względnie do jednego miejsca znaczącego,

- Sam wynik pomiaru musimy obliczać z dokładnością do kilku miejsc znaczących, tak aby liczba obliczonych miejsc dziesiętnych przekroczyła liczbę miejsc dziesiętnych błędów pomiarowych. Np. obliczamy $X = 378,53$ w przypadku gdy $\Delta X = 2,3$,

- Wynik końcowy zaokrąglamy na tym samym miejscu dziesiętnym co błąd pomiaru np. $378,5 \pm 2,3$,

- Zaokrąglenie wyniku końcowego wielkości mierzonej wykonujemy według jednej z powszechnie przyjętych zasad, a mianowicie:

1/ cyfry 0 - 4 zaokrąglamy w dół, a cyfry 5 -9 w górę,

2/ cyfry 0 - 4 zaokrąglamy w dół, cyfry 6 - 9 w górę a cyfrę 5 do liczby parzystej czyli w dół, gdy poprzedza ją cyfra parzysta, a w górę gdy poprzedza ją cyfra nieparzysta,

3/ cyfry 0 - 49 zaokrąglamy w dół, a cyfry 50 - 99 w górę.

Można stosować dowolną z tych zasad, lecz w danym zagadnieniu należy stosować konsekwentnie tylko jedną z nich.

7.0. Wzory przybliżone.

Przy obliczeniach na liczbach przybliżonych nie ma sensu posługiwać się wzorami dającymi dużo większą dokładność niż dokładność oceny danych wyjściowych. Podstawowym źródłem wzorów przybliżonych są szeregi, zwłaszcza szeregi Taylora. Przy posługiwaniu się wzorami należy zwracać szczególą uwagę na oceny ich błędów, gdyż zazwyczaj wzory przybliżone dla różnych przedziałów mają różne błędy.

Zestawienie ważniejszych wzorów przybliżonych wraz z zakresem ich błędów podano w tabeli nr 7.1.

8.0. Prawo rozkładu błędów przypadkowych.

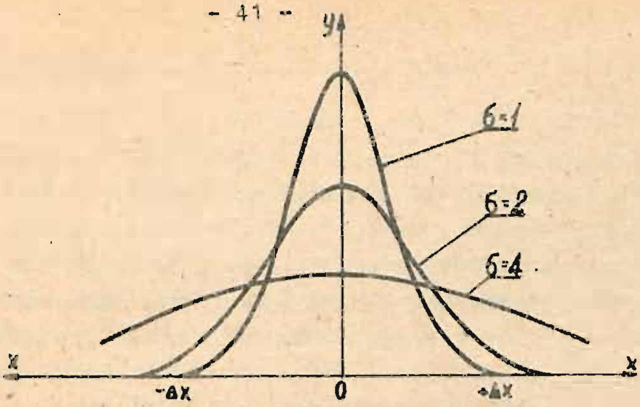
Występowanie błędów przypadkowych podlega pewnej prawidłowości, której matematyczne sformułowanie stanowi węzłowe zagadnienie teorii błędów. W celu znalezienia błędu pomiarów należy powtórzyć wielokrotnie mierzenie danej wielkości. Jeśli każdy pomiar daje wynik nieco inny, mamy do czynienia z sytuacją, gdy główną rolę odgrywa błąd losowy.

Tabela 7.1. Wzory przybliżone.

