DR. KASPER WEIGEL.

Wykreślny sposób rozwiązywania równań normalnych z dowolną dokładnością wyznaczenia tak niewiadomych, jak i ich błędów i błędów ich funkcyj.

Wstęp.

Mimo to, że rachunek wyrównania nastręcza nam wiele sposobności do używania metod wykreślnych, posługują się niemi miernicy niechętnie i tylko w wyjątkowych wypadkach.

Przyczyną tej dotychczasowej niechęci do wykreślnych metod wyrównania u mierników jest po pierwsze: okoliczność, że instrukcja poligonalna[1]) dopuszcza tylko w pewnych wypadkach i to dość dowolne wyrównanie wykreślne, po drugie: że te metody wykreślne, które dają wyniki zgodne z metodą najmn. kwadratów dotyczą tylko trygonometrycznego oznaczenia punktów przez wcinanie i choć dają geometryczny obraz całego wyrównania, pochłaniają jednak zwykle prawie tyle czasu, co wyrównanie rachunkowe.

Natomiast są one bardzo interesujące ze stanowiska czysto teoretycznego, gdyż pouczają nas o przeróżnych analogiach, jakie zachodzą pomiędzy rachunkiem wyrównania, a pewnymi zagadnieniami z dziedziny mechaniki, a w szczególności statyki.

Zajmując się jednak tą sprawą bliżej[2]), doszedłem do wniosku, że chcąc zastosować wykreślne metody wyrównania do spostrzeżeń dowolnej kategoryi, a nie tylko przy wyżej oznaczonem zagadnieniu, należy porzucić dotychczasowe sposoby polegające na przekształceniu równań normalnych na analogiczne o znaczeniu statycznem i t. p. i opartem na tem całem wyrównaniu, natomiast zająć się bliżej sprawą wykreślnego przedstawienia i rozwiązania już samych równań normalnych o dowolnej ilości niewiadomych.

Sposób, który tu przedstawię, spełnia właśnie tak postawione zadanie, przewyższając przytem rachunkową metodę tak pod względem oszczędności na czasie, jak i (w zwykłych warunkach) na dokładności, gdyż pozwala na wyznaczenie niewiadomych, ich wag i wag ich funkcyj z dowolną dokładnością.

I. Opis i uzasadnienie wykreślnego wyrównania.

Jak wiadomo polega wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących, zawarowanych etc. na ustawieniu na mocy równań błędów odpowiednich równań normalnych, rozwiązaniu ich podług niewiadomych i wyznaczeniu wag niewiadomych, lub wag ich funkcyj.

Dla uproszczenia opisu i odpowiednich wzorów ograniczę się do uzasadnienia wykr. wyrównania spostrzeżeń pośredniczących o jednakowych wagach.

---
[1]) Instruktion für Polygonal (Theodolit-) Vermessungen. Wien 1904.

[2]) Wykreślne wyrównanie przy trygonometrycznem oznaczeniu punktów przez wcinanie. Czasopismo Techniczne r. 1910. Str. 156. (tegoż autora).

Jeślibyśmy mieli wyrównywać spostrzeżenia o wagach różnych, należałoby tylko zmienić współczynniki [a a], [a b] na [p a a], [p a b], lub $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$, $\left[\frac{a\,b}{p}\right]$ (dla zawar.), jak również przy wyrównaniu spostrzeżeń zawarowanych wyrazy [a l], [b l]... na $\omega_1 \ldots \omega_2 \ldots$

Wiemy, że system złożony z μ równań normalnych można zastąpić μ zredukowanemi równaniami normalnemi, których wyrazy wolne będą miały znaczenie spostrzeżeń zupełnie równowartych danemu szeregowi spostrzeżeń i z niego utworzonemu systemowi równań normalnych[1]).

Każde z równań normalnych o μ niewiadomych przedstawia nam geometrycznie utwór analogiczny do płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej, a że przechodząc na zredukowane równania normalne mamy w każdem następnem równaniu o jednę niewiadomą mniej, tak że wreszcie ostatnie zredukowane równanie normalne posiada tylko jedną niewiadomą, będzie ono przedstawiało geometrycznie odcinek w przestrzeni jednowymiarowej.

Napiszmy zred. równ. normalne w następującej formie (n. p. dla 3 niewiad.):

$$x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y + \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z + \frac{[a\,l]}{[a\,a]} = 0$$

$$y + \frac{[b\,c\,.1]}{[b\,b\,.1]}\,z + \frac{[b\,l\,.1]}{[b\,b\,.1]} = 0$$

$$z + \frac{[c\,l\,.2]}{[c\,c\,.2]} = 0.$$

Z tego sposobu przedstawienia zr. równań norm. wynika, że jeśli potrafimy przedstawić wykreślnie wszystkie współczynniki przy niewiadomych aż do ostatniego, który to wyraz z ujemnym znakiem przedstawi nam odcinek odpowiadający ostatniej niewiadomej i będziemy idąc powrotną drogą wykreślnie mnożyli odpowiednie współczynniki z odpowiednimi znanymi nam już niewiadomymi, otrzymamy po kolei wszystkie niewiadome jako sumy poszczególnych odcinków, uwzględniając oczywiście przytem im przynależne znaki.

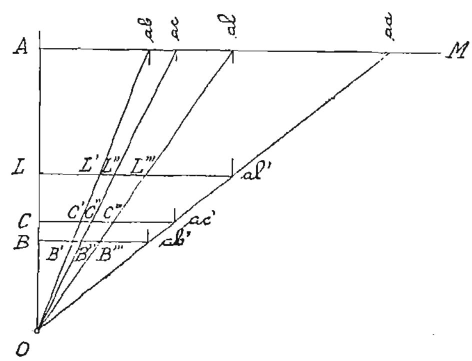
Wykres któryby odpowiedział powyższym wymogom, przedstawi się zdaniem mojem najprościej w formie następującej.

