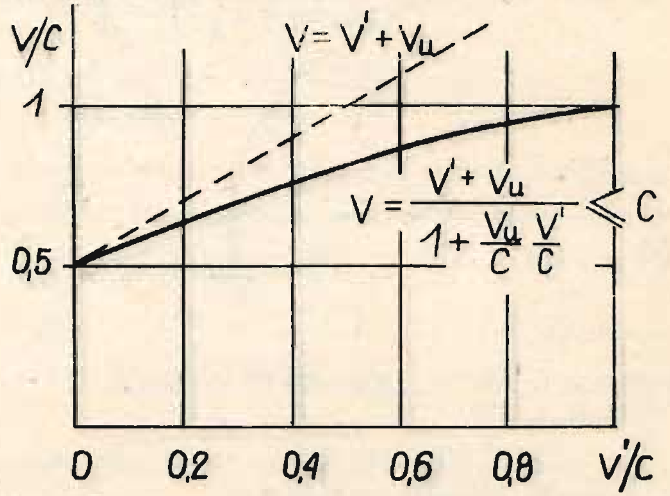
Warto zwrócić uwagę, że dla $\frac{V_u}{c} \ll 1$ otrzymamy równania mechaniki klasycznej. Jeśli prędkość $u'$ i $v_u$ są obydwie mniejsze od c, otrzymamy na $u$ również wartość mniejszą od c, jeśli natomiast $v'=c$, otrzymamy $v=c$. Prędkość światła jest zatem zgodnie z podstawowymi założeniami jednakowa w obydwu układach.




Rys. 3.1. Prawo dodawania prędkości

Na rys. 3.1. podano porównanie klasycznego /linia przerywana/ i relatywistycznego /linia ciągła/ prawa dodawania prędkości $V_u = 0{,}5c$. Wszystkie prędkości mają ten sam kierunek. Prędkość bezwzględna nie może przekroczyć wartości c.

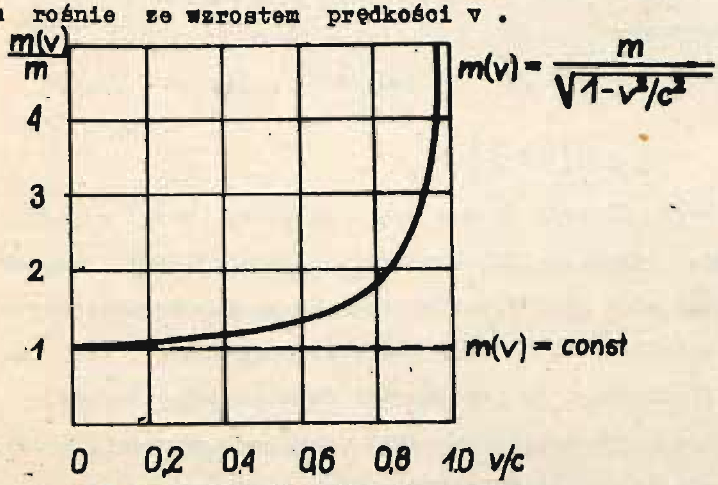
Z prawa składania prędkości wynika więc ważny wniosek: przez składanie prędkości mniejszych od prędkości światła nigdy nie otrzymamy prędkości większej od prędkości światła. A zatem żaden obiekt fizyczny choć byśmy rozpędzali go bez końca, nie nabędzie w wyniku stopniowego akumulowania przyspieszeń, prędkości większej od prędkości światła. Wnioskujemy stąd, że: prędkość światła jest maksymalną prędkością ruchu obiektów fizycznych

## 4.4. Zmiana masy pod wpływem prędkości

Wśród ważnych wniosków teorii względności należy wymienić w pierwszym rzędzie zależność masy ciała od prędkości. Jeżeli np. przez $m_0$ oznaczymy masę ciała w spoczynku, a przez m masę ciała w ruchu, to z rozważań teorii względności, których tu nie będziemy przytaczali ze względu na ich zbyt duży stopień trudności, wynika że:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad /1/$$

Jak wynika ze wzoru /1/ i obrazującym tą zależność rysunku 4.4. masa m rośnie ze wzrostem prędkości v .




Rys. 4.4. Zależność masy od prędkości

Dla małych prędkości v w porównaniu z prędkością światła c wzór daje:

$$m = m_0$$

Jeżeli jednak v przybiera wartości bliskie prędkości światła m zaczyna szybko wzrastać i tak np. dla $v = \frac{c}{2}$ masa jest już około 15% większa, niż masa spoczynkowa, dla prędkości v = 3/4 c przyrost wynosi już 50%, a dla v = c przybiera wartości nieskończenie duże.

