

ZYGMUNT ZAWISŁAWSKI

**PODSTAWOWE METODY
OPRACOWYWANIA
DANYCH DOŚWIADCZALNYCH**

INSTYTUT FIZYKI POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
WARSZAWA, 1982 r.

ZYGMUNT ZAWISŁAWSKI

**PODSTAWOWE METODY
OPRACOWYWANIA
DANYCH DOŚWIADCZALNYCH**

INSTYTUT FIZYKI POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
WARSZAWA, 1982 r.

SPIS TRESCI

1. Wprowadzenie
2. Wielkości i jednostki fizyczne
 - 2.1. Międzynarodowy Układ Jednostek /SI/
 - 2.1.1. Jednostki podstawowe i uzupełniające
 - 2.2. Jednostki pochodne
 - 2.3. Jednostki wielokrotne i podwielokrotne
3. Błędy pomiarowe
 - 3.1. Zadania pomiarów
 - 3.1.1. Błąd bezwzględny
 - 3.2. Rodzaje błędów
 - 3.2.1. Błędy grube
 - 3.2.2. Błędy systematyczne
 - 3.2.3. Błędy przypadkowe /losowe/
 - 3.2.4. Uwagi ogólne dotyczące błędów losowych i systematycznych
4. Cyfry znaczące
5. Błąd względny i bezwzględny
 - 5.1. Przybliżone metody obliczania błędów względnych i bezwzględnych liczb przybliżonych
 - 5.2. Obliczanie błędów bezwzględnych liczb przybliżonych
6. Wykonywanie działań rachunkowych na liczbach przybliżonych
 - 6.1. Dodawanie liczb przybliżonych
 - 6.2. Odejmowanie liczb przybliżonych
 - 6.3. Mnożenie liczb przybliżonych
 - 6.4. Dzielenie liczb przybliżonych
 - 6.5. Mnożenie i dzielenie liczb przybliżonych
 - 6.6. Potęgowanie liczb przybliżonych
 - 6.7. Pierwiastkowanie liczb przybliżonych
 - 6.8. Obliczanie i zaokrąglanie wyników końcowych
7. Wzory przybliżone
8. Prawo rozkładu błędów przypadkowych
 - 8.1. Rozkład normalny
 - 8.2. Wartości średnie pomiarów o jednakowej dokładności
9. Rodzaje błędów pomiarowych
 - 9.1. Średni błąd kwadratowy

- 9.2. Średni błąd arytmetyczny
- 9.3. Błąd prawdopodobny
- 9.4. Zależności matematyczne między poszczególnymi rodzajami błędów
- 9.5. Oszacowanie błędu standardowego
- 9.6. Średni błąd kwadratowy wartości średniej
- 9.7. Przedział ufności
 - 9.7.1. Wyznaczanie przedziału ufności przy znanym
 - 9.7.2. Wyznaczanie przedziału ufności przy znanej wartości S_n
 - 9.7.3. Wyznaczanie przedziału ufności na podstawie rozpiętości wyników
- 10. Metody wykluczania dużych błędów
 - 10.1. Metody wykluczania pomyłek przy znanym, średnim ~~błędzie~~ układzie kwadratowym
 - 10.1.1. Wykluczanie pomyłek przez porównanie ich do znanej wartości współczynnika k
 - 10.1.2. Metoda wykluczania pomyłek przy przyjętym prawdopodobieństwie
 - 10.2. Metoda wykluczania pomyłek przy pomocy błędu standardowego
 - 10.3. Metoda wykluczania pomyłek przy nieznanym błędzie standardowym
 - 10.4. Metoda graficzna wykluczania pomyłek
 - 10.5. Sprawdzanie normalności rozkładu
 - 10.5.1. Sprawdzanie normalności rozkładu metodą graficzną
 - 10.5.2. Przybliżona metoda sprawdzania rozkładu normalnego
 - 10.5.3. Test zgodności
- 11. Ilość niezbędnych pomiarów
- 12. Błędy wyników złożonych
 - 12.1. Błędy obliczania wartości funkcji jednej zmiennej
 - 12.2. Błędy obliczania wartości funkcji wielu zmiennych
 - 12.2.1. Błąd maksymalny wartości funkcji wielu zmiennych
 - 12.2.2. Błąd losowy wartości funkcji wielu zmiennych
- 13. Niektóre zagadnienia optymalizacji metod pomiarowych
 - 13.1. Ocena roli błędów w poszczególnych ogniwach procesu mierzenia

