

Podstawiając /9.9/ do /8.9/ otrzymamy

$$\vec{k} = 2m \frac{d\vec{s}}{dt}$$

gdzie wielkość

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{dl}| \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2m} \cdot \vec{k}$$

/10.9/

nosi nazwę prędkości polowej i wskazuje jaką powierzchnię zakreśla promień wodzący \vec{r} w jednostce czasu.

Z /10.9/ wynika, że gdy $\vec{k} = \text{const.}$ do $\frac{d\vec{s}}{dt} = \text{const.}$

9.3. Prawa Keplera

Obserwacje ruchu planet pozwoliły Keplerowi na sformułowanie trzech ważnych praw dotyczących tych ruchów. Odegrały one potem istotną rolę w odkryciu prawa powszechnego ciążenia. Zagadnienie ruchu planet z dobrym przybliżeniem możemy sprowadzić do zagadnienia ruchu punktu materialnego /planety/ w polu centralnym z centrum w ośrodku Słońca. Na przybliżenie takie pozwalają małe masy planet w stosunku do masy Słońca i ich duża odległość od Słońca w porównaniu z rozmiarami własnymi.

I. Pierwsze prawo Keplera głosi: planety poruszają się po

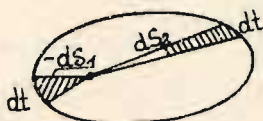
elipsach, a Słońce znajduje się w jednej z ognisk każdej elipsy

Można udowodnić, że cząstki w polu centralnym poruszają się po krzywych stożkowych, czyli po liniach uzyskanych przez różne płaskie przekroje powierzchni stożkowej.

II. Prawo Keplera: promień wodzący skierowany od Słońca do planety zakreśla w różnych odstępach czasu równe pola.

Prawo to jest po prostu twierdzeniem o stałości prędkości kątowej. /rys. 8.9/ tzn. dla $\vec{k} = \text{const.}$ wynika, że $\frac{d\vec{s}}{dt} = \text{const.}$

tn. $ds_1 = ds_2 = ds = \text{const.}$



Rys. 6.9. Ilustracja II-go prawa Keplera

III-cie prawo Keplera: kwadraty okresów dwu dowolnych planet mają się do siebie jak trzecie potęgi wielkich półosi ich orbit.

W przypadku ruchu po torze kołowym iloczyn przyspieszenia dośrodkowego a_r i masy planety powinien być wtedy równy sile jej przyciągania przez Słońce tzn.

$$ma_r = m \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę dwie różne planety o torach kołowych z różnymi promieniami i różnymi okresami obiegu, to z wyrażenia powyższego wynikają następujące równości.

$$v_1^2 = G \cdot \frac{M}{r_1} \quad ; \quad v_2^2 = G \cdot \frac{M}{r_2}$$

ale $v = \frac{2\pi r}{T}$, skąd otrzymamy po podstawieniu i podzieleniu stronami otrzymanych równań

$$\frac{T_1^3}{r_1^3} = \frac{T_2^3}{r_2^3}$$

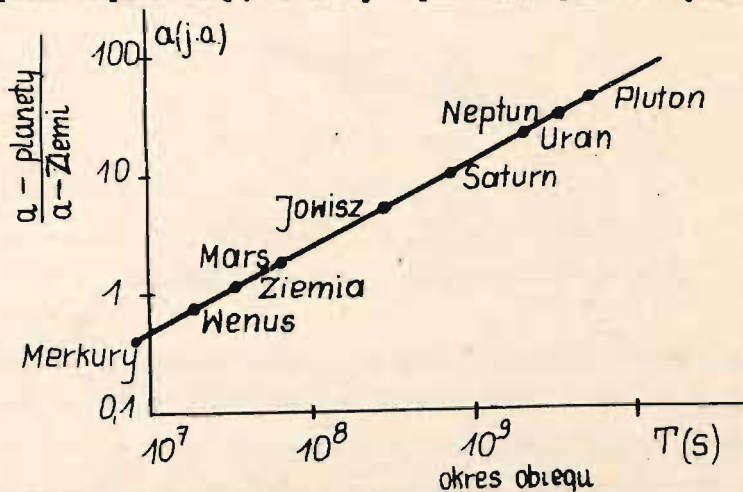
Zależność ta jest słuszna także dla torów eliptycznych i wyraża III-cie prawo Keplera.

OdhYLENIE OD PRAWA KEPLERA, jakie można zaobserwować wynikają zasadniczo z dwóch przyczyn.