## 4.5. Zjawisko Dopplera

Teoria względności pozwala również na wyprowadzenie dokładnego wzoru na zmianę częstotliwości fali wysyłanej przez źródło światła, poruszające się ruchem jednostajnym względem obserwatora.

Wzór ogólny /podany bez wyprowadzenia/daje:

$$\nu' = \nu \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad /1/$$

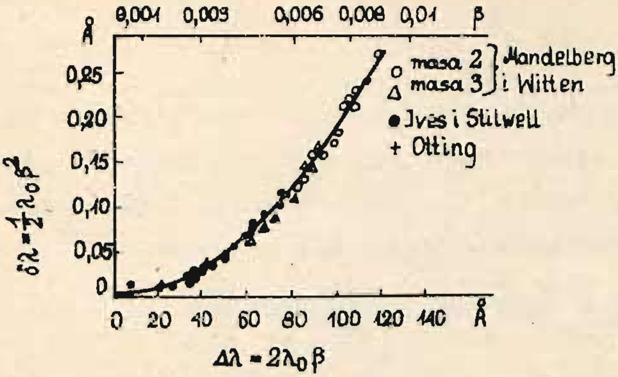
gdzie v - oznacza prędkość źródła światła, $\nu$ - częstotliwość drgań w układzie nieruchomym, $\nu'$ - częstotliwość światła w układzie ruchomym.

Dla $\frac{v}{c} \ll 1$ wzór /1/ przechodzi w znany wzór fizyki klasycznej

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

Warto zaznaczyć, że przy pomocy wzoru Dopplera można wyjaśnić zjawisko tzw. poczerwienienia galaktyk. Polega to na tym, że widma galaktyk są z reguły przesunięte w kierunku czerwieni ku falom dłuższym/ i że owo przesunięcie przynajmniej w pierwszym przybliżeniu jest proporcjonalne do odległości badanej galaktyki od nas. Z przesuwania się widma ku czerwieni, należy wnioskować, że wszystkie galaktyki oddalają się od naszej galaktyki i od siebie, z prędkościami proporcjonalnymi od długości dwóch danych galaktyk od siebie.

Na rys.5.4. przedstawiono wyniki doświadczeń nad efektem Dopplera. Linia ciągła przedstawia przewidywania szczególnej teorii względności. Jak widać z wykresu istnieje całkowita zgodność wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi.




Rys.5.4. Wyniki doświadczeń nad efektem Dopplera

## 5. Zasady Ruchu

### 5.1. Pęd i zasady dynamiki

Przy danych prędkościach ciał, zbliżonych do rzędu wielkości prędkości światła trzeba coraz większych sił, ażeby zmienić pęd danego ciała i wobec tego, żadnemu ciału nie można nadać prędkości większych od prędkości światła.

W związku ze zmianą masy, teoria względności daje następujące wyrażenie na pęd $\mathbf{p}$ cząstki o masie m, poruszającej się z prędkością v:

$$p = m \cdot v \qquad /1.5/$$

Równanie powyższe można interpretować, przyjmując, że pęd zawsze stanowi iloczyn masy i prędkości, przy czym masa m poruszającej się cząstki jest inna niż masa $m_0$ tej cząstki w stanie spoczynku tzn.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad /2.5/$$

W związku ze zmianą masy drugie prawo dynamiki można wyrazić w postaci:

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad /3.5/$$

Prawo to głosi, że jeśli na ciało działa siła, pęd ciała zmienia się; szybkość zmian pędu jest proporcjonalna do siły, a kierunek tych zmian jest taki sam jak kierunek działania siły. Równanie /2.5/ można napisać też w postaci:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = m\frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dm}{dt} \qquad /4.5/$$

Dla wartości $v \ll c$ otrzymujemy zgodnie z 2. że $m = m_0$, stąd możemy przyjąć stałość masy m i w tym wypadku

$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad /5.5/$$

Równanie /3.5/będzie więc miało postać

$$F = m\frac{dv}{dt} = m \cdot a \qquad /6.5/$$

Równanie /6.5/stanowi II zasadę dynamiki Newtona, która mówi: że siła działająca na ciało udziela temu ciału przyspieszenie, którego wielkość jest proporcjonalna do wielkości siły, a kierunek zgodny jest z kierunkiem jej działania.

