chującego daną metodę pomiarów, to wystarczy przeprowadzić pomiar jeden raz.

2. Jeśli błąd losowy jest błędem głównym, to pomiar należy przeprowadzać wielokrotnie. Liczbę pomiarów należy tak dobrać, ażeby błąd losowy średniej arytmetycznej był mniejszy od błędu systematycznego, tak aby ten ostatni znów określał błąd rezultatu.

Należy przy tym pamiętać, że możemy ograniczyć się do jednego tylko pomiaru wyjątkowo w tych przypadkach, kiedy z pewnych innych źródeł wiemy, że wielkość błędu losowego jest mniejsza niż błędu systematycznego. Dzieje się tak zwykle wówczas, gdy mierzenia dokonuje się znaną metodą, której błędy są zbadane i znane.

4. Cyfry znaczące.

Cyframi znaczącymi w liczbach przyjęto nazywać wszystkie cyfry 1,2,3.....,9, a także zero, ale tylko w tych przypadkach, jeśli znajduje się ono w środku lub na końcu liczby. Jeśli jednak zero w ułamkach dziesiętnych znajduje się po przecinku z lewej strony pozostałych cyfr, to nie jest wtedy cyfrą znaczącą. Np. liczby 3, 14159 oraz 980,665 lub 86 4000 posiadają po sześć cyfr znaczących. Jeśli natomiast weźmiemy liczby 1,015, 0.15, 0.015, 0.0015 to pierwsza z nich posiada cztery cyfry znaczące, a pozostałe trzy po dwie cyfry znaczące.

5. Błąd względny i bezwzględny.

Przy opracowywaniu wyników eksperymantalnych większość obliczeń przeprowadza się na przybliżonych wartościach mierzonych wielkości, ponieważ ich dokładne wartości nie są znane. Jakość wyników pomiarów zwykle wygodnie jest charakteryzować nie absolutną wielkością błędu Δx, a jego stosunkiem do mierzonej wielkości x, a mianowicie:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \qquad 1.5$$

Wartość 1.5 nazywamy błędem względnym i zazwyczaj wyrażamy go w procentach. Szczególną zaletą tego błędu jest to,że jest on wielkością niemianowaną, a więc można go porównywać z błędami względnymi pochodzącymi od pomiarów różnych wielkości nieporównywalnych ze sobą, np. masą i temperaturą. W większości zastosowań błąd ten jest w istocie najważniejszy. Użycie bezwzględnego błędu pomiarów niewiele mówi o rzeczywistej dokładności, gdy nie zestawiamy wielkości błędu z mierzoną wielkością. Z tego punktu widzenia wielkość błędu względnego daje właściwsze pojęcie o dokładności pomiarów. Błąd względny nie zmienia się przy zmianie skali pomiaru wielkości, tzn. przy zwiększeniu /lub zmniejszeniu/ liczby przybliżonej i proporcjonalnym zwiększeniu /lub zmniejszeniu/ jej błędu bwzwzględnego np., dla liczby a = 100 cm z błędem bezwzględnym $\Delta x = 1$ cm i dla liczby a = 1000 cm z błędem bezwzględnym $\Delta x = 10$ cm, błąd względny jest taki sam.

W praktyce wychodząc z odpowiednich definicji i metod rachunkowych obliczamy z pomiarów wartość średnią i podajemy granice, z których z dużym prawdopodobieństwem zawiera się prawdziwa wartość A mierzonej wielkości X. Zarówno błąd bezwzględny Δx jak i błąd względny może mieć wartość dodatnią jak i ujemną, przy czym z reguły jest niemożliwe stwierdzenie, czy otrzymana wartość pomiarowa jest wyznaczona z nadmiarem czy niedomiarem. Dlatego przy podawaniu błędu należy go zaopatrzyć w znak podwójny $\pm$. Tak więc:

$$X = A \pm \Delta x \qquad 2.5$$

$$\delta = \pm \frac{\Delta X}{A} \qquad 3.5$$

$$\Delta x = \pm \delta \cdot A \qquad 4.5$$

Wzory powyższe odgrywają istotną rolę w teorii i praktyce rachunku błędów. Nie zawsze można całkiem łatwo oszacować bezwzględny błąd pomiaru fizycznego. Przy pomiarze najczęściej określoną wielkość mierzymy bądź przez odczytanie na podziałce, bądź na podstawie wykresu uzyskanego za pomocą przyrządu rejestrującego, ewentualnie używany przyrząd daje odczyt cyfrowy. Rozstrzygnąć, jak duży jest błąd bezwzględny odczytu, czyli jaką najmniejszą część wielkości mierzonej możemy jeszcze całkowicie pewnie odczytać, można tylko na podstawie doświadczenia. Błąd względny odczytu jest zatem dany stosunkiem:

$$\delta = \frac{m}{M} \qquad 5.5$$

gdzie: m - jest najmniejszą różnicą wielkości mierzonej, jaką jeszcze można pewnie określić,

M - absolutna wartość wielkości mierzonej odczytana na przyrządzie

Obie wielkości m i M muszą być oczywiście wyrażone w jednakowych jednostkach, które jednak mogą być zupełnie dowolne, w szczególnym przypadku mogą to być tylko podziałki skali.

