Ocena ta ma te same własności, co ocena 3.8 wartości średniej arytmetycznej. Czasami mamy do czynienia z przypadkiem, gdy opracowywane wyniki x_1 x_2 ... x_n nie są wynikimi bezpośrednich pomiarów lecz są średnimi z n serii pomiarów przeprowadzonych z tą samą dokładnością /tj. z jednakowym średnim błędem kwadratowym/, przy czym liczba pomiarów w każdej serii jest inna. W tym przypadku każdej wartości x_i można przypisać jako wagę liczbę pomiarów w odpowiedniej serii

$$p_i = m_i \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

gdzie: m_i - liczba pomiarów w i-tej serii ze średnią wartością x_i.
W tym wypadku wzór 7.9 przyjmie postać:

$$\bar{x} = \frac{m_1 \cdot \bar{x}_1 + m_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots + m_n \cdot \bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \qquad 8.9$$

gdzie: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Sens tej średniej ważonej polega na tym, że wyniki częściowe, uzyskane metodami lepiej odtwarzalnym lub jako średnia z większej liczby oznaczeń, a zatem wiarygodniejsze, mają przy obliczeniu wyniku końcowego większą wagę, czyli bardziej wpływają na jego wartość.

9.2. Średni błąd arytmetyczny.

Średni błąd arytmetyczny /zwany też błędem przeciętnym/ oblicza się wg wzoru:

$$r = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \qquad 9.9$$

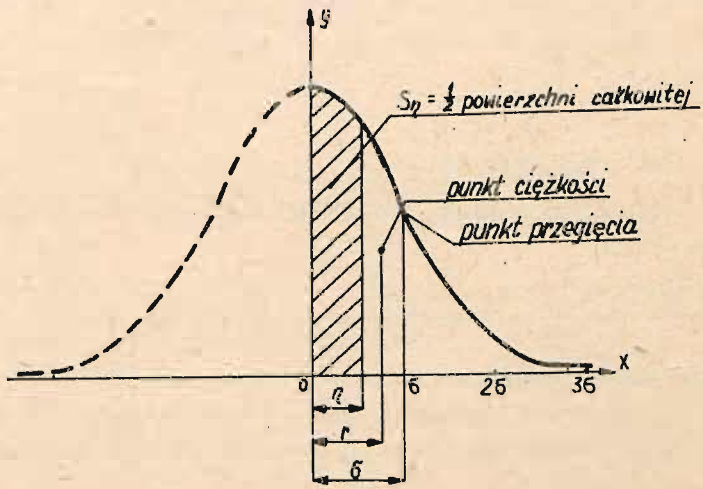
gdzie: $\bar{x}$ - średnia arytmetyczna wyników pomiarów.
W przypadku posługiwania się średnim błędem arytmetycznym r dla małej ilości pomiarów n poprawniej jest obliczać go nie według wzoru 9.9 lecz wg wzoru:

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \qquad 10.9$$

Przy dużych n różnica między otrzymywanymi wartościami błędu r na podstawie tych dwu wzorów 9.9 , 10.9 jest bardzo mała. Wartość bezwzględna $x_i - \bar{x}$ oznacza, że przy obliczeniach bierze się pod uwagę jedynie bezwzględne wartości różnic, pomijając ich znak. Zaletą błędu r jest to, że łatwiej oblicza się go niż

Lp.	Rodzaj błędu		Wartości błędów		
1	średni kwadratowy	σ	$1{,}0000 \cdot \sigma$	$1{,}2533 \cdot r$	$1{,}4826 \cdot \eta$
2	średni arytmetyczny	r	$0{,}7979 \cdot \sigma$	$1{,}0000 \cdot r$	$1{,}1829 \cdot \eta$
3	prawdopodobny	η	$0{,}6745 \cdot \sigma$	$0{,}8453 \cdot r$	$1{,}0000 \cdot \eta$

Tabela 9.1. Zestawienie zależności między poszczególnymi rodzajami błędów.



