie poziomej gładkiej.

badając przytem głównie zmiany kąta, jaki oś obrotu czyni z pionową. Imię Poissona nosi także jedno z równań teorii potencjału.

Słynny matematyk getyngeski, Karol Fryderyk Gauss (ur. 1777, zm. 1855) wprowadził do mechaniki nową zasadę, obejmującą jednocześnie ogólne prawo równowagi i ruchu i wyrażającą je w sposób najogólniejszy. Ogłoszona w r. 1829 zasada ta, nazwana przez autora zasadą najmniejszego przymusu, brzmiała: „Ruch układu punktów materialnych, związanych ze sobą w jakikolwiek sposób i poddanych jakimkolwiek wpływowi, odbywa się w każdej chwili w najdoskonalszej możliwej zgodności z ruchem, jakiby miały te punkty, gdyby były wszystkie swobodne, to jest przy jak najmniejszym przymusie, przyjmując za miarę przymusu, ponoszonego w ciągu nie skończenie małego czasu, sumę iloczynów z masy każdego punktu przez kwadrat ze zboczenia tego punktu od położenia, któreby zajął będąc zupełnie swobodnym.“ Sprawiedliwy sąd o tej zasadzie ogłosił sam jej autor w tych słowach: „Zasada prędkości przygotowanych przekształciła wszelkie zagadnienia statyki na kwestję matematyki czystej, a przez zasadę d'Alemberta dynamika zostaje sprowadzoną do statyki. Stąd wynika, że żadna zasada podstawowa równowagi i ruchu w istocie swej nie może być różna od tych dwóch zasad i, jakakolwiek ona jest, można ją zawsze uważać za ich następstwo, mniej lub więcej pośrednie. Nie należy jednak wnosić stąd, żeby wszelkie inne zasady były już niepotrzebne.“ Stopniowo też uznawano potrzebę zasady Gaussa, którą Bertrand w trzecim wydaniu *Mechaniki Analitycznej* Lagrange'a z r. 1855 podniósł jako najogólniejsze i najzgrabniejsze wyrażenie, streszczające prawa równowagi i ruchu, a którą Hertz przyjął w nieco zmienionym kształcie za podstawę swej dynamiki. *Mechanika*

oprócz zasady najmniejszego przymusu zawdzięcza Gaussowi teorię przyciągania ciał sferoidalnych jednorodnych i udoskonalenie teorii potencjału.

Podczas gdy zasada Gaussa z wolna zaledwie się przyjmowała, nowa zasada, a właściwie przekształcenie i rozszerzenie jednej z dawniejszych, przez Williama Rowana Hamiltona, profesora astronomji w Dublinie (1805—1867) zyskało szybko rozpowszechnienie. Zasadę najmniejszego działania Maupertuisa, nazywając ją zasadą „stałego działania“, zastąpił Hamilton zasadą szerszą, której dał nazwę zasady „zmiennego działania“. Pierwsza brzmiała: „Przy każdym swobodnym ruchu układu, z oznaczonego położenia początkowego do położenia innego, działanie jest z konieczności stałe (t. j. jego zmienność znika), jeżeli siły wewnętrzne układu są stałe (t. j. takie, że w równych czasach wykonywują równą pracę)“. Zasada zmiennego działania wyznacza znów zmienność tych sił, jeżeli początek i koniec ruchu swobodnego, jak również praca sił, są zmienne. Lecz wyraz „działanie“, jak to już zauważono za czasów Maupertuisa, nie był tu właściwym; najważniejszym i decydującym w tej sprawie było matematyczne ujęcie samego pojęcia przez Hamiltona. Gdy on wyraził działanie przez funkcję sumy natężeń i sił żywych układu, okazało się, że nie tylko zasada najmniejszego działania, zasada d'Alemberta i równania ruchu Lagrange'a są w gruncie rzeczy identyczne, lecz że nadto kształt, jaki Hamilton nadał swej zasadzie, jest najdogodniejszy przy powszechnem ich stosowaniu. Według Kirchhoffa wielki pożytek zasady Hamiltona polega na tem, że z jej pomocą, do różniczkowych równań ruchu układu punktów materialnych, zamiast spólrzędnych prostokątnych, względnie łatwo wprowadzić można inne zmienne. Helmholtz twierdzi, że zasada najmniejszego działania (w Hamiltonowskim kształ-