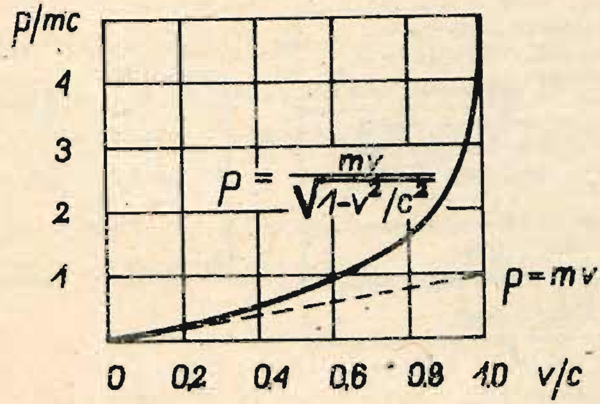
W szczególnym przypadku, gdy $\vec{F} = 0$, również i $\vec{a} = 0$ tzn. $a = \frac{dv}{dt} = 0$, co oznacza że $\vec{v} = \text{const}$. Mamy wówczas do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym lub spoczynkiem. Stąd można sformułować tzw. I prawo dynamiki Newtona:

Istnieje taki układ odniesienia, w którym ciało , na które nie działa żadna siła, pozostaje w spoczynku, lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Jeżeli równanie /3/ napisać w postaci

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

to wyraża ono ogólne twierdzenie o pędzie i popędzie, przy czym siła $\vec{F}$ nie musi być stała, a ruch może być zupełnie dowolny. Tak więc: przyrost pędu $d\vec{p}$ jakiegoś ciała równy jest udzielonemu temu ciału popędowi $\vec{F} \cdot dt$ i ma kierunek przyłożonej siły.

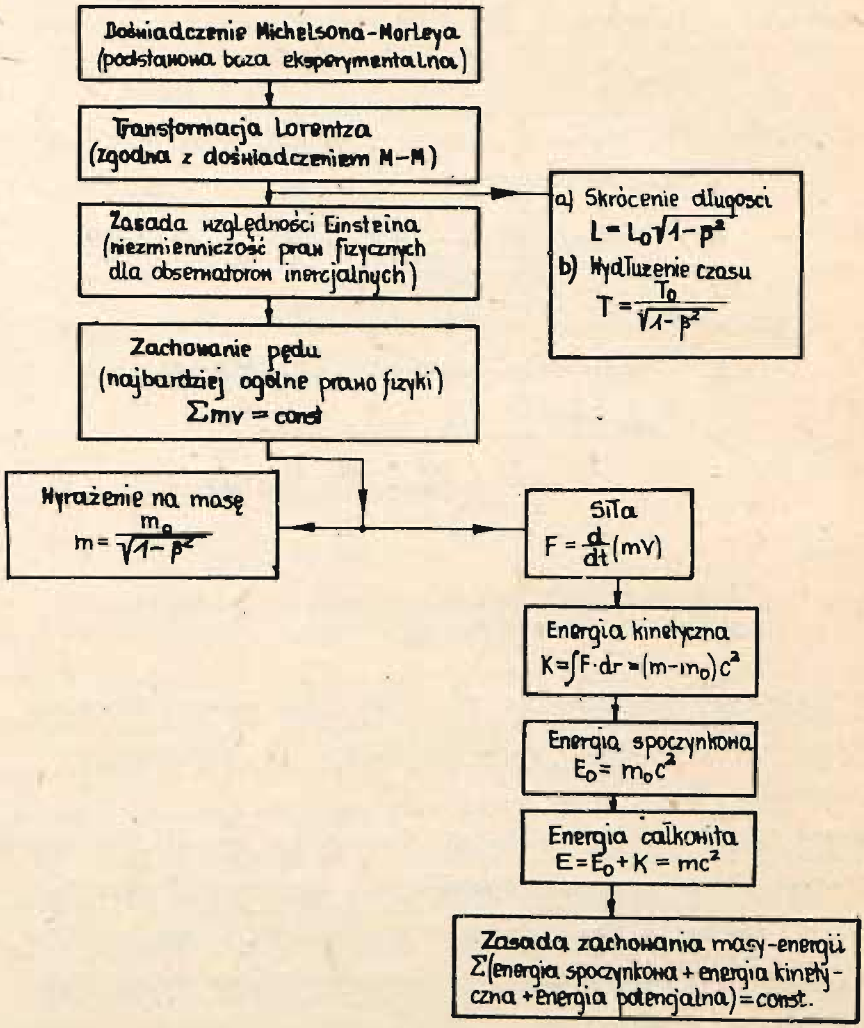



Rys. 1.5. Zależność pędu relatywistycznego i klasycznego w funkcji prędkości

Na rys. 1.5. przedstawiono zależność pędu relatywistycznego i klasycznego w funkcji prędkości. Dla v→c pęd dąży do nieskończoności.

