

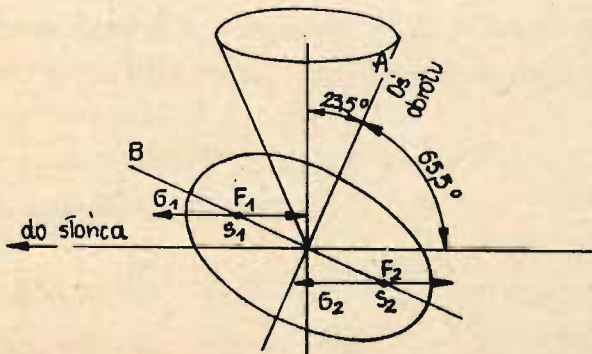
w punkcie K /rys. 17.10/. Równocześnie w środku ciężkości S pocisku działa jego ciężar \vec{G} . Te dwie siły powodują powstanie momentu, który powoduje ruch precesyjny połączony z nutacją. W wyniku tego skomplikowanego ruchu, kierunek osi nie zakreśla powierzchni stożkowej, lecz powierzchnię bardziej skomplikowaną - cykloidalną, uzyskując przy tym zbócenie w prawo /rys. 17.10/.

10.4.4. Ruch precesyjny Ziemi

Wirująca dookoła swej osi Ziemia stanowi rodzaj baka. Wskutek spłaszczenia Ziemi swym kształtem przypomina spłaszczoną elipsoidę obrotową, wirującą wokół swej osi nie pokrywającej się jednak z jej osią symetrii. Wskutek spłaszczenia Ziemi jej moment bezwładności dookoła jej osi obrotu B jest niecp mniejszy niż moment bezwładności dookoła osi A, prostopadłej do osi obrotu. Z pomiarów wynika, że /rys. 18.10/ oś obrotu Ziemi

$$\frac{I_B - I_A}{I_B} = \frac{1}{305}$$

tworzy z płaszczyzną toru Ziemi dookoła Słońca /ekliptyka/ kąt $66,5^\circ$ /rys. 18.10. Wskutek tego część kuli ziemskiej o środku S_1 będąca bliżej Słońca jest silniej przyciągana przez

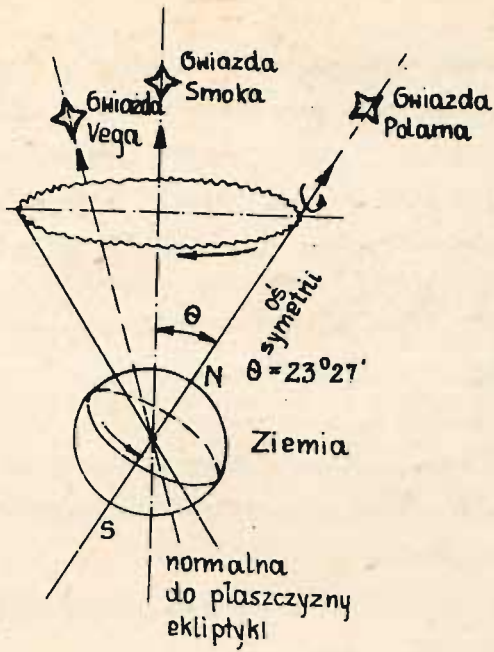


Rys. 18.10. Ruch precesyjny Ziemi

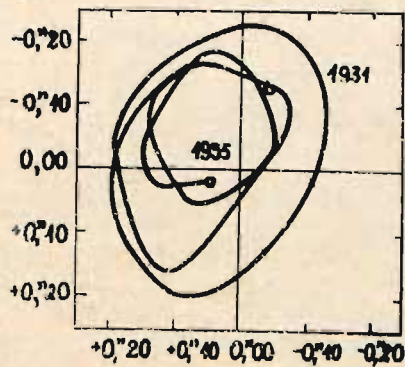
Słońce niż druga część ze środkiem S_2 . Prócz tego wskutek ruchu dookoła Słońca na część kuli Ziemskiej ze środkiem S_1 działa siła odśrodkowa F_1 mniejsza niż na część ze środkiem S_2 /z powodu różnicy odległości od Słońca/. Siła F_1 jest mniejsza od siły przyciągania G_1 , zaś dla części ze środkiem S_2 , F_2 jest większa niż G_2 . Ostatecznie na obie części działają siły wypadkowe $P_1 = G_1 - F_1$ i $P_2 = F_2 - G_2$ tworzące parę sił. Moment obrotowy tej pary sił powoduje ruch precesyjny osi Ziemi, nie zmieniając kąta jej pochylenia do płaszczyzny ekliptyki. Ruch precesyjny osi ziemskiej wywołuje również i działanie Księżyca, który krąży dookoła Ziemi, niewiele wychylając się od płaszczyzny ekliptyki / 15° /. Ze względu na bliskość Księżyca wpływ jego na precesję osi ziemskiej jest / $34''$ / większy niż wpływ Słońca / $16''$ rocznie/.