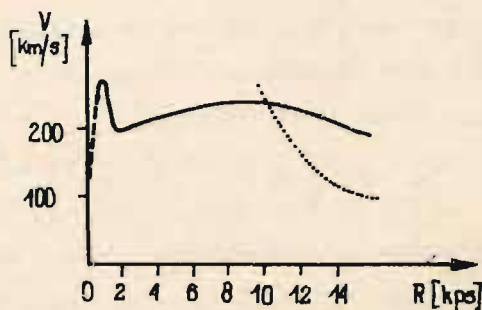
Po pierwsze: planety nie są punktami materialnymi.

Po drugie: Istnieje wpływ zakłócenia wywołanych przez pola grawitacyjne pozostałych planet.

Mimo to prawa Keplera dają dokładny opis ruchu planet /rys. 7.9/.



Rys. 7.9 . Zależność między dużą półosią orbity w jednostkach średniej odległości Ziemi od Słońca od okresu obiegu w sekundach



Rys. 8.9. Krzywa rotacji Galaktyki

Na rys. 8.9. przedstawiona jest zależność prędkości rotacji w funkcji odległości od środka Galaktyki, tzw. krzywa rotacji Galaktyki. Jak widać z przebiegu krzywej prędkość obrotu Galaktyki inaczej /wolniej/ zmienia się w miarę oddalania

się od centrum niż wynika to z III-go prawa Keplera /linia kropkowana/. Jest to spowodowane tym, że większość masy Galaktyki znajduje się poza jej jądrem i że znaczna jej część rozmieszczona jest w dysku. Na podstawie obserwacji rotacji Galaktyki w różnych odległościach od środka można wnosić o rozkładzie w niej masy.

9.4. Ruchy sztucznych satelitów

Ruchy sztucznych ciał niebieskich takich jak sztuczne satelity, sady międzyplanetarne, również podlegają w przybliżeniu prawom ruchu środkowego.

Aby sztuczny satelita mógł obiegać Ziemię po torze kołowym o promieniu r_0 , siła przyciągania ciała o masie m przez masę Ziemi M musi być równa ciężarowi tego ciała, oraz sile odśrodkowej

$$m \frac{v^2}{r_0} = mg$$

skąd

$$v = \sqrt{g \cdot r_0}$$

W pobliżu powierzchni Ziemi $r_0 \approx R$ / R - promień kuli ziemskiej/ i wtedy otrzymamy prędkość wejścia satelity na orbitę okołoziemską.

$$v_1 = \sqrt{R \cdot g} \approx 8 \text{ km/s} \quad (7,910 \text{ km/s})$$

Prędkość tę umownie nazywa się pierwszą prędkością kosmiczną. W przypadku orbity eliptycznej ulega ona zmianie tak, aby prędkość połowa była zachowana. Dlatego w skrajnych położeniach satelity w punkcie najbliższym Ziemi /Perigeum/ i najdalszym /Apogeum/ ma on odpowiednio prędkość największą i najmniejszą. Kierunek pierwszej prędkości kosmicznej winien być dokładnie równoległy do powierzchni Ziemi. Prędkość ta zmniejsza się z wysokością i dla Księżyca wynosi 1 km/s.

Opór atmosfery zmniejsza stopniowo prędkość ruchu satelitów poruszających się w jej górnych warstwach, powodując zmiany kształtu orbity. Najsilniejsze hamowanie jest w okolicach perigeum.

Prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego Ziemi nosi nazwę prędkości parabolicznej. Pojazdowi należy nadać taką prędkość, by jego energia kinetyczna była równa energii potencjalnej.

$$E_k - E_p = 0$$

/1/

Energia potencjalna wynosi

$$F = - \frac{dE_p}{dr}$$

skąd

$$E_p = - \int_0^r F dr = - \int \frac{m \cdot M \cdot G}{r^2} dr = G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \quad /2/$$

Uwzględniając energię kinetyczną otrzymamy

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{m \cdot M}{r} = 0$$

ale

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot r = mgr$$

Dla $r = R$ /R-promień Ziemi/

$$\frac{mv^2}{2} - mgR = 0$$

skąd

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \cdot R} = v_1 \cdot \sqrt{2} \approx 11,2 \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$$

