P O L I T E C H N I K A W A R S Z A W S K A
Wydział Inżynierii Środowiska
Instytut Ogrzewnictwa i Wentylacji

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Paweł Kędzierski

Wpływ współczynnika przejmowania ciepła z nieizolowanych przewodów na wymiarowanie ogrzewań wodnych

Promotor
dr hab. inż. Marian Rosiński

Warszawa 2003

Składam serdeczne podziękowania nieodżałowanemu
Panu Profesorowi śp. Robertowi Rabjaszowi
dzięki któremu rozpocząłem pisanie tej pracy
oraz Panu Dziekanowi Marianowi Rosińskiemu promotorowi,
który doprowadził do jej szczęśliwego zakończenia.

Za wszelką pomoc i twórczą krytykę dziękuję też wszystkim koleżankom i kolegom z Instytutu Ogrzewnictwa i Wentylacji.

Spis treści

1. WSTĘP ... 11
1.1. Tezy pracy ... 11
1.2. Cel i zakres pracy ... 12
1.3. Streszczenie pracy ... 12
2. PRZEJMOWANIE CIEPŁA W UJĘCIU TEORETYCZNYM ... 13
2.1. Współczynniki przejmowania ciepła ... 15
2.1.1. Wymiana ciepła na drodze konwekcji ... 15
2.1.2. Wymiana ciepła na drodze promieniowania ... 19
2.1.3. Teoria podobieństwa ... 23
2.2. Bilansowe równania przejmowania ciepła ... 26
2.2.1. Równanie ciągłości ... 26
2.2.2. Równania ruchu płynu w aspekcie konwekcji swobodnej ... 29
2.2.3. Równanie energii ... 35
2.2.4. Wpływ burzliwości ruchu na postać równań ... 36
2.2.5. Równania bilansowe – podsumowanie ... 37
2.3. Przegląd literaturowy analitycznych rozwiązań bilansowych równań konwekcji swobodnej ... 38
2.3.1. Analiza wymiarowa dla konwekcji swobodnej ... 39
2.3.2. Klasyczne rozwiązanie analityczne dla płyty pionowej ... 41
2.3.3. Rozwiązania analityczne dla pionowego cylindra ... 48
2.3.4. Rozwiązania analityczne dla poziomego cylindra ... 50
2.3.5. Konwekcja swobodna przy turbulentnym ruchu płynu ... 52
3. PRZEGLĄD DOŚWIADCZALNYCH METOD WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA ... 56
3.1. Metoda ustalonego strumienia cieplnego ... 56
3.2. Metoda stanu uporządkowanego ... 59
3.3. Metoda interferencyjna i smugowa ... 63
3.4. Metoda termografii ciekłokrystalicznej ... 65
4. BADANIA WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA ... 67
4.1. Opis stanowiska badawczego do pomiaru współczynnika przenikania ciepła ... 67
4.1.1. Przygotowanie stanowiska do badań ... 69
4.1.2. Modyfikacja stanowiska laboratoryjnego ... 70
4.2. Przeprowadzenie badań ... 73
4.2.1. Ogólny opis układu ... 73
4.2.2. Kryteria stanu ustalonego układu grzejnik-otoczenie ... 76
4.2.3. Badania z zastosowaniem czujników półprzewodnikowych ... 79
4.2.4. Badania termograficzne ... 83
4.2.5. Wyniki badań z zastosowaniem czujników miniaturowych typu Pt100 ... 88
4.3. Opracowanie wyników badań ... 89

4.3.1. Określenie niepewności wykonanych pomiarów 89
4.3.2. Określenie równań kryterialnych 91
4.3.3. Analityczne określenie charakterystyk cieplnych pionów w instalacjach centralnego ogrzewania 94
4.3.4. Określenie i porównanie uogólnionych charakterystyk cieplnych badanych przewodów 95
4.4. Porównanie rozwiązań analitycznych otrzymanych przez innych autorów 98
4.5. Porównanie wartości współczynnika przejmowania ciepła otrzymanych drogą doświadczalną z wartościami teoretycznymi 100
5. POMIARY WARTOŚCI TRANSPORTOWEJ STRATY CIEPŁA W TRADYCYJNEJ INSTALACJI CENTRALNEGO OGRZEWANIA 101
5.1. Opis stanowiska badawczego do określania wielkości transportowej straty ciepła 101
5.1.1. Rzeczywisty model instalacji c.o. wodnej 101
5.1.2. Model analityczny i jego weryfikacja fizykalna 104
5.2. Badania układu 105
5.2.1. Pierwsza seria pomiarów 105
5.2.2. Druga seria pomiarów 106
5.3. Opracowanie wyników badań 107
5.4. Wpływ transportowej straty ciepła na wymiarowanie instalacji centralnego ogrzewania 109
6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI 110
6.1. Podsumowanie 110
6.2. Wnioski 111
BIBLIOGRAFIA 112

Wykaz oznaczeń

α_k – współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję, W/m^2K

α_r – współczynnik przejmowania ciepła przez promieniowanie, W/m^2K

α_c – całkowity współczynnik przejmowania ciepła, W/m^2K

a – współczynnik wyrównania temperatury, $a = \lambda/c_p \rho$, m^2/s

a – absorpcyjność,

A – powierzchnia ciała stałego, m^2

β – współczynnik rozszerzalności objętościowej (dla gazów $\beta = 1/T$)

c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, J/kgK

C – stała promieniowania ciała szarego, W/m^2K^4

C_0 – stała promieniowania ciała doskonale czarnego, W/m^2K^4

d_z, D – średnica zewnętrzna, mm

d_n – średnica nominalna, mm

δ – grubość warstwy przyściennej, m

δ_{ij} – tensor jednostkowy,

e – strumień emisji, W/m^2

$\dot{\varepsilon}$ – tensor odkształcenia,

ε_n – emisyjność zastępcza,

F_B – siła bezwładności, N

F_T – siła tarcia, N

F_W – siła wyporu hydrostatycznego, N

g – przyspieszenie ziemskie, m/s^2

G – masowy strumień wody, kg/s

h – strumień jasności powierzchni, W/m^2

φ – współczynnik obciążenia cieplnego,

$\varphi_{1,2}$ – średni współczynnik kątowy wymiany ciepła przez promieniowanie,

λ – współczynnik przewodności cieplnej płynu lub ciała stałego, W/mK

L – charakterystyczny wymiar geometryczny, m

m – wykładnik charakterystyki cieplnej grzejnika,

M – masa ciała stałego lub płynu, kg

n_i – wektor jednostkowy,

ν – współczynnik lepkości kinematycznej, m^2/s

η – współczynnik lepkości dynamicznej, m^2/sm

p – przepuszczalność,

p – ciśnienie, Pa

$\dot{q}$ – gęstość strumienia ciepła, W/m^2

$\dot{Q}$ – strumień energii promieniowania cieplnego, W

r – refleksyjność,

R – indywidualna stała gazowa, J/kgK

ρ – gęstość właściwa płynu, kg/m^3

t – temperatura, °C,

t_j – wektor naprężenia,

t_m – temperatura charakterystyczna, °C

t_w – temperatura na powierzchni ciała stałego, °C

t_f, t_∞ – temperatura poza warstwą przyścienną, °C

t^+ – bezwymiarowa temperatura,

Δt – różnica temperatury ścianki i przyległego płynu, K

Δt_{ar} – średnia arytmetyczna różnica temperatury, K

T – temperatura bezwzględna, K

τ – czas, s,

τ_{ij} – tensor naprężenia,

ϑ^+ – znormalizowana temperatura,

U – energia wewnętrzna, J

v – objętość właściwa płynu, m^3/kg

V – objętość ciała stałego lub płynu, m^3

w – charakterystyczna prędkość przepływu płynu, m/s

W_{diss} – praca rozproszona, W

ζ – współczynnik lepkości objętościowej, kg/sm

Podstawowe definicje

1. Całkowity współczynnik przejmowania ciepła α liczbowo równy jest ilości ciepła przejmowanego w ciągu sekundy przez 1 m^2 powierzchni, gdy różnica temperatury tej powierzchni i przyległego płynu, równa jest 1 K. Można także definiować go jako gęstość strumienia przejmowanego ciepła przy różnicy temperatury powierzchni i przyległego płynu równej 1 K: $\alpha_c = \frac{\dot{q}_w}{t_w - t_f}$

2. Współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania α_r określony jest jako iloraz gęstości strumienia ciepła wymienianego przez rozpatrywaną powierzchnię na drodze promieniowania z otoczeniem, odniesiony do różnicy temperatury rozpatrywanej powierzchni i przyległego płynu równej 1 K: $\alpha_r = \frac{\dot{q}_{1-2}}{t_p - t_1}$

3. Średni (całkowity) współczynnik wymiany ciepła α_c określa się jako całkowity strumień ciepła przejmowanego na drodze konwekcji i promieniowania przez przyległy płyn z 1 m^2 powierzchni, przy ich różnicy temperatury równej 1 K: $\alpha_c = \frac{\dot{Q}}{A\,\Delta t}$

4. Siła masowa: $k_j = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta M} = \frac{dF_j}{dM}$

5. Siła powierzchniowa: $f_j = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta V} = \frac{dF_j}{dV}$

6. Wektor naprężenia: $t_j = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A} = \frac{dF_j}{dA}$

Spis rysunków

Rys. 1. Profil prędkości i temperatury w funkcji odległości od ściany y. 15
Rys. 2. Temperatura płynu w funkcji odległości od powierzchni ściany i ilustracja stosunku λ/α jako podstycznej. 17
Rys. 3. Usytuowanie powierzchni dla ilustracji prawa Lamberta. 21
Rys. 4. Usytuowanie powierzchni (układ zamknięty). 22
Rys. 5. Dowolnie zorientowane powierzchnie. 23
Rys. 6. Deformacja zamkniętego systemu o objętości $V(\tau)$ podczas przepływu płynu. 28
Rys. 7. Związek między ciśnieniem średnim a ciśnieniem termodynamicznym. 31
Rys. 8. Zmiana objętości elementarnej jako funkcja różnicy ciśnień. 33
Rys. 9. Fluktuacje prędkości dla statystycznie ustalonego przepływu. 36
Rys. 10. Profile prędkości i temperatury przy swobodnym przepływie wzdłuż ogrzewanej pionowej ściany bądź pionowego walca. 42
Rys. 11. Prędkości w przepływie swobodnym wzdłuż pionowej ściany [71]. 46
Rys. 12. Temperatury w przepływie swobodnym wzdłuż pionowej ściany [71]. 46
Rys. 13. Porównanie grubości warstwy przyściennej dla różnych promieni krzywizny [3]. 48
Rys. 14. Średnia liczba Nusselta na powierzchni pionowego cylindra w funkcji liczby Rayleigha wg uogólnionego równania postaci $Nu_H = A\ Ra_H^m$ [7]. 49
Rys. 15. Rozkład prędkości i temperatury przy laminarnej konwekcji swobodnej wokół poziomego cylindra [72]. 52
Rys. 16. Konwekcja swobodna na powierzchni pionowej (ściana lub walec). 53
Rys. 17. Bezpośrednia metoda generowania strumienia ciepła [68]. 57
Rys. 18. Schemat stanowiska do pomiaru współczynnika przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej na rurze pionowej z wykorzystaniem metody pośredniej. 58
Rys. 19. Konwekcyjna metoda wytwarzania strumienia ciepła [68]. 58
Rys. 20. Wykres zmiany temperatury badanego ciała w czasie jego ochładzania, Θ oznacza bezwymiarową różnicę temperatury. 60
Rys. 21. Zależność $Ko = f(Bi_z)$ dla ciał o różnej geometrii: 1 – płyta, 2 – kula, 3 – walec [56]. 62
Rys. 22. Wyznaczanie lokalnej wartości α przy użyciu α-kalorymetru [68]. 62
Rys. 23. Schemat obrazujący metodę cieni [31]. 63
Rys. 24. Obraz konwekcji swobodnej z wykorzystaniem metody cieni [31]. 64
Rys. 25. Schemat metody interferencyjnej. 64
Rys. 26. Izotermy dookoła poziomej rury oraz pionowej płyty otrzymane metodą interferencyjną [31]. 65
Rys. 27. Metoda pomiary współczynnika przejmowania ciepła z wykorzystaniem termografii ciekłokrystalicznej [117]. 66
Rys. 28. Schemat interfejsu pomiarowego AL 154. Źródło: materiały producenta. 67
Rys. 29. Interfejs pomiarowy AL 154. Źródło: materiały producenta. 68
Rys. 30. Wbudowany wyświetlacz interfejsu pomiarowego AL 154. Źródło: materiały producenta. 69
Rys. 31. Wartości poprawek temperatury dla poszczególnych kanałów układu rejestrującego. 72
Rys. 32. Charakterystyka miniaturowego termometru kontrolnego typu Pt100. 73
Rys. 33. Budowa badanych przewodów i ich rozmieszczenie w komorze do badań cieplnych: a) przekroje poprzeczny i podłużny przewodów, b) rozmieszczenie termometrów na ściance przewodu, c) usytuowanie przewodów w komorze. 74
Rys. 34. Rozmieszczenie przewodów i czujników w komorze do badań cieplnych. 75
Rys. 35. Zmiana temperatury ścianki wzdłuż wysokości przewodu, d_n 20, Q = 103 W. 76
Rys. 36. Zmiana temperatury ścianki wzdłuż wysokości przewodu, d_n 20, Q = 148 W. 77
Rys. 37. Skutki awarii układu rejestracji danych lub sieci energetycznej. 78
Rys. 38. Stan nieustalony dla trzech poziomów mocy cieplnej przewodu. 78
Rys. 39. Rozrzut punktów pomiarowych i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 25 mm. 80

Rys. 40. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 15 mm. 81
Rys. 41. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 20 mm. 82
Rys. 42. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 25 mm. 82
Rys. 43. Termogramy przewodu pionowego d_n 25 mm. Zbliżenia. 84
Rys. 44. Termogramy przewodu pionowego d_n 20 mm. Rozkład temperatury na powierzchni. 85
Rys. 45. Termogramy przewodu poziomego d_n 15 mm. Zbliżenia. 86
Rys. 46. Termogramy przewodu poziomego d_n 15 mm. Zdjęcia z dalszej odległości. 87
Rys. 47. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu poziomego d_n 15 mm. 92
Rys. 48. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 15 mm. 92
Rys. 49. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 20 mm. 93
Rys. 50. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 25 mm. 93
Rys. 51. Charakterystyki cieplne przewodu poziomego d_n 15 mm. 96
Rys. 52. Uogólnione charakterystyki cieplne przewodów pionowych. 97
Rys. 53. Wpływ parametru H/D i liczby Rayleigha na średnią liczbę Nusselta na powierzchni pionowego cylindra w powietrzu (Pr = 0,72) [7]. 99
Rys. 54. Schemat pionu badawczego wraz ze źródłem ciepła i rozmieszczeniem punktów pomiarowych. 102
Rys. 55. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na pionopiętrze. 103
Rys. 56. Grzejnik pionu badawczego wraz z oprzyrządowaniem. 103
Rys. 57. Temperatury zasilania, model wodny, pomiary i obliczenia. 105
Rys. 58. Temperatury powrotu i przepływ, model wodny, pomiary i obliczenia. 105
Rys. 59. Deficyt mocy cieplnej w wybranych pomieszczeniach nr 1 i 4. 108

Spis tablic

Tab. 1. Wartości współczynnika przejmowania ciepła [8]. 18
Tab. 2. Stałe do wzoru McAdamsa [59]. 49
Tab. 3. Wzorcowanie czujników półprzewodnikowych i kalibracja układu rejestrującego. 71
Tab. 5. Wyniki badań I serii przewodu poziomego d_n 15 mm. 79
Tab. 6. Wyniki badań I serii przewodu pionowego d_n 20 mm. 79
Tab. 7. Wyniki badań I serii przewodu pionowego d_n 25 mm. 79
Tab. 8. Wyniki badań II serii przewodu poziomego d_n 15 mm. 81
Tab. 9. Wyniki badań II serii przewodu pionowego d_n 20 mm. 81
Tab. 10. Wyniki badań II serii przewodu pionowego d_n 25 mm. 81
Tab. 11. Wyniki badań przewodu poziomego d_n 15 mm umieszczonego 12 cm od ściany. 88
Tab. 12. Wyniki badań przewodu poziomego d_n 15 mm umieszczonego 2 cm od ściany. 88
Tab. 13. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 15 mm umieszczonego przy ścianie. 88
Tab. 14. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 15 mm umieszczonego w rogu. 88
Tab. 15. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 20 mm umieszczonego przy ścianie. 89
Tab. 16. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 20 mm umieszczonego w rogu. 89
Tab. 17. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 25 mm umieszczonego przy ścianie. 89
Tab. 18. Maksymalny błąd bezwzględny wartości mierzonych. 90
Tab. 19. Średnie wartości wielkości fizycznych i stałych uzyskane podczas badań. 90
Tab. 20. Maksymalny błąd bezwzględny przy określaniu właściwości fizycznych powietrza. 90
Tab. 21. Średni względny błąd kwadratowy wykonanych pomiarów. 91
Tab. 22. Porównanie wydajności cieplnych stalowych nieizolowanych przewodów pionowych. 97
Tab. 23. Porównanie wydajności cieplnych stalowych nieizolowanych przewodów poziomych. 98
Tab. 24. Porównanie średnich współczynników przejmowania ciepła na drodze konwekcji na pionowych powierzchniach ściany płaskiej (wzór (165)), i rury (wzór (164)) umieszczonych w spokojnym powietrzu o temperaturze t_f = 20°C dla D = 12,7 mm [7]. 99
Tab. 25. Porównanie wartości średniej liczby Nusselta i współczynnika α_k otrzymanych z równania (161) (Le Févre i Ede), (164) (Cebeci) z wynikami otrzymanymi przez autora rozprawy dla przewodu pionowego d_n 20 mm, umieszczonego w rogu pomieszczenia (H/D = 85,5). 100
Tab. 26. Założenia. Zestawienie parametrów pionu badawczego. 104
Tab. 27. Zestawienie zbilansowanych mocy cieplnych, [W] (Q_p – całkowita wydajność cieplna pionu). 107
Tab. 28. Bilansy ciepła w reprezentatywnych pomieszczeniach 1 i 4, [W]. 108

1. WSTĘP

Zjawisko konwekcji naturalnej na powierzchniach cylindrycznych występuje w wielu urządzeniach i układach w technice cieplnej. Mimo to brak jest wiarygodnych danych rekomendowanych do obliczeń współczynników przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej na powierzchniach pionowych bądź poziomych rur [7]. Dane takie są niezbędne między innymi do obliczeń zysków ciepła od sieci przewodów wewnętrznych instalacji ogrzewczych w budownictwie. Poprawne projektowanie instalacji centralnych ogrzewań wodnych wymaga precyzyjnego określenia ilości ciepła rozproszonego nieefektywnie przez sieć przewodów, czyli wielkości tzw. transportowej straty ciepła [40]. W instalacjach tradycyjnych, które występują w większości budynków mieszkalnych, nieizolowana sieć przewodów powoduje obniżenie temperatury wody zasilającej najdalsze względem źródła ciepła grzejniki, rozregulowanie cieplne i obniżenie sprawności eksploatacyjnej instalacji, a także uniemożliwia racjonalne rozliczanie indywidualnych odbiorców za pomocą podzielników kosztów ogrzewania.

1.1. Tezy pracy

- Zjawisko przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej z powierzchni cylindrycznych nie zostało do tej pory wystarczająco dobrze zbadane i opisane.
- Wartości współczynników przejmowania ciepła z rur do otaczającego powietrza przyjmowane do tej pory przy tworzeniu charakterystyk cieplnych przewodów w instalacjach ogrzewczych są mało wiarygodne.
- Precyzyjne określenie zysków ciepła od sieci przewodów jest bardzo istotne przy projektowaniu instalacji ogrzewczych, wielkości powierzchni grzejników i strumieni dopływającego do nich czynnika grzejnego.
- Zjawisko transportowej straty ciepła, proporcjonalne do ww. współczynników przejmowania ciepła, szczególnie widoczne w tradycyjnych instalacjach ogrzewań wodnych z nieizolowaną siecią przewodów, ma niekorzystny wpływ na eksploatację tych instalacji.

1.2. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest potwierdzenie przedstawionych wyżej tez. W pracy zaprezentowano obecny stan wiedzy teoretycznej związanej z tematem pracy oraz wyniki dotychczas wykonanych badań zmierzających do określenia wartości współczynnika przejmowania ciepła z powierzchni cylindrycznych do omywającego je powietrza.

W pracy przedstawione będą wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych przez autora, dotyczące określenia wartości współczynnika przejmowania ciepła z nieizolowanych przewodów instalacji centralnych ogrzewań wodnych oraz charakterystyk cieplnych przewodów pionowych i poziomych. Ponadto przeprowadzono analizę porównawczą projektowanego i rzeczywistego rozkładu temperatury czynnika grzejnego w typowej instalacji centralnego ogrzewania, dla różnych współczynników obciążenia cieplnego. Zaproponowano sposoby zmniejszenia wpływu transportowej straty ciepła na pracę instalacji c.o. i racjonalne działania modernizacyjne poprawiające sprawność eksploatacyjną instalacji tradycyjnych.