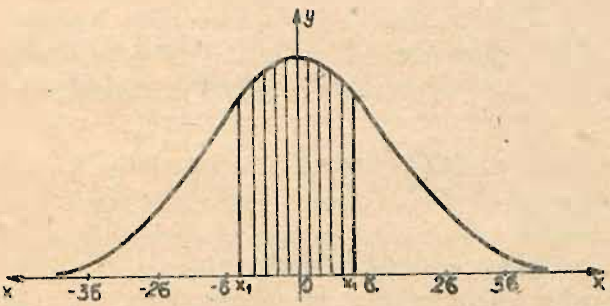
Lp.	Wzory przybliżone	Błąd nie przekracza		
		0,1 %	1,0 %	10 %
		Zakres zmienności $x^{\pm}$	zakres zmienności $x^{\pm}$	zakres zmienności $x^{\pm}$
1.	$\sin x = x$	$0{,}077 = 4{,}4^\circ$	$0{,}245 = 14^\circ$	$0{,}786 = 45^\circ$
2.	$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$0{,}58 = 33{,}2^\circ$	$1{,}005 = 57{,}6^\circ$	$1{,}632 = 93{,}5^\circ$
3.	$\cos x = 1$	$0{,}045 = 2{,}68$	$0{,}141 = 8{,}1^\circ$	$0{,}451 = 25{,}8^\circ$
4.	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$0{,}386 = 22{,}1^\circ$	$0{,}662 = 37{,}9^\circ$	$1{,}036 = 59{,}3^\circ$
5.	$\operatorname{tg} x = x$	$0{,}054 = 3{,}1^\circ$	$0{,}172 = 9{,}8^\circ$	$0{,}517 = 29{,}6^\circ$
6.	$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$	$0{,}293 = 16{,}8^\circ$	$0{,}519 = 29{,}7^\circ$	$0{,}895 = 51{,}3^\circ$
7.	$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$	$-0{,}085\,a^2$ do $+0{,}093\,a^2$	$-0{,}247\,a^2$ do $+0{,}328\,a^2$	$-0{,}607\,a^2$ do $+1{,}545\,a^2$
8.	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$	$-0{,}051\,a^2$ do $+0{,}052\,a^2$	$-0{,}157\,a^2$ do $+0{,}166\,a^2$	$-0{,}448\,a^2$ do $+0{,}530\,a^2$
9.	$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$\pm 0{,}031\,a$	$\pm 0{,}099\,a$	$\pm 0{,}301\,a$
10.	$e^x = 1 + x$	$-0{,}045$	$-0{,}134$ do $+0{,}148$	$-0{,}375$ do $+0{,}502$
11.	$\ln\lvert 1+x \rvert = x$	$\pm 0{,}002$	$\pm 0{,}020$	$-0{,}176$ do $+0{,}230$
12.	$\lvert a+b \rvert^k = a^k + k \cdot a^{k-1} \cdot b$	$a > 0 \quad \lvert b \rvert \leq a$ z błędem rzędu $\frac{k\lvert k-1 \rvert}{2} a^{k-1} b^2$		
13.	$\sqrt[m]{c^m + b} = c + \frac{1}{m} \cdot \frac{b}{c^{m-1}}$	$m > 1$ błąd rzędu $\frac{m-1}{2c} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{b}{c^{m-1}}\right)^2$		
14.	$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$	z błędem rzędu $\frac{b^2}{a^3}$		
15.	$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}96\,a + 0{,}398\,b$	$a > b$ błąd nie przekracza 4 %		
16.	$\lvert a + x \rvert^n = a^n\left(1 + n\frac{x}{a}\right)$	dla $x \ll a$		

cd.

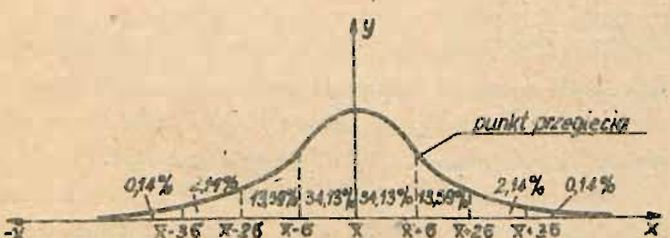
17.	$\lvert 1 \pm a\rvert \cdot \lvert 1 \pm b\rvert \cdot \lvert 1 \pm c\rvert \ldots = 1 \pm a \pm b \pm c \ldots$	$a < 1$, $b < 1 \ldots\ldots$ $c < 1$ $x < 2^{0}$ wyrażony w radianach
18.	$(1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a$	
19.	$(1 \pm a)^n = 1 \pm na$	
20.	$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2} a$	
21.	$\sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2}(a + b)$	
22.	$\frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a$	
23.	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{a}{2}$	
24.	$\frac{\lvert 1 \pm a\rvert\,\lvert 1 \pm b\rvert}{\lvert 1 \pm c\rvert\,\lvert 1 \pm d\rvert} = 1 \pm a \pm b \mp c \mp d$	
25.	$\sin\lvert \alpha \pm x\rvert = \sin\alpha \pm x \cdot \cos\alpha$	
26.	$\cos\lvert \alpha \pm x\rvert = \cos\alpha \mp x \cdot \sin\alpha$	



Rys. 8.1. Krzywe rozkładu normalnego dla różnych wartości σ.



