długości skali, a następnie na obwodzie tego okręgu zaznaczamy punkty odpowiadające kątom np. co 10° /rys.14.6/. Równolegle do promienie OB w pewnej dowolnej odległości rysujemy prostą MN. Z zaznaczonych punktów na okręgu prowadzimy proste prostopadłe do prostej MN. W podobny sposób na prostej MN możemy otrzymać skalę funkcji np. funkcji $y = \sin x$.

E. Skale podwójne.

Jeśli na jednym odcinku wraz ze skalą funkcyjną $y = f(x)$ sporządzi się skalę równomierną wartości x, to takie skale nazywamy skalami podwójnymi. Skale podwójne możemy rozpatrywać jako założenie skali równomiernej i skali funkcyjnej, przy czym początkowe i końcowe punkty tych skal winny się pokrywać. Przykład skali podwójnej pokazano na rys.14.7 a i b. Podwójną skalę można stosować do znajdowania wartości funkcji $f(x)$ lub odwrotnie mając wartość funkcji $f(x)$ możemy znaleźć wartość argumentu x.

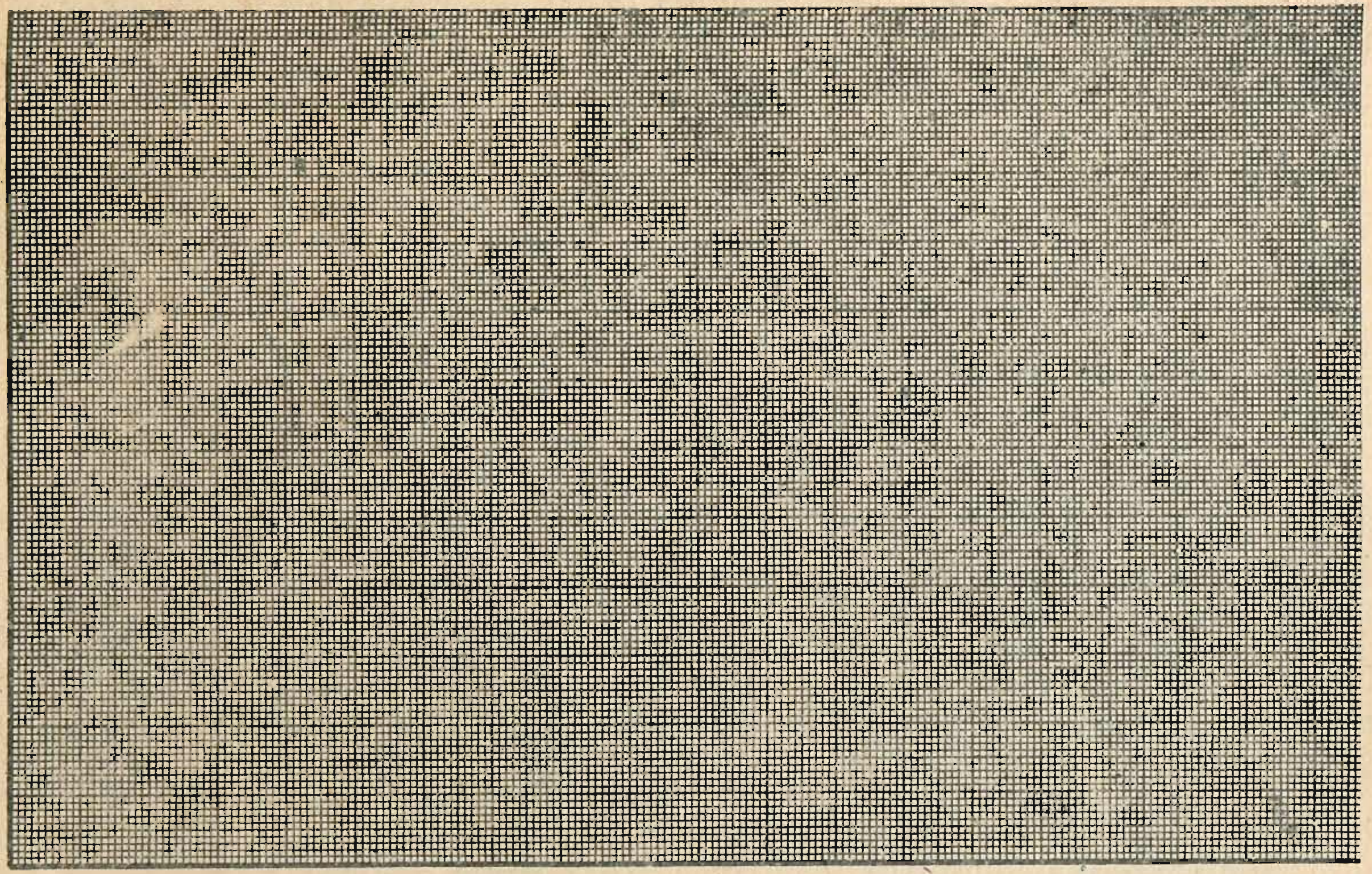
14.5. Wykreślanie skal funkcyjnych przy pomocy "Harfy".

Mając do dyspozycji narysowaną dowolną skalę funkcyjną można wyrysować metodą graficzną skalę tej funkcji o innym module.

