ZYGMUNT ZAWISŁAWSKI

FIZYKA

dla potrzeb Wydziału Geodezji i Kartografii

część V

INSTYTUT FIZYKI POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
WARSZAWA 1982 r.

Spis treści:

1. Inercjalny układ odniesienia

Na podstawie obserwacji można ustalić, że bezpośrednią przyczyną przyspieszeń są wzajemne oddziaływania danego ciała z innymi ciałami, znajdującymi się w bliższej lub dalszej odległości, np. oddziaływania grawitacyjne, oddziaływania elektrostatyczne, magnetyczne itp. Oznacza to, że na podstawie położenia danego ciała względem innych ciał w otoczeniu oraz na podstawie właściwości tych ciał określamy wielkość oddziaływań. Z tego widać, że określenie położenia ciała względem innych ciał, to znaczy wskazanie układu odniesienia, względem którego badamy położenie ciała, gra istotną rolę. Opis ruchu ciała wypada zupełnie inaczej, zależnie od tego, czy odniesiemy ten ruch do układu poruszającego się względem Ziemi, czy do układu związanego z Ziemią lub Słońcem i posuwającego się razem z nimi. Na ogół jednak, przy wyborze układu odniesienia ograniczamy się do żądania, aby układ był inercjalny. Układ inercjalny jest to taki układ, w którym spełnione jest pierwsze prawo dynamiki Newtona. Cząstkę spoczywającą w pewnej chwili w układzie inercjalnym będzie można zawsze odnaleźć w tym samym miejscu. Jeśli zaś cząstka będzie się poruszała, jej współrzędne umieszczone w tym układzie, będą spełniały równanie linii prostej, a jej ruch po tej prostej będzie zachodził ze stałą prędkością. Jeśli zaś cząstka, ani nie porusza się po linii prostej, ze stałą prędkością, ani nie pozostaje w miejscu, to układ odniesienia nie jest układem inercjalnym. Doświadczenie wykazało, że newtonowski układ odniesienia związany z gwiazdami jest układem inercjalnym. Układ odniesienia związany z Ziemią nie jest układem inercjalnym, tak ze względu na obrót Ziemi wokół osi, jak na jej obrót wokół Słońca. Jednak przy takiej dokładności pomiarów z jaką wykonuje się większość doświadczeń, nieinercjalność układu odniesienia związanego z Ziemią nie ma istotnego wpływu na wynik doświadczenia. Obrót ten nadaje laboratorium małe przyspieszenie, które nie we wszystkich przypadkach można pominąć. Punkt będący w spoczynku na powierzchni Ziemi na równiku musi doznawać przyspieszenia dośrodkowego, które wyraża się wzorem

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

i skierowane jest do środka /ω = $2\pi t$ prędkość kątowa Ziemi, R_2- promień Ziemi/.
Ponieważ Ziemia obraca się 2π radianów na dobę /doba = $8,6.10^4$s/, wobec tego prędkość kątowa Ziemi wyniesie:

$$\omega = \frac{2\pi}{8,6\cdot 10^4 s} \approx 0,73\cdot 10^{-4} s^{-1}$$

Po podstawieniu $R_2 = 6,4.10^8$cm otrzymamy przyspieszenie $a = /0,73.10^{-4}/^2 . /6,4.10^8/ \approx 3,4$ cm/s^2.
To stanowi znaczną część różnicy, o którą obserwowane przyspieszenie grawitacyjne na biegunie północnym jest większe od przyspieszenia grawitacyjnego na równiku. Reszta różnic w przyspieszeniu na powierzchni Ziemi /pomijając małe anomalie lokalne/ jest spowodowana jej kształtem elipsoidalnym.
Całkowita różnica między przyspieszeniem na biegunie północnym /względnie południowym/ i na równiku wynosi 5,2 cm/s^2.
Przyspieszenie jakie doznaje Ziemia w ruchu po orbicie dookoła Słońca jest o jeden rząd wielkości mniejsze od przyspieszenia wywołanego przez obrót Ziemi

$$\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{rok}} = \frac{2\pi}{3\cdot 10^7 s} \approx 2\cdot 10^{-7} s^{-1}$$

Przyspieszenie dośrodkowe dla $R \approx 1,5.10^{13}$ cm wynosi

$a = (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{13}) \approx 0{,}6\ cm/s^2$

Tyle wynosi przyspieszenie Ziemi na jej orbicie dookoła Słońca.