Rys. 9.1. Geometryczna interpretacja poszczególnych rodzajów błędów.

średni błąd kwadratowy s_n. Przy dostatecznie dużej liczbie pomiarów / praktycznie dla $n > 30$/ między błędami r i s_n zachodzą związki:

$$r = 0{,}8 \cdot s_n \qquad 11.9$$

$$s_n = 1{,}25 \cdot r \qquad 12.9$$

9.3. Błąd prawdopodobny.

Obok średniego błędu kwadratowego s_n oraz średniego błędu arytmetycznego używa się jeszcze tzw. błąd prawdopodobny zdefiniowany w ten sposób, że prawdopodobieństwo znalezienia odchyleń od średniej arytmetycznej większych od tej wartości jest równe prawdopodobieństwu znalezienia odchyleń mniejszych. Zależność między średnim błędem kwadratowym s_n a błędem prawdopodobnym η wyraża się przy pomocy wzoru:

$$\eta = 0.6745 \cdot s_n \quad \text{lub} \quad \eta = \frac{2}{3} s_n \qquad 13.9$$

$$s_n = 1{,}48 \cdot \eta \qquad 14.9$$

Błąd prawdopodobny jest dość często i chętnie używany przy opracowywaniu wyników. Przyczyna leży w tym, że ma on mniejszą wartość od średniego błędu kwadratowego. Nie może być jednak poprawną miarą precyzji pomiarów, gdyż nawet w przypadku rozkładu zbliżonego do normalnego, wartość jego może być niepoprawna. Wartość ta odnosi się bowiem do całej populacji, natomiast w przypadku niewielkiej próbki może być ona zupełnie inna.

9.4. Zależności matematyczne między poszczególnymi rodzajami błędów.

Zależności między wymienionymi rodzajami błędów podane są w tabelce nr 9.1, natomiast interpretacja geometryczna każdego rodzaju błędu przedstawiona jest na wykresie rozkładu normalnego /rys.9.1/. Błąd prawdopodobny η pojedyńczego wyniku jest określony odciętymi tych punktów krzywej Gaussa, których rzędne dzielą symetryczne części powierzchni ograniczonej krzywą i osiami współrzędnych na dwie równe części. Błąd średni kwadratowy pojedyńczego pomiaru σ określony jest odciętymi punktów przegięcia na obu połowach krzywej błędu. Błąd średni arytmetyczny

Ilość pomiarów n	k_n
2	0,8862
3	0,5908
4	0,4857
5	0,4299
6	0,3946
7	0,3698
8	0,3512
9	0,3367
10	0,3249

Tabela 9.2. Wartości współczynnika K_n dla oszacowania błędu standardowego z rozpiętości i ilości pomiarów.

Próbka	Wyniki	Średnia	Różnica między wynikami	Kwadrat różnicy
1	$x_{11} \cdot x_{12} \cdot x_{1n}$	$\overline{x}_1$	$R_1 = x_{1max} - x_{1min}$	R_1^2
2	$x_{21} \cdot x_{22} \cdot x_{2n}$	$\overline{x}_2$	$R_2 = x_{2max} - x_{2min}$	R_2^2
= =	= = = = =	= = =	= = = = = =	= = = =
m	$x_{m1} \cdot x_{m2} \cdot x_{mn}$	$\overline{x}_m$	$R_m = x_{mmax} - x_{mmin}$	R_m^2
	$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i$			$\sum_{i=1}^{n} R_i^2$

Tabela 9.3. Zestawienie wyników n pomiarów dla każdej z m próbek.

/przeciętny/ pojedyńczego wyniku r wyznaczony jest przez odcięte środków "ciężkości" każdej połowy powierzchni, zawartej między krzywą i osiami współrzędnych. Srodek ciężkości rozumiany tu jest jako zwykły środek ciężkości powierzchni. Należy zwrócić uwagę na fakt, że z trzech rodzajów przedstawionych błędów największą wartość ma błąd średni kwadratowy σ, natomiast najmniejszą wartość błąd prawdopodobny η.

