środków przedziałów $/x_1, x_2/, /x_2, x_3/, /x_3, x_4/ \ldots /x_{n-1}, x_n/$ prowadzimy proste równoległe do osi y-ów, aż do przecięcia się z krzywą $y = f(x)$. Z punktów przecięć prowadzimy następnie proste równoległe do osi x-ów otrzymując punkty $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$, które łączymy z punktem $P(-1,0)$ na osi x-ów. Obierając dowolny punkt F_1 na prostej równoległej do osi y-ów i przechodzącej przez punkt o współrzędnej x_1, prowadzimy przez niego prostą równoległą do PM_1, otrzymując punkt F_2. Dalej przez punkt F_2 prostą równoległą do PM_2 otrzymując punkt F_3 itd. Otrzymamy odcinki $F_1, F_2, F_3 \ldots F_{n-1}, F_n$ otrzymując w ten sposób funkcję pierwotną $F\,x$. Dokładność otrzymanej funkcji będzie tym większa, im większą będziemy mieli liczbę przedziałów.

15. Przedstawienie danych doświadczalnych za pomocą równań.

Dane doświadczalne otrzymujemy często w wyniku pomiaru zmiennej zależnej y dla szeregu wartości zmiennej x. Zakładamy przy tym, że inne ważne czynniki nie ulegają zmianom. Zazwyczaj nanosi się wartości y w funkcji x i rysuje się krzywą w taki sposób aby przechodziła ona możliwie jak najbliżej zaznaczonych punktów pomiarowych. Ze względu na błędy pomiarowe, trudno oczekiwać, żeby rzeczywista krzywa przechodziła dokładnie przez wszystkie punkty odpowiadające wynikom pomiarowym. W zależności od celu, do jakiego jest potrzebna znajomość krzywej, stosujemy odpowiednie metody i kryteria, jakimi należy się posługiwać przy wykreślaniu tej krzywej.
Jako niektóre cele wykreślania krzywych można wymienić:

a/ dobre uzmysłowienie jakościowej natury zależności y od x,
b/ chęć ocenienia y w funkcji x między wartościami wyznaczonymi doświadczalnie /interpolacja/ a nawet poza zakresem zmierzonych wielkości /ekstrapolacja/,
c/ porządane wyeliminowanie, o ile to jest możliwe, wpływów błędów przypadkowych,
d/ wyznaczenie pochodnych lub całek funkcji $y = y(x)$,
e/ wyznaczenie prawa wyrażającego związek w formie równania matematycznego pomiędzy wartościami zmiennych uzyskanych z pomiarów.

W niektórych przypadkach wystarcza takie odręczne narysowanie krzywej, by przebieg jej wydał się zgodny z zaznaczonymi punktami. Postępowanie to jest najłatwiejsze i najszybsze, toteż należy je stosować wszędzie tam, gdzie to okaże się wystarczające. Na ogół postępujemy w ten sposób w przypadku, gdy wyznaczone punkty leżą tak blisko domniemanej krzywej, że ich odchylenia nie mają znaczenia przy zamierzonym wykorzystaniu wyników.

Gdy zakres zmian w porównaniu z wymaganą dokładnością jest zbyt obszerny dla ujęcia wykreślnego, niezbędne okazują się metody analityczne, których wadą jest jednak to, że są niezwykle czasochłonne. Natomiast do zalet tych metod należy:

a/ łatwość zapamiętania związków przedstawionych w postaci wzoru matematycznego,

b/ możliwość łatwego wykonywania na danych tak przedstawionych różnych operacji matematycznych jak wyznaczanie wartości zmiennej niezależnej, obliczanie pochodnej, całek itp.,

c/ porównanie tak otrzymanych równań z teorią opisującą zjawisko np. poszukiwanie stałych materiałowych, będących jednocześnie stałymi otrzymanego równania.

Przy ilościowym badaniu różnych procesów i zjawisk możemy mieć do czynienia z dwoma typami równań, a mianowicie:

a/ równania teoretyczne,

b/ równania empiryczne.

W przypadku pierwszego z teorii badanego procesu znamy formę równania opisującego związek między zmiennymi doświadczalnymi. Wyrażający tę zależność wzór zawiera stałe, które należy wyznaczyć na podstawie wyników otrzymanych z doświadczenia.

W drugim przypadku spotykamy się z bardziej złożonym zagadnieniem. W wyniku obserwacji otrzymuje się ciąg wartości zmiennych x i y, jednak ich zależność funkcyjna nie jest znana. Na podstawie danych doświadczalnych należy znaleźć analityczne wyrażenie opisujące zależność funkcyjną między x i y. Zadanie polega tu nie tylko na wyznaczeniu stałych równania przez porównanie z danymi eksperymentalnymi, lecz również nad znalezieniem najbardziej dogodnej formy tego równania. Tak znalezione wzory nazywają się wzorami empirycznymi.

15.1. Wybór wzorów empirycznych.

Proces doboru równań empirycznych dla określenia funkcjonalnej zależności $y = f(x)$ składa się z dwóch etapów:

a/ wybranie ogólnej postaci równania empirycznego,

b/ wyznaczenie parametrów wybranego równania.

Przy doborze równania empirycznego przedstawiającego dane eksperymentalne bierzemy pod uwagę dwa postulaty, a mianowicie dobrane równanie powinno:

a/ możliwie najlepiej przedstawiać zależność między wartościami zmiennych wynikającymi z pomiarów,

b/ zawierać możliwie małą liczbę stałych.