5.1. Przybliżone metody obliczania błędów względnych i bezwzględnych liczb przybliżonych.

W praktyce w celu szybszego obliczenia błędu bezwzględnego lub błędu względnego oraz uproszczenia rachunków stosuje się niekiedy bardziej proste, chociaż mniej dokładne wzory niż wzór 5.5 dla błędu względnego. Szczególnie odnosi się to do przypadku, gdy liczba A ma wiele cyfr znaczących. W takim wypadku można stosować wzór na błąd względny uproszczony:

$$\delta_u = \pm \frac{\Delta X}{k \cdot 10^{(n-1)-p}} \qquad 6.5$$

gdzie: k - oznacza pierwszą cyfrę znaczącą liczby A,
n - ilość cyfr znaczących liczby A,
p - ilość miejsc po przecinku w liczbie A.

Należy zaznaczyć, że wartość błędu względnego, obliczonego wg wzoru 6.5 jest zawsze większa od wartości błędu względnego obliczonego wg wzoru 3.5 lub 1.5, tzn. mamy:

$$\delta_u \geqslant \delta$$

Przykład 1. Znaleźć błąd względny uproszczony gęstości wody przy temperaturze 10°C

$D_{10} = (0{,}999727 \pm 0{,}000001)\ g \cdot cm^{-3}$

W tym przypadku: $k = 9$, $n = 6$, $p = 6$

$$\delta_u = \frac{10^{-6}}{9 \cdot 10^{-1}} = \pm 0{,}0000011 = \pm 0{,}00011\%$$

Błąd względny obliczony wg wzoru 3.5 wynosi:

$$\delta = \pm \frac{1}{999727} = \pm 0{,}000001 = \pm 0{,}0001\%$$

tj. wielkość nieco mniejsza od wartości δ_u.

Przykład 2. Znaleźć błąd względny wartości przyspieszenia ziemskiego

$g = (980{,}274 \pm 0{,}003)\ cm \cdot s^{-2}$

W tym przypadku mamy $k = 9$, $n = 6$, $p = 3$,

$$\delta_u = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{2}} = \pm 0{,}00033\%$$

Wielkość błędu względnego, obliczonego wg wzoru 1.5 wynosi:

$$\delta = \pm\ 0{,}0003\%$$

Przykład 3. Znaleźć błąd względny pomiaru prędkości światła

$$c = /299796 \pm 4/\ km\cdot s^{-1}$$

W danym przykładzie mamy: k = 2, n = 6, p = 0,

$$\delta_u = \frac{4}{2\cdot 10^5} = \pm\ 0{,}002\%$$

natomiast:

$$\delta = \frac{4}{299796} = \pm\ 0{,}0013\%$$

Duża różnica w obu rodzajach błędów wynika z istnienia dużej rozbieżności między przyjętą wartością $A = 2\cdot 10^5\ km\cdot s^{-1}$ a rzeczywistą, która mało różni się od $3\cdot 10^5\ km\cdot s^{-1}$.

5.2. Obliczanie błędów bezwzględnych liczb przybliżonych.

Wartości błędów bezwzględnych /maksymalnych/ jakie popełniamy w wyniku zaokrąglenia liczb, możemy wyznaczyć przy pomocy wzoru:

$$\varepsilon_m = /k + 1/ \cdot 10^{\,n-1\,-p} \qquad 7.5$$

gdzie: k - pierwsza cyfra przybliżonej wartości A,
n - ilość cyfr znaczących liczby A,
p - ilość miejsc po przecinku w liczbie A,
δ - błąd względny.

Przykład. Określić ilość cyfr znaczących przy wyznaczaniu z tablicy gęstości rtęci przy temperaturze 0^oC.

$$do = 13{,}5955\ g\cdot cm^{-3}$$

aby błąd względny nie przekraczał wartości $\delta = 0{,}001 = 0{,}1\%$.
Na podstawie wzoru 7.5 mamy: k = 1, n = 6, p = 4,
stąd błąd bezwzględny:

$$\varepsilon_m = /1 + 1/\cdot 10^{\,6-1\,-4} \cdot 10^{-3} = 0{,}02\ g\cdot cm^{-3}$$

