W Y D A W N I C T W A N A U K O W E
KOMISJI WYDAWNICZEJ
Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej

ZBIÓR ZADAŃ Z MECHANIKI

prof. Z. STRASZEWICZA

№ Wyd. 126

WARSZAWA 1921/22.
Skład Główny Komisji Wydawniczej: Politechnika — Polna 3. Telefon 88-60
Drukarnia i Litografja „SATURN", Marszałkowska 91.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

ZBIÓR
ZADAŃ Z MECHANIKI

prof. Z. STRASZEWICZA

№ Wyd. 126

WARSZAWA
NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ“ TOW. BR. POM. STUD. POL. WARSZ.
Drukarnia i Litografja „SATURN“ Marszałkowska 91.
ROK AKAD. 1921/22

ZBIÓR ZADAŃ z MECHANIKI.

STATYKA.

1. Okazać, że wypadkowa sił OA i OB odpowiada podwójnemu odcinkowi OM, gdzie M oznacza środek odcinka AB.

2. Cząsteczka O pozostaje w równowadze pod działaniem trzech sił, z których F jest dana co do wielkości, F' co do kierunku, a P co do wielkości i kierunku. Wyznaczyć wykreślnie linję działania siły F.

3. Rozłożyć daną siłę R na dwie składowe P_1 i P_2, tworzące kąt 60° tak, aby suma tych składowych była największa. Odp.: $P_1 = P_2 = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

4. Najmniejsza z pięciu sił, wyrażonych przez boki i przekątnie regularnego sześciokąta, wychodzące z jednego wierzchołka, = P. Wyznaczyć wypadkową. Odp.: 6P.

5. Jednorodna sztaba AB = l posiada masę M. Na przedłużeniu jej, w odległości a od końca A, leży punkt o masie m,

przyciągany przez elementy sztaby według prawa Newtona. Wyznaczyć całkowitą siłę przyciągającą. Odp. $\frac{kMm}{a(a+l)}$, gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności.

6. Pozioma belka CB jest osadzona w C na zawiasie, a w B podtrzymuje ją ścięgno AB, tworzące z nią kąt 30°. Wyznaczyć naprężenie ścięgna i siłę, działającą na belkę, gdy na końcu belki wisi ciężar 200 kg. Odp. 400 i 346,5 klg.

7. Na ciężar Q, zawieszony na sznurze długości l, działa siła pozioma P. Wyznaczyć kąt φ, który w stanie równowagi tworzy sznur z pionem, a także naprężenie sznura S.

Odp.: $tang.\varphi = \frac{P}{Q}$, $S = \frac{Q}{Cos\varphi}$.

8. Ciężar Q jest utrzymywany na równi pochyłej przez pewną siłę, tworzącą z równią kąt 30°, a równia tworzy z poziomem także kąt 30°. Wyznaczyć reakcję, którą równia wywiera na ciężar. Odp.: $\frac{Q}{\sqrt{3}}$.

9. Na ciężar Q, spoczywający na równi pochyłej, działają trzy siły, z których każda jest równa P. Pierwsza jest skierowana pionowo w górę, druga według linji największego spadku pod górę i trzecia poziomo w tę samą stronę, co i druga. Wyznaczyć kąt nachylenia równi. Odp.: $2\, arc\,tang \frac{P}{Q-P}$.

10. Na poziomy pręt nawleczono dwa pierścienie; do nich przywiązano końce sznura o długości $2l$, na którym zapomocą trzeciego pierścienia zawieszono ciężar, równy największemu naprężeniu, jakie może znieść sznur. Pierścienie na pręcie są stopniowo rozsuwane; przy jakiej odległości pomiędzy nimi sznur się zerwie? Odp. $l\sqrt{3}$.

11. Dwie małe lekkie obrączki są nawleczone na gładki łuk koła, położonego w płaszczyźnie pionowej. Przez obrączki przechodzi sznur, do którego przywiązano trzy jednakowe ciężary: dwa na końcach i jeden po środku pomiędzy obrączkami. Wyznaczyć położenie równowagi.

Odp.: Odległość obrączek od najwyższego punktu koła $= 30^{\circ}$

12. Punkt M ważący Q, może poruszać się na kole, ustawionem w płaszczyźnie pionowej i posiadającem promień r. Punkt ten jest odpychany przez najniższy punkt okręgu C z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. Współczynnik proporcjonalności = k. Wyznaczyć położenie równowagi. Odp.: $CM = \sqrt[3]{\frac{kr}{Q}}$ lub $CM = 2r$.

13. Jeden koniec sznura długości c jest umocowany w najwyższym punkcie nieruchomej kuli o promieniu r, do drugiego końca jest przywiązany ciężar P, spoczywający na powierzchni kuli. Wyznaczyć reakcję R ciężaru na kulę i na-

prężenie sznura S. Odp.: $R = P\cos\frac{c}{l}$, $S = P\sin\frac{c}{l}$.

14. Końce sznura $ABCD$ o długości l są umocowane w nieruchomych punktach A i D, położonych na jednym poziomie w odległości c. Punkty B i C dzielą sznur na trzy części równe i w nich są przyczepione dwa równe ciężary P. Wyznaczyć naprężenia S i T w częściach sznura AB i BC.

Odp.: $T = \frac{P(3c-l)}{\sqrt{4l^2-(3c-l)^2}}$, $S = \frac{2Pl}{\sqrt{4l^2-(3c-l)^2}}$.

15. Na ciało sztywne działają siły równoległe i położone w jednej płaszczyźnie $P_1 = 5$, $P_2 = 3$, $P_3 = -16$, $P_4 = 8\,kg$. Odległości od P_1 do P_2, P_3 i P_4 są odpowiednio równe 50, 130 i $200\,mm$. Wyznaczyć wypadkową co do wielkości i położenia.

16. Cztery proste równoległe a, b, c i d są przeprowadzone w jednakowych odstępach. Na prostych b i d działają siły, zwrócone w jedną stronę i wynoszące odpowiednio 14 i 20 kg. Zastąpić je przez dwie inne siły, działające na prostych a i c. Odp.: 37 i -3.

17. A, B, C i D oznaczają wierzchołki kwadratu. Wyznaczyć wypadkową sił AB, BC, CD, DA, AC i BD.

Odp.: Wypadkowa $= 2AB$ i leży w odległości AB od środka kwadratu.

18. Na boku AB kwadratu $ABCD$, działa siła P. Rozłożyć ją na trzy składowe, działające na trzech bokach pozostałych.

19. Wzdłuż boków AB, CD, DE i AF foremnego sześcioboku $ABCDEF$ działają siły $2P$, P, $2P$ i P. Wyznaczyć wypadkową.

20. Na wierzchołki A, B i C równobocznego trójkąta ABC działają siły P, $2P$, $3P$, prostopadłe do boków CA, AB, BC i usiłujące obrócić trójkąt w kierunku ruchu wskazówki zegara. Wyznaczyć wypadkową.

Odp.: $P\sqrt{3}$, kierunek BA.

21. Okazać, że płaski układ sił daje się sprowadzić do dwóch sił, działających na dane punkty A i B, przyczem pierwsza tworzy z AB kąt dany.

22. Siły P, $2P$, $4P$, $2P$ działają na bokach kwadratu, obieganych w koło. Wyznaczyć wypadkową pod względem wielkości i położenia.

23. Boki trójkąta, obiegane w koło, wyobrażają siły pod względem wielkości, kierunku i położenia. Okazać, że siły te są równoważne parze, której moment odpowiada podwójnemu polu trójkąta.

Okazać prócz tego, że równoważą się trzy pary, których momenty odpowiadają bokom trójkąta, obieganym w koło.

24. Trójkątna płyta ABC może się obracać w swej płaszczyźnie około pewnego nieruchomego punktu. Na płytę wzdłuż boków BC, CA, BA działają siły proporcjonalne do tych boków. Dowieść, że aby płyta pozostała w spokoju, to ów punkt nieruchomy musi leżeć na prostej, przechodzącej przez środki boków BC i CA.

25. Dwie jednorodne sztaby AB i BC o długościach c i a są połączone sztywno w B i mają być zawieszone w końcu A. Jaki powinien być kąt ABC, aby sztaba BC zajęła położenie poziome? Odp. $\arccos \frac{a^2}{c(c+2a)}$.

26. Płyta trójkątna równoboczna o boku a ma być zawieszona na gładkim haku z pomocą sznura, przywiązanego do dwóch wierzchołków. Jaka powinna być długość sznura, aby jeden z boków zajął położenie pionowe? Odp.: $a\sqrt{3}$.

27. Sztaba AB ważąca Q kg o długości $2a$ może się obracać w płaszczyźnie pionowej około punktu A. Do jej końca B jest przyczepiona linka, przechodząca przez blok C, położony pionowo nad A tak, że $AC = 2a$. Z jaką siłą należy ciągnąć linkę, aby sztaba utworzyła z pionem dany

kąt α? Wyznaczyć także reakcję R osi A co do wielkości i kierunku.

Odp.: $Q\sin\frac{\alpha}{2}$ i $Q\cos\frac{\alpha}{2}$.

28. Płyta kwadratowa, ważąca Q kg jest przyczepiona w jednym wierzchołku do ściany zapomocą sznura, którego długość jest równa bokowi płyty, przyczem płaszczyzna jej pozostaje prostopadła do ściany. Wyznaczyć kąt α, który sznur tworzy ze ścianą oraz naprężenie sznura S.

Odp.: $\tan\alpha = 1/3$, $S = \frac{Q\sqrt{10}}{3}$.

29. Cylinder ważący Q kg spoczywa na dwóch płaszczyznach nachylonych do poziomu pod kątami α i β. Wyznaczyć reakcję tych płaszczyzn. Odp.: $\frac{Q\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{Q\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

30. Sztaba o długości $2l$ jest oparta o równię pochyłą nachyloną do poziomu pod kątem α, i o kołek poziomy, równoległy do równi; tworzy ona z równią kąt β. Wyznaczyć długość części sztaby, zawartą pomiędzy równią i tłokiem.