15.1.1. Wybór odpowiedniego wzoru prostującego.

Jeśli dobrany wzór empiryczny zawiera jedną lub dwie stałe, to przed wyliczeniem tych stałych należy zbadać jak dobrze to równanie przedstawia dane doświadczalne. Metoda wyboru odpowiedniego wzoru prostującego polega na tym, że krzywą otrzymaną w wyniku naniesienia danych doświadczalnych na papier milimetrowy, odpowiednio przekształcając doprowadzamy do równania linii prostej.

Jeśli zależność między x i y jest określona przez krzywą

$$y = af(x) + b \qquad 1.15$$

to dla przekształcenia tej funkcji w linię prostą należy wprowadzić nowe współrzędne X i Y określone przez wzory:

$$X = \varphi(x, y)$$
$$Y = \psi(x, y) \qquad 2.15$$

Funkcje φ i ψ należy tak dobrać, aby wielkości X i Y były związane zależnościami liniowymi, lecz nie zawierały stałych np. jeśli przewidujemy, że dobrana funkcja empiryczna ma postać:

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

to bierzemy $X = x$, $Y = \frac{x}{y}$ lub $X = \frac{1}{x}$ i $Y = \frac{1}{y}$.

Następnie dla kilku wartości x i y obliczamy wartości funkcji $X = \varphi(x, y)$ i $Y = \psi(x, y)$ oraz wykreślamy X w zależności od Y. Jeśli w nowym układzie współrzędnych X i Y otrzymamy linię prostą, wówczas postać równania empirycznego dobrana była poprawnie. W tym wypadku otrzymamy linię prostą w postaci równania:

$$Y = A + BX \qquad 3.15$$

gdzie: A i B są stałymi, które możemy wyznaczyć np. bezpośrednio z wykresu prostej 3.15 . Należy tu zaznaczyć, że metoda ta nadaje się tylko do funkcji, którą można przedstawić w postaci liniowej przy pomocy funkcji $X = \varphi(x, y)$ i $Y = \psi(x, x)$. Nie można jej jednak stosować w przypadku równań typu np.

$$y = a\left(1 - e^{bx}\right)$$

W razie konieczności wyboru jednego z wielu prostujących wzorów, najprościej jest nanieść z osobna na papier milimetrowy punkty, obliczone za pomocą rozpatrywanych wzorów i spośród tych wzorów wybrać ten dla którego punkty będą najlepiej układać się wokół linii prostej.

Po określeniu stałych A i B otrzymuje się empiryczną zależność w postaci równania 3.15 , które ustanawia zależność między X i Y tj. między wielkościami x i y. Na podstawie tej metody można ustalić w przybliżeniu postać funkcji $y = f x$, wyrażającą zależność między danymi doświadczalnymi.

W praktyce przekształcenia krzywej $f(x)$ w linię prostą korzysta się z dopowiednich skal naniesionych na papier, przy czym szerokie zastosowanie znajdują szczególnie skale logarytmiczne i półlogarytmiczne.

Poza funkcjami typu $y = af(x) + b$ można rozpatrywać bardziej ogólne funkcje postaci:

$$y = af_1(x) + bf_2(x) \qquad 4.15$$

Dzieląc stronami powyższe równanie przez $f_2(x)$ zapisujemy je w postaci:

$$\frac{y}{f_2(x)} = a\frac{f_1(x)}{f_2(x)} + b \qquad 5.15$$

Przyjmując teraz oznaczenie

$$X = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \text{i} \quad Y = \frac{y}{f_2(x)} \qquad 6.15$$

możemy równanie 4.15 napisać w postaci:

$$Y = aX + b \qquad 7.15$$

skąd widać, że w takiej siatce finkcyjnej zależność ta jest przedstawiona linią prostą.

15.1.2. Opis danych doświadczalnych funkcjami liniowymi.

W przypadku gdy istnienie zależności liniowej wynika z teorii lub przez pewne transformacje możemy je sprowadzić do tej postaci, to do opisu otrzymanych danych funkcją liniową wystarczy wyznaczyć tylko współczynniki a i b w równaniu

$$y = ax + b \qquad 8.15$$

Stałą a odczytujemy jako rzędną punktu przecięcia się tej prostej z osią y, natomiast stałą b - jako tangens kąta nachylenia tej prostej do osi x.

a/ Metoda analityczna.

Analityczna metoda wyznaczenia stałych a i b polega na wybraniu na prostej dwu możliwie odległych od siebie punktów $/x_1, y_1/$ oraz $/x_2, y_2/$ i przedstawieniu równania tej prostej w postaci wyznacznika

$$\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 9.15$$

Porównując odpowiednie współczynniki prostej 8.15 i 9.15 otrzymamy wartość stałych

$$a = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \qquad b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad 10.15$$

b/ Metoda graficzna.

Jeśli postać zależności nie jest znana z góry, to przede wszystkim należy roztrzygnąć o ile równanie postaci 8.15 jest zgodne z danymi doświadczalnymi.

Najprostrzym sposobem sprawdzenia, czy dane doświadczalne można ująć zależności liniową jest sposób graficzny. Punkty pomiarowe nanosimy na wykres, sporządzony na papierze milimetrowym. Układanie się punktów w pobliżu linii prostej wskazuje, że dane te można opisać funkcją liniową. W tym wypadku pozostaje tylko wyznaczyć współczynniki a i b.

c/ Metoda wybranych punktów.

