sprowadza się do wyznaczenia wszystkich stałych występujących w równaniu. W celu wyłączenia wpływu błędów, przeprowadza się większą liczbę pomiarów, przy czym każdy pomiar daje nam równanie wiążące z sobą niewiadome współczynniki. W przypadku dużej liczby pomiarów dochodzi się zatem do układu, w którym liczba równań jest znacznie większa niż liczba niewiadomych. Należy więc znaleźć najbardziej prawdopodobne współczynniki, które na ogół nie będą spełniać ściśle ani jednego z danego układu równań.

W celu wyznaczenia stałych równania istnieje wiele różnych metod, od bardzo prostych, ale mało dokładnych, do bardzo dokładnych ale skomplikowanych i pracochłonnych.

15.2.1. Metoda średnich.

Metoda średniej jest jedną z najprostrzych metod analitycznych i nie wymaga graficznego przedstawienia danych eksperymentalnych. Opiera się ona na założeniu, że dla równania najlepiej przybliżającego otrzymane dane eksperymentalne

$$\varepsilon_i = f(x, a_0, a_1 \dots a_n) - y_i \qquad i = 1, 2 \dots n$$

gdzie: $f(x, a_0, a_1, a_2 \dots a_n)$ - wartości obliczone

y_i - wartości zmierzone

winna być równa zero, tzn., że

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, a_0, a_1 \dots a_n) - y_i \right] = 0$$

W celu wyznaczenia stałych równania $f(x_i, a_0, a_1 \dots a_i)$ należy podzielić otrzymanych n punktów doświadczalnych na tyle grup ile mamy stałych a_n. Dla każdej z tych grup wymagamy, aby różnice się zerowały, tzn., żeby zachodził związek 30.15 . W ten sposób otrzymuje się n równań z a_n niewiadomymi.

W przypadku, gdy między x i y istnieje teoretyczna ustalona zależność liniowa

$$y = ax + b$$

obserwowane wartości y_i na skutek występowania błędów pomiarowych będą się różniły od obserwowanych wartości $ax_i + b$. W celu wyznaczenia parametrów a i b dane doświadczalne dzielimy na dwie grupy A i B. Otrzymamy w ten sposób

grupa A

$/x_1, y_1/, /x_2, y_2/ \dots /x_m, y_m$

grupa B

$/x_{m+1}, y_{m+1}/, /x_{m+1}, y_{m+1}/ \dots /x_n, y_n/$

Dla każdej grupy oddzielnie piszemy równanie:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(y_i - ax_i - b\right) = 0$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right) = 0 \qquad 31.15$$

gdzie: m oznaczająca liczbę obserwacji w pierwszej grupie, może być dowolna. Zazwyczaj dobiera się ją tak, aby dla n parzystego liczba obserwacji w drugiej grupie była również m, w przypadku dla n nieparzystego była równa m $\pm$ 1.

Współczynniki a i b wyznaczamy z układu równań:

$$a \sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$a \sum_{i=m+1}^{n} x_i + n-m\, b = \sum_{i=m+1}^{n} y_i \qquad 32.15$$

Przykład. Przy wyznaczaniu zależności oporu przewodnika w funkcji temperatury otrzymano następujące wyniki:

t	^oC	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
R	Ω	76,30	77,80	79,75	80,80	83,35	83,80	85,10

Zakładając, że zależność między opornością R i temperaturą t można wyrazić przy pomocy zależności liniowej:

R = a + b t

wyznaczyć stałe a i b metodą średnich. Liczba obserwacji wynosi n = 7 a liczba stałych wynosi 2, tzn. a i b, stąd wyniki obserwacji dzielimy na dwie grupy, tak aby pierwszej grupie było

$m = 4$ wyniku, a w drugiej grupie $n - m = 3$ wyniki obserwacji.
Otrzymamy więc dwie grupy:

$t_{1,4}$	19,1	25,0	30,1	36,0	I-sza grupa
$R_{1,4}$	76,30	77,80	79,75	80,80	

oraz

$t_{5,7}$	40,0	45,1	50,0	II-ga grupa
$R_{5,7}$	82,35	83,90	85,10	

Obliczamy wartości sum w obu grupach:

$$\sum_{i=1}^{4} t_i = 110,2 \qquad \sum_{i=1}^{4} R_i = 314,65$$

$$\sum_{i=5}^{7} t_i = 135,1 \qquad \sum_{i=5}^{7} R_i = 251,35$$

Podstawiając obliczone sumy do wzoru 32.15 otrzymamy układ równań:

$$110,2 \cdot a + 4 \cdot b = 314,65$$
$$135,1 \cdot a + 3 \cdot b = 251,35$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymamy:

$$a = 70,90 \qquad b = 0,284$$

W ten sposób rezultaty pomiarów zależności oporu od temperatury można zapisać przy pomocy wzoru empirycznego:

$$R = 70,90 + 0,284 \cdot t$$

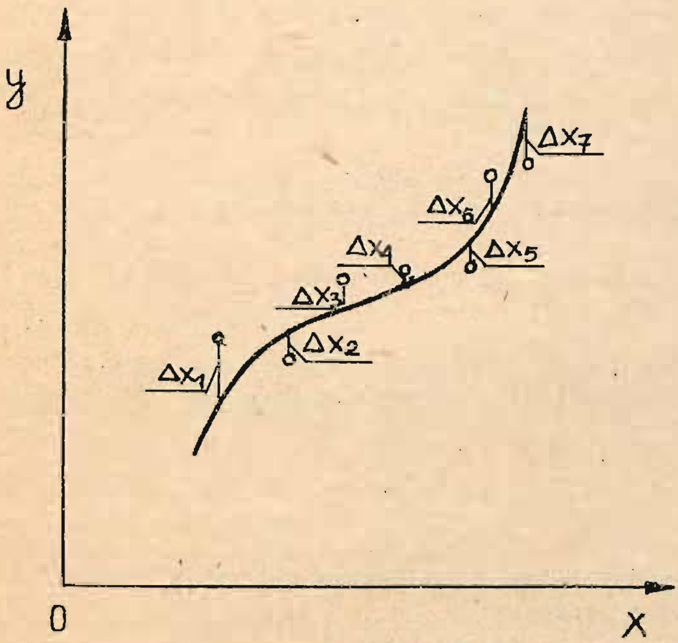
słusznego w badanym zakresie temperatur.

15.2.2. Metoda najmniejszych kwadratów.

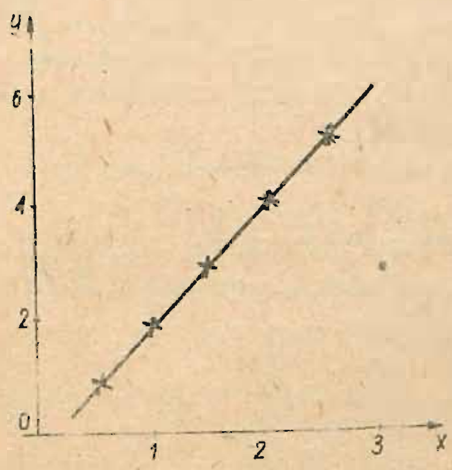
Najprecyzyjniejsza metoda znajdowania funkcji zawierającej szereg parametrów, polega na zminimalizowaniu sumy kwadratów odchyleń punktów pierwotnych od danej krzywej. Jeśli wybrana zależność funkcyjna jest w postaci

$$y = f\left(x_i, a_0, a_1 \dots a_n\right) \qquad 33.15$$

gdzie: parametrów a_0, a_1 ... a_n nie można określić dokładnie na podstawie doświadczalnych wartości funkcji y_1, y_2 ... y_n ponieważ te ostatnie zawierają błędy przypadkowe. Zakłada się przy tym, że pomiary wartości funkcji y_1, y_2 ... y_n są przeprowadzone niezależnie jeden od drugiego i że błędy pomiarów podlegają rozkładowi



Rys.15.15. Wyznaczanie błędów bezwzględnych Δx_i.



Rys.15.16. Wykres linii prostej o równaniu y = -0,57 + 2,19 x.

normalnemu.

