

Jeżeli natężenie pola jest różne w różnych miejscach, powierzchnię dzielimy na elementy wektorowe $\vec{\Delta S}$, mnożymy je skalarnie przez lokalne wektory \vec{g}_i i następnie sumujemy otrzymując całkowity strumień

$$\phi = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i \cdot \vec{\Delta S}_i = \sum_{i=1}^n g_i \Delta S_i \cos(\vec{g}_i, \vec{\Delta S}_i)$$

Za kierunek wektora $\vec{\Delta S}$ przyjmujemy kierunek zewnętrznej normalnej do powierzchni ΔS . W granicy suma przejdzie w całkę

$$\phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

8.2. Twierdzenie Gaussa

Strumień grawitacyjny przechodzący przez powierzchnię zamkniętą jest wprost proporcjonalny do masy M zamkniętej wewnątrz tej powierzchni.

$$\phi = K \cdot M$$

gdzie $K = 4\pi G$, G - stała grawitacyjna,

Twierdzenie Gaussa przybiera postać

$$\phi = 4\pi G M$$

Twierdzenie to pozwala nam w prosty sposób obliczać natężenie pola przez ciało o różnych kształtach.

8.2.1. Pole grawitacyjne punktu materialnego

Aby znaleźć natężenie pola grawitacyjnego wytworzonego przez punkt materialny o masie M otaczamy go w myśli powierzchnią kulistą o promieniu r . /rys.2.8/ Wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni kuli będzie wszędzie

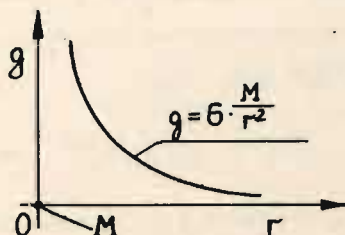
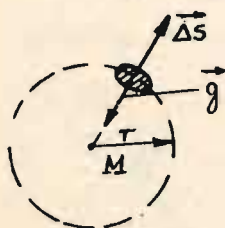
jednakowa /reguła symetrii/. Wektor natężenia \vec{g} jest wszędzie prostopadły do powierzchni kuli i można zastąpić iloczyn skalarny iloczynem bezwzględnych wartości obu wektorów.

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum \vec{g} \cdot \Delta \vec{s} = \sum g \cdot \Delta s \cdot \cos(\vec{g}, \Delta \vec{s}) = \sum g \cdot \Delta s \cdot \cos 0 = \\ &= g \sum \Delta s = g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M\end{aligned}$$

stąd

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

tzn. natężenie pola maleje wraz z kwadratem odległości od punktu materialnego wytwarzającego pole.



Rys. 2.8. Pole grawitacyjne punktu materialnego o masie M

Jeżeli w odległości r umieścimy drugi punkt materialny o masie m , to nędzie na niego działała siła grawitacyjna o wartości

$$F = mg = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Jest to słynne prawo grawitacji odkryte przez Newtona w XVII w. obowiązujące w całym Wszechświecie.

8.2.2. Pole grawitacyjne kuli

W podobny sposób możemy wyznaczyć natężenie pola w odległości r od środka kuli o masie M otaczając ją w myśli powierzchnią kulistą i stosując wzór Gaussa /rys. 3.8/

$$\Phi = \sum \vec{g} \Delta \vec{S} = \sum g_i \Delta S_i \cos(g_i, \Delta S_i) = \sum_{i=1}^n g \Delta S_i \cos 0 =$$

$$= g \sum \Delta S = g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G \cdot M$$

stąd

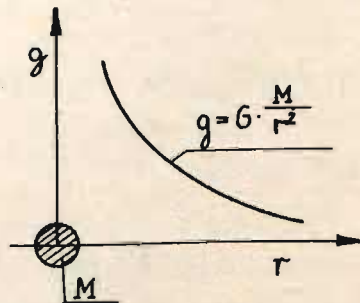
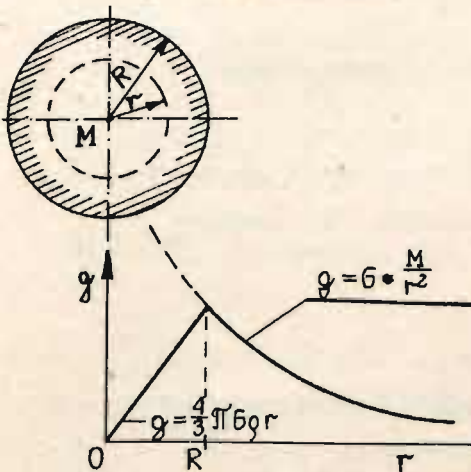
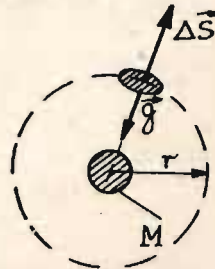
$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Zatem prawo Newtona stosuje się także do kuli jednorodnych, z tym że r oznacza tutaj odległość między ich środkami. Powierzchnię kulistą możemy poprowadzić także wewnątrz kuli wytwarzającej pole $r < R$. Objęta tą powierzchnią kulistą masa wyniesie /rys. 4.8/.