W metodzie tej dane doświadczalne nanosi się na papier milimetrowy i dobiera się graficznie taką prostą, która przechodzi najbliżej naniesionych punktów. Wybiera się dwa dowolne punkty nie będące koniecznie punktami pomiarowymi w możliwie dużej odległości od siebie. Następnie współrzędne tych punktów $/x_1, y_1/$ i $/x_2, y_2/$ wstawiamy do równania opisującego zależność między zmiennymi x i y 8.15 . Współczynniki a i b wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

15.1.3. Funkcje ułamkowo - liniowe.

Jeśli w przybliżeniu punkty pomiarowe na krzywej układają się odwrotnie proporcjonalnie tzn., że ze zwiększeniem wartości x zmniejsza się y, to w tym wypadku można spróbować zastosować funkcję typu /rys.15.1/

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad 11.15$$

Dla sprawdzenia słuszności doboru tej funkcji bierzemy z krzywej doświadczalnej /wykresu/ dowolny punkt o współrzędnych $/x_1, y_1/$ i podstawiamy

$$X = x \qquad Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

Skąd otrzymamy równanie linii prostej

$$Y = A + B$$

Określając znanymi metodami stałe A i B, otrzymamy wzór empiryczny w postaci

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + B x} \qquad 12.15$$

a/ W przypadku szczególnym, jeśli funkcja 11.15 /a=1, b=0/ ma postać

$$y = \frac{x}{cx + d} \qquad 13.15$$

to bierzemy

$$X = \frac{1}{x} \qquad Y = \frac{1}{y}$$

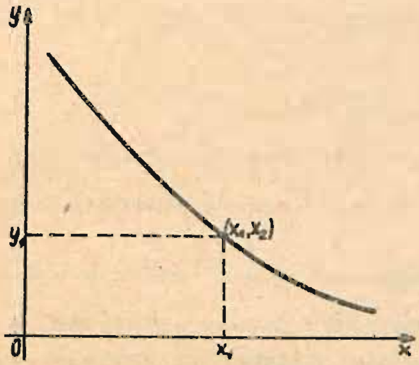
lub

$$X = x \qquad Y = \frac{x}{y}$$

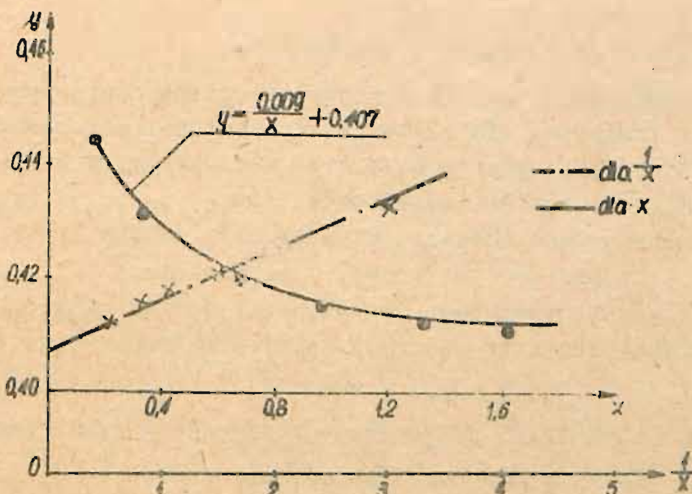
b/ Jeśli w funkcji 11.15 wartość licznika ax + b = 1, tzn.

y	0,448	0,432	0,421	0,417	0,414	0,412
x	0,164	0,328	0,656	0,984	1,312	1,640
$\frac{1}{x}$	6,098	3,049	1,524	1,016	0,762	0,610

Tabela 15.1. Zestawienie wartości doświadczalnych dla przykładu wyznaczania funkcji $y = \frac{0.009}{x} + 0.407$.



Rys.15.1. Wykres funkcji ułamkowo-liniowej.



Rys.15.2. Przykład wykresu funkcji typu $y = \frac{0,009}{x} + 0,40$

funkcja ma postać:

$$y = \frac{1}{cx + d} \qquad 14.15$$

to w celu otrzymania linii prostej podstawiamy:

$$X = x \quad \text{i} \quad Y = \frac{1}{y}$$

Przykład 1. W wyniku doświadczeń otrzymano zależności przedstawione w poniższej tabeli /15.1/ oraz na wykresie /rys.15.2/. Z wykresu widać, że ze wzrostem wartości x wartość y maleje. Przyjmujemy, że szukana postać funkcji jest typu

$$y = \frac{a}{x} + b$$

gdzie: a i b - są wartościami stąąymi.

Podstawiając X = x oraz $y = \frac{1}{x}$ otrzymamy w układzie współrzędnych x, $\frac{1}{x}$ linię prostą /rys.15.2./ co świadczy o poprawności doboru krzywej.

Z wykresu odczytujemy dla $\frac{1}{x} \to 0$ wartość b = 0,407, obliczając tangens kąta nachylenia prostej otrzymamy a = 0,009.