Odp.: $\frac{l\cos(\beta-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha}$.

31. Prosty stożek kołowy o wysokości h i o promieniu podstawy r zawieszono na gładkim poziomym kołku za pomocą sznura, którego jeden koniec jest przywiązany do wierzchołka a drugi do punktu, położonego na obwodzie podstawy, przyczem oś stożka zajęła położenie poziome. Wyznaczyć

długość sznura. Odp.: $\sqrt{h^2+4r^2}$.

32. Sztaby AB, BC o jednakowych ciężarach lecz nie jednakowych długościach, połączone przegubem w punkcie B, pozostałe zaś końce osadzono na zawiasach w nieruchomych punktach A i C, położonych na jednym pionie. Okazać, że linja działania reakcji w przegubie B przechodzi przez środek odcinka AC.

33. Cztery jednakowe płyty o długości $2a$ leżą jedna na drugiej. O ile można wysunąć każdą wyższą płytę nad niższą nie naruszając równowagi? Odp.: a, $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{3}$.

34. Dwie równe lekkie sztaby AA_1, BB_1 są połączone przegubem we wspólnym środku C i ustawione w płaszczyźnie pionowej na gładkim poziomym stole. Ich górne końce A, B łączy lekki sznur ABD, na który nawleczono ciężki pierścień D. Okazać, że w położeniu równowagi prosta pozioma, przechodząca przez pierścień D, dzieli na pół odcinki AC i BC.

35. Dwie jednakowe sztaby AB i AC, ważące po Q kg są połączone w A przegubem i stoją w płaszczyźnie pionowej opierając się końcami B i C o gładką płaszczyznę poziomą. Każdy z końców B i C jest przywiązany sznurem do

środka przeciwległej sztaby, a każda sztaba tworzy z poziomem kąt ϑ.

Wyznaczyć naprężenie sznurów.: Odp. $\frac{Q}{8}\sqrt{1+9\cot^2\vartheta}$.

36. Dwie jednakowe sztaby AB i BC są połączone w B przegubem i spoczywają na dwuch gładkich kołkach, położonych na jednym poziomie. Długość każdej sztaby $= 2b$, odległość między kołkami $= a$. Wyznaczyć kąt, który każda ze sztab tworzy z poziomem. Odp.: $\arc\cos\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$.

37. Trzy równe jednorodne pręty, z których każdy waży Q, są złączone przegubami w końcach i spoczywają na dwóch gładkich kołkach, położonych na jednym poziomie. Odległość pomiędzy kołkami wynosi połowę długości jednego pręta, a pręt najniższy posiada położenie poziome. Wyznaczyć reakcje w przegubach.

Odp.: w górnym $\frac{5Q}{2\sqrt{3}}$, w dolnych $\frac{Q}{6}\sqrt{57}$.

38. Z jednej sztaby, ważącej Q kg, zrobiono trzy odcinki AB, BC i CD, stanowiące odpowiednio $1/4$, $1/2$ i $1/4$ sztaby. Odcinki te połączone przegubami B i C i położone na gładkiej kuli, której średnica jest równa długości całej sztaby. Z kulą styka się środek odcinka BC oraz punkty A i D. Wyznaczyć reakcję w środku odcinka BC.

Odp.: $\frac{91Q}{100}$.

39. Na równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α, leży ciężar Q, podtrzymywany przez jaknajmniejszą siłę równoległą do równi, a równia stoi na gładkiej podłodze. Jaką siłę poziomą należy przyłożyć do równi, aby utrzymać równowagę, jeżeli kąt tarcia pomiędzy ciężarem i równią = $= \varphi$? Odp. $\frac{Q\cos\alpha \sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$.

40. Dwie jednorodne sztaby AB i BC są połączone sztywno w B pod kątem prostym; długość pierwszej jest równa $2a$, drugiej $2b$. Sztaba AB wspiera się w punkcie D na krawędzi stołu (współcz. tarcia = f); wyznaczyć największą możliwą długość wystającej części DB. Przy jakim współczynniku tarcia układ pozostanie w równowadze opierając się w A? Odp.: $DB = \frac{a^2+fb^2}{a+b}$.

41. Sztaba AB opiera się w punkcie A o podłogę, a w B jest zawieszona na sznurze, tworząc z poziomem kąt 45^o. Współczynnik tarcia sztaby o podłogę = f. Wyznaczyć największy kąt, który sznur może tworzyć z pionem.

Odp.: $\operatorname{arctang} \frac{f}{1-2f}$.

42. Belka AB o długości $2l$ opiera się końcem A o chropowatą podłogę, a w punkcie C spoczywa na pionowym gładkim słupie wysokości h, tworząc z poziomem kąt α. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia belki o podłogę, aby zachodziła równowaga? Odp. $\frac{l\cos\alpha \sin^2\alpha}{h - l\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

43. Pomiędzy dwoma płaszczyznami,nachylonemi do poziomu pod kątem 45°, spoczywają trzy jednakowe sześciany, z których każdy waży Q .Kąt tarcia sześcianu o sześcian, oraz sześcianu o płaszczyznę = φ .Jaką siłę pionową należy przyłożyć do sześcianu dolnego,aby go unieść do góry?

Odp. $(2+\sin 2\varphi)Q$.

44. Półkula o promieniu a i wadze Q spoczywa krzywą powierzchnią na płaszczyźnie poziomej. Na chropowatej podstawie półkuli leży cząsteczka ważąca P ;współcz.tarcia = f . Wyznaczyć największą możliwą odległość cząsteczki od środka półkuli. Odp. $\frac{3Qfa}{8P}$.

45. Półkula jest oparta powierzchnią krzywą o gładką ścianę i o chropowatą podłogę;współczynni tarcia = f. Wyznaczyć najmniejszy kąt, który płaszczyzna podstawy może tworzyć ze ścianą. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia,aby półkula była w równowadze w każdem położeniu? Odp.: $\arccos \frac{8f}{3}$.

46. Sztywna rama w postaci romba wisi na kołku,opierając się na nim jednym bokiem. Długość boku = a,współcz. tarcia = f, kąt ostry romba = α . Wyznaczyć odległość skrajnych położeń punktu oparcia na boku romba.

Odp. $af\sin\alpha$.

47. Sztaba, leżąca na równi pochyłej, może obracać się w płaszczyźnie równi około jednego ze swych końców. Równia tworzy z poziomem kąt α, a współczynnik tarcia sztaby o równię $= f$. Wyznaczyć największy kąt, jaki sztaba może tworzyć z linją największego spadku. Odp. $\arcsin f \cot \alpha$.

48. Dwie płyty A i B o jednakowej grubości leżą na podłodze; pierwsza jest nieruchoma, a druga ważąca Q kg swobodna. Pomiędzy płyty wstawiono klin, którego kąt $= 2\alpha$. Jaką siłę należy przyłożyć do klina, prostopadle do jego podstawy, aby odsunąć B od A? (kąt tarcia klina o płyty i płyty o podłogę $= \varphi^0$).

Odp.: $\dfrac{2Q \sin\varphi \sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+2\varphi)}$.

49. Linka o długości l jest zawieszona w nieruchomym punkcie A, na drugi zaś koniec B działa pozioma siła kc, gdzie k oznacza ciężar 1 m. linki. Wyznaczyć odległość poziomą i pionową pomiędzy punktami A i B.

Odp.: $c \lg \dfrac{l+\sqrt{l^2+c^2}}{c}$, $\sqrt{l^2+c^2}-c$.

50. Koniec łańcucha o długości 13 m. umocowano na wysokości 3 m. nad poziomem gruntu; współczynnik tarcia $f = 1/3$. Wyznaczyć najmniejszą długość łańcucha, która może spoczywać na ziemi. Odp. 8 m.

51. Linka przechodzi przez blok i jej części o długościach b i b_1 leżą na dwóch płaszczyznach poziomych. Odległość pomiędzy płaszczyznami $= h$. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia linki o płaszczyznę, aby zachodziła równowaga? Odp.: $\frac{h}{b-b_1}$.

52. Linka o długości $2l$ jest zawieszona w dwóch punktach położonych na jednym poziomie. Styczne do linki w tych punktach tworzą z poziomem kąty 45^0. Wyznaczyć strzałkę. Odp.: $l(\sqrt{2}-1)$.

53. Styczne w punktach zawieszenia sznura o długości tworzą z pionem kąty α i β; wyznaczyć wysokość jednego z punktów zawieszenia nad drugim.

Odp.: $\frac{l \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$.

54. Lekka wstęga opasuje ściśle dwa nierówne koła chropowate. Jedno z nich jest nieruchome, a drugie zaczyna się zwolna obracać około środka. Dowieść, że poślizg wstęgi rozpocznie się na mniejszem kole.

55. Dwa jednakowe, nieruchome, poziome cylindry mają osi równoległe i położone na jednym poziomie. Cylindry obiega linka, przystając do każdego z nich na 3/4 obwodu, a na końcach jej są zawieszone ciężary P i Q. Jaki po-

winien być conajmniej współczynnik tarcia, aby zachodziła równowaga?

Odp.: $\frac{1}{3\pi} lg\left(\frac{P}{Q}\right)$.

56. Trzy prostopadłe do siebie cięciwy kuli, wychodzące z jednego punktu, wyobrażają siły. Wyznaczyć spadkową.

57. Siły P_1, P_2, P_3 działają odpowiednio równolegle do osi x, y, z, na punkty C, A, B, położone na osiach z, x, y w odległościach a, b, c od początka O. W jakim stosunku powinny być do siebie te siły, aby oś wypadkowego skrętnika przechodziła przez O?

Odp.: $P_1 : P_2 : P_3 = \sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[3]{bc^2} : \sqrt[3]{ca^2}$.

58. Punkty L, M, N leżą odpowiednio na osiach x, y, z w odległościach l, m, n od początku O. W tych punktach są przyłożone siły równoległe P_1, P_2, P_3, których kąty kierunkowe są α, β, γ i wypadkowa przechodzi przez O. Okazać, że $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = P_1 l : P_2 m : P_3 n$.