Rozwój fizyki w ciągu ostatnich 50 - 75 lat sprawił, że uznano, iż stosowalność mechaniki Newtona jest ograniczona. Daje ona jednak wystarczający dokładny opis otaczających nas zjawisk, dopóty, dopóki zajmujemy się przedmiotami życia codziennego, tzn. dla mas większych od $10^{-6}$ g, wymiarów większych od 1 mikrona, a prędkości mniejszych od $10^{6}$ m/s.

W obszarach dużych prędkości, gdzie mechanika Newtona zawodzi w opisie zjawisk przyrody, z pomocą przychodzi szczególna teoria względności. Zachowanie ciał bardzo małych opisuje mechanika kwantowa.

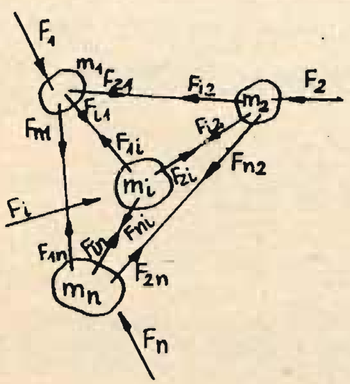



Tebela nr 1.5. Elementy szczególnej teorii względności i jej konsekwencji

W tabeli 1.5. zestawiono schematycznie elementy szczególnej teorii względności i jej konsekwencji.

5.2. Zasada zachowania pędu

Wyobraźmy sobie zbiór cząstek o masach $m_1$, $m_2$, $m_3$.... $m_n$. Niech na każdą z nich działają siły pochądzące od wszystkich pozostałych cząstek oraz siły, których źródła leżą poza tym zbiorem /Rys.2.5./. Siły z jakimi cząstki działają na siebie nawzajem, będziemy nazywać siłami wewnętrznymi, siły pochodzące spoza układu-siłami zewnętrznymi.




Rys. 2.5. Zbiór cząstek z działającymi siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi

W myśl zasady akcji i reakcji /III zasada dynamiki Newtona/ przyjmujemy następnie, że siły z jakimi działają nawzajem na siebie cząstki układu są równe i przeciwnie skierowane. Siły wewnętrzne będziemy zapisywać przy pomocy dwu wskaźników, siły zewnętrzne - jednego wskaźnika. Tak więc $F_{ij}$ oznacza siłę, z jaką cząstka i działa na cząstkę j, zaś Fi - wypadkową siłą wewnętrzną działającą na cząstkę i. Dla każdej z cząstek układu możemy napisać drugie prawo Newtona:

$$F_1 + F_{11} + \ldots + F_{1i} + \ldots + F_{1n} = \frac{dp_1}{dt}$$

$$F_i + F_{1i} + \ldots + F_{ii} + \ldots + F_{ni} = \frac{dp_i}{dt}$$

$$F_n + F_{1n} + \ldots + F_{in} + \ldots + F_{nn} = \frac{dp_n}{dt}$$

Dodajmy powyższe równanie stronami. Należy zwrócić przy tym uwagę, że Fij=-Fij, a zatem suma sił wewnętrznych jest równa zeru. Otrzymamy zatem

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \ldots + F_n = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2 \ldots + p_i + \ldots + p_n)$$

Suma wektorowa sił zewnętrznych, działających na układ cząstek jest równa prędkości zmiany całkowitego pędu układu. Wprowadzamy oznaczenia

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{oraz} \qquad p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

a zatem

$$F = \frac{dP}{dt}$$

Widzimy, że w szczególnym przypadku gdy F = 0 wektor P jest stały

$$\frac{dP}{dt} = 0 \qquad \text{stąd } P = \text{const.}$$

A zatem jeśli wypadkowe sił zewnętrznych działających na układ cząstek równa jest zeru, całkowity pęd układu jest stały. Twierdzenie to nosi nazwę prawa zachowania pędu.

