8.5.1. Fale grawitacyjne

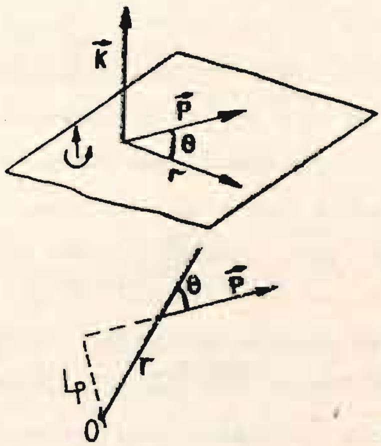
Istnienie promieniowania i fal grawitacyjnych zostało teoretycznie uzasadnione przez Einsteina. Fale grawitacyjne - to rozchodzące się z prędkością światła c pole przyspieszeń. Ciała znajdujące się w obszarze fali doznają przyspieszenia, przy czym przyspieszenie to jest jednakowe dla wszystkich ciał niezależnie od masy ciała. Na przykład działanie fali grawitacyjnej biegnącej z Kosmosu na jakieś ciało próbne nie powoduje przyspieszenia tego ciała względem Ziemi. Przyspieszenie względne tego ciała próbnego i Ziemi nie ulega tu zmianie.

Ogólna teoria względności przepowiada emisję fal grawitacyjnych przez przyspieszone masy, przy czym powstanie tych fal jest możliwe tylko wtedy, kiedy rozmieszczenie poruszającej się masy nie ma sferycznej symetrii. Im bardziej niesymetryczny jest rozkład masy poruszającego się ciała, tym więcej energii traci ono na promieniowanie fal grawitacyjnych. Moc promieniowania grawitacyjnego jest zwykle stosunkowo mała /np. w przypadku gwiazd podwójnych/, tak że do tej pory nie zostało ono doświadczalnie wykryte.

9. Zasada zachowania momentu pędu

9.1. Moment pędu

Obok energii i pędu w każdym układzie zamkniętym zachowuje się jeszcze jedna wielkość wektorowa, zwana momentem pędu. Wielkość ta jest sumą momentów pędu poszczególnych punktów materialnych. Momenty te określa się w sposób następujący. Niech punkt materialny ma pęd $\vec{p}$. Położenie punktu względem początku o pewnego dowolnego punktu układu odniesienia niech określa wektor wodzący $\vec{r}$. Moment pędu k tego punktu materialnego określa się jako wektor o wartości /rys. 1.9/.



Rys. 1.9. Wyznaczanie momentu pędu

$$K = r \cdot p \sin Q$$

gdzie Q - kąt między wektorami, $\vec{p}$ i $\vec{r}$ skończonymi prostopadle do płaszczyzny przechodzącej przez kierunki $\vec{p}$ i $\vec{r}$. Wektor $\vec{K}$ określony w podany sposób nazywa się iloczynem wektorowym wektorów r i p.

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{p}$$

ale $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{K} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad /1.9/$$

Wzór /1.9/ określa moment pędu dla pojedynczej cząstki. Dla wielu cząstek mamy:

$$\vec{K} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad /2.9/$$

Suma ta dla dowolnego układu zamkniętego nie zmienia się w czasie. Na tym polega właśnie zasada zachowania momentu pędu. Obliczmy pochodną momentu pędu cząstki względem czasu. Otrzymamy:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad /3.9/$$

Ponieważ $\frac{d\vec{r}}{dt}$ jest prędkością cząstki, a $\vec{p} = m\vec{v}$ więc

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v}\times m\vec{v} = 0$

W drugim członie /3.9/ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, zatem

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad /4.9/$$

Iloczyn wektorowy $\vec{r} \times \vec{F}$ nazywa się momentem siły i oznaczać będziemy literą N, a więc:

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad /5.9/$$

Tak więc szybkość zmiany momentu pędu punktu materialnego jest równa momentowi siły działającej na punkt

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N} \qquad /6.9/$$

Całkowity moment pędu $\vec{k}$ układu zamkniętego jest stały, a to oznacza, że:

$$\frac{d}{dt}(\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \ldots + \vec{K}_n) = \frac{d\vec{K}_1}{dt} + \frac{d\vec{K}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{K}_n}{dt} = 0$$

z czego wynika, że

$$N_1 + N_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} N_i = 0 \qquad /7.9/$$

Widzimy więc, że w przypadku układu zamkniętego nie tylko suma sił działających na wszystkie cząstki jest równa zeru, ale także suma momentów sił równa się zeru.