$$M_r = \rho \cdot V_r = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

gdzie V_r - objętość kuli o promieniu r

ρ - objętość kuli.



Rys. 3.8 Pole grawitacyjne masy M

Rys. 4.8. Zależność natężenia pola grawitacyjnego g od odległości dla kuli o promieniu R i masie M .

Stosując w tym przypadku tzw. Gaussa otrzymamy

$$\Phi = 4\pi G M = 4\pi G \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = g \sum_{i=1}^n \Delta S_i = g 4\pi r^2$$

$$4\pi G \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = 4\pi r^2 g$$

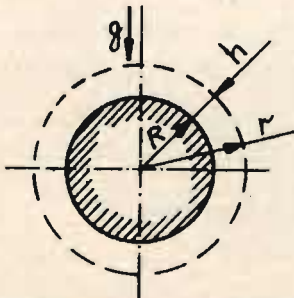
$$\downarrow$$

$$g = \frac{4}{3} \pi G \rho r$$

Natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz kuli o promieniu R rośnie liniowo od $g = 0$ w środku kuli do $g = \frac{4}{3} \pi G \rho R$ na powierzchni kuli. Dalej na zewnątrz kuli dla $r > R$ maleje .

8.3. Pole grawitacyjne Ziemi

Ze względu na rozmiary Ziemi $/R = 6370 \text{ km}/$ możemy ciała w jej otoczeniu traktować jako punkty materialne i pominąć zakłócenia wywołane ich własnymi polami grawitacyjnymi. /rys. 5.8/.



Rys.5.8. Pole grawitacyjne Ziemi

Oznaczając

$$r = R + h$$

gdzie R - promień kuli ziemskiej

a h - wysokość pod jej powierzchnią

możemy obliczyć natężenie pola grawitacyjnego g Ziemi na podstawie wzoru $g = G \frac{M}{r^2}$ i twierdzenia Gaussa

$$g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g_R}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

gdzie $g_R = G \frac{M}{R^2}$ jest natężeniem pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi. Dla wysokości h niewielkiej w porównaniu z powierzchnią Ziemi /dla $h \ll R$ /

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 \approx 1+2\frac{h}{R} \quad \text{i stąd}$$

$$g = \frac{g_R}{1+\frac{2h}{R}} \approx g_R$$

Tak więc dla małych wysokości nad powierzchnią Ziemi możemy przyjąć

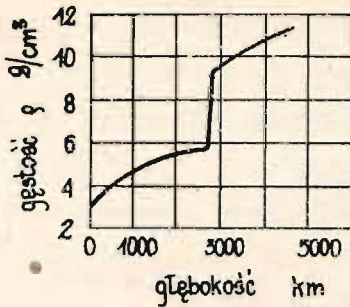
$$g = g_R = \text{const.}$$

Średnią gęstość Ziemi ocenia się na $5,5 \text{ g/cm}^3$. Gęstość skorupy ziemskiej /wyznaczona z pomiarów/ ma różne wartości, zależne od rodzaju materiału. Średnią gęstość warstwy granitowej ocenia się na $2,7 \text{ g/cm}^3$, warstwy bazaltowej - na około $2,9 - 3,0 \text{ g/cm}^3$. Porównanie tych wartości z wartością średniej gęstości Ziemi prowadzi do wniosku, że we wnętrzu Ziemi istnieje materiał o znacznie większej gęstości niż gęstość skał występujących na powierzchni. Rozkład gęstości wraz ze zmianą głębokości przedstawia wykres na rys. 6.8.

W związku z nierównym rozkładem gęstości wewnątrz Ziemi natężenie pola grawitacyjnego wraz z głębokością również nie będzie malało w sposób liniowy.