Nie popełniając błędu większego niż 0,1% można przyjąć:

$$do = /13{,}59 \pm 0{,}02/\ g\cdot cm^{-3}$$

Błąd względny liczby przybliżonej związany jest z ilością jej liczb znaczących /pewnych/. Ilość cyfr znaczących w tym wypadku liczy się od pierwszej cyfry znaczącej liczby do pierwszej cyfry znaczącej jej bezwzględnego błędu. W ostatnim przykładzie cyframi znaczącymi /pewnymi/ są 1, 3, 5 natomiast 9 jest cyfrą niepewną. Orientacyjnie można przyjąć, że jedna cyfra znacząca /pewna/ odpowiada błędowi rzędu 10%, dwie cyfry znaczące, błędowi rzędu 1%, trzy - 0,1% itd. Jeśli nie mamy dokładniejszych informacji o wielkości błędu, to przyjmuje się jako błąd bezwzględny 10 jednostek ostatniego miejsca. Stanowi to górny dopuszczalny kres błędu.

Odpowiednio błąd względny przybliżenia możemy oszacować według wzoru:

$$\delta = \frac{10}{k \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{k} \; 10^{2-n} \qquad 8.5$$

gdzie: k - pierwsza cyfra wielkości przybliżonej,
n - liczba cyfr znaczących.

Przykład. Dla liczby przybliżonej $A = 5{,}347$ przyjmujemy błąd bezwzględny $A = 0{,}010$, natomiast błąd względny tej liczby wynosi przy przyjęciu $k = 5$ oraz $n = 4$:

$$\delta = \frac{1}{5} \cdot 10^{2-4} = 0{,}002$$

Reguły przybliżonych obliczeń służą z jednej strony do zmniejszania niepotrzebnego nakładania się błędów zaokrąglenia, z drugiej zaś strony do zmniejszenia zbytecznych rachunków przeprowadzanych dla zabezpieczenia nieosiągalnej /albo niepotrzebnej/ dokładności wyniku. Sensowna ocena błędów przy obliczeniach pozwala wskazać optymalną ilość cyfr znaczących, które należy zachować podczas obliczeń i w końcowym wyniku.

6. Wykonywanie działań rachunkowych na liczbach przybliżonych.

Na skutek ograniczonej dokładności metody pomiaru i przyrządów pomiarowych otrzymujemy w wyniku liczby przybliżone o określonym stopniu dokładności. Rachunki wykonywane na tych liczbach nie mogą mieć większej dokładności niż na to pozwala dokładność danych. Przy wykonywaniu rachunków na liczbach przybliżonych należy stosować się do następujących reguł:

1. W przypadku dodawania lub odejmowania liczb przybliżonych należy odrzucać cyfry w wyniku, w ten sposób, aby najmniej znacząca cyfra znajdowała się w pozycji najwięcej znaczącej cyfry niepewnej w składnikach. Wychodzi tu się z założenia, że błąd bezwzględny

sumy algebraicznej liczb przybliżonych jest równy artmetycznej sumie ich błędów bezwzględnych.

Przykład. Dla sumy liczb przybliżonych

$$\begin{array}{r} 241{,}0 \\ +\ 35{,}3 \\ -\ 12{,}41 \\ +\ 1{,}348 \\ \hline 265{,}238 \approx 265 \end{array}$$

Wynik możemy zaokrąglić tylko do liczb całkowitych, gdyż błąd sumy wynosi:

$$1 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 = 2{,}11$$

tzn., że pierwsza cyfra po przecinku jest niepewna o więcej niż 10 jednostek.

2. Przy podnoszeniu liczby przybliżonej do kwadratu lub trzeciej potęgi należy w wyniku zachować o jedną cyfrę znaczącą mniej niż ich miała dana liczba przybliżona.

Przykład.

$$21{,}328^2 = 453{,}88358 \approx 454{,}9$$

$$3{,}58^3 = 45{,}882712 \approx 46$$

3. Przy obliczaniu pierwiastka drugiego lub trzeciego stopnia z liczby przybliżonej należy w wyniku zachować tę samą liczbę cyfr znaczących, jaką miała liczba pierwiastkowana.

Przykład.

$$\sqrt{256{,}3} = 16{,}009372 = 16{,}01$$

$$\sqrt[3]{85{,}33} = 4{,}4025123 = 4{,}403$$

4. Przy dzieleniu lub mnożeniu liczb przybliżonych zachować należy w wyniku liczbę cyfr znaczących równą najmniejszej z liczb cyfr znaczących czynników.

Przykład.

$$8{,}53 \cdot 25{,}13 = 214{,}3589 = 214$$

$$\frac{583{,}2}{35{,}7} = 16{,}336 = 16{,}3$$

5. Aby kumulujący się błąd zaokrągleń nie ograniczał dokładności ostatecznego wyniku, wszystkie wyniki pośrednie obliczamy z liczbą cyfr znaczących o jeden większą od liczby określonej powyższymi regułami i dopiero w wyniku ostatecznym tę zbędną

cyfrę odrzucamy.