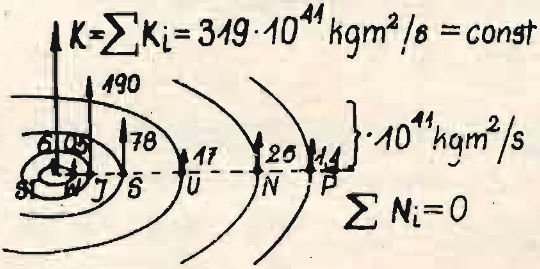
Warto zwrócić uwagę, że we wzorze /6.9/ gdy $\vec{N} = 0$, mamy $\vec{k}$=const.

9.1.1. Moment pędu gwiazd i Układu Słonecznego

Tabela nr 1.9. Rozkład momentu pędu w Układzie Słonecznym względem środka Słońca. Symbol Σp oznacza sumę momentów pędu czterech planet: Merkurego, Wenus, Ziemi, Marsa

Słońce	Σp	Jowisz	Saturn	Uran.	Neptun	Pluton	
6	0,5	190	78	17	26	1,4	

W tabeli nr 1.9 podano momenty pędów kilku planet Układu Słonecznego. Warto zwrócić uwagę na fakt, że obrót Słońca dookoła osi przechodzącej przez jego środek wynosi tylko 2% całkowitego momentu pędu w Układzie Słonecznym. Wielkości te graficznie zostały przedstawione na rys. 2.9.

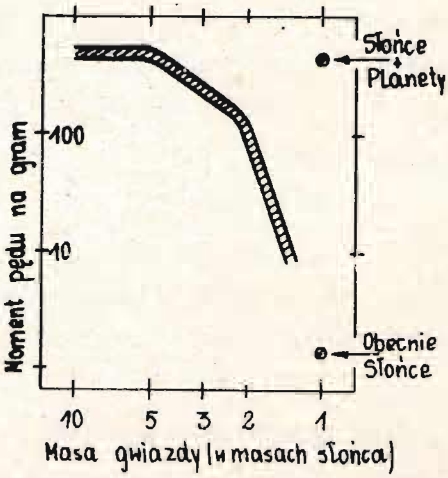


Rys. 2.9. Wielkości momentu pędu dla Słońca i planet

Typowa bardziej gorąca gwiazda może mieć moment pędu 100 razy większy niż Słońce. Wydaje się, że powstawanie układu planetarnego to proces, w którym oziębiająca się gwiazda traci moment pędu. Jeżeli każda gwiazda tworzy układ planetarny przechodząc przez podobne stadia ewolucji jak Słońce, to wtedy w naszej Galaktyce może być ponad 10^{10} gwiazd otoczonych planetami. Dotychczas zarejestrowano przeszło 400000 gwiazd, większość z nich to właśnie gwiazdy wolno wirujące, a więc wokół nich mogą być planety. Zakłada się przy tym, że gdy wokół gwiazdy pojawiają się planety, to przejmują one od niej część momentu pędu, w wyniku czego prędkość obrotu gwiazd ulega bardzo znacznemu zwolnieniu.

Gwiazdy podzielić można ze względu na charakterystyczne cechy występujące w ich widmach, na pewne typy nazwane O, B, A, F, G, K, M, N, R, S. W każdym typie wyodrębnie się jeszcze 10 podtypów / od 0 do 9/. Według obecnych poglądów gwiazda zaczyna swą egzystencję, jako obiekt typu widmowego O, a później przechodzi przez kolejne typy widmowe. Otóż gdy~~by~~ gwiazda osiąga typ widmowy F7, jej prędkość wirowania nagle maleje /Słońce ma typ G2/. Prwdopodobnie jest to moment narodzin układu planetarnego.

