

VII. LAGRANGE. — LAPLACE. — COULOMB. — BOSSUT. — DUBUAT.

Staralem się przedstawić w poprzednim wykładzie prace uczonych pierwszej połowy XVIII w., na których czele stali: Euler, d'Alembert i Daniel Bernoulli. Dostarczyły one dość materiału, by mógł być z niego wzniesiony okazały gmach mechaniki analitycznej, którego budowę podjął Lagrange. Dawalo mu do tego prawo stanowisko, jakie zajmował wśród matematyków, temi słowy określone przez Jana Śniadeckiego: „Lagrange, najsubtelniejsze Eulera myśli zgruntowawszy, zapuścił się i przeniknął jeszcze w większą ich głębie; i jednych niedokładność dopełnił, drugich zapory i trudności przełamał; odkrył nowe drogi i sposoby w sztuce rachunkowej; któremi jego genjusz tak dzielnie władał, iż najtrudniejsze napomknienia w nieśmiertelnem dziele Newtona objaśnił, sprostował, albo ich dowiódł; wiele zawiłych pytań w układzie świata rozwiązał, astronomji fizycznej, mechanice i całej sztuce analitycznej nadał postać trudniejszą prawdą, ale śmielszą, głębszą i dzielniejszą.”

Józef Ludwik de Lagrange, ur. 1736 r. w Turynie, mając lat szesnaście wykładał tam już matematykę w królewskiej Szkole Artylerji. Po kilku latach zwrócił na siebie uwagę roztrząsaniem pracy Eulera o izoperimetrach.

Gdy Euler, wezwany do Petersburga, opuszczał Berlin, Fryderyk II powołał Lagrange'a na przewodniczącego klasy matematyczno-fizycznej Akademii. Przez lat dwadzieścia pracował Lagrange w Berlinie i dopiero w 1787 r. przybył do Paryża, w celu przypilnowania drukującej się tam jego *Mechaniki Analitycznej*. Odtąd do zgonu w 1813 r. pozostawał we Francji. Terror rewolucji dotknął go silnie — a najdotkliwszym ciosem była dlań śmierć jego przyjaciela Lavoisiera. „Miły Boże (mówił do Delambre'a) potrzeba było tylko chwili czasu na strącenie tej głowy, na jakiej utworzenie ledwo się wiek cały zdobędzie.“ Należał do pierwszego grona profesorów Szkoły Politechnicznej, za Napoleona został hrabią i senatorem. W ostatnich latach życia zajął się doskonaleniem, rozszerzeniem i powtórным wydaniem mechaniki analitycznej, którego końca druku już nie dożył.

Wśród gromadzonych w pierwszej połowie XVIII w. materiałów do wytworzenia całokształtu umiejętności mechaniki stały na pierwszym miejscu zasady ogólne, umożliwiające rozwiązywanie różnorodnych zadań drogą czysto analityczną, przez proste działania rachunkowe. Wielcy matematycy, o pracach o których mówiłem w poprzednim wykładzie, zajmowali się tworzeniem tych zasad i prowadzili spory o to, które z nich są najogólniejsze i najwięcej odpowiednie, by utworzyć podstawy nauki. Całą potęgę swego talentu użył Lagrange, by dowieść, że zasada prędkości przygotowanych obejmuje w sobie wszystkie inne i wystarcza do rozwiązania wszystkich zagadnień mechanicznych. Dowiódł tego w swem wiekopomnem dziele: *Mécanique analytique* z roku 1788. Ścisłe analityczny charakter tego dzieła odbił się na całej mechanice ówczesnej. Usunięta z niej została prawie zupełnie metoda syntetyczno-geometryczna, którą posługiwali się z takim powodzeniem, Huyghens i Newton.

Program swój jasno określił Lagrange w przedmowie. „Mamy już wiele wykładów mechaniki,” mówi: „lecz plan tej książki jest zupełnie nowy. Postawiłem sobie jako cel sprowadzić teorię tej umiejętności i sztukę rozwiązywania, odnoszących się do niej zadań, do wzorów ogólnych, przez proste rozwinięcie których otrzymać można wszystkie równania, potrzebne dla rozwiązania każdego zadania... Dzieło to odda inną jeszcze usługę, zbierając i przedstawiając z jednego punktu widzenia rozliczne zasady, znalezione dotąd dla ułatwienia rozwiązywania kwestyj mechanicznych, wykazując ich związek i wzajemną zależność i pozwalając wnioskować o ich słuszności i zakresie... W dziele tem niema żadnych figur. Metody, jakie przedstawiam, nie wymagają ani wykresów, ani wywodów geometrycznych lub mechanicznych. Posługują się one wyłącznie działaniami algebraicznymi, prowadzonymi regularnie i jednostajnie.“

Wykład mechaniki podzielił Lagrange na dwie części: statykę i dynamikę, a w każdej z tych części zajmuje się najprzód ciałami stałymi, a następnie cieczami i gazami. Poszczególne rozdziały obu części ściśle sobie odpowiadają, z jednym tylko wyjątkiem rozdziału szóstego dynamiki, o obrocie ciał, który nie ma odpowiadającego w statyce.