cie) jest najprawdopodobniej ogólnem prawem wszystkich procesów natury (co najmniej wszystkich odwracalnych). „Wynika stąd już teraz,” mówi Helmholtz: „że możność stosowania zasady najmniejszego działania wykracza daleko poza granice mechaniki ciał ważkich i że wysoko sięgające nadzieje Maupertuisa co do powszechnej, absolutnej stosowalności jego zasady zbliżają się do urzeczywistnienia, jakkolwiek niedostatecznymi były wywody mechaniczne a pełnemi sprzeczności spekulacje metafizyczne, na których Maupertuis usiłował w swoim czasie opierać swą zasadę.”

Prace Hamiltona nad przekształceniem i całkowaniem równań różniczkowych dynamiki miały równie, jak wzmiankowane poprzednio prace Poissona w tym zakresie, charakter analitycznej ogólności. Ruch punktu na danej powierzchni przedstawił Hamilton przez cztery równania różniczkowe pierwszego rzędu między pięcioma zmiennymi, nazwane równaniami kanonicznymi. Ścisłe i dogodne sformułowanie pojęcia „działania”, które uczyniło pożyteczną jego zasadę, osiągnął Hamilton przez wprowadzenie nowych funkcji, a przede wszystkim funkcji, nazwanej przezeń funkcją sił. Wyprzedził go w tem matematyk angielski Jerzy Green (1793—1841), który w r. 1828 funkcji tej używał i dał jej nazwę funkcji potencjalnej. Wszakże tak na prace Greena, jak i na prace Hamiltona, początkowo nie zwracano uwagi. Ogólne rozpowszechnienie zyskała ta funkcja dopiero w r. 1840, gdy Gauss dał jej nazwę potencjału. Zajmowali się nią: Lagrange, Laplace i Poisson. Matematycy określili potencjał jako funkcję, której pochodne, wzięte względem spólrzędnych, są równe składowym siły działającej, równoległym do osi spólrzędnych. Jako siłę działającą uważano ciężenie, a potencjał używany był tylko do rozwiązywania zagadnień przyciągania.

Przekształcaniem i całkowaniem równań różniczkowych dynamiki zajmował się jeszcze w pierwszej połowie XIX w. profesor matematyki w Królewcu Gustaw Jacobi (1804—1851). Gdy wszakże Poisson miał na względzie astronomję, a Hamilton optykę i obaj prowadzili swe badania w związku ze światem rzeczywistym, to u Jacobiego panował wszechwładnie kierunek abstrakcyjno-matematyczny. Wyraził on ściśle zasadę Maupertuisa; forma kanoniczna równań ruchu doprowadziła go do twierdzenia, noszącego jego imię; rozwiązał ostatecznie zadanie ruchu bryły około punktu stałego przez użycie funkcji eliptycznych, których był twórcą.

O oparciu na trwałych podstawach nauki o tarcu, równocześnie z powstaniem mechaniki analitycznej mówiłem w poprzednim wykładzie. Dla rozjaśnienia wątpliwości, jakie pozostawać mogły po doświadczeniach Coulomba, oraz dla rozciągnięcia poszukiwań w tym przedmiocie na większą liczbę ciał, podjął tę sprawę w latach 1831-4, francuski oficer artylerji Morin i wykonał w Metz szereg nowych doświadczeń, opartych na użyciu metod Coulomba, z wprowadzeniem wszakże wielu ważnych ulepszeń.

Przechodząc do hydromechaniki, przypominam o rozpoczęciu przez Laplace'a i Lagrange'a prac nad teorią fal wodnych, którą ci wielcy analitycy budowali na drodze czysto dedukcyjnej. Równocześnie holender Flaugergues (1755—1835) w pracy swej z r. 1793 starał się wywieść teorię fal z doświadczenia. Niedosć dokładne obserwacje doprowadziły go do poglądu, że ruch fal, na powierzchni przynajmniej, polega tylko na pionowych wahaniach cząstek, a pogląd ten wpłynął niekorzystnie na ściśłość wniosków Flaugerguesa. W niezauważonej w swoim czasie pracy pośmiertnej francuskiego inżyniera dróg i mostów Bremontiera (1738—1809) podana była, oparta