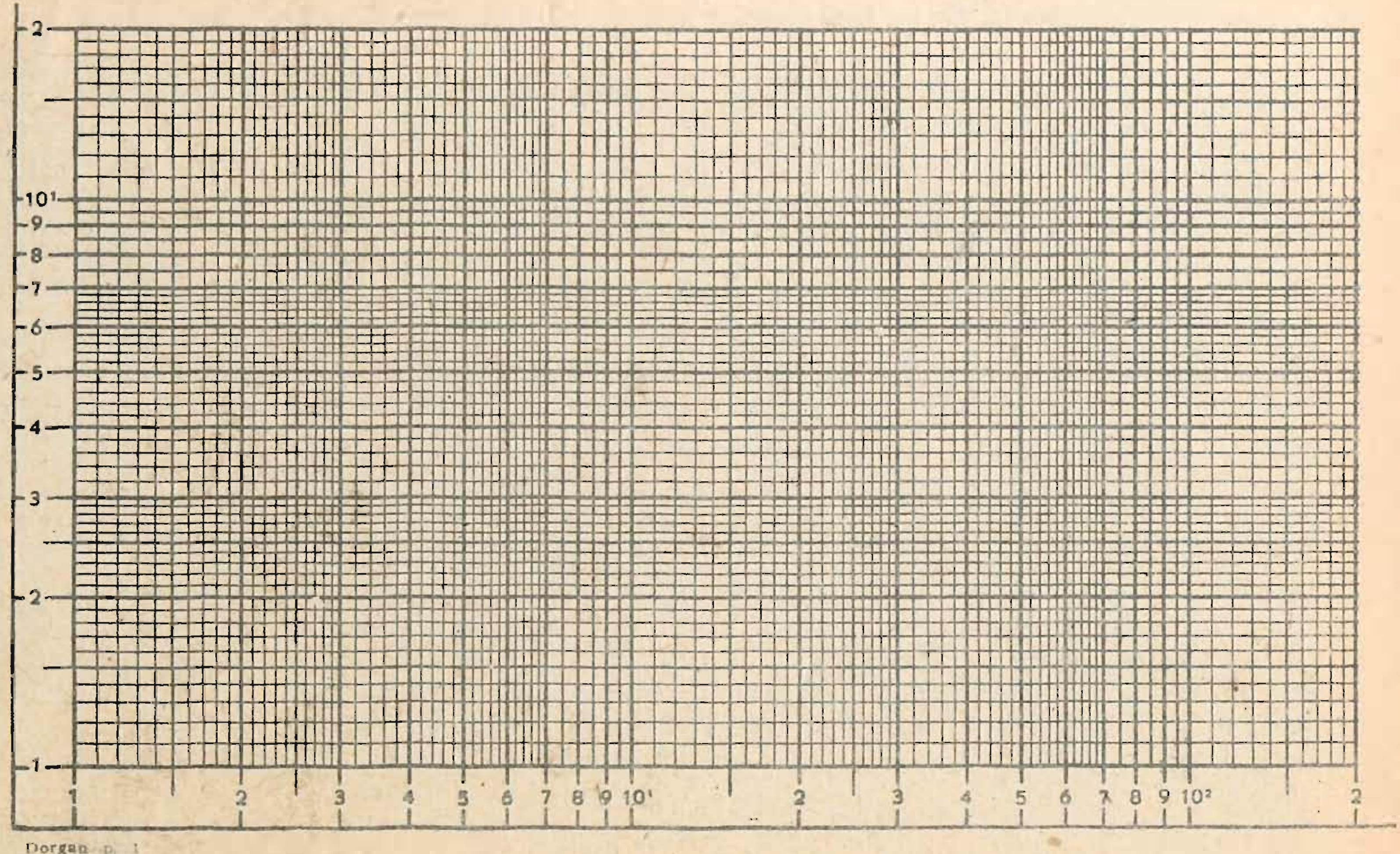
W tym celu na odcinku AB umieszczamy daną skalę funkcyjną f x . Z dowolnego punktu O /rys.14.8/ prowadzimy proste łączące punkty 1, 2, 3 ... n na danej skali funkcyjnej. W dowolnej odległości od prostej AB prowadzimy do niej prostą równoległą MN otrzymując w ten sposób daną skalę funkcyjną, ale już o innym module.

Przy pomocy tej metody możemy zmniejszać lub powiększać dowolne skale funkcyjne np. równomierne, logarytmiczne, trygonometryczne itp. W przypadku np. rysowania skal logarytmicznych skalę AB można nanieść bezpośrednio ze skali suwaka logarytmicznego.
Bardzo często metoda ta służy do wykreślania skal liniowo-ułamkowych typu:

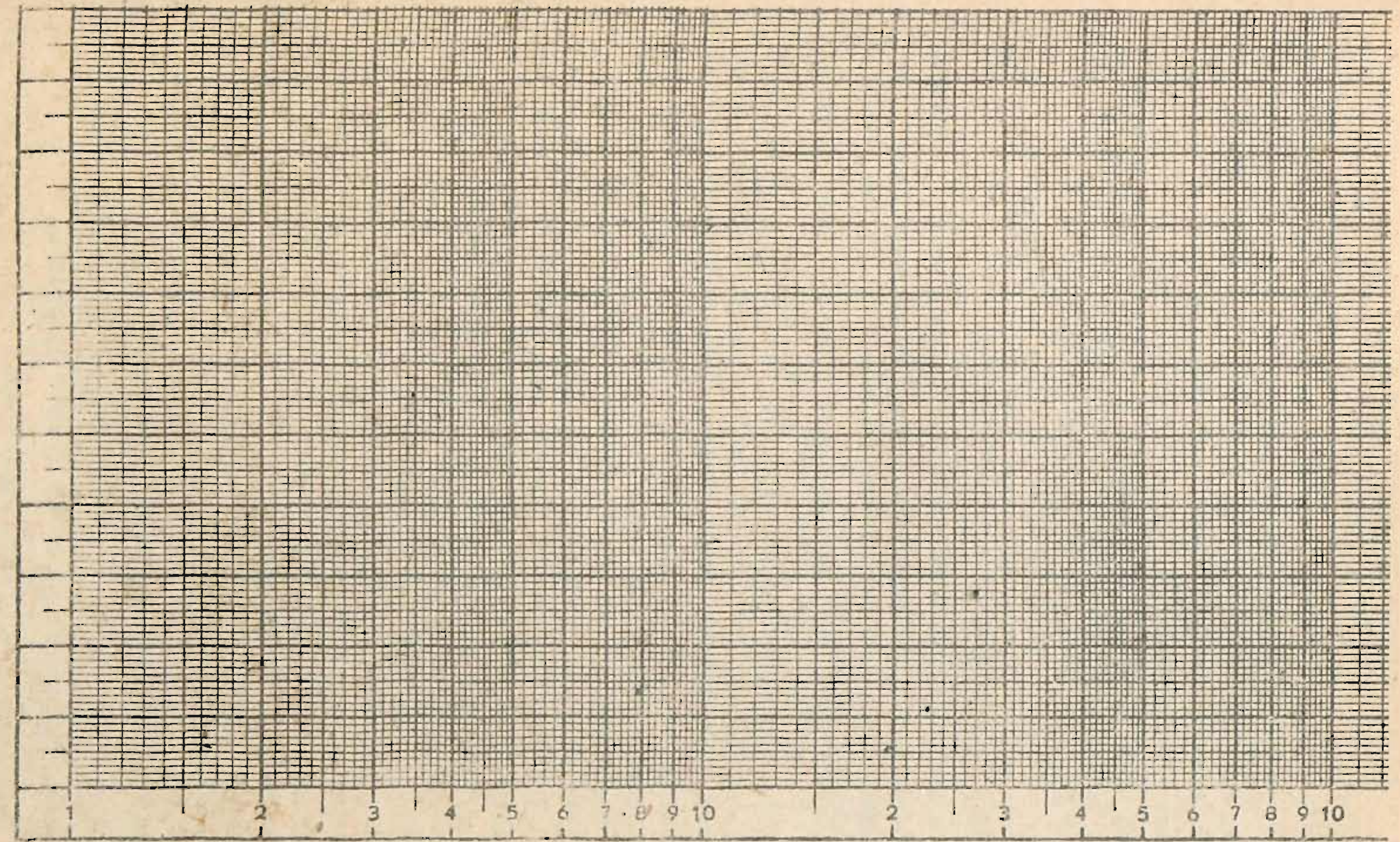
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$



Rys. 14. 10. Papier milimetrowy.



Rys. 14. 11. Papier logarytmiczny.



Rys. 14.12. Papier półlogarytmiczny.

gdzie: a, b, c, d są wartościami stałymi.
Rysunek sporządzony według powyższego opisu, a służący do zmiany modułu dowolnej skali funkcyjnej, nazywamy "harfą".
Przykład konstruowania tego typu skal funkcyjnych przedstawiony jest na rys.14.9. Z dowolnego punktu O prowadzimy proste przez punkty równomiernej skali A B. Na prostej MN, nierównoległej do prostej AB, otrzymujemy szukaną skalę funkcyjną.

14.6. Siatki funkcyjne..

Układy współrzędnych zbudowane za pomocą skal funkcyjnych nazywamy siatkami funkcyjnymi.

Własnością tych siatek jest to, że każda funkcja uwikłana dana związkiem postaci

$$af(x) + bf(y) + c = 0$$

gdzie: a, b, c są wartościami stałymi, będzie linią prostą na siatce funkcyjnej, jeśli na osi Ox jest skonstruowana skala funkcji f(x) a na osi Oy - skala funkcji f(y). Funkcje f(x) i f(y) muszą oczywiście spełniać warunki umożliwiające konstrukcję skal funkcyjnych, a mianowicie muszą być ciągłe i monotoniczne.

Najczęściej wykresy sporządzamy na tzw. papierze milimetrowym, który posiada równomierne skale, przy czym odległość jednej równoległej linii od drugiej wynosi 1 mm /rys.14.10/. Papier milimetrowy stosujemy do wykreślania zależności liniowych.

Szczególnie często używa się siatek logarytmicznych /papierów logarytmicznych/, gdzie na obu stronach współrzędnych umieszczone są skale logarytmiczne /rys.14.11/.
Tego rodzaje skale używane są do wykreślania funkcji potęgowych.

