to z prawdopodobieństwem ufności P można uważać, że rozkład prawdopodobieństwa błędów przypadkowych w rozpatrywanej serii pomiarów różni się od rozkładu normalnego. W przeciwnym przypadku przyjmujemy hipotezę o normalnym rozkładzie błędów przypadkowych pomiaru. Liczbę stopni swobody k dla liczby przedziałów l przyjmuje się:

k = l - 3 dla przypadku pomiarów, gdy zamiast wartości rzeczywistej a i wartości $\sigma$ przyjmuje się doświadczalnie wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}$ i empiryczny błąd standardowy s,

k = l - 2 dla przypadku, gdy wartość rzeczywista a jest dokładnie znana /np. przy pomiarach wzorca/,

k = l - 1 dla przypadku, gdy znana jest wartość rzeczywista a oraz średni błąd kwadratowy $\sigma$.

W praktyce spotyka się raczej sytuacje, że zarówno wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}$ jak i empiryczny błąd standardowy $s_n$ oblicza się na podstawie wyników pomiaru, stąd liczba stopni swobody k = l - 3. Dlatego też, aby otrzymać liczbę swobody nie mniejszą od pięciu należy brać liczbę przedziałów l nie mniejszą niż osiem.

## 11. Ilość niezbędnych pomiarów.

W celu zmniejszenia błędu losowego pomiarów można stosować dwa sposoby:

a/ zwiększenie dokładności poszczególnego pomiaru tzn. zmniejszenie wielkości $\sigma$,

b/ zwiększenie liczby pomiarów tzn. skorzystanie z wzoru

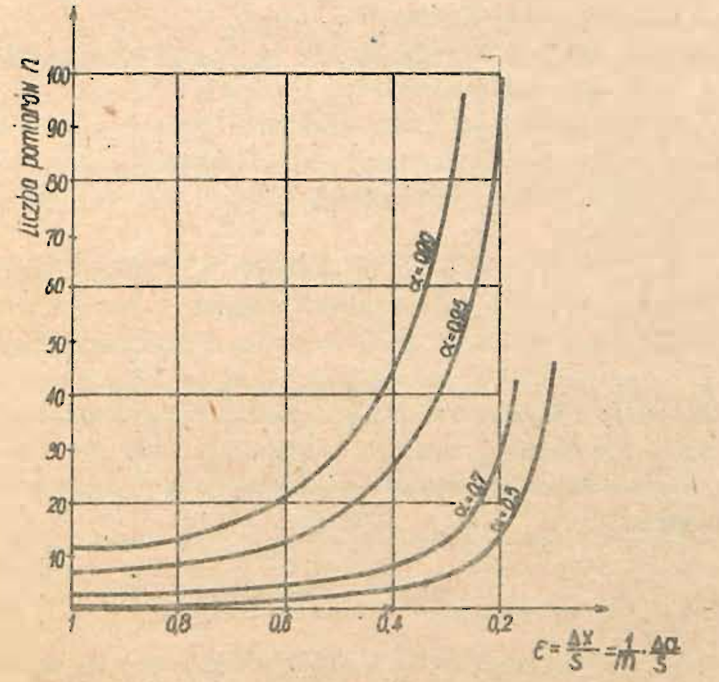
$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

przy założeniu dodatkowym, że wszystkie możliwości udoskonalenia samej techniki pomiarów zostały już wykorzystane w celu poprawienia dokładności pomiaru.

Jeśli błąd systematyczny, określony w jakikolwiek sposób ma wartość $\Delta$ a, to celowe jest zmniejszenie błędu losowego tylko do takich rozmiarów, aby ogólny błąd pomiarów określony był całkowicie błędem systematycznym. Niezbędne jest więc, aby przedział ufności zbudowany dla ustalonego współczynnika ufności był zdecydowanie mniejszy od wielkości błędu systematycznego tzn. aby

| $\varepsilon = \frac{\Delta x}{s_n}$ | $\alpha$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 1,0 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 17 |
| 0,5 | 3 | 6 | 13 | 18 | 31 | 50 |
| 0,4 | 4 | 8 | 19 | 27 | 46 | 74 |
| 0,3 | 6 | 13 | 32 | 46 | 78 | 127 |
| 0,2 | 15 | 29 | 70 | 99 | 171 | 277 |
| 0,1 | 47 | 169 | 273 | 387 | 668 | 1080 |
| 0,05 | 183 | 431 | 1040 | 1540 | 2659 | 4338 |
| 0,01 | 4543 | 10 752 | 27 161 | 28 416 | 66 358 | 108307 |