1.3. Streszczenie pracy

Rozdział 1. zawiera wprowadzenie do omawianych zagadnień konwekcji swobodnej, tezy rozprawy oraz jej cel i zakres.

W **rozdziale 2**. przedstawiono podstawy teoretyczne wymiany ciepła w warunkach konwekcji swobodnej oraz sposoby określania współczynnika przejmowania ciepła. Omówiono wpływ zjawiska wymiany ciepła na drodze promieniowania na współczynnik przejmowania ciepła. Opisano zastosowanie teorii podobieństwa do rozwiązywania omawianych zagadnień. Sformułowano układ równań bilansowych dla konwekcji swobodnej wraz z założeniami upraszczającymi koniecznymi do jego rozwiązania.

W **rozdziale 3**. zaprezentowano stosowane dotychczas doświadczalne metody wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła.

Rozdziały 4. **i 5**. omówiono metody badawcze zastosowane przez autora na dwóch zaprojektowanych i wykonanych stanowiskach: do pomiarów wartości współczynnika przejmowania ciepła z nieizolowanych przewodów stalowych i do badania wpływu transportowej straty ciepła na pracę typowej instalacji centralnego ogrzewania. Zaprezentowano wyniki przeprowadzonych badań, ich interpretację oraz weryfikację analityczną i fizykalną. Przedstawiono porównanie wyników badań z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

Rozdział 6. zawiera podsumowanie i wnioski wynikające z rozprawy.

2. PRZEJMOWANIE CIEPŁA W UJĘCIU TEORETYCZNYM

Konwekcja swobodna jest rodzajem wymiany ciepła charakteryzującym się dość złożonym opisem fizycznym przebiegu zjawiska, lecz o małej lub umiarkowanej ekstensywności jego przebiegu. Stąd zainteresowanie naukowców skłaniało się raczej do badania przewodzenia, promieniowania lub konwekcji wymuszonej [4], [9], [74], [97], [105]. Zjawiska te były łatwiejsze do matematycznego opisu, a wyniki obliczeń znajdowały natychmiast praktyczne zastosowanie do intensyfikacji wymiany ciepła w różnych układach termodynamicznych, w tym: aparatach, urządzeniach, piecach i grzejnikach. Tak więc konwekcją swobodną zajmowano się marginalnie, jako przypadkiem ciekawym, ale równocześnie trudnym i dającym dużą satysfakcję badawczą, jednak nie mającym dotychczas większego praktycznego znaczenia [34], [35].

Sytuacja zmieniła się wówczas, gdy uświadomiono sobie, że to nie intensyfikacja, lecz ograniczanie konwekcyjnej wymiany ciepła ma znacznie większe ekonomiczne znaczenie. W dobie światowego kryzysu energetycznego okazało się, że straty ciepła do otoczenia w budownictwie, przemyśle i energetyce spowodowane konwekcją swobodna są ogromne. Wzrost zainteresowania konwekcją swobodną został również wymuszony poszukiwaniem nowych, niekonwencjonalnych źródeł energii (kolektory i stawy słoneczne) oraz sposobów jej oszczędzania m.in. w budownictwie. Konwekcja swobodna znalazła także zastosowanie w badaniach kosmicznych (konwekcja Marangoniego), ochronie środowiska (emisja gorących spalin do atmosfery) oraz w meteorologii (warunki tworzenia się konwekcyjnych frontów cieplnych, prądów morskich, powstawanie cyklonów i zmian klimatycznych) i sejsmologii (wpływ konwekcyjnych ruchów skorupy ziemskiej na dryfowanie kontynentów, uskoki tektoniczne, trzęsienia ziemi i aktywność wulkanów).

Przepływ ciepła między powierzchnią ciała stałego a płynem zależy między innymi od charakteru zjawisk hydrodynamicznych występujących w płynie oraz od jego przewodności cieplnej. Podczas przepływu płynu lepkiego wzdłuż zwilżonej ścianki tworzy się pewien profil prędkości. Na skutek siły tarcia cząsteczki przylegające do ścianki znajdują się w spoczynku, a dalej w pewnej odległości są uwarstwione. W miarę oddalania się od powierzchni ciała stałego, prędkość cząstek płynu wzrasta, aż do osiągnięcia wartości maksymalnej w rdzeniu strumienia. Do momentu osiągnięcia prędkości krytycznej przepływ płynu ma charakter laminarny (uwarstwiony). W ruchu tym cząstki płynu przepływają równolegle do powierzchni ciała i poszczególne warstwy nie mieszają się ze sobą. Przepływ ciepła pomiędzy warstwami

następuje tylko przez przewodzenie, zaś równolegle do powierzchni następuje unoszenie ciepła przez poszczególne warstwy płynu, czyli konwekcja. Dla dostatecznie dużych prędkości cząstki płynu, poza warstwą laminarną, mogą się poruszać w różnych kierunkach. W płynie takim następuje wymiana ciepła drogą mieszania się cząsteczek o różnej temperaturze. Przepływ płynu staje się burzliwy (turbulentny), konwekcja jest bardziej intensywna niż dla przepływu laminarnego, a jednocześnie następuje wyrównanie średniej prędkości i temperatury w strefie burzliwej. Z podanego opisu wynika, że przy nie uwzględnianiu promieniowania ciepła, przepływ ciepła pomiędzy ścianką a płynem składa się z przewodzenia ciepła w warstwie laminarnej oraz konwekcji. Całość tego procesu jest nazywana przejmowaniem ciepła przez konwekcję lub wnikaniem ciepła; często jednak mówi się tylko o konwekcji, mając w istocie na myśli proces przejmowania przez konwekcję opisany powyżej. Zasadniczą rolę podczas konwekcji odgrywają zjawiska zachodzące w warstwie przyściennej, w której ustalają się profile prędkości i temperatury [43]. W tej warstwie gradienty prędkości i temperatury są największe. Model warstwy przyściennej wprowadził Prandtl [81].

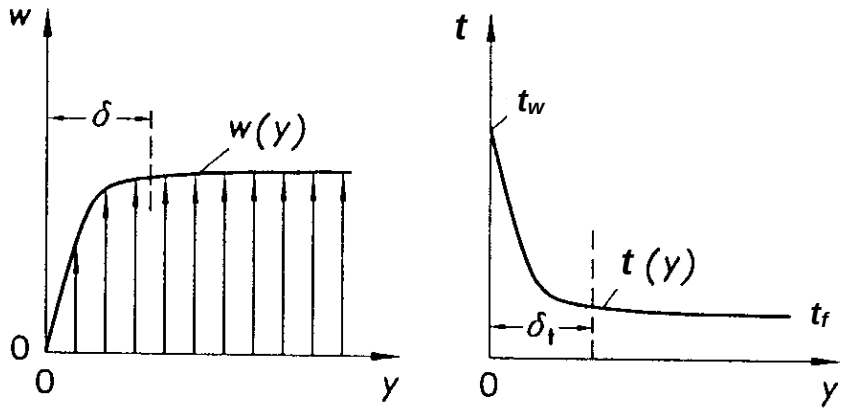
Przejmowanie ciepła przez konwekcję jest bardziej intensywne przy cienkiej warstwie przyściennej, bowiem jej grubość decyduje o wielkości oporu cieplnego. Z powyższego wynika, że z konwekcją ściśle związany jest ruch płynu, stąd przy jej analizie konieczne jest uwzględnienie zarówno równań ruchu płynu, jak i energii. Dlatego analiza tego zjawiska jest dość skomplikowana. Dodatkowo utrudnia ją fakt, że istnieją różne przyczyny ruchu płynu. Jeżeli przyczyną ruchu płynu jest różnica gęstości jego cząstek, jaka powstaje na skutek istnienia różnicy temperatury płynu i ścianki, wówczas występuje konwekcja swobodna (naturalna). Jeśli przyczyną ruchu płynu jest działanie maszyn przepływowych, to ruch płynu i konwekcja są wymuszone. Niekiedy oba przypadki należy uwzględniać równocześnie i wtedy występuje układ mieszany. Przepływ płynu może mieć charakter laminarny lub burzliwy [93]. Przejście od jednego do drugiego dokonuje się zwykle w pewnym zakresie prędkości, zwanym zakresem (obszarem) przejściowym. Przepływ płynu może mieć miejsce wewnątrz przestrzeni zamkniętych lub na zewnątrz ciał stałych, rozróżnia się więc przepływ wewnętrzny i opływ ciał. W każdym jednak przypadku rozróżnia się ruch laminarny, przejściowy i burzliwy płynu.

2.1. Współczynniki przejmowania ciepła

2.1.1. Wymiana ciepła na drodze konwekcji

Jak już wcześniej podano przy przepływie płynu przenoszenie energii następuje nie tylko na drodze przewodzenia cieplnego, ale także jest związane z makroskopowym ruchem płynu. Rozważa się obszar o określonej powierzchni wewnątrz płynu. Ciepło przenoszone jest przez ten obszar na drodze przewodzenia (w zależności od różnicy temperatury) oraz w postaci entalpii i energii kinetycznej, związanej z przepływem płynu. Proces ten łączy zatem przewodzenie cieplne i przenoszenie energii przez płyn znajdujący się w ruchu, i nazywany jest konwekcyjną wymianą ciepła.

Największe znaczenie w procesie przenoszenia ciepła pomiędzy ciałem stałym a omywającym je płynem, ma cienka warstwa płynu przylegająca do ciała stałego. Jest to tzw. warstwa przyścienna, a teoria warstwy przyściennej sformułowana przez Prandtla w 1904 r., określa ją jako obszar mający decydujący wpływ na procesy wymiany ciepła i masy w dynamice płynów. W warstwie tej następuje znaczna zmiana prędkości i temperatury płynu, (rys. 1). Wielkości δ i δ_t są grubościami warstw przyściennych odpowiednio: prędkości i temperatury.



Rys. 1. Profil prędkości i temperatury w funkcji odległości od ściany y.

Przepływ ciepła pomiędzy ścianą a płynem wywołany jest różnicą temperatury na powierzchni ściany t_w i temperatury płynu $t_f = t_\infty$ w takiej odległości od ściany, gdzie zachodzący proces przepływu ciepła nie ma już wpływu na jej wartość. Gęstość przekazywanego strumienia cieplnego zależy też od pola prędkości, co jednak znacznie komplikowałoby obliczenia. Przyjęto zatem następującą zależność, określaną jako prawo Newtona:

$$\dot{q}_w = \alpha\left(t_w - t_f\right) \tag{1}$$

gdzie: α jest współczynnikiem wymiany ciepła, charakteryzującym intensywność wymiany ciepła przez konwekcję pomiędzy 1 m^2 powierzchni ciała stałego i przyległym do niej płynem:

$$\alpha = \frac{\dot{q}_w}{t_w - t_f} \tag{2}$$

W literaturze spotykane są też określenia: współczynnik przejmowania, napływu (odpływu) lub wnikania ciepła.

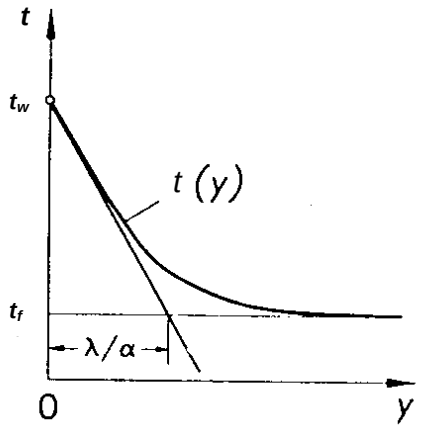
Określenie tego współczynnika pozwala zatem odpowiedzieć na dwa następujące pytania: jaka jest gęstość strumienia wymienianego ciepła przy określonej różnicy temperatury oraz jaka różnica temperatury ustali się pomiędzy ścianą a płynem przy określonym strumieniu ciepła. Wartość współczynnika przejmowania ciepła przez konwekcję zależy od:

- własności fizycznych płynu: gęstości, lepkości, ciepła właściwego, współczynnika przewodności cieplnej, temperatury,
- parametrów fizycznych ciała stałego i jego otoczenia: temperatura, ciśnienie,
- prędkości i charakteru przepływu płynu,
- kształtu i struktury rozpatrywanej powierzchni wymiany ciepła,
- zjawisk zachodzących na powierzchni: czysta konwekcja (swobodna, wymuszona), konwekcja połączona z przemianami fazowymi (wrzenie cieczy, skraplanie pary).

Aby znaleźć relację pomiędzy lokalnym współczynnikiem wymiany ciepła i polem temperatury w płynie, należy rozważyć procesy zachodzące w bezpośrednim sąsiedztwie ściany ($y \to 0$). Płyn przylega tu do ściany, jego prędkość równa jest zeru, a ciepło przekazywane jest tylko na drodze przewodzenia i opisywane jest prawem Fouriera:

$$\dot{q}_w = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_w \tag{3}$$

gdzie: λ jest współczynnikiem przewodności cieplnej płynu dla temperatury powierzchni ściany. Jak wynika z rys. 2 gęstość strumienia przekazywanego ciepła $\dot{q}_w$ jest tu funkcją profilu gradientu temperatury na powierzchni ściany.



Rys. 2. Temperatura płynu w funkcji odległości od powierzchni ściany i ilustracja stosunku λ/α jako podstycznej.

Z zależności (2) i (3) otrzymuje się przekształcone równanie wymiany ciepła:

$$\alpha = -\lambda \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w}{t_w - t_f} \tag{4}$$

Aby wyznaczyć współczynnik wymiany ciepła należy zatem określić pole temperatury dla płynu, które jest związane z polem prędkości w obrębie płynu. Na opis teoretyczny procesu wymiany ciepła na drodze konwekcji składają się zatem obok bilansowych równań energii z termodynamiki, równania ruchu płynu z mechaniki płynów.

Graficzną ilustrację współczynnika α przedstawiono na rys. 2. Stosunek λ/α wyraża odległość od powierzchni ciała, dla której styczna do gradientu temperatury przecina prostą $t = t_f$. Długość λ/α jest grubością termicznej warstwy przyściennej, czyli im cieńsza jest warstwa przyścienna, tym większa wartość współczynnika α, a zatem bardziej intensywna wymiana ciepła na drodze konwekcji.

Lokalny współczynnik α może mieć różną wartość w różnych punktach powierzchni ciała. W praktyce w celu określenia strumienia ciepła $\dot{Q}$ z powierzchni A do płynu, lub odwrotnie, zwykle stosuje się średni współczynnik wymiany ciepła α_c. Wówczas strumień przekazywanego ciepła drogą przejmowania wynosi:

$$\dot{Q} = \alpha_c A \, \Delta t \tag{5}$$

albo z definicji:

$$\alpha_c = \frac{\dot{Q}}{A \, \Delta t} \tag{6}$$

Jeżeli znany jest lokalny współczynnik α, wartość współczynnika średniego można określić przez całkowanie i wówczas strumień przenoszonego ciepła wynosi:

$$\dot{Q} = \int_{(A)} \dot{q}(A)\,dA = \int_{(A)} \alpha\left(t_w - t_f\right)dA \tag{7}$$

Wszystkie trzy wielkości: α, t_w i t_f zmieniają się względem powierzchni A przy zmianie odległości wzdłuż osi y, zatem korzystając z równań (6) i (7) można napisać:

$$\alpha_c = \frac{1}{A\,\Delta t}\int_{(A)} \alpha\left(t_w - t_f\right)dA \tag{8}$$

Dla przepływu zewnętrznego (omywania), temperatura płynu $t_f = t_\infty$ jest stała. Dlatego Δt oznacza tu różnicę $\Delta t = t_w^* - t_\infty$, (gdzie t_w^* jest temperaturą charakterystyczną na powierzchni ściany) i zależność (8) przyjmuje postać:

$$\alpha_c = \frac{1}{A}\int_{(A)} \alpha\,dA \tag{9}$$

W przypadku kiedy przyległym do powierzchni ciała płynem jest gaz – wymienia ona z nim ciepło na drodze konwekcji, a z ciałami będącymi w jej polu widzenia także na drodze promieniowania. Jeżeli cząsteczkę gazu stanowią 3 lub więcej atomów (gazy o budowie niesymetrycznej), wystąpi zjawisko promieniowania także między powierzchnią ciała a takim gazem. Ze względu na różne sposoby określania wymiany ciepła przez konwekcję i przez promieniowanie, współczynnik przejmowania α_c określany jest jako suma oporów składowych współczynnika przejmowania przez konwekcję α_k i współczynnika przejmowania przez promieniowanie α_r, czyli:

$$\alpha_c = \alpha_k + \alpha_r \tag{10}$$

Rzeczywiste wartości współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji występują w szerokim zakresie wartości: od bliskich zera do ponad 100 000 W/m^{2}K. Przykładowe wartości zamieszczono w tablicy 1.

Tab. 1. Wartości współczynnika przejmowania ciepła [8].

Rodzaj konwekcji	α [W/m^{2}K]
Konwekcja swobodna	
gazy i pary przegrzane	3 ÷ 20
ciecze:	
- o dużej lepkości, np. oleje	50 ÷ 250
- o małej lepkości, np. woda	100 ÷ 600
Konwekcja wymuszona	
gazy i pary przegrzane	10 ÷ 150
ciecze:	
- o dużej lepkości, np. oleje	50 ÷ 600
- o małej lepkości, np. woda	500 ÷ 10 000
- ciekłe metale	3 000 ÷ 100 000

2.1.2. Wymiana ciepła na drodze promieniowania

Energia promieniowania jest wynikiem zmian wewnątrz cząsteczkowych, a jej ilość zależy między innymi od temperatury ciała. Rozprzestrzenia się przez drgania elektromagnetyczne o długościach fali od zera do nieskończoności. Należy do nich promieniowanie Rentgena, ultrafioletowe, świetlne, podczerwone i radiowe. Podstawowe ilości tej energii w zakresie temperatury występującym w technice, przenosi promieniowanie podczerwone (zwane cieplnym, o długościach fal w zakresie 0,8÷40 μm) i świetlne, o długościach fal w zakresie 0,4÷0,8 μm. Energia promieniowania powstająca z energii wewnętrznej, pochłonięta przez ciało na które pada, zamienia się z powrotem w energię wewnętrzną. Ta zamiana odbywa się na powierzchni ciał stałych i cieczy, i w całej objętości gazów i par rozpuszczalników biorących udział w wymianie ciepła przez promieniowanie (gazy o cząsteczkach dwuatomowych są praktycznie przezroczyste dla promieniowania cieplnego, i w wymianie ciepła tą drogą nie biorą udziału).

Każde ciało stałe, ciecze i niektóre gazy wysyłają stałe promieniowanie cieplne, a także pochłaniają energię promieniowania padającą na nie, a wysyłaną przez inne ciała. Zasady rozchodzenia się, odbicia i załamania promieniowania cieplnego, są takie same jak i świetlnego (które także przenosi określone ilości energii cieplnej). Energię promieniowania mierzona jest w W, a gęstość strumienia przyjęto nazywać zdolnością promieniowania lub strumieniem emisji:

$$e = \frac{\dot{Q}}{A} \tag{11}$$

Część strumienia energii promieniowania padająca na powierzchnię ciała stałego lub cieczy, jest przez tę powierzchnię pochłaniana (absorbowana), część odbijana, a część (w przypadku niektórych ciał), przepuszczona.

$$\dot{Q} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_r + \dot{Q}_p \tag{12}$$

Dzieląc powyższe przez $\dot{Q}$ i oznaczając $\dot{Q}_a/\dot{Q} = a$ (absorpcyjność), $\dot{Q}_r/\dot{Q} = r$ (refleksyjność) i $\dot{Q}_p/\dot{Q} = p$ (przepuszczalność), mamy:

$$1 = a + r + p \tag{13}$$

Ciała dla których a = 1 noszą nazwę doskonale czarnych, gdy r = 1 ciało nazwane jest doskonale białym (zwierciadlanym), a jeśli p = 1, to ciało określamy jako doskonale przezroczyste (przepuszczalne).

Ciała stałe i ciecze są dla promieniowania cieplnego nieprzezroczyste i dla nich p = 0, czyli a + r = 1, choć niektóre z nich przepuszczają promieniowanie świetlne lub ultrafioleto-

we, lecz te długości fal przy temperaturach z jakimi mamy do czynienia w praktyce, przenoszą znikome ilości energii cieplnej. O pochłanianiu lub odbijaniu promieniowania cieplnego decyduje gładkość i kolor powierzchni, temperatura ciała i długość fali promieniowania cieplnego.

Powierzchnia ciała stałego lub cieczy wysyła poza promieniowaniem własnym, promieniowanie odbite. Łączna jego suma nosi nazwę promieniowania efektywnego lub strumienia jasności powierzchni h:

$$h_1 = e_1 + r_1 h_2 \tag{14}$$

gdzie: h_2 jest promieniowaniem nabytym (wysłane przez inne ciało).

Wymianę ciepła na drodze promieniowania opisują prawa promieniowania, m.in.:

Prawo Stefana-Boltzmana ustalone doświadczalnie przez Stefana (1879 r.) i teoretycznie przez Boltzmana (1884 r.) określa ilość energii wypromieniowanej przez ciało doskonale czarne:

$$e_0 = \int_0^{\infty} e_{0,\lambda}\, d\lambda = \sigma_0 T^4 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 \tag{15}$$

gdzie:

$\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$, a $C_0 = 5{,}67$ W/m^{2}K^4 wg [1], natomiast $\sigma_0 = 5{,}77 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4 wg [19]. W literaturze [91] pojawia się także wartość teoretyczna wg teorii kwantowej równa $5{,}76 \cdot 10^{-8}$. Przyjmuje się wartość średnią wielkości σ_0 zweryfikowaną na drodze badań doświadczalnych [116], równą $5{,}73 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4.