9.5. Oszacowanie błędu standardowego.

W wielu wypadkach chcąc uniknąć żmudnych obliczeń średniego błędu kwadratowego oraz mając stosunkowo małą liczbę pomiarów, możemy skorzystać z wzoru szacunkowego na średni błąd kwadratowy.

$$S_k = k_n \cdot R \qquad 15.9$$

gdzie: k_n - współczynnik, który dla danej wartości n liczby pomiarów znajdziemy w tablicy nr 9.2,

$R = x_{max} - x_{min}$, tzn. różnica między największą x_{max} i najmniejszą x_{min} wartością pomiaru ze wszystkich otrzymanych pomiarów. Wielkość R nazywamy rozpiętością pomiarów.

Wzór 15.9 jest niezmiernie wygodny w praktyce doświadczalnej. Do wyliczenia go wystarczy rozpiętość, czyli różnicę między największym a najmniejszym znalezionym wynikiem ~~należy~~ pomnożyć przez stałą, której wartość znajdziemy w tablicy nr 9.2. Wartość tego wzoru jest dogodna także z tego względu, że używać go możemy przy stosunkowo małej liczbie pomiarów.

Sredni błąd kwadratowy σ można oszacować na podstawie n pomiarów wykonanych na m próbkach. Wyniki pomiarów należy ułożyć wg wielkości i zestawić dla różnych próbek w tabelę /nr 9.3/. Wyrażenie na oszacowanie odchylenia standardowego sprowadza się do wzoru:

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m} R_i^2} \qquad 16.9$$

Oszacowanie odchylenia standardowego za pomocą rozpiętości i współczynnika k_n jest właściwie jedynym poprawnym sposobem oszacowania σ na podstawie małej ilości pomiarów. Liczba pomiarów w każdej serii musi być dla wszystkich próbek taka sama i to najmniej $n \geqslant 2$ i nie powinna przewyższać 7. Z wartości tych obliczamy średnią rozpiętość:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} R_i \qquad 17.9$$

a następnie mnożymy wartość $\bar{R}$ przez współczynnik k_n /z tablicy nr 9.2/ dla danej liczby pomiarów n.

$$S_R = k_n \cdot \bar{R} \qquad 18.9$$

Oszacowanie błędu standardowego na podstawie rozpiętości R i współczynnika k_n zostało wprowadzone przy założeniach stosowalności rozkładu Gaussa. Można jednak to oszacowanie stosować do wyników rozrzuconych symetrycznie, ale nie zupełnie dokładnie normalnie. Stosując do obliczenia współczynnik k_n nie dopuścimy się zbyt dużego błędu.

9.6. Sredni błąd kwadratowy wartości średniej.

Srednia arytmetyczna pojedyńczych pomiarów obliczona wg wzoru 3.8 jest tym bardziej zbliżona do wartości rzeczywistej mierzonej wielkości, im większa liczba pomiarów brana jest w rachubę. Srednia ta jest również obarczona błędem doświadczalnym, gdyż wyznaczona jest na podstawie poszczególnych pomiarów.

Błąd średniej arytmetycznej n pomiarów jest równy błędowi pojedyńczego pomiaru podzielonemu przez $\sqrt{n}$. I tak średni błąd kwadratowy średniej arytmetycznej wyniesie:

$$\sigma_A = S_A = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n/n-1/}} \qquad 19.9$$

Błąd średni średniej arytmetycznej:

$$r_A = \frac{r}{\sqrt{n}} = 0,8 \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad 20.9$$