Metoda najmniejszych kwadratów opiera się na następujących założeniach:

a/ wynik kolejnego pomiaru y_i można uważać za sumę wielkości $f(x_i, a_o, a_1 \dots a_n)$ oraz błędu pomiarowego Δx_i /rys.15.15/

$$y_i = f(x_i, a_o, a_1 \dots a_n) + \Delta x_i \qquad 33.15$$

b/ dobraniu tak wielkości Δx_i aby suma kwadratów błędów Δx_i^2 była najmniejsza

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, a_o, a_1 \dots a_n) \right]^2 = \min \qquad 34.15$$

uważając w tym przypadku a_o, a_1, a_2 ... a_n za zmienne niezależne.

Jeśli pomiary wykonano z niejednakową dokładnością, lecz znane są stosunki wariancji pomiarów, to zamiast sumy 34.15 bierze się sumę

$$S = \sum^{n} \left[y_i - f(x_i, a_o, a_1 \dots a_n) \right]^2 p_i \qquad 35.15$$

gdzie czynniki p_i zwane wagami pomiarów są odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich wariancji

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{1}{\sigma_n^2}$$

Jeśli wszystkie pomiary wartości funkcji przeprowadza się z jednakową dokładnością, lecz dla każdej wartości argumentu x_i przyjmuje się średnie arytmetyczne wyników pomiarów w danej serii, to za wagi pomiarów w odpowiedniej serii można wziąć liczby pomiarów w seriach, czyli $p_i = m_i$.

Zagadnienie określania tych wartości parametrów a_o, a_1 ... a_n dla których funkcja

$$s = s(a_o, a_1 \dots a_n) \qquad 36.15$$

przyjmuje najmniejszą wartość, sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\frac{\partial s}{\partial a_o} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_n} = 0 \qquad 37.15$$

Znalezienie i rozwiązanie tego układu równań jest szczególnie proste gdy funkcja $f(x, a_0, a_1 \ldots a_n)$ jest liniowa względem parametrów $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$. Za pomocą tej metody rachunkowej mogą zostać określone nieznane współczynniki równań empirycznych, np. równań liniowych, równań wyższych stopni, równań potęgowych lub wykładnoczych.

A. Równanie liniowe.

Często spotykanym zagadnieniem jest znalezienie prostej aproksymującej zbiór n punktów, o których wiemy, że ich współrzędne y zawierają błędy pomiarowe. Funkcja której szukamy ma postać:

$$y = a + b\,x \qquad 38.15$$

gdzie: a - jest punktem przecięcia prostej z osią y-ów,

b - parametrem określającym nachylenie prostej do osi x-ów.

Dla n punktów x_i, y_i , dla których występuje zależność liniowa, otrzymana suma kwadratów wyniesie:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)^2 \qquad 39.15$$

gdzie: y_i jest zaobserwowaną wartoscią dla i-tego punktu. Warunki minimum s są

$$\frac{\partial s}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right) x_i = 0 \qquad 40.15$$

Na podstawie tych równań liniowych wyznaczamy wartości a i b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad 41.15$$

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \qquad 42.15$$

Oszacowanie błędów standardowych dla stałych a i b obliczamy z wzoru:

$$s_a = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \qquad 43.15$$

$$s_b = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \qquad 44.15$$

Przykład. Wyznaczyć równanie linii prostej, która aproksymować będzie następujące dane

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,62	1,64	2,58	3,70	5,02	6,04

Wykresem dla tych punktów jak widać to z rys.15.16 jest linia prosta, której równanie możemy napisać w postaci:

$$y = a + bx$$

Wartości współczynników a i b wyznaczamy z wzorów 41.15 i 42.15, przy czym

$$n = 6 \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i = 10,5 \qquad \sum_{i=1}^{6} y_i = 19,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 22,75 \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 43,89 \qquad \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 = 110,25$$

Podstawiając otrzymane dane do wzoru 41.15 i 42.15 otrzymamy:

$$b = \frac{10,5 \cdot 19,6 - 6 \cdot 43,89}{110,25 - 6 \cdot 22,75} = 2,192$$

$$a = \frac{1}{6}\left(19,6 - 2,192 \cdot 10,5\right) = -0,570$$

W celu obliczenia błędów standardowych wartości stałych a i b wykonujemy odpowiednie obliczenia, wstawiając je do poniższej tabelki

lp	$a+bx_i$	y_i	$(y_i-a-bx_i)^2$
1	0,525	0,62	0,009
2	1,62	1,64	0,0004
3	2,71	2,58	0,017
4	3,81	3,70	0,012
5	4,90	5,02	0,0144
6	6,00	6,04	0,0016

