

10.3. Elipsoids bezwładności

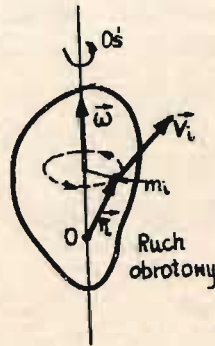
Weźmy teraz pod uwagę jakiś dowolny i-ty punkt znajdujący się w odległości \vec{r}_i od punktu O /rys. 5.10/. Punkt ten ma prędkość liniową \vec{v}_i styczną do toru i leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Wektor prędkości liniowej \vec{v}_i jest związany z wektorem prędkości kątowej $\vec{\omega}$ w sposób następujący

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Moment pędu \vec{K}_i punktu i-tego względem punktu O, to znaczy iloczyn wektorowy promienia wodzącego punktu \vec{r}_i i jego pędu

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i \quad \text{ma postać}$$

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Rys. 5.10. Ruch obrotowy ciała sztywnego

Jeżeli na rozpatrywany punkt i-ty działa siła \vec{F}_i to moment siły \vec{N}_i względem punktu O jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego \vec{r}_i i siły \vec{F}_i

$$\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Ponieważ ciało stałe składa się z bardzo wielu takich punktów,

na które działają siły zewnętrzne i które między sobą oddziałują siłami wewnętrznymi, to aby otrzymać wielkości charakteryzujące ciało sztywne jako całość, należy zsumować wielkości charakteryzujące poszczególne punkty. Należy przy tym zaznaczyć, że prędkość kątowna wszystkich punktów ciała jest jednaka i wynosi $\vec{\omega}$, a więc charakteryzują one ciało sztywne. Dodając momenty pędu wszystkich punktów ciała sztywnego otrzymamy wypadkowy moment pędu względem wybranego punktu O.

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Korzystając z zależności, że $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

/11.10/

Wzór /11.10/ wyraża ogólną postać momentu pędu ciała sztywnego. Jeżeli założymy, że początek układu współrzędnych jest sztywno związany z ciałem w środku masy ciała i że oś obrotu jest osią środkową i nie jest osią stałą, to w ogólnym przypadku oś może zmieniać swoje położenie w ciele i przestrzeni.

Korzystając z tożsamości wektorowej

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

/12.10/

i zakładając, że

$$\vec{A} = \vec{r}_i ; \quad \vec{B} = \vec{\omega} ; \quad \vec{C} = \vec{r}_i$$

dostajemy

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

/13.10/

Oznaczając współrzędne wektorów \vec{r}_i i $\vec{\omega}$ odpowiednio przez x_i, y_i, z_i oraz $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ możemy wyznaczyć iloczyn

$$\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

/14.10/

Podstawiając /13.10/, /14.10/ do wzoru /11.10/ obliczamy składową K_x wektora momentu pędu \vec{K} /uwzględniając wyrażenie /12.10/.

$$\vec{K}_x = \omega_x \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \quad /15.10/$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) \\ J_{xy} &= \sum m_i x_i y_i \\ J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i \end{aligned} \right\} \quad /16.10/$$

i postępując podobnie w przypadku składowych K_y i K_z dostaniemy

$$\left. \begin{aligned} K_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z \\ K_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z \\ K_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z \end{aligned} \right\} \quad /17.10/$$

W ten sposób składowe wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ wiąże się ze składowymi wektora momentu pędu \vec{K} przy pomocy równań /17.10/, w których występuje 9 wielkości zależących od rozkładu masy ciała względem osi obrotu.

Na przykład wyrażenie

$$J_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

będące sumą iloczynów mas przez kwadraty odległości od osi Ox oznacza moment bezwładności ciała względem tej osi. Dziewięć wyrazów występujących w /17.10/ możemy napisać w postaci macieży i oznaczyć symbolicznie \hat{J} :

$$\hat{J}_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} J_{xx} & J_{yx} & J_{zx} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{zy} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{array} \right\| \quad /18.10/$$

Układ równań /17.10/ można więc krótko zapisać w postaci

$$\vec{K} = \hat{J} \cdot \vec{\omega} \quad /19.10/$$

Wielkość \hat{J} nie jest skalarą, lecz reprezentuje układ 9 wielkości. Z tego też względu kierunek wektora \vec{K} w ogólności nie jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{\omega}$.