Prawo zachowania pędu stosowano dla układów o różnych rozmiarach - od jądrowych do astronomicznych, do opisu zderzeń między protonami i elektronami, w zjawiskach życia codziennego. Nie wykryto nigdy żadnych odstępstw od tego prawa.

5.2.1. Ruch odrzutowy

Zasada zachowania pędu w szczególności jest podstawą ruchu odrzutowego. Pokażemy w jaki sposób znaleźć prędkość rakiety w zależności od zmiany jej masy. Oznaczmy przez $v$ prędkość rakiety w pewnej chwili $t$, a przez $M$ - zaś jej masę. Niech w chwili $t$ z dysz rakiety zaczną być wyrzucane gazy z prędkością $u$ względem rakiety. W ciągu $dt$ masa rakiety zmniejszy się i będzie równa $M - dM$ /gdzie $dM$ - masa wyrzuconego gazu/, jej prędkość zaś wzrośnie i będzie równa $v + dv$. Porównajmy teraz pędy układu: rakieta - wyrzucony gaz w chwili $t$ i $t + dt$. W chwili $t$ pęd jest równy $p = M.v$.
Pęd rakiety w chwili $t + dt$ jest równy

$$(M-dM)(v+dv)$$

pęd zaś wyrzuconego gazu wynosi

$$-dM(u-v)$$

gdyż prędkość gazu względem Ziemi jest oczywiście równa $u - v$. Zgodnie z zasadą zachowania pędu przyrównujemy do siebie wartości pędu układu w obydwu chwilach czasu, czyli

$$M\cdot v = (M-dM)(v+dv)-dM(u-v)$$

Skąd otrzymamy, zaniedbując mały człon drugiego rzędu $dM.dv \approx 0$:

$$Mdv-udM=0$$

lub inaczej

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{u}$$

Całkując stronami ostatnie równanie /przy założeniu, że z upływem czasu prędkość wyrzucanego gazu nie ulega zmianie/ otrzymamy

$$\ln M = \frac{v}{u} + \mathrm{const}.$$

Wartość stałej można określić z warunku początkowego, przyjmując, że przy starcie rakiety tzn. dla $v = 0$ masa rakiety jest równa Mo

$$\text{const} = \ln M_0$$

Podstawiając otrzymaną wartość stałej do uzyskanego związku znajdujemy

$$\ln M = \frac{v}{u} + \ln M_0$$

skąd

$$v = -u \cdot \ln \frac{M_0}{M}$$

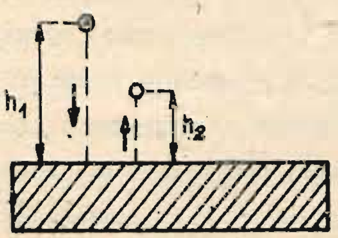
Znak minus wskazuje, że kierunek prędkości rakiety jest przeciwny do prędkości wyrzucanych gazów. Jeśli uwzględnić siły zewnętrzne, opór powietrza i przyciągania ziemskiego, to końcowa prędkość byłaby mniejsza.

## 5.3. Zderzenie sprężyste i niesprężyste

Zasady zachowania energii i pędu można wykorzystać w celu znalezienia związków między różnymi wielkościami w przypadku zderzeń zachodzących między ciałami np. zderzeń sprężystych, podczas którego ciała po pewnym zbliżeniu się do siebie oddalają się znów od siebie, bez zmiany swego stanu wewnętrznego. Zderzenia podczas których zmienia się stan wewnętrzny ciał, noszą nazwę zderzeń niesprężystych. Zderzenia zwykłych ciał zachodzące w normalnych warunkach są prawie zawsze w mniejszym lub większym stopniu niesprężyste.

W chwili obecnej zagadnienie zderzeniowe i uderzeniowe zajmują w technice poczesne miejsce. W obciążeniach uderzeniowych zawsze pojawiają się tzw. odkształcenia plastyczne /tzn.trwałe/, przy powstawaniu których praca zużyta na przeprowadzenie odkształcenia zamienia się w ciepło. Pociąga to za sobą niemożność stosowania zasady zachowania energii mechanicznej. Podczas uderzenia np. siły działają w czasie nieskończenie krótkim, ale za to wartość ich rośnie do nieskończoności, dlatego przy zagadnieniach uderzeniowych posługujemy się nie pojęciem siły, a pojęciem impulsu. W celu określenia, w jakim stopniu energia przy uderzeniu zmienia się na ciepło, albo inaczej jaki udział mają odkształcenia plastyczne w ogólnym obrazie odkształceń, wprowadzamy liczbę zwaną współczynnikiem restytucji. Wynosi ona $k = 1$ przy uderzeniu doskonale sprężystym, i $k = 0$ przy uderzeniu doskonale plastycznym. Współczynnik restytucji zależy od wielu czynników: prędkości v, promienia zaokrąglenia kulki, masy o którą zostaje uderzona kulka itp. Doświadczalnie współczynnik k wyznacza się przez opuszczenie kulki z badanego materiału na masywną płytę również z odpowiedniego materiału. /rys.3.5./.