Prawo Stefana-Boltzmana znajduje zastosowanie do ciał szarych:

$$e = C \left(\frac{T}{100} \right)^4 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 \tag{16}$$

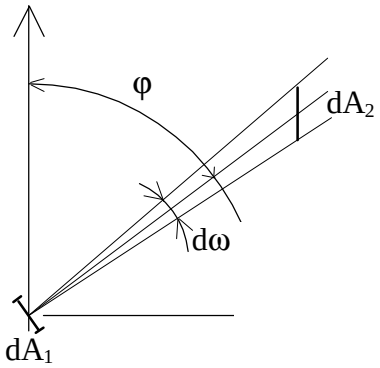
gdzie C jest stałą promieniowania, zaś $\varepsilon = C/C_0$ oznacza doświadczalnie ustalaną emisyjność (stopień czarności doskonałej).

Prawo Kirchhoffa: w warunkach równowagi cieplnej stosunek emisyjności do absorpcyjności, nie zależy od rodzaju ciała i jest równy zdolności promieniowania ciała doskonale czarnego, o tej samej temperaturze.

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = \frac{e_3}{a_3} = \ldots = e_0 \tag{17}$$

Z powyższej równości wynika, że dla ciał szarych emisyjność równa jest absorpcyjności ($\varepsilon_1 = a_1, \varepsilon_2 = a_2, \varepsilon_3 = a_3, \ldots$).

Prawo Lamberta określa intensywność promieniowania na poszczególne kierunki ciała doskonale czarnego, stwierdzając że: ilość energii wypromieniowanej przez element powierzchni dA_1 w kierunku dA_2, równa jest ilości energii wypromieniowanej w kierunku prostopadłym do elementu dA_1, pomnożonej przez cosinus kąta między prostopadłą a prostą łączącą elementy dA_1 i dA_2 i przez kąt przestrzenny $d\omega$ obejmujący element dA_2 (rys. 3).



Rys. 3. Usytuowanie powierzchni dla ilustracji prawa Lamberta.

$$d^2Q_\varphi = dQ_n \cos\varphi\, d\omega = e_n \cos\varphi\, d\omega\, dA_1, \quad W \tag{18}$$

Strumień energii (określony wzorem Stefana-Boltzmana) wypromieniowanej w kierunku normalnym, jest π razy mniejszy od całości promieniowania elementu dA_1.

Prawo Lamberta jest słuszne dla ciał szarych z tym, że dla dużych wartości kąta φ ($\varphi > 60°$), stopień czarności doskonałej jest zmienny.

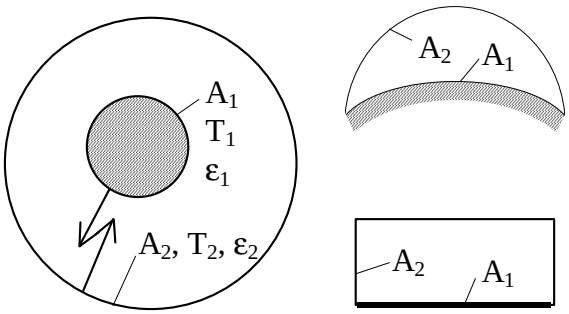
$$d^2Q_\varphi = \frac{\varepsilon_\varphi C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^\varphi}{\pi} \cos\varphi\, d\omega\, dA_1, \quad W \tag{19}$$

Zależność wartości kątowego stopnia czarności doskonałej od kąta φ przedstawiana jest zwykle graficznie.

Wymiana ciepła przez promieniowanie pomiędzy dwoma płaszczyznami o temperaturach T_1 i T_2, i emisyjnościach ε_1 i ε_2, na tyle dużych, że można przyjąć, iż promieniowanie jednej z nich trafia w całości na drugą, określana jest przez różnicę ich promieniowań efektywnych.

Jeśli jedna z powierzchni (A_2) obejmuje drugą (A_1) o temperaturach T_2 i T_1 i emisyjnościach ε_2 i ε_1 (z tym, że powierzchnia A_1 jest wypukłą lub płaską jak na rys. 4), to:

$$Q_{1,2} = \varepsilon_n C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] A_1, \quad W \tag{20}$$



Rys. 4. Usytuowanie powierzchni (układ zamknięty).

W tym wypadku zastępczą emisyjność określa zależność:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{21}$$

Wymiana ciepła przez promieniowanie między dowolnie usytuowanymi powierzchniami (rys. 5) określana jest (przy poziomach promieniowania odbitego, powtórnie padającego na jedną z powierzchni) wzorem:

$$Q_{1,2} = \varepsilon_n C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \varphi_{1,2} A_1 \tag{22}$$

gdzie:

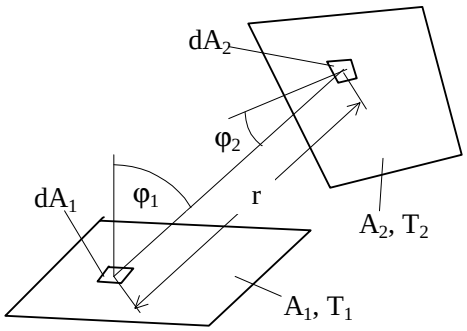
$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, zaś $\varphi_{1,2}$ jest średnim współczynnikiem kątowym wymiany ciepła przez promieniowanie dla powierzchni A_1:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \varphi'_{1,2} \, dA_1 \tag{23}$$

gdzie:

$\varphi'_{1,2}$ oznacza współczynnik kątowy wymiany ciepła przez promieniowanie elementu powierzchni dA_1 i powierzchni dA_2:

$$\varphi'_{1,2} = \int_{A_2} \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\pi r^2} \, dA_2 \tag{24}$$



Rys. 5. Dowolnie zorientowane powierzchnie.

Dla typowych kształtów i usytuowań powierzchni A_1 i A_2 można znaleźć nomogramy określające wartości współczynników $\varphi_{1,2}$ lub $\varphi'_{1,2}$.

Współczynnik przejmowania ciepła przez promieniowanie α_r określony jest jako iloraz gęstości strumienia ciepła wymienianego przez rozpatrywaną powierzchnię na drodze promieniowania z otoczeniem (równania (20) i (21)), i różnicy temperatury rozpatrywanej powierzchni i przyległego gazu:

$$\alpha_r = \frac{\dot{q}_{1-2}}{t_p - t_1} \tag{25}$$

gdzie:

ε_n – określane wzorem (21),

t_1 – temperatura powierzchni dla której określamy α_r, °C

t_p – temperatura przyległego gazu, °C

$T_1 = 273{,}15 + t_1$, K

T_2 – bezwzględna temperatura promieniowania jednej lub wielu powierzchni, z którymi powierzchnia rozpatrywana wymienia ciepło przez promieniowanie, K

Poprawne określenie temperatury promieniowania, jeśli rozpatrywana powierzchnia wymienia ciepło z szeregiem powierzchni o różnych temperaturach, wymaga znajomości współczynników kątowych wymiany przez promieniowanie i stosunkowo złożonych obliczeń. Stąd też w obliczeniach technicznych zwykle określa się ją w sposób przybliżony, jako średnią ważoną z temperatury poszczególnych powierzchni wymieniających ciepło z powierzchnią rozpatrywaną [47].

2.1.3. Teoria podobieństwa

Przylegająca bezpośrednio do powierzchni warstwa płynu jest na ogół zawsze w ruchu laminarnym (który może obejmować także i cały płyn przyległy do powierzchni) i w jej obrę-

bie przekazywanie ciepła odbywa się głównie na drodze przewodzenia; unoszenie jest wynikiem jedynie gradientu prędkości występującego w obrębie tej warstwy laminarnej. Opór cieplny jaki napotyka strumień przejmowanego ciepła, zależy w istotny sposób od grubości tej przyściennej warstwy laminarnej. O wartości współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji decyduje bardzo wiele parametrów, charakteryzujących własności płynu i decydujących o charakterze jego ruchu, profilu prędkości, grubości warstwy przyściennej [118] (rozdział 2.1.1):

$$\alpha_k = f\left(w, \nu, \lambda, t, \rho, g, c_p, L, ...\right) \tag{26}$$

Znalezienie równania opisującego zależność α_k od parametrów decydujących o jego wartości może być dokonane drogą rozwiązania (całkowania) układów równań różniczkowych, opisujących wymianę ciepła w wyodrębnionym elemencie obszaru wypełnionego płynem oraz ruch tego elementu, uzupełnionych warunkiem jednoznaczności. Ze względu na złożoność tego układu równań różniczkowych, rozwiązanie go może być dokonane (i to przy szeregu założeń upraszczających), dla bardzo prostych zjawisk przejmowania ciepła. Trudność związana z rozwiązaniem funkcji opisującej zależność współczynnika przejmowania α_k od parametrów decydujących o jego wartości drogą analityczną jest powodem, że dla określania tej wielkości przy różnych układach przejmowania ciepła przez konwekcję, najczęściej stosuje się drogę doświadczalną. Dla uogólniania wyników tych eksperymentów, wykorzystywane są prawa teorii podobieństwa.

Podobieństwo przejmowania ciepła na powierzchni ciała stałego uwarunkowane jest podobieństwem geometrycznym kształtów ciała, podobieństwem właściwości fizycznych płynu, podobieństwem pól temperatury w płynie oraz podobieństwem współczynników przejmowania ciepła [116].

Do opisu konwekcji swobodnej stosowane są następujące liczby podobieństwa:

$$Nu = \frac{\alpha_k L}{\lambda} \quad \text{– liczba Nusselta} \tag{27}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad \text{– liczba Prandtla} \tag{28}$$

$$Ga = \frac{g L^3}{\nu^2} \quad \text{– liczba Galileusza} \tag{29}$$

$$Gr = \frac{\beta g L^3 \Delta t}{\nu^2} \quad \text{– liczba Grashofa} \tag{30}$$

$$Fo = \frac{a t}{L^2} \quad \text{– liczba Fouriera} \tag{31}$$

$$Ra = Gr\,Pr = \frac{\beta g L^3 \Delta t}{\nu a} \qquad \text{– liczba Rayleigha} \tag{32}$$

W powyższych zależnościach:

α_k – współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję, W/m^2K

$a = \lambda/c_p \rho$ – współczynnik wyrównania temperatury, m^2/s

λ – współczynnik przewodności cieplnej płynu, W/mK

g – przyspieszenie ziemskie, m/s^2

ρ – gęstość właściwa płynu, kg/m^3

c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, J/kgK

β – współczynnik rozszerzalności objętościowej (dla gazów $\beta = 1/T$)

ν – współczynnik lepkości kinematycznej, m^2/s

τ – czas, s

L – charakterystyczny wymiar geometryczny, m

Δt – różnica temperatury ścianki i przyległego płynu, K

Liczby podobieństwa mogą być uważane za nowe parametry użyte do opisania zjawisk fizycznych. Zaletą ich stosowania do opisania wyników eksperymentów jest mniejsza ich liczba od liczby parametrów wyjściowych, niezbędnych do opisania danego zjawiska i fakt, że są one bezwymiarowe (niezależnie od układów jednostek użytych dla parametrów wyjściowych).

W przypadku ustalonych procesów przejmowania ciepła na drodze konwekcji, postać funkcji dobrze aproksymującej wyniki eksperymentów w obszarach geometrycznie podobnych jest następująca:

$$Nu = C\,Re^a\,Gr^b\,Pr^c \tag{33}$$

gdzie C, a, b i c oznaczają stałe wyznaczone drogą doświadczalną.

Przy niepełnym podobieństwie geometrycznym w zależności pojawiają się mnożniki $(L/L_0)^d$, stosunek wymiaru niezgodnego z tym, jaki wynika z pełnego podobieństwa geometrycznego, do wymiaru charakteryzującego obszar w liczbach podobieństwa, w ustalonej doświadczalnie potędze d. Ponadto, ponieważ kierunek przepływu strumienia przejmowanego ciepła (napływ czy też odpływ), wywiera wpływ na współczynnik α_k, równanie (33) uzupełnione bywa dodatkowym mnożnikiem $(Pr_f/Pr_w)^e$ lub $(\mu_f/\mu_w)^e$. Indeks f oznacza, że liczba Prandtla lub współczynnik lepkości kinematycznej μ ustalony jest dla średniej temperatury płynu, a indeks w – że dla temperatury powierzchni przejmującej ciepło.

Temperaturą obliczeniową, dla której ustala się wielkości parametrów fizycznych płynu jest zwykle średnia temperatura płynu, a charakterystycznym wymiarem geometrycznym przy ruchu swobodnym – wysokość powierzchni przejmującej ciepło (dla rury pionowej – długość, dla rury poziomej – średnica zewnętrzna).

2.2. Bilansowe równania przejmowania ciepła

Przy przepływie płynu rzeczywistego zawsze występują siły tarcia, które wpływając na lokalne, zmienne w czasie prędkości, kształtują pole przepływu. Pole temperatury oraz pole stężeń są związane z przewodzeniem i dyfuzją, ale także z samym przepływem. Rodzaj ruchu, profile przepływu, pola temperatury i stężeń, a także wartości współczynnika przejmowania ciepła, określa się rozwiązując następujące równania bilansowe: masy (równanie ciągłości), pędu (równanie ruchu), energii w przepływającym płynie oraz wymiany ciepła na granicy ścianki i płynu.

2.2.1. Równanie ciągłości

Zgodnie z teorią przenoszenia Reynoldsa rozważa się ruch elementu płynu o nieskończenie małej masie dM, pod wpływem działania pola sił. Element ten w każdej chwili składa się z tych samych cząstek oraz posiada określoną objętość i powierzchnię, które w czasie ruchu płynu mogą ulegać zmianie.

Masę elementu płynu wyrazić można jako sumę mas elementarnych:

$$M = \int_{(M)} dM \tag{34}$$

o gęstości:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \tag{35}$$

Ponieważ gęstość ośrodka ciągłego nie zależy od czasu i położenia, zatem można napisać:

$$M = \int_{V(\tau)} \rho \, dV \tag{36}$$

Także inne wielkości ekstensywne charakteryzujące stan Z, takie jak energia wewnętrzna, entalpia i entropia, mogą być określone przez całkowanie współzależnych wielkości stanu. Dowolną wielkość stanu z, zdefiniowaną jako:

$$z = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta M} = \frac{dZ}{dM} \tag{37}$$

określa się rozwiązując całkę:

$$Z = \int_{M} z\,dM = \int_{V(t)} z\,\rho\,dV \tag{38}$$

Określona w ten sposób wielkość stanu z może być skalarem, wektorem bądź też tensorem dowolnego rzędu. Podobnie jak gęstość, wielkość stanu z zależy od położenia i czasu, natomiast wielkość ekstensywna Z zależy wyłącznie od czasu.

Pochodna czasu wielkości Z wynosi zatem:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(\tau)} z\,\rho\,dV \tag{39}$$

Przyjmuje się oznaczenie wartości wielkości stanu w jednostce objętości przez $Z_V = z\,\rho$. Zależy ona od położenia i czasu, i równa jest:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{Z(\tau+\Delta\tau)-Z(\tau)}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\left[\int_{V(\tau+\Delta\tau)} Z_V(\tau+\Delta\tau)dV - \int_{V(\tau)} Z_V(\tau)dV\right] \tag{40}$$

Aby nie komplikować konstrukcji wyrażenia, nie została tu rozpisana zależność Z_V od położenia. Powyższe zapisać można także jako:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \int_{V(\tau)} \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{Z_V(\tau+\Delta\tau)-Z_V(\tau)}{\Delta\tau}dV + \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{V(\tau)} Z_V(\tau)dV \tag{41}$$

Przyrost objętości w czasie $\Delta\tau$ przedstawiono tu jako $\Delta V(\tau) = V(\tau + \Delta\tau) - V(\tau)$. Jak wynika z rys. 6 elementarna objętość wynosi $dV = w_i\,dA_1\Delta\tau$, i druga całka zamieniona zostaje na całkę po powierzchni:

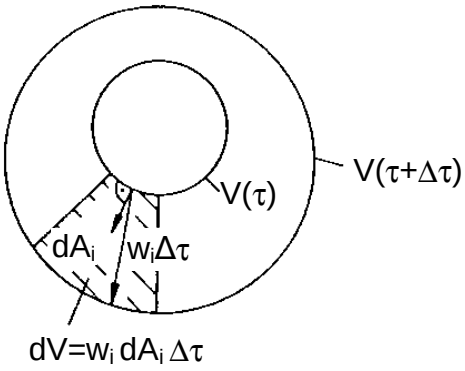
$$\frac{1}{\Delta\tau}\int_{A(\tau)} Z_V(\tau)\,w_i\,dA_i\Delta\tau = \int_{A(\tau)} Z_V(\tau)\,w_i\,dA_i \tag{42}$$

Natomiast funkcję podcałkową przy pierwszej całce zastąpić można pochodną cząstkową $\partial Z_V/\partial\tau$. Zatem zgodnie z wcześniejszym założeniem, iż $Z_V = z\,\rho$, teoria przenoszenia Reynoldsa ma postać:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \int_{V(\tau)} \frac{\partial(z\,\rho)}{\partial\tau}dV + \int_{A(\tau)} z\,\rho\,w_i\,dA_i \tag{43}$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania określa jak przyrasta rozpatrywana wielkość stanu Z w objętości V, w czasie τ. Wyraz drugi określa jaka część wielkości stanu wypływa z rozpatrywanego elementu. Zorientowanie elementarnej powierzchni dA_i jest na zewnątrz (rys.6), zatem dodatnia wartość iloczynu $w_i\,dA_i$ oznacza wypływ z oznaczonej objętości. Czyli, z równania (43) wynika, że zmiana ekstensywnej wielkości stanu. Z substancji o masie M i zmiennej w czasie objętości $V(\tau)$, równa jest przyrostowi ekstensywnej wielkości

stanu wewnątrz objętości V w czasie τ, w sumie z ułamkiem ekstensywnej wielkości stanu, jaki wypływa z rozpatrywanego elementu substancji w tym czasie.



Rys. 6. Deformacja zamkniętego systemu o objętości V(τ) podczas przepływu płynu.

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa całkę po powierzchni zastąpić można całką po objętości:

$$\frac{dZ}{d\tau} = \int_{V(\tau)} \frac{\partial(z\rho)}{\partial\tau} dV + \int_{V(\tau)} \frac{\partial(z\rho w_i)}{\partial x_i} dV \tag{44}$$

Do powyższego równania podstawia się masę Z = M, jako ekstensywną wielkość stanu oraz z = M/M = 1, wówczas:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(\tau)} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_{V(\tau)} \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} dV \tag{45}$$

Ponieważ elementarna masa dM nieskończenie małego elementu jest stała, także masa całej substancji (płynu) w układzie zamkniętym musi być stała, przy jego zmieniającej się w czasie objętości V(τ), a więc dM/dτ = 0. Z takiego założenia wynika także, iż we wzorze (45) V(τ) $\rightarrow$ 0, dlatego suma obu funkcji podcałkowych również dąży do zera:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{46}$$

Druga różniczka po rozpisaniu ma postać:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + w_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \tag{47}$$

Przekształcając równanie (46) otrzymuje się:

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \tag{48}$$

wiedząc, że:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{49}$$

Równania (46) i (48) ilustrują zasadę zachowania masy dla nieskończenie małego przyrostu objętości i nazywane są równaniami ciągłości.

Dla płynów nieściśliwych, w których ρ = const, równanie ciągłości upraszcza się do postaci [109]:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \tag{50}$$

2.2.2. Równania ruchu płynu w aspekcie konwekcji swobodnej

Podstawą wyprowadzenia równań ruchu Naviera-Stokesa jest zasada zachowania pędu, równanie ruchu Cauchy'ego oraz rachunek tensorowy. Takie określenie równań ruchu płynu dostępne było do tej pory jedynie w literaturze obcojęzycznej [2].