Przyspieszenie Słońca w kierunku środka naszej Galaktyki nie jest znane z doświadczenia. Prędkość Słońca względem środka Galaktyki oszacowano na około $v = 3 \cdot 10^7 cm/s$. Słońce porusza się po promieniu $R = 3 \cdot 10^{22} cm$, to przyspieszenie dośrodkowe Słońca względem środka Galaktyki wynosi

$a = \omega^2 R = \frac{(3 \cdot 10^7)^2}{3 \cdot 10^{22}} \approx 3 \cdot 10^{-8}\ cm/s^2$, a więc jest bardzo małe.

Z praktyki wiemy, że podstawowe założenia mechaniki klasycznej są bardzo dobrze spełnione przy założeniach:

1. przestrzeń jest euklidesowa
2. przestrzeń jest izotropowa, tzn. że jej własności fizyczne są jednakowe we wszystkich kierunkach
3. prawa ruchu Newtona są słuszne w układzie inercyjnym, określonym dla obserwatora będącego w spoczynku na Ziemi, przy założeniu, że uwzględnia się tylko przyspieszenie Ziemi dookoła jej osi i na jej orbicie dookoła Słońca.

2. Podstawy szczególnej teorii względności

Według Einsteina absolutna przestrzeń i czas nie istnieją, a nawet gdyby istniały, byłyby dla nas niespostrzegalne. Możemy obserwować tylko ruchy względne, odnoszące się do układów inercjalnych, tzn. poruszających się prostoliniowo i jednostajnie.

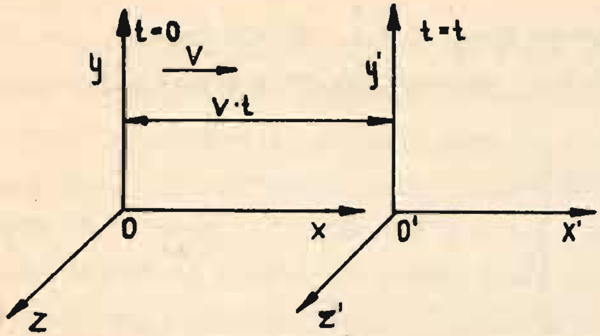
Podstawowymi założeniami tej teorii są:

1. Stałość prędkości światła. Prędkość światła w próżni odniesiona do jakiegokolwiek układu inercjalnego jest niezależna od ruchu tego układu.
2. Identyczne zjawiska fizyczne zachodzące w tych samych warunkach w różnych inercjalnych układach odniesienia

przebiegają w identyczny sposób.
Przy tych założeniach wszystkie prawa fizyczne zachowują swoją postać niezależnie od tego, względem którego z układów je określamy, są we wszystkich układach inercjalnych niezmienne. Te myśli stanowią trzon głównej zasady szczególnej teorii względności.
W myśl tej zasady prawa fizyki wprowadzone raz dla jednego układu inercjalnego bez żadnej zmiany mogą być stosowane w każdym innym układzie inercjalnym. Zarówno postać praw fizyki jak i wartości liczbowe stałych fizycznych występujących w tych pracach są takie same w każdym układzie inercjalnym. W formie przeczącej zasada względności ma postać następującego twierdzenia: prawa fizyki nie mogą służyć do odróżnienia jednego układu inercjalnego od drugiego.

3. Transformacja Galileusza

Transformacja Galileusza pozwala na powiązanie ruchów obserwowanych w dwu różnych układach inercjalnych. Zakładamy, że układ O'/rys. 1.1./ porusza się względem układu O ze stałą prędkością v. Z układami tymi wiążemy układy współrzędnych prostokątnych, przy tym dla uproszczenia oba układy dobieramy tak, aby osie x i x' pokrywały się z kierunkiem ruchu układu $O'x', y', z'$, względem układu O x y z. Czas zaczniemy liczyć od chwili pokrywania się punktów O i O'. Każde zdarzenie można w danym układzie opisać, podając czwórkę liczb - trzy współrzędne punktu, oraz czas t, w którym to zdarzenie zaszło. Obserwator z układu O pewnemu zdarzeniu przypisze czwórkę liczb x,y,z,t, a obserwator z układu O' przypisze temu samemu zdarzeniu czwórkę liczb x', y', z', t'. Oba wyniki obserwacji łatwo