Pierwsze rozdziały obu części dają przegląd historyczny rozwoju zasad mechaniki przed Lagrange'm. Uważając równowagę za wynik zniszczenia wielu sił, które ze sobą walczą i działania jednych na drugie wzajemnie unicestwiają, stawia Lagrange za cel statyki podanie praw, według których to zniszczenie następuje. Prawa te opierają się na zasadach ogólnych, które sprowadzić można do trzech, mianowicie — równowagi drąga, składania sił i prędkości przygotowanych. Tę ostatnią tak wyraża: „Jeżeli jakikolwiek system ilukolwiek ciał lub punktów,

poddanych działaniu jakichkolwiek sił jest w równowadze, — i jeżeli nadamy temu systemowi jakikolwiek ruch bardzo mały, w skutku którego każdy punkt przebiegnie przestrzeń nieskończenie małą, wyrażającą jego prędkość przygotowaną, to suma wszystkich sił, pomnożonych każda przez drogę, jaką przebiega jej punkt przyłożenia wzdłuż jej kierunku, będzie zawsze równa zeru, skoro przyjmujemy za dodatne drogi, przebieżone w kierunku działania sił, a za odjemne — drogi, przebieżone w kierunku przeciwnym.“

Drugi rozdział statyki wyraża tę zasadę wzorem, przyrównującym do zera sumę wszystkich prac przygotowanych sił, działających na ciało, i podaje sposoby użycia tego wzoru. Odpowiedni rozdział dynamiki doprowadza do zasadniczego równania ruchu przez przyrównanie sumy prac przygotowanych sił, działających na ciało, do sumy prac przygotowanych dokonywanych ruchów. Jeżeli ten ostatni wyraz ze zmienionym znakiem przeniesiemy na lewą stronę równania, to wzór streszczać w sobie będzie zasadę d'Alemberta, którą Lagrange uważa jako sposób ogólny-sprowadzania zadań dynamiki do zadań statyki. W trzech rozdziałach obu części wywiedzione zostają z równania podstawowego ogólne własności równowagi i ruchu. W statyce otrzymuje się sześć równań, przy których przesunięcie lub obrót ciała nie są możliwe, a w dynamice trzy zasadnicze równania ruchu. Wyprowadzone są nadto zasady ogólne: zachowania ruchu środka ciężkości, zachowania momentu ruchu obrotowego, sił żywych i najmniejszego działania, a także badane są ruchy ciał w odniesieniu do ich głównych osi.

Czwarte rozdziały zajmują się stosowaniem równań równowagi i ruchu do ciał, nieporuszających się swobodnie, lecz związanych pewnemi warunkami. Stosując tu wynalezioną przez siebie metodę czynników nieoznaczonych,

Lagrange mnoży warjacje wszystkich równań warunkowych, którym ciała w swym ruchu muszą czynić zadość, przez czynniki nieoznaczone, dołącza te iloczyny do równań ruchu ciała i tak uzupełnione równania traktuje, jakby się odnosiły do ruchu ciała zupełnie swobodnego. Piąte rozdziały obejmują zastosowanie wzoru głównego do przypadków szczególnych; rozdział piąty statyki zajmuje się równowagą pojedynczego punktu, systemu punktów, połączonych nitkami lub prętami, równowagą nici, której wszystkie punkty są ciągnięte przez jakiekolwiek siły, wreszcie równowagą ciała sztywnego skończonych wymiarów; rozdział piąty dynamiki poświęcony jest badaniu: ruchu ciała wykonywującego nieskończone małe wahania, ruchu ciał swobodnych pod wpływem sił przyciągania i wreszcie ruchu ciał, działających jedno na drugie, czyto przez przyciąganie, czy też przez połączenie niciami lub prętami. Szóstemu rozdziałowi dynamiki, traktującemu o obrocie ciał, oczywiście nie odpowiada żaden w statyce i to jest jedyne naruszenie symetrii układu dzieła.

Trzy ostatnie rozdziały obu części poświęcone są mechanice, płynów a pierwsze z nich — historycznemu rozwojowi odnośnych zasad. Następne wykazują, że ogólne równania statyki i dynamiki stosować się dają bezpośrednio do płynów nieściśliwych po dodaniu wyrazu, odpowiadającego równaniu warunkowemu, które wyraża niezmiennosc objętości cząstki cieczy. Dla mechaniki płynów sprężystych wywiedzione są w ostatnich rozdziałach równania zasadnicze, podobne do równań dla cieczy. Różnica pomiędzy gazami a cieczami polega na tem, że pierwsze mają zmienną objętość cząstki, odpowiadającą współczynnikowi sprężystości. Podstawowe równanie hydrodynamiki wchodzi przeto do aerodynamiki po zastąpieniu wyrazu, określającego niezmiennosc objętości cząstki,

innym, wyrażającym dążenie cząstki do zmiany swej objętości.