Element masy dM płynąc z prędkością w_j posiada pęd równy:

$$w_j \, dM = w_j \, \rho \, dV \tag{51}$$

Całkowity pęd I_j przenoszony przez płyn o objętości $V(\tau)$ wynosi zatem:

$$I_j = \int_{V(\tau)} \rho \, w_j \, dV \tag{52}$$

Jak wynika z drugiego prawa mechaniki Newtona, zmiana pędu ciała w czasie jest równa wypadkowej wszystkich sił działających na to ciało:

$$\frac{dI_j}{d\tau} = F_j \tag{53}$$

a zatem:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{V(\tau)} \rho \, w_j \, dV = F_j \tag{54}$$

Zgodnie z teorią przenoszenia Reynoldsa (43), można podstawić z = w_j:

$$\int_{V(\tau)} \frac{\partial (\rho \, w_j)}{\partial \tau} dV + \int_{A(\tau)} \rho \, w_i w_j \, dA_i = F_j \tag{55}$$

Lub korzystając z równania ciągłości (46):

$$\int_{V(\tau)} \rho \frac{dw_j}{d\tau} dV = F_j \tag{56}$$

gdzie:

$$\frac{dw_j}{d\tau} = \frac{\partial w_j}{\partial \tau} + w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \tag{57}$$

Siły F_j działające na ciało dzielą się na dwa rodzaje: siły masowe, które są proporcjonalne do masy ciała oraz siły powierzchniowe, proporcjonalne do jego powierzchni. Siły masowe działają na wszystkie cząsteczki ciała. Są to siły dalekiego zasięgu i działają w określonym polu siłowym, np. w polu grawitacyjnym ziemi. Przyspieszenie ziemskie pochodzące od tego pola g_j działa na każdą cząsteczkę, zatem siła ciężkości działająca na element płynu o masie ΔM wynosi:

$$\Delta F_j = g_j \, \Delta M \tag{58}$$

W przypadku pola grawitacyjnego siła masowa $k_j = g_j$ oraz siła powierzchniowa $f_j = \rho g_j$, zatem relacja pomiędzy siłami masowymi a powierzchniowymi jest: $f_j = \rho k_j$. Inne siły masowe to np. siły odśrodkowe wywołane przez pole elektromagnetyczne. Siły powierzchniowe są siłami bliskiego zasięgu, istnieją na obszarze przyległym do rozpatrywanego płynu i działają na jego powierzchni.

Całkowita siła działająca w czasie τ na płyn o objętości $V(\tau)$ i polu powierzchni $A(\tau)$ jest sumą sił masowych i powierzchniowych:

$$F_j = \int_{V(\tau)} \rho k_j \, dV + \int_{A(\tau)} t_j \, dA \tag{59}$$

gdzie t_j jest wektorem naprężenia. Uwzględniając równanie pędu (56) otrzymuje się:

$$\int_{V(\tau)} \rho \frac{dw_j}{dt} dV = \int_{V(\tau)} \rho k_j \, dV + \int_{A(\tau)} t_j \, dA \tag{60}$$

Oznacza to, że zmiana pędu płynu o objętości V w czasie jest wywołana przez siły masowe i objętościowe.

Wektor naprężenia t_j przedstawia się w następującej postaci:

$$t_j = \tau_{ji} n_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{61}$$

gdzie:

n_i – jednostkowy wektor normalny,

τ_{ji} – tensor naprężenia

Tensor naprężenia τ_{ji} przedstawia się jako:

$$\tau_{ji} = \hat{\tau}_{ji} + \frac{1}{3} \delta_{ji} \tau_{kk} \tag{62}$$

gdzie:

δ_{ji} – tensor jednostkowy,

$\hat{\tau}_{ji}$ – tensor skośny (dewiator) tensora τ_{ji}. Oznacza to, że tzw. ślad tensora (elementy znajdujące się na przekątnej tensora), zanika czyli wynosi zero:

$$\left(\tau_{11}-\frac{1}{3}\tau_{kk}\right)+\left(\tau_{22}-\frac{1}{3}\tau_{kk}\right)+\left(\tau_{33}-\frac{1}{3}\tau_{kk}\right)=\tau_{kk}-3\cdot\frac{1}{3}\tau_{kk}=0 \qquad (63)$$

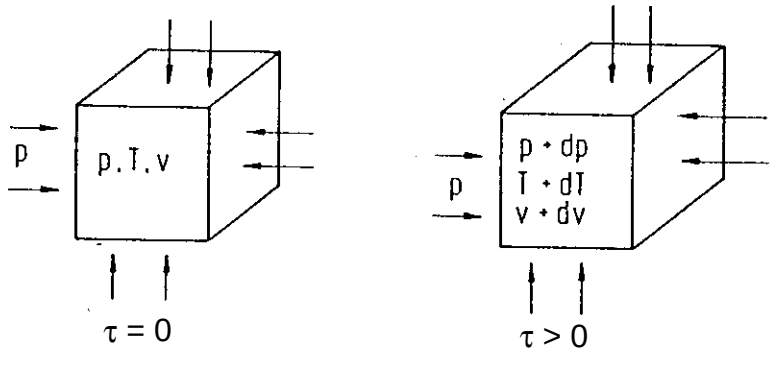
Ponieważ elementy na przekątnej tensora charakteryzujące naprężenia normalne wzajemnie się redukują, wartość dewiatora decyduje o naprężeniach stycznych (ścinających) w elemencie płynu. Natomiast składnik $1/3\delta_{ij}\tau_{kk}$ zawiera naprężenia normalne, o wartościach jednakowych dla wszystkich kierunków, i nazywany jest naprężeniem hydrostatycznym. Średnia arytmetyczna wartość z trzech naprężeń normalnych τ_{kk} określana jest jako ciśnienie średnie:

$$-\bar{p}=\frac{1}{3}\tau_{kk} \qquad (64)$$

Znak minus wynika z faktu, iż w płynach praktycznie nie mamy do czynienia z naprężeniami rozciągającymi, zatem τ_{kk} ma z reguły wartość ujemną, zaś ciśnienie średnie – dodatnią. Równanie (62) można zatem zapisać następująco:

$$\tau_{ji}=\hat{\tau}_{ji}-\delta_{ji}\bar{p} \qquad (65)$$

Ciśnienie średnie $\bar{p}$ nie ma tej samej wartości co ciśnienie termodynamiczne, którego wartość dla płynów znajdujących się w spoczynku, można określić z równania stanu p = p (v, T). Ciśnienie średnie zdefiniowane jako $\bar{p}=-1/3\delta_{ji}\tau_{kk}$ uwzględnia tylko naprężenia normalne. Aby określić relację pomiędzy ciśnieniem średnim a ciśnieniem termodynamicznym rozważa się element płynu w kształcie sześcianu o bezwzględnej temperaturze T i objętości właściwej v, (rys. 7).



Rys. 7. Związek między ciśnieniem średnim a ciśnieniem termodynamicznym.

Zakłada się, że w chwili $\tau = 0$ sześcian jest w stanie spoczynku, zatem w jego wnętrzu dominuje ciśnienie termodynamiczne. Ponadto na rozpatrywany element wywierane jest

z zewnątrz średnie ciśnienie $\bar{p}$. Jeżeli $\bar{p} > p$ sześcian jest ściskany (kurczy się), zaś gdy $\bar{p} < p$ następuje jego rozszerzanie. Tak więc praca $-\bar{p}\,dV$ określona jest przez ciśnienie zewnętrzne $\bar{p}$. Identyczna ilość pracy potrzebna jest do zmiany objętości gazu $-p\,dV$ i na tzw. pracę rozproszoną dW_{diss}. Tak więc:

$$dW = -\bar{p}\,dV = -p\,dV + dW_{diss} \tag{66}$$

stąd:

$$dW_{diss} = -\left(\bar{p} - p\right) dV \tag{67}$$

Prawa strona tego równania zawsze przyjmuje wartości dodatnie, ponieważ dla $\bar{p} > p$ mamy $dV < 0$, a dla $\bar{p} < p$ $dV > 0$. Przyrost elementarnej objętości dV określa teoria przenoszenia, zgodnie z którą można napisać:

$$\frac{dV}{d\tau} = \int_{V(\tau)} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV \tag{68}$$

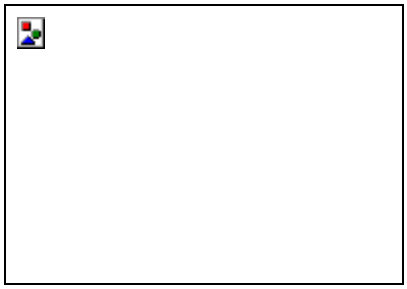
Zatem praca rozproszona będzie równa:

$$dW_{diss} = -\left(\bar{p} - p\right)\left(\int_{V(\tau)} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV \right) d\tau \tag{69}$$

Należy zauważyć, że szybkość zmian objętości $dV/d\tau$ lub $\partial w_i / \partial x_i$ jest monotonicznie zanikającą funkcją różnicy ciśnień $\bar{p} - p$, patrz rys. 8, gdyż im większa jest różnica $\bar{p} - p$, tym szybciej maleje objętość sześcianu. Można przyjąć, iż jeśli szybkość zmian objętości jest niewielka, krzywą na rys. 8, można zastąpić prostą:

$$\bar{p} - p = -\zeta \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{70}$$

gdzie $\zeta > 0$ oznacza lepkość objętościową wyrażoną w kg/sm. Można ją określić eksperymentalnie lub przy użyciu metod termodynamiki statystycznej, słusznych tylko dla substancji zbudowanych z cząsteczek prostych. Wynika stąd, że ciśnienie termodynamiczne będzie jednoznacznie określone w przypadku gdy $\zeta = 0$, lub dla płynu nieściśliwego, czyli gdy $\partial w_i / \partial x_i = 0$.



Rys. 8. Zmiana objętości elementarnej jako funkcja różnicy ciśnień.

Za pomocą metod mechaniki statystycznej można wykazać, że dla gazów o małej gęstości lepkość objętościowa dąży do zera, a dla gazów i płynów o dużej gęstości – przyjmuje bardzo małe wartości. Dlatego też w zagadnieniach mechaniki płynów, jak również w procesach wymiany ciepła i masy zawsze zakłada się, że $\zeta = 0$ czyli że ciśnienie średnie równe jest ciśnieniu termodynamicznemu. Niezależnie od tego, dla płynów nieściśliwych, w których $\partial w_k / \partial x_k = 0$, ciśnienie średnie jest zawsze równe ciśnieniu termodynamicznemu [2].

Wstawiając wektor naprężeń t_j (61) do równania pędu (60) otrzymuje się:

$$\int_{V(\tau)} \rho \frac{dw_j}{d\tau} dV = \int_{V(\tau)} \rho k_j \, dV + \int_{A(\tau)} \tau_{ji} n_i \, dA \tag{71}$$

Korzystając z prawa Gaussa można przekształcić całkę po powierzchni:

$$\int_{A(\tau)} \tau_{ji} n_i \, dA = \int_{V(\tau)} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} dV \tag{72}$$

otrzymując:

$$\int_{V(\tau)} \rho \frac{dw_j}{d\tau} dV = \int_{V(\tau)} \rho k_j \, dV + \int_{V(\tau)} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} dV \tag{73}$$

Równanie to jest słuszne dla dowolnej objętości $V(\tau)$ a więc także gdy $V(\tau) \to 0$. Wówczas otrzymuje się równanie ruchu Cauchy'ego postaci:

$$\rho \frac{dw_j}{d\tau} = \rho k_j + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{74}$$

Jest ono słuszne dla każdego ośrodka ciągłego, niezależnie od właściwości rozpatrywanego materiału, i dlatego jest jednym z fundamentalnych równań w mechanice płynów i co za tym idzie – w procesach wymiany ciepła i masy. Aby opisać ruch danej substancji korzysta się z tzw. równań strukturalnych, łączących tensor naprężenia z ruchem substancji. Równania strukturalne łączą zazwyczaj naprężenia, strumienie ciepła i prędkości dyfuzji ze zmiennymi makroskopowymi, takimi jak: gęstość, prędkość i temperatura. Budowa tych równań zależy od właściwości rozpatrywanych substancji. Na przykład prawo Fouriera określa relację mię-

dzy gęstością strumienia ciepła a gradientem temperatury przy wymianie ciepła na drodze przewodzenia. Aby określić równanie strukturalne dla naprężeń stycznych wprowadza się pojęcie tensora odkształcenia.

Dla rozwiązania równanie ruchu Cauchy'ego, które jest słuszne dla dowolnej substancji, niezbędne jest określenie relacji pomiędzy tensorem naprężenia i odkształcenia lub pomiędzy tensorem naprężenia i polem prędkości. Równanie takie, nazywane równaniem strukturalnym, uwzględnia właściwości płynu i jest podobne do równania stanu w termodynamice, charakteryzującego daną substancję. Z równań (65) i (70) wynika, że:

$$\tau_{ji} = \hat{\tau}_{ji} - \delta_{ji} p + \zeta \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \tag{75}$$

Płyn dla którego naprężenie styczne jest proporcjonalne do prędkości stycznej, w nawiązaniu do prawa Newtona ($\tau_{12} = \eta \partial w_1 / \partial x_2$), nazywany jest płynem newtonowskim. Większość gazów i płynów spełnia to prawo.

Korzystając z określenia (75) otrzymuje się równanie na tensor naprężenia postaci:

$$\tau_{ji} = \eta \left[\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right] - \delta_{ji}\, p + \zeta \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \tag{76}$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości dynamicznej (kg/sm). Dla płynu newtonowskiego przy zaniedbaniu znikomej wartości lepkości objętościowej, powyższa zależność upraszcza się do wzoru Stokesa, zwanego też hipotezą Stokesa:

$$\tau_{ji} = \eta \left[\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right] - \delta_{ji}\, p \tag{77}$$

Podstawiając to wyrażenie do równania ruchu Cauchy'ego (74) otrzymuje się równanie Naviera-Stokesa:

$$\rho \frac{dw_j}{d\tau} = \rho k_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \left[\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right] \tag{78}$$

Dla procesu konwekcji swobodnej pomija się gradient ciśnienia w równaniach ruchu. Ponadto dla płynów nieściśliwych $\partial w_k / \partial x_k = \partial w_i / \partial x_i = 0$ oraz przy założeniu stałej wartości lepkości, równanie (78) upraszcza się do postaci:

$$\rho \frac{dw_j}{d\tau} = \rho k_j + \eta \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^{\,2}} \tag{79}$$

2.2.3. Równanie energii

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki zmiana energii wewnętrznej U układu zamkniętego spowodowana jest dostarczoną energią w postaci ciepła Q_{12} oraz pracą nad układem W_{12}:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \tag{80}$$

lub, w zapisie różniczkowym:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau} + \frac{dW}{d\tau} \tag{81}$$

Rozpatruje się element płynu o danej masie jako system zamknięty, nie uwzględnia się zatem procesu przenoszenia masy przez warstwę graniczną, czyli dyfuzji. Zgodnie z teorią przenoszenia (43), podstawiając z = u otrzymuje się chwilową zmianę energii wewnętrznej przepływającego płynu:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\int_{V(\tau)} u\,\rho\,dV = \int_{V(\tau)} \frac{\partial(u\,\rho)}{\partial\tau}\,dV + \int_{A(\tau)} u\,\rho\,w_i\,dA_i \tag{82}$$

co oznacza, że zmiana energii wewnętrznej płynu będącego w ruchu w czasie równa jest sumie energii wewnętrznej zgromadzonej w objętości V w chwili τ i energii wewnętrznej wypływającej z płynu przez powierzchnię $A(\tau)$.

Otrzymuje się bilansowe równanie energii w postaci:

$$\rho\frac{du}{d\tau} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \tau_{ji}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \tag{83}$$

słuszne dla płynów jednoskładnikowych z pominięciem zjawiska dyfuzji.

Dla rozwiązania powyższego równania energii, podobnie jak przy równaniu ruchu, niezbędne są tzw. równania strukturalne, takie jak cieplne równanie stanu u = u(t, v). Postać różniczkowa tego równania jest następująca:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t dv = c_v dt + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t dv \tag{84}$$

gdzie c_v jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Oznaczając przez T temperaturę termodynamiczną (w skali bezwzględnej), zgodnie np. z [107], otrzymuje się:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t = T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p \tag{85}$$

oraz elementarną objętość właściwą przez $dv = -d\rho/\rho^2$:

$$\rho\frac{du}{d\tau} = \rho\,c_v\frac{dt}{d\tau} - \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p\right]\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\tau} \tag{86}$$

Uwzględniając w powyższym równanie ciągłości (48):

$$\rho \frac{du}{d\tau} = \rho c_v \frac{dt}{d\tau} + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p \right] \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{87}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym dla gazów doskonałych dąży do zera. Dla płynów nieściśliwych i z przepływem ustalonym $\rho = \text{const}$, $d\rho/d\tau = 0$ i $\partial w_i/\partial x_i = 0$ oraz $c_p = c_v = c$, co daje:

$$\rho \frac{du}{d\tau} = \rho c \frac{dt}{d\tau} \tag{88}$$

Natomiast gęstość strumienia ciepła $\dot{q}_i$ występująca w równaniu (83) dla ciał izotropowych określona jest prawem Fouriera:

$$\dot{q}_i = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_i} \tag{89}$$

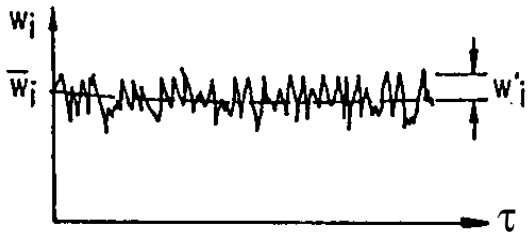
2.2.4. Wpływ burzliwości ruchu na postać równań

Równania bilansowe wyprowadza się przy różnych założeniach upraszczających, a dalsze uproszczenia stosuje się przed ich całkowaniem. Niekiedy jednak ulegają one komplikacji, np. przy przepływie burzliwym. W przepływie tym występują zawirowania, a więc lokalne zróżnicowanie prędkości [18]. Prędkość chwilową przedstawia się jako sumę wartości średniej $\overline{w_i}$ i chwilowych fluktuacji w_i', (rys. 9):

$$w_i = \overline{w_i} + w_i' \tag{90}$$

gdzie:

$$\overline{w_i} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} w_i(x_j, \tau) d\tau = \overline{w_i}(x_j) \tag{91}$$



Rys. 9. Fluktuacje prędkości dla statystycznie ustalonego przepływu.

Podobnie przedstawić można inne wielkości; temperaturę, ciśnienie staatyczne, gęstość, itp. Ogólnie wartości średnie obliczane w określonym przedziale czasu będą równe:

$$\bar{a} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} a(\tau)\,d\tau \tag{92}$$

Na mocy definicji średnie fluktuacje (dodatnie i ujemne) są równe zeru:

$$\int_0^{\tau} a'(\tau)\,d\tau = 0 \tag{93}$$

średnie wartości ich kwadratów są jednak różne od zera:

$$\left(w'_{xm}\right)^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(w'_x\right)^2 d\tau \neq 0 \tag{94}$$

Miarą burzliwości jest tzw. stopień turbulizacji Tu:

$$Tu = \sqrt{\frac{\left(w'_{xm}\right)^2 + \left(w'_{ym}\right)^2 + \left(w'_{zm}\right)^2}{3\overline{w}^2}} \tag{95}$$

Stopień turbulizacji Kutateładze nazywa liczbą kryterialną Karmana i oznacza ją symbolem Ka . Podstawienie chwilowych prędkości i innych parametrów w postaci sumy (a) do równań ruchu i energii umożliwia stosunkowo proste uwzględnienie wpływu turbulencji na rozpatrywane zjawiska.

2.2.5. Równania bilansowe – podsumowanie

Dla syntetycznego zestawienia bilansowych równań dotyczących procesu przejmowania ciepła w konwekcji swobodnej, przyjmuje się że:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + w_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{96}$$

Tak więc dla każdej czystej (jednoskładnikowej) substancji słuszne są następujące równania bilansowe trzech wielkości ekstensywnych:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{97}$$

$$\rho\frac{dw_j}{d\tau} = \rho k_j + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} \tag{98}$$

$$\rho\frac{du}{d\tau} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \tau_{ji}\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{99}$$

Są to równania: bilansu masy czyli równanie ciągłości (97), bilansu pędu czyli równanie ruchu Cauchy'ego (98) oraz bilansu energii wewnętrznej (99). Ponieważ bilans pędu zachodzi we wszystkich trzech kierunkach układu odniesienia (j = 1, 2, 3), otrzymuje się tu w

sumie pięć równań bilansowych. Ten układ równań należy uzupełnić o tzw. równania strukturalne, opisujące właściwości fizyczne rozpatrywanych płynów i warunki ich ruchu. Dla wszystkich gazów, a także dla większości cieczy (tzw. płynów newtonowskich) zachodzi $d\rho/d\tau = 0$ i równania bilansowe zapisuje się odpowiednio w następującej postaci:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \tag{100}$$

$$\rho \frac{dw_j}{d\tau} = \rho k_j + \eta \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^{\,2}} \tag{101}$$

$$\rho c \frac{dt}{d\tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x_i^{\,2}} + \eta \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \tag{102}$$

Powyższe równania wraz z równaniami przewodzenia ciepła i wymiany ciepła (patrz rozdział 2.1.1) oraz z tzw. warunkami jednoznaczności, tworzą ogólny opis matematyczny zjawiska przejmowania ciepła.

Ze względu na trudności związane z analitycznym rozwiązaniem układu tych równań, znane są jedynie rozwiązania dla niewielu przypadków, otrzymane często przy znacznych uproszczeniach. Dlatego decydujące znaczenie w analizie procesu konwekcji swobodnej mają odpowiednio opracowane rezultaty doświadczeń. Podstawową metodą roboczą jest teoria podobieństwa i stosowanie liczb kryterialnych.

2.3. Przegląd literaturowy analitycznych rozwiązań bilansowych równań konwekcji swobodnej

Konwekcja swobodna (naturalna) zachodzi w pobliżu ciała stałego, którego temperatura różni się od temperatury otaczającego je ośrodka. Opisuje zjawiska towarzyszące opływowi ciała stałego przez płyn znajdujący się w jego bezpośrednim otoczeniu. Warunki opływu zależą w dużej mierze od ukształtowania powierzchni i jej usytuowania względem kierunku działania sił ciężkości. Intensywność tego zjawiska zależy od różnicy temperatury na powierzchni ciała stałego i ośrodka – płynu.