Na skutek odchylenia kształtu Ziemi od symetrii sferycznej oraz niejednorodności zewnętrznego pola grawitacyjnego w obszarze Ziemi, pochodzącego od wspólnego działania Słońca, Księżyca i planet pojawia się różny od zera moment siły powodujący obrót osi asymetrii Ziemi. Podczas tej precesji astronomicznej, oś symetrii Ziemi zakreśla w ciągu 25800 lat stożek wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki, wykazując przy tym małe wychylenia od tego ruchu zwane nutacją astronomiczną. /rys. 19.10/.

Prócz regularnej nutacji występują nieregularne przesunięcia chwilowej osi obrotu Ziemi, wywołane przemieszczeniem się mas na powierzchni Ziemi, np. ruchami dużych mas powietrza, oraz faktem, że Ziemia nie jest bryłą sztywną. Ruch chwilowego bieguna dookoła średniego położenia powodują odchylenia nie przekraczające 15 metrów, a okres biegu bieguna kinematycznego wynosi średnio 427 dni. Na rys. 20.10 widzimy



Rys. 19.10. Precesja i nutacja kuli ziemskiej. Wskutek ruchu precesyjnego za 12000 lat kierunek bieguna północnego będzie wskazany nie przez gwiazdę Polarną a przez Vegę.



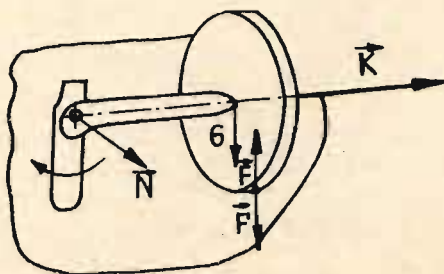
Rys. 20.10. Ruch bieguna Ziemi w latach 1931 - 1935

ruch bieguna Ziemi w latach 1931 - 1935, wyliczone z wahań szerokości geograficznej, określonej w różnych punktach Ziemi.

Oś obrotu Księżyca wykonuje również precesję dookoła osi ekliptyki pod wpływem przyciągania słonecznego. Pochylenie osi Księżyca względem ekliptyki wynosi 5° . Okres biegu stożka precesji wynosi 18,6 lat.

10.4.5. Żyroskopy

W niektórych urządzeniach technicznych mamy do czynienia z tzw. wymuszonym ruchem precesyjnym. Przypadek takiej precesji pokazano na rys. 21.10.



Rys. 21.10. Precesja wymuszona

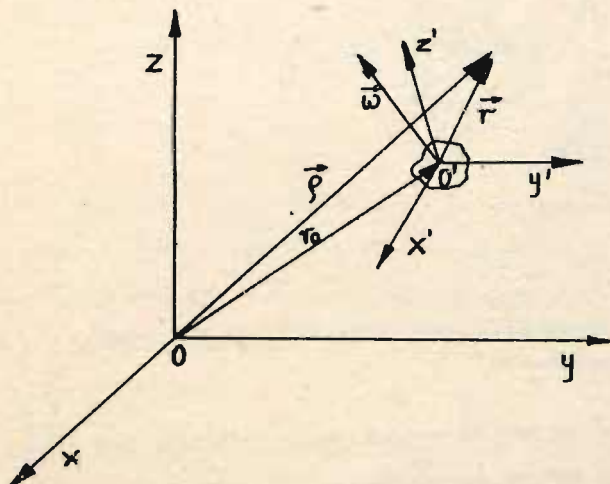
Przy toczeniu się bąka wokół osi po powierzchni podłoża powstaje moment siły $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N}$, który można wyrazić jako moment skierowanej do góry siły \vec{F} działającej na bąk. Zgodnie z zasadą akcji i reakcji bąk działa taką samą siłą \vec{F}' na podłoże. Siła \vec{F}' zależnie od prędkości kątowej wymuszonego ruchu precesyjnego może kilkakrotnie przewyższać ciężar bąka \vec{G} .