Wielkość \hat{J} nazywamy tensorem drugiego rzędu, a macierz /18.10/ nosi nazwę macierzy tensora. Nazwa tensor powstała w mechanice ciał odkształcalnych, gdzie naprężenia czy też odkształcenia takiego ciała są wielkościami tensorowymi. Dla każdego ciała sztywnego można tak dobrać kierunki trzech osi współrzędnych, iż znikną wszystkie wyrazy zwane momentami zboczenia lub dewiacji typu

$$J_{xy} = J_{yx} = J_{xz} = J_{zx} = J_{yz} = J_{zy} = 0$$

Macierz /18.10/ będzie więc miała w tym szczególnym przypadku postać

$$\hat{J}_{ik} = \begin{vmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{vmatrix}$$

Przy takim wyborze współrzędnych możemy napisać

$$J_{xx} = J_1 \quad J_{yy} = J_2 \quad J_{zz} = J_3 \quad /20.10/$$

Wielkości /20.10/ nazywamy głównymi momentami bezwładności ciała sztywnego, a odpowiednie osie - głównymi osiami bezwładności tego ciała.

Reprezentacją tensora symetrycznego jest powierzchnią drugiego stopnia, ściśle biorąc elipsoidy.

Jeśli ciało ma symetrię sferyczną, wówczas

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

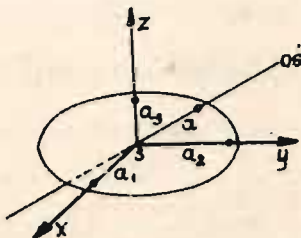
Jeśli ciało ma symetrię obrotową, to dwa spośród trzech głównych momentów bezwładności są sobie równe

$$J_1 \neq J_2 = J_3$$

W ogólnym przypadku w kierunku największej osi elipsoidy moment bezwładności bryły przyjmuje wartość najmniejszą, w kierunku osi najmniejszej - największą, w kierunku zaś trzeciej osi wartość pośrednią.

W przypadku obręczy sztywnej np. mamy największy $J_p = mr^2 = J_1$ najmniejszy $J_r = \frac{1}{2} mr^2 = J_2 = J_3$

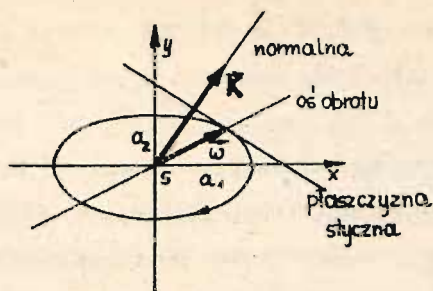
Interpretacja geometryczna związku /19.10/ przedstawiona jest na rys. /6.10/



Rys. 6.10. Elipsoida bezwładności

gdzie $a_1 = \frac{1}{\sqrt{J_1}}$; $a_2 = \frac{1}{\sqrt{J_2}}$; $a_3 = \frac{1}{\sqrt{J_3}}$

Poprowadzamy przez punkt S prostą o kierunku osi obrotu, tzn. wektora $\vec{\omega}$ /rys. 7.10/. Odłóżmy na tej prostej odcinek o długości $a \approx \frac{1}{\sqrt{J}}$ gdzie J oznacza moment bezwładności ciała sztywnego względem osi obrotu $\vec{\omega}$.



Rys. 7.10. Wyznaczenie kierunku wektora \vec{K} na elipsoidzie bezwładności

Aby znaleźć kierunek wektora momentu pędu \vec{K} ciała sztywnego, poprowadzimy płaszczyznę styczną do elipsoidy w punkcie określonym przez wektor $\vec{\omega}$ i przeprowadzonym przez punkt S normalną do tej płaszczyzny. Wektor \vec{K} będzie leżał na tej określonej prostej.

Z przedstawionej konstrukcji wyznaczania kierunku wektora momentu pędu wynikają następujące wnioski:

1. Dla ciał o symetrii sferycznej elipsoida bezwładności przechodzi w kulę. W tym wypadku wektor \vec{K} jest zawsze równoległy do wektora $\vec{\omega}$.
2. Dla ciał o symetrii obrotowej elipsoida bezwładności przekształca się w elipsoidę obrotową. W tym przypadku oś geometryczna ciała jest zawsze główną osią bezwładności. Jest to oś największego bądź najmniejszego momentu bezwładności w zależności od tego, czy ciało jest spłaszczone czy też wydłużone.
3. Wektor \vec{K} jest równoległy do wektora $\vec{\omega}$ wtedy, gdy obrót zachodzi wokół osi symetrii ciała, lub dowolnej osi leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi i przechodzącej przez środek masy.