Interesująco przedstawia się zależność pomiędzy całkowitą masą gwiazdy a ilością momentu pędu gwiazdy przeliczonego na jednostkę masy /rys. 3.9/ . Taki sposób wyrażenia momentu pędu dostarcza informacji na temat ilości ruchu wirowego średnio zwartego w każdym gramie materii gwiazdy. Jak wynika z przebiegu krzywej, dla gwiazd o około dwóch mas Słońca następuje gławtowne załamanie się zależności. Powyżej tej granicy ilość momentu pędu jest kilkusetkrotnie większa niż na Słońcu. Ponieważ gwiazdy powstają z materii międzygwiezdnej, zawierającej wszeędzie jednakową ilość momentu pędu pochodzącego z obrotu całej Galaktyki, ogromne różnice w ilości zmagazy-



Rys. 3.9. Zależność momentu pędu zawartego w gwiazdach od mas gwiazd

nowanego momentu pędu u różnych gwiazd i to z pewną regularnością, sugerują, że gwiazdy o mniejszych masach pozbyły się swojego momentu pędu na rzecz /niewidocznych dla mas/ układów planetarnych. Przykładem jest sam układ Słoneczny, w którym tylko 2% całkowitego momentu pędu zawarte jest w Słońcu, chociaż mieści się w nim prawie cała masa układu /99,9%/. Gdyby uwzględnić momenty pędu wszystkich planet w masie Słońca, to jego moment pędu na jednostkę masy wzrósłby około 200 krotnie, a pozycja na wykresie /rys. 3.9/ przesunęłaby się do poziomu gwiazd masywnych. Zaobserwowana prawidłowość z rys. 3.9 jest podstawowym argumentem w twierdzeniu, że wszystkie gwiazdy o masach mniejszych niż około dwie masy Słońca, tworzą układy planetarne we wczesnych fazach kondensacji z materii międzygwiezdnej.

9.1.2. Spin elektronu

Z wirowaniem elektronu wokół własnej osi związany jest własny moment pędu Ls zwany spinowym momentem pędu lub spinem. Moment pędu L elektronu związany z jego ruchem wokół jądra można porównać z momentem pędu Ziemi wynikającym z jej rocznego obiegu wokół Słońca, podczas gdy spinowy moment pędu odpowiadałby momentowi pędu Ziemi wywołanemu jej dobowym obrotem wokół osi. Spinowy moment pędu elektronu, związany z obrotem elektronu jest skwantowany zgodnie z wzorem

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar = \sqrt{3}\,\frac{\hbar}{2}$$

gdyż spinowa liczba kwantów s ma tylko jedną wartość równą 1/2. Jak widać z tego spinowy moment pędu elektronu ma tylko jedną wartość $L_s = \sqrt{3}\,\frac{\hbar}{2}$ - więc jest on w takim samym stopniu podstawową cechą elektronu jak jego masa lub ładunek.

Wartości spinowego momentu pędu s dla kilku wybranych cząstek elementarnych podano w tabeli nr 2.9.

Tabela nr 2.9. Wartości spinowego momentu pędu dla niektórych cząstek elementarnych

cząstka	spinowy moment pędu s
Elektron	1/2
Foton	1
Nukleon/proton lub neutron/	1/2
Neutrino	1/2
Mion μ^+	1/2
Pion $(\pi^\pm, \pi^0)$	0
Hiperon Λ^0	1/2
Kaon /mezon $K^\pm$, K^0/	0

Elektron poruszający się po orbicie wokół jądra atomu ma moment pędu L i własny spinowy moment pędu L_s. Całkowity moment pędu elektronu, wynikający z dodawania wektorowego tych momentów wynosi

$$j = L + L_s$$

z tego samego powodu, z którego mamy $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ oraz $L_s = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$, całkowity moment pędu też jest skwantowany i wynosi:

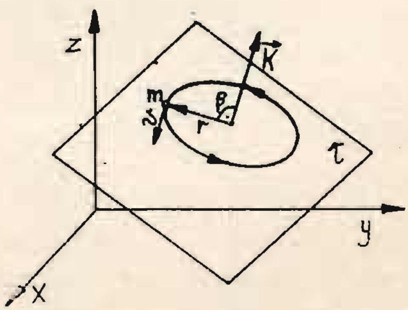
$$j = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$$

przy czym liczba kwantowa całkowitego momentu pędu j może przyjmować wartości $j = l \mp s$.