Rys. 1.1. Inercjalne układy udniesienia

powiązać, jeśli się zauważy, że ruchomy obserwator poruszając się wraz z układem O' z prędkością v w czasie t przesunął się na odległość v.t. Ponieważ współrzędne y, y', z, z' są identyczne, a czas w mechanice newtonowskiej "płynie " identycznie w obu układach, obserwator O powiąże wyniki swego pomiaru z wynikami obserwatora O' w następujący sposób:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \qquad /1.3./$$

Rozumując analogicznie, obserwator O' otrzyma następujące wyniki

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \qquad /2.3/$$

Obie czwórki związków, noszące nazwę transformacji Gallileusza dają możliwość przejścia od współrzędnych danego punktu w jednym układzie, do współrzędnych w drugim układzie.

Różniczkując powyższe wzory /1.3 i 2.3/ stwierdzamy, że współrzędne prędkości transformują się w sposób następujący:

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \\ v_y' &= \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad /3.3/$$

Z powyższych równań wynika, że prędkości zmierzone przez obu obserwatorów nie są równe, różnią się o v. Zatem prędkość nie pozostaje niezmienna przy transformacji Galileusza.
Różniczkując ponownie wzory /3.3/ znajdujemy związki między współrzędnymi przyspieszenia

$$\left.\begin{aligned} a_x' &= \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y' &= \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z' &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad /4.3/$$

Zatem przyspieszenie jest niezmiennikiem transformacji Galileusza.
Również odległość między dwoma punktami jest niezmiennicza przy transformacji Galileusza z jednego układu inercjalnego do drugiego.

4. Transformacja Lorentza

Fizykę przed-relatywistyczną interesowały najbardziej obiekty fizyczne oraz ich konfiguracje - stąd jej narzędziem była geometria - nauka o relacjach przestrzennych między obiektami zaś jej pojęciem wyjściowym trójwymiarowa przestrzeń, w której poruszają się obiekty. Punkt wyjścia szczególnej teorii względności jest inny. Bierze ona pod uwagę, że istniejemy nie tyle wśród obiektów fizycznych co raczej wśród zjawisk. Każde zjawisko rozciągłe jest zarówno w przestrzeni jak i w czasie i uważać je możemy za złożone z mnogości elementarnych zdarzeń zajmujących nieskończenie mało miejsca oraz trwających nieskończenie krótko. Na podobnej zasadzie obszar rozciągły można uważać za złożony z punktów. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy czasoprzestrzenia, podobnie jak zbiór miejsc /punktów/ nazywa się przestrzenią. Czasoprzestrzeń jest podstawowym pojęciem teorii względności. Czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa, w odróżnieniu od przestrzeni, która jest trójwymiarowa.

Rozpatrzmy zdarzenia X_1 i X_2 polegające na emisji i detekcji pewnego sygnału świetlnego. Niech na skali obserwatora O emisji X_1 ma współrzędne t, x,y,z zaś detekcja X_2 współrzędne t_2, x_2, y_2, z_2. A zatem z punktu widzenia obserwatora O sygnał przebył drogę $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ w czasie $t_2 - t_1$. Ponieważ wiadomo, że prędkość sygnału wynosi c , a więc następująca wielkość musi być zerem.

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \qquad /1.4./$$

Rozpatrzmy to samo zdarzenie na skali współrzędnych obserwatora O'. Będą one miały nowe współrzędne (t', x', y', z') i (t_2', x_2', y_2', z_2'). Ale wiemy, że obserwator O' mierząd prędkość sygnału także otrzyma wynik c. A więc współrzędne obserwatora O' są takie, że również następująca wielkość znika.

$$c^2(t_2'-t_1')-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2 \qquad /2.4/$$

Skoro dwa wyrażenia /1.4/ i 2.4/ kwadratowe o zmiennych Δt, Δx, Δy, Δz i $\Delta t'$, $\Delta x'$, $\Delta y'$, i Δz mają te same miejsca zerowe, to wyrażenia te muszą być proporcjonalne

$$c^2t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=\left(c\Delta t'^2-\Delta x'^2-\Delta y'^2-\Delta z'^2\right)\cdot k \qquad /3.4/$$