Równanie empiryczne dla otrzymanych wartości doświadczalnych przyjmuje więc postać:

$$y = \frac{0{,}009}{x} + 0{,}407$$

15.1.4. Funkcja potęgowa i wykładnicza.

W przypadku, gdy punkty doświadczalne naniesione na zwykły papier milimetrowy nie układają się wzdłuż linii prostej, to należy nanieść te punkty na siatkę logarytmiczną względnie półlogarytmiczną. Bardzo często okazuje się, że na jednej z tych siatek punkty doświadczalne układają się wzdłuż linii prostej. Mogą tu wystąpić dwa przypadki, a mianowicie:

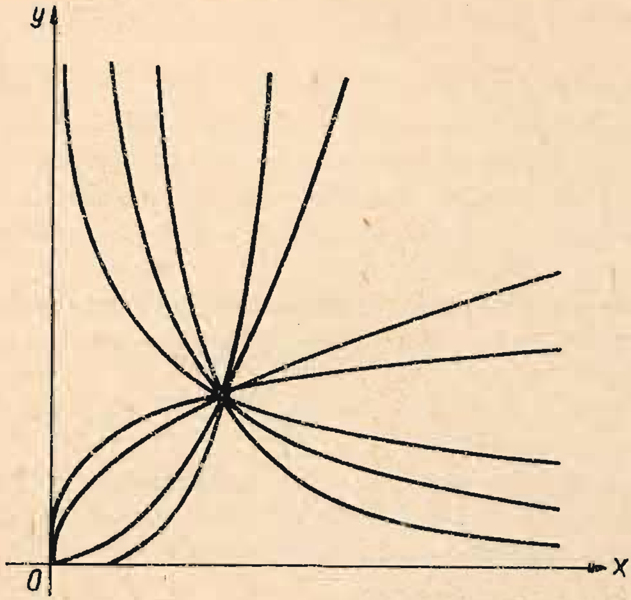
a/ jeśli punkty pomiarowe układają się wzdłuż prostej na siatce logarytmicznej, to należy przyjąć wzór empiryczny typu:

$$y = ax^n + b \qquad 15.15$$

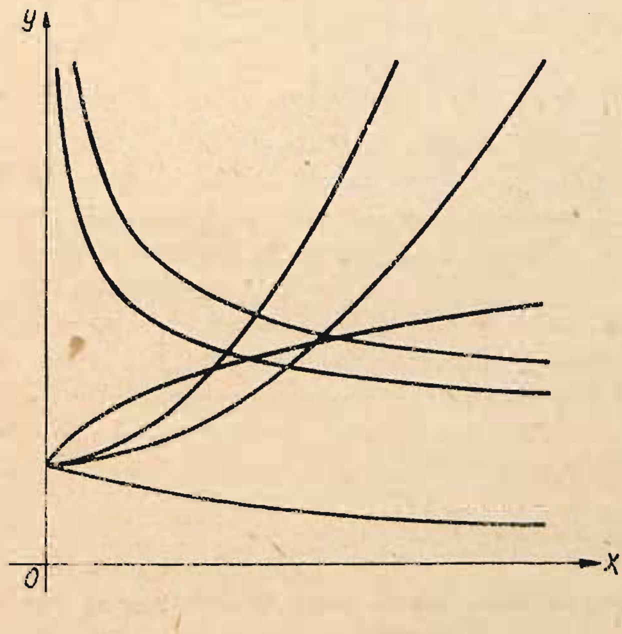
gdzie b w niektórych przypadkach przyjmuje wartość zero.

b/ jeśli punkty pomiarowe układają się wzdłuż linii prostej na półlogarytmicznej siatce, to należy przyjąć wzór typu:

$$y = ae^{nx} + b \qquad 16.15$$



Rys.15.3. Funkcje potęgowe $y = ax^b$.



Rys.15.4. Funkcje potęgowe $y = ax^b + c$.

gdzie b niekiedy może także przyjąć wartość równą zeru. Funkcję potęgową typu 15.15 od funkcji wykładniczej typu 16.15 można odróżnić stosując metodę analityczną. Korzysta się tu z własności, że wartości funkcji potęgowej tworzą postęp geometryczny, natomiast wartości funkcji wykładniczej tworzą postęp arytmetyczny.

Bierzemy pod uwagę jednakowo odległe punkty $x_{k+1} = x_k + h$ i dla punktów tworzących postęp geometryczny otrzymamy $x_{k+1} = q\, x_k$

a/ Funkcja potęgowa typu $y = ax^b$.

Jeśli punkty doświadczalne układają się według jednej z przedstawionych krzywych na rys.15.3, to jako wzór empiryczny możemy przyjąć funkcję

$$y = ax^b \qquad 17.15$$

Logarytmując stronami wzór 17.15 otrzymamy:

$$\lg y = \lg a + \lg x$$

Przechodząc do nowych zmiennych

$$Y = \lg y \quad \text{i} \quad X = \lg x$$

Na podstawie tych związków otrzymamy:

$$Y = \lg a + b\, X$$

a więc równanie linii prostej.

b/ Funkcja potęgowa $y = ax^b + c$.

Funkcja tego typu przedstawiona na rys. 15.4 posiada trzy parametry, a mianowicie a, b, c. Stałą c, o ile jest nieznana, obliczamy w sposób przybliżony, wybierając na krzywej trzy dowolne punkty x_1 i x_2 a $x_3 = \sqrt{x_1 \; x_2}$. Odpowiednio dla tych wartości otrzymamy y_1, y_2, y_3.