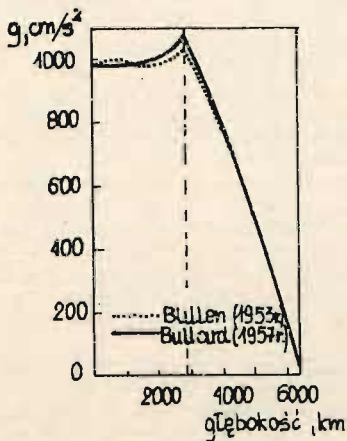
Rozkład ten można przedstawić przy pomocy wzoru

$$g = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr$$



Rys. 6.8. Zmiana gęstości Ziemi ρ wraz ze zmianą głębokości.

gdzie: r - odległość od środka Ziemi zmienna w granicach $R \geq r \geq 0$; R - promień Ziemi, G - stała grawitacyjna. Zależność natężenia pola grawitacyjnego Ziemi od głębokości na podstawie doświadczeń przedstawiono na rys. 7.8.



Rys. 7.8. Zmiana przyspieszenia ziemskiego wewnątrz Ziemi

8.4. Masa Ziemi

Siłą działającą na ciało w polu grawitacyjnym Ziemi nazywamy ciężar ciała. Można przyjąć, że natężenie

ziemskiego pola grawitacyjnego jest równoznaczne z przyspieszeniem swobodnego spadku. Jego średnia wartość na poziomie morza dla szerokości geograficznej $\varphi = 45^\circ$ wynosi

$$g_R = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

z drugiej strony

$$g_R = G \frac{M}{R^2}$$

stąd

$$M = \frac{1}{G} g_R \cdot R^2$$

Wiedząc, że $G = 6,673 \pm 0,003 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ /wyznaczona w sposób doświadczalny/ można obliczyć masę Ziemi

$$M = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3 \text{N}}{\text{kg}^2}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

8.5. Grawitacja

Prawo ciążenia zapisane za pomocą wzoru $F = G \frac{m \cdot M}{r^2}$ jest spełnione ściśle dla punktów materialnych, zaś w przybliżeniu dla ciał o rozmiarach skończonych, jeśli odległości pomiędzy ciałami znacznie przekraczają własne rozmiary liniowe ciał /co właśnie ma miejsce w przypadku Układu Słonecznego/.

Istnieją współczesne warianty hipotez o naturze grawitacji, skonstruowane zgodnie z wyobrażeniami o naturze sił jądrowych i elektromagnetycznych. Przyciąganie grawitacyjne dwóch ciał tłumaczy się tu wymianą specyficznych cząstek, kwantów pola grawitacyjnego - grawitonów, podobnie jak jądrowe oddziaływania nukleonów wiąże się z wymianą mezonów, zaś elektromagnetyczne z wymianą fotonów. Jednakże nie ma obecnie kompletnej i potwierdzonej doświadczalnie teorii tego rodzaju.

Ilościową weryfikację prawa powszechnego ciążenia przeprowadzono wielokrotnie, poddając podaniam uniwersalność i wartość liczbową stałej grawitacyjnej G . Wiemy obecnie, że

stała G zachowuje tę samą wartość, niezależnie od rodzaju materiału z dokładnością do $\approx 0,3\%$. Sprawdzono również hipotezę zależności G od czasu. Ostatnie dane uzyskane na podstawie radiolokacji Merkurego, ustaliły górną granicę prędkości zmiany G : jeśli zmiana taka zachodzi to nie przekracza ona $\Delta G = 3 \cdot 10^{-11} G$ na rok. Oznacza to, że w ciągu istnienia Wszechświata /około 10^{10} lat/ stała grawitacji nie mogła się zmienić więcej niż o 30% swej obecnej wartości.

Jednakże na początku naszego stulecia pojawiły się ważne argumenty przemawiające za rewizją newtonowskiej teorii ciążenia, czego dostarczyła szczególna teoria względności. Zgodność teorii Newtona z obserwacjami w obrębie Układu Słonecznego wynikała z małej w porównaniu z prędkością światła prędkości planet i ciał na powierzchni Ziemi. /Prędkość Ziemi w ruchu wokół Słońca wynosi 30 km/s, a zatem jest 10^4 razy mniejsza od prędkości światła/. W ten sposób teoria Newtona była jedynie grawistyką, analogicznie do elektrostatyki opisywanej przez prawo Coulomba. Uogólnienie teorii Newtona na pola ciążenia i poruszające się w tych polach z dowolną prędkością ciał dokonał Einstein, przy czym zmiany te okazały się istotne w obszarach silnych pól grawitacyjnych i przy dużych prędkościach.