Mechanika analityczna Lagrange'a jest dziełem tak mocno zbudowanym i tak ściśle wypełnionem, że niemożliwem się wydaje wprowadzenie do niego jakichkolwiek ulepszeń. Umiejętność przedstawia się w niem jako zupełnie wykończona, a gdzie jakiego zadania nie udało się rozwiązać, winna w tem tylko matematyka, nie mogąca wywiedzionych wzorów ogólnych przystosować do poszczególnych przypadków; Lagrange bowiem, zgodnie z zapowiedzią w przedmowie, zamienił wszystkie trudności mechaniczne na czysto matematyczne. Z drugiej znów strony systematyczna pełność dzieła wytwarza pewną jednostronność, a przez to i pewien brak. Wyłączenie zupełne metody geometryczno-syntetycznej sprawiło, że autor w wielu zadaniach używać musiał szerokich rozwinięć, z jądrem rzeczy nie mających związku, podczas gdy metoda syntetyczna byłaby w tych przypadkach bezpośrednio i więcej celowo doprowadziła do rozwiązania. I inny jeszcze niedostatek objawił się w tej wspaniałej budowie. Jak zaznaczałem, w poprzednim perjodzie rozwoju mechaniki, wszystkie zasady ogólne, z których tę umiejętność usiłowano wywodzić, nie były wolne od zarzutów, podkopujących ich prawo egzystencji, nie były uważane za ściśle dowiedzione. W tem samem położeniu znalazła się i zasada prędkości przygotowanych, którą Lagrange wziął za kamień węgielny swego dzieła. Krążyła ona wciąż, podobnie jak i inne, między trzema biegunami: aksjomat, twierdzenie, wynik doświadczenia. W pierwszym wydaniu mechaniki analitycznej podał Lagrange szczegółowo historję tej zasady, wykazując, jak stopniowo, z prawa równowagi drąga przekształcała się na prawo składania prędkości, aż wreszcie objęła w sobie wszystkie inne. Wywód ten wszakże nie odpo-

wiadał duchowi dzieła, któremu zasada prędkości przygotowanych służyła za główną podstawę. To też już w r. 1796 próbował Lagrange wywodzić ją samodzielnie, zastępując siły, działające na poszczególne cząstki ciała, przez nateżenia nici, przewiniętych przez te cząstki, i przyrównywując do zera sumę algebraiczną wydłużeń lub skróceń tych nici. Dla uwidocznienia wyводу przyjmował, że każdy punkt połączony jest z umocowanym w nim krążkiem, przez co cały system stawał się podobnym do nader złożonego wielokrążka. W r. 1813 w drugim wydaniu swej *Théorie des fonctions analytiques*, przedstawił znów ten ustrój, przyjmując że krążki są nieskończenie małe, lub, że nici przewijają się bez tarcia przez cząstki ciała. Szczegóły wszakże tych wywodów nie przestały podlegać krytyce, później zaś większość matematyków, z Gaussem na czele, doszła do wniosku, że zasadę prędkości przygotowanych przyjmować można za prawdę podstawową, bez jej dowodzenia.

Równocześnie z powstaniem mechaniki analitycznej opartą została na trwałych podstawach nauka o tarcii. Mówiąc o pracach Amontonsa, wspominałem o rozprawach nad jego wnioskami, nie doprowadzających do stanowczych wyników, na które cały wiek jeszcze czekać przyszło. Wyników tych dostarczyły dopiero prace francuskiego inżyniera wojskowego i uczonego fizyka, Karola Augustyna Coulomba (1736—1806). Akademia Nauk w Paryżu ogłaszała w latach 1779 i 1782 konkurs na teorię maszyn prostych z uwzględnieniem skutków tarcia i sztywności lin. Nagrodzona na tym konkursie praca Coulomba podaną została w r. 1785 w *Pamiętnikach Akademii*. Opisane są w niej szczegółowo liczne doświadczenia, wykonane w Rochefort według starannie obmyślanej metody nad różnymi gatunkami drzewa i metalami, używanymi przy budowie maszyn, czyto stykanami na suchu

czy z różnemi smarowidłami, a również nad skórami. Z porównania wyników wywiódł Coulomb trzy zasadnicze prawa, orzekające, że: 1) tarcie jest proporcjonalne do ciśnienia, 2) niezależne od rozległości powierzchni w zetknięciu, 3) niezależne od prędkości. Zaznaczył nadto, że tarcie w chwili rozpoczynania ruchu jest większe niż podczas ruchu, zwłaszcza po upływie pewnego czasu spoczynku i gdy jedno z ciał jest bardzo ściśliwe; sprawdził, że tarcie w chwili rozpoczynania ruchu jest proporcjonalne do ciśnienia. Zdawało mu się przytem, że to tarcie składa się z dwóch części: jednej — proporcjonalnej do rozległości powierzchni w zetknięciu, którą nazywał przyleganiem, i drugiej — niezależnej od tej rozległości.

Jak wzmiankowałem, podając treść ostatnich trzech rozdziałów każdej z dwóch części *Mechaniki Analitycznej*, związał Lagrange w jedną całość hydro-mechaniką z mechaniką ciał stałych, wywodząc zasadnicze jej równania z ogólnego wzoru pracy przygotowanej. W krótkim rysie historycznym rozwoju zasad hydrostatyki wspomina on o użyciu przez Pascala zasady prędkości przygotowanych do objaśnienia tej głównej własności cieczy, że jakiekolwiek ciśnienie, przyłożone w jednym punkcie, przechodzi równomiernie do wszystkich innych punktów, — przytacza zasadę Clairauta, według której warunkiem równowagi całej masy ciekłej jest równowaga cieczy w jakimkolwiek dowolnym kanalikule idealnym, idącym od środka masy do powierzchni zewnętrznej, lub tworzącym obwód zamknięty, wewnątrz którego wszystkie dążenia cząstek do poruszania się pod działaniem sił wzajemnie się znoszą, — i wkońcu mówi: „Zasada Clairaut'a jest tylko naturalnym wnioskiem zasady równości ciśnień we wszystkich kierunkach. To też d'Alembert wywiódł odrazu z tej ostatniej też same równania różniczkowe, które otrzymał Clairaut, i przyznać