59. W punktach A, B, C, położonych na osiach x, y, z są przyłożone jednakowe siły działające odpowiednio równolegle do osi y, z, x. Odległości punktów A, B, C od początku O wynoszą a, b, c, i układ sił sprowadza się do jednej siły wypadkowej. Wyznaczyć odległość tej wypadkowej od początku O.

Odp. $\sqrt{\frac{a^2+b+c^2}{3}}$.

60. Na trzech nierównoległych i nieprzecinających się krawędziach prostopadłościanu działają trzy jednakowe siły. Jaki związek powinien zachodzić pomiędzy krawędziami prostopadłościanu, aby układ ten sprowadzał się do jednej wypadkowej.

Odp.: Jedna z nich powinna być równa sumie dwóch pozostałych.

61. Sześć sił, z których każda $= P$, działa według krawędzi sześcianu, nie przecinających jednej z przekątni i obieganych w jedną stronę. Krawędź sześcianu $= a$. Sprowadzić ten układ do skrętnika.

Odp.: Moment skrętnika $= 2Pa\sqrt{3}$.

62. OA, OB, OC stanowią krawędzie, a OO', AA', BB' CC' przekątnie sześcianu o krawędzi a; wzdłuż $OB', O'A, BC$ i $C'A'$, działają odpowiednio siły $P, 2P, 3P, 4P$. Obrawszy punkt O za środek redukcji, wyznaczyć siłę wypadkową i parę wypadkową.

Odp.: $Siła = P\sqrt{35}$, $para = \frac{Pa\sqrt{114}}{2}$.

63. Wzdłuż krawędzi sześcianu działa 12 sił, z których każda $= P$, i te z nich, które działają na krawędziach rów-

Zbiór zadań z mechaniki   cz. 2

noległych są skierowane jednakowo. Wyznaczyć siłę wypadkową i parę wypadkową.

Odp.: Siła wypadkowa = $4P\sqrt{3}$.

64. Dwie siły, z których każda jest równa P działają na sześcian, którego środek jest nieruchomy, a krawędź wynosi $2a$. Linjami działania tych sił są wichrowate przekątnie dwóch ścian przyległych. Wyznaczyć moment pary, która może utrzymać sześcian w równowadze. Odp. $Pa\sqrt{3}$.

65. Okrągła tarcza wisi na sznurze, przyczepionym w środku O. W jakich punktach obwodu należy umieścić ciężary Q_1, Q_2, Q_3 aby tarcza pozostała w równowadze w położeniu poziomem?

Odp. Ciężary umieszczamy odpowiednio w punktach A_1, A_2, A_3, i niech będzie kąt $A_2OA_3=\varphi_1$, $A_3OA_1=\varphi_2$, $A_1OA_2=\varphi_3$ W takim razie $\cos\varphi_1=\frac{Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2}{2Q_2Q_3}$ i.t.d.

66. Ciężka obręcz jest zawieszona u nieruchomego punktu O na pewnej liczbie sznurów jednakowej długości. Na stożek, utworzony przez sznury, nasuniętą inną, mniejszą obręcz tej samej wagi, przyczem każdy sznur został podzielony przez tę drugą obręcz na pół. Wyznaczyć stosunek odległości pierścieni od punktu O. Odp.: $3:2$.

67. Trzy lekkie sztaby, każda o długości a, tworzą trójnów stojący na gładkiej podłodze; końce sztab są połączone sznurami i tworzą trójkąt równoboczny, którego bok $= b$. U wierzchołka jest zawieszony ciężar Q. Wyznaczyć naprężenia sznurów. Odp.: $\frac{Qb}{3\sqrt{9a^2-3b^2}}$

68. Dwie gładkie płaszczyzny przecinają się według prostej poziomej i każda z nich tworzy z pionem kąt α. Pomiędzy niemi umieszczono sztabę, ważącą Q kg i $2a$ m długą, w położeniu poziomem tak, że tworzy z prostą przecięcia płaszczyzn kąt ϑ. Wyznaczyć moment pary, którą należy przyłożyć do sztaby, aby utrzymać równowagę. Odp. $\frac{Qa\cos\vartheta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

69. Cztery jednakowe sztaby, połączone w końcach swobodnie, tworzą czworobok skośny. Jedna z nich jest umocowana w położeniu poziomem, a na przeciwległą działa para sił o osi pionowej i momencie M. Długość sztaby $= l$ ciężar $= Q$. Wyznaczyć kąt, który dolna sztaba tworzy z górną.

Odp.: $2 \arcsin \frac{M}{Ql}$.

70. Cztery jednakowe kule o promieniach r pozostają w zetknięciu na dnie gładkiwgo kulistego naczynia, a ich środki leżą w jednej płaszczyźnie poziomej. Kładziemy na nie piątą kulę taką samą. Jaki powinien być najwyższy promień naczynia, aby kule się nie rozeszły?

Odp.: $(2\sqrt{13}+1)r$.

71. Wyznaczyć środek ciężkości naczynia blaszanego, cylindrycznego, otwartego u góry, w którem wysokość jest równa średnicy dna. Odp.: Odległość od dna $= \frac{2h}{5}$.

72. Jednorodna bryła obrotu składa się ze stożka, którego wysokość $= h$, a średnica podstawy $= 2h$, z cylindra o wysokości $2h$ i promieniu r i półkuli o promieniu h. Wyznaczyć odległość środka ciężkości bryły od wierzchołka stożka. Odp.: $\frac{h(5h+8r^2)}{2(h^2+2r^2)}$.

73. Okazać, że środek ciężkości obwodu trójkąta ABC jest środkiem koła, wpisanego w trójkąt $A_1B_1C_1$ gdzie A_1, B_1, C_1, oznaczają środki boków BC, CA i AB.

74. Wyznaczyć środek ciężkości obwodu odcinka kołowego AMB, w którym łuk $AMB = s$ cięciwa $AB = c$, a promień koła r. . Odp.: $OS = \frac{c(\sqrt{4r^2-c^2}+2r)}{2(c+s)}$.

75. Okazać, że odległość środka ciężkości odcinka kołowego AMB od środka koła 0 wynosi $\frac{c^3}{6(sr-\alpha c)}$, gdzie c oznacza cięciwę AB, s długość łuku AMB, r promień koła i α odległość cięciwy od środka 0.

76. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka paraboloidy obrotu, której podstawa jest prostopadła do osi, a wysokość $= h$. Odp.: Odległość od wierzchołka $= \frac{2h}{3}$.

77. Wyznaczyć środek ciężkości połowy elipsoidy, powstałej skutkiem obrotu ćwiartki elipsy o osiach $2a$ i $2b$ koło dużej osi. Odp.: Odległość od podstawy $= \frac{3a}{8}$.

78 Wyznaczyć powierzchnię bryły, która powstaje skutkiem obrotu regularnego sześcioboku (długość boku $= a$) około jednego z boków. Odp. $6\pi a^2\sqrt{3}$,

79. Wyznaczyć objętość bryły, która powstaje skutkiem obrotu półkola ABC około prostej równoległej do średnicy AC i położonej w odległości a od niej. Promień półkola $= r$. Odp.: $\frac{\pi r^2(3\pi a \pm 4r)}{3}$.

80. Na półkuli o promieniu r, spoczywającej na płaszczyźnie poziomej, ma być osadzony cylinder z jednakowego materjału o średnicy półkuli. Jaka powinna być wysokość cylindra, aby równowaga była obojętna? Odp.: $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

81. Ciało, złożone ze stożka i półkuli o promieniu r, posiadających wspólną podstawę, ustawiono na stole stożkiem do góry. Jaka powinna być wysokość stożka, aby równowaga była obojętna? Odp.: $r\sqrt{3}$.

82. Stożek jednorodny spoczywa wewnątrz opisanej kuli. Jaki powinien być kąt u wierzchołka, aby stożek był w równowadze w każdem położeniu? Odp.: $2 \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

83. Sztaba AB o długości $2a$ opiera się końcem A o gładką pionową ścianę, a w końcu B jest uczepiona do sznura CB, przymocowanego w C do ściany. Sznur tworzy ze ścianą kąt φ, a sztaba kąt ϑ. Okazać, że $\tan \vartheta = 2 \tan \varphi$.

84. Cztery jednakowe, lekkie sztaby o długości a są połączone przegubami i tworzą romb $ABCD$. Pomiędzy przeciwległymi przegubami są naciągnięte elastyczne sznury, z których każdy w stanie nierozciągniętym posiada długość a; naprężenie ich jest proporcjonalne do wydłużenia, a współczynnik proporcjonalności $= k$. Prócz tego na zawiasy B i D działają siły P w kierunkach BD i DB. Wyznaczyć kąt BAC.

Odp.: $\arctan \left(1 - \frac{P}{ak}\right)$.

85. Osiem jednakowych prętów, połączonych luźno tworzy ośmiościan. Jeden z wierzchołków jego jest zawieszony u sufitu i połączony elastycznym sznurem z wierzchołkiem przeciwległym. Naprężenie sznura jest proporcjonalne do wydłużenia, naturalna długość jest równa długości pręta, a pod działaniem ciężaru wszystkich prętów sznur przybrałby długość podwójną. Wyznaczyć kąt, który każdy pręt tworzy z pionem. Odp.: $\arccos \frac{3}{4}$.

86. Dwie gładkie płaszczyzny przecinają się według prostej poziomej; jedna z nich tworzy z poziomem kąt α, druga β. Pomiędzy płaszczyznami spoczywa sześcian, opierając się na nich dwiema krawędziami. Wyznaczyć kąt ϑ, który dolna ściana sześcianu tworzy z poziomem, oraz wskazać rodzaj równowagi. Odp.: Równowaga chwiejna, $\tan\vartheta =$

$$= \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}.$$

87. Na obwodzie gładkiej kołowej tarczy, ustawionej w płaszczyźnie pionowej, spoczywają dwie cząsteczki o masach m_1 i m_2, połączone nicią, która również leży na obwodzie; widać ją ze środka tarczy pod kątem α. Wyznaczyć kąt ϑ, który tworzy z pionem promień, przechodzący przez m_1 i określić rodzaj równowagi.