Znane są w literaturze opisy zarówno analityczne, jak i doświadczalne zjawiska konwekcji na płycie pionowej, poziomej, ukośnej, na powierzchni walcowej, stożkowej, kulistej, dla stałej lub zmiennej temperatury na powierzchni, dla stałego i zmiennego strumienia ciepła. Ponadto można znaleźć opisy zjawiska konwekcji dla nieustalonego w czasie pola temperatury, dla powierzchni dodatkowo wymieniającej masę, drgającej, wirującej, czy też w obec-

ności pola magnetycznego[1]. Wiele z tych rozwiązań opartych jest na założeniach klasycznych istnienia laminarnej warstwy przyściennej, tzn. prezentuje przybliżone rozwiązania układu równań ciągłości, ruchu i energii dla wartości liczby Grashofa dążących do nieskończoności. Dla liczby Grashofa o skończonej i niewielkiej wartości, klasyczne rozwiązania przestają być ścisłe.

2.3.1. Analiza wymiarowa dla konwekcji swobodnej

Zmiana gęstości w funkcji temperatury płynu jest szczególnie istotna dla procesu wymiany ciepła na drodze konwekcji swobodnej. Jest ona spowodowana różnicą gęstości mas płynu o różnej temperaturze, znajdujących się pod działaniem sił pola grawitacyjnego ziemi. W przypadku konwekcji swobodnej nie występuje prędkość wymuszona w_0 i liczbę podobieństwa Reynoldsa zastępuje liczba Galileusza, uwzględniająca przyspieszenie ziemskie pochodzące od siły grawitacji:

$$\mathrm{Ga} = \frac{g\, L_0^3}{\nu_0^3} = \frac{g\, \rho_0^2\, L_0^3}{\eta^2} \tag{103}$$

Ponieważ gęstość zmienia się wraz z temperaturą, współczynnik lepkości kinematycznej $\nu = \eta/\rho$, określać należy dla stałej gęstości $\rho_0 = \rho\,(t_0)$ oznaczonej w temperaturze t_0.

Dla opisania zmiany gęstości w funkcji temperatury, wprowadza się nową wielkość charakterystyczną K_ρ. Wówczas liczba podobieństwa Nusselta jest funkcją:

$$\mathrm{Nu_m} = f\left(\mathrm{Ga}, K_\rho, \mathrm{Pr}, K_{geom}\right) \tag{104}$$

Oparta na gęstości liczba K_ρ, jak i podobne liczby $K_{\rho 1}$, $K_{\rho 2}$, ... opisują zależność gęstości od bezwymiarowej temperatury t^+:

$$\frac{\rho\left(t^+\right)}{\rho_0} = f_\rho\left(t^+, K_{\rho 1}, K_{\rho 2}, \ldots\right) \tag{105}$$

gdzie:

$$t^+ = \frac{t - t_0}{\Delta t_0} \tag{106}$$

Dla relatywnie małych różnic temperatury do szeregu Taylora:

$$\rho(t) = \rho_0\left[1 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)_{t_0}\left(t - t_0\right) + \ldots\right] \tag{107}$$

---

[1] patrz poz. [5], [11], [15], [17], [21], [23], [24], [29], [33], [49], [52], [55], [57], [58], [64], [65], [67], [68], [70], [76], [78], [79], [80], [101], [102], [103], [104], [111], [112], [113], [115].

można podstawić wyrażenie zawierające współczynnik rozszerzalności:

$$\beta_0 = \beta(t_0) = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{t_0} \tag{108}$$

co łącznie z określeniem (106) daje:

$$\frac{\rho(t^+)}{\rho_0} = 1 - \beta_0 \, \Delta t_0 \, t^+ \tag{109}$$

Przy założeniu, że zmiany temperatury nie są zbyt duże, zależność gęstości od temperatury opisana jest przez współczynnik rozszerzalności β_0 i charakterystyczną różnicę temperatury Δt_0:

$$K_\rho = \beta_0 \, \Delta t_0 \tag{110}$$

Przy znacznych różnicach temperatury należy brać także pod uwagę dalsze wyrazy, np. $K_{\rho 1}$, itd., szeregu (107).

Różnica gęstości mas płynu, wynikająca z różnicy temperatury, powoduje powstanie siły wyporu w polu grawitacyjnym. Różnica temperatury ma jednak niewielki wpływ na inne siły działające na cząsteczkę płynu, jak bezwładności czy tarcia. Dlatego przyjmuje się założenie, że różnica temperatury $\Delta t_0 = t_w - t_f$ ma istotne znaczenie jedynie przy określaniu siły wyporu. Inaczej mówiąc, zaniedbuje się zmienność właściwości fizycznych płynu w ruchu w równaniach bilansowych, a dla płynu nieściśliwego także zmianę gęstości w równaniu pędu. Założenie to nosi nazwę aproksymacji Boussinesqu'a[2]. Siłę wyporu odniesioną do jednostki objętości płynu, przy powyższym założeniu określa się jako:

$$g\left[\rho(t_w) - \rho(t_f)\right] = g(\rho_w - \rho_f) \tag{111}$$

Powyższe po podzieleniu przez ρ_f i podstawieniu w miejsce g do liczby Galileusza (103) daje liczbę podobieństwa, zwaną liczbą Grashofa:

$$Gr = \frac{g \, L_0^3}{\nu_f^2} \frac{\rho_w - \rho_f}{\rho_f} \tag{112}$$

która łączy liczbę Galileusza z charakterystyczną wielkością $(\rho_w - \rho_f)/\rho_f$, uwzględniającą zmianę gęstości w funkcji temperatury i jest kryterium intensywności konwekcji swobodnej. Zatem przyjmując założenie Bousinesqu'a, równanie (104) zapisuje się:

$$Nu_m = f(Gr, Pr, K_{geom}) \tag{113}$$

Zmianę gęstości określa się korzystając z równania (109). Jeżeli różnica temperatury na powierzchni ściany i płynu w pewnej odległości nie jest zbyt duża, oraz przyjmując zało-

[2] patrz poz. [2], [3], [26], [32], [36], [92].

żenie Bousinesqu'a, względną różnicę gęstości z uproszczonego równania stanu określa się jako:

$$\frac{\rho_w - \rho_f}{\rho_f} = \beta_f \left(t_w - t_f\right) \tag{114}$$

Ostatecznie liczba Grashofa wynosi:

$$Gr = Ga\,\beta_f \left(t_w - t_f\right) = \frac{g\,\beta_f \left(t_w - t_f\right) L_0^3}{\nu^2} \tag{115}$$

Współczynnik rozszerzalności objętościowej β określa się dla temperatury płynu t_f, zaś współczynnik lepkości kinematycznej ν dla temperatury średniej z wartości t_w i t_f.

Jak wynika z (113) i (115) liczba Nusselta zależy od różnicy temperatury t_w i t_f. Jednak pomimo iż współczynnik przejmowania ciepła α jest funkcją gęstości strumienia ciepła $\dot{q}_w$ i różnicy temperatury (2), przy konwekcji swobodnej α nie jest niezależna od różnicy temperatury $(t_w - t_f)$. Innymi słowy przenoszony strumień $\dot{q}_w$ nie rośnie proporcjonalnie do $(t_w - t_f)$, ponieważ różnica ta jest „siłą napędową" nie tylko dla przepływu ciepła, lecz także dla wyporu hydrostatycznego, a więc kształtuje także pole prędkości w płynie.

Kształt ciała wymieniającego ciepło ma w zjawisku przejmowania znaczenie drugorzędne, gdyż rodzaj ruchu płynu i warunki wymiany ciepła są określone zasadniczo nie kształtem ciała, lecz jego temperaturą t_w, różnicą temperatury $(t_w - t_f)$ i gęstością strumienia ciepła $\dot{q}_w$ [62].

2.3.2. Klasyczne rozwiązanie analityczne dla płyty pionowej

Przepływ swobodny powstaje na skutek różnicy gęstości w obrębie płynu. W układzie pionowej ściany i otaczającego ją płynu o niższej temperaturze, płyn znajdujący się w pobliżu ściany jest przez nią ogrzewany, i jako lżejszy od płynu w dalszej odległości od ściany, jest unoszony w polu siły grawitacji. W tym przypadku gradient gęstości i siła masowa wywołana przez grawitację są wzajemnie prostopadłe. Gradient gęstości zazwyczaj wywołany jest gradientem temperatury, rzadziej gradientem stężenia czy ciśnienia. Siłą masową jest najczęściej siła grawitacji, lecz może być nią równie dobrze siła odśrodkowa lub pole elektromagnetyczne.

Równowaga sił hydrostatycznych w płynie nie musi być statyczna. Dla statycznej w chwili początkowej masy powietrza nad ogrzewaną poziomą płytą, równowaga statyczna sił hydrostatycznych w płynie zachodzi dopóty, dopóki gradient gęstości jest równoległy do sił grawitacji. Kula ciepłego powietrza, odrywając się od płyty, zaburzy ten stan równowagi

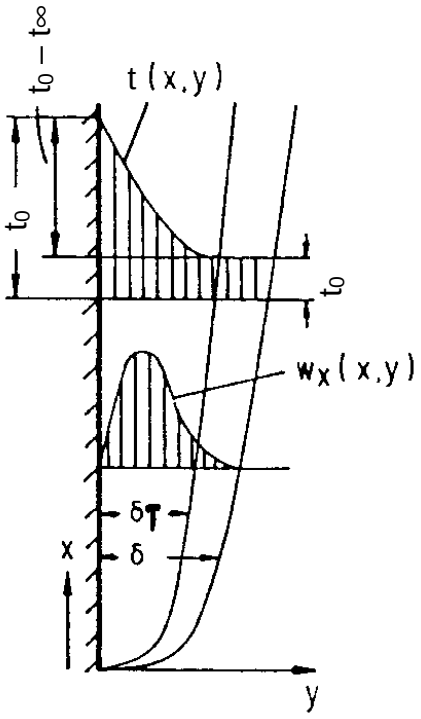
i szybko przyjmie ciśnienie panujące w jej otoczeniu. Gęstość takiej kuli maleje w przybliżeniu adiabatycznie, w sposób odwracalny: $p/\rho^{\kappa} = p_0/\rho_0{}^{\kappa}$.

Równanie pędu dla płynu newtonowskiego wynikające z równania Naviera-Stokesa (78) ma postać:

$$\rho \frac{dw_j}{dt} = \rho k_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i{}^2} \tag{116}$$

Dla swobodnego przepływu powietrza w pobliżu gorącej ściany bądź walca (rys. 10), wywołanego gradientem gęstości płynu, zakłada się, że pozostałe właściwości fizyczne płynu nie zmieniają się. W dużej odległości od ściany rozpoczyna się obszar płynu o stałej gęstości, który pozostaje w równowadze hydrostatycznej:

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial x_i} = \rho_\infty g_j \tag{117}$$



Rys. 10. Profile prędkości i temperatury przy swobodnym przepływie wzdłuż ogrzewanej pionowej ściany bądź pionowego walca.

Przyjmuje się, że ciśnienie hydrostatyczne p, jak i gęstość zmieniają się o znikomo małe wartości Δp i $\Delta\rho$:

$$p = p_\infty + \Delta p, \qquad \rho = \rho_\infty + \Delta\rho \tag{118}$$

Podstawiając (118) do (116) otrzymuje się równanie pędu w postaci:

$$(\rho_\infty + \Delta\rho)\frac{dw_j}{d\tau} = (\rho_\infty + \Delta\rho)g_j - \frac{\partial(p_\infty + \Delta p)}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^{\,2}} \tag{119}$$

Uwzględniając, że $\partial\rho << \rho_\infty$ oraz równanie (117) otrzymuje się:

$$\rho_\infty \frac{dw_j}{d\tau} = \Delta\rho\, g_j - \frac{\partial\Delta p}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^{\,2}} \tag{120}$$

Dla stanu ustalonego:

$$\frac{dw_j}{d\tau} = w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \tag{121}$$

Siła bezwładności F_B jest proporcjonalna do:

$$F_B \sim \rho_\infty \frac{w_m^2}{L} \tag{122}$$

gdzie w_m jest prędkością charakterystyczną, np. maksymalną prędkością pokazaną na rys. 10. Wzrasta ona wyłącznie za sprawą oddziaływania sił wyporu. Siłę tarcia F_T określa się zatem jako proporcjonalną do:

$$F_T \sim \eta\frac{w_m}{\delta^2} \tag{123}$$

Natomiast siłę wyporu hydrostatycznego można przyjąć proporcjonalną do zależności:

$$F_W \sim -(\rho_0 - \rho_\infty)g\cos\varphi \tag{124}$$

gdzie: φ jest kątem nachylenia ściany do pionu.

W rozpatrywanym przypadku gradient gęstości płynu jest prostopadły do kierunku działania siły grawitacji, a $\cos\varphi = 1$.

W warstwie przyległej do ściany siła bezwładności ma tą samą wartość co siła tarcia, dlatego:

$$\frac{w_m^2}{L} \sim \nu\frac{w_m}{\delta^2} \quad \text{lub} \quad \frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu}{w_m L}\right)^{1/2} \tag{125}$$

a także siła wyporu ma tą samą wartość co siła bezwładności, zatem:

$$-(\rho_0 - \rho_\infty)g\cos\varphi \sim \rho_\infty\frac{w_m^2}{L} \tag{126}$$

Stąd otrzymuje się:

$$w_m \sim \left(\frac{-(\rho_0 - \rho_\infty)g\cos\varphi\, L}{\rho_\infty}\right)^{1/2} \tag{127}$$

Podstawiając do powyższego w_m z równania (125), otrzymuje się:

$$\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu^2}{(1-\rho_0/\rho_\infty) g \cos\varphi L^3} \right)^{1/4} \tag{128}$$

Jeżeli zmianę gęstości wywołuje jedynie różnica temperatury, oraz jeśli różnica temperatury jest wystarczająco mała, to:

$$\rho_0 = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p (t_0 - t_\infty) \tag{129}$$

Przez β oznacza się współczynnik rozszerzalności cieplnej, określany dla temperatury t_∞:

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p = \beta \tag{130}$$

Podstawiając powyższe do (129) otrzymuje się:

$$\rho_0 - \rho_\infty = -\rho_\infty \beta_\infty (t_0 - t_\infty) \tag{131}$$

Dla gazów idealnych $v = R\,T/p$, zatem:

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{R}{p} = \frac{1}{T}, \quad \beta_\infty = \frac{1}{T_\infty} \tag{132}$$

Podstawiając zależność (131) do (128) otrzymuje się:

$$\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu^2}{\beta_\infty (t_0 - t_\infty) g L^3} \right)^{1/4} \frac{1}{(\cos\varphi)^{1/4}} \tag{133}$$

gdzie wielkość bezwymiarowa:

$$\frac{\beta_\infty (t_0 - t_\infty) g L^3}{\nu^2} = Gr \tag{134}$$

jest liczbą Grashofa, stąd dla pionowej ściany ($\varphi = 0$):

$$\frac{\delta}{L} \sim Gr^{-1/4} \tag{135}$$

Dla dużych wartości liczby Grashofa ($Gr >> 1$) zachodzi $\delta/L << 1$, co oznacza iż w warstwie przyściennej występuje przepływ płynu, a grubość tej warstwy:

$$\delta \sim L^{1/4} \tag{136}$$

Równanie pędu (119) dla kierunku osi x (rys. 10), przy założeniu że $\Delta\rho << \rho_\infty$, $p_\infty + \Delta p = p$, $\rho_\infty + \Delta\rho = \rho$ oraz $g_j = -g$, ma postać:

$$\rho_\infty w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho_\infty w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \tag{137}$$

Ponieważ ciśnienie dla danej wysokości ściany x w kierunku prostopadłym do ściany jest stałe, dla kierunku osi y równanie pędu upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{138}$$

Przy przepływie ustalonym w strumieniu panuje równowaga hydrostatyczna:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_\infty g \tag{139}$$

co upraszcza równanie (137) do postaci:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \tag{140}$$

Przy założeniu niewielkich zmian gęstości mamy:

$$\rho_0 = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p (t - t_\infty) = \rho_\infty - \rho_\infty \beta_\infty (t - t_\infty) \tag{141}$$

gdzie współczynnik rozszerzalności cieplnej β:

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p = \beta \tag{142}$$

określany jest dla temperatury t_∞. Do równania pędu (140) podstawia się następujące wyrażenie:

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} = \beta_\infty (t - t_\infty) \tag{143}$$

i otrzymuje układ czterech równań następującej postaci:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \text{ (równanie ciągłości)} \tag{144}$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = g \beta_\infty (t - t_\infty) + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \text{ (równanie pędu)} \tag{145}$$

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \text{ (równanie energii)} \tag{146}$$

$$\alpha (t_w - t_f) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_w \text{ (równanie wymiany ciepła)} \tag{147}$$

W równaniu energii pomija się energię rozproszoną. Warunki brzegowe dla powyższych równań są następujące:

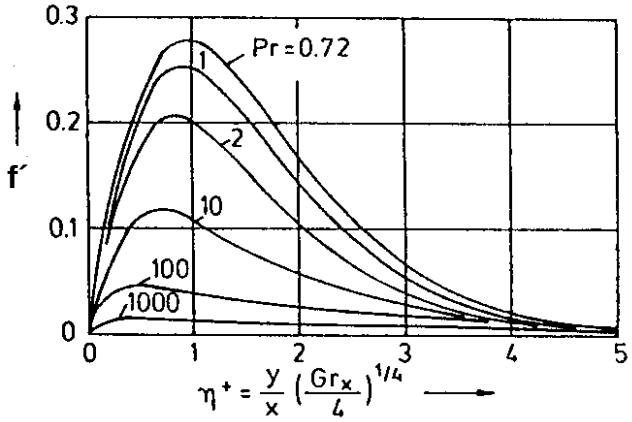
$$\begin{aligned} &y \to 0: \quad w_x = w_y = 0, \quad t = t_0 \\ &y \to \infty: \quad w_x = 0, \quad t = t_\infty \end{aligned} \tag{148}$$

Rozwiązanie tych równań jako pierwszy podał w 1921 r. Pohlhausen [75] dla gazu o liczbie Prandtla Pr = 0,733 (powietrze), a w roku 1953 Ostrach rozwiązał je przy pomocy

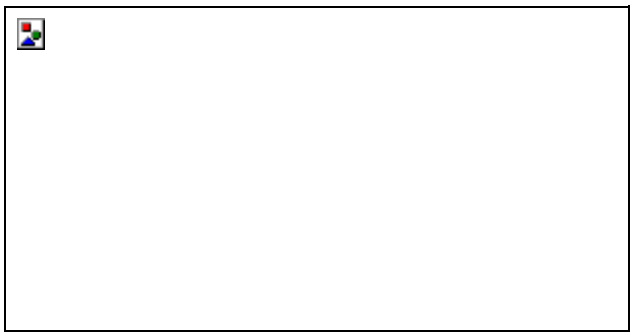
analizy numerycznej dla zakresu $0{,}00835 \le \mathrm{Pr} \le 1000$. Nomogram (rys. 11) przedstawia znormalizowane prędkości w wyrażeniu:

$$\frac{w_x\, x}{\nu}\frac{1}{2\,\mathrm{Gr}^{1/2}} = f'\left(\eta^+\right) \tag{149}$$

a nomogram (rys. 12) znormalizowane temperatury $\vartheta^+(\eta^+)$ podane przez Ostracha [71].



Rys. 11. Prędkości w przepływie swobodnym wzdłuż pionowej ściany [71].



Rys. 12. Temperatury w przepływie swobodnym wzdłuż pionowej ściany [71].

Aby określić współczynnik przejmowania ciepła α należy określić pole temperatury:

$$\alpha\left(t_0 - t_\infty\right) = \dot{q} = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{150}$$

gdzie:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(t_0 - t_\infty\right)\left(\frac{d\vartheta^+}{d\eta^+}\frac{\partial \eta^+}{\partial y}\right)_{y=o} = \left(t_0 - t_\infty\right)\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{Gr}_x}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{d\vartheta^+}{d\eta^+}\right)_{\eta^+=0} \tag{151}$$

zatem:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha\, x}{\lambda} = \left(\frac{\mathrm{Gr}_x}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{d\vartheta^+}{d\eta^+}\right)_{\eta^+=0} = \left(\frac{\mathrm{Gr}_x}{4}\right)^{1/4}\varphi(\mathrm{Pr}) \tag{152}$$

Wzrost temperatury $\left(\partial\vartheta^{+}/\partial\eta^{+}\right)_{\eta^{+}=0}$, jak pokazano na rys. 12, jest funkcją φ liczby Prandtla. Wyniki obliczeń numerycznych Ostracha opracował ponownie Le Févre [53] wprowadzając tzw. równanie interpolacyjne:

$$\varphi(\mathrm{Pr}) = \frac{0{,}849\,\mathrm{Pr}^{1/2}}{\left(1 + 2{,}006\,\mathrm{Pr}^{1/2} + 2{,}034\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4}} \tag{153}$$

Dla $\mathrm{Pr} \to 0$ otrzymuje się $\varphi(\mathrm{Pr}) = 0{,}849\ \mathrm{Pr}^{1/4}$ i stąd:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}600\left(\mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Pr}^2\right)^{1/4} \tag{154}$$

W tym przypadku siły tarcia są znikomo małe w porównaniu do sił wyporu i bezwładności, dlatego współczynnik α nie zależy od lepkości płynu. Natomiast dla $\mathrm{Pr} \to \infty$ otrzymuje się $\varphi(\mathrm{Pr}) = 0{,}711\ \mathrm{Pr}^{1/4}$ i dalej:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}503\left(\mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4} \tag{155}$$

Wówczas siły bezwładności są znikomo małe w porównaniu do sił wyporu i tarcia.