Czasami używa się siatek tzw. półlogarytmicznych /papiery półlogarytmiczne/, gdzie na jednej osi umieszczona jest skala logarytmiczna, a na drugiej - skala równomierna /liniowa//rys.14.12/.
Przy pomocy tego typu siatek najlepiej otrzymać linię prostą w przypadku stosowania funkcji wykładniczych.

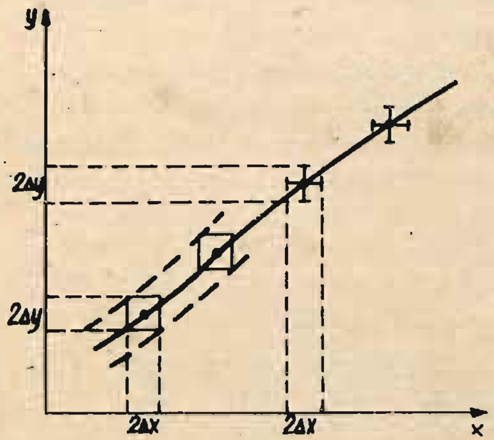
Siatki funkcyjne, jak z tego widać, spełniają dużą rolę przy opracowywaniu danych doświadczalnych.

14.7. Dobór odpowiedniej siatki i skali funkcyjnej.

Decyzję wyboru najwłaściwszej skali podejmuje się na podstawie tego, jak najlepiej zbliżona jest do prostej przedstawiona na

Lp.	Skala	Typ równania
1	Podwójnie liniowa	$y = ax + bx$
2	Liniowo - logarytmiczna	$y = a \quad e^{bx}$
3		$y = ab^{x}$
4	Podwójnie logarytmiczna	$y = a \quad x^{b}$

Tabela nr 14.1. Przykłady stosowania skal dla odpowiednich typów równań.



Rys.14.13.

Sposoby oznaczania na wykresach dokładności wykonywanych pomiarów.

wykresie funkcja. Jeśli jest znana poprawna postać funkcji, możemy od razu wybrać najwłaściwszą dla niej skalę. W przypadku gdy nie znamy danej funkcji możemy próbować nanosić punkty doświadczalne na różne skale, aby móc stwierdzić, która z nich jest dla rozważanych danych najbardziej odpowiednia. Jeśli to jest możliwe, zazwyczaj wybiera się tę skalę, przy której rozkład punktów pomiarowych jest najbardziej zbliżony do linii prostej. Wykres w postaci linii prostej na papierze o każdej z tych skal wskazuje na pewnien typ równania. Skale i odpowiadające im typy równań przedstawia poniższe zestawienie /tabela nr 14.1/.

Po dokonaniu wyboru papieru z naniesioną na nim odpowiednią skalą należy dobrać długość jednostkowej podziałki na osiach, przestrzegając przy tym następujących praktycznych reguł:

a/ zmienna niezależna winna być odkładana na osi poziomej, zmienna zależna na osi pionowej,

b/ w celu szybkiego odczytania współrzędnych dowolnego punktu na wykresie należy stosować tak skale, aby jednej działce na papierze funkcyjnym odpowiadało $1 \cdot 10^n$, $2 \cdot 10^n$, $4 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$ jednostek mierzonej wielkości, a unikać wszelkich innych proporcji,

c/ punkty pomiarowe na wykresie winny być tak rozmieszczone, aby punkty pomiarowe, przez które przechodzi wykreślona krzywa, były rozłożone na całej powierzchni wykresu, przy czym zarówno skala pozioma jak i pionowa nie musi zaczynać się od zera,

d/ skale na obu osiach winny być tak dobrane, aby tangens kąta nachylenia krzywej w najbardziej interesujących nas przedziałach był bliski jedności.

Każdy z punktów naniesionych na wykres jest określony przez odpowiednie wartości x i y, które otrzymane są w wyniku pomiaru, a więc obie wartości są obarczone błędami. Dlatego też, na wykresie zaznacza się nie tylko punkty pomiarowe, ale i ich błędy, które zaznaczamy w postaci małych prostokącików o bokach równych $2\Delta x$ i $2\Delta y$ /rys.14.13/, gdzie Δx i Δy są dowolnymi bezwzględnymi błędami np. maksymalnymi, standardowymi itp. Tak więc wykreślona krzywa powinna przechodzić przez obszary ograniczone tymi prostokącikami błędów. W praktyce zaznaczamy wartości błędów bezwzględnych przez odpowiednie odcinki poziome i pionowe przechodzące przez punkt pomiarowy, tak jak to pokazane jest na wykresie nr 14.13.

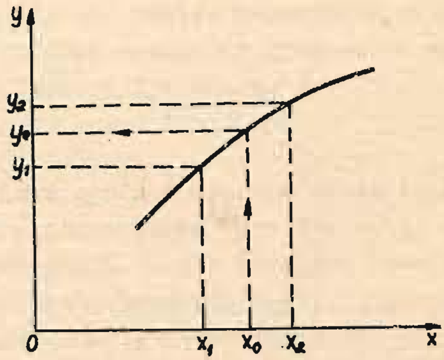
Przy wykreślaniu krzywych w zasadzie możemy brać dowolne jednostki na osiach poziomych i pionowych, jednak najmniejszy odstęp, jaki można odczytać na wykresie powinien odpowiadać wielkości błędu bezwzględnego. Na tej podstawie należy ustalić odpowiednią skalę. W praktyce do wykreślenia krzywych z dostateczną dokładnością wystarcza arkusz o formacie 20 × 25 cm, lub 25 × 30 cm. Liczba punktów którą należy nanieść na arkusz nie powinna być zbyt duża, zwykle wystarcza około 15 punktów, z tym, że w okolicach miejsc charakterystycznych jak np. maksima, minima czy też punkty przegięć powinno być większe zagęszczenie punktów pomiarowych. Zabezpiecza to uzyskanie większej dokładności w tych miejscach. Bardziej złożony jest przypadek, gdy zjawisko fizyczne opisane jest przy pomocy trzech lub więcej zmiennych np.:

$$f(x, y, z) = 0$$

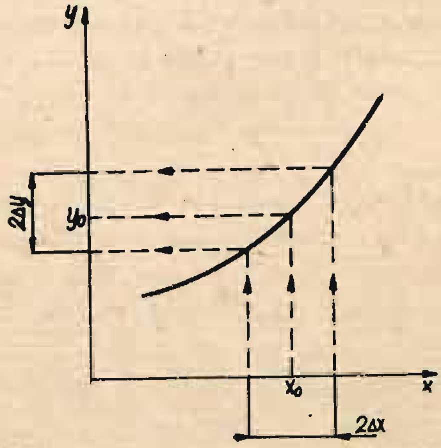
W tym wypadku bardzo często jedna z tych zmiennych wielkości np. z określana jest szeregiem wartości z_1, z_2, z_3 ... z_n. Dla których określamy zależność dwóch pozostałych wielkości x i y. Każda z wykreślonych krzywych na tym samym wykresie będzie obrazowała zależność x i y przy określonym znaczeniu z. Tak np. natężenie prądu anodowego w triodach zależy od dwóch wielkości, a mianowicie od napięcia na anodzie i od przyłożonego napięcia na siatce.

14.8. Interpolacja graficzna.

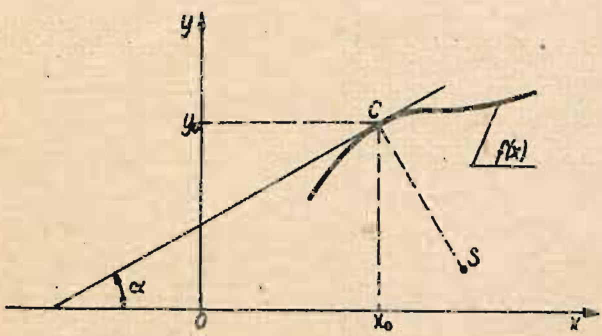
Na podstawie sporządzonego wykresu można wyznaczyć jedną ze zmiennych, gdy znana jest druga. W takich przypadkach, jeśli w przedziale $/x_2 - x_1/$ zmiany y są proporcjonalne do zmian wartości x, przy czym wartościom x_1 i x_2 odpowiadają wartości y_1 i y_2, to znając wartość x_0 mieszczącą się w tym przedziale, można wyznaczyć y_0, zakładając, że w rozpatrywanym przedziale funkcja $y = f(x)$ w przybliżeniu ma charakter linii prostej /rys.14.14/. Możemy więc napisać proporcję:



Rys.14.14. Interpolacja graficzna.



Rys.14.15. Wyznaczanie błędów metodą graficzną.



Rys.14.16.Wykreślanie pochodnej funkcji y = f(x) metodą cięciw.

$$\frac{y_o - y_1}{x_o - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

skąd otrzymamy:

$$y_o = y_1 + \left(x_o - x_1\right) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad 3.14$$

Wartość funkcji y_o możemy obliczyć przez podstawienie odpowiednich danych do wzoru 3.14 lub odczytać bezpośrednio z wykresu przez poprowadzenie prostej prostopadłej do osi Ox aż do przecięcia się z krzywą, a z tego punktu prostą prostopadłą do osi Oy uzyskując w ten sposób szukaną wartość y_o. Metoda ta ma ograniczoną i niezbyt dużą dokładność. Jeśli błąd wyznaczenia wartości x_o jest równy Δx, wówczas błąd popełniony przy wyznaczeniu y_o jest równy Δy. Odcinki Δy możemy wyznaczyć również metodą graficzną, tak jak to jest pokazane na rys.14.15.

14.9. Ekstrapolacja graficzna.

Jeśli podana jest funkcja $y = f(x)$ /najczęściej wyznaczona w sposób doświadczalny/ to można wyznaczyć w przybliżeniu wartości tej funkcji dla wartości x leżących poza tym przedziałem. Taki sposób wyznaczenia wartości nazywamy ekstrapolacją. Sposób postępowania w tym przypadku jest podobny jak przy interpolacji. Ekstrapolacja może być stosowana tylko wtedy, gdy na ekstrapolowanym odcinku występują gwałtowne zmiany. Przykładem ekstrapolacji będzie np. założenie, że funkcja empiryczna liniowa w pewnym przedziale, będzie również liniową dla wszystkich możliwych wartości zmiennych.