Tabela 11.1. Niezbędna liczba pomiarów dla otrzymania losowego błędu z prawdopodobieństwem $\alpha$.




Rys. 11.1. Zależność ilości pomiarów od wartości $\varepsilon = \frac{x}{s_n}$
gdzie: $\Delta x$ – wartość błędu losowego,
$s_n$ – średni błąd kwadratowy,
$\Delta a$ – błąd systematyczny,
$m = 1, 2 \ldots 10$

$$\Delta x \ll \Delta a \qquad 1.11$$

Można tu przyjąć regułę, że nie ma potrzeby dokładniej określać ogólny błąd niż z dokładnością do 10%, co oznacza, że w przypadku gdy $\Delta x \leq \frac{1}{10}\Delta a$, warunek 1.11 można uznać za spełniony. Często jednak możemy zadowalać się mniejszymi wymaganiami np. przyjmując $\Delta x \leq \frac{1}{3}\Delta a$, nawet $\Delta x \leq \frac{1}{2}\Delta a$, przy czym przyjmujemy zwykle współczynniki ufności $\alpha = 0{,}95$, chociaż niekiedy istnieje potrzeba przyjęcia większego współczynnika ufności. Przy obliczaniu niezbędnej liczby pomiarów korzystać możemy z tabeli nr 11.1 lub z wykresu nr 11.1. Wartość

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{s_n} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta a}{s_n} \qquad 2.11$$

gdzie: $\Delta x$ - błąd losowy,
$s_n$ - średni błąd kwadratowy
$\Delta a$ - błąd systematyczny,
$m$ - dowolnie przyjęta liczba 1, 2 ... 10 w zależności od wymagań dokładności pomiaru.

obliczamy przyjmując odpowiednią wartość m oraz znając zwykle błąd systematyczny, który może być np. określony klasą dokładności przyrządu pomiarowego, dokładność odczytu lub też określony w jakiś inny sposób.

Z wykresu nr 11.1 widać, że wzrostem średniego błędu kwadratowego $s_n$ przy stałym błędzie systematycznym $\Delta a$ oraz przy zadanym współczynniku ufności $\alpha$ rośnie liczba potrzebnych pomiarów n. Realnie należy założyć, że wartość $\sigma \leq 5 \cdot \Delta a$ gdyż przy większych wartościach $\sigma$ dla istotnego zmniejszenia roli błędu losowego potrzeba już setek i tysięcy pomiarów. W takich przypadkach dla zmniejszenia błędu pomiarów konieczna jest radykalna zmiana metody pomiarów.

## 12. Błędy wyników złożonych.

Często mamy do czynienia z przypadkami, gdy wyznaczana wielkość jest funkcją jednej lub też kilku mierzonych wielkości, np. przy wyznaczeniu pola prostokąta dokojumemy pomiarów długości dwu jego boków a i b, a powierzchnię obliczamy posługując się wzorem: $S = a \cdot b$.