$$\sum = 0,0544$$

Wstawiając odpowiednie dane do wzorów 43.15 i 44.15 otrzymamy błędy standardowe stałych a i b:

$$s_a = \sqrt{\frac{0,0544}{6-2}}\sqrt{\frac{6}{6\cdot 22,75 - 110,25}} = \pm 0,06$$

$$s_b = \sqrt{\frac{0,0544}{6-2}}\cdot\sqrt{\frac{22,75}{6\cdot 22,75 - 110,25}} = \pm 0,11$$

stąd

$$a = -0,57 \pm 0,06$$
$$b = 2,19 \pm 0,11$$

równanie prostej możemy napisać w postaci:

$$y = -(0,570 \pm 0,06) + (2,19 \pm 0,11)\cdot x$$

równanie tej prostej przedstawiono na rys.15.16.

B. Równania kwadratowe.

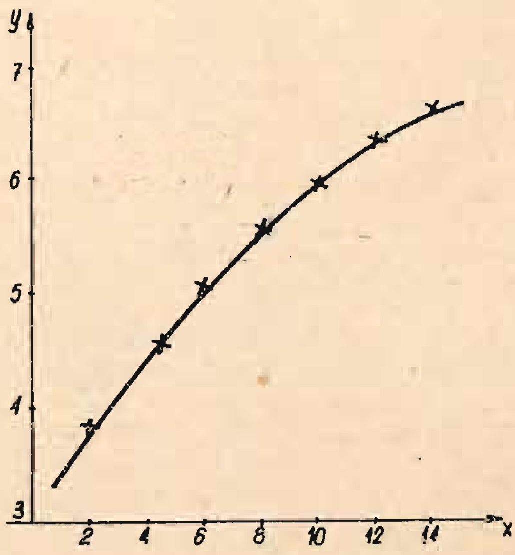
Jeśli jest podana zależność między dwoma zmiennymi określona przy pomocy równania kwadratowego

$$y = ax^2 + bx + c \qquad 45.15$$

to dla znalezienia współczynników a, b, c należy rozwiązać układ równań liniowych

$$n\,c + b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$c\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$



Rys.15.17. Wykres równania $y = -0,1\,x^2 + 0,4\,x + 3$

$$c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 0 \qquad 46.15$$

przykład. Za pomocą równania kwadratowego należy aproksymować następujące dane doświadczalne, przedstawione na wykresie /rys. 15.17/ i poniższej tabelce:

x	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00
y	3,76	4,44	5,04	5,56	6,00	6,36	6,64

Przyjmujemy, że równanie kwadratowe ma postać:

$$y = ax^2 + bx + c$$

W celu wykorzystania zworów 46.15 obliczamy wielkości pomocnicze

$$n = 7 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i = 56 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 560 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i^3 = 6272$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^4 = 74816 \qquad \sum_{i=1}^{7} y_i = 37,8 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 330,28$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = 3454,64$$

Otrzymane wartości wstawiamy do wzorów 46,15, otrzymując układ równań:

$$7c + 56b + 560a - 37,8 = 0$$
$$56c + 560b + 6272a - 330,28 = 0$$
$$560c + 6272b + 7416a - 3454,64 = 0$$

skąd wyznaczamy wartości stałych:

$$a = -0,01, \qquad b = 0.4, \qquad c = 3$$

Poszukiwane równanie ma postać:

$$y = -0,1x^2 + 0,4x + 3$$

C. Równania potęgowe.

W przypadku gdy zależność między dwoma zmiennymi x i y określona jest przy pomocy wzoru

$$y = ax^b \qquad 47.15$$

to w celu wyznaczenia stałych a i b należy rozwiązać układ równań liniowych

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg x_i \sum_{i=1}^{n} \lg y_i - n \sum_{i=1}^{n} (\lg x_i \lg y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lg x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} \lg^2 x_i} \qquad 48.15$$

$$\lg a = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lg y_i - b \sum_{i=1}^{n} \lg x_i \right) \qquad 49.15$$