trzeba, że ta zasada obejmuje w sobie własność najprostszą i najogólniejszą, jaką wykryło doświadczenie w cieczech, pozostających w równowadze. Czy wszakże znajomość tej własności jest niezbędną przy poszukiwaniu praw równowagi płynów i czy nie można wywieść wprost tych praw z samej natury płynów, uważanych jako zbiór cząstek bardzo małych, niezależnych jedne od drugich i doskonale ruchliwych we wszystkich kierunkach?"

To też wzięwszy najprzód pod uwagę kanalik Clairauta i doszedłszy tą metodą do praw ogólnych równowagi jakiegokolwiek masy płynnej, przechodzi zaraz Lagrange do przedstawienia własnego wywodu równań równowagi z najogólniejszego kształtu równania pracy przygotowanej. Wywód ten polega jedynie na zręcznem dobraniu takiego ogólnego kształtu równania warunkowego, że różniczka tego równania, zaopatrzona w nieokreślony współczynnik, daje ten sam moment przygotowany, który służył w statyce do otrzymania najogólniejszego kształtu głównych równań równowagi.

Lagrange odróżnia dwa rodzaje płynów: ciecze i gazy. Ciecze mają stałą gęstość, skąd wypływa równanie warunkowe. W gazach zamiast niezmienniej objętości występuje rozprężliwość, która dołączoną zostaje jako siła, wraz z jej momentem przygotowanym, do innych sił danych. W obu razach wyraz, uzupełniający równanie ogólne, zachowuje ten sam kształt, tak że każdy system płynny należałoby uważać jako grupę punktów materialnych, zupełnie swobodnych i w każdym kierunku ruchliwych, gdyby, jako szczególna własność systemu, nie dochodził wewnętrzny wzajemny związek, określający objętość, jaką te punkty w każdej chwili zajmują. Aksjomat więc równości ciśnień we wszystkich kierunkach zastąpiony być może przypuszczeniem wszechstronnej ruchliwości cząstek, czyli tak zwanej płynności doskonałej, skoro

tylko, jak to uczynił Lagrange, wprowadzi się do ogólnego równania na zwykłych zasadach mechanicznych tę wszechstronną ruchliwość, a zarazem zewnętrzne związki, określające objętość. Tym sposobem równość ciśnień we wszystkich kierunkach przestaje być założeniem, a staje się wynikiem i zamiast służyć jako środek pomocniczy przy wywodzie praw równowagi otrzymuje się jako twierdzenie, wynikające z tych praw.

W rozwoju historycznym zasad hydrodynamiki zaznacza Lagrange, że rozwiązanie zadania ruchu cieczy przez Daniela Bernoulliego w r. 1738 opiera się na następujących dwóch przypuszczeniach: 1) że różne warstwy cieczy w ruchu zachowują ściśle swą równoległość, tak że każda warstwa wstępuje zawsze na miejsce tej, która ją poprzedza, 2) że prędkość każdej warstwy nie zmienia kierunku, czyli że wszystkie punkty jednej i tej samej warstwy mają prędkości równe i równoległe. Przypuszczenia te są możliwe w przypadku naczyń lub rur o niewielkim przekroju i doświadczenie zdaje się je stwierdzać; w innych przypadkach wszakże nie są zgodne z rzeczywistością i dla wyznaczenia ruchu cieczy badać przychodzi ruch każdej poszczegółnej cząstki. Z równań równowagi cieczy, podanych przez Clairauta w 1743, trzeba więc było przy pomocy zasady d'Alemberta przejść do równań ruchu, jak to uczynił d'Alembert w 1752. Przez to odkrycie cała hydromechanika sprowadzoną została do jednego punktu analizy i, gdyby równania, w których ją zawarto, poddawały się całkowaniu, możnaby było we wszystkich przypadkach określić ściśle okoliczności i działania płynu, poruszanego przez jakiekolwiek siły. Lagrange wywiódł te równania z ogólnego równania dynamiki, zaznaczając, „że okazały się tak krnąbrnymi, iż dotąd nie zdołano ich zcałkować.“ Od równań Eulera, z którymi razem podawane są do dziś w ogólnych wykładach mechaniki, różni

je dobór zmiennych niezależnych; droga zaś, wiodąca w dynamice od równań ogólnych ruchu do zasady zachowania sił żywych, doprowadza do otrzymania z równań hydrodynamiki twierdzenia Daniela Bernoulliego.