[1]) F. R. Helmert. Ausgleichungsrechnung nach d. M. d. kl. Qu. Lipsk i Berlin 1907 str. 213.

Na prostej $\overline{AM}$ (patrz fig. 1.) odcinamy w skali dogodnej dla naszego przyszłego rysunku od punktu A ku punktowi M wielkości [a a], [a b], [a c] i [a l], (przyjąwszy, że mamy tylko 3 niewiadome) znajdujące się w pierwszem równaniu normalnem i oznaczamy końce tak powstałych odcinków przynależnymi im literami wraz z odpowiednim znakiem.

fig. 1.

„a"



Następnie oblieramy punkt O na prostopadłej w punkcie A, opuszczamy z punktów ab, ac i al prostopadłe do przecięcia się z prostą $\overline{O\,aa}$ i tak otrzymane punkta przecięcia ab' ac' i t. d. odrzutowujemy na prostą OA, otrzymując punkta B, C i L. Łącząc następnie punkt O kolejno z punktami ab, ac i t. d., otrzymamy na prostej $\overline{B\,ab'}$ odcinki $\overline{BB'}$, $\overline{BB''}$ i $\overline{BB'''}$, które, jeśli przyjmiemy, że długość $\overline{OA}$ równa się jedności, będą odpowiadały na mocy podobieństwa trójkątów wyrazom $\frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]}$ i $\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}$.

Z tych samych powodów będą odcinki $\overline{CC'}$, $\overline{CC''}$, $\overline{CC'''}$, a następnie $\overline{LL'}$ $\overline{LL''}$ i $\overline{LL'''}$ odpowiadały wyrazom $\frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,c]\,[a\,c]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,c]\,[a\,l]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,c]\,[a\,l]}{[a\,a]}$ i $\frac{[a\,l]\,[a\,l]}{[a\,a]}$.

Mamy więc wszystkie wyrazy potrzebne do redukcyi drugiego równania normalnego (i to niektóre z kontrolą) przedstawione jako odcinki. Samo zaś pierwsze zredukowane równanie normalne przedstawiają nam odcinki $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i $\overline{OL}$, z których każdy należy jeszcze pomnożyć przez odpowiednią niewiadomą. Pierwszy ten wykres nazwijmy literą „a“.

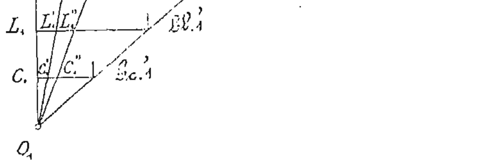
Przejdźmy teraz do wykreślnego przedstawienia drugiego zred. równania norm., które napiszmy w formie następującej:

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z + \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = 0.$$

Na prostej $A_1 M_1$ odcinamy od p. A_1 ku punktowi M_1 w tej samej skali co przedtem wyrazy [bb], [bc] i [bl] i odejmujemy od nich wykreślnie z uwzględnieniem znaków odcinki odpowiadające wyrazom $\frac{[ab][ab]}{[aa]}$, $\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ i $\frac{[ab][al]}{[aa]}$, otrzymamy tedy (patrz fig. 2) na prostej $A_1 M_1$ odcinki przedstawiające wyrazy [bb.1], [bc.1] i [bl.1]. Następnie obieramy tak samo jak poprzednio punkt O_1, który łączymy z punktem bb.1. Na, w ten sposób otrzymaną prostą rzutujemy || do $A_1 O_1$ punkta bc.1 i bl.1 otrzymując p. bc.1' i bl.1', wreszcie przez odrzutowanie tych ostatnich na prostą $O_1 A_1$, otrzymujemy punkta C_1 i L_1 i odcinki $\overline{O_1 C_1}$ i $\overline{O_1 L_1}$. Łącząc wreszcie punkt O_1 z punktami $\overline{bc.1}$ i $\overline{bl.1}$ otrzymujemy na prostych $\overline{C_1\, bc.1'}$ i $\overline{L_1\, bl.1'}$ odcinki $C_1 C'_1$ $C_1 C''_1$ $L_1 L'_1$ i $L_1 L''_1$, które nam przedstawiają w pewnej skali wyrazy $\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$, $\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}$, $\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}$ i $\frac{[bb.1][bl.1]}{[bb.1]}$.

fig. 2.

„b“

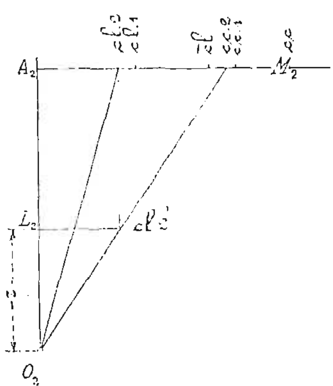


Drugie zred. równanie norm. mamy znów dane odcinkami $O_1 C_1$ i $O_1 L_1$. Wykres ten nazwijmy literą „b“.

Wreszcie otrzymamy przy pomocy odpowiednich odcinków „a“ i „b“ trzeci wykres „c“, na którym będzie (patrz fig. 3.) uwidoczniona ostatnia niewiadoma z jako odcinek $O_2 L_2$.

fig. 3.

„c“



Ponieważ trzecie zred. równanie normalne opiewa: $z + \frac{[cl.2]}{[cc.2]} = 0$, musimy znaleść odcinki [cc.2] i [cl.2], a następnie odcinek przedstawiający nam iloraz $\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$.