Podstawowe założenia Einsteinowskiej teorii ciążenia można sformułować w następujący sposób:

- a/ masa jest miarą bezwładności, ciążenia i energii ciał,
- b/ oddziaływanie ciał rozchodzi się ze skończoną prędkością nie przekraczającą prędkości światła C .

Prawo ciążenia Einsteina zostało sformułowane w postaci równań wiążących pola ciążenia z rozkładem materii we Wszechświecie.

Bierze się tu pod uwagę wszystkie rodzaje materii zarówno rzeczywiste masy /skupione+ lub rozłożone w sposób ciągły/ jak i masy równoważne energii mechanicznej, cieplnej, pól elektromagnetycznych, jądrowych itp.

Cała ta materia określa pole grawitacyjne w przestrzeni i w ten sposób wyznacza tory ruchu ciał, czyli rozkład materii w przestrzeni wyznacza geometrię tej przestrzeni. W najogólniejszym przypadku pełna charakterystyka pola grawitacyjnego w teorii Einsteina wymaga podania nie jednej funkcji współrzędnych - potencjału /jak w teorii Newtona/ lecz zbioru dziesięciu funkcji bardzo złożonych.

Analiza rozwiązań równań pola grawitacyjnego wykazała, że newtonowskie prawo grawitacji otrzymuje się jako przybliżone rozwiązanie równań Einsteina, słuszne w przypadku tzw. słabych pól. Pole grawitacyjne nazywamy słabym jeśli spełnia warunek:

$$\frac{\varphi}{c^2} \ll 1$$

gdzie φ - oznacza potencjał pola grawitacyjnego.

Na powierzchni Słońca potencjał wytwarzanego przez pole $G \frac{M}{R}$ /M- masa Słońca, R - promień Słońca/. Stąd na wartość $\frac{\varphi}{c^2}$ otrzymujemy wartość w przybliżeniu równą 10^{-6} , co oznacza, że cały Układ Słoneczny znajduje się w obszarze słabego pola i teoria ciążenia Newtona powinna dawać tu zadowalające wyniki. Dotychczas, jeśli chodzi o prawo $F \sim r^{-2}$, w żadnym z przeprowadzonych na Ziemi doświadczeń nie stwierdzono jakiegokolwiek odchylenia od tego prawa. Przeprowadzono jednak względnie pomyślnie wiele doświadczeń potwierdzających nowe efekty przewidywane przez ogólną teorię względności.

8.5.1. Relatywistyczne zagadnienie Keplera

W wielu wypadkach zachodzi konieczność obliczenia poprawek relatywistycznych dla ruchu keplerowskiego. Jest tak np. w relatywistycznej teorii atomu wodoru czy też naszego układu planetarnego.

Konieczność rozpatrzenia tego zagadnienia wynika z obserwacji ruchu planet, które doprowadziły do wykrycia powolnego ruchu punktu przysłonecznego dla wszystkich w zasadzie orbit. Jak wynika z pomiarów, ruch ten jest tym wyraźniejszy, im bliżej Słońca znajduje się dana planeta (rys. 8.8.). I tak np. perihelium Merkurego przesuwają się o $572''$ na stulecie.

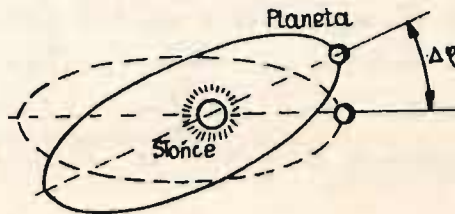


Rys. 8.8.

Rozłożenie planet wokół Słońca

Poszukując wyjaśnienia tego zjawiska uwzględniono przede wszystkim wpływ pozostałych planet. Poprawki pochodzące z tego źródła wyjaśniły przeważającą część efektu, pozostała jednak różnica wynosząca dla Merkurego $43''$ łuku na stulecie. Mimo drobnej liczbowo wartości tej różnicy samo istnienie rozbieżności między danymi obserwacyjnymi a dobrze sprawdzoną teorią newtonowską budziło niepokój. Jak wykazał dokładniejszy

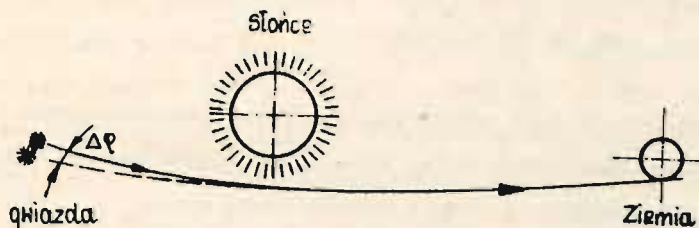
rachunek perihelium Merkurego jest dokładnie odtworzony przez wynik uzyskany w ramach ogólnej teorii względności. To samo dotyczy także pozostałych planet, dla których udało się zmierzyć ruch perihelium. Warto podkreślić, że doskonała zgodność wyniku teoretycznego $42,9''$ z daną obserwacyjną $42,55''$ stanowi jeden z podstawowych sprawdzianów słuszności ogólnej teorii względności.