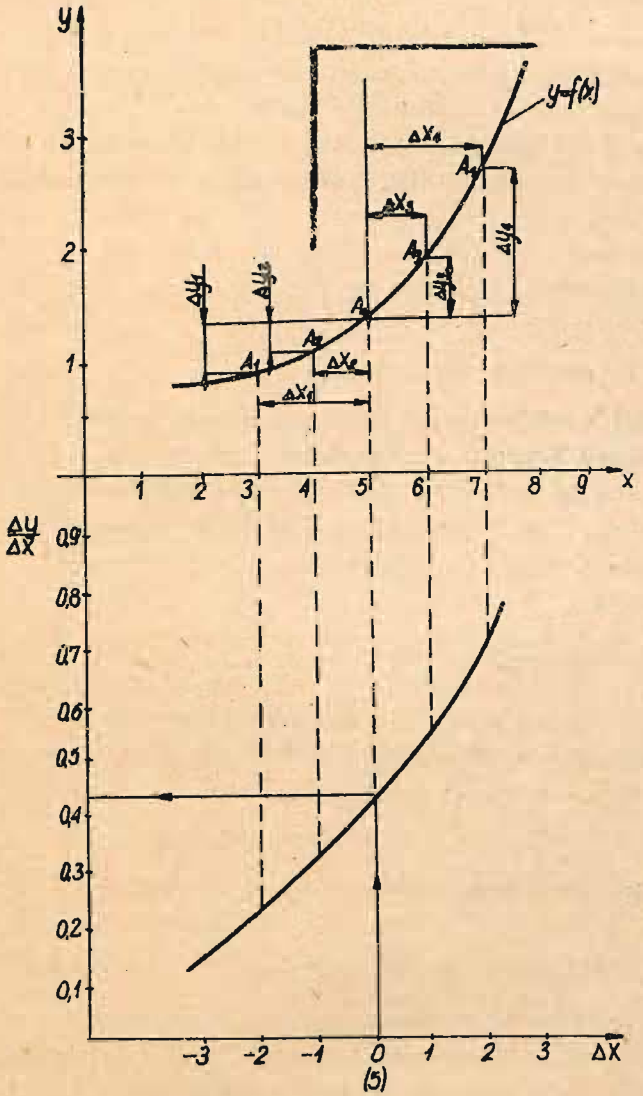
14.10. Graficzne różniczkowanie.

Wykreślenie krzywych otrzymanych w wyniku doświadczenia daje nam możność wykonania na nich operacji takich jak różniczkowanie i całkowanie.

Jeśli analityczną postać nieznanej funkcji wyrazimy przez

$$y = f(x)$$

to dla graficznego wyznaczenia wartości pochodnej tej funkcji w punkcie x_o /rys.14.16/ należy wykreślić styczną w punkcie C



Rys. 14. 17.

Wyznaczanie pochodnej funkcji y = f(x) metodą cięciw.

o współrzędnych $/x_o$, $y_o/$ i wyznaczyć kąt α zawarty między tą styczną a osią x-ów. Wynika to z tego, że:

$$\frac{d}{dx} f(x) = tg\alpha$$

Zagadnienie to proste z punktu widzenia teoretycznego, praktycznie może być wykonane z pewnym przybliżeniem, zależnym od stopnia dokładności wykonania stycznej w punkcie C.

Wartość pochodnej w wybranym punkcie x_o na wykresie funkcji $y = f(x)$ można wyznaczyć stosując jedną z trzech metod:

a/ metoda cięciw,
b/ metoda stycznej,
c/ metoda normalnej

14.10.1. Wyznaczanie pochodnej metodą cięciw.

Daną funkcję $y = f(x)$ wykreślamy na papierze milimetrowym. Następnie na otrzymanej krzywej w sąsiedztwie punktu $/x_o$, $y_o/$, w którym wyznaczyć chcemy pochodną obieramy parę punktów A_i o współrzędnych x_i, y_i, ale w ten sposób aby część punktów była po jednej stronie, a część po drugiej stronie punktu $/x_o$, $y_o/$. Przy pomocy wzoru:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_o - y_i}{x_o - x_i} \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

obliczamy nachylenia cięciw przez tak dobrane punkty A_i oraz przez punkt A_o. Wykreślając krzywą $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$ możemy wyznaczyć wartość pochodnej w obranym punkcie x_o, tzn. dla

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(0)$$

Wyznaczenie pochodnej tą metodą pokazano na rys. 14.17.

14.10.2. Wyznaczanie pochodnej metodą stycznej.

Na wykreślonej krzywej obieramy punkt $/x_o$, $y_o/$, w którym chcemy wyznaczyć wartość pochodnej. Przez wybrany punkt prowadzimy styczną do krzywej, a następnie na stycznej obieramy dwa dowolne punkty o współrzędnych $/x_1$, $y_1/$, $/x_2$, $y_2/$. Pochodną w punkcie x, y obliczamy jako nachylenia tej stycznej wg wzoru:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jeśli poprowadzimy prostą równoległą do stycznej w taki sposób aby przechodziła przez punkt o współrzędnych $x = -1$, $y = 0$, to korzystając z zależności:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0 - 0}{0 - (-1)} = y_0$$

możemy nachylenie to odczytać wprost z wykresu, gdyż pochodna jest równa rzędnej punktu przecięcia tej prostej z osi y-ów /rys.14.18/.