Średni współczynnik α_m otrzymuje się całkując równanie (152):

$$\alpha_m = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{L}\left[\frac{\beta_\infty\left(t_0 - t_\infty\right)g}{4\nu^2}\right]^{1/4}\varphi(\mathrm{Pr})\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/4}} \tag{156}$$

natomiast średnią wartość liczby Nusselta Nu_m określa się jako:

$$\mathrm{Nu}_m = \frac{\alpha_m L}{\lambda} = \frac{4}{3}\left(\frac{\mathrm{Gr}}{4}\right)^{1/4}\varphi(\mathrm{Pr}) = \frac{4}{3}\,\mathrm{Nu}_x, \quad (x = L) \tag{157}$$

gdzie w liczbie Grashofa charakterystycznym wymiarem liniowym L jest wysokość ściany. Równanie (152) jest słuszne jedynie dla ruchu laminarnego, który jak wykazują eksperymenty, występuje dla liczby Rayleigha $\mathrm{Ra} \le 10^9$. Rozwiązanie analityczne w postaci równania uniwersalnego, słusznego dla dowolnych wartości liczb Grashofa i Prandtla, dla konwekcji naturalnej przy laminarnym, jak i turbulentnym ruchu płynu, wzdłuż pionowej ściany oraz pionowego cylindra, podali Churchill i Chu [14]:

$$\mathrm{Nu}_m = \left\{0{,}825 + \frac{0{,}387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{\left[1 + \left(0{,}492/\mathrm{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 \tag{158}$$

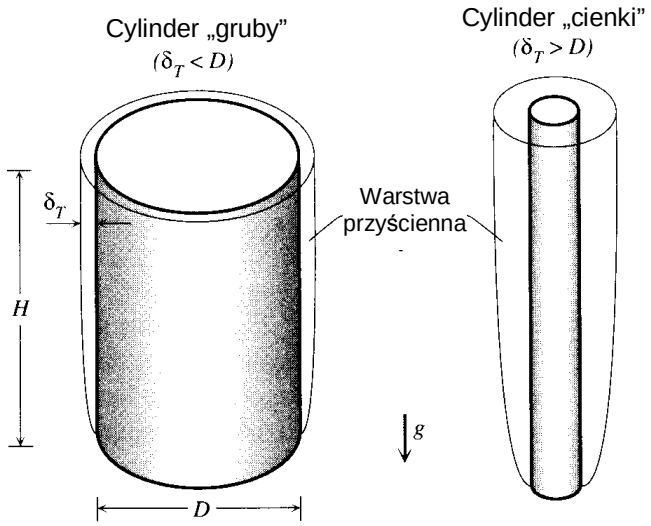
gdzie:

$$\mathrm{Nu}_m = \frac{\alpha_m L}{\lambda}, \qquad \mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} = \frac{\beta_\infty\left(t_0 - t_\infty\right)g\,L^3}{\nu^2}\,\mathrm{Pr} \tag{159}$$

Należy jednak pamiętać, iż dla obszaru ruchu laminarnego jest ono mniej dokładne od podanego wcześniej rozwiązania Le Févrea. Dla pionowego cylindra jest ono słuszne jeżeli $D/L \ge 35\ \mathrm{Gr}^{-1/4}$ (D – średnica zewnętrzna cylindra).

2.3.3. Rozwiązania analityczne dla pionowego cylindra

Dla wystarczająco dużych wartości ilorazu D/L (tzw. długości względnej), dla cylindra słuszne są te same równania kryterialne, jak dla pionowej ściany. Wówczas pionowe powierzchnie cylindryczne rur są krótkie, grubość tworzącej się warstwy przyściennej jest wielokrotnie mniejsza od średnicy rury i jej zakrzywienie nie ma większego wpływu na współczynnik przejmowania ciepła [12], [30], (rys. 13).



Rys. 13. Porównanie grubości warstwy przyściennej dla różnych promieni krzywizny [3].

Wykorzystując wyniki obliczeń numerycznych laminarnej warstwy przyściennej na powierzchni pionowych cylindrów [10] ustalono, że w płynach o liczbie Prandtla $Pr \geq 0{,}72$ współczynniki przejmowania ciepła przy naturalnej konwekcji swobodnej, obliczane tak jak dla pionowej ściany, są zaniżone jedynie o ok. 4%, gdy:

- $Gr_x^{0,25} D/x > 55$ – dla wartości lokalnych współczynników α,
- $Gr_x^{0,25} D/H > 35$ – dla wartości średnich współczynników α.

W pozostałych przypadkach należy stosować równania kryterialne uwzględniające zakrzywienie powierzchni rury wyrażone stosunkiem x/D dla wartości lokalnych lub H/D dla wartości średnich [7].

Najbardziej obszerny przegląd wyników badań dotyczących przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej na pionowych powierzchniach cylindrycznych w postaci zestawienia równań charakterystycznych przedstawił Morgan [65]. Nie podał on jednak żadnego komentarza ani porównania tych danych. Większość tych danych, które pokazano na rys. 14 ma postać prostego jednomianu potęgowego:

$$Nu_H = A\, Ra_H^m \tag{160}$$

Rys. 14. Średnia liczba Nusselta na powierzchni pionowego cylindra w funkcji liczby Rayleigha wg uogólnionego równania postaci $Nu_H = A\,Ra_H^m$ [7].

Z zestawienia tych badań wynika, że dane Carne, Eigensona oraz Hanesiana i Kalisha wyraźnie odbiegają od pozostałych danych. Natomiast wzór McAdamsa rekomendowany dla powietrza i cieczy, zawierający stałe podane niżej w tablicy 2, stosunkowo najlepiej reprezentuje również dane innych autorów. Jednak o przybliżonym charakterze wzoru (160) świadczy brak parametru H/D, który uwzględnia efekt zakrzywienia warstwy przyściennej.

Tab. 2. Stałe do wzoru McAdamsa [59].

Ra_H	A	m
10^4 do 10^9	0,590	0,250
10^9 do 10^{12}	0,129	0,333

Wśród dostępnych w literaturze równań charakterystycznych, opisujących laminarną konwekcję naturalną na pionowych powierzchniach cylindrycznych, zawierających parametr H/D, można wymienić wzór Le Févre i Ede [54]:

$$\mathrm{Nu_H} = \frac{4}{3}\left[\frac{7\,\mathrm{Ra_H\,Pr}}{5(20+21\,\mathrm{Pr})}\right]^{0,25} + \frac{4(272+315\,\mathrm{Pr})\mathrm{H}}{35(64+63\,\mathrm{Pr})\mathrm{D}} \qquad (161)$$

oraz wzory przytoczone w referacie [7] dla konwekcji w powietrzu (Pr = 0,72), opracowane na podstawie wyników obliczeń numerycznych laminarnej warstwy przyściennej na powierzchni pionowych cylindrów, wykonanych przez Cebeci [10]:

- dla wartości lokalnych:

$$\mathrm{Nu_x} = \left\{ 0{,}987 + 0{,}4165 \left[32^{0{,}5} \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{D}} \right) \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra_x}} \right)^{0{,}25} \right]^{0{,}863} \right\} \mathrm{Nu_{x-FP}} \tag{162}$$

gdzie:

$$\mathrm{Nu_{x-FP}} = 0{,}75 \left[\frac{\mathrm{Ra_x\,Pr}}{4\left(0{,}609 + 1{,}221\,\mathrm{Pr}^{0{,}5} + 1{,}238\,\mathrm{Pr}\right)} \right]^{0{,}25} \tag{163}$$

jest wzorem na lokalną liczbę Nusselta dla pionowej ściany płaskiej, opracowany przez Le Févre [53] na podstawie rozwiązania Ostracha [71] (patrz też [32]).

- dla wartości średnich:

$$\mathrm{Nu_H} = \left\{ 0{,}993 + 0{,}3065 \left[32^{0{,}5} \left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{D}} \right) \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra_H}} \right)^{0{,}25} \right]^{0{,}8995} \right\} \mathrm{Nu_{H-FP}} \tag{164}$$

gdzie:

$$\mathrm{Nu_{H-FP}} = 0{,}68 + \frac{0{,}67\,\mathrm{Ra_H^{0{,}25}}}{\left[1 + \left(0{,}492/\mathrm{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} \tag{165}$$

jest wzorem Churchilla i Chu [14] na średnią liczbę Nusselta dla pionowej płaskiej ściany, ważnym dla $0 < \mathrm{Ra_H} < 10^9$.

2.3.4. Rozwiązania analityczne dla poziomego cylindra

Ważnym zagadnieniem z punktu widzenia zysków ciepła w instalacjach ogrzewczych jest konwekcja swobodna występująca wokół poziomego cylindra (rury), zanurzonego w nieograniczonej lub półograniczonej przestrzeni, dla którego charakterystycznym wymiarem liniowym jest średnica zewnętrzna D. Jeśli liczba Rayleigha jest bardzo mała, $\mathrm{Ra_D} < 10^{-3}$, to grubość warstwy granicznej jest większa od średnicy cylindra (tzw. cienki cylinder, patrz rys. 13). W takiej warstwie granicznej rozciągającej się do nieskończoności, przekazywanie ciepła odbywa się przez przewodzenie, a liczba Nusselta dla średnicy $\mathrm{D} \to 0$ przyjmuje stałą wartość:

$$\mathrm{Nu_D} = \frac{\alpha\,\mathrm{D}}{\lambda} = \frac{1}{2} \tag{166}$$

Zależność powyższa dotyczy przypadku, gdy płyn będący w kontakcie z powierzchnią cylindra znajduje się w spoczynku [72].

W zakresie liczb Rayleigha $10^{-3} < Ra_D < 10^2$ w warstwie płynu przyległej do ciepłego cylindra zaczyna pojawiać się ruch molekuł i zależność korelacyjną opisującą średnią liczbę Nusselta można przedstawić w postaci:

$$\overline{Nu}_D = 1{,}18\, Ra_D^{1/8} \tag{167}$$

Elenbaas [72] podaje wzór korelacyjny na średnią liczbę Nusselta dla cienkich poziomych drutów zanurzonych w gazie dwuatomowym, dla $Ra_D < 10^4$, postaci:

$$\overline{Nu}_D^{\,3} \exp\left(-\frac{6}{\overline{Nu}_D}\right) = \frac{Ra_D}{235} \tag{168}$$

Jeśli wartości liczby Rayleigha mieszczą się w przedziale $5\cdot10^2 < Ra_D < 2\cdot10^7$, to w płynie w pobliżu powierzchni grzejnej powstaje laminarna warstwa graniczna (rys. 15) i Michiejew [62] zaleca obliczanie współczynnika przejmowania ciepła ze wzoru uprpszczonego:

$$\overline{Nu} = 0{,}54\, Ra_D^{1/4} \tag{169}$$

lub bardziej dokładnego:

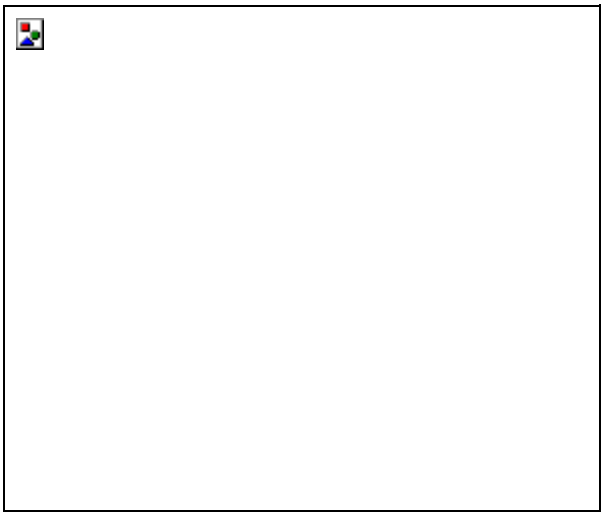
$$\overline{Nu}_D = 0{,}50\, Ra_D^{1/4} \left(\frac{Pr_w}{Pr_f}\right)^{1/4} \tag{170}$$

gdzie liczba Rayleigha określana jest dla temperatury płynu poza warstwą przyścienną t_f.

Inni autorzy – Fishenden i Saundes, proponują obliczenie średniej wartości liczby Nusselta ze wzoru:

$$\overline{Nu}_D = 0{,}47\left(Gr_D\, Pr\right)^{1/4} \tag{171}$$

gdy iloczyn liczb Gr_D i Pr mieści się w przedziale $10^4 < Gr_D Pr < 10^8$ [72].



Rys. 15. Rozkład prędkości i temperatury przy laminarnej konwekcji swobodnej wokół poziomego cylindra [72].

Dla małych grubości pierścienia warstwy granicznej średnią wartość liczby Nusselta oblicza się z wyrażenia:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0{,}378\,\mathrm{Gr}_D^{1/4} \tag{172}$$

Teoretyczne rozważania Hermana [106] umożliwiły wyprowadzenie wzoru na średnią wartość liczby Nusselta, słusznego dla gazów dwuatomowych (Pr = 0,7):

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0{,}372\,\mathrm{Gr}_D^{1/4} \tag{173}$$

z którego oblicza się średni współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni poziomego cylindra w laminarnej konwekcji swobodnej.

Dla poziomego cylindra można też znaleźć dokładne rozwiązanie postaci:

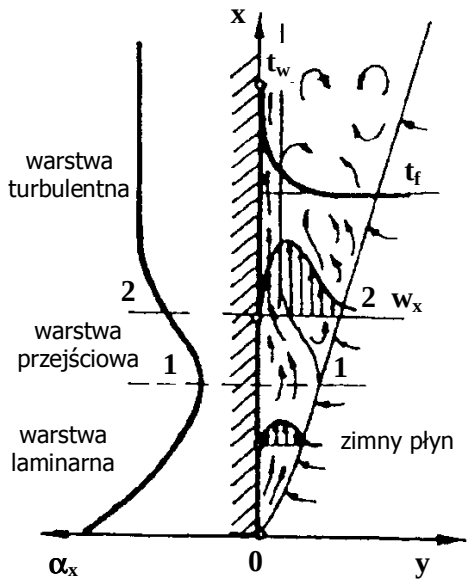
$$\mathrm{Nu}_m = \left\{ 0{,}600 + \frac{0{,}387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{\left[1+\left(0{,}559/\mathrm{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2 \tag{174}$$

słuszne przy L >> D oraz $10^{-5} \le \mathrm{Ra} \le 10^{12}$ [13].

2.3.5. Konwekcja swobodna przy turbulentnym ruchu płynu

Dotychczas dla konwekcji swobodnej nie przedstawiono ścisłych warunków określających przejście z laminarnej warstwy granicznej w turbulentną. Kryterium zmiany rodzaju ruchu jest krytyczna wartość liczby Grashofa lub iloczynu GrPr. Wyniki badań doświadczalnych pozwalają przyjąć, że w zakresie $10^9 < \mathrm{Gr}_{xT} < 6\cdot10^{10}$ pojawiają się pierwsze wiry przy konwekcji swobodnej w warstwie przyściennej płynu, będącego w kontakcie z pionową powierzchnią (ściany bądź walca). Według innych autorów [100], pierwsze wiry w warstwie granicznej wzdłuż pionowej ściany płaskiej pojawiają się gdy $\mathrm{Gr}_{xT} = 4\cdot10^8$, a na walcu po-

ziomym dla $Gr_{xT} = 10^9$. Michiejew [62] proponuje, aby dla różnych kształtów powierzchni pionowej przyjmować wartość $(Gr_{xT}Pr_T)_{kr} = 2 \cdot 10^7$. Wiśniewski [116] nadmienia, że w niektórych okolicznościach laminarna warstwa graniczna jest zakłócona nawet dla $Gr_{xT}Pr_T > 10^9$, a w pełni rozwinięta turbulentna warstwa graniczna rozpoczyna się dla $Gr_{xT}Pr_T = 6 \cdot 10^{10}$. Współczynnik przejmowania ciepła wzdłuż pionowej powierzchni zmienia się od wartości minimalnej (rys. 16) odpowiadającej laminarnej warstwie przyściennej, do wartości maksymalnej odpowiadającej warstwie turbulentnej.



Rys. 16. Konwekcja swobodna na powierzchni pionowej (ściana lub walec).

Eckert i Diagula [16] zaproponowali, że dla jednakowych grubości termicznej i hydrodynamicznej warstwy granicznej, występującej na pionowej powierzchni płaskiej o temperaturze t_w = const, będącej w kontakcie z nieograniczonym płynem o temperaturze t_f, liczbę nadwyżek temperatury Θ_b oraz składową prędkość w warstwie granicznej dla turbulentnej konwekcji swobodnej można aproksymować wzorami:

$$\Theta_b = \frac{\Theta}{\Theta_1} = \frac{t - t_f}{t_w - t_f} = 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{175}$$

$$w_x = w' \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4 \tag{176}$$

gdzie: w' - pewna wielkość o jednostce miary prędkości, która zależy od maksymalnej wartości prędkości w warstwie granicznej.

Równania (175) i (176) spełnione są w pobliżu powierzchni ściany. Autorzy również przyjmują, że naprężenie styczne na powierzchni ściany oraz gęstość strumienia ciepła dla

konwekcji swobodnej można przedstawić takimi samymi równaniami jak dla konwekcji wymuszonej, czyli:

$$\tau_z = 0{,}0228\,\rho\, w'^2 \left(\frac{\nu_k}{w'\delta} \right)^{1/4} \tag{177}$$

$$q_A = 0{,}0228\,\rho\, c_p w' \left(t_w - t_f \right) \left(\frac{\nu_k}{w'\delta} \right)^{1/4} Pr^{-2/3} \tag{178}$$

Współczynnik przejmowania ciepła dla turbulentnej warstwy granicznej na powierzchni pionowej ściany określa się z równania:

$$\alpha_t = 0{,}0228\,\rho\, c_p w' \left(\frac{\nu_k}{w'\delta} \right)^{1/4} Pr^{-2/3} \tag{179}$$

Grubość turbulentnej warstwy granicznej zlokalizowanej na powierzchni pionowej ściany oblicza się z zależności:

$$\delta_t = 0{,}376\, x \left(\frac{\nu_k}{w' x} \right)^{1/5} \tag{180}$$

Równania bilansu pędu i energii dla turbulentnej warstwy granicznej przy konwekcji swobodnej można przedstawić odpowiednio w postaci:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta w_x^2 \, dy = -\frac{\tau_z}{\rho} + g\beta \int_0^\delta \left(t - t_f \right) dy \tag{181}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(t - t_f \right) w_x \, dy = \frac{q_A}{\rho\, c_p} \tag{182}$$

Po wykorzystaniu zależności (175) i (178) równania (181) i (182) sprowadzają się do postaci:

$$\frac{d\left(w'^2 \delta \right)}{dx} = 2{,}39\, g\beta \left(t_w - t_f \right) \delta - 0{,}436\, w_x^2 \left(\frac{\nu_k}{w'\delta} \right)^{1/4} \tag{183}$$

$$\frac{d\left(w'\delta \right)}{dx} = 0{,}623\, w' \left(\frac{\nu_k}{w'\delta} \right)^{1/4} Pr^{-2/3} \tag{184}$$

Rozwiązanie równań wymaga podstawienia: $w' = B\,X^m$, $\delta = C\,X^n$, a porównanie składników tych równań umożliwia wyznaczenie wykładników: m = 1/2, n = 7/10. Stałe całkowania B i C wyznacza się z układu równań (183) i (184) po podstawieniu do tych równań zależności $w' = B\,X^{1/2}$, $\delta = C\,X^{7/10}$. Końcowe obliczenia po wykorzystaniu powyższych zależności pozwalają otrzymać dla turbulentnej konwekcji swobodnej na izotermicznej ścianie pionowej wzory na:

– miejscową liczbę Nusselta na wysokości x:

$$\mathrm{Nu_x} = 0{,}0295\,\mathrm{Gr_x^{2/5}}\,\mathrm{Pr^{7/15}}\left(1 + 0{,}494\,\mathrm{Pr^{2/3}}\right)^{-2/5} \tag{185}$$

– średnią liczbę Nusselta dla ściany o wysokości H:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_\mathrm{H} = 0{,}0246\,\mathrm{Gr_H^{2/5}}\,\mathrm{Pr^{7/15}}\left(1 + 0{,}494\,\mathrm{Pr^{2/3}}\right)^{-2/5} \tag{186}$$

– grubość warstwy granicznej:

$$\delta_\mathrm{t} = 0{,}565\,\mathrm{Gr_x^{1/10}}\,\mathrm{Pr^{-8/15}}\left(1 + 0{,}494\,\mathrm{Pr^{2/3}}\right)^{1/10} \tag{187}$$

Wzór (185) dla powietrza (Pr = 0,72) przyjmuje postać:

$$\mathrm{Nu_x} = 0{,}025\,\mathrm{Gr_x^{2/5}} \tag{188}$$

Michiejew [62] proponuje w zakresie średnich wartości liczb Prandtla: $1 < \mathrm{Pr} \le 0{,}7$ stosowanie wzoru na średnią liczbę Nusselta w postaci:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_\mathrm{H} = 0{,}135\left(\mathrm{Gr_H\,Pr}\right)^{1/3} \tag{189}$$

który jest słuszny dla zakresu $2\cdot10^7 < \mathrm{Gr_H Pr} < 10^{13}$.