Rys. 8.8. Zmiana orbity planety w polu ciężenia Słońca

8.5.2. Promień świetlny w polu grawitacyjnym

Promień świetlny, jako promieniowanie elektromagnetyczne o pewnej energii, charakteryzuje się również pewną masą, równoważną tej energii, a więc powinien podlegać działaniu siły ciężenia i zmieniać kierunek biegu przy przejściu w pobliżu ciała o dużej masie. Dokładne obliczenia przeprowadzone na podstawie teorii Einsteina, dają przesunięcie kątowe promienia świetlnego od odległej gwiazdy, przechodzącego przy krawędzi tarczy słonecznej równe $1,75''$ /rys. 10.8//dokładność pomiarów 10%/. Zakrzywienie promienia świetlnego w polu grawitacyjnym można



Rys.10.8. Odchylenie promienia świetlnego w polu grawitacyjnym

interpretować jako załamanie światła w ośrodku, którym jest samo pole. Fale elektromagnetyczne powinny ulegać opóźnieniu w polu grawitacyjnym, podobnie jak ulegają opóźnieniu wchodząc do ośrodka optycznego o współczynniku załamania n /prędkość fal elektromagnetycznych w próżni c , w ośrodku $c' = \frac{c}{n}$ /.

Efekt ten stwierdzono w eksperymentach radiolokacyjnych w Merkury i Wenus w chwili przechodzenia tych planet za Słońcem. Fale radiowe odbite od planety ulegają opóźnieniu przy widocznym zbliżeniu się planety do Słońca. Opóźnienie to wzrasta, dopóki planeta nie skryje się za tarczą Słoneczną. Po ukazaniu się planety zza tarczy opóźnienie zaczyna maleć. Największa wartość opóźnienia, odpowiadająca sytuacji, gdy promień taki przebiega tuż przy krawędzi tarczy słonecznej wynosi około 160 ps. /5% dokładności/.

8.5.3. Zmiana częstości światła w polu grawitacyjnym

Promieniowanie elektromagnetyczne można przedstawić jako strumień kwantów pola elektromagnetycznego. Z zasady

równoważności masy i energii wynika, że kwantowi promieniowania można przypisać masę

$$m_{ku} = \frac{E}{c^2} = \frac{h \cdot \nu}{c^2}$$

W konsekwencji w polu grawitacyjnym kwant promieniowania będzie podlegał działaniu sił pola, które przy przemieszczeniu kwantu z jednego miejsca w drugie wykona pewną pracę

$$\Delta L = m_{ku} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

gdzie φ_1 - potencjał pola w punkcie początkowym

φ_2 - potencjał pola w punkcie końcowym

Nastąpi również odpowiednia zmiana $\Delta \nu$ częstości ν

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{m_{ku}(\varphi_1 - \varphi_2)}{h} = \frac{\nu}{c^2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

lub

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$$

Przy przechodzeniu kwantu z pola o mniejszym potencjale pola do punktu o większym potencjale tzn. $\varphi_2 > \varphi_1$, $\Delta \nu$ jest ujemne, co oznacza, że w takim wypadku widmo promieniowania widzialnego ulega przesunięciu ku czerwieni. Efekt ten powinniśmy obserwować w przypadku światła odległych gwiazd i światła słonecznego.

Eksperyment polega na dokładnym ustaleniu połączenia znanych linii widmowych na skali częstości i porównaniu ich z położeniem tych samych linii emitowanych przez źródło naziemne. W przypadku Słońca przewidywane przesunięcie w stronę czerwieni wynosi $\Delta \nu / \nu = 2 \cdot 10^{-6}$, co nie przekracza zdolności rozdzielczej aparatury pomiarowej. Efekt grawitacyjnej zmiany częstości został doświadczalnie potwierdzony w przypadku wysyłanego promieniowania przez białe karły /1967/. Obserwowano także zmianę częstości kwantów promieni γ , po przejściu 20 m w kierunku pionowym, w polu sił ciężkości Ziemi.