na obserwowaniu fal morskich, charakterystyka grup fal w tych słowach: „Fala nigdy nie posuwa się sama, lecz zawsze rozchodzi się ich wiele, tworząc grupę. Największe, średnie i najmniejsze — przedstawiają się, jakby tworzyły układ i zależały wzajemnie jedno od drugich.“ Profesor instytutu politechnicznego w Pradze, Franciszek Gerstner (1756—1832), w wydanej w r. 1804 *Theorie der Wellen und Deichprofile*, skarżąc się w tej pracy na brak danych doświadczalnych, przedsięwziął syntetyczne badanie kwestji fal wodnych i doszedł do oznaczenia cykloidalnego profilu fali. Jakkolwiek wnioski Gerstnera niezupełnie się zgadzały z obserwacjami, to jednak jego teoria, dająca prędkość rozchodzenia się fal na powierzchni, w przypuszczeniu nieskończonej wielkiej głębokości, do dziś utrzymuje się w hydrodynamicie.

Badania Laplace'a, Lagrange'a i Gerstnera opierały się na warunkach ruchu potencjalnego cieczy, w skutku czego kwestja powstawania fal nie była brana pod uwagę. Kwestja ta wskutek konkursu, ogłoszonego przez Akademię Nauk paryską, podjęta została przez Poissona, w jego *Mémoire sur la théorie des ondes* z r. 1816. Śledził on rozszerzanie się małego wzburzenia złożonemi rachunkami, które następnie rozwinął słynny matematyk francuski, inżynier dróg i m. Augustyn Cauchy (1789—1857). Cauchy wprowadził do nauki pojęcie obrotu średniego, nazwanego później wirem przez Helmholtza, a, co większe jeszcze ma znaczenie, uogólnił zapoczątkowaną przez Lagrange'a w zastosowaniu do cieczy, giętkich nitek i płyt, mechanikę ośrodków ciągłych, i związał ją z teorią sprężystości, o czem będzie mowa przy mechanice stosowanej.

Na dalszy rozwój nauki o falach po pracach Poissona i Cauchyego największy wpływ wywarły spostrzeżenia inżyniera angielskiego John Scott-Russela (1808-1882),

zebrane w rozprawie *On Waves* z r. 1844. Opisane tam zostało po raz pierwszy zjawisko tak nazwanej fali pojedynczej, powstające przez nagłe podniesienie powierzchni wody bieżącej. Co do fal o małej obszerności (amplitudzie) to, jak wspominałem w poprzednim wykładzie, już Lagrange wykazał, że ruch tych fal w cieczach idealnych należy do formy ruchów, badanej przez Eulera, przy której składowe prędkości są cząstkowymi pochodnymi pewnej oznaczonej funkcji, którą później Helmholtz nazwał potencjałem prędkości. Twierdzenie Lagrange'a, dotyczące ruchu cieczy, w przypadku istnienia tej funkcji dowiedzionem zostało ściśle przez Cauchyego, podczas gdy wymieniany już matematyk angielski Green wykazał zależność takich ruchów cieczy, rozważanych jako dwuwymiarowe od potencjałów logarytmowych, a jako trójwymiarowe od potencjałów newtonowskich. Tym sposobem wytkniętą została droga dalszego rozwoju teorii prądu potencjalnego. Szybko posunęły ją naprzód prace profesora w Cambridge Jerzego Stokesa (1819-1903), który obok zastosowania teorii do ruchów osiowo-symetrycznych (1842) oraz wprowadzenia funkcji prądowej, podporządkowanej potencjałowi prędkości (1847), dał przekształcenie całki linowej prędkości na całką powierzchniową (1854).

Badania nad teorią fal wodnych zwróciły uwagę na opory, powstające w skutku lepkości cieczy naturalnych. Pierwszy określił te opory Newton, stawiając na początku 9 sekcji II księgi swoich *Principjów*, hipotezę: „Opór w skutku niezupełnej płynności (*ex defectu lubricitatis*) cząstek cieczy niech będzie przy równych innych okolicznościach proporcjonalny do ich prędkości względnej.” Pierwsze badania ruchu cieczy naturalnych zawdzięczamy inżynierowi i profesorowi Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu Ludwikowi Navierowi (1785—1836). On to, w swoim