Rozwińmy oba te symbole na poszczególne człony, to otrzymamy:

$$[cc.2] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[cl.2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}.$$

Po naniesieniu więc na prostej $A_2 M_2$ odcinków [cc] i [cl], należy od nich algebraicznie odjąć odcinki $\overline{CC''}$ i $\overline{CC'''}$ zawarte w wykresie „a“, następnie odcinki $\overline{C_1 C_1'}$ i $\overline{C_1 C_1''}$ zawarte w wykresie „b“, a otrzymamy wedle powyższego wzoru odcinki odpowiadające wyrazom [cc.2] i [cl.2]. Jeśli wreszcie z punktów cl.2 poprowadzimy równoległą do prostej $\overline{A_2 O_2}$ aż do przecięcia się z prostą $\overline{O_2\, cc.2}$ i tak otrzymany punkt cl.2' odrzucimy na prostą $\overline{O_2 A_2}$, otrzymamy na niej punkt L_2. Odcinek $\overline{O_2 L_2}$ będzie nam przedstawiał niewiadomą z ze znakiem ujemnym (co do skali w jakiej go należy odczytać, patrz późniejszy rozdział o pow.ększeniu dokładności niewiadomych i ich wag).

Aby przy tworzeniu odcinków odpowiadających wyrazom zr. równań normalnych nie było potrzeba wypisywać odpowiednich wzorów i dopiero wedle nich owe odcinki tworzyć, podaję następującą regułę (na przykładzie):

Chcąc n. p. utworzyć odcinek odpowiadający wyrazowi [de.3] czwartego zred. równania normalnego, odcinam na prostej $\overline{A_4 M_4}$ wyraz [de] i odejmuję od niego algebraicznie odcinek, który w wykresie „a" odcina nam prosta $\overline{0\,a\,e}$ na prostej $\overline{D\,a\,d'}$, a następnie odcinki, które w wykresie „b" odcina nam prosta $\overline{O_1\,b\,e\,.\,1}$ na prostej $\overline{D_1\,b\,d'\,.\,1}$, a w wykresie „c" prosta $\overline{O_2\,c\,e\,.\,2}$ na prostej $\overline{D_2\,c\,d\,.\,2'}$.

Szematycznie napiszemy to tak:

$$[de.3] = de - \begin{matrix}\text{odc. wyzn.}\\ \text{prostemi}\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} ad & \text{i} & ae \\ bd.1 & \text{i} & be.1 \\ cd.2 & \text{i} & ce.2 \end{matrix} \right\}$$

Gdy, który z wyrazów zawartych w klamrze jest równy zeru, odpada szukanie odpowiedniego odcinka w przynależnym wykresie.

Mając wreszcie wyznaczoną ostatnią niewiadomą z, otrzymamy przy jej pomocy niewiadomą y z wykresu „b" na podstawie równania:

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z + \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = 0,$$

czyli

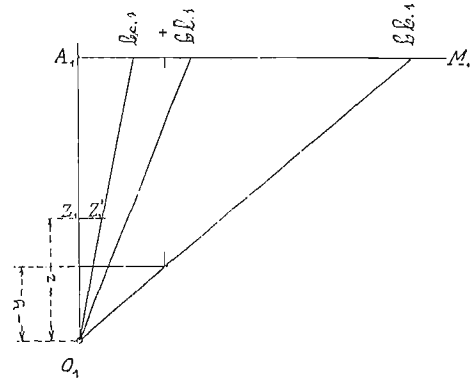
$$y = -\frac{[bc.1] + [bl.1]\,z}{[bb.1]}.$$

Nanosimy więc odcinek z od O_1 ku A_1, prowadzimy równoległą z tak otrzymanego punktu Z_1 do prostej $A_1 M_1$, a prosta $\overline{O_1\,bc\,.\,1}$ odetnie nam na niej długość $\overline{Z_1 Z'_1}$, która odpowiada wyrazowi z [bc.1]. Odcinek ten dodajemy algebraicznie do odcinka $\overline{A_1\,bl\,.\,1}$ i z w ten sposób otrzymanego punktu na prostej $\overline{A_1 M_1}$ (zaznaczywszy przy nim znak alg. odcinka = {[bl.1] + [bc.1] z}) opuszczamy prostopadłą do $\overline{A_1 M_1}$ aż do punktu przecięcia się z prostą $\overline{O_1 [bb.1]}$; odrzuciwszy wreszcie ów punkt na prostą $O_1 A_1$ otrzymamy odcinek y (licząc od punktu O_1), którego znak będzie przeciwny znakowi odcinka {[bl.1] + [bc.1] z}. (patrz fig. 4).

Analogicznie otrzymamy przy pomocy niewiadomych y i z z wykresu „a" niewiadomą x.

Po wyznaczeniu niewiadomych należy wyznaczyć jeszcze ich wagi, lub nawet wagi ich funkcyj.

fig. 4.
„b"



Jak wiadomo możemy przedstawić niewiadome x, y, z... jako linijne funkcye wielkości $l_1\ l_2\ldots$, nad któremi czyniliśmy nasze spostrzeżenia, a ponieważ równania błędów przedstawiliśmy w formie:

$$ax + by + cz \ldots\ldots + al = \delta,$$

przeto i kształt owych funkcyj będzie ogólnie następujący:

$$x + \frac{\delta x}{\delta l_1}\,l_1 + \frac{\delta x}{\delta l_2}\,l_2 + \frac{\delta x}{\delta l_3}\,l_3 + \ldots\ldots = 0$$

lub

$$x + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots\ldots = 0,$$

jeśli wyrazy $\frac{\delta x}{\delta l}$ nazwiemy przez α.

Nazwawszy $\frac{\delta y}{\delta l} = \beta$, a $\frac{\delta z}{\delta l} = \gamma$, możemy napisać (n. p. dla 3 niewiadomych):

$$-x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 = [\alpha l]$$

$$-y = \alpha_2 l_2 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 = [\beta l]$$

$$-z = \alpha_3 l_3 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 = [\gamma l]$$

a oznaczywszy średni błąd spostrzeżenia l o wadzie = 1 przez ε_0:

$$E_x^2 = [\alpha\,\alpha]\,\varepsilon_0^2 \qquad \frac{1}{P_x} = [\alpha\,\alpha]$$

$$E_y^2 = [\beta\,\beta]\,\varepsilon_0^2 \text{ lub } \frac{1}{P_y} = [\beta\,\beta]$$

$$E_z^2 = [\gamma\,\gamma]\,\varepsilon_0^2, \qquad \frac{1}{P_z} = [\gamma\,\gamma].$$

Pod E należy tu rozumieć średni błąd odnośnej niewiadomej, a przez P. jej wagę.