Rys. 8.2. Wykres ilustrujący prawdopodobieństwo znalezienia się zmiennej losowej w przedziale $/-x_1, x_1/$ /pole zakreskowane/.



Rys. 8.3. Funkcja błędów Gaussa.

Jeśli przeprowadzimy N pomiarów za pomocą tej samej metody, z jednakową starannością, to takie pomiary nazywamy pomiarami o jednakowej dokładności. Błędy losowe nie są do usunięcia, nie można ich wykluczyć z żadnego wyniku pomiaru. Za pomocą metod rachunku prawdopodobieństwa można tylko uwzględnić ich wpływ na ocenę wartości rzeczywistej mierzonej wielkości, a więc określić wartość mierzonej wielkości ze znacznie mniejszym błędem niż błędy poszczególnych pomiarów. Uwzględnienie wpływu błędów losowych jest oparte na znajomości prawa ich rozkładu.

8.1. Rozkład normalny.

Najczęściej przyjmuje się, że rozkład błędów losowych pomiaru jest rozkładem normalnym /prawo Gaussa/, opisanym przez funkcję:

$$y = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{(\Delta X)^2}{2 6^2}} \qquad 1.8$$

gdzie: 6^2 - jest to tzw. wariancja rozkładu,
e - podstawą logarytmów naturalnych,
ΔX - wartość błędu.

Przy wprowadzeniu wzoru Gaussa zakłada się, że błędy losowe spełniają następujące warunki:

1/ Błędy pomiarów mogą przyjmować każdą wartość w sposób ciągły,
2/ Przy dużej liczbie pomiarów błędy o jednakowej wartości bezwzględnej ale różnych znaków zdarzają się jednakowo często,
3/ Częstość otrzymywania błędów zmniejsza się w miarę zwiększania się ich wartości bezwzględnej. Oznacza to, że duże błędy popełniane są rzadziej niż małe,
4/ Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu przekraczającego co do modułu pewną określoną liczbę, jest praktycznie równe zeru.

Z rys.8.1 widać, że przy zmniejszeniu parametru 6 krzywa rozkładu normalnego zwęża się wzdłuż osi Ox, a wydłuża się wzdłuż osi y. Ponadto im mniejsze 6, tym szybciej maleje funkcja y przy wzroście /x/. Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa x znajdzie się w przedziale symetrycznym $/-x_1, x_1/$ jest wyrażone polem figury zakreskowanej na rys.8.2. Z rysunku tego widzimy, że im mniejsze jest σ tym mniejszy jest rozrzut błędów wokół zera /por. rys.8.1/.

Ocenę wielkości błędu losowego pomiarów można przeprowadzić kilkoma sposobami. Najbardziej rozpowszechniona jest ocena za pomocą tzw. średniego błędu kwadratowego, czyli błędu standardowego. Na rys.8.3 przedstawiono przykłady określone wartością odchylenia standardowego, które dla σ jest odciętą punktu przecięcia krzywej rozkładu normalnego. Z wykresu widać, że w obszarze ograniczonym krzywą rozkładu oraz odciętymi punktów przegięcia zawiera się 68,26% wszystkich wyników pomiarowych. Prawdopodobieństwo znalezienia wyniku poza tym przedziałem wynosi 31,74%. Warto zauważyć, że w przedziale określonym przez dwukrotne odchylenie standardowe $2\cdot\sigma$ mieści się 95% wyników pomiarowych, a w przedziale $3\cdot\sigma$ ponad 99,7% wszystkich wyników. Trzykrotne odchylenie standardowe bywa nazwane błędem myksymalnym.

Rozkład Gaussa jest ciągłym i symetrycznym rozkładem, który jest często wykorzystywany w modelowaniu i symulacji komputerowej. Rozkład ten opisuje większość zjawisk mierzalnych. Do zjawisk występujących zgodnie z rozkładem normalnym należą między innymi:

a/ pomiary długości liniowych i kątowych,

b/ błędy pomiarów prędkości liniowych i kątowych,

c/ pomiar średni otworów powstałych w wyniku wiercenia tymi samymi wiertłami,

d/ wyniki badań testowych.