- 13.1.1. Ocena roli błędów bezwzględnych przy zastosowaniu metody równych wpływów
- 13.1.2. Ocena roli błędów względnych przy zastosowaniu metody równych wpływów
- 13.1.3. Wpływ liczb przybliżonych na wartość błędu wyniku złożonego
- 13.2. Określenie najbardziej dogodnych warunków pomiaru
- 14. Analiza graficzna rezultatów pomiarów
 - 14.1. Tablice
 - 14.2. Diagramy
 - 14.3. Wykresy
 - 14.4. Skale funkcyjne
 - 14.4.1. Moduł i długość skali
 - 14.4.2. Rodzaje skal funkcyjnych
 - A. Skale równomierne
 - B. Skala logarytmiczna
 - C. Skala potęgowa
 - D. Skala trygonometryczna
 - E. Skale podwójne
 - 14.5. Wykreślanie skal funkcyjnych przy pomocy "Harfy"
 - 14.6. Siatki funkcyjne
 - 14.7. Dobór odpowiedniej skali i siatki funkcyjnej
 - 14.8. Interpolacja graficzna
 - 14.9. Ekstrapolacja graficzna
 - 14.10. Graficzne różniczkowanie
 - 14.10.1. Wyznaczanie pochodnej metodą cięciw
 - 14.10.2. Wyznaczanie pochodnej metodą stycznej
 - 14.10.3. Wyznaczanie pochodnej metodą normalnej
 - 14.10.4. Graficzne wyznaczanie pochodnej
 - 14.11. Całkowanie graficzne
 - 14.11.1. Metoda średniej rzędnej
 - 14.11.2. Inne metody wyznaczania powierzchni
 - 14.11.3. Wyznaczanie funkcji pierwotnej
- 15. Przedstawienie danych doświadczalnych za pomocą równań
 - 15.1. Wybór wzorów empirycznych
 - 15.1.1. Wybór odpowiedniego wzoru prostującego
 - 15.1.2. Opis danych doświadczalnych funkcjami liniowymi
 - 15.1.3. Funkcje ułamkowo-liniowe
 - 15.1.4. Funkcje potęgowe i wykładnicze
 - 15.2. Metody wyznaczania stałych równania

15.2.1. Metoda średnich

15.2.2. Metoda najmniejszych kwadratów

A. Równania liniowe

B. Równania kwadratowe

C. Równania potęgowe

D. Równania wykładnicze

16. Korelacje liniowe

17. Sprawozdanie z badań

17.1. Tytuł i streszczenie

17.2. Wprowadzenie i postawienie problemu

17.3. Problem w literaturze przedmiotu

17.4. Metoda badań

17.5. Własne badania i doświadczenia

17.6. Dyskusja nad wynikami

17.7. Zestawienie wyników i wnioski

17.8. Wykaz literatury

18. Bibliografia.

P r z e d m o w a

Niniejsze opracowanie zostało napisane z myślą o studentach Wydziału Poligrafii, odrabiających Laboratorium Fizyczne. Może ono także służyć pomocą studentom innych wydziałów.

Opracowanie zostało napisane w ten sposób, że podaje gotowe wzory i reguły stosowane przy opracowywaniu wyników doświadczeń, na ogół bez podania wyprowadzeń i dowodów. Autor wyszedł z założenia, że taka forma w znacznym stopniu uprości korzystanie z opracowania.

W przypadku szerszego zainteresowania się Czytelników teoretyczną stroną poruszanych zagadnień, może On sięgnąć do podanej w bibliografii literatury przedmiotu.

Zarówno układ, jak i sposób podania wzorów oraz reguł jest tak opracowany, aby można było z niego korzystać bez potrzeby studiowania pozostałych podrozdziałów.

1. Wprowadzenie

Podstawą każdego obiektywnego badania i sprawdzania hipotezycznych względnie już poznanych prawidłowości przyrody jest doświadczenie, którego istota polega na śledzeniu drogą pomiarów pewnych szczególnych zjawisk czy też ogólnych związków. Doświadczenie dąży do ustalenia, najpierw jakościowego, od jakich parametrów zależy przebieg zjawiska fizycznego. Jeśli udało się już wykryć takie związki między pojęciami stworzonymi dla prostego ujęcia i opisu rozważanego zjawiska, przychodzi natychmiast kolej na ilościowe zbadanie zauważonej zależności poprzez mierzenie liczbowych związków między odpowiednimi parametrami. Tego rodzaju pomiar polega na porównaniu, dającej się ująć doświadczalnie, badanej wielkości w drodze właściwie posta-

wionego postępowania mierniczego, z wielkościami tego samego rodzaju, jednoznacznie ustalonymi liczbowo.

Formułowanie matematyczne doświadczalnie wykrytego prawa przedstawia związek pomiędzy wartościami wyznaczonymi w drodze pomiarów. Te wartości liczbowe, wyznaczone doświadczalnie, zależą z jednej strony od wyrażonego przez nie prawa przyrody, z drugiej zaś - od użytych wzorów tego samego rodzaju. Wzory w których występują uzyskane w ten sposób wartości liczbowe, nazywamy wzorami liczbowymi albo formułami.

Każdą wielkość fizyczną daje się przedstawić jako iloczyn dwu czynników: wartości liczbowej i jednostki miary, z których pierwszy charakteryzuje ją ilościowo, drugi jakościowo.