Równocześnie z Lagrange'm, zajmował się hydrodynamiką astronom Laplace (1749—1827) i w rozprawie *Sur les ondes* z r. 1776 rozwinął, na podstawie równania ciągłości dla dwóch wymiarów, pierwszą teorię matematyczną fal wodnych małej obszerności przy stałej głębokości kanału. Z teorii tej wynikło do dziś używane wyrażenie na prędkość rozchodzenia się fal. Lagrange, krytykujący w swej *Mechanice Analitycznej* nieudane próby Newtona w tym zakresie, podał teorię fal wodnych, niezupełnie wykończoną, a różniącą się od Laplace'owskiej głównie wprowadzeniem, choć nienazwanego tak jeszcze, potencjału prędkości. Wykazał bowiem, że ruch fal małej obszerności cieczy idealnych należy do formy ruchów, badanej przez Eulera, przy której składowe prędkości są cząstkowymi pochodnymi pewnej oznaczonej funkcji. Zauważył również Lagrange stałość tego ruchu, o ile pomijaną jest lepkość cieczy.

Natężenia powierzchniowe, określające razem z ciężkością kształt kropeł, baniek lub błonek, zauważone już były przez Clairauta, ale dopiero Laplace doszedł do zestawienia pełnej teorii zjawisk włoskowatości w swojej *Théorie de l'action capillaire*, podanej jako dodatek do *Mechaniki niebieskiej* (r. 1806/7). Znalazło tam zastosowanie tak pojęcie natężenia powierzchniowego, jak i jego zależność od głównego promienia krzywizny swobodnej powierzchni; samo pojęcie zaś określone już było przez Segnera w r. 1751.

Jeszcze przed wydaniem *Mechaniki Analitycznej* zajmował się Lagrange teorią wytrzymałości tworzyw. W r. 1769 potwierdził i uprościł pracę Eulera

o krzywych sprężystych, o której mówiłem w poprzednim wykładzie, i w rozprawie *Sur la force des ressorts pliés* otrzymał pierwsze całki równania krzywej sprężystej w sposób bardzo prosty, przez funkcje łuku i kąta, jaki tworzy styczną z pewną prostą stałą. W innej rozprawie, ogłoszonej w roku następnym, udoskonalił teorię Eulera, uwidoczniając przytem prawdziwy związek między strzałką wygięcia, długością pręta i siłą wyginającą, — związek, dowodzący, że strzałka jest urojoną dla wszystkich sił, większych od granicy, przez Eulera określonej. W rozprawie tej znajdujemy po raz pierwszy wzmiankę o przeginianiu się krzywej sprężystej w przypadku pręta wpodłuż ściskanego i o tworzeniu się garbów, naprzemian wklęsłych i wypukłych, co rzeczywiście ma miejsce, gdy kulka punktów pręta nie może zbaczać ze stałego położenia.

Wymieniany dziś autor praw tarcia Coulomb w rozprawie *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Statique*, z r. 1773 zajmował się najważniejszymi zadaniami z dziedziny wytrzymałości tworzyw. Statyka w postaci, w jaką ją obłókł Lagrange, nie istniała jeszcze i Coulomb wyjaśniał najprzód mało wtedy znane twierdzenie o warunku równowagi układu materjalnego, polegającym na przyrównaniu do zera sumy rzutów sił na trzy osie prostopadłe. Dowodził następnie z pomocą tego twierdzenia, że na każdym przecięciu poprzecznem belki, jednym końcem wmurowanej, suma nateżeń rozciągających jest równa sumie nateżeń ściskających i znajdował położenie włókna obojętnego. Według Coulomba oś obrotu przecięć niezawsze leży w połowie wysokości belki; zmienia ona swe położenie w miarę, jak ustaje prawo proporcjonalności

ściskania i kurczenia się włókien, ale nigdy nie leży na krawędzi przecięcia.

W rozprawie swej podał Coulomb pierwszą teorię skręcenia. Jego rozumowanie, zarówno proste, jak racjonalne, prowadzi do twierdzenia, że momenty sił wewnętrznych, brane względem osi walca skręcanego, są proporcjonalne do kąta skręcenia i do czwartych potęg średnicy. Prawidło to, uważane w granicach, jakie mu nakreślił, to jest stosowane do samych tylko walców kołowych, jest zupełnie zgodne z późniejszymi poszukiwaniami, ale się nie może stosować do przecięć innego kształtu, bo wtedy punkty, najwięcej odległe od środka figury, nie są najwięcej wyteżone i przecięcia, pierwotnie płaskie, zamieniają się na powierzchnie krzywe, podobne do paraboloid hyperbolicznych.

Wyłożona w rozprawie Coulomba teoria sklepień jest epokową w historii budownictwa. W miejsce błędów i niedokładności, które Lahire przed kilkudziesięciu laty uświęcił powagą swego imienia, znajdujemy tu prawdziwe określenie warunków równowagi, polegających na otwieraniu się stosug, wskutek obrotu zworników, zgodnie z dawnymi pojęciami Coupleta. Coulomb nie bierze już dowolnie, jak Lahire, pewnych stosug za najslabsze, ale szuka ich rachunkiem, oznacza parcie w kluczu i określa warunki równowagi każdej części sklepienia. Wziąwszy dowolnie na podniebieniu jeden punkt za krawędź obrotu i drugi punkt, leżący nieco wyżej, oblicza on parcie, odpowiadające obydwóm przypuszczeniom i porównywa znalezione wypadki. „Jeżeli pierwsze z nich jest mniejsze od drugiego“, mówi Coulomb: „stosuga pęknięcia leży z pewnością między kluczem i punktem niższym.“ Jest to więc metoda, polegająca na porównywaniu wypadków, otrzymanych przez robienie różnych przypuszczeń co do położenia stosug słabych.