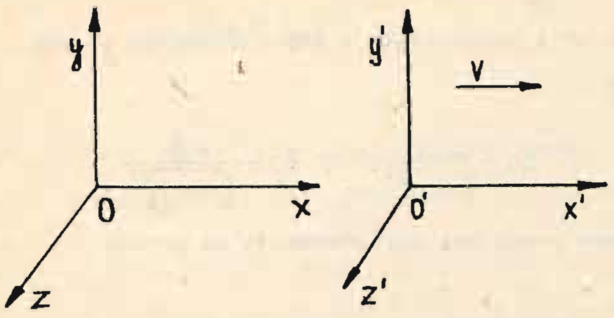
Gdy układy te są identyczne, wówczas $\Delta t'=\Delta t$, $\Delta x'=\Delta x$, $\Delta y'=\Delta y$, $\Delta z'=\Delta z$ i $k=1$. Z ciągłości wnioskujemy, że również w ogólnym przypadku $k=1$. Wzór /3.4/ przybiera postać:

$$c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2-\Delta y'^2-\Delta z'^2 \qquad /4.4/$$

Dla dowolnej pary zdarzeń x_1, x_2 zdefiniujemy teraz wielkość S jako:

$$S=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2} \qquad /5.4/$$

Wielkość ta nazywana jest interwałem pary X_1 X_2. Wzór /5.4/ oznacza tylko, że interwał ma charakter bezwzględny. Możemy go zbudować we współrzędnych zdarzeń X_1, X_2 w dowolnym układzie inercjalnym i zawsze dostaniemy to samo. Transformacja wiążąca współrzędne t', x', y', z' ze współrzędnymi t, x, y, z jest takiej natury, że zgodnie ze wzorem /4.4/ nie zmienia wartości interwału. Transformacje liniowe, dla których spełniony jest warunek /5.4/ noszą nazwę transformacji Lorentza. Tak więc, gdy układy poruszają się z dużymi prędkościami, transformację Galileusza zastępujemy transformacją Lorentza.
Niech O i O' będą obserwatorami inercjalnymi i załóżmy, że układ obserwatora O' porusza się względem układu O z prędkością v w kierunku równoległym do osi x-ów /rys. 2.1/.



Rys.2.1.

Ponieważ chodzi o sytuację przedstawioną na rys. 2.1. szukamy takiej transformacji dla której $y' = y$, $z = z'$.

Ponieważ transfotmacja ta jest liniowa więc ma ogólną postać

$$t' = A_1 t + A_2 x + A_3 y + A_4 z$$
$$x' = B_1 t + B_2 x + B_3 y + B_4 z$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

stąd

$$\Delta t' = A_1 \Delta t + A_2 \Delta x + \Delta y A_3 + A_4 \Delta z$$
$$\Delta x' = B_1 \Delta t + B_2 \Delta x + B_3 \Delta y + B_4 \Delta z$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

Wstawiając te dane do wyrażenia po prawej stronie równania /4.4/ i porównując podobne wyrazy po obu stronach dostajemy:

$$A_3 = A_4 = B_3 = B_4 = 0$$
$$c^2 A_1^2 - B_1^2 = c^2$$
$$c^2 A_2^2 - B_2^2 = -1$$
$$c^2 A_1 A_2 - B_1 B_2 = 0$$

/5.4/

Ostanie równnanie powoduje, że

$$\frac{B_1}{A_1} = c^2 \frac{A_2}{B_2}$$

Oznaczając $\frac{B_1}{A_1} = -V$ i korzystając z dwu pierwszych równań /6.4./ dostajemy:

$$A_1 = B_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad B_1 = \frac{-V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad A_2 = \frac{-\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

a zatem poszukiwana przez nas transformacja ma postać

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \qquad /7.4/$$

Są to słynne przekształcenia podane przez Lorentza, a uzasadnione i wyprowadzone przez Einsteina.

Przekształcenia te dla małych prędkości V przechodzą przekształcenia Galileusza, gdyż $\frac{V^2}{c^2} \to 0$. Ponieważ w ruchach przez nas obserwowanych w codziennym życiu $\frac{V}{c} \ll 1$, przeto praktycznie rzecz biorąc mamy prawie zawsze do czynienia z przekształceniami Galileusza. Jednak w przypadkach fizyki atomowej, a w szczególności fizyki jądrowej, gdzie prędkości cząstek elementarnych są bardzo duże, poprawki wprowadzone przez przekształcenia Lorentza grają bardzo ważną rolę. Także przekształcenie to znajduje zastosowanie w zjawiskach astrofizycznych.