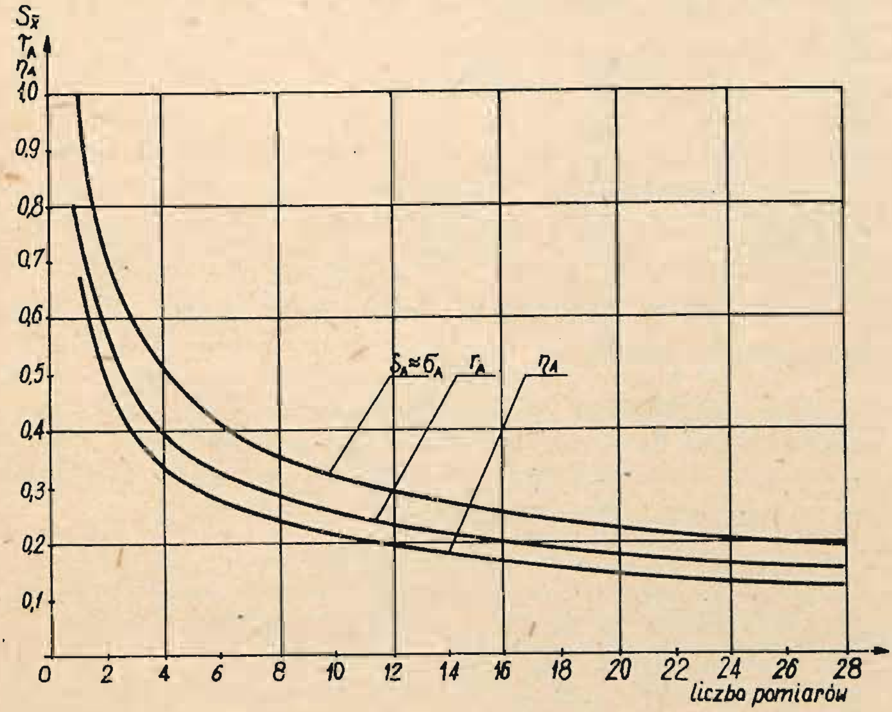
Błąd prawdopodobny średniej arytmetycznej:

$$\eta_A = \frac{\eta}{\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad 21.9$$

Każdy z obliczonych błędów średniej arytmetycznej można przedstawić graficznie, odkładając na osi odciętych liczbę pomiarów, a na osi rzędnych błąd średniej arytmetycznej. Zależności takie dla wszystkich rodzajów błędów średniej arytmetycznej przedsta-

Przedział Δx	σ	2σ	3σ
Współczynnik ufności α	0,68	0,95	0,997

Tabela 9.4. Współczynniki ufności α dla przedziałów $\Delta x = k\sigma$ w rozkładzie normalnym.



Rys. 9.2. Zależność wielkości błędu kwadratowego średniej arytmetycznej $\sigma_A \approx S_A$, błędu średniego arytmetycznego średniej arytmetycznej r_A oraz błędu spowodowanego średniej arytmetycznej η_A w zależności od ilości pomiarów.

wione są na wykresie nr 9.2.
Z rysunku 9.2 widać, że przy zwiększeniu ilości pomiarów wszystkie rodzaje błędów średniej arytmetycznej ciągle się zmniejszają. Jednakże to zmniejszenie się począwszy od pewnej liczby pomiarów równej w przybliżeniu 10-15, staje się bardzo nieznaczne. Można stąd wyciągnąć wniosek, że dla zmniejszenia błędu średniej arytmetycznej pomiarów, nie jest racjonalne nadmierne zwiększanie ilości pomiarów, a w praktyce wystarcza około dziesięciu.

Ponadto z wykresu 9.2 wynika, że przy małej liczbie pomiarów każdy nastąpny pomiar powoduje istotne podwyższenie dokładności średniej, np. dla n=4 uzyskamy dokładność średniej dwukrotnie wyższą niż przy jednym pomiarze, natomiast potrojenie dokładności osiągnęlibyśmy jednak dopiero przy n=9 pomiarach.