Równocześnie robione były w Paryżu pierwsze próby wytrzymałości kamieni na zgniecenie, przez Gautheya, Soufflota i Perroneta; gdy jednak spostrzeżono, że maszyna, do tych prób używana, polegająca na zasadzie drąga, nie była odpowiednią, obmyślił Rondelet w 1780 nową maszynę, z którą wykonał doświadczenia, w ciągu całego wieku potem uważane za klasyczne. Wyniki tych doświadczeń, tudzież prób, robionych w r. 1787 nad mocą zapraw wapiennych i gipsowych, ogłosił Rondelet w swem dziele *Art de bâtir*, t. I z r. 1802.

Coulombowi zawdzięczamy także pierwszą teorię ciśnienia ziemi, opartą na istnieniu tak zwanego „graniastosłupa o największem parciu.” Nie była to teoria ogólna i wyczerpująca, bo stosowała się tylko do ziemi poziomo ułożonej z zupełnie pionową skarpą, a przytem nie uwzględniała tarcia ziemi o mur oporowy, — ale jej zasada była w gruncie rzeczy podstawą wszystkich prac, później podejmowanych w przedmiocie ciśnienia ziemi. Dzięki tyłu pomysłom Coulomba nauka o wytrzymałości tworzyw stała już w końcu XVIII w. na mocnych podstawach i oczyściła się z mnóstwa błędów i nedorzeczości, niedopatrzonych w ciemnocie wieków średnich.

Hydromechanika stosowana, czyli hydraulika, pozyskawszy podstawę teoretyczną we wzorach Daniela Bernoulliego i d'Alemberta, nie mogła zrazu z niej korzystać z powodu braku danych doświadczalnych, których gromadzeniem zajmowano się też głównie w omawianym perjodzie, przyczem z wyników doświadczeń starano się wyciągać wzory praktyczne. Jan Karol Borda sprawdzał ilość wypływu przez otwór z naczynia, obliczoną według teorii, z wynikami doświadczeń, jakie wykonał, a spostrzegłszy niezgodności, wyciągnął z danych doświadczalnych wzór praktyczny, do dziś powtarzany w podręcznikach. Badał on ścieśnienie żyły wodnej i wy-

plyw przez przystawkę walcową, wchodzącą do wnętrza naczynia. Jego *Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases*, ogłoszony był w Pamiętnikach Akademji paryskiej z r. 1706. Pierwszy poważniejszy szereg doświadczeń nad biegiem wody w kanałach przeprowadził, pod opieką króla Sardynji Franciszek Domenico Michelotti, matematyk, profesor uniwersytetu w Turynie, i ogłosił ich wyniki w dwutomowym dziele: *Sperimenti hydraulici diretti principalmente a confirmare la theoria et facilitare la practica del misurare le aque correnti*, wydanem w latach 1767 i 1771.

Jezuita, ks. Karol Bossut, profesor matematyki w szkole wojskowej w Mézières, wspierany przez rząd francuski, wykonał wiele doświadczeń nad biegiem wody w rurach, kanałach i wypływem przez otwory. Wyniki tych świadczeń, ogłaszane częściowo od 1771 do 1778 r., podane zostały w całości w dziele: *Traité théorique et experimental d'Hydrodynamique*, które się ukazało w dwóch tomach w Paryżu w latach 1786 i 1787. Według tytułów poszczególnych części w tomie pierwszym podaną jest hydrostatyka i hydraulika a w tomie drugim hydraulika doświadczalna; istotnie zaś dzieło, zatytułowane „Hydrodynamika“, jest wykładem hydrauliki z wiadomościami wstępnymi z hydrostatyki i nauką o maszynach wodnych. Z hydrodynamiki jest tylko we wstępie wzmianka o równaniach różniczkowych Eulera, o których mówi Bossut, że „na nieszczęście rachunki te z samej natury rzeczy są tak złożone i uważać je należy za prawdy geometryczne, same w sobie cenne, a nie za symbole, nadające się do zobrazowania istotnego ruchu fizycznego płynu.“ Treść nie jest jeszcze ułożona w porządku, przyjętym później w podręcznikach. I tak, w hy-