Mémoire sur les lois du mouvement des fluides z r. 1822 starał się ogólne równania różniczkowe ruchu płynów, wywiedzione w przypuszczeniu płynów idealnych, bez tarcia między cząsteczkami, uzupełnić czynnikiem uwzględniającym to tarcie. Przyjął w tym celu, że między dwiema cząsteczkami, dostatecznie bliskimi, oprócz działania hydrostatycznego ma jeszcze miejsce działanie dynamiczne, którego wyrażenie jest funkcją ich odległości, pomnożoną przez prędkość, z jaką się te cząsteczki zbliżają lub oddalają jedna od drugiej w danej chwili. Otrzymał tym sposobem na tarcie dwóch warstw wyrażenie, zgodne z przypuszczeniem Newtona. Przy stałej zmianie prędkości hipoteza ta prowadzi do proporcjonalności tarcia do pochodnych, z których się składają, jak to wykazał Cauchy (1827), składowe prędkości odkształcenia. Zwracał na to uwagę później (1843), inżynier francuski Barré de Saint Venant (1797—1886), podczas gdy Poisson (1832) starał się, podobnie jak Navier, opierać teorię ruchu cieczy naturalnych na rozważaniu działań międzycząsteczkowych. Z tych działań także wyciągnął Stokes (1845) związek liniowy składowych nateżeń z prędkością odkształcenia i wywiódł powtórnie równania Naviera, których zupełną zgodność z powolnym ruchem cieczy w cienkich rurkach wykazały badania doświadczalne Poiseuille'a (1846).

Mówiąc o rozwoju hydromechaniki w epoce Lagrange'a, wspominałem o poglądach Clairauta i Laplace'a na nateżenie powierzchniowe. Analogja tego pojęcia z nateżeniem cienkiej błonki, zaznaczoną została przez Th. Younga w jego piśmie *Essay on the cohesion of fluids* z r. 1803. Do tych samych wyników, co Laplace, doszedł także Gauss, który warunki równowagi w swoich *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrio*

(1830) wywiódł z zasady przesunąć przygotowanych i dowiódł przytem stałości tak zwanego kąta krawędziowego. Podczas gdy wszyscy ci badacze uważali ciecz, jako jednorodną, to Poisson w swojej *Nouvelle théorie de l'action capillaire* (1831) wykazał, że pod wpływem sił międzycząsteczkowych na powierzchni cieczy tworzyć się winno zgęszczenie. Interesujący wpływ dynamiczny włóskowatości na ruch fal zaobserwował Scott Russel (1844) i przedstawił jasno we wzmiankowanej rozprawie *On Waves*, o czem przyjdzie mi jeszcze wspominać.

U nas, w dziedzinie mechaniki teoretycznej pojawiła się w tym czasie jedna tylko praca, lecz niepośledniej wartości. Prof. Uniw. Jag. Karol Hube, syn Michała, o którym wspominałem, czytał w r. 1826 w Tow. Nauk. Krak. rozprawę: *O fenomenach niektórych, pochodzących z ruchu wirowego ciał, z przydaniem uwag nad przerobieniem spółrzednych i niektórymi twierdzeniami, tyczącemi się momentów*. Praca ta zawierała wiele rzeczy nowych, mianowicie dokładne obliczenie stałych dla ruchu bąka i rozwiązanie zadań, dotyczących oscylacyj elipsoidy ciężkiej na płaszczyźnie pochyłej i toczenia się krążka po jego krawędzi. Zasady mechaniki analitycznej oraz te części mechaniki stosowanej, które były najpotrzebniejsze dla przyszłych oficerów artylerji i inżynierji, wykladał w Szkole Wojskowej Aplikacyjnej w Warszawie przed r. 1830 ks. Rafał Skolimowski. Wykłady te w r. 1824 były litografowane i tworzą foljał o 1054 stronach. Kurs to ścisły, starannie ułożony, zawierający wiele materiału dla słownictwa. Krótki i przystępny wykład początków mechaniki praktycznej p.t. Teorja machin, podająca łatwe ich wyrachowanie dla gospodarzy, mechani-

ków praktycznych i konstruktorów maszyn, wydał w 1827 r. w Krzemieńcu Franciszek Miechowicz, nauczyciel i rządca instytutu mechaników w Liceum Wołyńskim a później profesor Uniwersytetu kijowskiego.