Własności fizyczne wielkości występujących w powyższych równaniach ustala się dla średniej arytmetycznej temperatury warstwy granicznej: $t_m = 0{,}5\,(t_w + t_f)$. Wyniki badań eksperymentalnych pozwoliły Pczełkinowi [73] ustalić zależność korelacyjną na liczbę Nusselta dla turbulentnej konwekcji swobodnej wzdłuż pionowej ściany w postaci:

$$\mathrm{Nu_{xT}} = 0{,}15\left(\mathrm{Gr_{xT}\,Pr_T}\right)^{1/3}\left(\frac{\mathrm{Pr_T}}{\mathrm{Pr_w}}\right)^{1/4} \tag{190}$$

w której wartości wielkości fizycznych płynu ustalono dla temperatury spoza warstwy granicznej i temperatury powierzchni ściany.

Ze wzoru (189) wynika, że w obszarze turbulentnym liczba Nusselta jest proporcjonalna do liczby Grashofa o wykładniku 1/3. Liczba Grashofa zależy od charakterystycznego wymiaru geometrycznego ciała stałego w potędze trzeciej, zatem liczba Nusselta jest proporcjonalna do wymiaru geometrycznego w potędze pierwszej. Definicyjne równanie liczby Nusselta zawiera również wymiar geometryczny w potędze pierwszej. Ostatecznie więc współczynnik przejmowania ciepła dla konwekcji swobodnej w ruchu turbulentnym nie zależy od charakterystycznego wymiaru geometrycznego ciała stałego. To stwarza możliwość badania zjawiska przejmowania ciepła dla ruchu burzliwego w konwekcji swobodnej na modelach zmniejszonych.

3. PRZEGLĄD DOŚWIADCZALNYCH METOD WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

3.1. Metoda ustalonego strumienia cieplnego

W badaniach współczynnika przejmowania ciepła metodą ustalonego strumienia cieplnego stosuje się równanie Newtona w postaci:

$$\alpha = \frac{d\dot{Q}}{dA\left(t_w - t_f\right)} \tag{191}$$

Jeżeli stały jest elementarny strumień ciepła przepływający przez elementarną powierzchnię oraz stała temperatura powierzchni ciała i temperatura płynu, to za pomocą tej metody, z powyższego równania określić można lokalną wartość współczynnika przejmowania ciepła α. Z kolei do określenia średniego współczynnika przejmowania ciepła można wykorzystać równanie Newtona zapisane w postaci:

$$\bar{\alpha} = \frac{\dot{Q}}{A\left(t_w - t_f\right)} \tag{192}$$

gdzie:

$\dot{Q}$ – całkowity strumień ciepła przepływający przez powierzchnię A, W

t_w, t_f – średnie temperatury odpowiednio: ścianki i płynu, °C.

W praktyce średnią temperaturę na powierzchni ścianki określa się jako średnią arytmetyczną ze wszystkich mierzonych wartości temperatury, czyli:

$$\bar{t}_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{w\,i} \tag{193}$$

gdzie:

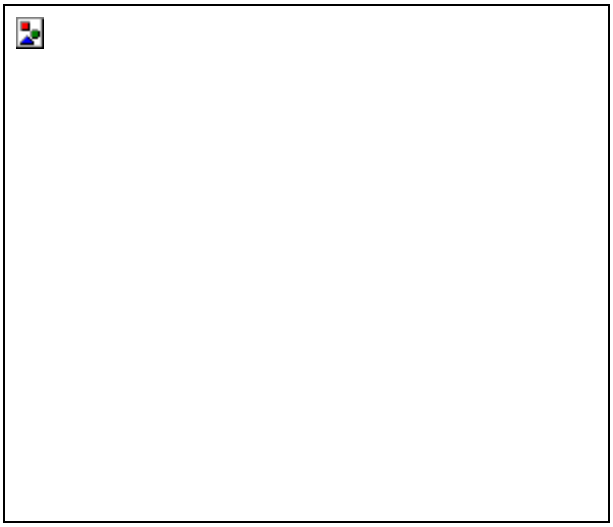
n – liczba punktów pomiarowych temperatury na powierzchni.

Podobnie określa się średnią temperaturę płynu, mierzoną w dużej odległości od ścianki.

Istotny jest również wybór odpowiedniego sposobu generowania strumienia ciepła. Najczęściej stosowane są następujące sposoby doprowadzania ciepła [68]:

- elektryczny (pośredni, bezpośredni),
- konwekcyjny.

W sposobie elektrycznym bezpośrednim prąd elektryczny przepływa przez element grzejny umieszczony wewnątrz układu bądź na modelu, (rys. 17).



Rys. 17. Bezpośrednia metoda generowania strumienia ciepła [68].

Strumień ciepła, który wydziela się na elemencie grzejnym, oblicza się (bez uwzględniania strat) z następującej zależności:

$$\dot{Q} = I^2 R(t_w) \tag{194}$$

gdzie:

R – rezystancja elementu grzejnego, Ω

I – natężenie prądu elektrycznego płynącego przez element grzejny, A.

Przy wykorzystaniu metody elektrycznej pośredniej do wytwarzania strumienia ciepła elementy grzejne są izolowane od powierzchni nagrzewanej (rys. 18), a ciepło doprowadzone oblicza się z zależności:

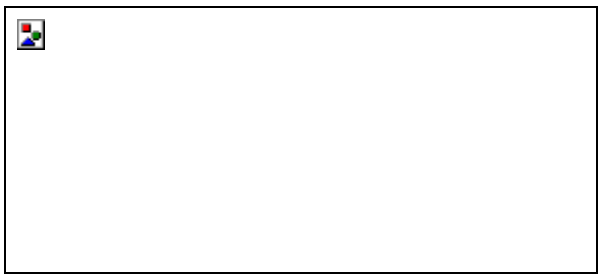
$$\dot{Q} = U I \tag{195}$$

gdzie:

U – spadek napięcia na elemencie grzejnym, V.

Rys. 18. Schemat stanowiska do pomiaru współczynnika przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej na rurze pionowej z wykorzystaniem metody pośredniej.

W sposobie konwekcyjnym do wytwarzania strumienia ciepła wykorzystuje się strumień masy płynu, który ogrzewa lub ochładza rozpatrywaną powierzchnię, rys 19.



Rys. 19. Konwekcyjna metoda wytwarzania strumienia ciepła [68].

Strumień ciepła określony jest zależnością:

$$\dot{Q} = \dot{m}(i_2 - i_1) \tag{196}$$

gdzie:

i_1 – entalpia początkowa płynu, J/kg

i_2 – entalpia końcowa płynu, J/kg

$\dot{m}$ – strumień masy płynu, kg/s.

W wyborze sposobu generowania strumienia masy należy uwzględnić fakt, że przy wykorzystaniu kondensującej się pary lub wrzącej cieczy temperatura ścianki jest prawie stała. Gdy nagrzewanie odbywa się przy pomocy prądu elektrycznego, strumień ciepła na powierzchni jest stały, ale temperatura ulega zmianom. Natomiast gdy powierzchnię ciała

ogrzewa przepływająca ciecz, zmianom ulega zarówno temperatura ścianki, jak i przekazywany strumień ciepła.

3.2. Metoda stanu uporządkowanego

Metoda ta opiera się na wykorzystaniu równania nieustalonego przewodzenia ciepła [6]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \tag{197}$$

gdzie τ – czas z warunkami brzegowymi odpowiednio w postaci:

$$\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w + \alpha\left(t_w - t_f\right) = 0 \tag{198}$$

oraz:

$$t\left(x, y, z, 0\right) = t_0 = \text{const} \tag{199}$$

Musi również być spełniony warunek:

$$t_f\left(\tau\right) = \text{const}, \quad \alpha\left(\tau\right) = \text{const} \tag{200}$$

Rozwiązaniem równania (197) z warunkami brzegowymi (198) i początkowymi (199) jest nieskończony szereg opisany równaniem:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i \exp\left(-\mu_i^2 \, Fo\right) \tag{201}$$

$$\Theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f} \tag{202}$$

gdzie:

C_i – stałe określane na podstawie warunku początkowego,

f_i – funkcja zależna od współrzędnych,

μ_i – stałe wartości własne określane z warunku brzegowego,

t_0 – początkowa temperatura ciała.

Przyjmuje się określoną liczbę $Fo \geq Fo_1$ (w przybliżeniu $Fo_1 \approx 0{,}55$), a równanie (201) przedstawia się w postaci tylko pierwszego wyrazu szeregu:

$$\Theta = C_1 f_1 \exp\left(-\mu_1^2 \, Fo\right) \tag{203}$$

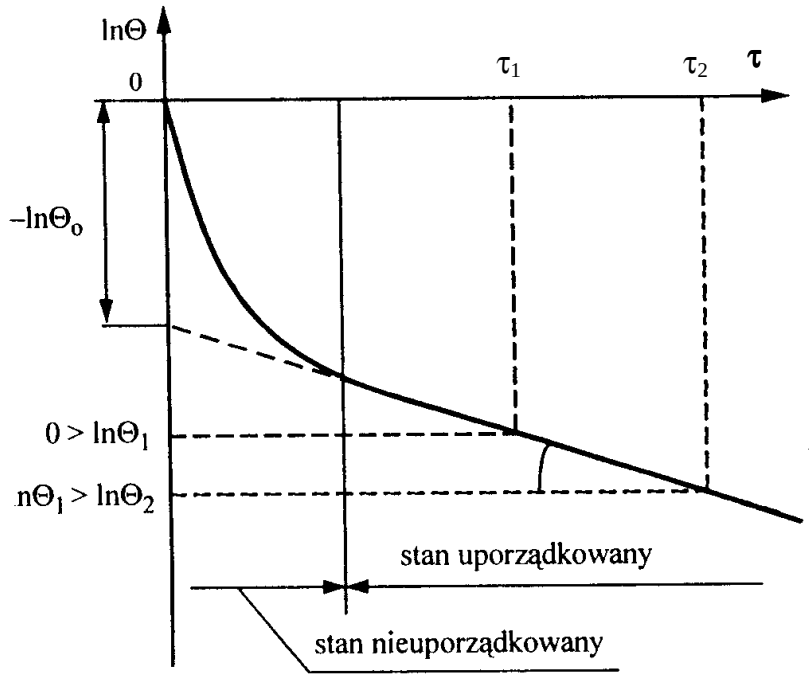
Logarytmując powyższe otrzymuje się:

$$\ln\Theta = \ln\left(C_1 f_1\right) - mt \tag{204}$$

gdzie:

$$m = \mu_1^2 a / L^2 \tag{205}$$

Graficznym obrazem tego równania w układzie (lnΘ, τ) jest linia prosta (rys. 20).



Rys. 20. Wykres zmiany temperatury badanego ciała w czasie jego ochładzania, Θ oznacza bezwymiarową różnicę temperatury.

Proces ochładzania lub ogrzewania ze stanu nieuporządkowanego przy Fo < 0,55 przechodzi w stan uporządkowany przy Fo ≥ 0,55, dla którego jest słuszne równanie (204). Różniczkując to równanie względem czasu otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\ln \Theta) = -m \tag{206}$$

Tak więc tangens nachylenia prostej dla stanu uporządkowanego (rys. 20) jest stały i wynosi:

$$\frac{\ln \Theta_1 - \ln \Theta_2}{\tau_2 - \tau_1} = m = \text{const} \tag{207}$$

Jak wynika z równania (206) prędkość nagrzewania lub ochładzania ciała w stanie uporządkowanym jest jednakowa dla wszystkich punktów ciała. Jest ona również stała dla tzw. średniej temperatury objętościowej równej:

$$\bar{t} = \frac{1}{V}\int_V t \, dV \tag{208}$$

Ciepło oddawane przez ciało o dowolnym kształcie w czasie dτ wynosi:

$$d\dot{Q} = -c_s \rho_s V \frac{d\bar{t}}{d\tau} \tag{209}$$

Jest ono równe ciepłu, które przejmuje płyn:

$$d\dot{Q} = \bar{\alpha} A (t_w - t_f) \tag{210}$$

Pochodna po czasie temperatury objętościowej wynosi [56]:

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} = -m(t_f - \bar{t}) \tag{211}$$

Na podstawie zależności (209), (210) i (211) dla Fo ≥ 0,55 można zapisać:

$$c_s \rho_s V \frac{d\bar{t}}{d\tau} = \bar{\alpha} A (t_f - t_w) = c_s \rho_s V (t_f - \bar{t}) m \tag{212}$$

stąd otrzymuje się:

$$m = \frac{\bar{\alpha} A}{c_s \rho_s V} \frac{t_f - t_w}{t_f - \bar{t}} = \frac{\bar{\alpha} a}{\lambda_s L_z} \Psi = \frac{a_s}{L_z^2} Ko \tag{213}$$

gdzie:

$$\Psi = \frac{t_f - t_w}{t_f - \bar{t}} \tag{214}$$

jest liczbą podobieństwa charakteryzującą nierównomierność temperatury,

L_z – zastępczy charakterystyczny wymiar liniowy ciała,

Bi_z – liczba Biota, $Bi_z = \alpha L_z / \lambda_s$

Ko – liczba podobieństwa Kondratiewa, $Ko = Bi_z \Psi$.

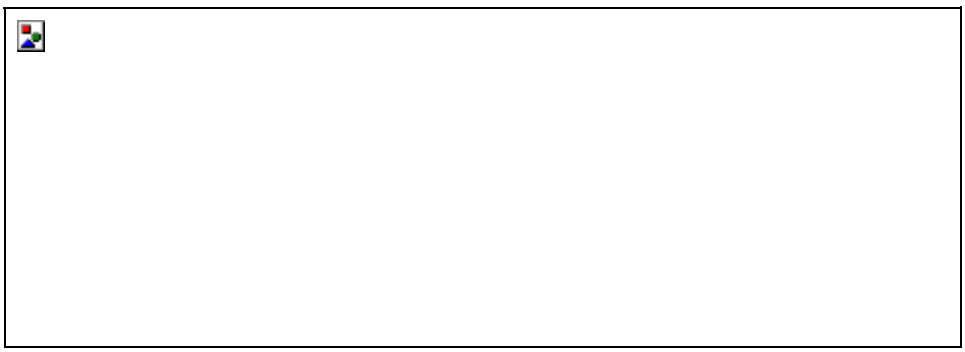
Jeżeli $Bi_z \to 0$, to $\Psi \to 1$ (w praktyce wystarczy, aby $Bi_z \leq 0{,}1$), natomiast jeżeli $Bi_z \to \infty$, to $\Psi \to 0$. Im większa jest nierównomierność temperatury, tym mniejszą wartość przyjmuje Ψ. Liczba podobieństwa Kondratiewa Ko określa zarówno nierównomierność pola temperatury, jak i wzajemne oddziaływanie ciała i otaczającego je płynu.

Rys. 21. Zależność Ko = f(Bi_z) dla ciał o różnej geometrii: 1 – płyta, 2 – kula, 3 – walec [56].

Na podstawie teorii stanu uporządkowanego okazało się, że liczba Kondratiewa jest funkcją liczby Biota. Jak wynika z rys. 21 dla ciał o różnej geometrii krzywe Ko = f(Bi_z) niewiele się od siebie różnią, dlatego zastępuje się je, nie popełniając dużego błędu, jedną krzywą, której analityczna postać jest następująca [56]:

$$\Psi = \frac{\mathrm{Ko}}{\mathrm{Bi}_z} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Bi}_z^2 + 1{,}437\,\mathrm{Bi}_z + 1}} \tag{215}$$

Do wyznaczania α metodą stanu uporządkowanego stosowany jest tzw. α-kalorymetr, który składa się z jednego lub więcej ciał o znanych własnościach cieplnych (najczęściej stosowane są α-kalorymetry metalowe, dla których spełniony jest warunek $\Psi = 1$), termometru różnicowego oraz miliwoltomierza (rys. 22).



Rys. 22. Wyznaczanie lokalnej wartości α przy użyciu α-kalorymetru [68].

W celu wyznaczenia współczynnika α mierzy się różnicę temperatury $T - T_f$ w funkcji czasu w warunkach stanu uporządkowanego termoelementem 3, a następnie wyznacza się tempo chłodzenia m z zależności (207). Aby obliczyć współczynnik przejmowania ciepła,

należy posłużyć się wzorem (213), przyjmując jednocześnie $\Psi = 1$ (jest to możliwe w α-kalorymetrach metalowych), na podstawie którego:

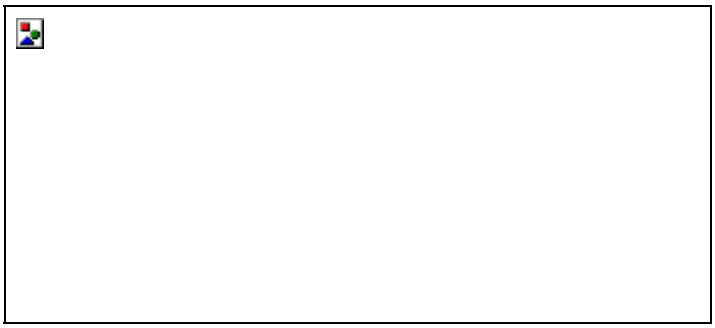
$$\bar{\alpha} = \frac{m \lambda_s L_z}{a} \tag{216}$$

Podczas ogrzewania bądź ochładzania ciała w warunkach konwekcji swobodnej nie jest spełniony warunek $\alpha(\tau) = \text{const}$, ponieważ α zależy od różnicy temperatury ścianki i płynu. Metoda stanu uporządkowanego nie powinna być stosowana gdy $Bi_z > 0{,}1$, dlatego powinien być spełniony warunek:

$$\alpha \leq \frac{0{,}1 \lambda_s}{L_z} \tag{217}$$

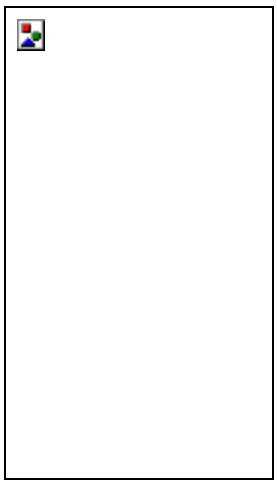
3.3. Metoda interferencyjna i smugowa

Prosty sposób obserwacji konwekcji swobodnej wprowadził Schmidt [6]. Aby obserwować zjawisko konwekcji np. na rurze poziomej, umieszcza się w dużej odległości od niej źródło światła, tak aby wiązka światła biegła równolegle do powierzchni ciała (rys. 23).



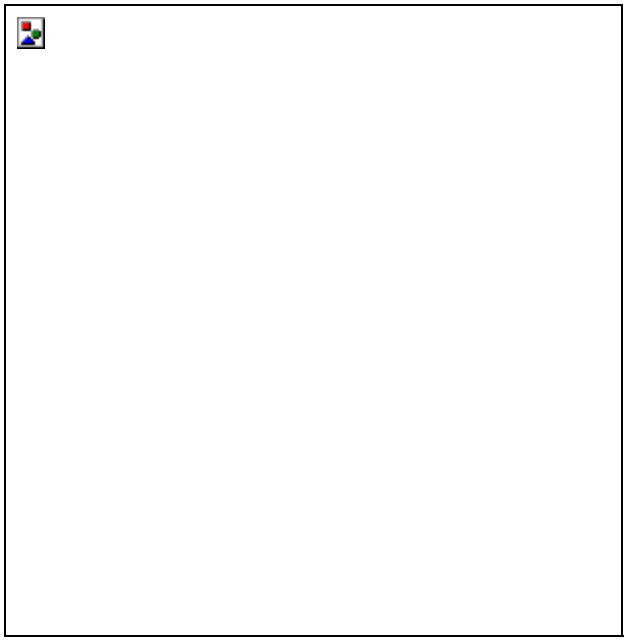
Rys. 23. Schemat obrazujący metodę cieni [31].

Wiązka światła przechodząc przez warstwę laminarną ulega załamaniu. Na ekranie umieszczonym w odpowiedniej odległości od obserwowanego obiektu obszar o-a będzie nie oświetlony, dając ostry cień warstwy przyściennej, jak na rys. 24.



Rys. 24. Obraz konwekcji swobodnej z wykorzystaniem metody cieni [31].