6.1. Wykonywanie działań na liczbach przybliżonych.

6.1.1. Dodawanie liczb przybliżonych.

Błąd bezwzględny sumy algebraicznej wielu liczb przybliżonych jest równy sumie błędów bezwzględnych jej poszczególnych składników, zgodnie ze wzorem:

$$X = A \pm \Delta x$$

to

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \pm \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i \qquad 1.6$$

Ze wzoru 1.6 wynika, że bezwzględny błąd sumy liczb przybliżonych równa się sumie bezwzględnych błędów poszczególnych jej składników. W przypadku, gdy znaki bezwzględnych błędów są nieznane zawsze bierzemy taki przypadek, aby wszystkie bezwzględne błędy miały ten sam znak, dodatni albo ujemny.

Tak więc:

$$\Delta X_{max} = \pm\left(|\Delta X_1| + |\Delta X_2| + \ldots + |\Delta X_n|\right) = \pm \sum_{i=1}^{n} |\Delta X_i| \qquad 2.6$$

przy czym X_{max} nazywamy maksymalnym błędem bezwzględnym.

W przypadku większej liczby składników lepiej posługiwać się ocenami uwzględniającymi fakt, że przy dodawaniu zachodzi częściowa kompensacja błędów o różnych znakach. W tym wypadku można przyjąć, że

$$\Delta X_s = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \ldots \Delta X_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2} \qquad 3.6$$

gdzie ΔX_s nazywamy błędem bezwzględnym losowym.

Przykład.

Błąd maksymalny dla sumy błędów

+0,12; +1,3; -1,0; 0,83; -1,8

wyniesie:

$$\Delta x_{max} = |0{,}12| + |1{,}3| + |-1{,}0| + |0{,}84| + |-1{,}8| = 5{,}06 \qquad 5{,}1$$

Dla tych samych błędów błąd losowy wyniesie

$$\Delta x_s = \sqrt{0{,}12^2 + 1{,}3^2 + 1{,}0^2 + 0{,}84^2 + 1{,}8^2} = 2{,}6$$

Dla sumy n liczb zaokrąglonych z dokładnością do m-tego miejsca po przecinku /tzn. zaokrąglonych z błędem mniejszym niż

$0{,}5 \cdot 10^{-m}$/ stosuje się wzór:

$$\Delta x = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m} \qquad \text{dla } n \quad 10 \qquad 4.6$$

Przykład. Błąd bezwzględny sumy liczb przybliżonych

$12{,}3 + 1{,}7 + 2{,}8 + 13{,}5 + 4{,}4 + 3{,}1 + 7{,}2 + 2{,}2 + 1{,}3 +$
$+ 1{,}5 + 3{,}4$

wyniesie /$n = 11$, $m = 1$/:

$$\Delta x = \sqrt{3 \cdot 11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}3$$

W wypadku dodawania liczb, z których jedna ma błąd bezwzględnie znacznie przewyższający błędy pozostałych liczb, można przyjąć, że błąd bezwzględny sumy jest równy temu największemu błędowi. Przy tym w sumie należy zachować celowo taką samą ilość dziesiętnych znaków, jaka występuje w składniku mającym największy błąd bezwzględny.

Jeśli mamy sumę wielu liczb tego samego znaku, to błąd względny sumy tych liczb zawiera się między najmniejszymi i największymi z błędów względnych składników, a mianowicie:

$$\delta_{max} > \delta_S > \delta_{min}$$

Często mamy do czynienia z przypadkiem, gdy jedna ze składników sumy jest liczbą dokładną. Dla np. dwóch liczb A_1 i A_2, błąd względny sumy w tym wypadku wyniesie:

$$\delta = \pm \frac{|\Delta X_1| + |\Delta X_2|}{A_1 + A_2} \qquad 5.6$$

Jeśli jedna z wartości np. A_2 jest liczbą dokładną, to jej błąd bezwzględny $\Delta X_2 = 0$.

Stąd:

$$\delta_S = \pm \frac{\Delta x_1}{A_1 + A_2} \qquad 6.6$$

Z drugiej strony, na podstawie definicji błędu względnego mamy:

$$\delta_1 = \pm \frac{\Delta x_1}{A_1} \qquad 7.6$$

Z porównania dwóch wyrażeń 6.6 i 7.6 widzimy, że:

$$\delta_S < \delta_1$$

tzn., że przy dodawaniu liczb przybliżonych z liczbami dokładnymi /nie obarczonymi błędami/ względny błąd sumy jest mniejszy od błędu względnego liczb przybliżonych.