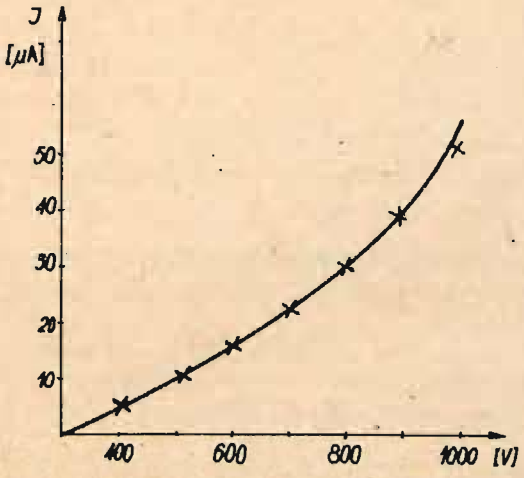
Wartość stałej c wyniesie:

$$c = \frac{y_1\, y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$$

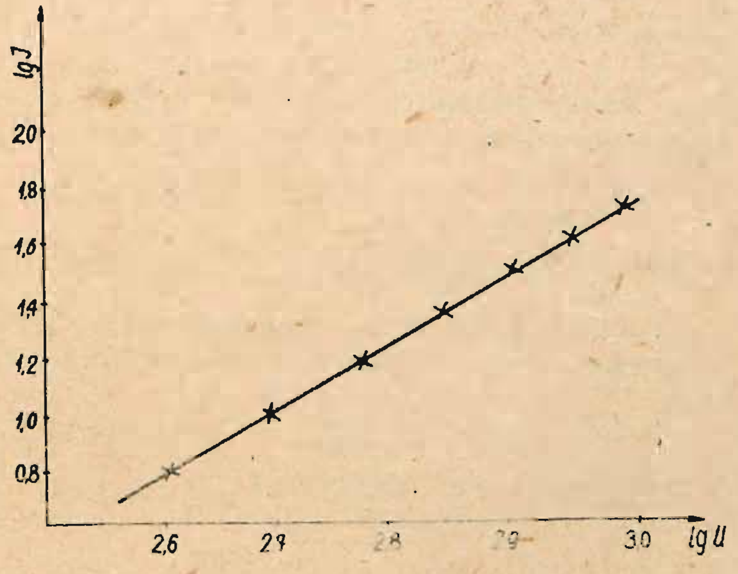
Wprowadzając nowe zmienne

$$X = \lg x \quad \text{i} \quad Y = \lg\left|y - c\right|$$

otrzymamy równanie linii prostej



Rys. 15.5. Zależności prądowo-napięciowe dla funkcji $I = 1{,}41\ 10^5\ u^{2{,}28}$.



Rys. 15.6. Funkcja potęgowa $I = 1{,}41\ u^{2{,}28}$ we współrzędnych logarytm.

$$Y = \lg a + b X$$

Dla każdej z tych wartości $x_1, x_2 \ldots x_n$ obliczamy odpowiednie stosunki $y_1, y_2 \ldots y_n$:

$$\frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{y_3}{y_2}, \quad \frac{y_4}{y_3} \qquad 18.15$$

Jeśli stosunki 18.15 będą zbliżone do wartości stałej dla jednakowo odległych punktów, to wybieramy funkcję wykładniczą, w przeciwnym wypadku funkcję potęgową.

Przykład. Wykonując charakterystykę prądowo-napięciową dla zanieczyszczonej grafitem gumy uzyskano następujące wyniki /rys. 15.5/

U	V	400	500	600	700	800	900	1000
I	uA	5,5	10	15	21	29	37	47

Zgodnie z wyrażeniem 18.15 uzyskamy ciąg liczb

$$\frac{10}{5,5} = 1,8 \quad \frac{15}{10} = 1,5 \quad \frac{21}{15} = 1,4 \quad \frac{29}{21} = 1,38 \quad \frac{37}{29} = 1,28$$

$$\frac{47}{37} = 1,27$$

Z powyższego ciągu widać, że wartości stosunków są systematycznie malejące, a więc empiryczny wzór nie może być funkcją wykładniczą, a raczej potęgową tzn. zależność natężenia prądu I od przyłożonego napięcia wyrazi się przy pomocy wzoru:

$$I = a\,U^n$$

gdzie: a i n - wartości stałe.

Logarytmując stronami powyższy wzór otrzymamy wyrażenie

$$\log I = \log a + n \lg U$$

które w układzie logarytmicznym przedstawia linię prostą /rys. 15.6 b/. Wartości a i n wyznaczone jedną ze znanych metod dają wartości:

$$a = 1,41 \cdot 10^5 \qquad b = 2,28$$

Ostatecznie otrzymamy wzór empiryczny:

$$I = 1,41 \cdot 10^5 \cdot U^{2,28}$$

c/ Funkcja typu $y = ax^2 + bx$

Równanie typu

$$y = ax^2 + bx \tag{19.15}$$

przedstawiamy w postaci:

$$\frac{y}{x} = ax + b$$

Wprowadzając oznaczenia

$$X = x \quad \text{oraz} \quad Y = \frac{y}{x}$$

sprowadzimy wzór 19.15 do postaci liniowej

$$Y = aX + b$$

d/ Funkcja typu $y = ax^2 + bx + c$

Funkcja typu kwadratowego

$$y = ax^2 + bx + c \tag{20.15}$$

przedstawione są na rys.15.7. W celu doprowadzenia funkcji 20.15 do postaci równania linii prostej wybieramy dowolny punkt x_1, y_1 leżący na tej krzywej /naniesionej na zwykły papier milimetrowy/ i wprowadzamy nowe zmienne

$$X = x \quad i \quad Y = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{21.15}$$