8.2. Wartości średnie pomiarów o jednakowej dokładności.

Jeśli jakaś wielkość zostanie zmierzona z jednakową starannością n razy tym samym przyrządem, to na skutek błędów przypadkowych otrzymamy wyniki różniące się wartościami liczbowymi:

$$x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots x_i,\ldots,x_n \qquad 2.8$$

przy czym zakłada się, że dysponujemy dużą liczbą pomiarów, tzn. że $n \gg 1$. Warunek ten będzie można uważać za spełniony, jeśli będziemy mieli do dyspozycji w zasadzie co najmniej sześć wartości liczbowych tej samej wielkości fizycznej, uzyskanych z pomiarów przeprowadzonych w tych samych warunkach. Jako oceny rzeczywistej wartości A mierzonej wielkości używa się średniej arytmetycznej:

$$A = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 3.8$$

Jeśli wśród wyników pomiarów spotyka się wyniki równe, to odpowiednie składniki można połączyć. Tak więc, jeśli wynik x_1 występuje m_1 razy, wynik x_2 występuje m_2 razy, a wynik x_k występuje m_k razy /gdzie $m_1+m_2+ \ldots +m_k = n$/, to wzór na średnią arytmetyczną przyjmie postać:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i \qquad 4.8$$

Średnia arytmetyczna charakteryzuje się tym, że suma odchyleń dodatnich od wartości średniej równa się sumie odchyleń ujemnych od tej wartości. Należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że średnia arytmetyczna na ogół nie pokrywa się z wartością najczęściej występującą w pomiarach.

Przykład.

Podczas pomiaru natężenia prądu uzyskano następujące wyniki:

i_i	4,5	4,0	3,9	4,1	4,3	4,2
m_i	3	4	4	3	2	4

Obliczyć średnią arytmetyczną natężenia prądu.

Liczba pomiarów wynosi:

$$n = \sum_{i=1}^{6} m_i = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 4 = 20$$

średnia arytmetyczna zgodnie ze wzorem 4.8 wyniesie:

$$i = \frac{1}{20}\left(3\cdot 4,5 + 4\cdot 4,0 + 4\cdot 3,9 + 3\cdot 4,1 + 2\cdot 4,3 + 4\cdot 4,2\right) = 4,14$$

9.0. Rodzaj błędów pomiarowych.

W większości przypadków średnia arytmetyczna jest najbardziej rozsądną z punktu widzenia fizycznego wartością średnią, wokół której układają się poszczególne wartości pomiarowe.

Rozrzut wartości zmierzonych dookoła wartości średniej, czyli precyzję pomiarów można scharakteryzować w różny sposób, zakładając, że pomiary $x_1\ x_2 \dots x_n$ są niezależne i wykonane z jednakową dokładnością.

9.1. Średni błąd kwadratowy.

1/ Jeśli prowadzone są pomiary znanej wielkości a /wzorca/, to za efektywną ocenę wariancji przyjmuje się średnie kwadratowe odchylenie wyników pomiarów od wartości a:

$$\sigma \approx Sn = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2} \qquad 1.9$$

Gdy liczba obserwacji n jest bardzo duża, to podlegająca wahaniom losowym wielkość Sn dąży do pewnej stałej wartości σ. Granicę tę nazywamy średnim błędem kwadratowym. Kwadrat tej wielkości σ^2 nosi nazwę despersji lub wariancji pomiarów. Ta właśnie wielkość występuje we wzorze 1.8 na rozkład normalny Gaussa. W rzeczywistiści jednak nie obliczamy wielkości σ lecz jej przybliżoną wartość Sn, która jest tym bliższa σ, im większy jest n, tzn. im większa jest ilość pomiarów.

2/ Jeśli mierzona wielkość jest nieznana, to za ocenę wariacnji przyjmuje się /wariancję empiryczną/ $\sigma^2 \approx Sn^2$ tzw. średni błąd kwadratowy.

$$Sn = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad 2.9$$

gdzie: $\bar{x}$ - średnia arytmetyczna wyników pomiarowych.