Odp.: Równowaga chwiejna, $\tan\vartheta = \frac{m_2\sin\alpha}{m_1+m_2\cos\alpha}$.

88. Sztaba AB, o długości $2a$, ważąca Q kg, może obracać się w płaszczyźnie pionowej około końca A. Pionowo nad A, na wysokości a, znajduje się mały bloczek, przez który przechodzi sznur. Jeden koniec tego sznura jest przymocowany w środku sztaby, a na drugim wisi ciężar P mniejszy od $2Q$. Wyznaczyć położenie równowagi i określić jej rodzaje.

Odp.: Jeżeli ϑ oznacza kąt, który sznur tworzy z pionem to równowaga trwała zachodzi przy $\vartheta=0$, a chwiejna przy $\cos\vartheta = \frac{P}{2Q}$.

CYNEMATYKA.

1. Torem punktu ruchomego jest linja prosta, a równanie ruchu $s=t^2-20t+75$. Gdzie znajdował się punkt, gdy zaczynano rachować czas, w jakiej chwili przebiegał przez początek toru, - w którem miejscu i w której chwili kierunek ruchu zmienił się na odwrotny, w jakim kierunku punkt biegł przedtem, i w jakim potem?

2. Punkt biegnie po linji prostej według równania $s=t^3-3t^2-24t+5$; wyznaczyć odległość pomiędzy punktami zwrotu Odp.: 108.

3. Ruch punktu jest prostolinjowy, a równanie ruchu $s=a\sin(\alpha+\omega t)$ gdzie a, α i ω są wielkościami stałemi. Gdzie znajdował się punkt ruchomy, gdy zaczynano rachować czas, kiedy przechodził po raz pierwszy od owej chwili przez początek toru, w jakich położeniach odbywają się zmiany kierunku ruchu, i ile czasu upływa pomiędzy dwiema następującemi po sobie zmianami?

Odp.: Pomiędzy dwiema zmianami upływa $\frac{\pi}{\omega}$ sekund.

4. Dwa punkty biegną tąż samą prostą, a ich równania ruchu są: $s=t^2+15t-25$ i $s=18t+15$. W których miejscach nastąpią spotkania?

Odp.: $s_1=-165$ i $s_2=303$.

5. Dwa punkty biegną prostemi x i y, przecinającemi się w 0 pod kątem prostym. Jeżeli punkt 0 obierzemy za początek obydwóch torów, to równania ruchu będą $x=a_1t+b$, $y=a_2t+b$. Wyznaczyć najmniejszą odległość pomiędzy punktami ruchomymi. Odp.: $\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.

6. Równanie ruchu punktu: $s=2t^3-18t^2+50t-50$. Z jaką szybkością punkt ten przechodził przez początek toru? Odp.: 20

7. Prosta x jest nieruchoma, a prosta a posuwa się ze stałą szybkością v w kierunku prostopadłym do a, tworząc z prostą x stały kąt α. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostych a i x. Odp.: $\dfrac{v}{\sin\alpha}$.

8. Prosta obraca się około punktu 0 ze stałą szybkością kątową ω; wyznaczyć szybkość punktu przecięcia tej prostej z okręgiem, który przechodzi przez 0 i którego promień $=$ a. Odp.: $2a\omega$

9. Punkt M biegnie po prostej OM w kierunku OM z szybkością v. Jest on połączony sznurem, przechodzącym przez blok O, z innym punktem P, który porusza się po prostej x, równoległej do OM. Wyznaczyć szybkość, którą punkt P posiada w chwili, gdy prosta PO tworzy z x kąt φ. Odp.: $\frac{v}{\cos\varphi}$.

10. Równania ruchu punktu są $x = \frac{a^2t^2}{2p}$, $y = at$. Wyznaczyć tor oraz szybkość z początku rachuby czasu.

Odp.: Torem jest parabola styczna do osi y, szukana szybkość $= a$.

11. Równania ruchu punktu są $x = a.\cos^3 wt$, $y = a \sin^3 wt$. Wyznaczyć tor punktu, położenie, w którem szybkość była największa, oraz tę szybkość największą.

Odp.: Szybkość największa $= \frac{3aw}{2}$.

12. Punkt porusza się według równań $x = t^2 - 4t + 3$ i $y = 5t - 9$. Wyznaczyć położenie, w którem szybkość była najmniejsza i kierunek tej szybkości.

Odp.: Szybkość najmniejsza jest prostopadła do osi x.

13. Punkt ruchomy zajmował w pewnej chwili położenie $(0, a)$, a rzuty szybkości jego na osi x i y wynoszą odpowiednio $\frac{ac}{y}$ i $\frac{c\sqrt{y^2-a^2}}{y}$. Wyznaczyć szybkość i tor.

Odp.: Szybkość $= c$; a torem jest łańcuchowa.

14. Prosta obraca się około ogniska F paraboli, przyczem punkt jej położony w odległości jednostkowej od F, posiada szybkość ω. Odległość ogniska od wierzchołka $= p$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostej z parabolą w chwili, gdy pierwsza tworzy z osią paraboli kąt φ. Odp.: $\frac{2\omega p}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

15. Dwa okręty, zajmujące dane położenia, płyną z szybkościami danemi. Wyznaczyć wykreślnie szybkość, z którą powinien płynąć trzeci okręt, którego położenie jest również dane, aby jadącym na nim wydawało się, że dwa pierwsze są nieruchome. (Widzowi przedmiot odległy wydaje się nieruchomym, jeżeli szybkość tego przedmiotu jest skierowana wzdłuż prostej, łączącej go z okiem widza).

16. Deszcz pada pionowo z szybkością v .Pod jakim kątem do pionu należy ustawic laskę parasola, idąc z szybkością u , aby najskuteczniej zasłonić się od deszczu? Odp.: $\operatorname{arctan} \frac{u}{v}$.

17. Czy do wagonu bez dachu więcej wpada deszczu na sekundę podczas postoju,czy podczas biegu.

18. Okrągła tarcza obraca się około środka;okazać że względem punktu A , położonego na obwodzie, szybkości wszystkich innych punktów obwodu są skierowane do przeciwległego końca średnicy,przechodzącej przez A .

19. Dwa punkty ruchome P i Q zajmują w pewnej chwili położenie O i A . Pierwszy porusza się z szybkością stałą u, prostopadłą do OA, szybkość zaś drugiego jest wciąż skierowana do pierwszego i odległość pomiędzy niemi jest stale równa a . Jaki kąt utworzą te szybkości po upływie t sekund.

Odp.: $2 \operatorname{arctan} e^{\frac{ut}{a}}$.

20. Koło obraca się w swej płaszczyźnie około punktu A, położonego na obwodzie, z szybkością kątową ω, a punkt P porusza się po obwodzie w kierunku odwrotnym z szybkością kątową 2ω względem koła. Okazać, że torem punktu P jest linja prosta i że szybkość bezwzględna $= 2a\omega\cos\left(\frac{s}{2a}\right)$ gdzie s oznacza łuk AP i a promień koła.

21. Dwie sztaby AB i BC połączone w B za pomocą przegubu, poruszają się w płaszczyźnie. Wyznaczyć wykreślnie szybkość przegubu B, mając dane szybkości końców A i C.

22. Wyznaczyć szybkość kątową ziemi i wskazać, w którą stronę jest zwrócona na osi ziemskiej NS.

Odp.: $\omega = 0{,}00007$.

23. Dwie proste obracają się około środków O_1 i O_2 przyczem ich punkt przecięcia obiega okrąg, przechodzący przez te środki. Szybkość kątowa pierwszej prostej $= \omega$; wyznaczyć szybkość kątową drugiej.

24. Okrąg o promieniu a obraca się w swej płaszczyźnie około punktu 0 z szybkością kątową ω. Wyznaczyć

linję przewodnią w dwóch przypadkach: /1/ gdy O leży w środku, /2/ gdy leży na okręgu.

Odp.: Okrąg o promieniu $a\sqrt{1+\omega^2}$.

25. Torem punktu A układu płaskiego jest okrąg, którego środek leży w O, a promień $=r$; torem zaś punktu B jest prosta, przechodząca przez O. Wyznaczyć szybkość punktu B w funkcji kąta $AOB = \varphi$, oraz szybkości kątowej ω promienia OA.

Odp.: $\frac{r\omega(r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi})\sin\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$, gdzie $l=AB$

26. Prosta, należąca do układu ruchomego, toczy się po okręgu. Wyznaczyć tor punktu, który przechodził przez środek okręgu. Odp. Spiralna Archimedesa.

27. Srodkiem chwilowym jest wciąż jeden i ten sam punkt układu ruchomego; dowieść, że punkt ten zajmuje stałe położenie na płaszczyźnie nieruchomej.

28. Spiralna logarytmiczna toczy się po linji prostej; wyznaczyć tor jej bieguna. Odp.: Linja prosta.

29. Układ obraca się około punktu A ze stałą szybkością kątową ω, a ten punkt A biegnie prostą a ze sta-

łą szybkością v. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych.

30. Punkt M układu płaskiego obiega spiralną Archimedesa, której biegun leży w 0, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = a\varphi$, a prosta m układu, zawierająca punkt M, przechodzi wciąż przez 0, Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych.

31. Punkt M układu obiega spiralną logarytmiczną, której biegun leży w 0, i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = ae^{\varphi}$, a prosta m układu, zawierająca punkt M, przechodzi wciąż przez 0. Wyznaczyć obydwie linje środków chwilowych.

32. Jeden bok ruchomego kąta ABC przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt A, a punkt C, położony na drugim boku, pozostaje na nieruchomej prostej x, przyczem odległość punktu A od x jest $= BC$. Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych.

33. Wierzchołek kąta prostego obiega spiralną lo-

garytmiczną $r=ae^{\varphi}$, a jeden z jego boków przechodzi przez biegun; wyznaczyć obwiednię drugiego boku.

34. Wyznaczyć promienie krzywizny w wierzchołkach elipsy, której osie wynoszą $2a$ i $2b$.

Odp.: $\frac{a^2}{b}$ i $\frac{b^2}{a}$.