4. W ogólnym przypadku wektor \vec{K} będzie równoległy do wektora $\vec{\omega}$ tylko wtedy, gdy obrót zachodzi wokół jednej z głównych osi bezwładności.

W tym przypadku dobieramy osie x, y, z zgodnie z głównymi osiami bezwładności bryły sztywnej. Wobec znikania w tych warunkach momentów dewiacyjnych, moment pędu \vec{K} ma składowe

$$K_x = J_{xx} \omega_x$$

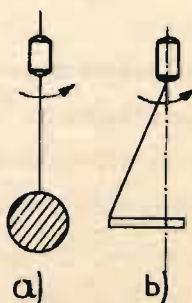
$$K_y = J_{yy} \omega_y$$

$$K_z = J_{zz} \omega_z$$

/18/

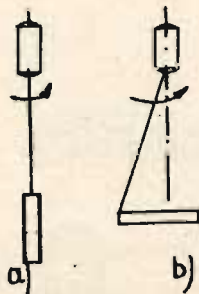
Jeśli jednak obrót zachodzi dookoła jednej z głównych osi bezwładności, to tylko jedna ze składowych prędkości kątowej ma wartość różną od zera i wobec tego różna od zera jest tylko odpowiednia składowa momentu pędu, np. gdy $\omega_y = \omega_z = 0$, wówczas $K_x = J_{xx} \omega_x$. Uzasadnia to wyżej wyprowadzone stwierdzenie. Obrót jest stabilny, jeśli zachodzi dookoła osi odpowiadającej bądź największemu, bądź najmniejszemu momentowi bezwładności bryły sztywnej.

Stabilność osi swobodnych nie jest jednak jednakowa. Bardziej stabilna jest oś odpowiadająca największemu momentowi bezwładności. Można się o tym przekonać na następujących przykładach



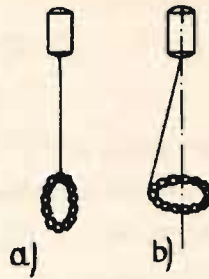
Rys. 8.10. Stabilność osi swobodnych wirowania płaskiego krążka

1. Zawieszony krążek na drucie na osi silnika elektrycznego przy wolnych obrotach silnika wiruje dookoła swej średnicy, gdyż pod wpływem ciężaru ustawia się on pionowo /rys.8.10/. Jednakże przy szybkich obrotach, gdy główną rolę odgrywają siły odśrodkowe, krążek ustawia się poziomo /rys.8.10/.
2. W tym położeniu oś obrotu odpowiada największemu momentowi bezwładności. Tak będzie zachowywał się walec metalowy, umieszczony na osi silnika /rys. 9.10 a i b/. Przy powolnych obrotach walec wiruje dookoła swej osi /rys.9.10a/, przy szybkich obrotach ustawia się pionowo /rys. 9.10b/.



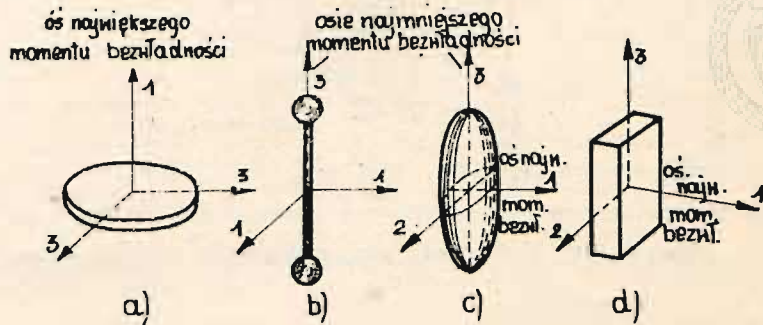
Rys. 9.10. Stabilność osi swobodnych wirowanie walca

3. Podobnie jak walec zachowa się łańcuch zawieszony na drucie będącym na osi silnika /rys.10.10/, gdzie dla małych obrotów mamy położenie 10.10a/ natomiast przy dużych obrotach położenie 10.10b/.



Rys. 10.10 a i b. Stabilność łańcucha

Na rys. 11.10. przedstawione są główne osie bezwładności dla niektórych figur geometrycznych.