Prędkość ta $v_2 = v_1 \cdot \sqrt{2}$ nazywa się drugą prędkością kosmiczną lub prędkością paraboliczną. Dla Merkurego np. prędkość ta posiada mniejszą wartość ze wszystkich planet naszego układu i wynosi $v_2 = 3,6 \text{ km/s}$, natomiast dla Jowisza $v_2 = 61 \text{ km/s}$. Przy małym wzroście prędkości ciała jego orbita wydatnie się wydłuża. Jeśli przekroczy się tę prędkość, satelita opuści na zawsze strefę aktywności Ziemi i przejdzie do obszaru

przewagi grawitacyjnej Słońca, by odtąd jako sztuczna planetoida obiegać je po obszernej elipsie. Ta "niebezpieczna" prędkość zawarta jest pomiędzy 10,8 a 11,2 km/s, a więc w bardzo wąskich granicach. Drobną niedokładność w funkcjonowaniu silników, a satelita zamiast stać się satelitą księżyca, staje się satelitą Słońca.

Tak zwana trzecia prędkość kosmiczna względem Ziemi wynosi co najmniej $v_3 \geq 16,65$ km/s i zależy od położenia planety względem Słońca. Przy takiej prędkości ciało materialne wyrzucone z Ziemi w odpowiednim kierunku poruszałoby się początkowo po hiperboli, której ognisko znajduje się w środku masy Ziemi, a po przekroczeniu jej strefy aktywności po paraboli, której ognisko jest położone w środku masy Słońca. Mając trzecią prędkość kosmiczną ciało opuściłoby po odpowiednim czasie nasz układ Słoneczny na zawsze.

Na rys. 10.9 przedstawiono prędkość ucieczki z Układu Słonecznego w zależności od odległości od Słońca. Zaznaczono także prędkości ucieczki od poszczególnych planet.

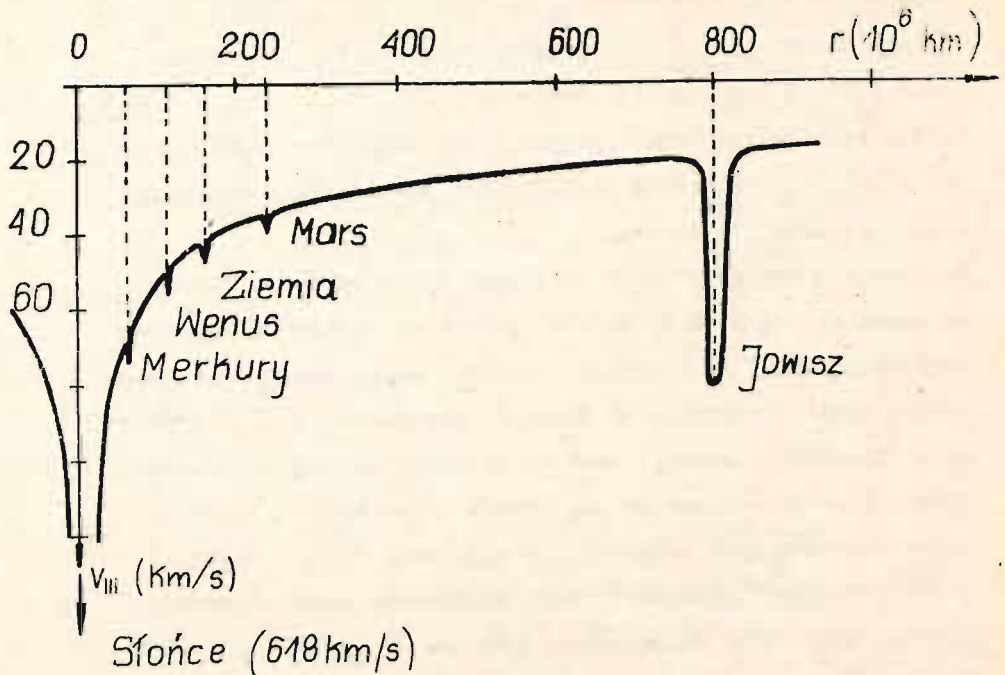
10. Dynamika ciała sztywnego

10.1. Energia i pęd w ruchu obrotowym

Jeśli rozpatrywanym ciałem jest sztywna cienka obręcz o promieniu r , obracająca się dookoła stałej osi prostopadłej do płaszczyzny obręczy i przechodzącej przez jej środek masy /oś symetrii/ rys. 1.10/, to możemy napisać że wartość bezwzględna całkowitego momentu pędu jest równa

$$k = \sum_{i=1}^n r_i p_i = \sum_{i=1}^n r_i m_i v_i = \sum m_i r_i^2 \omega = J \cdot \omega$$