Jeśli następnie przejdziemy do E_F, śr. błędu funkcyi niewiadomych x, y, z...., to kwadrat jego przedstawi się następująco:

$$E_F^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta l_1}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta l_2}\right)^2 \varepsilon_2^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta l_3}\right)^2 \varepsilon_3^2,$$

a że

$$\frac{\delta F}{\delta l_i} = \frac{\delta F}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta l_i} + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta l_i} + \frac{\delta F}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta l_i}$$

lub $\frac{\delta F}{\delta l_i} = f_1 \cdot \alpha_i + f_2 \; \beta_i + f_3 \; \gamma_i$,

otrzymamy, zastępując pojedyncze kwadraty średnich błędów ε_i^2 przez ε_0^2, wedle wzoru $\varepsilon_i^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{p_i}$, po odpowiedniem uporządkowaniu całego wyrazu następujący wynik:

$$E_F^2 = \left\{ \begin{array}{l} [\alpha\alpha]\, f_1^2 + 2[\alpha\beta]\, f_1 f_2 + 2[\alpha\gamma]\, f_1 f_3 \\ \quad + [\beta\beta]\, f_2^2 + 2[\beta\gamma]\, f_2 f_3 \\ \quad + [\gamma\gamma]\, f_2^2 \end{array} \right\} \cdot \varepsilon_0^2,$$

a odwrotność wagi funkcyi:

$$\frac{1}{P_F} = \begin{array}{l} [\alpha\alpha]\, f_1^2 + 2\,[\alpha\beta]\, f_1 f_2 + 2\,[\alpha\gamma]\, f_1 f_3 \\ \quad + [\beta\beta]\, f_2 + 2\,[\beta\gamma]\, f_2 f_3 \\ \quad + [\gamma\gamma]\, f_3^2 \end{array}$$

Po wyznaczeniu wielkości sum $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ i t. d. i ε_0 mamy wszelkie dane do obliczenia śr. błędów niewiadomych i ich funkcyj.

Sumy owe $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ i t. d. wyznaczymy wykreślnie sposobem analogicznym do sposobu rachunkowego Hansena[1]). Sposobu tego będziemy używali przy wyrównaniu spostrzeżeń pośredniczących.

Przy wyrównaniu spostrzeżeń zawarowanych natomiast, będziemy się posługiwali wykreślnym sposobem opartym na następujących wzorach[2]):

$$E_F^2 = \left\{ \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 . 1]}{[bb . 1]} + \frac{[f_3 . 2]}{[cc . 2]} \right\} \varepsilon_0^2$$

$$\frac{1}{P_F} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 . 1]}{[bb . 1]} + \frac{[f_3 . 2]}{[cc . 2]}.$$

We wzorach tych oznacza:

$$[f_2 . 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1$$

$$[f_3 . 2] = [f_3 . 1] - \frac{[bc . 1]}{[bb . 1]} [f_2 . 1]$$

zaś $[f_3 . 1] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1$.

---

[1]) Astronomische Nachrichten tom 8, I. 192.

[2]) Patrz: n. p. F. R. Helmert Ausgleichnungsrechnung n. d. M. d. kl. Q., Lipsk i Berlin II. wyd., str. 180; lub W. Jordan, Handbuch d. Vermemessungskunde, Stuttgart 5 wydanie, I. tom, str. 92.

Jak więc widać, można przy pomocy już istniejących wykresów „a" „b" i „c" wyznaczyć odcinki odpowiadające powyższym wyrazom, a więc E_F^2 i $\frac{1}{P_F}$.

Sposób ten polecam przy wyrównaniu spostrzeżeń zawarowanych i wówczas, gdy zależy nam na wyznaczeniu śr. błędu funkcyi niewiadomych, a nie śr. błędów samych niewiadomych.

Omówimy teraz bliżej sposób wykreślny służący do wyznaczenis sum $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ i t. d.

Dla ich wyznaczenia mamy wedle Hansena (dla 3 równań norm.) trzy grupy po trzy równań dla wag:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} [aa]\,[\alpha\alpha] + [ab]\,[\alpha\beta] + [ac]\,[\alpha\gamma] - 1 = 0 \\ [ab]\,[\alpha\alpha] + [bb]\,[\alpha\beta] + [bc]\,[\alpha\gamma] = 0 \\ [ac]\,[\alpha\alpha] + [bc]\,[\alpha\beta] + [cc]\,[\alpha\gamma] = 0 \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} [aa]\,[\alpha\beta] + [ab]\,[\beta\beta] + [ac]\,[\beta\gamma] = 0 \\ [ab]\,[\alpha\beta] + [bb]\,[\beta\beta] + [bc]\,[\beta\gamma] - 1 = 0 \\ [ac]\,[\alpha\beta] + [bc]\,[\beta\beta] + [cc]\,[\beta\gamma] = 0 \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} [aa]\,[\alpha\gamma] + [ab]\,[\beta\gamma] + [ac]\,[\gamma\gamma] = 0 \\ [ab]\,[\alpha\gamma] + [bb]\,[\beta\gamma] + [bc]\,[\gamma\gamma] = 0 \\ [ac]\,[\alpha\gamma] + [bc]\,[\beta\gamma] + [cc]\,[\gamma\gamma] - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Dla wyznaczenia 6 niewiadomych $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ i t. d. użyję trzech zred. równ. normalnych trzeciej grupy, dwóch pierwszych zr. równ. norm. drugiej grupy i pierwszego zr. r. n. pierwszej grupy.