Tabela 12.1. Wartości błędu funkcji jednej zmiennej $y = f\,x$ dla $a = const$, $b = const$, $c = const$.

| Lp. | $y = f(x)$ | Błąd bezwzględny $\Delta y$ | Błąd względny $\frac{\Delta y}{y}$ |
|---|---|---|---|
| 1. | $ax$ | $a \cdot \Delta x$ | $\frac{\Delta x}{x}$ |
| 2. | $ax \pm b$ | $a \cdot \Delta x$ | $\frac{a}{ax \pm b} \Delta x$ |
| 3. | $\frac{c}{ax \pm b}$ | $\frac{ac}{(ax \pm b)^2} \Delta x$ | $\frac{a}{ax \pm b} \Delta x$ |
| 4. | $\frac{ax}{b \pm cx}$ | $\frac{ab}{(b \pm cx)^2} \Delta x$ | $\frac{b}{x \cdot (b \pm cx)} \Delta x$ |
| 5. | $b\,x^a$ | $abx^{a-1} \cdot \Delta x$ | $\frac{a}{x} \cdot \Delta x$ |
| 6. | $\frac{b}{x^a}$ | $\frac{ab}{x^{a+1}} \Delta x$ | $\frac{a}{x} \Delta x$ |
| 7. | $\sqrt{ax}$ | $\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \Delta x$ | $\frac{1}{2x} \Delta x$ |
| 8. | $\sqrt[a]{bx}$ | $\frac{\sqrt[a]{bx}}{ax} \Delta x$ | $\frac{1}{ax} \Delta x$ |
| 9. | $b^{ax}$ | $ab^{ax} \ln b \cdot \Delta x$ | $a \ln b \cdot \Delta x$ |
| 10. | $e^{ax}$ | $ae^{ax} \cdot \Delta x$ | $a \cdot \Delta x$ |
| 11. | $x^x$ | $x^x (1 + \ln x) \cdot \Delta x$ | $(1 + \ln x) \cdot \Delta x$ |
| 12. | $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ | $\frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \Delta x$ | $\frac{x}{a^2 \pm x^2} \Delta x$ |
| 13. | $\ln x$ | $\frac{1}{x} \Delta x$ | $\frac{1}{x \ln x} \Delta x$ |
| 14. | $\lg_a x$ | $\frac{1}{x \ln a} \Delta x$ | $\frac{1}{x \ln a \cdot \log_a x} \Delta x$ |
| 15. | $\lg x$ | $\frac{0{,}434}{x} \Delta x$ | $\frac{0{,}434}{x \cdot \lg x} \cdot \Delta x$ |

W takich przypadkach, które noszą nazwę pomiarów pośrednich /w odróżnieniu od takich, w których badaną wielkość mierzy się bezpośrednio np. pomiar długości masy, temperatury itp./ mamy do czynienia z dwoma przypadkami:

1/ wyznaczana wartość zależy tylko od jednej wielkości, która jest bezpośrednio mierzona,

2/ wyznaczana wartość zależy od wielu wielkości, które są mierzone bezpośrednio.

12.1. Błędy obliczania wartości funkcji jednej zmiennej.

Jeśli szukany wynik zależy tylko od jednej nieznanej wielkości obarczonej błędem pomiarowym $\Delta x$, a szukana wartość ma postać funkcji $y = f/x/$, to bezwzględny rezultat $\Delta y$ wyniesie:

$$\Delta y = \frac{d}{dx} f(x) \Delta x \qquad 1.12$$

Wartość błędu względnego w tym wypadku będzie określona wzorem:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \qquad 2.12$$

Na podstawie wzoru 1.12 oraz 2.12 możemy obliczyć błędy niektórych funkcji podstawowych przedstawionych w tabeli nr 12.1. W przypadku, gdy mamy kilka pomiarów wartości $x_i$ $i = 1, 2 \ldots n$, wówczas na miejsce x podstawiamy wartość średnią arytmetyczną $\bar{x}$ oraz w miejsce $\Delta x$ podstawiamy średni błąd kwadratowy $\sigma$ /x/. Zamiast $\Delta$ y otrzymamy wówczas średni błąd kwadratowy wartości funkcji $\sigma$ /y/.