Podstawiając wartość y z równania 20.15 do równania 21.15 otrzymamy:

$$Y = \left(ax_y + b\right) + ax \tag{22.15}$$

wyrażenie ax_1 ma wartość stałą wobec czego równanie 22.15 przyjmie postać:

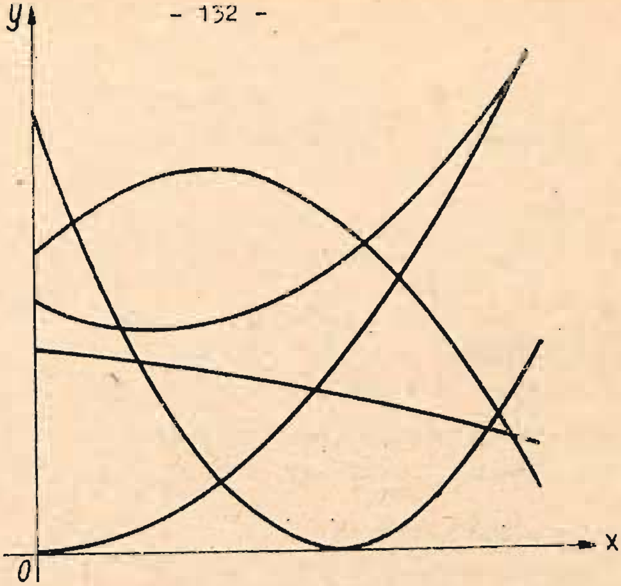
$$Y = A + ax$$

tzn. we współrzędnych x, $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ powinno dać nam linię prostą.

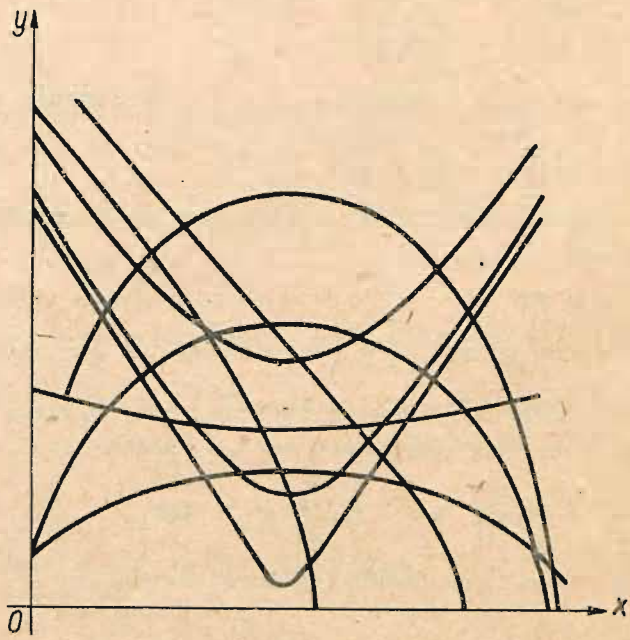
Wartości y i x bierzemy z danych doświadczalnych. Po wyznaczeniu stałych a i b wyznaczamy wartość c z równania:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + nc \tag{23.15}$$

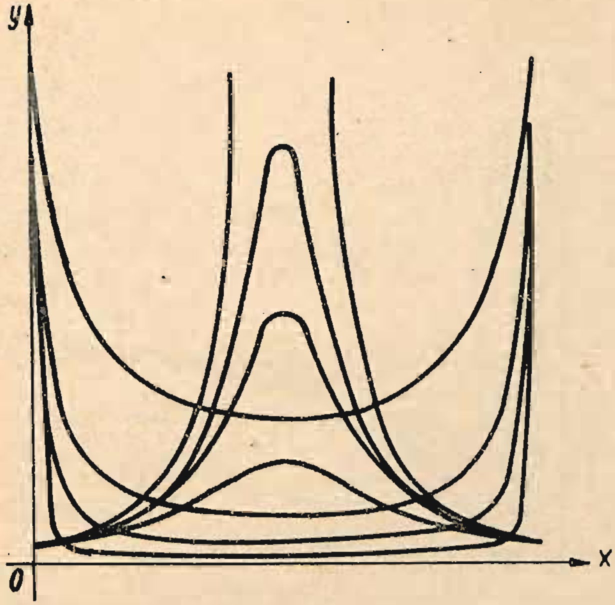
gdzie: n - liczba danych doświadczalnych wartości x_i.



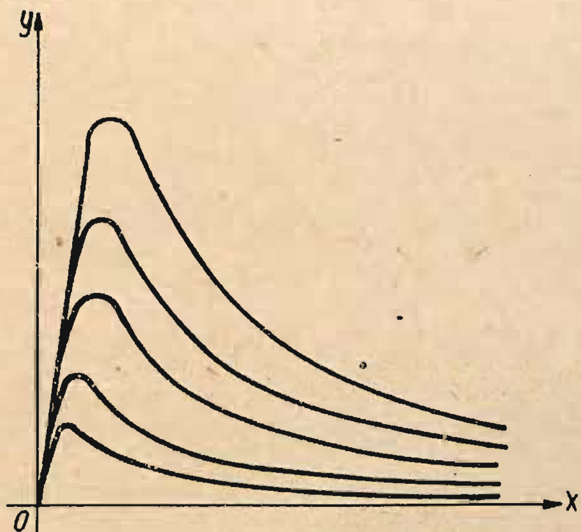
Rys. 15.7. Wykresy funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$.