D. Równanie wykładnicze.

Jeśli zależność między dwoma zmiennymi może być ustalona w postaci wzoru wykładniczego:

$$y = a \cdot e^{bx} \qquad 50.15$$

to dla określenia wartości współczynników należy rozwiązać układ równań

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \lg y_i - n \sum_{i=1}^{n} x_i \lg y_i}{\lg e \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]} \qquad 51.15$$

$$\lg a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lg x_i - b \lg e \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad 52.15$$

gdzie: $\lg e = 0{,}4343$

W przypadku, gdy zależność wykładnicza między dwoma zmiennymi jest określona przy pomocy wzoru

$$y = a \cdot b^x \qquad 53.15$$

to w celu określenia stałych a i b należy rozwiązać układ równań liniowych

$$\lg b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \lg y_i - n \sum_{i=1}^{n} x_i \lg y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad 54.15$$

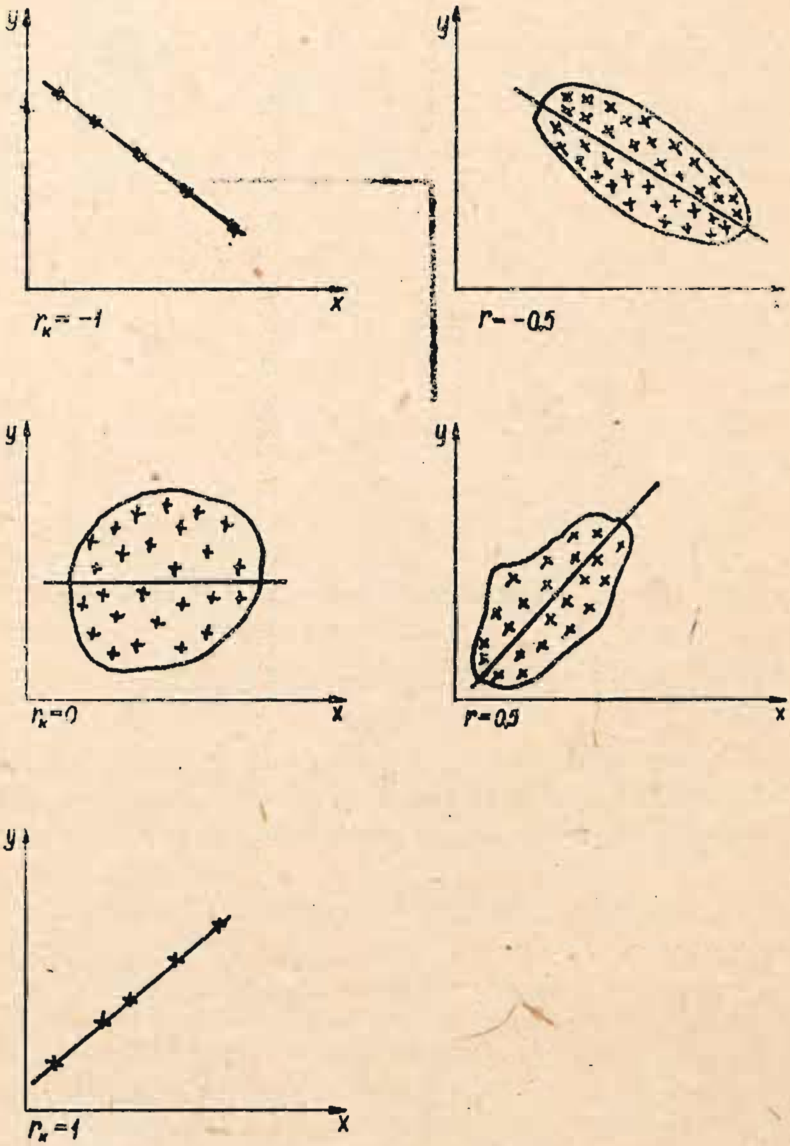
$$\lg a = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lg y_i - \lg b \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \qquad 55.15$$

16.0. Korelacja liniowa.

Ważną cechą charakterystyczną, obliczaną z reguły przy badaniu zależności dwóch zmiennych jest tzw. współczynnik korelacji określany przy pomocy wzoru:

Liczba pomiarów n	prawdopodobieństwo		
	0,05	0,01	
5	0,75	0,87	
6	0,71	0,83	
7	0,67	0,80	
8	0,63	0,77	
9	0,60	0,74	
10	0,58	0,71	
12	0,53	0,66	
14	0,50	0,62	
16	0,47	0,59	
18	0,44	0,56	
20	0,42	0,34	
25	0,38	0,49	
30	0,35	0,45	
40	0,30	0,39	
50	0,27	0,35	
60	0,25	0,33	
80	0,22	0,28	
100	0,20	0,25	

Tabela 16.1. Wartości krytyczne współczynnika korelacji.