$$3) \; [\alpha\gamma] + \frac{[ab]}{[aa]} [\beta\gamma] + \frac{[ac]}{[aa]} [\gamma\gamma] = 0$$

$$[\beta\gamma] + \frac{[bc . 1]}{[bb . 1]} [\gamma\gamma] = 0$$

$$[\gamma\gamma] = \frac{1}{[cc . 2]}$$

$$2) \; [\alpha\beta] + \frac{[ab]}{[aa]} [\beta\beta] + \frac{[ac]}{[aa]} [\beta\gamma] = 0$$

$$[\beta\beta] + \frac{[bc . 1]}{[bb . 1]} [\beta\gamma] = \frac{1}{[bb . 1]}$$

$$1) \; [\alpha\alpha] + \frac{[ab]}{[aa]} [\alpha\beta] + \frac{[ac]}{[aa]} [\alpha\gamma] = \frac{1}{[aa]}$$

Taksamo więc jak niewiadome x, y i z możemy przy pomocy dawnych wykresów „a" „b" i „c" wyznaczyć wszystkie niewiadome sumy, począwszy od $[\gamma\gamma]$ aż do $[\alpha\alpha]$. (Patrz przykład na tablicy).

II. Powiększenie dokładności niewiadomych ich wag etc., otrzymanych wykreślnem wyrównaniem.

Zastanówmy się teraz nad skalą, w jakiej będziemy otrzymywali wyniki przy wykr. wyrównaniu.

Wprawdzie nie może być tu mowy o skale w jej właściwem znaczeniu, gdyż porównujemy tu liczbę niemianowaną z odcinkiem, który jest mianowany, aby jednak uzyskać podstawę do porównania liczb przedstawionych jako odcinki, zakładam, że jeżli jednostkom liczby odpowiadają centymetry na odcinku, to jest ona przedstawiona w skali 1 : 1. I tak n. p., jeżli przedstawię liczbę 94·8 odcinkiem wynoszącym 9·48 cm., powiem że naniosłem ją w skali 1 : 10.

$\overline{OA} = \overline{O_1 A_1} = \ldots\ldots 1$ nanosimy z reguły w skali 10 : 1, nazywając ją ogólnie literą o

Skalę dla współczynników [aa] i t. d prócz wyrazów wolnych obieramy stosownie do największego współczynnika, skalę dla wyrazów wolnych [al], [bl] i t. d. tak, by odcinki je przedstawiające były mniejsze jak odcinki odpowiadające wyrazom kwadratowym (n. p. odcinek przedstawiający wyraz [al] ma być mniejszy jak odcinek przedstawiający wyraz [aa] i t. d.).

Wspomnieć tu należy, że zwykle rozporządzamy wartościami przybliżonemi niewiadomych, szukając tylko ich poprawek, które będą zwyczajnie mniejsze od jedności, a więc będą przedstawiały odcinki nie przekraczające na prostej OA punktu A. Gdyby zaś zachodziła obawa przekroczenia tego punktu, należy przez zastosowanie odpowiedniej (mniejszej) skali dla wyrazów wolnych, zmniejszyć tak odcinki przedstawiające niewiadome, żeby wcale lub przynajmniej mało przekraczały punkta A.

Jak zaś dobór odpowiednich skal wpływa na skalę niewiadomych, widzimy najlepiej z porównania równania określającego nam niewiadomą z:

$-z = \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ z odcinkiem odpowiadającym niewiadomej z (patrz fig. 3)

Odcinek $O_2 A_2$ naniesiono tu w skali o

„ [cc . 2] „ „ „ k (skala wsp. [aa]... prócz wyraz. wolnych.

„ [cl . 2] naniesiono tu w skali l (skala wyrazów wolnych).

Nazwijmy skalę odcinka z przez S_z, to z fig. 3. widać, że $S_z = \frac{ol}{k}$.

Pamiętając o tem można zawsze tak skale obrać, aby nasze niewiadome jako odcinki były mniejsze lub mało co większe od długości $\overline{OA}$.

Aby nasze wykresy nie miały anormalnych wymiarów, należy przed rozpoczęciem wyrównania uwzględnić następujące uwagi:

1) Należy sprowadzić współczynniki równań błędów do mniej więcej tej samej wielkości, tak, by największy z nich nie był 10 razy większy od najmniejszego. (N. p. $101_x + 8{\cdot}9_y + 0{\cdot}5_z + l = 0$ zamienimy na następujące równanie błędów:
$10{\cdot}1\,\xi + 8{\cdot}9_y + 5\,\zeta + l = 0$, gdzie $\xi = 10x$, a $\zeta = 0{\cdot}1z$).

2) Ze stosunków $\frac{[al]}{[aa]}$, $\frac{[bl]}{[bb]}$ i t. d. można wywnioskować w przybliżeniu o wielkości niewiadomych[1]); po obiorze więc skal o i k, (uwzględniając najw. wyraz kwadr.) należy przyjąć taką skalę l, by odcinki przedstawiające niewiadome były przypuszczalnie mniejsze, lub małoco większe od długości AO. Nazwijmy stosunek $\frac{o}{k}$ literą p, a stosunek $\frac{l}{k}$ literą q, wówczas przedstawi się skala niewiadomych $S_{xyz} = p\,.\,q\,.\,k$.

Ponieważ l jest poprzedniemi uwagami uwarunkowane, zdarzy się często, że q będzie mniejsze od jedności, czyli że wpłynie niekorzystnie na dokładność wyniku wyrównania.