Wyrażenie prawidłowości fizycznych odpowiednimi wzorami opiera się na założeniu, że występujące w tych wzorach symbole matematyczne przedstawiają szczególne rodzaje wielkości. Wzory są więc matematycznym ujęciem powiązań między pojęciami fizycznymi, podającymi związki między rodzajami badanych wielkości, które wprowadzono dla opisu prawidłowości fizycznych.

Wyniki pomiarów fizycznych są z natury obciążone pewną niedokładnością wynikającą z najrozmaitszych przyczyn. Przede wszystkim wielkości, które należy zmierzyć, są same niezbyt dokładnie zdefiniowanymi średnimi /gęstość, temperatura z uwagi na ruchy Browna, długość prętów itp./, tak że różnice między poszczególnymi wynikami są oczywiste. Dochodzi do tego jeszcze ograniczona dokładność odczytu na przyrządach używanych do pomiarów, jak również i ich ograniczona dokładność, abstrahując nawet od niedoskonałości, które nie dadzą się uniknąć, a powodują powstanie błędów systematycznych. Ponadto przy obserwacji wielkości fizycznych w trakcie procesów odbywających się w dłuższym czasie, dochodzą jeszcze dalsze niedokładności pomiarowe, wynikające z predyspozycji osobowych obserwatora.

W obliczu tych faktów rozumie się, że użycie matematyki przy liczbowym ustalaniu wyników doświadczeń i ich dalszym zastosowaniu winno odbywać się z jak najdalej idącą ostrożnością. Metody matematyczno-statystyczne mają niepodważalne znaczenie dla określenia rzeczywistej wielkości błędu, ale usunąć lub przynajmniej ograniczyć błąd można tylko drogą eksperymentalną,

co wymaga wykrycia przyczyny jego pojawienia się i oceny jego wielkości.

W niniejszej pracy omówiono wiele zagadnień z rachunku i dyskusji błędów oraz praktycznych wskazówek przy opracowywaniu wyników doświadczeń. W rozdziałach 1 - 4 omówiono rodzaje błędów najczęściej spotykanych w praktyce oraz sposoby ich wyznaczania. W rozdziałach 5-6 podano przybliżone metody obliczania błędów bezwzględnych i względnych liczb przybliżonych oraz wykonywanie podstawowych działań rachunkowych na tych liczbach. Podano także stosowane prawidła i reguły zaokrąglania wyników pośrednich i końcowych oraz zestawienie najbardziej i najpowszechniej stosowanych wzorów przybliżonych, ze względu na ich dość częste stosowanie w praktyce obliczeniowej /rozd. 7/. Szeroko omówiono w aspekcie zastosowawczym prawo rozkładu błędów przypadkowych oraz wszystkie rodzaje błędów związanych z tym rozkładem /rozd. 8 - 9/. Podano kilka sposobów wykluczania dużych błędów /pomyłek/ oraz metody stosowane przy sprawdzaniu rozkładu normalnego /rozd. 10/. W rozdziale 12 podano wzory stosowane przy obliczaniu błędów wyników złożonych. Dokładna analiza błędów pomiarów złożonych pozwala na optymalizację metod pomiarowych oraz ocenę roli błędów w poszczególnych ogniwach procesu mierzenia /rozd. 13/. Następny rozdział poświęcony jest graficznemu opracowywaniu wyników pomiarowych, gdzie omówiono wykonanie wykresów siat funkcyjnych, siatek funkcyjnych interpolacji, ekstrapolacji, graficznemu różniczkowaniu i całkowaniu itp. /rozd. 14/. Szeroko omówiono i podano praktyczne wskazówki przy dobieraniu odpowiednich krzywych aproksymujących otrzymane krzywe doświadczalne. Omówiono metodę średnich, metodę najmniejszych kwadratów oraz wzory na korelację liniową /rozd. 15 - 16/. Liczne przykłady we wszystkich rozdziałach ilustrują podane wzory. Przedstawiono także praktyczne wskazówki przy wykonywaniu sprawozdań z przeprowadzonych badań /rozd. 17/. Na końcu znajduje się spis literatury, na której głównie oparto się przy pisaniu niniejszego skryptu.

przedrostek	oznaczenie	mnożnik
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hekto	h	10^2
deka	da	10^1
decy	d	10^{-1}
centy	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro		10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Tabela 2.2. Przedrostki i oznaczenia do tworzenia jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych.

J e d n o s t k i p o d s t a w o w e		
Wielkość	nazwa jednostki	oznaczenie
Długość	metr	m
Masa	kilogram	kg
Czas	sekunda	s
Prąd elektryczny	amper	A
Temperatura	Stopień Kelwina	$^{\circ}\text{K}$
Światłość	kandela	cd
J E D N O S T K I U Z U P E Ł N I A J A C E		
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr
ilość materii	mol	mol

Tabela 2.1. Jednostki zasadnicze /podstawowe i uzupełniające/
międzynarodowego układu jednostek SI.