6.2. Odejmowanie liczb przybliżonych.

Jeśli mamy dane dwie wielkości przybliżone

$$x_1 = A_1 \pm \Delta x_2$$

$$x_2 = A_2 \pm \Delta x_2 \qquad 8.6$$

to

$$x_1 - x_2 = A_1 - A_2 \pm (|\Delta x_1| + |\Delta x_2|)$$

tzn., że

$$\Delta x = \pm(|\Delta x_1| + |\Delta x_2|) \qquad 9.6$$

Błąd bezwzględny różnicy dwóch liczb przybliżonych równa się sumie wartości bezwzględnych błędów odjemnej i odjemnija. Ogólnie można powiedzieć, że błąd bezwzględny algebraicznej sumy liczb przybliżonych równa się sumie bezwzględnych wartości błędów bezwzględnych poszczególnych składników.

Względny błąd różnicy licz przybliżonych 8.6 i 9.6 wyraża się przy pomocy wzoru:

$$\delta = \pm \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{A_1 + A_2} \qquad 10.6$$

W przypadku stosowania wzoru 10.6 należy zwrócić uwagę na fakt, że jeśli wartości A_1 i A_2 niewiele różnią się między sobą, to różnica $A_1 - A_2$ może okazać się małą wielkością, a w tym przypadku błąd względny może mieć dużą wartość. Tak więc przy odejmowaniu liczb przybliżonych maleje dokładność, przy czym błąd względny różnicy tych liczb jest większy od błędów względnych tych liczb, zwłaszcza, gdy liczby te różnią się nieznacznie między sobą, tzn. jeśli różnica ich jest bardzo mała w porównaniu z tymi liczbami. Należy zatem unikać odejmowania liczb bliskich sobie, przekształcając w odpowiedni sposób schemat obliczeń.

Przykład.

$$/23{,}1 \pm 0{,}3/ - /12{,}4 \pm 0{,}4/ = 10{,}7 \pm 0{,}7$$

$$\delta = \frac{0{,}3 + 0{,}4}{23{,}1 - 12{,}4} = 0{,}0654 \simeq 6{,}5\%$$

6.3. Mnożenie liczb przybliżonych.

Jeśli mamy wyrażenie w postaci iloczynu liczb przybliżonych

$$X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \ldots\ldots X_n \qquad 11.6$$

to błąd względny iloczynu przybliżonych liczb, równa się sumie bezwzględnych wartości błędów względnych wszystkich poszczególnych czynników

$$\delta = \pm\left(|\delta_1| + |\delta_2| + \ldots + |\delta_n|\right) = \pm \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \qquad 12.6$$

Przy kilku czynnikach n lepiej posługiwać się wzorem uwzględniającym kompensację błędów o różnych znakach:

$$\delta_S = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2} \qquad 13.6$$

Mając obliczony błąd względny wg wzoru 12.6 lub 13.6 obliczamy błąd bezwzględny iloczynu:

$$\Delta X = \delta \cdot A \qquad 14.6$$

gdzie: ΔX – błąd bezwzględny iloczynu liczb przybliżonych

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots\ldots A_n$

δ – błąd względny iloczynu liczb przybliżonych, obliczony wg wzoru 12.6 lub 13.6 .

Przy określaniu błędów iloczynu liczb przybliżonych należy najpierw obliczyć błąd względny iloczynu wg wzoru 12.6 lub 13.6 a następnie znaleźć jego błąd bezwzględny wg wzoru 14.6 .

W przypadku mnożenia liczby przybliżonej A_1 z liczbą dokładną /pozbawioną błędu/ N, a mianowicie $X = N \cdot A_1$ otrzymamy wyrażenie na błąd względny i bezwzględny iloczynu

$$\delta = \pm \delta_1$$

$$\Delta X = \pm N \, \Delta X_1 \qquad 15.6$$

tzn., że bezwzględny błąd iloczynu jest proporcjonalny do N natomiast względny błąd iloczynu pozostanie bez zmiany.

Przykład.

Jeśli $x_1 = 31{,}5 \pm 0{,}2$ $\quad x_2 = 12{,}3 \pm 0{,}6$ $\quad x_3 = 3{,}0 \pm 0{,}1$

$x_4 = 10{,}4 \pm 0{,}3$ $\quad x_5 = 21{,}3 \pm 0{,}4$ $\quad x_6 = 7{,}5 \pm 0{,}2$

to błąd względny iloczynu tych liczb wyniesie:

$$\delta = \frac{0{,}2}{31{,}5} + \frac{0{,}6}{12{,}3} + \frac{0{,}1}{3{,}0} + \frac{0{,}3}{10{,}4} + \frac{0{,}4}{21{,}3} + \frac{0{,}2}{7{,}5} = 0{,}16$$

stąd

$$\Delta x = 0{,}16 \cdot 31{,}5 \cdot 12{,}3 \cdot 3{,}0 \cdot 10{,}4 \cdot 21{,}3 \cdot 7{,}5 = 0{,}16 \cdot 90848{,}985 = 14535{,}838 \simeq 14500$$

Uwzględniając kompensację błędów o różnych znakach otrzymamy:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{0{,}2}{31{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}6}{12{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{3{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}3}{10{,}4}\right)^2 + \left(\frac{0{,}4}{21{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{7{,}5}\right)^2} = 0{,}074$$

$x = 0{,}074\cdot 90848$

a więc wartości błędów nieco mniejsze.