35. Punkty O_1 i O_2 są środkami krzywizny linji środków chwilowych stałej i ruchomej w punkcie zetknięcia; okazać, że O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu O_2.

36. Jeden punkt układu obiega koło, a drugi prostą, przechodzącą przez środek tego koła. Wykreślić koło przegiąć w jednem z położeń układu.

37. Półkula jednorodna o promieniu a jest oparta o kulę powierzchnią krzywą. Jaki powinien być promień kuli, aby równowaga była trwała?

Odp. Większy od $\frac{5a}{3}$.

38. Punkt P biegnie do stałego punktu O z szybkością αx^{a}; gdzie α jest stałe, a $x=OP$ wyznaczyć

przyśpieszenie.

Odp. Przyśpieszenie jest odwrócone od 0 i = $=\alpha^2 n x^{2n-1}$.

39. Ruchoma styczna do paraboli $y = 4px$ przecina oś y w punkcie B, a oś x w C. Szybkość punktu B jest stała i równa v. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu C.

Odp.: $\frac{2v^2}{p}$.

40. Punkt obiega cykloidę $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1-\cos\vartheta)$ przyśpieszenie jego jest wciąż równoległe do osi odciętych i wynosi p_0, gdy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcji ϑ.

Odp.: $\frac{p_0(1-\cos\vartheta)}{\sin^3\vartheta}$.

41. Pociąg wyszedł ze stacji, biegł minutę ze stałem przyśpieszeniem, następnie $2\frac{1}{2}$ minuty ze stałą szybkością, ostatnie 30 sekund ze stałem opóźnieniem i zatrzymał się na stacji następnej. Odległość pomiędzy stacjami wynosi $3\frac{1}{4}$ klm. Wyznaczyć owo przyśpieszenie, opóźnienie i szybkość stałą.

Odp.: 3600 : 7200 : 60 w klm. i godzinach.

42. Pociąg, idący ze stałem przyśpieszeniem p, przechodził przez dwa następujące po sobie przystanki z szybkościami v_1 i v_2. Wyznaczyć odległość pomiędzy przy-

stankami. Odp.: $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$.

43. Dwie łódki na wyścigach ruszyły z szybkościami v_1, v_2, płynęły z przyśpieszeniami p_1, p_2, i bieg skończył się nierozegraną. Wyznaczyć odległość mety od startu.

Odp.: $\frac{2(v_1-v_2)(v_1p_2-v_2p_1)}{(p_1-p_2)^2}$.

44. Punkty A i B wyruszyły jednocześnie z początku współrzędnych; pierwszy biegnie po osi x ze stałem przyspieszeniem p, a drugi po osi y ze stałą szybkością v. Wyznaczyć obwiednię prostej AB.

Odp.: Parabola $y = -\frac{8v^2}{p}x$.

45. Pociski A i B pozostawały początkowo na jednym pionie i AB było równe h. Jednocześnie A zaczyna swobodnie spadać, a B zostaje wyrzucony pionowo w górę. Spotkanie nastąpiło w tym samym miejscu, z którego wybiegł B, wyznaczyć jego szybkość początkową.

Odp.: $\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

46. Z działa, wymierzonego pionowo w górę, dano dwa strzały w odstępie t sek.; początkowa szybkość pocisków była równa v. Kiedy nastąpi spotkanie?

Odp. W $\frac{2v_0-gt}{2g}$ sek. od drugiego wystrzału.

47. Jaką szybkość posiada punkt, pozostający w ruchu prostym harmonicznym $x = a\sin(\omega t+\alpha)$, gdy odległość jego od środka $= x$.

Odp.: $\pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$.

48. Dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$; kąt A_3 jest prosty, a boki A_1A_3, A_2A_3 równe. W A_1 znajdował się punkt ruchomy w spoczynku; przyciągają go wierzchołki A_1, A_2, A_3, a udzielane przyśpieszenia są wprost proporcjonalne do odległości (współcz.proporc.$= k^2$). Wyznaczyć tor punktu i okres wahań.

Odp.: Okres wahań $= \dfrac{2\pi}{k\sqrt{3}}$.

49. Dwa pociski A i B znajdowały się na jednym poziomie. Pocisk A otrzymał szybkość poziomą w kierunku B i jednocześnie B zaczął spadać. Dowieść, że pociski te się spotkają.

50. Strzelec stoi w odległości a od pionowej ściany, a początkowa szybkość pocisku jego strzelby wynosi v_0. Wyznaczyć granicę pomiędzy punktami ściany dosięgalnemi i niedosięgalnemi.

Odp.: Parabola, której parametr $= \dfrac{v_0^2}{g}$, a ognisko leży pod poziomem strzelca na głębokości $\dfrac{a^2g}{2v_0^2}$.

51. Dowieść, że punkt przecięcia stycznej do toru pocisku z dowolnym pionem porusza się na tym pionie podczas biegu pocisku z przyśpieszeniem ziemskiem.

52. Z punktu O wybiegła jednocześnie pewna liczba pocisków. Prowadzimy z jakiegoś punktu położonego pionowo nad O styczne do torów. Dowieść, że pociski przebiegały jednocześnie przez punkty zetknięcia.

53. Pocisk wybiega w kierunku poziomym z najwyższego punktu kuli o promieniu a. Jaka powinna być szybkość początkowa, aby pocisk nie dotknął powierzchni kuli?

Odp. Większa od $\sqrt{ag}$.

54. Punkt ruchomy wyszedł z punktu O, położonego na danej prostej x z szybkością v_0, tworzącą z ową prostą kąt α, i posiada przyśpieszenie prostopadłe do x, zwrócone do tej prostej i wprost proporcjonalne do odległości współczynnik proporcjonalności $= \omega$. Wyznaczyć równania ruchu. Odp.: $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega} \sin \omega t$.

55. Rzuty przyśpieszenia punktu na osi x i y są odpowiednio równe $-a$ i a, a gdy punkt przebiegał przez początek układu, to szybkość jego v_0 była skierowana według osi x. Wyznaczyć położenie, w którem punkt poruszał się najwolniej.

Odp.: $\left(\frac{3v_0^2}{8a}, \frac{v_0^2}{8a}\right)$.

56. Pocisk został wyrzucony z szybkością początkową v_0 pod kątem α. Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie najwyższym.

Odp.: $\frac{v_0 \cos^2\alpha}{g}$.

57. Torem punktu jest cykloida, przyśpieszenie jest wciąż skierowane prostopadle do podstawy i wiadomo, że punkt przybywa do wierzchołka z szybkością c. Dowieść, że przyśpieszenie = $\frac{64 a^3 c^2}{\rho^4}$, gdzie ρ oznacza promień krzywizny.

58. Punkt obiega cykloidę, w której promień koła tworzącego = a, przyczem styczna do toru obraca się ze stałą szybkością kątową ω. Wyznaczyć przyśpieszenie.

Odp.: $4a\omega^2$.

59. Punkt A obiega koło o promieniu a, przyczem przyśpieszenie jest skierowane do stałego punktu 0, położonego na obwodzie. Wyznaczyć przyśpieszenie w funkcji promienia wodzącego $OA = r$.

Odp.: $\frac{8c^2a^2}{r^5}$ gdzie c jest wielkością stałą.

60. Przyśpieszenie punktu ruchomego M jest wciąż skierowane do stałego punktu 0 i równe $\frac{k^2}{r^3}$, gdzie r oznacza odległość OM a k współczynnik proporcjonalności Punkt M wyruszył z położenia A, odległego o a od 0 z szybkością $\frac{k}{a}$, tworzącą z OA kąt 45°. Wyznaczyć tor punktu M.

Odp.: $r = ae^{\varphi}$.

61. Punkt posiada stałą szybkość $a\omega$, a jego promień wodzący r, wyprowadzony ze stałego bieguna 0, obraca się z szybkością kątową $\frac{r\omega}{a}$. Wyznaczyć tor i przyśpieszenie.

Odp.: Torem jest lemniskata, a przyśpieszenie $= 3\omega^2 r$.

62. Tarcza okrągła o promieniu a obraca się około środka ze stałą szybkością kątową ω, a brzegiem tarczy biegnie punkt M ze stałą szybkością względną w. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne punktu M.

Odp.: $(a\omega + 2w)\omega + \frac{w^2}{a}$.

63. Sztaba obraca się około swego końca z szybkością kątową stałą. Z końca tego wyszedł punkt M z początkową szybkością równą zeru i wędruje po sztabie ze stałem przyśpieszeniem p. Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne, które posiadał punkt M w chwili gdy tworzyło

ono ze sztabą kąt 45°.

Odp.: $4p(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

64. Układ S obraca się około punktu 0 ze stałą szybkością kątową ω , a szybkość względna w punktu M jest stała co do wielkości. Jaki powinien być tor względny punktu M , aby jego przyśpieszenie bezwzględne było stale skierowane do punktu 0 ?

Odp.: Koło o promieniu $\frac{w}{2\omega}$,położone dowolnie,albo koło o promieniu dowolnym, zatoczone z 0.

65. Punkt M posiada ruch harmoniczny na prostej x : środkiem tego ruchu jest punkt 0, okres wynosi $\frac{2\pi}{\omega}$, a amplituda $2a$,Prosta x jest ruchoma, a mianowicie obraca się około 0 z szybkością kątową ω . Dowieść,że koniec przyśpieszenia bezwzględnego punktu M zatacza koło niego okrąg o promieniu $2a\omega^2$.

66. Punkt A układu porusza się po prostej x z daną szybkością stałą, a punkt B po prostej y . Wyznaczyć wykreślnie przyśpieszenie punktu B .

67. Sztaby A_1O i A_2O są połączone z 0 przegubem, i cały ten układ porusza się w płaszczyźnie. Znane są szybkości i przyśpieszenia punktów A_1 , A_2 ; wyznaczyć wykreślnie przyśpieszenie przegubu 0.

DYNAMIKA.