Przy pomiarze jednokrotnym danej wielkości, gdy warunki doświadczenia nie pozwalają nam dokonać wielu pomiarów np. przy pomiarze temperatury początkowej czy też końcowej w kalorymetrze, wielkość błędu oceniamy jako najmniejszą działkę na skali przyrządu pomiarowego. Jeśli oko z dostateczną pewnością może ocenić połówki tej działki, to jako błąd pojedynczego pomiaru można przyjąć wartość połowy najmniejszej działki. W wypadku znajdowania błędu wielkości mierzonej przez odjęcie czy też dodanie do siebie dwóch odczytań, całkowity błąd bezwzględny równa się sumie bezwzględnych wartości błędów pojedyńczych. Zakładamy iż w takich wypadkach mamy zawsze do czynienia z najbardziej niekorzystnymi warunkami, mianowicie błędami jednakowego znaku.

Błędy wielkości kątowych wyznaczamy posługując się łukową miarą kąta.

12.2. Błędy obliczania wartości funkcji wielu zmiennych.

12.2.1. Błąd maksymalny wartości funkcji wielu zmiennych.

Jeśli szukana wielkość jest funkcją kilku innych wielkości wyznaczonych drogą bezpośredniego pomiaru, przy czym wyznaczana wielkość jest funkcją nie jednej lecz wielu zmiennych n, czyli:

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n) \qquad 3.12$$

to błąd bezwzględny funkcji $\Delta y$ wyznaczamy z wzoru:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \qquad 4.12$$

Jest to bezwzględny błąd maksymalny funkcji wielu zmiennych 3.12 , który można napisać w postaci:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i \qquad 5.12$$

Względny błąd maksymalny otrzymamy dzieląc stronami równanie 4.12 względnie 5.12 przez 3.12 . Otrzymamy odpowiednio:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{f(x_1, x_2 \dots x_n)} \left( \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \right) \qquad 6.12$$

co możemy zapisać w postaci:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{f(x_1, x_2 \dots x_n)} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \qquad 7.12$$

Przebieg postępowania przy wyznaczaniu bezwzględnego błędu maksymalnego na podstawie wyrażenia 4.12 sprowadza się do wyznaczenia różniczki zupełnej dy wyniku przedstawionego funkcją 3.12 a następnie zastąpienia różniczek odpowiednimi błędami pomiarowymi poszczególnych wielkości.

Różniczkowanie cząstkowe przeprowadzamy tylko względem tych wielkości, które wnoszą wkład do błędu wyniku końcowego. Będą to z reguły wielkości mierzone w doświadczeniu.

Przy wyznaczeniu błędu uwzględniamy również te wielkości, których nie mirzymy, ale które mają wpływ na wartość ogólnego

~~ogólnego~~ błędu np. wielkości z tablic wyznaczone metodą interpolacji, wartości niektórych stałych jak $\pi$, e itp. Postępowanie z tego rodzaju błędami omówione jest w punkcie 13.1.3.

Wartości błędów $\Delta x_i$ rozumie się jako największą ze wszystkich wartości, a mianowicie:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}_i| \tag{8.12}$$

gdzie: $\bar{x}_i$ - wartość średniej arytmetycznej.

$x_i$ - największa wartość ze wszystkich otrzymanych wartości.

Czasami przez $\Delta x_i$ rozumie się średni błąd arytmetyczny wyznaczony z wzoru:

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_i| \tag{9.12}$$

gdzie: $x_i$ - eartości poszczególnych pomiarów.

$\bar{x}_i$ - wartość średnia arytmetyczna danej serii pomiarów.

W szczególnym przypadku, gdy funkcja 3.12 ma postać iloczynu potęg mierzonych wielkości

$$y = k \cdot x_1^a \cdot x_2^b \cdot \ldots \cdot x_n^m \tag{10.12}$$

to wygodniej jest najpierw oznaczyć błąd względny i na tej podstawie obliczyć błąd bezwzględny. W tym celu logarytmujemy stronami wzór 10.12 , a następnie stronami różniczkujemy, otrzymując wyrażenie:

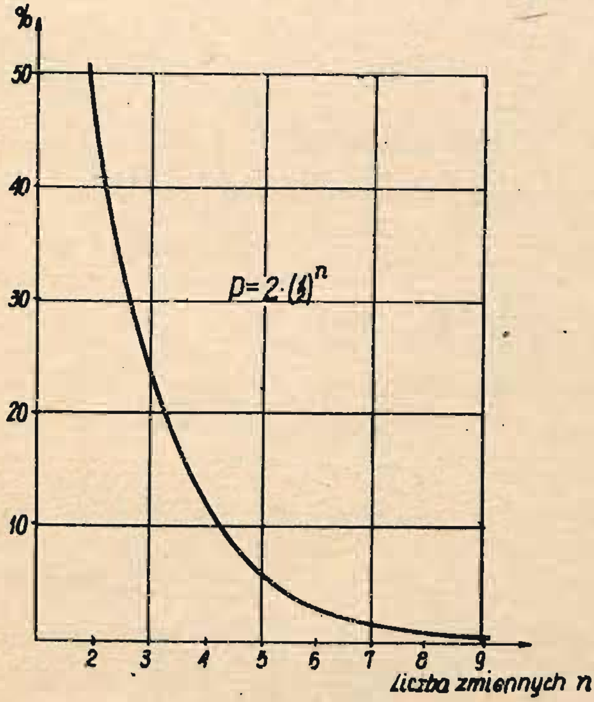
$$\frac{\Delta y}{y} = |a| \cdot \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + |b| \cdot \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \ldots + |m| \cdot \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right| \tag{11.12}$$

Błąd bezwzględny w tym wypadku otrzymamy:

$$\Delta y = k \cdot x_1^a \cdot x_2^b \cdot \ldots x_n^m \left[ |a| \cdot \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + |b| \cdot \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \ldots + |m| \cdot \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right| \right] \tag{12.12}$$

Należy tu zaznaczyć, że sposób ten stosujemy tylko w takim przypadku, gdy wielkość wyznaczana nie jest sumą ani różnicą poszczególnych członów.

W tablicy nr 12.1 przedstawiono wartości błędów względnych i bezwzględnych niektórych elementarnych funkcji.




Rys. 12.1. Prawdopodobieństwo występowania tego samego znaku błędu w zależności od ilości zmiennych.

12.2.2. Błąd losowy wartości fukcji wielu zmiennych.

Jeśli funkcja 3.12 jest funkcją kilku zmiennych, wtedy prawdopodobieństwo tego, że wszystkie błędy będą miały jednakowy znak jest stosunkowo małe i jest tym mniejsze, im większa jest liczba błędów pomiarowych. Przy dziesięciu zmiennych prawdopodobieństwo to wynosi około 0.2% i prawdopodobieństwo tego, że wszystkie błędy będą jednakowego znaku, jednocześnie będą miały największą wartość, praktycznie równe jest zeru /rys.12.1/. Dlatego słuszne jest przy większej ilości zmiennych zamiast wzoru 4.12 lub 6.12 stosować wzór na błąd bezwzględny:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2} \qquad 13.12$$

co można zapisać:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} \qquad 14.12$$

Błąd względny obliczamy z wzoru:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{f(x_1, x_2 \ldots x_n)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} \qquad 15.12$$

Wzór 13.12 lub 14.12 zachowuje swą postać jeśli zamiast błędu $\Delta x_i$ użyjemy średni błąd arytmetyczny obliczony z wzoru 9.9 lub średni błąd kwadratowy $\sigma$ względnie $s_n$ obliczone z wzoru 2.9 i wzoru 3.9

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\sigma_{x_2}\right)^2 \pm \ldots \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\sigma_{x_n}\right)^2} \qquad 16.12$$

lub w ogólnej postaci:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2} \qquad 17.12$$

W szczególnym przypadku, gdy funkcja ma postać:

$$y = x_1 + x_2$$

to

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} \qquad 18.12$$

tzn., że jeśli dwie zmienne losowe mają rozkład normalny, to ich suma ma również rozkład normalny.