6.4. Dzielenie liczb przybliżonych.

błąd względny ilorazu liczb przybliżonych

$$\Delta x = \frac{x_1}{x_2}$$

gdzie: $x_1 = A_1 \pm \Delta x_1$, $x_2 = A_2 \pm \Delta x_2$

oblicza się ze wzoru:

$$\delta = \pm\left(|\delta_1| + |\delta_2|\right) \qquad 16.6$$

tzn., że błąd względny ilorazu liczb przybliżonych równa się sumie bezwzględnych wartości błędów względnych dzielnej i dzielnika. Błąd bezwzględny ilorazu obliczamy wg wzoru:

$$\Delta x = \pm\,\delta\,\frac{A_1}{A_2} \qquad 17.6$$

gdzie: δ – błąd względny ilorazu liczb przybliżonych obliczamy wg wzoru 16.6 .

W przypadku określania błędu ilorazu liczb przybliżonych postępujemy podobnie jak w przypadku obliczania błędu iloczynu liczb przybliżonych tzn. obliczamy najpierw błąd względny wg wzoru 16.6 , a następnie określamy błąd bezwzględny wg wzoru 17.6 .

W przypadku, gdy $A_2 = N$ /N – liczba dokładna, tzn. $\Delta x_2 = 0$ i $\delta_2 = 0$/, otrzymamy:

$$\delta = \pm\,\delta_1$$

$$\Delta x = \pm\frac{\Delta x_1}{N} \qquad 18.6$$

tzn., że przy dzieleniu liczby przybliżonej przez dokładną liczbę N, błąd bezwzględny ulegnie zmniejszeniu N razy, natomiast błąd względny nie ulegnie zmianie.

Przykład.

Jeśli $x_1 = 37{,}5 \pm 0{,}4$ i $x_2 = 12{,}7 \pm 0{,}4$

to względny błąd ilorazu

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

wyniesie

$$\delta = \frac{0{,}4}{37{,}5} + \frac{0{,}4}{12{,}7} = 0{,}042$$

Błąd bezwzględny zaś:

$$\Delta x = 0{,}042 \cdot \frac{37{,}5}{12{,}7} \simeq 0{,}13 \simeq 0{,}2$$

6.5. Mnożenie i dzielenie liczb przybliżonych.

Przy mnożeniu i dzieleniu liczb przybliżonych $A_1, A_2 \ldots Am$ oraz $B_1, B_2 \ldots Bn$

$$X = \frac{A_1 A_2 A_3 \ldots Am}{B_1 B_2 B_3 \ldots Bn} \qquad 19.6$$

błąd względny otrzymuje się ze wzoru:

$$\delta = |\delta_{A1}| + |\delta_{A2}| + \ldots + |\delta_{Am}| + |\delta_{B1}| + |\delta_{B2}| + \ldots + |\delta_{Bn}| \qquad 20.6$$

Przy dużej liczbie m+n składników lepiej posługiwać się wzorem częściowo kompensującym błędy o różnych znakach, a mianowicie:

$$\delta_S = \sqrt{\delta_{A1}^2 + \delta_{A2}^2 + \ldots + \delta_{Am}^2 + \delta_{B1}^2 + \delta_{B2}^2 + \ldots + \delta_{Bn}^2} \qquad 21.6$$

Mając błąd względny obliczany wg wzoru 20.6 lub 21.6 otrzymamy błąd bezwzględny:

$$\Delta X = \pm \delta \cdot X \qquad 22.6$$

gdzie: X - jest obliczone według wzoru 19.6 .

Jeśli błąd względny dla jednej z liczb Ai lub Bj jest znacznie większy od błędów pozostałych liczb, to możemy przyjąć, że błąd względny wyrażenie 19.6 jest równy temu największemu błędowi. Zachowuje się przy tym celowo tę ilość cyfr znaczących, jaka występuje w liczbie mającej największy błąd względny.

Przykład.