/1.10/



Rys. 10.9. Prędkość ucieczki dla poszczególnych planet układu Słonecznego

gdzie wielkość

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad /2.10/$$

nazywamy momentem bezwładności ciała względem osi obrotu

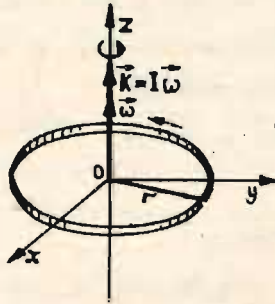
Sumowanie /2.10/ możemy zastąpić przez całkowanie

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot dv \quad /3.10/$$

gdzież $\rho = \frac{dm}{dv}$

Całka /3.10/ sprowadza się do czynnika geometrycznego identycznego dla różnych ciał o tej samej postaci i objętości. Moment bezwładności charakteryzuje więc rozkład

masy względem osi obrotu.



Rys. 1.10. Wartość momentu pędu dla obręczy

Należy zauważyć, że dla rozpatrywanej obręczy całkowity moment pędu $K = J \cdot \omega$ jest równoległy do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ /rys. 1.10/, tak że w tym przypadku słuszna jest zależność

$$\vec{K} = J \cdot \vec{\omega}$$

/4.10/

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że stałość wektora \vec{K} oznacza stałość iloczynu $J \cdot \vec{\omega}$. W przypadku zmiany bezwładności obręczy, np. przez zmianę jej promienia przy niezmienionej masie, to zgodnie ze wzorem /2.10/ lub /3.10/ oznaczałoby to zmniejszenie się momentu bezwładności J . Na to, aby moment pędu \vec{K} pozostał stały, musi wzrosnąć prędkość kątowa $\vec{\omega}$, tzn. że obręcz będzie obracała się szybciej.

Przekształcając wzór

$$\vec{N} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} (J \cdot \vec{\omega}) = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \cdot \vec{\epsilon}$$

przy założeniu, że moment bezwładności nie zmienia się w czasie, otrzymamy związek

$$\vec{N} = \vec{J} \cdot \vec{\epsilon}$$

/5.10/

tzn., że moment siły względem obranej osi jest równy iloczynowi momentu bezwładności względem tej osi i przyspieszenia kąowego. Wektor momentu sił \vec{N} jest skierowany wzdłuż osi obrotu, jak to wynika z definicji iloczynu wektorowego.

W szczególnym przypadku zgodnie z wzorem

$$\vec{N} = \frac{d}{dt} (\vec{J} \cdot \vec{\omega})$$

dla $\vec{N} = 0$ otrzymujemy $\vec{J} \cdot \vec{\omega} = \text{const.}$

Stąd wynika wniosek, że jeśli przejdziemy od jednej konfiguracji układu sztywnego punktów materialnych do innej /przesuniemy względem siebie punkty i usztywnimy ich położenie/, to zmieni się prędkość kąowa obrotu.

Widzimy więc, że zarówno prędkość kąowa $\vec{\omega}$ ciała sztywnego jak i jego moment pędu \vec{k} oraz moment siły \vec{N} skierowane są wzdłuż tej samej prostej, a mianowicie osi obrotu.

Ma to jednak miejsce tylko w tym przypadku, gdy ruch obrotowy zachodzi dookoła stałej osi, przechodzącej przez środek masy ciała i będącej jego osią symetrii. Możemy wówczas traktować wspomniane wyżej wielkości jako skalary i posługiwać się tylko ich wartościami bezwzględnymi.

Energię kinetyczną ciała sztywnego można wyprowadzić, zakładając, że energia i-tego punktu ciała będzie dana wzorem

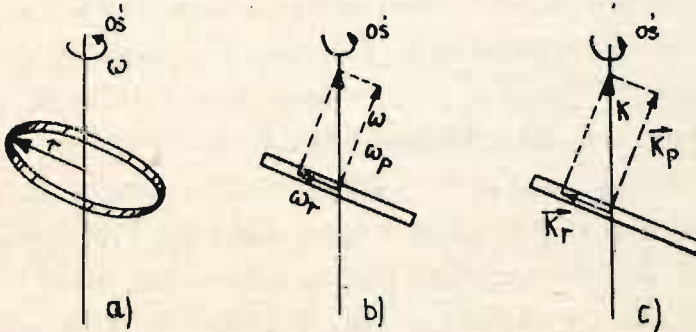
$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \cdot \omega^2$$

Sumując powyższe wyrażenie wszystkich punktów ciała sztywnego, otrzymamy energię kinetyczną ciała sztywnego w ruchu obrotowym.