Szczególnie ważny technicznie przypadek precesji ma miejsce wtedy, gdy prędkość kątowna obrotu wokół osi bezwładności jest wielokrotnie wyższa od prędkości kątowej precesji. Ma to miejsce w turbinach okrętowych, śmigłach samolotu w czasie skrętu, skrętu kół samochodowych. We wszystkich tych przypadkach powstaje moment oddziałujący na podtrzymujące te urządzenia łożyska.

Żyroskopowe własności są wykorzystywane bądź do określania położenia względem układu inercyjnego /żyrokompassy/ bądź też do sterowania bryłą celem utrzymania jej w żądanym położeniu lub na żądanym torze jak np. automatyczny pilot, urządzenia sterujące rakietami, sztuczny horyzont itp.

11. Ruch w nieinercjalnych układach odniesienia

Niech pewien układ odniesienia O będzie układem inercyjnym, a pewien inny układ O' porusza się względem O ruchem dowolnym lecz znanym . /rys.1.11/.



Rys. 1.11. Zmiana układu odniesienia

Równanie ruchu punktu materialnego względem układu O dane jest równaniem

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

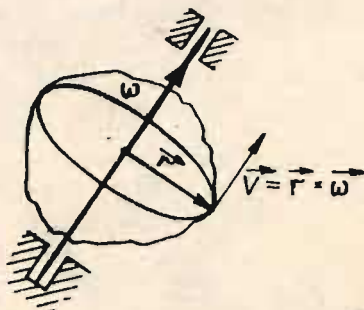
a - przyspieszenie punktu materialnego względem O , F - siła działająca na punkt materialny i pochodząca od innych ciał.

Ruch chwilowy układu ruchomego składa się z przesunięcia z prędkością $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$ początku układu O' i obrotu z prędkością kątową $\vec{\omega}$ około osi przechodzącej przez ten początek układu.

Ruch ten nazywamy unoszeniem a prędkość punktu x', y', z' / związanego niezmiennie z układem ruchomym O' nazywamy prędkością \vec{u} unoszenia. Wektor \vec{u} jest odniesiony do układu nieruchomego O i wyraża się równaniem /rys.2.11/.

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{r} \times \vec{\omega}$$

/1.11/



Rys. 2.11. Prędkość punktu obracającego się wokół osi z -tów

Oznaczając przez \vec{v} prędkość rozpatrywanego punktu poruszającego się względem układu nieruchomego O a przez \vec{v}_u prędkość tego punktu względem układu ruchomego O' , to otrzymamy

$$\vec{U} = \vec{U}_W + \vec{U}_u$$

/2.11/

tzn. prędkość bezwzględna jest sumą geometryczną prędkości względnej \vec{v}_W i prędkości unoszenia \vec{v}_u .

Ostatecznie

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{U}_u$$

/3. 11/

Różniczkując ostatnie wyrażenie względem czasu otrzymamy

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d\vec{U}_0}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{U}_u}{dt}$$

/4.11/

Wyrażenie $\frac{d\vec{U}_0}{dt} = \vec{a}_0$ jest przyspieszeniem ruchu postępowego układu ruchomego O' ; natomiast $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$ jest przyspieszeniem kątowym obrotu chwilowego tegoż układu; $\vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{\epsilon}$ jest jedną ze składowych przyspieszenia unoszenia, a mianowicie składową styczną przyspieszenia wywołanego obrotem układu ruchomego O' .

Ze względu na to, że

$$\vec{r} = \vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z'$$

/5.11/

wektory jednostkowe uważamy także za zmienne tzn.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx'}{dt} + \vec{j} \frac{dy'}{dt} + \vec{k} \frac{dz'}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt}$$

/6.11/

Ale $\frac{d\vec{i}}{dt}$ jest prędkością końca wektora jednostkowego \vec{i} wywołaną obrotem układu ruchomego O' z prędkością kątową $\vec{\omega}$ około osi przechodzącej przez początek układu O' o współrzędnych x' , y' , z' a więc w/g wzoru.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{i} \times \vec{\omega}$$

/7.11/

Podobnie

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{j} \times \vec{\omega} \quad ; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{k} \times \vec{\omega} \quad /8.11/$$

Po wstawieniu tych wartości w wyrażenie $\frac{d\vec{r}}{dt}$ otrzymamy:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx'}{dt} + \vec{j} \frac{dy'}{dt} + \vec{k} \frac{dz'}{dt} + (\vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z') \times \vec{\omega} \quad /9.11/$$

Wyrażenie

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} &= \frac{d}{dt} (\vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z') \times \vec{\omega} = \\ &= \left(\vec{i} \frac{dx'}{dt} + \vec{j} \frac{dy'}{dt} + \vec{k} \frac{dz'}{dt} \right) \times \vec{\omega} + \left(x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \times \vec{\omega} = \\ &= \vec{u}_u \times \vec{\omega} + (x' \vec{i} \times \vec{\omega} + y' \vec{j} \times \vec{\omega} + z' \vec{k} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} = \\ &= \vec{u}_u \times \vec{\omega} + [(\vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z') \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega} = \\ &= \vec{u}_u \times \vec{\omega} + (\vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} \end{aligned} \quad /10.11/$$

Zgodnie z rys. 2.11.