drostatyce podaje Bossut najprzód ogólne warunki równowagi płynów, warunki równowagi płynów ważkich, mówi o ciśnieniu na ściany i dno naczynia, równowadze mieszanin i płynów o zmiennej gęstości, o grubości ścianek rur, mających wytrzymywać ciśnienie zamkniętych w nich płynów, o równowadze płynów w naczyniach giętkich i równowadze powietrza; podaje następnie wiadomości o pompach, pompie ssąco-tłoczącej, wysokości podnoszenia wody przez pompy, gęstości atmosfery, barometrach, termometrach, równowadze ciał pływających, stateczności tej równowagi, przyczem streszcza odnośne prace D. Bernoulliego, Eulera i d'Alemberta, wreszcie o kształcie ziemi, o ile tenże zależy od praw hydrostatyki. W hydraulice mówi o wypływie przez otwory, ruchu wody w naczyniach połączonych, wypływie z naczyń w ruchu, wahaniach cieczy w syfonie, tarciu o brzegi otworu i o ściany rury, ruchu gazów a głównie powietrza, rozchodzeniu się drgań powietrza w rurach, według D. Bernoulliego, uderzeniu i oporze płynów; dalej podaje ogólne uwagi o maszynach wodnych, teorię maszyn poruszanych uderzeniem wody, naukę o kołach pionowych i poziomych, kołach poruszanych ciężarem wody, maszynach o oddziaływaniu, wreszcie wyklada teorię ruchu wody w rurach pomp. W hydraulice doświadczalnej podaje wyniki doświadczeń nad wypływem wody przez otwory i przystawki, wiadomości, dotyczące wodociągów i wytrysków, doświadczenia nad biegiem wody w rurach i kanałach; mówi o uderzeniu i oporze płynów, oporze przy ruchu statków i przy obrocie kół podsiębiernych i nasiebiernych. W dodatku podaje: 1) Treść zbioru rozpraw włoskich o ruchu wody, 2) Tablicę wysokości odpowiadających prędkościom spadku, 3) Opis maszyny Savery'ego w kopalniach Fresne, koło Condé, udzielony przez Dubuata.

Równocześnie z Bossutem pracować zaczął nad hydrauliką Ludwik Gabrjel hr. Dubuat - Nançay i pierwszy wygłosił jasno zasadę, że gdy woda płynie ruchem jednostajnym w jakimkolwiek łożysku, to siła przyśpieszająca, która wywołuje ten ruch, jest równa sumie oporów, ponoszonych przez wodę, czyto w skutku lepkości, to jest tarcia wewnętrznego, czy też z powodu tarcia o ściany łożyska. Dla zestawienia wzoru na ten ruch jednostajny użył Dubuat wyników doświadczeń Bossuta nad biegiem wody w rurach i kanałach, zaznaczając, że te ostatnie nie obejmowały ważnej danej, mianowicie głębokości prądu. Ogłosiwszy swą pracę p. t. *Principes d'hydraulique* w r. 1774, uzyskał pomoc rządową i w latach 1780—1783 przeprowadził doświadczenia, do dziś jeszcze uważane za podstawę hydrauliki praktycznej. Wyniki ich ogłoszone były w drugim wydaniu dzieła, dwutomowym, z r. 1786 i trzecim — trytomowym z r. 1816. To ostatnie nosiło tytuł: *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique* i obejmowało w tomie trzecim wiadomości: o cieple, parze, powietrzu, termometrach i barometrach. Dwa pierwsze tomy zawierały naukę o ruchu jednostajnym i zmiennym wód bieżących, szczegóły doświadczeń i naukę o oporze płynów. Dubuat wprowadził do hydrauliki pojęcie prędkości średniej na przecięciu poprzecznym prądu; drogą doświadczalną doszedł do wzorów, wyrażających związek pomiędzy tą prędkością a prędkościami na powierzchni i na dnie; przy wywodzeniu wzoru na ruch jednostajny przyjmował, że spadek poziomu wody wystarcza do przewyciężenia wszelkich oporów ruchu; robił doświadczenia nad ruchem zmiennym, oznaczał wysokość i długość podniesienia osi prądu przy zastawie.

Wzory Dubuat'a nie utrzymały się jednak w praktyce i pierwszy wzór na ruch jednostajny, jaki się przyjął, podał

w r. 1775, dyrektor paryskiej szkoły dróg i mostów, Antoni de Chezy. We wzorze tym całkowity opór ruchu był proporcjonalny do kwadratu z prędkości średniej, a odwrotnie proporcjonalny do promienia średniego przecięcia poprzecznego prądu. Sprawą tą zajmował się również Coulomb, który w r. 1800 badając opór płynów przy ruchu ciała w nich zanurzonego, zwracał uwagę, że lepkość płynu w wyrażeniu oporu wymaga obok wyrazu, proporcjonalnego do kwadratu z prędkości, drugiego jeszcze, proporcjonalnego do pierwszej potęgi z tejże prędkości.

Przystawki walcowe i ostrokątowe pierwszy zbadał dokładnie Jan Baptysta Venturi, profesor fizyki w Modenie, i oparł ich teorię w r. 1798 na odkrytej przez siebie zasadzie bocznego udzielania się ruchu w płynach. Jako rodaka, wymienić tu winienem generała Michała Sokolnickiego, który w swem dziełku: *Opuscules sur quelques parties de l'hydrodynamique*, wydanem w Paryżu w r. 1880, opisał doświadczenia, jakie wykonał dla poparcia swego pomysłu przystawki z dzwonem powietrznym. Sokolnicki korespondował w sprawie przystawki z inż. Girardem, kierownikiem budowy kanału między rzekami Ourcq i Sekwaną, a w sprawie drugiego swego pomysłu—trąby hydraulicznej, opartej na zasadzie Venturiego bocznego udzielania się ruchu w płynach, z senatorem Fossombronim, członkiem komisji, kierującej wówczas osuszaniem błót pontyńskich (Paludi Pontine). Pomysły te jednak pozostały bez urzeczywistnienia.