4.1. Względność długości

Długość jakiegoś ciała, mierzona w dwóch różnych układach znajdujących się względem siebie w ruchu, będzie również wydawała się niejednakowa.

Korzystając z wzorów /7.4/ otrzymamy:

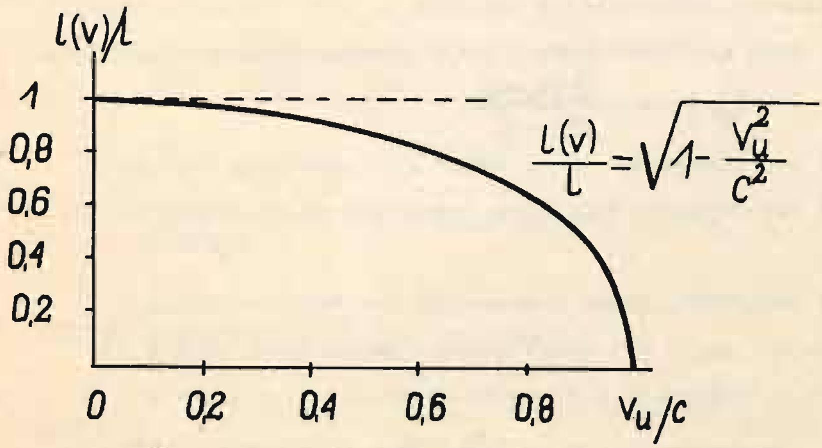
$$x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad x_1' = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1)}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad ; \qquad \text{dla } t_2 = t_1$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \text{ jeśli } \quad x'_2 - x'_1 = L_0 \quad i \quad x_2 - x_1 = L$$

$$L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad /8.4/$$

otrzymamy wzór /8.4/ który mówi, że dla obserwatora nieruchomego wymiary długości w kierunku jego ruchu V_u ulegają skróceniu /rys. 1.4/.



Rys. 1.4. Srócenie wymiarów długości w funcji prędkości v_u.

Wymiary długości w kierunku prostopadłym nie ulegają zmianie, tak np. ciało, które dla obserwatora nieruchomego wydaje się jako kula, dla obserwatora ruchomego staje się spłaszczoną elipseidą.

4.2. Względność czasu

Rozważmy np. dwa zdarzenia odbywające się w układzie O w czasach t_1, t_2 w punktach x_1 i x_2. Zgodnie z równaniami /7.4/ otrzymamy dla układu O':

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

tzn., że różnica czasu pomiędzy tymi dwoma zdarzeniami nie będzie w obydwu układach niejednakowa i będzie zależała od miejsca, w którym one zachodzą, mianowicie:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad /9.4/$$

Dwa zdarzenia jednoczesne w układzie O, tzn. takie dla których $t_1 = t_2$ będą niejednoczesne i będą przedzielone odstępem czasu.

$$t_2' - t_1' = -\frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

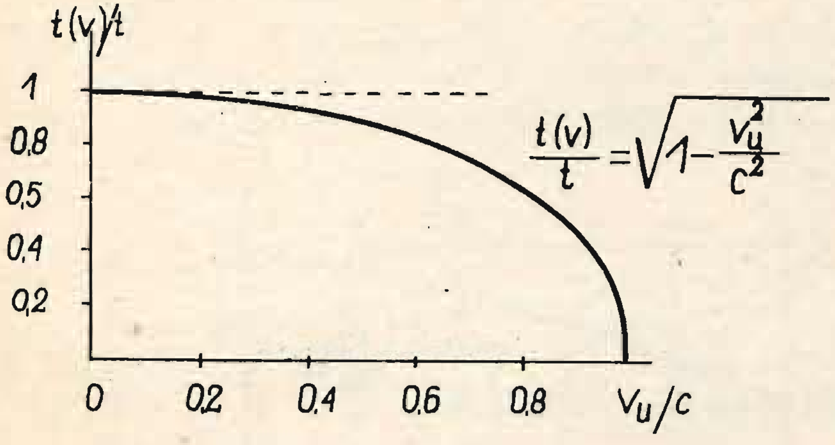
Pojęcie jednoczesności traci zatem swój absolutny charakter i staje się pojęciem względnym, uzależnionym od układu odniesienia.