Z powodu jednak, że możemy, jak to zaraz wykażę, bardzo małym nakładem pracy znacznie powiększyć dokładność naszych rezultatów, wyznaczymy powyższym sposobem nasze niewiadome, choćby z bardzo małą dokładnością, wstawimy je do równań normalnych, otrzymując (naturalnie rachunkowo) po prawej stronie równań zamiast zera pewne odchyłki ω_1, ω_2, ω_3. Otrzymaliśmy więc zamiast prawdziwych wartości na x, y i z wartości przybliżone x′ y′ i z′, a chcąc je poprawić musimy je uważać jako spostrzeżenia zawarowane.

---

[1]) Rozumowanie to oparte jest na pośrednim sposobie rozwiązywania r. norm. Jacobi'ego.

I tak warunkami które spełnić należy, są tu równania normalne:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] = 0$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bl] = 0$$
$$[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cl] = 0,$$

po wstawieniu zaś za niewiadome naszych wartości, otrzymamy:

$$[aa]\,x' + [ab]\,y' + [ac]\,z' + [al] = w_1$$
$$[ab]\,x' + [bb]\,y' + [bc]\,z' + [bl] = w_2$$
$$[ac]\,x' + [bc]\,y' + [cc]\,z' + [cl] = w_3$$

Zachodzi tu jednak specyalny wypadek, że mamy tyle warunków ile niewiadomych, a więc ściśle określone zadanie.

Jeżli nazwiemy różnice $(x-x') = \delta x$, $(y-y') = \delta y$ i $(z-z') = \delta z$, i porównamy ze sobą powyższe równania, otrzymamy następujący nowy system równań normalnych, o niewiadomych δx, δy i δz:

$$[aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y + [ac]\,\delta z + w_1 = 0$$
$$[ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y + [bc]\,\delta z + w_2 = 0$$
$$[ac]\,\delta x + [bc]\,\delta y + [cc]\,\delta z + w_3 = 0,$$

lub w formie zredukowanej:

$$\delta x + \frac{[ab]}{[aa]}\delta y + \frac{[ac]}{[aa]}\delta z + \frac{\omega_1}{[aa]} = 0$$
$$\delta y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\delta z + \frac{[\omega_2.1]}{[bb.1]} = 0$$
$$\delta z + \frac{[\omega_3.2]}{[cc.2]} = 0.$$

Gdy więc w naszych wykresach „a“ „b“ i „c“ naniesiemy (w odpowiedniej skali w) odchyłki ω_1, ω_2, ω_3, zredukujemy

ω_2 na $[\omega_2 . 1] = \omega_2 - \dfrac{[ab]\,\omega_1}{[aa]}$, a

ω_3 na $[\omega_3 . 2] = \omega_3 - \dfrac{[ac]\,\omega_1}{[aa]} - \dfrac{[bc.1]\,\omega_3}{[bb.1]}$

otrzymamy przy bardzo małym nakładzie pracy poprawki δx, δy i δz.

Gdyby jeszcze i teraz równania normalne nie były dostatecznie zaspokojone, przeprowadzilibyśmy na wzór drugiego trzecie wyrównanie, otrzymując ogólnie nasze niewiadome w kształcie następujących szeregów:

$$x = x' + \delta x + \delta' x + \delta'' x + \ldots\ldots$$
$$y = y' = \delta y + \delta' y + \delta'' y + \ldots\ldots$$
$$z = z' + \delta z + \delta' z + \delta'' z + \ldots\ldots$$

W zwyczajnych warunkach będą jednak te szeregi tak silnie zbieżne, że wystarczy tylko podwójne wyrównanie. Przykład. Niech będzie przy pierwszem wyrównaniu $k = 1:1$, $o = 10:1$, $l = 1:10$, a więc $\delta_{xyz} = \dfrac{ol}{k} = 1:1$, gdy zaś po wstawieniu naszych rezultatów otrzymaliśmy niezgodności w setnych, naniesiemy je w skali $w = 100:1$, otrzymujemy poprawki δ_x δ_y i δ_z w skali $s\,\delta_x = \dfrac{o\omega}{k} = 1000:1$.

Tak samo możemy i rezultaty wykreślne otrzymane dla wyrazów $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ poprawić, tylko, że zwyczajnie nie zależy nam w tym wypadku na wielkiej dokładności.

W wypadku gdy niesprawdzamy naszych rezultatów przez wstawienie ich do równań normalnych, możemy użyć kontroli wykreślnej, polegającej na wykreślnem przedstawieniu następujących znanych równań:

$$x + [al]\,[\alpha\alpha] + [bl]\,[\alpha\beta] + [cl]\,[\alpha\gamma] = 0$$
$$y + [al]\,[\alpha\beta] + [bl]\,[\beta\beta] + [cl]\,[\beta\gamma] = 0$$
$$z + [al]\,[\alpha\gamma] + [bl]\,[\beta\gamma] + [cc]\,[\gamma\gamma] = 0$$

Jeżliśmy nanieśli przy wyznaczaniu wyrazów $[\alpha\alpha]$ i t. d. jednostkę w skali $\varkappa$, otrzymamy te wyrazy analogicznie do poprzednich uwag w skali $\dfrac{o\varkappa}{k}$, zaś wyszukując w naszych wykresach odcinki odpowiadające iloczynom $[al]$ $[\alpha\alpha]$ i t. d. i sumując je algebraicznie otrzymamy kontrolę dla niewiadomych x, y i z w skali $S'_x = \dfrac{\varkappa l}{k}$ na mocy proporcyi:

$$\frac{o\varkappa}{k} : o = S'_x : l.$$

Sumę $[p\delta\delta]$ konieczną do obliczenia średniego błędu jednostkowego możemy otrzymać w dwojaki sposób, albo przez wstawienie wyznaczonych niewiadomych w równania błędów, albo w sposób czysto wykreślny polegający na tworzeniu wyrazów, które odjęte od $[ll]$ dają nam $[p\delta\delta]$ ewentualnie $[\delta\delta] = [ll.3]$ (dla 3 niew.) $[\delta\delta] = [ll.3] =$

$$[ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - \frac{[bl.1][bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[cl.2][cl.2]}{[cc.3]}$$

To wykreślne odejmowanie można wykonać na dowolnej prostej, należy tylko naprzód nanieść $[ll]$ w skali $S_{[\delta\delta]} = \dfrac{ll}{k}$.