Nad oporem płynów pierwszy pracował Newton, w kwestji wszakże uderzenia żyły wodnej o ciała stałe nie dał ścisłych wskazówek i dopiero Daniel Bernoulli, Euler i Lagrange opracowali gruntownie tę teorię. Oporem przy ruchu statków w wodzie zajmował się Euler w swojej *Scientia navalis* z r. 1749. Niektóre rozdziały tego

działa i dziś jeszcze dostarczyć mogą cennych wskazówek w tej kwestji. Doświadczalnie badali ją Bossut i Borda a w roku 1775 wyznaczona przez rząd francuski komisja, złożona z członków akademji d'Alemberta, Condorceta i Bossuta. Co do oporu przy ruchu ciał stałych w powietrzu, który Newton określił, równie jak w wodzie, jako proporcjonalny do kwadratu z prędkości, kwestja ta opracowywaną była przez Daniela Bernoulliego i Eulera, a następnie przez Bordę i anglików Robinsa, Huttona i Smeaton'a. Całą naukę o oporze płynów z końca XVIII w., przedstawił Karol Chrystjan Langsdorf w swej *Hydraulice* z r. 1794. Nadmienić należy, że pierwotnie urzędnik warzelni soli, a następnie profesor konstrukcji maszyn w Erlangen, był Langsdorf w latach 1804—1806, profesorem naszego Uniwersytetu Wileńskiego i wykładał po łacinie mechanikę i technologję mechaniczną. Cenione były jego wykłady i Uniwersytet z żalem pożegnał uczonego profesora, przenoszącego się do Heidelberga. Langsdorf ogłosił liczne prace z dziedziny matematyki, mechaniki i hydrauliki, a między niemi w Wilnie po łacinie wykłady mechaniki i technologii w r. 1806.

Do mierzenia prędkości wody w rzekach na różnych głębokościach dawniejsi hydraulicy włoscy, a po nich Michelotti używali wahadła hydrometrycznego, zwanego także kwadrantem prądowym. Niezadowolony z tego przyrządu Michelotti zbudował tak zwany przezmian hydrauliczny, zasadę którego przystosował inżynier holenderski Brünings do swego tachometru z r. 1789. Przyrządy te, mierzące ciśnienie prądu na ciało, w niem zanurzone, okazały się mniej dogodnemi od rurki Pitota, do której Michelotti wprowadził doświadczalny współczynnik poprawki. Istotnie praktycznym okazał się tylko młynek Reinharda Woltmanna, dyrektora budownictwa w Hamburgu, pozostający w użyciu od r. 1791.

Podjęte również zostały prace około ulepszania znanych oddawna i wciąż w użyciu będących kół wodnych. Bossut, Dubuat i Smeaton byli pierwszymi pracownikami na tem polu, a ich doświadczenia, próby i wnioski były podstawą, na której się oparła późniejsza budowa tych kół. Z machin do podnoszenia wody śrubę Archimedesesa przerobił w r. 1746 jeden blacharz w Zurichu na pompę, zwaną spiralną, a teorię tej maszyny podał Daniel Bernoulli. Ulepszali później tę nawiniętą na walec rurę Nicander w Szwecji i Eytelwein w Niemczech, a jakkolwiek ten ostatni starał się o jej rozpowszechnienie i zbudował jedną maszynę w Moskwie w r. 1784, nie znalazła jednak rozpowszechnienia. Patent na pompę o tłoku nurzającym wziął w r. 1775 Moreland w Londynie; pompy odśrodkowe zbudowali pierwsi Bramah w Anglii i Dietz we Francji. Taran hydrauliczny, wynaleziony w r. 1772 przez zegarmistrza Whitehursta w Derby, ulepszony został w r. 1797 przez Montgolfiera.

Mechanika w Polsce, mająca w XVII stuleciu tak poważnych przedstawicieli, jak Kochański i Solski, w XVIII w. objawia się zaledwie w postaci podręczników szkolnych. W czterotomowym dziele jezuity, ks. Józefa Rogalińskiego: *Doświadczenia skutków rzeczy pod zmysły podpadających*, wydanem w latach 1765 i 1771, podany został rozwlekły wykład mechaniki metodą doświadczalną, przepełniony drobiazgowymi opisaniami doświadczeń i szczegółami obliczeń. Treściwy i systematyczny kurs mechaniki, oparty na rachunku wyższym i odpowiadający ówczesnemu stanowi nauki, znalazł się dopiero w przekładzie również czterotomowego francuskiego dzieła Bézouta, dokonany w latach 1781/2 przez ks. Józefa Jakubowskiego, który słownictwo mechaniczne zaczerpnął u Solskiego a w części i u Rogalińskiego. Mechanika dla szkół średnich wyłożoną została w wy-

bornej książce p. t. Fizyka dla szkół narodowych. Część I. Mechanika, wydanej przez Towarzystwo do ksiąg elementarnych w r. 1792. Towarzystwo, ogłosiwszy konkurs na napisanie podręcznika, otrzymało tą drogą znakomitą pracę łacińską Michała Hubego, sekretarza królewskiego m. Torunia, a później dyrektora nauk w Szkole Kadetów w Warszawie. Praca ta, starannie przełożona na język polski przez ks. Koca, utworzyła podręcznik niepospolitej wartości, odpowiadający społecznemu stanowi nauki, a do dziś stanowiący główne źródło naszego słownictwa mechanicznego.