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Chcąc obliczyć przyspieszenie, tzn. pochodną wektora prędkości \vec{v} względem czasu, różniczkujemy powyższy związek względem czasu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad /11.11/$$

Wektor $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ jest wektorem przyspieszenia kąowego skierowanego podobnie jak wektor $\vec{\omega}$ prostopadle do płaszczyzny ruchu. Śladnik $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ ma kierunek prostopadły do $\vec{\omega}$ i do \vec{r} , a więc styczny do okręgu. Jest to wektor przyspieszenia stycznego

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} \quad /12.11/$$

Wartość wektora \vec{a}_t wyraża się wzorem

$$a_t = \varepsilon \cdot r$$

W drugim składniku wektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ jest wektorem prędkości \vec{v} , zatem jest wektorem prostopadłym do $\vec{\omega}$ i \vec{v} , czyli wektorem o kierunku promienia \vec{r} , tzn. wektor przyspieszenia normalnego /dośrodkowego/:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad /13.11/$$

Korzystając z zależności wektorowej

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

wzór /13.11/ możemy zapisać w postaci

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r} = -\omega^2 \vec{r} \quad /14.11/$$

gdyż iloczyn skalarny wektorów prostopadłych do siebie $\vec{\omega}$ i \vec{r} wynosi zero. Ze wzoru /14.11/ wynika, że przyspieszenie normalne jest skierowane do środka okręgu. Wstawiając otrzymane zależności do wzoru /4.11/ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{v}_u}{dt} + \vec{r} \times \vec{\varepsilon} + \vec{a}_n \right) + \vec{v}_u \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}_u + \vec{v}_u \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} \end{aligned} \quad /15.11/$$

gdzie a_u oznacza przyspieszenie unoszenia. Przyspieszenie względne $\frac{d\vec{v}_n}{dt}$ możemy doprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_H}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{i} \cdot \frac{dx'}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy'}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz'}{dt} \right) = \\ &= \vec{i} \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k} \cdot \frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \\ &+ \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}\end{aligned}$$

Wielkość $\vec{i} \frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z'}{dt^2} = \vec{a}_H$ oznacza przyspieszenie względne, natomiast

$$\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{i} \times \vec{\omega} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} \times \vec{\omega} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} \times \vec{\omega} =$$

$$\left(\vec{i} \frac{dx'}{dt} + \vec{j} \frac{dy'}{dt} + \vec{k} \frac{dz'}{dt} \right) \times \vec{\omega} = \vec{v}_H \times \vec{\omega}$$

Mamy więc

$$\frac{d\vec{v}_H}{dt} = \vec{a}_H + \vec{v}_H \times \vec{\omega}$$

Ostatecznie więc wzór /15.11/ przyjmie postać

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_u + \vec{a}_H + 2\vec{v}_H \times \vec{\omega}$$

/16.11/

Przyspieszenie bezwzględne \vec{a} składa się z przyspieszenia unoszenia \vec{a}_u , przyspieszenia względnego \vec{a}_H i przyspieszenia dodatkowego $\vec{a}_c = 2\vec{v}_H \times \vec{\omega}$ zwanego przyspieszeniem Coriolisa, którego wektor $2\vec{v}_H \times \vec{\omega}$ jest prostopadły zarówno do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jak i do wektora prędkości \vec{v}_H w układzie ruchomym O' . Przyspieszenie Coriolisa znika w trzech przypadkach szczególnych gdy:

1/ prędkość względna \vec{v}_H jest równoległa do osi obrotu układu

- 2/ prędkość kątowna. $\vec{\omega}$ obrotu jest równa zeru
3/ prędkość względna \vec{V}_w jest równa zeru.

11.1. Szczególne przypadki ruchu w nieinercjalnych układach odniesienia

W ogólnym przypadku ruch układu odniesienia jest ruchem przyspieszonym. Jak wynika z równania /16.11/ w odróżnieniu od układów inercjalnych /nie przyspieszonych/, przyspieszenie względne określone przez obserwatora w układzie nieinercjalnym różni się od przyspieszenia w układzie nieruchomym o sumę przyspieszenia unoszenia¹ Coriolisa.