Dla określenia dokładności błędu standardowego średniej arytmetycznej z zastosowaniem rozpiętości R możemy korzystać z wyrażenia:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_R}{\sqrt{n}} = \frac{K_n \cdot R}{\sqrt{n}} \qquad 22.9$$

gdzie S_R - wartość szacunkowa błędu standardowego obliczonego wg wzoru 15.9 .

Oszacowanie 22.9 można używać dla normalnie albo przynajmniej symetrycznie rozrzuconych wyników pomiarowych.

9.7. Przedział ufności.

Jeśli oznaczymy średnią arytmetyczną z pomiarów mierzonej wielkości przez $\bar{x}$, a błąd pomiaru przez Δx, to prawdopodobieństwo tego,że rezultat pomiarów różni się od rzeczywistej wartości x nie więcej niż Δx można zapisać w postaci:

$$P[\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x] = \alpha$$

gdzie prawdopodobieństwo α nosi nazwę współczynnika ufności, a przedział wartości od $\bar{x}-\Delta x$ do $\bar{x}+\Delta x$ nosi nazwę przedziału ufności. Dla charakterystyki wielkości błędu losowego pomiarów trzeba podawać dwie liczby, a mianowicie wielkość samego błędu /lub długość przedziału ufności/ i wielkość prawdopodobieństwa α . Znajomość współczynnika ufności, pozwala ocenić stopień ufności, jaki można pokładać w otrzymanym rezultatcie.

Przedział ufności reprezentuje granice, w których z dużym prawdopodobieństwem znajduje się poprawny wynik, o ile nie pojawią się błędy inne niż przypadkowe. Wyraża on zatem pewną nieokreśloność otrzymanych wyników. Szerokość przedziału ufności jest miarą wielkości jej nieokreśloności.

Wygoda stosowania błędu standardowego jako podstawowej miary liczbowej błędu obciążającego pomiary polega na tym, że wielkości tej odpowiada zupełnie określony poziom współczynnika ufności 0.68, podwojonej wartości tego błędu 2σ odpowiada prawdopodobieństwo 0.95, a potrojonemu 3σ odpowiada 0.997.

Zwykle podaje się wartość średniego błędu kwadratowego pomijając już podanie odpowiadającego mu prawdopodobieństwa o,68. Omawiane wyżej zależności współczynnika ufności α oraz błędu standardowego dla przedziałów $\Delta x = k\sigma$ dla k = 1, 2, 3 w rozkładzie normalnym można przedstawić w tabelce nr 9.4.
W praktyce doświadczalnej jednak wartości σ z reguły nie znamy i zastępujemy ją oszacowaniem s_n. Przeważnie jednak nie możemy przeprowadzić tak dużej liczby pomiarów, aby można było w przedziale $\bar{x} \pm k\sigma$ wartość σ zastąpić wartością s tj. obliczonym oszacowaniem, bez ryzyka utraty rzetelności szacowania statystycznego. Dlatego też przy niewielkiej liczbie pomiarów sposób wyznaczania przedziału ufności będzie zależał od znajomości lub nieznajomości wartości σ . Możemy rozróżnić tu trzy przypadki, a mianowicie:

a/ wyznaczanie przedziału ufności przy znanym σ ,
b/ wyznaczanie przedziału ufności przy znanej wartości s_n,
c/ wyznaczanie przedziału ufności na podstawie rozpiętości wyników.

9.7.1. Wyznaczanie przedziału ufności przy znanym σ .

Przy obliczaniu przedziału ufności na podstawie niewielkiej liczby pomiarów, gdy znana jest wartość σ , stosujemy rozkład Gaussa. Przedział ufności obliczamy wg wzoru:

$$L = \bar{x} \pm \frac{z}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \qquad 23.9$$

gdzie: n - liczba pomiarów,

$\frac{z}{\sqrt{n}}$ - współczynnik wyznaczony z tabeli nr 9.5 dla danej liczby pomiarów n i odpowiednich współczynników ufności,

n	$\frac{z}{\sqrt{n}}$		$\frac{t}{\sqrt{n}}$	
	0,95	0,997	0,95	0,997
2	1,38	2,12	9,00	166,00
3	1,13	1,73	2,48	11,10
4	0,98	1,50	1,59	4,61
5	0,88	1,34	1,24	2,96
6	0,80	1,22	1,05	2,25
7	0,75	1,13	0,92	1,85
8	0,69	1,06	0,84	1,60
9	0,65	1,00	0,77	1,42
10	0,62	0,95	0,72	1,29
25	0,39	0,60	0,41	0,67