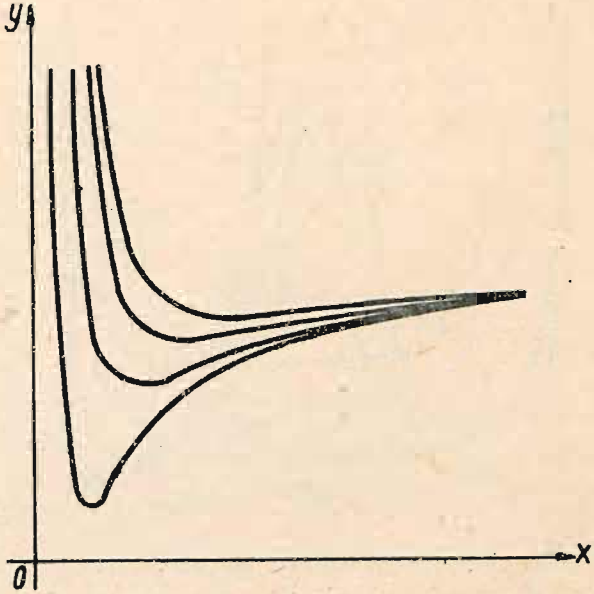
Rys. 15.8. Wykresy funkcji $y^2 = ax^2 + bx + c$.



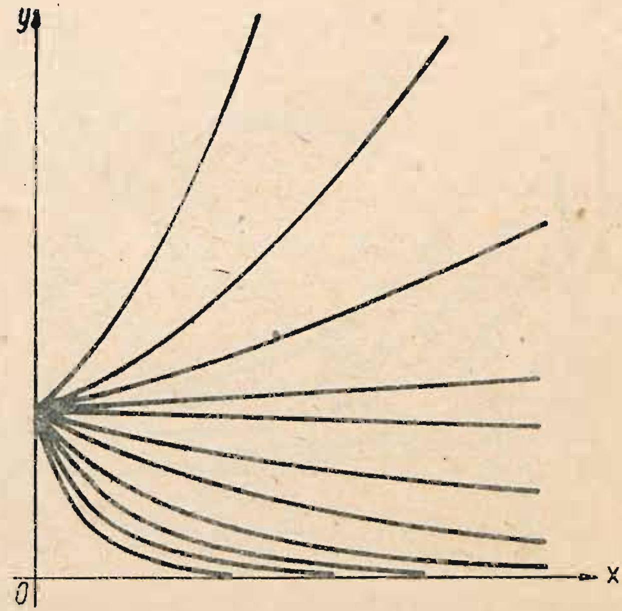
Rys.15.9. Wykresy funkcji typu $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$



Rys.15.10. Wykresy funkcji typu $y = \dfrac{x}{ax^2 + bx + c}$



Rys.15.11. Wykresy funkcji typu $y = a\frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$



Rys.15.12. Wykresy funkcji wykładniczej typu $y = ae^{bx}$.

e/ Funkcja typu $y^2 = ax^2 + bx + c$

Wykres tego typu funkcji

$$y^2 = ax^2 + bx + c \qquad 24.15$$

przedstawiony jest na rys.15.8. Wprowadzamy nową zmienną $z=y^2$, a dalej postępujemy tak jak w przypadku d/.

f/ Funkcja typu

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \qquad 25.15$$

Funkcje tego typu przedstawione są na rys.15.9. Wprowadzamy nową zmienną $Y = \frac{1}{y}$ i zagadnienie sprowadza się do przypadku d/.

g/ Funkcja typu

$$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c} \qquad 26.15$$

Wykresy tego typu funkcji przedstawione są na rys.15.10. Podstawiając

$$z = \frac{x}{y}$$

otrzymamy funkcję

$$z = ax^2 + bx + c$$

a dalej postępujemy z nią tak jak w przypadku d/.

h/ Funkcja typu

$$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \qquad 27.15$$

Wykres tego typu funkcji przedstawiony jest na rys.15.11. W tym wypadku podstawiamy

$$z = \frac{1}{x}$$

skąd otrzymamy:

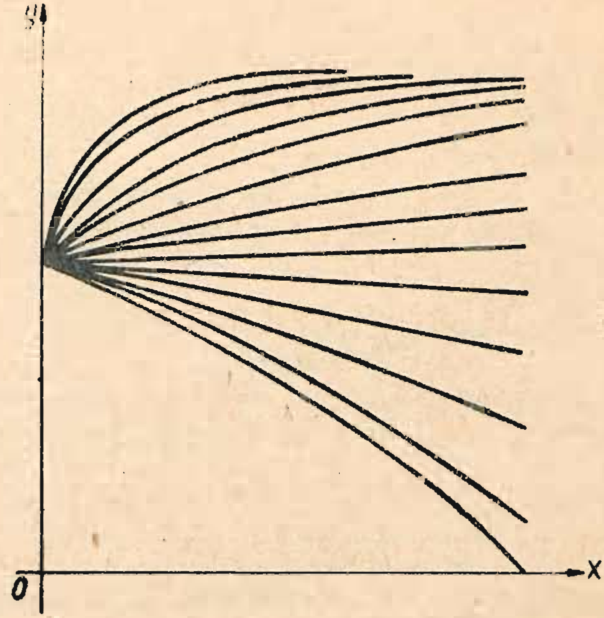
$$y = a + bz + cz^2$$

tzn. zagadnienie sprowadza się do przypadku d/.