1. Ciało w masie M leży na gładkim stole; do niego jest przyczepiony sznur, który zwisa ze stołu i dźwiga na końcu blok o masie m. Przez blok przechodzi inny sznur, na którego końcach wiszą masy m_1 i m_2. Wyznaczyć przyspieszenie ciała M?

Odp.: $\dfrac{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}{(M+m)(m_1+m_2)+4m_1m_2}\,g.$

2. Przez nieruchomy blok przerzucono sznur, a na lewym końcu sznura zawieszono drugi blok lekki, przez który przechodzi drugi sznur, dźwigający na końcach ciężary P i Q. Jaki ciężar należy zawiesić na prawym końcu pierwszego sznura, aby ciężar Q pozostał w spokoju?

Odp.: $\dfrac{4PQ}{3P-Q}$.

3. Na końcach sznura przerzuconego przez nieruchomy blok, wiszą dwa jednakowe ciężary. Jak zmieni się naprężenie sznura, gdy podwoimy obciążenie jednego końca, a zmniejszymy ciążenie drugiego?do $2/3$?

4. Ciało zostało rzucone w górę z szybkością v_0 po linji największego spadku równi pochyłej ustawionej pod

kątem α do poziomu. Kąt tarcia - φ. Wyznaczyć szybkość, z którą ciało powróci do miejsca, z którego wyszło.

Odp.: $v_0\sqrt{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}}$.

5. Wagon o masie m oderwał się w punkcie A podczas pełnego biegu od pociągu, którego całkowita masa była równa M. Wagon zatrzymał się w punkcie B w odległości l od A. W jakiej odległości od B była wówczas reszta pociągu, jeżeli siła pociągowa lokomotywy pozostała bez zmiany, a opór, który pociąg napotyka w biegu jest proporcjonalny do masy?

Odp.: $\frac{Ml}{M-m}$.

Ciało o masie m otrzymało szybkość v_0, w ośrodku, który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości; współczynnik proporcjonalności = k. Wyznaczyć drogę, którą ciało przebiegnie w czasie t.

Odp.: $\frac{m}{k}\lg\frac{v_0kt+m}{m}$.

7. Ciało spadło na ziemię z nieskończenie wielkiej odległości. Dowieść, że doszłoby ono do powierzchni ziemi z taką samą szybkością, gdyby wysokość spadania była równa promieniowi ziemskiemu, i gdyby siła ciążenia była stale równa mg.

8. Część łańcucha, którego całkowita długość $= a$ leży na gładkim stole, a druga część o długości b zwisa. W jakim czasie łańcuch zsunie się ze stołu, jeżeli pozwolimy mu spadać?

Odp.: $\sqrt{\frac{a}{g}}\, lg \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

9. Na płaszczyźnie poziomej stoi klin, którego ściany boczne tworzą z podstawą kąty α_1 i α_2. Ściany te są gładkie i leżą na nich masy m_1, m_2, połączone nicią, przechodzącą przez krawędź. Jakie przyśpieszenie poziome powinien mieć klin, aby masy m_1, m_2, pozostały względem niego w spokoju?

Odp.: $\frac{(m_1 \sin\alpha_1 + m_2 \sin\alpha_2)}{m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2}\, g$.

10. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej jest umocowana okrągła tarcza o promieniu a. Do pewnego punktu jej obwodu przyczepiono punkt materjalny za pomocą sznura, którego długość jest równa połowie obwodu. Sznur był wyprostowany i posiadał kierunek promienia, gdy punkt materjalny otrzymał szybkość v_0 prostopadłą do sznura. W jakim czasie dojdzie on do obwodu tarczy?

Odp.: $\frac{\pi^2 a}{v_0}$.

11. Koniec nici o długości l jest umocowany w najwyższym punkcie gładkiej kuli o promieniu a. W drugim

końcu nić dźwiga ciężarek, który zatacza koło poziome ze stałą szybkością kątową, przyczem część nici $a\alpha$ pozostaje w zetknięciu z kulą. Wyznaczyć szybkość kątową.

Odp.: $\omega^2 = \dfrac{g\cos\alpha}{[a\cos\alpha + (l - a\alpha)\cos\alpha]\sin\alpha}$.

12. W środku nici o długości $2a$ jest przywiązany punkt materjalny m, a na końcu punkt M. Drugi koniec jest przymocowany do gładkiego stołu, na którym leżą punkty i dwie połowy nici tworzą kąt α. Punktowi M nadano szybkość prostopadłą do części nici łączącej go z m, przyczem obydwie części pozostały w naprężeniu. Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie początkowym.

Odp.: $\dfrac{a(m + M\sin\alpha)}{m}$.

13. Trzy punkty materjalne A, B, C każdy o masie m, leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, przyczepione do nierozciągalnej nici, i części nici AB, BC są odpowiednio równe a, b. Punkt B jest przymocowany do płaszczyzny, A zaś oraz C krążą koło niego z szybkością kątową ω, przyczem obydwie części nici leżą na linji prostej. Wyznaczyć naprężenia, które powstaną w nici bezpośrednio po wyswobodzeniu punktu B.

Odp.: $\dfrac{m(2a+b)\omega^2}{3}$ i $\dfrac{m(a+2b)\omega^2}{3}$.

14. Wagon rusza na łuku i idzie ze stałem przyśpieszeniem stycznem p. Szyna zewnętrzna jest wzniesiona nad wewnętrzną, skutkiem czego podłoga tworzy z poziomem kąt α. Jaki powinien być conajmniej współczynnik tarcia pomiędzy przedmiotem, leżącym na podłodze, a podłogą, aby przedmiot ten nie zsuwał się.

Odp.: $\dfrac{\sqrt{p^2+g^2\sin^2\alpha}}{g\cos\alpha}$.

15. W najwyższym punkcie gładkiego kołowego drutu o promieniu r, położonego w płaszczyźnie pionowej, umieszczono mały pierścień, nawleczony na drut. Pierścieniowi nadano szybkość v i jednocześnie wypuszczono drut. Ile obrotów wykona pierścień, podczas gdy drut przejdzie drogę ?

Odp.: $\dfrac{v}{2\pi r}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

16. Rura ABC wewnątrz gładka stanowi łuk koła, odpowiadający kątowi centralnemu 240°, a promień koła = a. Rura ta znajduje się w płaszczyźnie pionowej, a cięciwa , AC jest pozioma. Jaką szybkość powinien mieć pocisk w najniższym punkcie B, aby odbyć całkowity obrót.

Odp.: $5ag$.

17. Punkt materjalny jest przywiązany do końca nici nawiniętej na koło, i jest odpychany od środka z siłą wprost proporcjonalną do odległości; współczynnik propor-

cjonalności $=k$; początkowo punkt ten znajdował się w spokoju na obwodzie koła; wyznaczyć naprężenie, panujące w nici, gdy już odwinęła się długość s .

Odp.: $2ks$.

18. Wahadło składa się z ciężaru, uwiązanego na sznurze, który zrywa się pod działaniem siły równej podwójnej wadze ciężaru. Wyznaczyć największą amplitudę takiego wahadła. Odp.: 120°.

19. W pewnym punkcie wewnątrz gładkiej rurki, posiadającej kształt pierścienia kołowego o promieniu a ,położonej w płaszczyźnie poziomej, są przyczepione końce dwóch jednakowych elastycznych nici. Naturalna długość każdej nici $= \frac{\pi a}{2}$ naprężenie jest proporcjonalne do wydłużenia i współczynnik proporcjonalności $=k$. Nici te naciągnięto w odwrotnych kierunkach (wewnątrz rurki) i pozostałe końce przyczepiono do punktu materjalnego o masie m . Wyznaczyć okres wahań tego punktu, jeżeli odchylenie początkowe nie przekracza ćwierci obwodu pierścienia.

Odp.: Wahania są izochroniczne i okres $= \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$.

20. Punkt materjalny zsuwa się po gładkiej cykloidzie o osi pionowej,wyszedłszy z ostrza bez początkowej

szybkości. Okazać że przyśpieszenie całkowite jest skierowane do środka koła tworzącego i równe g.

21. Ciało o masie m otrzymało szybkość v w ośrodku który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości (współ.proporc.= k). Jaką drogę przebiegnie to ciało w ciągu t sek.?

Odp.: $\frac{m}{k} \lg \frac{v_0 k t + m}{m}$.

22. Wyznaczyć pracę, którą wykonała ziemska siła ciążenia podczas spadania meteorytu, który na powierzchni ziemi waży 1 kg. (Należy uważać, że meteoryt doszedł do powierzchni ziemi z odległości nieskończenie wielkiej).

Odp.: 6370000 kilogramometrów.

23. Punkt materjalny musi pozostawać na łańcuchowej o parametrze a i jest przyciągany do kierownicy z siłą prostopadłą do tej prostej i proporcjonalną do odległości (współcz.prop.= k). Wyznaczyć pracę, którą wykona ta siła, gdy punkt materjalny dojdzie z położenia P do wierzchołka A, jeżeli łuk $PA = s$.

Odp.: $\frac{ks^2}{2}$.

24. Punkt materjalny jest przyczepiony do końca sznura, zarzuconego na gładką tarczę kołową, położoną w pła-

szczyśnie pionowej. W początku punkt znajdował się na końcu średnicy poziomej, a następnie został wciągnięty do szczytu tarczy ze stałem przyśpieszeniem stycznem g. Wyznaczyć stosunek pracy, wykonanej na pierwszej połowie drogi, do pracy wykonanej na drugiej.

Odp.: $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{\pi+4-2\sqrt{2}}$.

25. Do polerowania podłogi służy kamień, ważący 40 kg., jego współczynnik tarcia o podłogę = 0,3. Robotnik przesuwa kamień 10 razy na minutę o 1,2 m. w jedną i drugą stronę. Wyznaczyć sprawność robotnika.

Odp.: 4,8 kilogramometrów na sek.

26. Staw o pojemności 5000 m^3 ma być opróżniony zapomocą pompy, której współczynnik użytecznego skutku = 0,8. Motor rozwija dwa konie, a wodę trzeba odprowadzać na wysokość 3 m. Ile czasu zajmie opróżnienie stawu? Odp.: 34 godz. 43 m.