9.2. Ruch w polu centralnym

Z zasady zachowania momentu pędu punktu materialnego poruszającego się w polu centralnym wynika kilka ważnych właściwości tego ruchu.

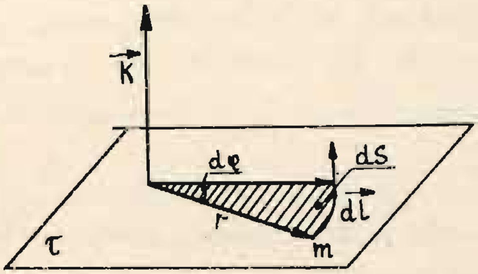
1. Płaskość ruchu. Ruch płaski to ruch zachodzący w jednej ustalonej płaszczyźnie. Stałość momentu pędu oznacza stałość wartości wektora $\vec{K}$ i stałość jego kierunku w przestrzeni rys. 4.9.



Rys. 4.9. Stałość momentu pędu

Jeśli zauważymy, że kąt β jest niezmienny, to wynika stąd, że punkt materialny o masie m porusza się w płaszczyźnie której położenie w przestrzeni jest ustalone.

2. <u>Stałość prędkości polowej</u>. Rozpatrzmy [redacted] ruch punktu materialnego o masie m w płaszczyźnie τ /Rys. 5.9/.



Rys. 5.9. Stałość prędkości polowej

Niech w czasie od chwili t do $t+dt$ promień wodzący $\vec{r}$ obróci się o kąt $d\varphi$, a jego koniec zakreśli łuk $\vec{dl}$. Wtedy moment pędu $\vec{K}$ wyrażony przez te wielkości przyjmie następującą postać

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \frac{\vec{dl}}{dt} = m\frac{\vec{r} \times \vec{dl}}{dt} \qquad /8.9/$$

Ponieważ łuk $\vec{dl}$ jest nieskończenie mały możemy traktować go jako odcinek prostej, a zakreślone pole ds jako pole płaskiego trójkąta, które wobec tego stanowi połowę pola równoległoboki, zbudowanego na wektorach $\vec{r}$ i $\vec{dl}$.

Pole tego równoległoboku, jak wynika z definicji iloczynu wektorowego, równe jest liczbowo wartości tego iloczynu.

Stąd $$|\vec{r} \times \vec{dl}| = 2ds \qquad /9.9/$$

Podstawiając /9.9/ do /8.9/ otrzymamy

$$\vec{K} = 2m\frac{d\vec{s}}{dt}$$

gdzie wielkość:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{l}\right| \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2m}\cdot\vec{K} \qquad /10.9/$$

nosi nazwę prędkości polowej i wskazuje jaką powierzchnię zakreśla promień wodzący $\vec{r}$ w jednostce czasu.

Z /10.9/ wynika, że gdy $\vec{k}$ = const. do $\frac{d\vec{s}}{dt}$ = const.

9.3. Prawa Keplera

Obserwacje ruchu planet pozwoliły Keplerowi na sformułowanie trzech ważnych praw dotyczących tych ruchów. Odegrały one potem istotną rolę w odkryciu prawa powszechnego ciążenia. Zagadnienie ruchu planet z dobrym przybliżeniem możemy sprowadzić do zagadnienia ruchu punktu materialnego /planety/ w polu centralnym z centrum w ośrodku Słońca. Na przybliżenie takie pozwalają małe masy planet w stosunku do masy Słońca i ich duża odległość od Słońca w porównaniu z rozmiarami własnymi.

I. Pierwsze prawo Keplera głosi: planety poruszają się po elipsach, a Słońce znajduje się w jednej z ognisk każdej elipsy

Można udowodnić, że cząstki w polu centralnym poruszają się po krzywych stożkowych, czyli po liniach uzyskanych przez różne płaskie przekroje powierzchni stożkowej.

II. Prawo Keplera: promień wodzący skierowany od Słońca do planety zakreśla w różnych odstępach czasu równe pola.

Prawo to jest ~~po prostu~~ twierdzeniem o stałości prędkości kątowej. /rys. 6.9/ tzn. dla $\vec{k}$ = const. wynika, że $\frac{ds}{dt}$ = const.