W innym przypadku, jeśli rozpatrzymy dwa kolejne zdarzenia rozgrywające się w tym samym punkcie przestrzeni $/x_2 = x_1/$ w układzie O, otrzymamy z równania /9.4/

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{tzn.} \quad \underline{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad /10.4/$$

Zatem odstępy czasu $\Delta t' = t_2' - t_1'$ będą dla obserwatora ruchomego rozciągały się np. dwa zegary jednakowe znajdujące się jeden w układzie O, a drugi w układzie O' będą z punktu widzenia obserwatora związanego z jednym układem lub też drugim chodziły niejednakowo. Stąd wniosek, że jeśli będziemy obserwowali obrót wskazówek zegara, który porusza się względem nas, to obrót ten przedstawia się nam spowolnionym. Efekt ten nazywa się "dylatacją czasu". Czas zatem staje się pojęciem względnym.

Na rys. 2.4 przedstawiono dylatację czasu t /v/ zależności od prędkości układu v_u.



Rys. 2.4. Dylatacja czasu w zależności od prędkości układu v_u .

4.3. Dodawanie prędkości w teorii względności

Wiadomo, że prędkości są wielkościami wektorowymi, stąd zgodnie z mechaniką Newtona można je dodawać wg ogólnego wzoru:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V_u}$$

Jeśli ruch odbywa się wzdłuż jednego kierunku np. osi x-ów, to równanie wektorowe można sprowadzić do równania zwykłego

$$V = V' + V_u$$

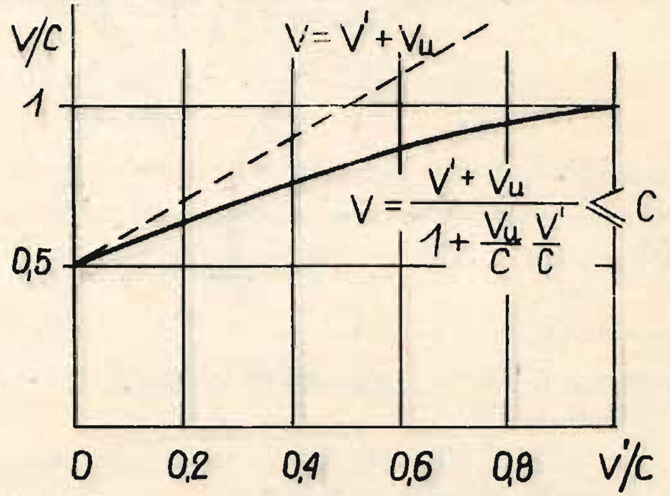
Wówczas $v' = \frac{x'}{t'}$ /ciało w układzie O' porusza się z prędkością v'/. Prędkość tego ciała dla obserwatora związanego z układem nieruchomym O będzie:

$$V = \frac{x}{t} = \frac{x' + V_u \cdot t}{t' + \frac{x' V_u}{c^2}}$$

Stąd po podzieleniu przez czas t' otrzymamy

$$V = \frac{v' + V_u}{1 + \frac{V_u \cdot v'}{c^2}}$$

Warto zwrócić uwagę, że dla $\frac{V_u}{c} \ll 1$ otrzymamy równania mechaniki klasycznej. Jeśli prędkość u' i v_u są obydwie mniejsze od c, otrzymamy na u również wartość mniejszą od c, jeśli natomiast $v'=c$, otrzymamy $v=c$. Prędkość światła jest zatem zgodnie z podstawowymi założeniami jednakowa w obydwu układach.



Rys. 3.4. Prawo dodawania prędkości

Na rys. 3.4. podano porównanie klasycznego /linia przerywana/ i relatywistycznego /linia ciągła/ prawa dodawania prędkości $V_u = 0{,}5c$. Wszystkie prędkości mają ten sam kierunek. Prędkość bezwzględna nie może przekroczyć wartości c.

Z prawa składania prędkości wynika więc ważny wniosek: przez składanie prędkości mniejszych od prędkości światła nigdy nie otrzymamy prędkości większej od prędkości światła. A zatem żaden obiekt fizyczny choć byśmy rozpędzali go bez końca, nie nabędzie w wyniku stopniowego akumulowania przyspieszeń, prędkości większej od prędkości światła. Wnioskujemy stąd, że: prędkość światła jest maksymalną prędkością ruchu obiektów fizycznych

4.4. Zmiana masy pod wpływem prędkości

Wśród ważnych wniosków teorii względności należy wymienić