Czasem, gdy $[ll]$ dałaby w tej skali bardzo długi odcinek, nanosimy tylko część $[ll]$, zaznaczając punkt początkowy tej linii odpowiednią cyfrą.

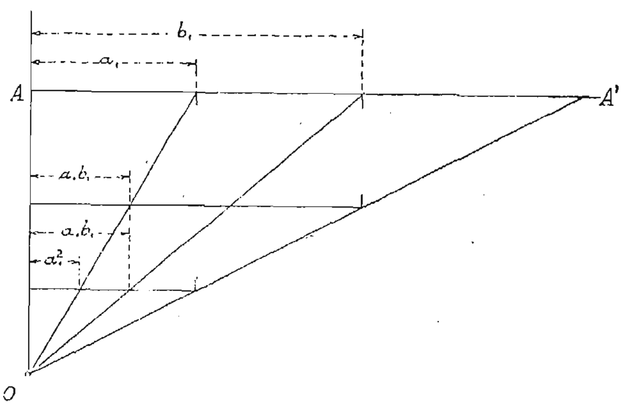
Ponieważ sposób ten daje nam $[p\delta\delta]$ w pewnej z góry określonej skali, która czasem może być bardzo małą, ustępuje on sposobowi pierwszemu, jest jednak zwykle wystarczającym ze względu na to, że dla wyznaczenia ε_0 śr. błędu jedn., należy wynik podzielić przez $\mu - k$ (k = liczbie niew.) i wyciągnąć z tak otrzymanej liczby 2-gi pierwiastek $\left(\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-k}}\right)$.

Poniżej zestawiłem tabelę, na której podane są wprost wzory na skalę naszych rezultatów, wynikające z obrania skali odpowiednich wyrazów.

Tabela oryentacyjna dla skal:

obierając dla	skalę	otrzymamy dla	skalę
współczynników [aa], [bb]...	k	niewiadomych x, y, z	$\frac{o\,l}{k} = p.q.k$
jednostki na prostej OA	$o = p.k$	wyrazów $[\alpha\alpha]'$ $[\alpha\beta]'$	$\frac{o\,\varkappa}{k} = p.r.k$
wyrazów wolnych [al] [bl]....	$l = q.k$	poprawek δx, δy, δz	$\frac{o\omega}{k} = p.s.k$
dla jednostki przy wyznaczaniu $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$	$\varkappa = r.k$	poprawek $\delta[\alpha\alpha]$, $\delta[\alpha\beta]$, $\delta[\alpha\gamma]$	$\frac{o\omega'}{k} = p.t.k$
wyrazów wolnych ω_1, ω_2, ω_3	$\omega = s.k$	$[p\delta\delta]$	$\frac{l\,l}{k} = q^2.k$
wyrazów wolnych dla poprawy $[\alpha\alpha]$... $\omega_{\alpha 1}$ $\omega_{\alpha 2}$ $\omega_{\alpha 3}$	$\omega' = t.k$	$\frac{1}{P}$	$\frac{f.f}{k} = u^2.k$
wyrazów: f_1, f_2, f_3	$f = u.k$	kontrolne x, y, z	$\frac{\varkappa.l}{k} = q.r.k$

fig. 5.



Przy pomocy podobnych wykresów można także i tworzyć równania normalne.

Na fig. 5. przedstawiam wykres, przy pomocy którego możemy otrzymać wszystkie wyrazy równań normalnych. Należy tu jednak uważać na skalę w jakiej wyrazy [aa] i t. d. z wykresu odbierzemy. Ponieważ przyjmuję tu dla jedności $= \overline{OA}$ pewną skalę o, a dla jedności $= \overline{AA'}$ będę zmuszony przyjąć często inną skalę o' następnie nanoszę liczby a_1, b_1 i t. d. w skali i, więc na mocy podobieństwa odpowiednich trójkątów otrzymam skalę dla wyrazów [aa], [ab] itd.: $k = \frac{i^2}{o'}$. Dla lepszej oryentacyi zaznaczyłem na fig. 5. wyrazy a_1^2 i $a_1\,b_1$, powstałe z wyrazów a_1 i b_1.

Zdaje mi się jednak, że lepiej będzie wyznaczyć owe sumy przy pomocy tablic i dopiero przy rozwiązywaniu równań normalnych zastosować powyżej podaną metodę wykreślną.

Sposób wykreślny podany przezemnie ma tę własność, że tem bardziej nadaje się do użycia, im więcej niewiadomych mają równania normalne. Nadaje się więc znakomicie przy wyrównaniu siatek niwelacyjnych i tryangulacyjnych.