3/ Jeśli jedynym i tym samym przyrządem przeprowadza się m serii pomiarów, to średni błąd kwadratowy wyrazi się przy pomocy wzoru:

$$\sigma \approx S_n = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + \dots + (n_m-1)S_m^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_m-1)}} \qquad 3.9$$

gdzie: $n_1,\ n_2 \dots n_m$ - liczba pomiarów w poszczególnych seriach,
$S_1\ S_2 \dots S_n$ - odpowiednie wariancje empiryczne,

W szczególnym przypadku, gdy liczba pomiarów jest jednakowa w każdej serii tzn. $n_i = n/i = 1, 2 \dots m/$ to wzór 3.9 przyjmuje postać

$$\sigma = s_n = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^2} \qquad 4.9$$

4/ Jeśli dla m serii pomiarów jednej i tej samej wielkości znane są tylko liczby pomiarów w każdej serii $n_1\ n_2 \ldots n_m$, oraz średnie arytmetyczne $x_1\ x_2 \ldots x_m$ z każdej serii, to średni błąd kwadratowy wyrazi się wzorem:

$$\sigma = s_n = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(x_i-\bar{x})^2} \qquad 5.9$$

gdzie:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\ \bar{x}_i} \qquad \text{oraz} \qquad N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

5/ Jeśli dla wyników pomiarów $x_1\ x_2 \ldots x_n$ o niejednakowej dokładności znane są dokładne wartości wag lub stosunki tych wartości

$$p_1 : p_2 : \ldots p_n = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_n^2}$$

to średni błąd kwadratowy wyniesie:

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2}{p/n-1/}} \qquad 6.9$$

gdzie:

$$x = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1+p_2+ \ldots + p_n} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad 7.9$$

σ_i^2 – wariancja odpowiadająca wartości x_i.

Często jednak dokładne wagi pomiarów /lub ich stosunki/ są nieznane i w tym wypadku zastępuje się je przybliżonymi wartościami, otrzymanymi na podstawie wyników doświadczenia wg wzorów:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{m_1}{s_1^2} : \frac{m_2}{s_2^2} : \ldots : \frac{m_n}{s_n^2}$$

gdzie: $p_i = \frac{m_i}{s_i}$ – waga pomiaru w i-tej serii,

m_i – liczba pomiarów w i-tej serii,

s_1 – średni błąd kwadratowy pomiarów w i-tej serii.

Ocena ta ma te same własności, co ocena 3.8 wartości średniej arytmetycznej. Czasami mamy do czynienia z przypadkiem, gdy opracowywane wyniki x_1 x_2 ... x_n nie są wynikimi bezpośrednich pomiarów lecz są średnimi z n serii pomiarów przeprowadzonych z tą samą dokładnością /tj. z jednakowym średnim błędem kwadratowym/, przy czym liczba pomiarów w każdej serii jest inna. W tym przypadku każdej wartości x_i można przypisać jako wagę liczbę pomiarów w odpowiedniej serii

$$p_i = m_i \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

gdzie: m_i - liczba pomiarów w i-tej serii ze średnią wartością x_i.
W tym wypadku wzór 7.9 przyjmie postać:

$$\bar{x} = \frac{m_1 \cdot \bar{x}_1 + m_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots + m_n \cdot \bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \qquad 8.9$$

gdzie: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Sens tej średniej ważonej polega na tym, że wyniki częściowe, uzyskane metodami lepiej odtwarzalnym lub jako średnia z większej liczby oznaczeń, a zatem wiarygodniejsze, mają przy obliczeniu wyniku końcowego większą wagę, czyli bardziej wpływają na jego wartość.

9.2. Sredni błąd arytmetyczny.

Sredni błąd arytmetyczny /zwany też błędem przeciętnym/ oblicza się wg wzoru:

$$r = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \qquad 9.9$$

gdzie: $\bar{x}$ - średnia arytmetyczna wyników pomiarów.
W przypadku posługiwania się średnim błędem arytmetycznym r dla małej ilości pomiarów n poprawniej jest obliczać go nie według wzoru 9.9 lecz wg wzoru:

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \qquad 10.9$$

Przy dużych n różnica między otrzymywanymi wartościami błędu r na podstawie tych dwu wzorów 9.9 , 10.9 jest bardzo mała. Wartość bezwzględna $x_i - \bar{x}$ oznacza, że przy obliczeniach bierze się pod uwagę jedynie bezwzględne wartości różnic, pomijając ich znak. Zaletą błędu r jest to, że łatwiej oblicza się go niż