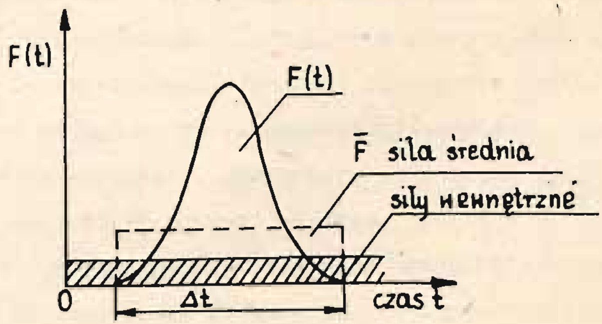
$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$




Rys. 3.5. Wyznaczenie współczynnika restytucji

### 3.3.1. Czas zderzenia

Podczas zderzenia na oba ciała zderzające działają na ogół znaczne siły. Występują one jednak tylko w określonym przedziale czasu $\Delta t$ zwanym czasem zderzenia. Można przyjąć, że poza tym przedziałem czasu siły oddziaływania mają tak małe wartości, że można je pominąć. Tego rodzaju siły, jakie zachodzą podczas zderzenia nazywamy siłami impulsowymi lub zderzeniowymi, a ich zależnośćod czasu przedstawiono na rys. 4.5.

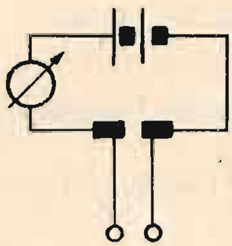



Rys. 4.5. Siła działająca podczas zderzenia

Siły zewnętrzne działające na zderzające się ciała mogą mieć różne wartości i niekoniecznie muszą się znosić.
Na ogół jednak siły te są małe w porownaniu z działającymi w czasie zderzenia siłami impulsowymi. Zmiana ruchu zderzających się ciał zachodzi pod wpływem sił zderzeniowych. Nie popełniamy dużego błędu, jeżeli siły zewnętrzne w zupełności zaniedbamy. Dochodzimy więc do ważnego wniosku: jeżeli czas zderzenia jest mały, to do zderzeń możemy stosować zasady zachowania energii i pędu, traktując zderzające się ciała jako, układ odosobniony.
Z II-ej zasady dynamiki wynika, że zmiana pędu ciała, na które działa siła impulsowa w czasie zderzenia $\Delta t$ wyraża się następującym wzorem:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}(t)\cdot\Delta t$$

Im krótszy czas zderzenia, z tym lepszym przybliżeniem możemy przyjąć, że siły zewnętrzne są małe w porównaniu z siłą impulsową, a więc, że układ zderzających się ciał jest układem odosobnionym.
Zderzenie nie jest zjawiskiem momentalnym lecz wymaga pewnego czasu, który możemy wyznaczyć doświadczalnie wg schematu pokazanym na rys. 5.5.



Rys. 5.5. Pomiar czasu zderzenia

Wielkość wychylenia wiązki świetlnej odbitej od zwierciadła np. galwanometru wykaże nam czas zetknięcia.
Np. dwie kule o średnicach Ø 13 mm każda, zderzające się z prędkością $v = 74$ mm/s pozostają w zetknięciu przez $1,8.10^{-4}$s, przy prędkości 295 mm/s czas zetknięcia jest krótszy i wynosi $1,38.10^{-4}$s.

## 5.4. Równanie ruchu

Podstawowe znaczenie drugiej zasady dynamiki Newtona polega na możliwości wyznaczenia równania ruchu. Jeśli znamy siłę, najczęściej jako funkcję czasu, prędkości przyspieszenia i położenia tzn. $F = F(r, v, t)$, to na podstawie drugiej zasady napisanej w formie

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{m} F(r, v, t)$$