Rys. 11.10. Osie bezwładności dla różnych ciał

10. 4. Teoria bąka

Bakiem /giroskopem/ będziemy nazywać bryłę sztywną, która może wykonywać dowolny ruch obrotowy w przestrzeni. Jeżeli na baka nie działają żadne siły, mówimy że bąk jest swobodny. Pomijamy przy tym ewentualnie towarzyszący ruchowi obrotowemu ruch postępowy bryły.

Podstawowe równania rządzące ruchem bąka noszą nazwę równań Eulera, które ze względu na bardzo skomplikowaną postać nie podajemy. Warto zaznaczyć, że istnieje jedynie kilka wypadków, w których równania te udało się scałkować.

10.4.1. Ruch bąka swobodnego

Rozpatrzmy ruch obrotowy obręczy wokół osi środkowej nie pokrywającej się z jej osią symetrii, tzn. z osią największego momentu bezwładności. W tym przypadku wektor momentu pędu \vec{K} ma inny kierunek niż wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, a oś obrotu nie jest stała, może się swobodnie poruszać, tzn. że jest chwilową osią obrotu. Zakładamy, że moment sił zewnętrznych znika, a to oznacza, że wektor \vec{K} jest stały co do wartości i kierunku. Rozłożmy wektor $\vec{\omega}$ na składowe prostopadłą i równoległą

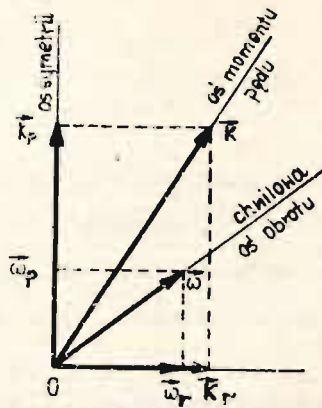
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_p$$

Wówczas wektor \vec{K} można przedstawić w postaci

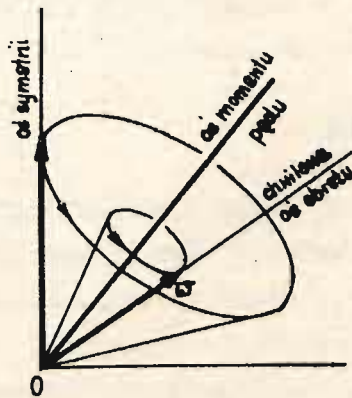
$$\vec{K} = \vec{K}_r + \vec{K}_p$$

Ale teraz kierunek stały w przestrzeni zachowuje wektor \vec{K} .

Wynika z tego, że zarówno oś symetrii jak i chwilowo oś obrotu muszą okręzać niezmiennie w przestrzeni oś momentu pędu opisując powierzchnie stożkowe. Rys. 12.10 ilustruje omawiane zależności.



Rys. 12.10. Oś momentu pędu chwilowa oś obrotu



Rys. 13.10. Stożek autacji

W czasie obrotu baka jego oś symetrii zakreśla dookoła nieruchomego kierunku momentu pędu stożek, który nazywamy stożkiem autacyjnym /rys. 13.10/. Drugi stożek, również dookoła tego nieruchomego kierunku zakreśla w przestrzeni chwilowe oś obrotu jest to tzw. herpolhodia. W każdej chwili oś symetrii baka i jego chwilowa oś obrotu leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez kierunek momentu pędu baka. Oznacza to, że okresy obiegu osi symetrii baka po stożku autacyjnym i chwilowej osi obrotu baka po herpolhodii są jednakowe.

W szczególnym przypadku ruch bąka odbywać się może bez nutacji, mianowicie, gdy wprawimy bąk w ruch obrotowy tak, by nie doznał on bocznego uderzenia, i by jego oś symetrii pokrywała się na skutek tego z osią momentu pędu. Oś symetrii jest wówczas osią momentu pędu przechodzącą przez środek masy bąka. Tego rodzaju sytuację mamy podczas rzutu dyskiem z nadanym mu jednocześnie ruchem obrotowym dookoła osi symetrii. W tych warunkach moment pędu jest stały i ma stały kierunek w przestrzeni w czasie rzutu /rys. 14.10/. Wobec tego i kierunek osi symetrii dysku jest stały w czasie jego lotu, dzięki czemu na części spadającej toru wytwarza się wskutek oporu powietrza siła nośna. Zasięg rzutu dyskiem w tym przypadku ulega wyraźnemu zwiększeniu w porównaniu z rzutem bez obrotu.