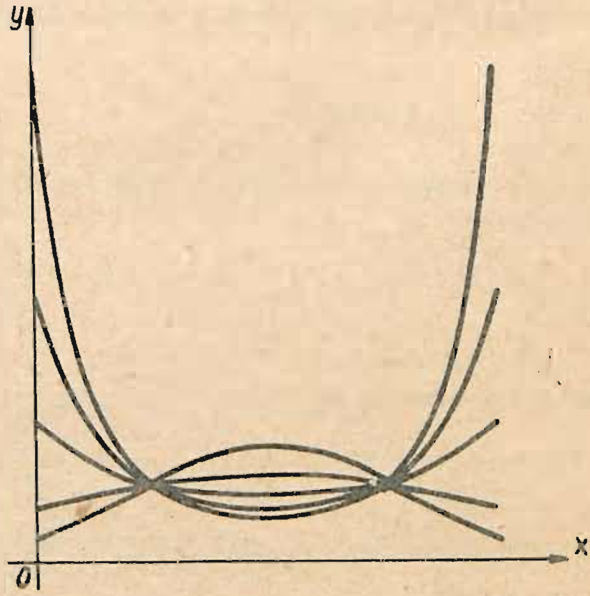
i/ Funkcja wykładnicza typu

$$y = ae^{bx} \qquad 28.15$$

Na rys.15.12 przedstawiono tego typu funkcję. Logarytmując stro-



Rys.15.13. Wykresy funkcji wykładniczej typu $y = ae^{bx} + c$.



Rys.15.14. Wykresy funkcji typu $y = ae^{bx} + cx^2$.

nami otrzymamy:

$$\lg y = \lg a + bx$$

Podstawiając $x = X$ oraz $Y = \lg y$ otrzymamy równanie linii prostej

$$Y = \lg a + b \lg e\, x$$

j/ Funkcja wykładnicza typu

$$y = ae^{bx} + c \qquad 28.15$$

Przekształcając funkcję /rys.15.13/ $y - c = ae^{bx}$ a następnie logarytmujemy stronami, otrzymamy:

$$\lg(y - c) = \lg a + b \lg e\, x$$

Podstawiamy następnie

$$X = x \quad i \quad Y = \lg(y - c)$$

otrzymamy równanie linii prostej

$$Y = \lg a + b \lg e\, x$$

Stałą c obliczamy wstępnie w ten sposób, że obieramy na wykresie dowolne dwa punkty $/x_1, y_1/$ oraz $/x_2, y_2/$ a następnie punkt $x_3 = \frac{1}{2}/x_1 - x_2/$ oraz odpowiednio punkty y_3. Stała c wyrazi się przy pomocy wzoru:

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_2^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$$

k/ Funkcja typu

$$y = ae^{bx} + cx^2 \qquad 29.15$$

Funkcje tego typu przedstawione są na wykresie 15.14. Przyjęte funkcje 29.15 logarytmujemy stronami

$$\lg y = \lg a + bx\lg e + cx^2 \lg e$$

Podstawiając

$$z = \lg y, \quad \lg a = p, \quad b \lg e = q, \quad c \lg e = r$$

otrzymamy $z = p + qx + rx^2$, a więc zagadnienie sprowadza się do równania kwadratowego.

15.2. Metody wyznaczania stałych równania.

Jeśli znana nam jest postać wzoru matematycznego, wynikająca z teorii lub wyznaczona w sposób doświadczalny, to zadanie sprowadza się do wyznaczenia wszystkich stałych występujących w równaniu. W celu wyłączenia wpływu błędów, przeprowadza się większą liczbę pomiarów, przy czym każdy pomiar daje nam równanie wiążące z sobą niewiadome współczynniki. W przypadku dużej liczby pomiarów dochodzi się zatem do układu, w którym liczba równań jest znacznie większa niż liczba niewiadomych. Należy więc znaleźć najbardziej prawdopodobne współczynniki, które na ogół nie będą spełniać ściśle ani jednego z danego układu równań.

W celu wyznaczenia stałych równania istnieje wiele różnych metod, od bardzo prostych, ale mało dokładnych, do bardzo dokładnych ale skomplikowanych i pracochłonnych.

15.2.1. Metoda średnich.

Metoda średniej jest jedną z najprostrzych metod analitycznych i nie wymaga graficznego przedstawienia danych eksperymentalnych. Opiera się ona na założeniu, że dla równania najlepiej przybliżającego otrzymane dane eksperymentalne

$$\varepsilon_i = f(x, a_0, a_1 \dots a_n) - y_i \qquad i = 1, 2 \dots n$$

gdzie: $f(x, a_0, a_1, a_2 \dots a_n)$ - wartości obliczone

y_i - wartości zmierzone

winna być równa zero, tzn., że

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, a_0, a_1 \dots a_n) - y_i \right] = 0$$

W celu wyznaczenia stałych równania $f(x_i, a_0, a_1 \dots a_i)$ należy podzielić otrzymanych n punktów doświadczalnych na tyle grup ile mamy stałych a_n. Dla każdej z tych grup wymagamy, aby różnice się zerowały, tzn., żeby zachodził związek 30.15 . W ten sposób otrzymuje się n równań z a_n niewiadomymi.

W przypadku, gdy między x i y istnieje teoretyczna ustalona zależność liniowa

$$y = ax + b$$

obserwowane wartości y_i na skutek występowania błędów pomiarowych będą się różniły od obserwowanych wartości $ax_i + b$. W celu