14.10.3. Wyznaczanie pochodnej metodą normalnej.

Wartość pochodnej możemy wyznaczyć, określając normalną do wyrysowanej krzywej zamiast wykreślania stycznej. Oznaczając nachylenie stycznej przez $\left(\frac{dy}{dx}\right)_s$ i nachylenie normalnej przez $\left(\frac{dy}{dx}\right)_n$ korzystamy z zależności

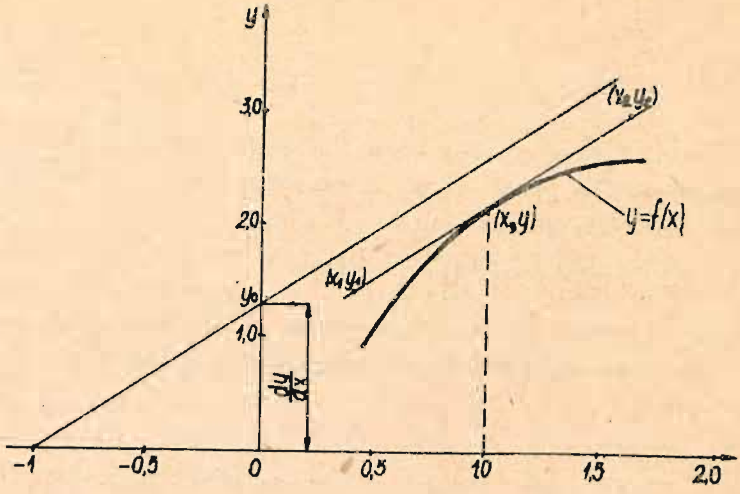
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_s = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_n}$$

gdzie wartość $\left(\frac{dy}{dx}\right)_n$ możemy wyznaczyć graficznie lub analitycznie jedną ze znanych metod.

Najlepszą dokładność wyznaczonej pochodnej otrzymuje się wówczas, gdy wartość pochodnej jest zbliżona do jedności.

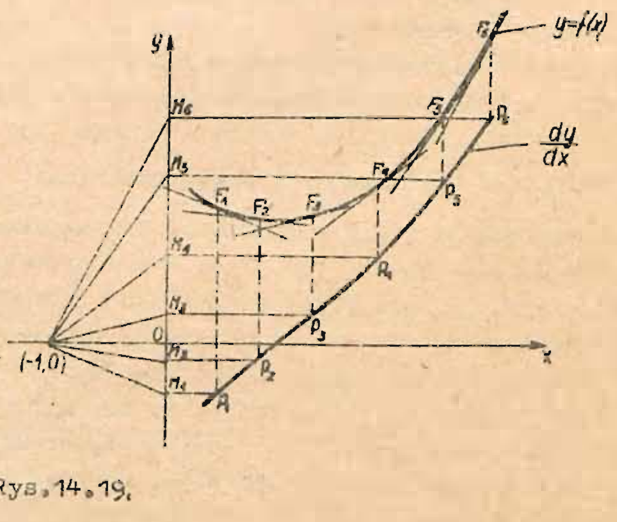
14.10.4. Graficzne wyznaczanie krzywej pochodnej.

Na otrzymanej funkcji $y = f\,x$ nanosimy szereg dowolnie obranych punktów F_1, F_2, F_3 ... F_n, przez które prowadzimy styczne do krzywej, /rys. 14.19/. Przez punkt $(-1,0)$ prowadzimy proste równoległe do tych stycznych otrzymując na osi y-ów punkty M_1, M_2, M_3 ... M_n odpowiadające pochodnym funkcji w obranych punktach F_1, F_2, F_3 ... F_n. Przez punkty M_1, M_2, M_3 ... M_n prowadzimy proste równoległe do osi x-ów, a przez punkty F_1, F_2, F_3 ... F_n proste równoległe do osi y-ów. Na przecięciu odpowiadającym sobie prostym otrzymujemy punkty P_1, P_2, P_3 ... P_n, które połączone ze sobą dają krzywą pochodnej.



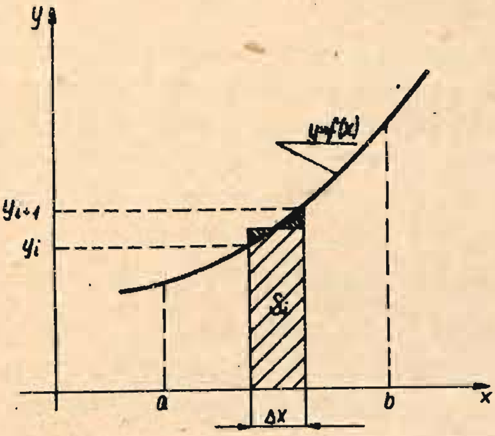
Rys.14.18.

Wyznaczanie wartości pochodnej metodą stycznej.