Tabela 9.5. Wartości $\frac{z}{\sqrt{n}}$ dla rozkładu Gaussa i $\frac{t}{\sqrt{n}}$ dla rozkładu t-studenta dla współczynników ufności 0,95 i 0,997.

n	Współczynnik ufności	
	0,95	0,99
2	6,4	3.1,8
3	1,3	3,01
4	0,92	1,32
5	0,51	0,84
6	0,40	0,63
7	0,33	0,51
8	0,29	0,43
9	0,26	0,37
10	0,23	0,33

Tabela 9.6. Wartości współczynnika K_n do wyliczania ufności na podstawie rozpiętości wyników.

L - przedział ufności.

9.7.2. Wyznaczanie przedziału ufności przy znanej wartości s_n.

W przypadku, gdy mamy do dyspozycji małą liczbę pomiarów i w praktyce przeważnie nie znamy wartości σ, zamiast normalnego rozkładu Gaussa, używamy rozkładu t - Studenta. Rozkład ten jest rozkładem różnicy wielkości rozłożonej normalnie i wielkości mającej rozkład oszacowania odchylenia standardowego, przy czym obie te wielkości są od siebie niezależne. Rozkład t - Studenta jest rozkładem symetrycznym, podobnym do rozkładu Gaussa, zależny od parametru n, przy czym od normalnego różni się tym, że ma większą liczebność błędów większych i mniejszą liczebność błędów mniejszych. Ze wzrastającą wartością ilości pomiarów zbliża się coraz bardziej do rozkładu normalnego. Praktycznie już dla $n \geq 30$ rozkład t z dość dużą pewnością można zastąpić rozkładem normalnym. Rozkład t - Studenta umożliwia wyznaczenie przedziału ufności, gdy mamy wyłącznie do dyspozycji oszacowanie parametru σ. W przypadku małej liczby pomiarów n, z których obliczamy średnią x, stosujemy wzór:

$$L = \bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s_n \qquad 24.9$$

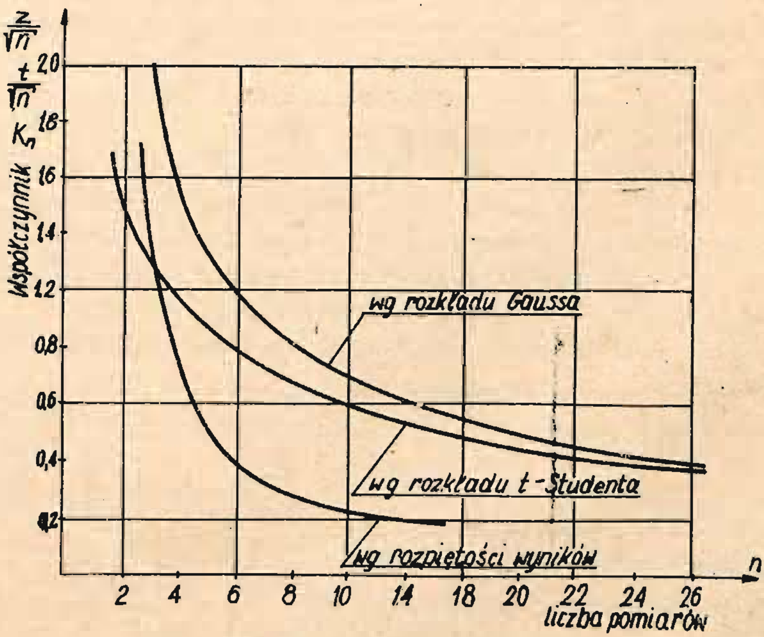
gdzie: L - przedział ufności,
s_n - średni błąd standardowy,
n - liczba pomiarów,
$\frac{t}{\sqrt{n}}$ - współczynnik wyznaczony z tablicy nr 9.5 dla danego n i odpowiednich współczynników ufności.