Mając $A_1 = 31{,}2 \pm 0{,}3$ $\quad A_2 = 7{,}4 \pm 0{,}2$ $\quad A_3 = 9{,}3 \pm 0{,}2$

$B_1 = 1{,}4 \pm 0{,}1$ $\quad B_2 = 14{,}3 \pm 0{,}4$ $\quad B_3 = 5{,}8 \pm 0{,}3$

to błąd względny wielkości

$$x = \frac{31{,}2 \cdot 7{,}4 \cdot 9{,}3}{1{,}4 \cdot 14{,}3 \cdot 5{,}8} = 18{,}5$$

wyniesie:

$$\delta = \frac{0{,}3}{318} + \frac{0{,}2}{744} + \frac{0{,}2}{9{,}3} + \frac{0{,}1}{1{,}4} + \frac{0{,}4}{14{,}3} + \frac{0{,}3}{5{,}8} = 0{,}21$$

stąd:

$$\Delta x = 0{,}21 \cdot 18{,}5 = 3{,}9$$

korzystając ze wzoru /21.6/ otrzymamy błąd względny:

$$\delta_s = \sqrt{\left(\frac{0,3}{31,8}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{7,4}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{9,3}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{1,4}\right)^2 + \left(\frac{0,4}{14,3}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{5,8}\right)^2} = 0,1$$

$$\Delta x = 0,1 \cdot 18,5 \cong 1,9$$

6.6. Potęgowanie liczb przybliżonych.

Jeśli dowolna liczba przybliżona

$$X = A \pm \Delta X \qquad 23.6$$

podniesiona zostanie do potęgi n-tego stopnia tzn.

$$X^n = (A \pm \Delta X)^n \qquad 24.6$$

to korzystając ze wzorów przybliżonych 14.6 możemy napisać:

$$X^n = A^n(1 \pm n\delta) \qquad 25.6$$

Stąd względny błąd potęgowania określa się prostym wzorem

$$\delta_p = \pm n\delta \qquad 26.6$$

gdzie: δ - względny błąd potęgowanej liczby przybliżonej 23.6 . Względny błąd spowodowany potęgowaniem liczby przybliżonej równa się iloczynowi wykładnika potęgi i błędu względnego liczby potęgowanej.

Bezwzględny błąd, jaki otrzymamy przez potęgowanie liczby przybliżonej wyraża się przy pomocy wzoru:

$$\Delta X_p = \pm n A^{n-1} \Delta X \qquad 27.6$$

Otrzymuje się go więc w wyniku pomnożenia przez siebie trzech wartości a mianowicie wykładnika potęgi, liczby przybliżonej w potędze o jeden stopień niżej oraz bezwzględnego błędu liczby przybliżonej.

Tak więc możemy napisać:

$$X^n = A^n \pm n A^{n-1} \Delta X \qquad 28.6$$

Warto tutaj zaznaczyć, że wzory 26.6 i 27.6 są słuszne dla dowolnych wartości n /niekoniecznie całkowitych/. W praktyce wzór 27.6 jest wzorem zbyt złożonym, dlatego też dla określenia błędu bezwzględnego, jaki otrzymujemy przy potęgowaniu liczb przybliżonych, korzystamy z wzoru:

$$\Delta X_p = n \cdot \delta \cdot A^n \qquad 29.6$$

gdzie: δ - jest błędem względnym liczby przybliżonej.

Tak więc, przy określaniu błędów liczb przybliżonych poddanych działaniu potęgowania, najpierw obliczamy błąd względny wg wzoru 26.6 a następnie obliczamy błąd bezwzględny na podstawie wzoru 29.6 względnie 27.6 .

Przykład.
W przypadku liczby 14,3 ± 0,2 podniesionej do potęgi 2,4 otrzymamy błąd względny

$$\delta_p = 2{,}4\ \frac{0{,}2}{14{,}3} = 0{,}034$$

oraz błąd bezwzględny

$$\Delta x_p = 0{,}034 \cdot 14{,}3^{2{,}4} = 20$$

tak więc

$$/14{,}3 \pm 0{,}2/^{2{,}4} = 593 \pm 20$$

6.7. Pierwiastkowanie liczb przybliżonych.

Jeśli przybliżoną liczbę poddamy działaniu pierwiastkowania, przy czym pierwiastek jest stopnia n-tego, tzn.

$$\sqrt[n]{X} = \sqrt[n]{A \pm x} \qquad 30.6$$

to korzystając z wzorów przybliżonych, można napisać:

$$\sqrt[n]{X} = \sqrt[n]{A}\left(1 \pm \frac{1}{n}\delta\right) \qquad 31.6$$

Z wyrażenia 31.6 wynika, że względny błąd jaki popełniamy przy pierwiastkowaniu liczby przybliżonej określa wzór:

$$\delta_p = \pm \frac{1}{n}\delta \qquad 32.6$$

tzn. równy jest on błędowi względnemu liczby przybliżonej podzielonemu przez stopień pierwiastka. Bezwzględny błąd wyraża się wzorem:

$$\Delta x_p = \pm \frac{1}{n} \cdot A^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta x \ . \qquad 33.6$$

W praktyce korzystniej jest obliczać błąd bezwzględny z wzoru:

$$\Delta x_p = \pm \frac{1}{n}\sqrt[n]{A}\ \delta \qquad 34.6$$

W tym wypadku, w celu obliczenia błędów, postępujemy analogicznie jak w przypadku potęgowania liczb przybliżonych, tzn. najpierw obliczamy błąd względny ze wzoru 32.6 , a następnie błąd bezwzględny z wzoru 34.6 lub 33.6 .