27. Robotnik wyciągnął przy pomocy linki i bloka nieruchomego wiadro o masie m ze studni o głębokości h. Cała czynność trwała t sek. Z początku robotnik wywierał siłę stałą, następnie wypuścił linkę i wiadro po pewnym czasie zatrzymało dokładnie u wylotu studni. Wyznaczyć największą sprawność, z jaką pracował robotnik?

Odp.: $\dfrac{2mg^2ht}{gt^2-2h}$.

28. Sznur bez końca o długości $2l$ przechodzi przez gładkie poziome kołki, leżące na jednym poziomie. Na sznur są zawleczone dwie paciorki o masach m i M. Pierwszą z nich podnosimy do punktu środkowego linji kołków i następnie pozwalamy jej spadać. Jaka powinna być odległość pomiędzy kołkami, aby paciorki doszły tylko do spotkania?

Odp.: $\dfrac{(3M+m)(M-m)l}{(M+m)^2}$.

29. Punkt materjalny o masie M obiega koło na gładkiej płaszczyźnie poziomej, będąc przywiązany do środka nierozciągalną nicią. W pewnej chwili M uderza o inny punkt materjalny o masie m, pozostający dotychczas w spoczynku, punkty zlepiają się i dalej obiegają razem to samo koło. W jakim stosunku zmieni się naprężenie nici?

Odp.: Stosunek nowego naprężenia do poprzedniego $= \dfrac{M}{M+m}$.

30. Ciężki jednorodny łańcuch wypełnia cienką gładką rurkę, posiadającą kształt ćwiartki koła o promieniu a; jeden z promieni granicznych tej ćwiartki jest pionowy, a drugi poziomy. Łańcuch zaczyna spadać ze stanu spoczynku; wyznaczyć szybkość jego w chwili, gdy górny koniec wychodzi z rurki.

Odp.: $\sqrt{\frac{ga(\pi^2+8)}{2\pi}}$.

31. Jednorodny łańcuch o długości l tworzy stos na samym brzegu stołu. Jeden koniec wysunięto cokolwiek poza brzeg, skutkiem czego łańcuch zaczął się stopniowo zsuwać. Z jaką szybkością zejdzie ze stołu koniec drugi?

Odp.: $\sqrt{\frac{2gl}{3}}$.

32. Do końca łańcucha, tworzącego stos na płaszczyźnie poziomej, jest przywiązany pocisk, który waży tyle, co a metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha wzniesie się w górę, gdy nadamy pociskowi szybkość pionową $\sqrt{2gh}$.

Odp.: $\sqrt[3]{a^2(3h+a)}-a$.

33. Wyznaczyć ramię bezwładności płyty półkolistej o promieniu a względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy.

Odp.: $k=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{32}{9\pi^2}\right)$.

34. Granicę cienkiej płaty stanowi parabola $y^2=4px$ i prosta prostopadła do osi paraboli, przeprowadzona w odległości c od wierzchołka. Wyznaczyć ramiona bezwładności względem osi i względem stycznej w wierzchołku.

Odp.: Kwadraty wynoszą odpowiednio $\frac{4cp}{5}$ i $\frac{3c^2}{7}$.

35. Wyznaczyć ramię bezwładności półkuli o promieniu a względem stycznej w wierzchołku.

Odp.: $= k^2 = \frac{b^2}{3}$.

36. Wyznaczyć ramię bezwładności paraboloidy obrotu w której promień podstawy $= b$, względem osi obrotu.

Odp.: $k^2 = \frac{b^2}{3}$.

37. Wyznaczyć ramię bezwładności sześciennego pudełka o cienkich ścianach i krawędzi względem krawędzi.

Odp.: $\frac{7a^2}{9}$.

38. Dowieść, że momenty bezwładności półkulistej czaszy względem wszystkich prostych, przechodzących przez środek a także względem wszystkich prostych, przez wierzchołek, są równe.

39. Wyznaczyć ramię bezwładności sztaby o długości l względem prostej, przechodzącej przez koniec i tworzącej ze sztabą kąt α.

Odp.: $k^2 = \frac{l \sin^2 \alpha}{3}$.

40. Wyznaczyć ramię bezwładności prostokąta, mającego boki a i b, względem przekątni.

Odp.: $k^2 = \frac{a^2 b^2}{6(a^2+b^2)}$.

41. Promień podstawy prostego stożka = a, a wysokość = h. Wyznaczyć ramię bezwładności względem tworzącej.

Odp.: $\dfrac{3a^2(a^2+6h^2)}{20(a^2+h^2)}$.

42. Dwie lekkie sztaby o długościach a i $2a$ są połączone sztywno w O pod kątem prostym i zaopatrzone na końcach w kule, ważące odpowiednio Q i $\frac{Q}{2}$. Sztaby mogą się obracać około O w płaszczyźnie pionowej i wirują ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, przechodzącej przez O, przyczem pierwsza tworzy z tą osią ostry kąt ϑ. Okazać, że $\frac{1}{\sin\vartheta} - \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{a\omega^2}{g}$.

43. W zwykłym kołowrocie promień koła = a, a promień wału = b. Na kole i na wale są nawinięte sznury, dźwigające odpowiednie ciężary P i Q. Wyznaczyć przyspieszenie ciężaru P, uważając masę kołowrotu za znikomo małą.

Odp.: $\dfrac{a(aP-bQ)g}{a^2P+bQ}$.

44. Planeta obraca się około swej osi z tak wielką szybkością kątową, że ciała na jej równiku pozornie nie mają ciężaru. Dowieść, że we wszystkich okolicach powierzchni planety piony przybierają kierunek równoległy do osi

45. Prostokątna deska o masie M może się obracać

około osi poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do dwóch boków; długość boku prostopadłego do osi $= 2a$. Gdy deska zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, położono na niej w odległości c od osi punkt materjalny o masie m; współczynnik tarcia punktu o deskę $= f$. Przy jakiem nachyleniu deski do poziomu punkt zacznie się zsuwać?

Odp.: $\arctan \frac{fMa^2}{Ma^2+9mc^2}$.

46. Przez gładki poziomy kołek przechodzi sznur, na końcach którego wiszą masy M i m. Wyznaczyć przyśpieszenie środka ciężkości tych mas, a następnie reakcję, którą kołek wywiera na sznur.

Odp.: Reakcja $= \frac{4Mmg}{M+m}$.

47. Trzy jednakowe punkty materjalne A, B, C są połączone nierozciągalną nicią tak, że $AB = BC$. Z początku punkt A jest przymocowany, a dwa pozostałe krążą koło niego i nić jest wyprostowana. W jakim stosunku zmienią się naprężenia obydwóch części nici, gdy wyswobodzimy punkt A?

Odp.: W AB naprężenie spadnie do $1/3$ w BC do $1/2$

48. Kula żelazna o promieniu 50 cm. robi 120 obrotów na minutę. Ile obrotów na minutę będzie robiła kula, gdy straci 2452 kilogramometry siły żywej?

Odp-: 60-

49. Ile trzeba wyłożyć pracy, aby kamień młyński, ważący 820 kg. o średnicy 1,4 m. wprawić w ruch obrotowy o 108 obrotach na minutę, nie rachując strat na tarcie?

Odp.: 1300 kilogramometrów.

50. Wydrążony żelazny cylinder o osi poziomej posiada promień zewnętrzny R = 20 cm. promień wewnętrzny r = 10 cm. i długość a = 3 m. Na cylinder jest nawinięty sznur, na którym wisi ciężar Q = 10 kg. Jaką szybkość kątową powinien posiadać cylinder, aby jeszcze podnieść ciężar o h = 5 m. wyżej? Odp.: 4,19.

51. Cylinder o promieniu r, wirujący około osi, postawiono na płaszczyźnie poziomej. W chwili, gdy podstawa dotknęła płaszczyzny, cylinder robił n obr. na min., a współcz. tarcia = f. Ile jeszcze obrotów zrobi cylinder?

Odp.: $\dfrac{\pi r n^2}{4800 f g}$.

52. Jednorodna laska AB o długości $2a$ jest zawieszona swobodnie za koniec A na takiej wysokości, że koniec B znajduje się nad samą ziemią. Nadajemy lasce pewną szybkość kątową, a gdy dojdzie do położenia poziomego, uwsabadzamy koniec A. Jake powinna być ta początkowa

szybkość aby laska spadając utkwiła końcem B w ziemi?

Odp.: $\dfrac{3g(3\pi^2+6\pi+1)}{4a(3\pi+2)}$.

53. Okrągła tarcza, ważąca Q, jest osadzona w punkcie C obwodu na osi poziomej, prostopadłej do płaszczyzny tarczy. Tarcza wyruszyła z położenia, w którem średnica, przechodząca przez C, stała pionowo nad tym punktem. Wyznaczyć reakcję osi po obrocie o 90^0 i o 180^0.

Odp.: $\dfrac{\sqrt{17}\,Q}{3}$, i $\dfrac{11Q}{3}$.

54. Sztaba o długości $2a$ i masie M obraca się z szybkością kątową ω około nieruchomej osi, która przechodzi przez koniec 0 sztaby i tworzy z nią kąt α. Wyznaczyć wektor H względem punktu 0.

Odp.: $\dfrac{4Ma^2\omega\sin\alpha}{3}$

55. Kula o masie M i promieniu a obraca się z szybkością kątową ω około średnicy, a średnica z szybkością 2ω około prostej, która tworzy z nią kąt 60^0 i przechodzi przez koniec 0. Wyznaczyć wektor H względem 0.

Odp.: $H=\dfrac{Ma^2\omega\sqrt{163}}{5}$.

56. Okazać, że wektor H, dowolnego układu względem punktów prostej równoległej do szybkości środka ciężkości jest stały co do wielkości i kierunku.

57. Wektor H względem środka ciężkości jest prostopadły do jego szybkości; wyznaczyć miejsce geometryczne punktów względem których moment ilości ruchu jest równy zeru.