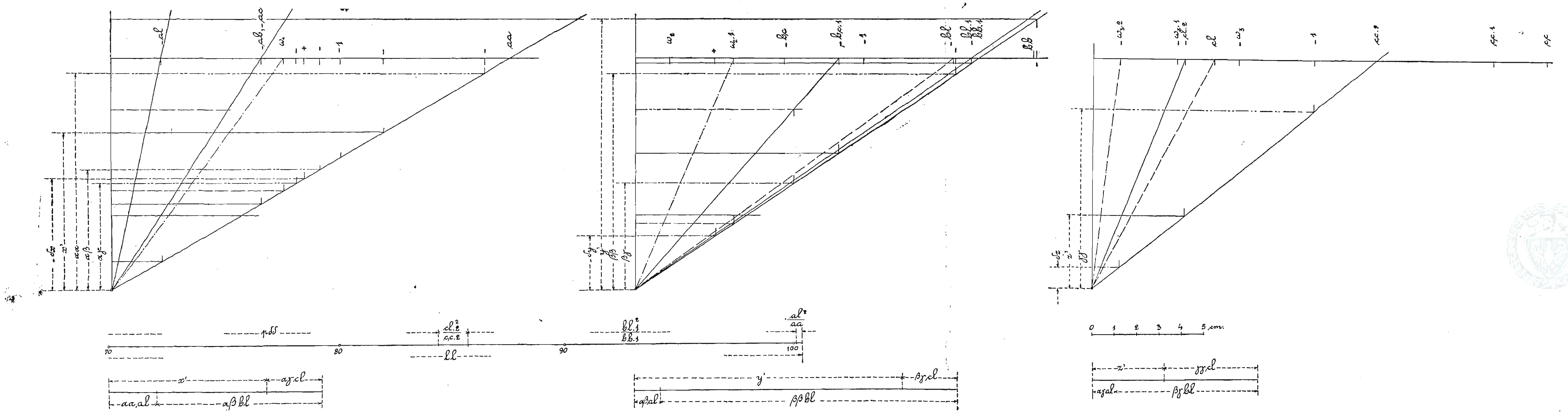
Ponieważ przy tem ostatniem wyrównaniu zajdzie warunek sinusowy, więc równanie normalne mu odpowiadające będzie miało współczynniki zwyczajnie różne od współczynników innych równań normalnych.

Najlepiej będzie w tym wypadku, gdy odpowiednie równanie normalne (o współczynnikach różniących się od reszty równań n) przedstawimy w wykresie „a“, który cały będzie większy lub mniejszy od innych wykresów zależnie od współczynników [aa] [ab]. Jednem słowem należy nanieść współczynniki pierwszego równania n. w skali $k.m = k'$, a odbierając z wykresu „a“ potrzebne nam wyrazy do redukcyi innych równań n. przez m wykreślnie dzielić. Jest to rzecz zbyt prosta by się nad nią dłużej rozwodzić.

Nakoniec podaję tablicę, na której przedstawiłem wykreślne wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących, wyrównanych rachunkowo (względnie wysówką) w Handbuch d. Vermessungkunde W. Jordana, tom I, str. 102, Stuttgart 1904.

Na przykładzie tym widać, jak szybko *wzrasta dokładność rezultatów przez zastosowanie* do nich powtórnego wyrównania. Mamy tu dane wprost równania normalne:

TABLICA.



$$\left.\begin{array}{r} +\underline{17{\cdot}50x} - 6{\cdot}50y - 6{\cdot}50z - 2{\cdot}14 = 0 \\ +\underline{17{\cdot}50y} - 6{\cdot}50z - 13{\cdot}96 = 0 \\ +\underline{20{\cdot}50z} + 5{\cdot}40 = 0 \\ +100{\cdot}34 \end{array}\right\}$$

Ponieważ, chcąc uniknąć bardzo długich wykresów możemy przedstawić współczynniki r. n. (bez wyrazów wolnych) co najwięcej w skali $k = 1:1$, a następnie jak to widać ze stosunków $\frac{[al]}{[aa]}$ i t. d. niewiadome nie będą się wiele różniły od jedności, możemy przyjąć skalę dla niewiadomych $S_{xyz} = 0$ ($=10:1$), gdyż nie ma obawy, by odcinki x, y i z przekroczyły znacznie punkta A, A_1 i A_2. A więc skalę dla wyrazów wolnych l otrzymamy:

$$l = \frac{S_{xyz}\,.\,k}{o} = 1:1.$$

(Przy wyrównaniu siatek tryangulacyjnych przyjmujemy dla bezpieczeństwa l mniejsze niż z powyższego wzoru wypada).

Z pierwszego wyrównania otrzymaliśmy [1]) niewiadome x, y i z w skali $S_{xyz} = 10:1$, a mianowicie $x' = 0{\cdot}68$, $y' = 1{\cdot}17$, $z' = 0{\cdot}32$. Po wstawieniu tych wartości w równania normalne otrzymujemy różnice: $\omega_1 = 0{\cdot}075$ $\omega_2 = 0{\cdot}015$, $\omega_3 = -0{\cdot}065$, które naniesione w skali $w = 100:1$, wyznaczają nam poprawki δx, δy i δz w skali $\frac{o\,\omega}{k} = 1000:1$, a więc odczytując na wykresach mamy:
$\delta x = -0{\cdot}0048$, $\delta y = -0{\cdot}0023$, $\delta z = 0{\cdot}0009$, czyli ostatecznie:

$$x = 0{\cdot}6752,\; y = 1{\cdot}1677,\; z = 0{\cdot}3209.$$

Dalsze poprawianie niewiadomych uważamy za zbyteczne.

Wreszcie przyjmując dla jedności skalę $\varkappa = 10:1$, wyznaczyliśmy sumy $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ i t. d. w skali $\frac{o\,\varkappa}{k} = 100:1$.

A więc:

$[\alpha\alpha] = 0{\cdot}094$
$[\alpha\beta] = 0{\cdot}052$ $[\beta\beta] = 0{\cdot}093$
$[\alpha\gamma] = 0{\cdot}046$ $[\beta\gamma] = 0{\cdot}046$ $[\gamma\gamma] = 0{\cdot}078$

Poniżej umieściłem kontrolę dla niewiadomych w skali $\frac{\varkappa l}{k} = 10:1$ i wyraz $[p\delta\delta]$ w skali $\frac{ll}{k} = 1:1$, a więc $[p\delta\delta] = 84{\cdot}35$.

Jak więc widzimy otrzymaliśmy, stosując proste wyrównanie te same cyfry co Jordan, tam zaś gdzie stosowaliśmy podwójne wyrównanie, zwiększyła się dokładność znacznie.

[1]) Ponieważ tablica z przykładem będzie prawdopodobnie w druku zmniejszona uwidoczniłem na niej podziałkę w skali 1 : 1, aby mogła służyć dla porównania zmniejszenia.