11.1.1. Siły bezwładności w ruchu postępowym

Gdy prędkość kątowna układu $\omega = 0$, wówczas zgodnie z wzorem /16.11/ znikają siły styczne, dośrodkowa i Coriolisa. Pozostaje tylko siła bezwładności związana z przyspieszeniem translacyjnym.

$$F_0 = -ma_0$$

Równanie ruchu przybiera postać

$$ma = F - F_0$$

Obserwator w układzie nieinercjalnym odczuje działanie siły bezwładności równej iloczynowi masy ciała i przyspieszenia układu. Niezależnie przy tym od kierunku ruchu, siła bezwładności będzie zawsze skierowana przeciwnie niż przyspieszenie układu.

Jeśli układ posiada ruch postępowy po linii pionowej z przyspieszeniem a_w , wtedy stała ciężkości i siła unoszenia dają względną siłę:

$$ma = mg \pm ma_u = m(g \pm a_u)$$

znak + lub - stosuje się do tego, czy przyspieszenie unoszenia jest skierowane do góry czy też na dół. Człowiek znajdujący się w układzie względnym nie odczuwa ciężaru bezwzględny swego ciała, lecz siłę względną. Taką sytuację mamy np. podczas jazdy windą. Przy unoszeniu się windy doznajemy z początku wrażenia zwiększonego ciężaru ciała, które znika, w miarę jak ruch staje się jednostajny. Kiedy winda zwalnia swą prędkość przed zatrzymaniem odczuwamy pozorne zmniejszenia się ciężaru ciała. Jeżeli $a_u = g$ /spadek swobodny windy/, wówczas pozorny ciężar ciała $ma=0$ i mamy wówczas pozorny stan nieważkości.

Z dużymi wartościami sił bezwładności spotykają się lotnicy i kosmonauci. Gdy siły bezwładności, zwane przeciążeniami działają prostopadle do ciała w kierunku od piersi do pleców, organizm człowieka może znieść przyspieszenie około $7g \approx 69 \text{ m/s}^2$.

W ciągu 10 sek. lotnicy wytrzymują przyspieszenie $3 + 5g$.

Jeśli układ posiada ruch postępowy poziomy z przyspieszeniem a_u po poziomym prostym torze, to siła względna

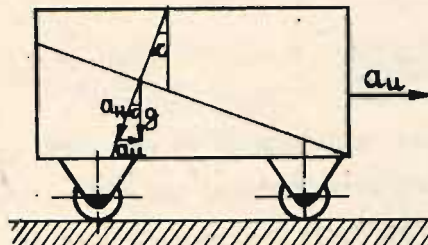
$$m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a}_u = m(\vec{g} - \vec{a}_u)$$

odchyla się od kierunku pionowego o kąt α określony wzorem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_u}{g}$$

Takim układem jest np. wóz kolejowy /rys.3.11/. Odnosnie do kierunku prędkości wystąpi odchylenie o kąt α wstecz lub naprzód zależnie od tego, czy kierunek przyspieszenia jest zgodny z kierunkiem prędkości czy też nie. Przy ruszaniu z miejsca pion odchyla się wstecz, a w miarę jak ruch staje się jednostajnym - odchylenie znika. Przy zwalnianiu jazdy występuje odchylenie w przód. Takie przyspieszenie występuje w hamującym samochodzie gdzie aby uniknąć kontuzji przy gwałtownym hamowaniu stosuje

się pasy bezpieczeństwa.

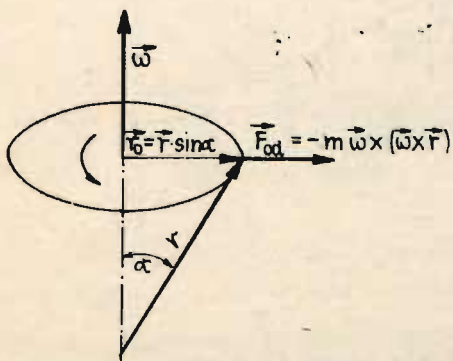


Rys. 3.11. Wóz kolejowy poruszający się z przyspieszeniem po poziomym torze prostoliniowym

11.1.2. Siły bezwładności w ruchu obrotowym

Gdy układ wiruje ze stałą prędkością $\omega = \text{const.}$ wówczas obserwator nieinercjalny odczuwa działanie siły odśrodkowej i siły Coriolisa. /rys. 4.11/.

Siła odśrodkowa



Rys. 4.11. Kierunek siły odśrodkowej