Rys.16.1. Rozrzuty punktów na płaszczyźnie dla wartości współczynnika korelacji zmieniającego się od -1 do +1.

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2(y_i-y)^2} \qquad 1.16$$

gdzie: $\bar{x}$ i $\bar{y}$ - wartości średnie
lub

$$r_k = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right]}} \qquad 2.16$$

Współczynnik korelacji liniowej charakteryzuje ściśłość wzajemnej zależności obu zmiennych dla przypadku zależności liniowej. Może on przybierać wartośći od -1 do +1, przy czym znak dodatni odpowiada zależności prostej, a znak ujemny zależności pośredniej*. Dla przypadku niezależności zmiennych ma on wartość równą 0, dla zależności funkcyjnej wartość +1 lub -1, przy czym im wartość współczynnika r zbliża się co do wartości bezwzględnej do jedności, tym silniejsza jest zależność obu zmiennych. Przy posługiwaniu się współczynnikiem korelacji należy wziąć pod uwagę fakt, że obarczony on jest błędem przypadkowym tym większym, im mniejsza jest liczba pomiarów z których współczynnik obliczono. Dlatego w tablicy 16.1 podano krytyczne wartości współczynnika korelacji, czyli wartości, jakie może on przybrać z prawdopodobieństwem 0,05 lub 0,01 dla danej liczby n opracowanych wyników, nawet dla pełnej niezależności obu zmiennych. Obliczony współczynnik korelacji wg wzoru 1.16 lub 2.16 musi być co do wartości bezwzględnej większy od wartości współczynnika wziętego z tablicy 16.1 dla odpowiedniego prawdopodobieństwa p oraz liczby pomiarów n, aby zachodziła korelacja liniowa między otrzymanymi wartościami pomiarowymi.
Na rys.16.1 przedstawiono graficzne wartości współczynnika korelacji różnych rozrzutów punktów doświadczalnych.

Przykład. W wyniku eksperymentu uzyskano następujące dane wyjściowe

---

* tzn. ze wzrostem jednej cechy maleje wartość drugiej cechy

x	1,00	1,49	1,60	2,09	2,89
y	6,30	7,39	7,62	8,71	10,47

Stwierdzono, że między danymi istnieje zależność liniowa

$$y = 2{,}20\,x + 4{,}10$$

Obliczyć współczynnik korelacji.

Obliczamy najpierw wartości pomocnicze

$$n = 5 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i = 9{,}07 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 18{,}50 \qquad \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = 82{,}26$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 40{,}49 \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 337{,}85 \qquad \left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)^2 = 1639{,}44$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i = 77{,}97$$

otrzymane dane obliczeniowe podstawiamy do wzoru 2.16 skąd otrzymamy współczynnik korelacji

$$r_k = \frac{5 - 77{,}97 - 9{,}07 \; 40{,}49}{\sqrt{\left[5 \cdot 18{,}5 - 82{,}26\right]\left[5 \cdot 337{,}85 - 1639{,}44\right]}} = +\,1{,}00$$

tzn., że między wartościami x i y istnieje ścisła zależność liniowa. Dopuszczalna wartość współczynnika korelacji dla n = 5 wynosi 0,75 lub 0,87 zależnie od przyjętego prawdopodobieństwa /tablica nr 16.1/

17.0. Sprawozdanie z badań.

Sprawozdanie z przeprowadzonych badań może mieć różne formy w zależności od jego dalszego wykorzystania. Formą sprawozdania są np. listy do redakcji, obszerne referaty, artykuły, prace dyplomowe, książki itp. Niezależnie od przeznaczenia, sprawozdanie z badań naukowych powinno zawierać pewne części składowe, które można przedstawić w postaci schematu:

1. tytuł i streszczenie,
2. wprowadzenie i postawienie problemu,
3. problem w literaturze przedmiotu,
4. metoda badań,