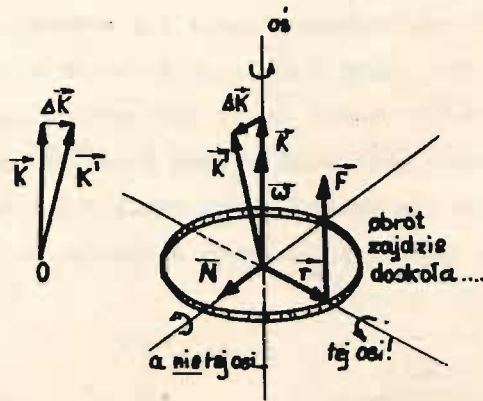
Rys. 14.10. Rzut dyskiem

10.4.2. Ruch bąka pod działaniem sił zewnętrznych

Gdy bąk podlega działaniu zewnętrznemu momentowi siły, jego moment pędu zmienia się w czasie zgodnie z równaniem ruchu obrotowego bryły sztywnej.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N}$$

Wyobraźmy sobie, że na obręcz wirującą wokół osi największego momentu bezwładności podziała siła \vec{F} równoległa do osi obrotu $\vec{\omega}$ /rys. 15.10/.



Rys. 15.10. Obrót obręczy pod działaniem siły zewnętrznej

Moment tej siły $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest prostopadły do osi obrotu. Gdyby obręcz nie wirowała, tzn. gdyby $\vec{\omega} = 0$, to pod wpływem siły \vec{F} obróciłoby się wokół osi wyznaczonej przez wektor \vec{N} . Ale skoro wiruje z prędkością kątową $\vec{\omega}$, to moment pędu $\vec{K} = J \cdot \vec{\omega}$. Jeśli siła podziałała w czasie Δt , to pod wpływem momentu siły \vec{N} moment pędu zmieni się o $\Delta\vec{K} = \vec{N} \cdot \Delta t$. Wektor \vec{K} , a razem z nim oś symetrii obręczy obróci się zatem i przyjmie nowe położenie

$$\vec{K}' = \vec{K} + \Delta\vec{K}$$

Obrót ten, wbrew oczekiwaniom zajdzie wokół trzeciej osi, prostopadłej zarówno do $\vec{\omega}$, jak i do \vec{N} . Zjawisko to nosi nazwę efektu giroskopowego /rys. 15.10/.

Wektor przyrostu momentu pędu $\Delta \vec{k}$ jest prostopadły do wektora momentu pędu \vec{k} oraz, jeśli $\Delta \vec{k} \ll \vec{k}$, to suma tych dwóch wektorów \vec{k} ma tę samą wartość bezwzględną lecz inny kierunek /rys. 15.10/.

Wartość momentu pędu \vec{k} jest stała, mamy bowiem zaniedbując wyrazy drugiego rzędu

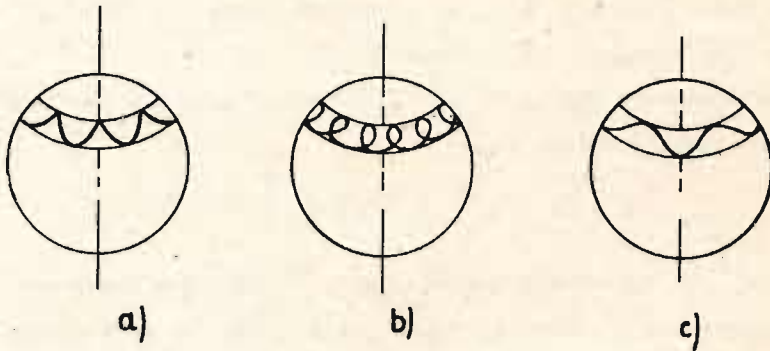
$$k^2 = (k' - \Delta k)^2 = k'^2 - 2k'\Delta k + \Delta k^2 \approx k'^2$$

Widzimy, że moment sił zewnętrznych \vec{N} powoduje obrót wektora \vec{k} a wraz z nim obrót osi symetrii. Zjawisko to nosi nazwę precesji. Kierunek ten opisuje tzw. stożek precesji, z określoną prędkością kątową precesji ω_p .