Dla funkcji liniowej postaci

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n \qquad 19.12$$

średni błąd kwadratowy wyniesie:

$$\sigma_y = \sqrt{(k_1 \sigma_{x_1})^2 + (k_2 \sigma_{x_2})^2 + \ldots + (k_n \sigma_{x_n})^2} \qquad 20.12$$

Jeśli oblicza się błąd wartości funkcji według wzoru 13.12 , to prawdopodobieństwo tego błędu dla $\Delta y$ będzie takie samo jak dla $\Delta x_i$. Dlatego celowe jest posługiwanie się wzorem 13.12 i przyjmowanie wartości $\Delta x_i$ tak, aby można było otrzymać zadowalająco wysoką wartość prawdopodobieństwa dla $\Delta y$.

Przykład. Współczynnik lepkości $\eta$ możemy wyznaczyć z wzoru:

$$\eta = \frac{\pi p r^4 t}{8 l v}$$

gdzie: p - ciśnienie pod wpływem którego wypływa ciecz, r - promień kapilary, l - długość kapilary, t - czas wypływu cieczy, v - objętość cieczy, która wypłynęła w czasie t.

W wyniku przeprowadzonego doświadczenia otrzymano następujące dane:

$p = /200 \pm 0,1/$ mm Hg
$r = /1 \pm 0,01/$ mm
$l = 100 \pm 0,1$ mm
$t = /25 \pm 0,1/$ sek
$v = /5000 \pm 1 /$ mm$^3$

Logarytmując, a następnie różniczkując wzór na lepkość cieczy i zastępując różniczki przez przyrosty otrzymamy:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta p}{p} + 4\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta v}{v}$$

Podstawiając dane doświadczalne i odpowiadające im błędy bezwzględne otrzymamy:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{0,1}{200} + \frac{4\ 0,01}{1} + \frac{0,1}{25} + \frac{0,1}{100} + \frac{1}{5000} = 0,0457$$

stąd błąd względny

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm 4,6\%$$

Ze względu na stosunkowo dużą liczbę zmiennych /n = 5/ można zastosować wzór na względny błąd losowy /wzór 15.12/. Otrzymamy stąd:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{\left(\frac{0,1}{200}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0,01}{1}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{25}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{5000}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{0,0000002 + 0,0016 + 0,000016 + 0,000001 + 0,00000004} =$$

$$= \sqrt{0,0016174} \approx 0,04$$

Stąd

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 4\%$$

a więc wynik nieco mniejszy niż w poprzednim przypadku. Warto zwrócić uwagę, że decydujące znaczenie dla błędu lepkości ma dokładność pomiaru promienia kapilary, co szczególnie uwydatnia się w przypadku błędu losowego.

## 13. Niektóre zagadnienia optymalizacji metod pomiarowych.

Przy pośrednich, względnie przy bardziej złożonych pomiarach na błąd wyniku końcowego wywierają wpływ błędy wszystkich operacji składających się na to postępowanie. Chcąc poprawić wyniki pomiarów przez dobranie właściwych warunków doświadczalnych, staramy się usuwać przede wszystkim te źródła błędów, które w największym stopniu wpływają na powstanie błędu wyniku końcowego. Stosując odpowiednie warunki pomiaru i opierając się na wynikach rachunku błędów możemy niekiedy zmniejszyć błędy pomiarów pośrednich.

### 13.1. Ocena roli błędów w poszczególnych ogniwach procesu mierzenia.

Teoria błędów pozwala przeprowadzić analizę lub też krytycznie ocenić metody pomiarowe i ujawnić ich niektóre niedogodności. W szczególnym przypadku, jeśli dla określenia pewnej wielkości y musimy pomierzyć rząd wielkości $x_1, x_2 \ldots x_n$ to przy określaniu błędu względnego czy też bezwzględnego wielkości y jesteśmy w stanie stwierdzić, które błędy wartości mierzonych $x_1, x_2 \ldots x_n$ należy zmierzyć ze szczególnie dużą dokładnością. Jeśli przeprowadzi się podobną analizę nad wszytkimi metodami, jakie mogą być wzięte pod uwagę przy pomiarze którejkolwiek wielkości, to można w ten sposób wybrać najlepsze metody dla pomiaru danej wielkości.