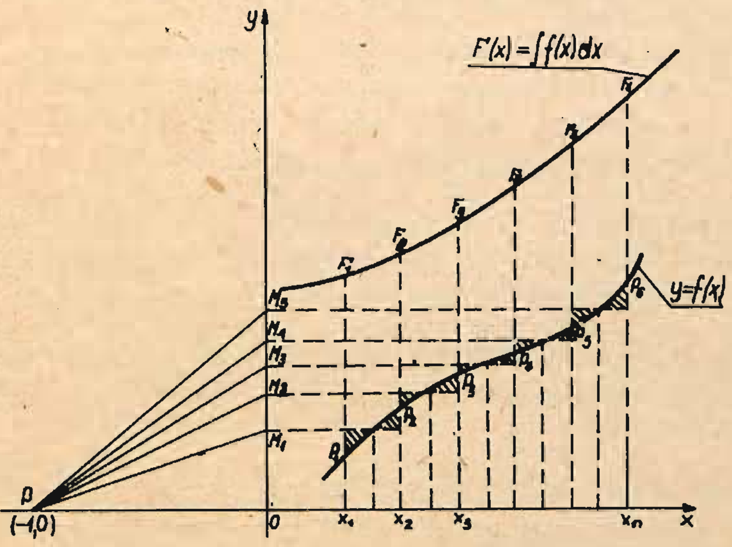


Rys.14.19.

Graficzne wyznaczanie krzywej pochodnej funkcji y = = f(x).



Rys.14.20. Całkowanie graficzne.



Rys.14.21. Graficzne wyznaczanie funkcji pierwotnej.

14.11. Całkowanie graficzne.

Całkowanie graficzne polega na wyznaczeniu powierzchni pod daną krzywą ograniczoną rzędnymi w punktach granicznych i osi odciętych. Istnieje szereg metod obliczania powierzchni pod krzywą, z których najbardziej używana jest metoda średniej rzędnej.

14.11.1. Metoda średniej rzędnej.

W celu wyznaczenia powierzchni, pole pod krzywą dzielimy na parzystą liczbę pasków o równych względnie różnych szerokościach. Dla każdego z pasków obliczamy powierzchnię z wzoru:

$$S_i = \frac{1}{2}\left(y_i + y_{i+1}\right)\Delta x$$

gdzie: y_i i y_{i+1} - krańcowe wartości funkcji dla i-tego paska,
Δx - szerokość przedziału obliczonego paska /rys.14.20/.

Całkowita powierzchnia pod krzywą wyniesie:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Dokładność wyznaczenia powierzchni będzie tym większa im większy będzie przedział Δx.

14.11.2. Inne metody wyznaczania powierzchni.

Do innych używanych metod wyznaczania powierzchni zaliczamy metodę ważenia wyciętej powierzchni, metodę fotometryczną polegającą na oświetleniu komórki fotoelektrycznej przez przesłonę z otworem w postaci wyznaczanej powierzchni oraz pomiar powierzchni /pola/ za pomocą planimetru. Ta ostatnia metoda jest szczególnie prosta w użyciu.

14.11.3. Wyznaczanie funkcji pierwotnej.

Mając określoną funkcję $y = f(x)$ możemy metodą graficzną wyznaczyć funkcję pierwotną:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

W tym celu stosujemy konstrukcję pokazaną na rys.14.21. Ze środków przedziałów $/x_1, x_2/$, $/x_2, x_3/$, $/x_3, x_4/$ ... $/x_{n-1}, x_n/$ prowadzimy proste równoległe do osi y-ów, aż do przecięcia się z krzywą $y = f(x)$. Z punktów przecięć prowadzimy następnie proste równoległe do osi x-ów otrzymując punkty M_1, M_2, M_3 ... M_n, które łączymy z punktem P $(-1,0)$ na osi x-ów. Obierając dowolny punkt F_1 na prostej równoległej do osi y-ów i przechodzącej przez punkt o współrzędnej x_1, prowadzimy przez niego prostą równoległą do PM_1, otrzymując punkt F_2. Dalej przez punkt F_2 prostą równoległą do PM_2 otrzymując punkt F_3 itd. Otrzymamy odcinki F_1, F_2, F_3 ... F_{n-1}, F_n otrzymując w ten sposób funkcję pierwotną F x . Dokładność otrzymanej funkcji będzie tym większa, im większą będziemy mieli liczbę przedziałów.

15. Przedstawienie danych doświadczalnych za pomocą równań.

Dane doświadczalne otrzymujemy często w wyniku pomiaru zmiennej zależnej y dla szeregu wartości zmiennej x. Zakładamy przy tym, że inne ważne czynniki nie ulegają zmianom. Zazwyczaj nanosi się wartości y w funkcji x i rysuje się krzywą w taki sposób aby przechodziła ona możliwie jak najbliżej zaznaczonych punktów pomiarowych. Ze względu na błędy pomiarowe, trudno oczekiwać, żeby rzeczywista krzywa przechodziła dokładnie przez wszystkie punkty odpowiadające wynikom pomiarowym. W zależności od celu, do jakiego jest potrzebna znajomość krzywej, stosujemy odpowiednie metody i kryteria, jakimi należy się posługiwać przy wykreślaniu tej krzywej.
Jako niektóre cele wykreślania krzywych można wymienić:

a/ dobre uzmysłowienie jakościowej natury zależności y od x,
b/ chęć ocenienia y w funkcji x między wartościami wyznaczonymi doświadczalnie /interpolacja/ a nawet poza zakresem zmierzonych wielkości /ekstrapolacja/,
c/ porządane wyeliminowanie, o ile to jest możliwe, wpływów błędów przypadkowych,
d/ wyznaczenie pochodnych lub całek funkcji $y = y(x)$,
e/ wyznaczenie prawa wyrażającego związek w formie równania matematycznego pomiędzy wartościami zmiennych uzyskanych z pomiarów.