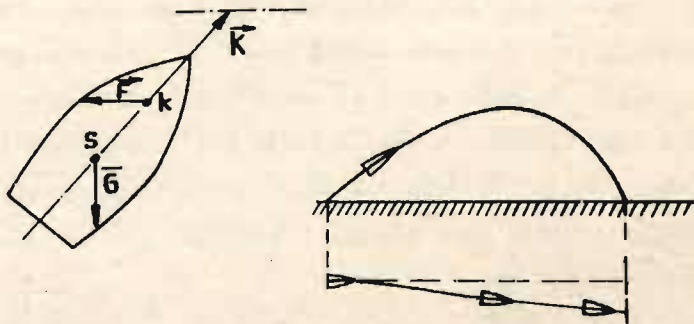
10.4.3. Precesja z nutacją

Najczęściej mamy do czynienia nie z precesją regularną bąka pod wpływem momentu siły zewnętrznej, ale z ruchem złożonym z precesji z nałożoną nutacją. Pod wpływem tego momentu wektor momentu pędu bąka nie jest, jak wiemy nieruchomy w przestrzeni, lecz zakreśla stożek precesji. Ponadto oś symetrii bąka zakreśla dookoła kierunku momentu pędu stożek nutacji O , symetrii bąka zakreśla w tym wypadku nie okrąg lecz linię wężykowatą. Ślady osi bąka na kuli, której środek leży w punkcie podparcia bąka dla różnych szybkości precesji i nutacji przedstawiono na rys. 15.10.

Przykład zastosowania precesji z nutacją stanowią pociski artyleryjskie, którym nadaje się ruch obrotowy dookoła osi symetrii przez nagwintowanie lufy armatniej. W próżni pocisk zachowałby wobec tego kierunek osi obrotu, tak że opisywałby parabolę. W powietrzu doznaje działania siły oporu powietrza F , skierowanej przeciwko kierunkowi jego prędkości i przyłożonej



Rys. 16.10. Ślad osi bąka na kuli, -której środek leży w punkcie podparcia bąka. a/ szybkość precesji jest równa szybkości nutacji, b/ jest mniejsza, c/ jest większa



Rys. 17.10. Tor pocisku z zaznaczeniem jego zboczenia w prawo

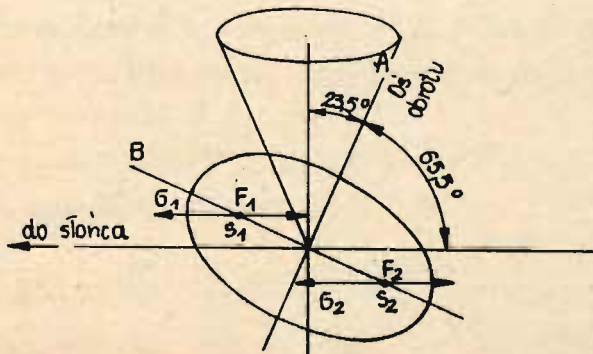
w punkcie K /rys. 17.10/. Równocześnie w środku ciężkości S pocisku działa jego ciężar \vec{G} . Te dwie siły powodują powstanie momentu, który powoduje ruch precesyjny połączony z nutacją. W wyniku tego skomplikowanego ruchu, kierunek osi nie zakreśla powierzchni stożkowej, lecz powierzchnię bardziej skomplikowaną - cykloidalną, uzyskując przy tym zbócenie w prawo /rys. 17.10/.

10.4.4. Ruch precesyjny Ziemi

Wirująca dookoła swej osi Ziemia stanowi rodzaj bąka. Wskutek spłaszczenia Ziemi swym kształtem przypomina spłaszczoną elipsoidę obrotową, wirującą wokół swej osi nie pokrywającej się jednak z jej osią symetrii. Wskutek spłaszczenia Ziemi jej moment bezwładności dookoła jej osi obrotu B jest niecp mniejszy niż moment bezwładności dookoła osi A, prostopadłej do osi obrotu. Z pomiarów wynika, że /rys. 18.10/ oś obrotu Ziemi

$$\frac{I_B - I_A}{I_B} = \frac{1}{305}$$

tworzy z płaszczyzną toru Ziemi dookoła Słońca /ekliptyka/ kąt $66,5^\circ$ /rys. 18.10. Wskutek tego część kuli ziemskiej o środku S_1 będąca bliżej Słońca jest silniej przyciągana przez



Rys. 18.10. Ruch precesyjny Ziemi