Przykład.

Obliczyć błąd popełniony przy pierwiastkowaniu n=3 stopnia z liczby przybliżonej 21,37 ± 0,43

$$\delta_p = \frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}43}{21{,}37} = 0{,}007$$

$$\Delta x_p = \frac{1}{3}\sqrt[3]{21{,}37}\cdot 0{,}007 = 0{,}00646 \approx 0{,}01$$

otrzymamy więc:

$$\sqrt[3]{21{,}37 \pm 0{,}43} = 2{,}78 \pm 0{,}01$$

6.8. Obliczanie i zaokrąglanie wyników końcowych.

Dokładność opracowania materiału liczbowego powinna być uzależniona od dokładności samych pomiarów. Przeprowadzenie obliczeń w celu uzyskania większej ilości znaków dziesiętnych niż to jest potrzebne, powoduje zbytnią stratę czasu i stwarza złudne wrażenie większej dokładności pomiarów. Należy zawsze przestrzegać zasady, że błąd otrzymywany w wyniku dokonywania obliczeń powinien być znacznie /np. 10 razy/ mniejszy od ogólnego błędu pomiarów. Możemy być wtedy przekonani, że w rezultacie działań arytmetycznych dokonywanych na wynikach pomiarów nie obarczamy ostatecznego wyniku dodatkowym błędem.

Zgodnie z powszechnie obowiązującymi zasadami zaokrąglania wyników końcowych oraz ze sposobem zapisu stałych fizycznych przyjmuje się:

- Przy odczytywaniu wartości z tablic matematycznych i fizycznych przyjęto, że w przypadku gdy nie określono dokładności maksymalnej błąd bezwzględny nie przekracza 10 jednostek miejsca najmniej znaczącego. Np. odczytana z tablicy wielkość 0,7500 może mieć błąd bezwzględny nie większy niż 0,0010: wartosć $25{,}57\cdot 10^{-8}$ może posiadać błąd bezwzględny nie większy niż $0{,}10\cdot 10^{-8}$,
- Błędy pomiarowe można zaokrąglać wyłącznie w górę, tak by w żadnym wypadku ich nie zmniejszać np. wynik 1,012 można zaokrąglić tylko do 1,1,
- Wszystkie błędy pomiarowe obliczać należy z dokładnością do trzech miejsc znaczących, a następnie zaokrąglić je do dwóch

względnie do jednego miejsca znaczącego,

- Sam wynik pomiaru musimy obliczać z dokładnością do kilku miejsc znaczących, tak aby liczba obliczonych miejsc dziesiętnych przekroczyła liczbę miejsc dziesiętnych błędów pomiarowych. Np. obliczamy X = 378,53 w przypadku gdy ΔX = 2,3,

- Wynik końcowy zaokrąglamy na tym samym miejscu dziesiętnym co błąd pomiaru np. 378,5 $\pm$ 2,3,

- Zaokrąglenie wyniku końcowego wielkości mierzonej wykonujemy według jednej z powszechnie przyjętych zasad, a mianowicie:

1/ cyfry 0 - 4 zaokrąglamy w dół, a cyfry 5 -9 w górę,

2/ cyfry 0 - 4 zaokrąglamy w dół, cyfry 6 - 9 w górę a cyfrę 5 do liczby parzystej czyli w dół, gdy poprzedza ją cyfra parzysta, a w górę gdy poprzedza ją cyfra nieparzysta,

3/ cyfry 0 - 49 zaokrąglamy w dół, a cyfry 50 - 99 w górę.

Można stosować dowolną z tych zasad, lecz w danym zagadnieniu należy stosować konsekwentnie tylko jedną z nich.

7.0. Wzory przybliżone.

Przy obliczeniach na liczbach przybliżonych nie ma sensu posługiwać się wzorami dającymi dużo większą dokładność niż dokładność oceny danych wyjściowych. Podstawowym źródłem wzorów przybliżonych są szeregi, zwłaszcza szeregi Taylora. Przy posługiwaniu się wzorami należy zwracać szczególną uwagę na oceny ich błędów, gdyż zazwyczaj wzory przybliżone dla różnych przedziałów mają różne błędy.

Zestawienie ważniejszych wzorów przybliżonych wraz z zakresem ich błędów podano w tabeli nr 7.1.

8.0. Prawo rozkładu błędów przypadkowych.

Występowanie błędów przypadkowych podlega pewnej prawidłowości, której matematyczne sformułowanie stanowi węzłowe zagadnienie teorii błędów. W celu znalezienia błędu pomiarów należy powtórzyć wielokrotnie mierzenie danej wielkości. Jeśli każdy pomiar daje wynik nieco inny, mamy do czynienia z sytuacją, gdy główną rolę odgrywa błąd losowy.