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \vec{J} \cdot \vec{\omega}^2$$

10.2. Związek momentu pędu z prędkością kątową

Jeśli jakieś ciało, np. obręcz sztywna obraca się dookoła stałej osi środkowej tworzącej kąt mniejszy od 90° z płaszczyzną tej obręczy, to wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest skierowany wzdłuż osi obrotu. Rozłożymy wektor $\vec{\omega}$ na dwie składowe: równoległą do płaszczyzny obręczy ω_r i składową ω_p prostopadłą do tej płaszczyzny /rys. 2.10/.



Rys. 2.10. Obrót ciała sztywnego

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r$$

/6.10/

Względem tych dwóch wyróżnionych osi możemy znaleźć wektory momentu pędu K_r i K_p , wiedząc, że $\vec{K} = J \cdot \vec{\omega}$. Otrzymamy zatem

$$\vec{K}_r = J_r \cdot \vec{\omega}_r \quad \text{ i } \quad \vec{K}_p = J_p \cdot \vec{\omega}_p$$

/7.10/

gdzie odpowiednie momenty bezwładności będą miały wartość

$$J_r = \frac{1}{2} \cdot m r^2 \quad i \quad J_p = m r^2 \quad /8.10/$$

oraz

$$\vec{K} = \vec{K}_r + \vec{K}_p = J_r \cdot \vec{\omega}_r + J_p \cdot \vec{\omega}_p \quad /9.10/$$

Kierunek wektora \vec{K} względem wektora $\vec{\omega}$ obliczymy, znajdując stosunek wartości bezwzględnych składowych obu wektorów.

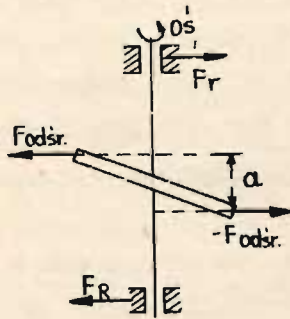
$$\frac{K_p}{K_r} = \frac{J_p \cdot \omega_p}{J_r \cdot \omega_r} = \frac{m r^2 \omega_p}{\frac{1}{2} m r^2 \omega_r} = 2 \frac{\omega_p}{\omega_r} \quad /10.10/$$

Z wzoru /10.10/ widać, że stosunki wartości bezwzględnych składowych wektora \vec{K} /momentu pędu/ i wektora $\vec{\omega}$ /prędkości kątowej/ mają różne wartości, tzn. wektory te nie pokrywają się co do kierunku. Stąd można wyciągnąć wniosek jeśli obręcz obraca się dookoła osi nie będącej jej osią symetrii, wówczas wektor momentu pędu \vec{K} ma inny kierunek w przestrzeni niż wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Sytuację taką mamy na rys. 2.10c. Kiedy obręcz się obraca, to obraca się również wektor \vec{K} wokół wektora $\vec{\omega}$.

Zgodnie z wzorem

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N}$$

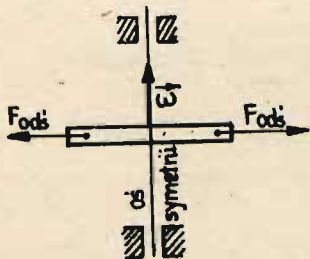
Skoro zmienia się w czasie kierunek wektora \vec{K} , musi działać pewien moment siły \vec{N} . Moment sił w tym układzie odniesienia związanym z obracającą się obręczą bierze się od siły odśrodkowej /rys. 3.10/. Moment powstały od tych sił działa w ten sposób, że usiłuje ustawić płaszczyznę obręczy prostopadle do osi obrotu. Przeciwdziała temu przeciwnie skierowany moment sił pochodzący od sił reakcji w łożyskach. Widzimy zatem, że na oś działa moment sił reakcji i on właśnie powoduje zmianę kie-



Rys. 3.10. Moment sił odśrodkowych związanych z obracającą się obręczą, gdy oś środkowa tworzy kąt mniejszy od 90° z płaszczyzną obręczy

runku momentu pędu.

Moment tych sił reakcji zniknie, gdy oś obrotu pokryje się z osią symetrii obręczy /rys. 4.10/



Rys. 4.10. Oś symetrii i oś obrotu pokrywają się ze sobą