9.7.3. Wyznaczanie przedziału ufności na podstawie rozpiętości wyników.

Przy bardzo małej liczbie pomiarów można do wyliczenia przedziału ufności użyć rozpiętości R. Sposób ten jest bardzo prosty i szczególnie użyteczny w przypadku małej liczby pomiarów np. n = 2. Do obliczenia przedziału ufności w tym wypadku służy wzór:

$$L = \bar{x} \pm K_n R \qquad 25.9$$

gdzie: $\bar{x}$ - wartość średnia z otrzymanych wyników,



Rys. 9.3. Przedział ufności dla współczynnika ufności 0.95 w zależności od liczby pomiarów w przypadku stosowania rozkładu Gaussa , rozkładu t-studenta i na podstawie rozpiętości pomiarów.

$R = x_{max} - x_{min}$ tj. różnica między największą i najmniejszą wartością pomiaru,

K_n - współczynnik wyznaczony na podstawie tabeli nr 9.6.

Współczynniki K_n są w zasadzie zaokrąglonymi wartościami tzw. rozkładu Lorda. W miarę wzrostu n, wartość tego współczynnika początkowo zmniejsza się bardzo szybko, później wolniej i w końcu staje się zupełnie znikome. Oznacza to, że zwiększenie liczby pomiarów np. z n = 2 do n = 3 jest związane z istotnym zwężeniem przedziału ufności, a tym samym zwiększeniem pewności wyniku, podczas gdy zwiększenie np. z n = 5 do n = 6 nie ma już tak istotnego wpływu na szerokość przedziału ufności.

Zależności współczynnika $\frac{z}{\sqrt{n}}$, $\frac{t}{\sqrt{n}}$, K_n, w zależności od ilości uzyskanych pomiarów przedstawiono na wykresie nr 9.3.

Przykład. Przyjmując, że podane liczby

35, 38, 43, 23, 30

mają rozkład normalny, obliczyć przedział ufności.
Średnia arytmetyczna z otrzymanych n = 5 pomiarów wyniesie:

$$\bar{x} = 33,8$$

a średni błąd standardowy

$$s_n = 7,7$$

Stosując rozkład t - Studenta, obliczamy przedział ufności z wzoru 24.9. Wartość $\frac{t}{\sqrt{n}} = 1,24$ dla n = 5 i współczynnika ufności 0,95 otrzymamy z tabeli nr 9.5. Stąd przedział ufności

$$L = 33,8 \pm 1,24 \cdot 7,7 = 33,8 \pm 9,6$$

Dla otrzymanych wartości pomiarowych możemy wyznaczyć przedział ufności na podstawie rozpiętości wyników R = 43-23 = 20, korzystając z wzoru 25.9 otrzymamy przedział ufności na podstawie rozpiętości wyników.

$$L = 33,8 \pm 0,51 \cdot 20 = 33,8 \pm 10,2$$

gdzie współczynnik $K_n = 0,51$ wzięto z tabeli nr 9.6 dla n = 5 i współczynnika ufności 0,95. Oba przedziały ufności obliczone dwoma metodami niewiele, jak widać, różnią się między sobą.
Gdyby wziąć tylko n = 3 pomiary np. 35, 38, 43 to R = 43-35 = 8 i przedział ufności wyniósłby /dla współczynnika ufności 0,95/

$$L = 38,7 \pm 1,3 \cdot 8 = 38,7 \pm 10,4$$

a więc też niewiele różniący się od wyników poprzednich.