58. Ciała, tworzące układ, pozostawały początkowo w spokoju; przyciągają się one pomiędzy sobą, lecz pozatem żadne inne siły na nie nie działają. Pod działaniem przyciągania ciała cię zeszły i powstało jedno ciało sztywne. Okazać, że pozostaje ono w spokoju.

59. Na szale wagi, z których każda waży Q spadły jednocześnie ciężary Q_1 i Q_2 z wysokości h_1 i h_2. Wyznaczyć początkową szybkość szal.

Odp.: $\dfrac{(Q_1\sqrt{h_1}-Q_2\sqrt{h_2})\sqrt{2g}}{2Q+Q_1+Q_2}$

60. Trzy jednakowe sztaby o długości a, połączone gładkiemi zawiasami posiadają ruch postępowy o szybkości v na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc linję prostą prostopadłą do tej szybkości. Po jakim czasie spotkają się końce sztab skrajnych, gdy zatrzymamy środek średniej? Odp.: $\dfrac{4a\pi}{9v}$.

61. Trzy jednakowe sztaby, połączone przygubami, tworzą na gładkim stole linję prostą. Wymierzamy prosto-

padle do tej prostej w sam środek impuls F . Wyznaczyć impulsy, które stanowią sztaby boczne.

Odp.: $F/6$.

62. Sztaba AB wiruje około końca A . Jak zmieni się siła żywa sztaby, gdy wyswobodzimy A i jednocześnie zatrzymamy B ?

Odp.: Zmniejszy się poczwórnie.

63. Dwie tarcze cylindryczne o masach m_1, m_2 i promieniach a_1, a_2, położone w jednej płaszczyźnie pionowej, mogą się swobodnie obracać około osi, przechodzących przez ich środki i prostopadłych do owej płaszczyzny. Na obwodach tarcz są umocowane końce wiotkiego, lekkiego pasa, daleko dłuższego niż odległości pomiędzy punktami umocowania. Pas w części spoczywa na obwodach, a w części zwisa pomiędzy tarczami. Nadajemy pierwszej tarczy szybkość kątową ω i pozostawiamy układ samemu sobie. Jakie szybkości kątowe będą miały tarcze, gdy pas się wypręży?

Odp.: $\dfrac{m_1 \omega}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1 a_1 \omega}{(m_1 + m_2) a_2}$.

64. Dwie jednakowe sztaby AB i BC każda o długości a tworzą linję prostą i biegną na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością v , prostopadłą do AC. Jakie szybkości kątowe będą miały w pierwszej chwili sztaby, gdy

zatrzymamy koniec A ?

Odp.: $\frac{9v}{7a}$ i $-\frac{3v}{7a}$.

65. Końce jednorodnego pręta o długości $2a$ mogą się swobodnie poruszać po okręgu koła, którego promień wynosi $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. W środku pręta siedzi owad, którego masa jest równa masie pręta. O jaki kąt obróci się pręt w czasie t, gdy owad pobiegnie po nim ze stałą szybkością względną ?

Odp.: $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} \frac{vt}{a}$.

66. Rurka wewnętrzna gładka w postaci koła o promieniu a leży na gładkim stole i może się swobodnie obracać około punktu A obwodu. W rurce w punkcie B na przeciwległym końcu średnicy, przechodzącej przez A, znajdował się punkt materjalny o masie dwa razy mniejszej od masy rurki. Rurka była w spokoju, gdy punkt materjalny otrzymał szybkość v_0. Jaką szybkość względną będzie miał ten punkt po przejściu łuku $a\varphi$ rurki?

Odp.: $\frac{2v_0 \cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4+\sin^2\varphi}}$.

67. Jednorodna belka o długości a spoczywa poziomo na dwóch podstawkach, położonych symetrycznie względem środka. Jaka powinna być odległość pomiędzy podstawkami, aby reakcja jednej z nich nie uległa zmianie w chwili, gdy usuniemy drugą?

Odp.: $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

68. Kula jednorodna o promieniu r i gęstości μ wisi na sznurze. Obracamy ją n razy około średnicy pionowej i pozostawiamy samej sobie. Przyjmując, że moment który sznur wywiera na kulę, jest proporcjonalny do kąta skręcenia, i że współczynnik proporcjonalności $= \lambda$ –, znaleźć kąt, o który obróci się kula w czasie t.

Odp.: $2\pi n \cos t \sqrt{\frac{15\lambda}{8\mu\pi r^5}}$.

69. Sześcian jednorodny może się obracać około jednej z krawędzi, umocowanej w położeniu poziomem. Długość krawędzi jest równa $2a$. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego.

Odp.: $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

70. Dwa wahadła fizyczne o masach m_1, m_2 są osadzone na jednej osi poziomej. Odległości środków ciężkości od osi są odpowiednio równe h_1 i h_2, a długości równoważnych wahadeł prostych l_1 i l_2. Wahadła te połączono sztywno, gdy środki ciężkości znalazły się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś. Wyznaczyć dla takiego wahadła złożonego długość równoważnego wahadła prostego.

Odp.: $\frac{m_1h_1l_1 + m_2h_2l_2}{m_1h_1 + m_2h_2}$.

71. Koło rozpędowe zostało umontowane w taki sposób, że płaszczyzna jego tworzy z osią wała kąt α. Moment bezwładności koła względem średnicy $= A$ i względem osi symetrji $= C$. Wyznaczyć moment pary, działającej na łożyska, gdy wał posiada stałą szybkość kątową ω.

Odp.: $(C - A)\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

72. Tarcza kołowa, której środkiem jest punkt O, a promień $= r$, otrzymuje uderzenie w punkt A obwodu i może się obracać około cięciwy prostopadłej do AO. W jakiej odległości od środka powinna być ta cięciwa, aby uderzenia nie wywołały wstrząśnień?

Odp.: $\frac{r}{4}$.

73. W jaki sposób należy uderzyć tarczę okrągłą, leżącą na gładkim stole, aby zaczęła się obracać około jednego z punktów obwodu?

Odp.: Linja uderzenia powinna dzielić prostopadłą średnicę w stosunku 3 : 1.

74. Jednorodna sztaba o masie m jest oparta końcem A o gładki stół, a środek jej znajduje się na wysokości h nad stołem. Z jaką szybkością środek dojdzie do stołu, gdy sztaba zostanie wyswobodzona?

Odp.: $\sqrt{\frac{3gh}{2}}$.

75. Obręcz kołowa o masie m wisi na dwóch kołkach, położonych na jednym poziomie; widać je ze środka obręczy pod kątem 2α. Wyznaczyć reakcję, którą jeden z kołków wywiera na obręcz w chwili, gdy drugi zostaje usunięty w dwóch przypadkach: 1/ jeżeli kołki są gładkie, 2/ gdy są chropowate.

Odp.: $mg \cos\alpha$ i $\frac{mg}{2}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

76. Drut AB, zgięty w formie półkola, obraca się około końca A ze stałą szybkością kątową na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć punkt C drutu, w którym działa największy moment zginający.

Odp.: Kąt centralny φ, odpowiadający łukowi czyni zadość równaniu $\tan\varphi = \pi - \varphi$.

77. Dwie korby równe i równoległe, każda o długości r są połączone za pomocą przegubów sztabą o długości $2a$ i masie M. Szybkość kątowa korb jest stała i równa ω. Wyznaczyć największy moment zginający w sztabie.

Odp.: $\frac{Mar\omega^2}{4}$.

78. Sztaby OA i AB są połączone sztywno w A pod kątem prostym i obracają się około 0 w płaszczyźnie OAB ze stałą szybkością kątową ω. Długość sztaby AB jest równa a i waga Q. Wyznaczyć moment zginający w przekroju C sztaby OA, położonym w odległości x od 0

Odp.: $\frac{Q\omega^2 a x}{2g}$.

79. Kula o masie m uderza centralnie kulę o masie mn i po uderzeniu szybkości kul są równe i odwrotne. Wyznaczyć współczynnik restytucji.

Odp.: $\frac{2}{n-1}$.

80. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej kładziemy trzy kule doskonale sprężyste w linji prostej. Udzielamy następnie jednej ze skrajnych szybkość tak, aby uderzyła centralnie środkową, a środkowa uderzy drugą skrajną. Masy skrajnych wynoszą odpowiednio m_1 i m_2; jaka powinna być masa środkowej, aby druga skrajna otrzymała szybkość jaknajwiększą?

Odp.: $\sqrt{m_1 m_2}$.

81. Dwa ciężary P i Q wiszą na końcach sznura, przechodzących przez nieruchomy blok. W początku ciężary są w spoczynku na wysokości h nad zupełnie niesprężystą płaszczyzną poziomą; po wyswobodzeniu większy ciężar P robi szereg uderzeń w ową płaszczyznę. W jakim czasie ruch ustanie całkowicie?

Odp.: $3\sqrt{\frac{3h(P+Q)}{g(P-Q)}}$.

82. Dwie jednakowe gładkie kule leżą na stole; trzecia taka sama kula uderza obydwie i zatrzymuje się. Wyznaczyć współczynnik restytucji.

Odp.: $2/3$.

83. Na prostokątnym bilardzie $ABCD$ przy boku AB w punkcie P leży kula $AP = b_1$, $BP = b_2$, $BC = a$ i współczynnik restytucji $= \varepsilon$. W jakim kierunku należy uderzyć kulę, aby ta uderzywszy po kolei wszystkie boki, powróciła do punktu P?

Odp.: Szukany kierunek tworzy z AB kąt $\operatorname{arctan} \frac{a\varepsilon}{b_1 + \varepsilon b_2}$.

84. Punkt materjalny o masie m spada na koniec poziomej belki, osadzonej na poziomej osi, oś ta przechodzi przez środek ciężkości belki. Współczynnik restytucji = $= \varepsilon$. Jaka powinna być masa belki, aby punkt materjalny odskoczył?

Odp.: Większa od $\frac{3m}{\varepsilon}$.

85. Sztaba jednorodna spada pionowo bez ruchu obrotowego i uderza jednym końcem w gładką płaszczyznę poziomą. Jaki kąt powinna sztaba tworzyć z poziomem, aby jej szybkość kątowa była po uderzeniu największa?

Odp.: $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.