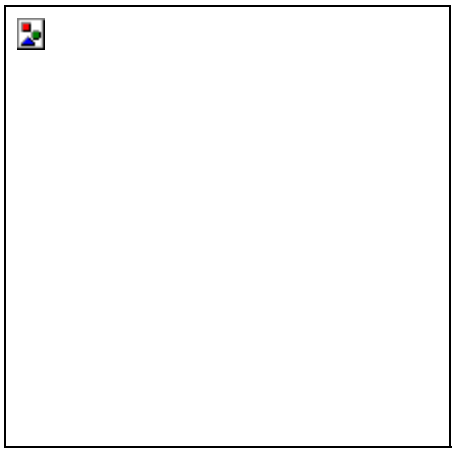
Innym sposobem obserwacji konwekcji swobodnej jest metoda interferencyjna, wykorzystująca falowy charakter światła (rys. 25). Wiązka światła monochromatycznego ze źródła 1 po przejściu przez soczewkę 2 pada na półprzezroczyste zwierciadło 3, które część wiązki odbija w kierunku zwierciadła 4, a drugą część przepuszcza w kierunku zwierciadła 5. Wiązka, która ulega odbiciu w zwierciadle 4 przechodzi przez półprzezroczystą płytkę 6 i pada na ekran 7.



Rys. 25. Schemat metody interferencyjnej.

Druga wiązka po odbiciu w zwierciadle 5 oświetla badane ciało i ulega odbiciu na płytce 6. Wiązka ta również pada na ekran 7. Gdy oświetlony przedmiot jest ogrzewany, wówczas tworzy się wokół niego pole temperatury i gęstości, co powoduje, że prędkość wiązki światła po przejściu przez taką warstwę ulega zmianie. W rezultacie promienie obu

wiązek, różniące się od siebie o pół długości fali wygaszają się, tworząc jednocześnie na ekranie 7 linie ciemne. Natomiast promienie zgodne w fazie wzmacniają się, dając linie jasne (rys. 26).



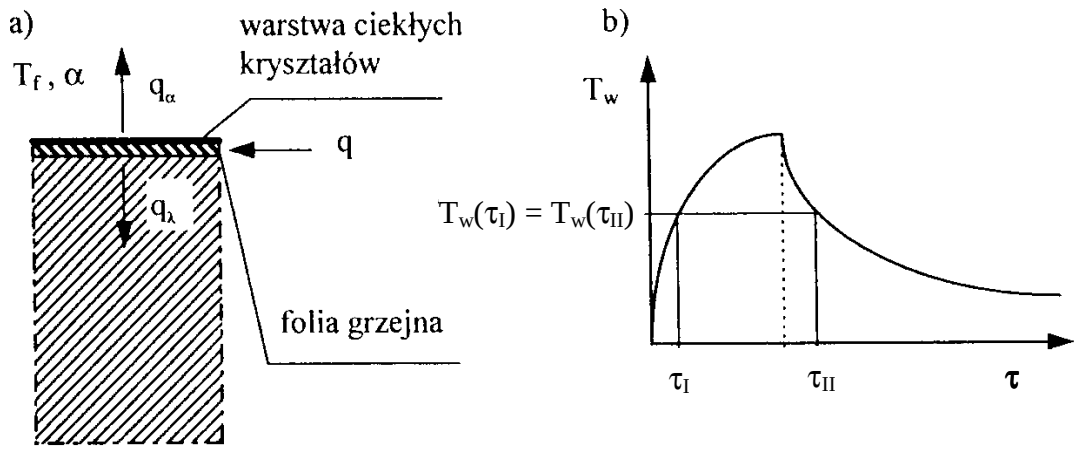
Rys. 26. Izotermy dookoła poziomej rury oraz pionowej płyty otrzymane metodą interferencyjną [31].

Obie metody pozwalają wyznaczyć gradient temperatury lub też kształt izoterm wokół badanego ciała, a tym samym dają nie tylko jakościowy, ale również ilościowy opis zjawiska.

3.4. Metoda termografii ciekłokrystalicznej

Cholesterolowe ciekłe kryształy wykazują zależność między maksimum długości rozproszonego światła a zmianą temperatury, tzn. zmianę barwy w funkcji temperatury. Zjawisko to jest zarówno odtwarzalne, jak i powtarzalne. Dlatego ciekłe kryształy wykorzystuje się do określania pól temperatury na powierzchni ciała, a tym samym do wyznaczania lokalnego współczynnika przejmowania ciepła. W celu określenia temperatury na powierzchni ciała jest ono pokrywane cienką warstwą ciekłego kryształu. Dzięki istniejącemu polu temperatury na powierzchni ciała tworzy się pole barw. Wiedząc, jakiej temperaturze odpowiada dana barwa, można na tej podstawie określić pole temperatury [6].

Pewnych trudności nastręcza kalibrowanie ciekłych kryształów (tzn. przyporządkowanie danej barwie odpowiedniej temperatury). Aby tego uniknąć wykorzystuje się analityczne rozwiązanie rozkładu temperatury dla danego ciała (np. dla walca czy płyty) i modulowany strumień ciepła. Na powierzchni ciała umieszczana jest cienka folia grzejna pokryta warstwą termoczułych ciekłych kryształów. Część strumienia ciepła generowanego w folii przejmuje płyn, a część pochłania ciało (rys. 27a).



Rys. 27. Metoda pomiary współczynnika przejmowania ciepła z wykorzystaniem termografii ciekłokrystalicznej [117].

Proces generowania strumienia ciepła przebiega dwuetapowo (rys. 27b). W etapie I grzałka rozwija maksymalną moc i temperatura na powierzchni ciała rośnie, natomiast w etapie II moc generowana w folii jest mniejsza, co powoduje, że temperatura obniża się. Znając analityczne równania rozkładu temperatury podczas etapu I i II, porównuje się je ze sobą gdy temperatura na powierzchni w danym punkcie (w czasie etapu I i II) jest taka sama. Dzięki temu unika się konieczności pomiaru temperatury powierzchni ciała, a tym samym kalibrowania ciekłych kryształów. Uzyskując stan ustalonej wymiany ciepła dokonuje się jedynie pomiaru czasu, po którym temperatura na powierzchni ciała w etapie I i II będzie taka sama.

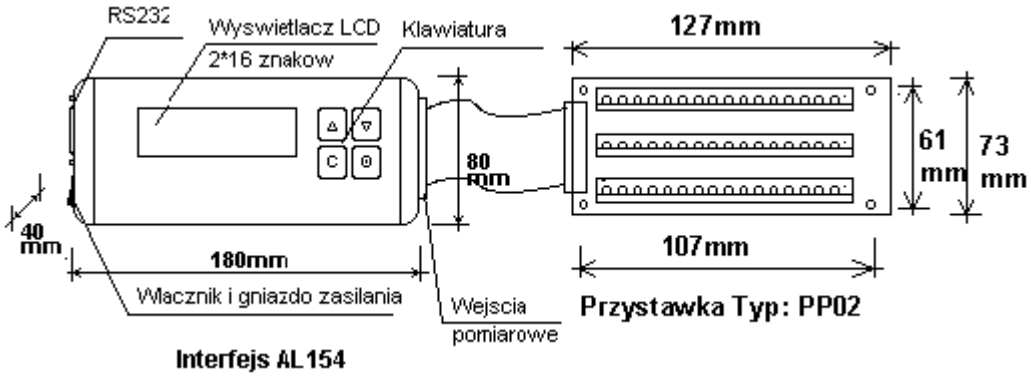
4. BADANIA WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

4.1. Opis stanowiska badawczego do pomiaru współczynnika przenikania ciepła

W komorze do badań cieplnych umieszczono 4 przewody stalowe o średnicach nominalnych: 15, 25, 32, 50 mm i długościach 2,3 m każdy. W przewodach tych centrycznie osadzono rurki miedziane o średnicy 10 mm zawierające spirale grzejne różnej mocy nominalnej: 250, 350, 400 i 600 W w otoczce z koralików ceramicznych. Wolna przestrzeń zarówno w rurkach miedzianych, jak i stalowych została wypełniona piaskiem. Zmiana wydajności cieplnej poszczególnych rur realizowana była przy użyciu autotransformatora. Pomiar mocy dostarczonej odbywał się watomierzem cyfrowym, a pomiar temperatury zewnętrznej ścianki przewodów za pomocą 18 czujników Pt100 w układzie 3-przewodowym. Czujniki miniaturowe termometrów przylgowych (16 szt.) o małej stałej czasowej, umieszczone zostały w różnych punktach na ściance zewnętrznej poszczególnych przewodów. Pozostałe 2 czujniki mierzyły temperaturę otoczenia. Rejestracja wyników pomiarów dokonywana była za pomocą wielokanałowego interfejsu pomiarowego współpracującego z komputerem PC.

W ramach niniejszej pracy skompletowano i wykalibrowano wielokanałowy system pomiarowy oparty na programowalnym przyrządzie pomiarowym serii AL 154 DA05 firmy APEK. Podstawowymi elementami systemu pomiarowego były:

- czujniki do pomiaru temperatury,
- rejestrator AL 154 DAO (rys. 28),
- listwa zaciskowa,
- układ zasilania.



Rys. 28. Schemat interfejsu pomiarowego AL 154. Źródło: materiały producenta.

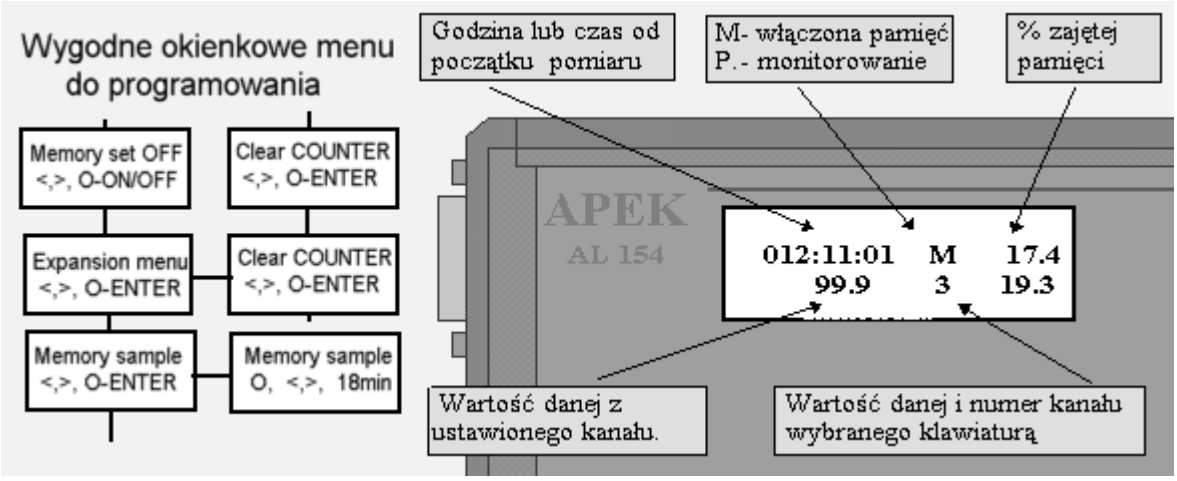
Przyrząd AL 154 DA05 umożliwia pomiar, z wybraną częstością, wartości chwilowych lub średnich wielkości fizycznych oraz ich wyświetlanie, zapamiętanie i przesyłanie do komputera lub drukarki. W zależności od standardowych czujników przyłączonych do analogowych wejść, interfejsy służą do pomiaru temperatury, ciśnienia, przepływu gazów lub cieczy, wilgotności itd. Wykonany jest w obudowie typu Delta Box (rys. 29). Urządzenie zawiera: wyświetlacz (rys. 30) i klawiaturę, zasilanie bateryjno-sieciowe, wewnętrzną pamięć, zegar czasu rzeczywistego, analogowe wejścia oraz cyfrowe wejście/wyjście sterujące.

Rys. 29. Interfejs pomiarowy AL 154. Źródło: materiały producenta.

AL 154 DA05 można zaprogramować przy pomocy wbudowanej klawiatury lub z poziomu komputera. Programowanie interfejsu z komputera polega na przesłaniu odpowiednich rozkazów tekstowych (w kodzie ASCII). Dla każdego z wejść (tzn. kanałów pomiarowych) można ustawić programowo kilka parametrów:

- włączenie lub wyłączenie danego kanału,
- pomiar wartości średniej lub chwilowej,
- typ przyłączonego czujnika i przebieg jego charakterystyki.

Interfejs umożliwia linearyzację charakterystyki każdego z czujników następującymi funkcjami: wykładniczą, liniową, logarytmiczną i potęgową. Oprócz oddzielnego zaprogramowania każdego kanału pomiarowego, możliwa jest również programowa regulacja parametrów dotyczących całego przyrządu: częstości pomiarów, prędkości transmisji itd. Wyniki pomiarów zapisywane są w plikach tekstowych, co pozwala przeprowadzić ich obróbkę za pomocą typowych programów kalkulacyjnych.



Rys. 30. Wbudowany wyświetlacz interfejsu pomiarowego AL 154. Źródło: materiały producenta.

Ogólne parametry techniczne AL 154 DA05:

- napięcie zasilania: zasilacz 6 – 9 V, 180 mA, wbudowany akumulator;
- dokładność pomiaru: przetwornik 12-bitowy;
- zakres pomiarowy: 4 mA – 20 mA, 0 mA–20 mA;
- szybkość transmisji: 1200, 2400, 4800, 9600 bps;
- zakres częstości zapisu do pamięci: 4 s – 90 min.;
- maksymalna ilość zapamiętanych wartości pomiarowych: 24 000.

4.1.1. Przygotowanie stanowiska do badań

W celu zachowania spójności pomiarowej ([20], [46], [48], [66]) dokonano wzorcowania wykonanych wcześniej na stanowisku badawczym obwodów pomiarowych (niezależnie od kalibracji interfejsu wykonywanej przez producenta). Wzorcowanie termometrów rezystancyjnych z czujnikami platynowymi wykonano przy wykorzystaniu termometrycznych punktów stałych Międzynarodowej Praktycznej Skali Temperatury. Określono w ten sposób charakterystyki rezystancyjno-temperaturowe istniejącego obwodu pomiarowego [60].

Dla termometrów pracujących w zakresie $0 \div 630°C$ charakterystykę wzorcowania wyznaczono dla punktu topnienia lodu i wrzenia wody zgodnie z następującą zależnością [61]:

$$R_t = R_o\left(1 + At + Bt^2\right) \tag{218}$$

gdzie: A i B – współczynniki wyznaczone doświadczalnie.

Do pomiaru temperatury powierzchni ścian komory stosowano czujniki Pt100 o symbolu S17624PD-Z-40-A firmy Minco Products Inc. Temperaturę powietrza mierzono za pomocą 2 czujników TOPO5-B (KFAP S.A. Kraków) w obudowie z tworzywa sztucznego ABS.

Do przetwarzania zmian oporności opornika termometrycznego Pt100 zależnych od mierzonej temperatury, na standartowy sygnał prądowy $4 \div 20$ mA proporcjonalny do mierzonej temperatury, zastosowano przetwornik APTR-2 produkcji KFAP S.A. Kraków. Elementy konstrukcyjne przetwornika oraz układ elektroniczny znajdowały się w obudowie z tworzywa sztucznego ABS. Przetworniki były zasilane z zasilaczy ZS 24-6 produkcji KFAP S.A.

System pomiarowy poddano kalibracji na stanowisku pomiarowym do badań zaworów termostatycznych w ITGS w Radomiu, które zawierało m.in. termometr oporowy Kelvinmat umożliwiający pomiar temperatury w zakresie od 0 do 100^{o}C z dokładnością do 0,001^{o}C oraz termostat z mieszadłem. Kalibrację (wielokrotną) przeprowadzano wykorzystując temperaturę topnienia lodu oraz temperaturę wrzenia wody. Dokonywano pomiarów kontrolnych w punktach pośrednich. Procedura kalibracji zapewniła dokładność pomiarów na poziomie 0,1^{o}C.

4.1.2. Modyfikacja stanowiska laboratoryjnego

Pierwsza seria badań wykazała duże (rzędu 10 K) różnice temperatury ścianki zewnętrznej na każdym z czterech badanych przewodów. Było to spowodowane nierównomiernym ułożeniem spirali grzejnej, zniszczeniem i miejscowymi ubytkami korali szamotowych izolujących spiralę od osłonowej rury miedzianej oraz ubytkami piasku tak w rurze miedzianej, jak i w przestrzeni pomiędzy rurami.

Błąd spowodowany nierównomiernym rozłożeniem spirali (jej rozciągnięcie lub ściśnięcie), zlikwidowano przez zastosowanie nowego, prostego przewodu grzejnego o oporze właściwym umożliwiającym przeprowadzenie pomiarów przy temperaturach eksploatacyjnych występujących w instalacjach c.o. Jednocześnie obniżono wymagane napięcie zasilania grzejników na wyjściu autotransformatora do 60V. Podczas wymiany spirali grzejnej stwierdzono znaczne ubytki (zniszczenie) korali izolacyjnych i wszystkie korale wymieniono na nowe.

Aby wyeliminować błąd wynikający z ubytków piasku, przystosowano grzejnik do napełnienia go olejem transformatorowym (w przestrzeni między rurą miedzianą a badaną rurą stalową), lecz próby uszczelnienia go, mimo zastosowania różnych technik, nie powiodły się — zachowywał on szczelność jedynie „na zimno”. Wobec tego do dalszych badań wyko-

rzystano grzejniki z nowymi, prostymi przewodami grzejnymi i z nowymi koralami, lecz z przestrzenią między rurą miedzianą a badaną rurą stalową wypełnioną powietrzem. Aby rura miedziana umieszczona była osiowo w rurze stalowej, wykonano niewielkie dystansy z kawałków przewodów z tworzyw sztucznych.

Do badanych grzejników dostarczano energię elektryczną ze względu na prostotę pomiaru mocy chwilowej. Moc mierzono watomierzem elektronicznym z dokładnością do 1 W. Sprawność wytwarzania w ten sposób energii cieplnej w grzejniku elektrycznym oszacowano średnio na 98% ze względu na wydłużenie termiczne przewodu grzejnego i jego wysuwanie się na zewnątrz badanej rury.

Skompletowano nowy system pomiarowy, wykorzystujący półprzewodnikowe czujniki temperatury firmy Philips. Umożliwiło to podłączenie 24 czujników do układu, zamiast 12, jak w przypadku zastosowania czujników typu Pt100. Ponadto czujniki półprzewodnikowe były bardziej odporne na zniszczenia, wodoodporne i przystosowane do wielokrotnego użytku.

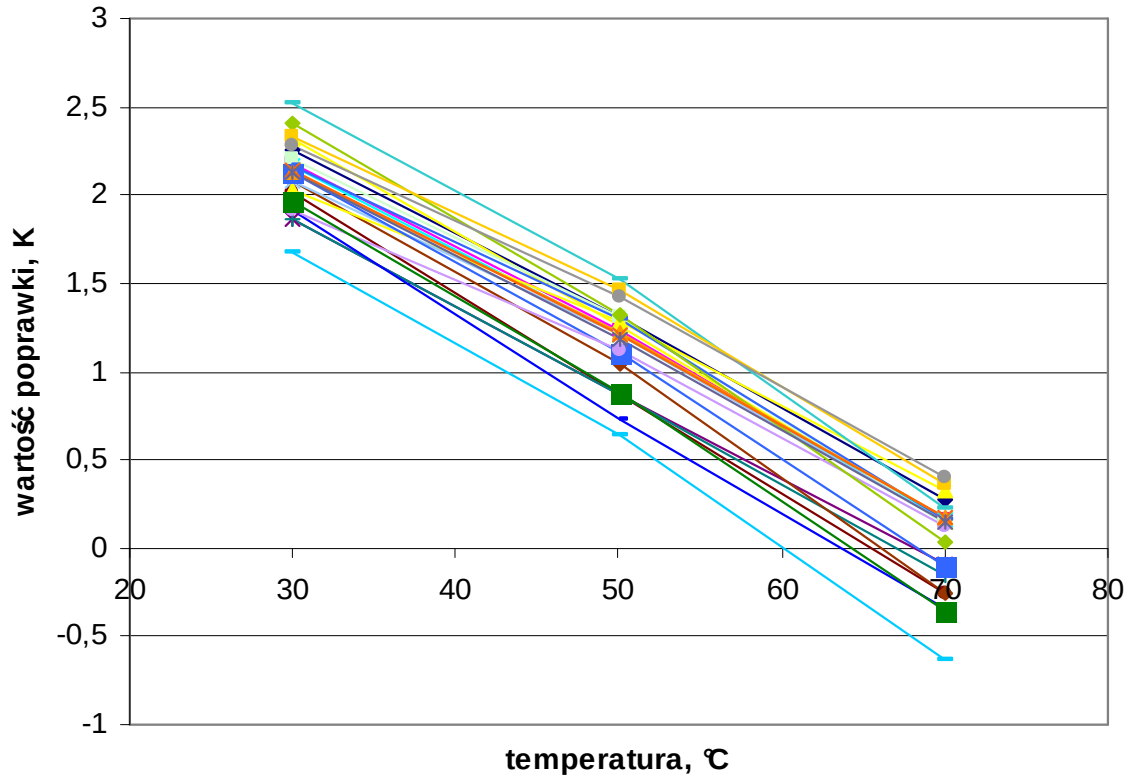
Przed przystąpieniem do pomiarów temperatury ścianki przewodów wykonano wzorcowanie nowych czujników temperatury i sprawdzono wskazania elektronicznego układu zbierania danych. Wzorcowanie wykonano w ultratermostacie w przestrzeni wodnej, przy użyciu dokładnych termometrów szklanych posiadających świadectwa uwierzytelnienia Okręgowego Urzędu Miar w Warszawie. Współczynniki korekcyjne dla poszczególnych kanałów zestawiono w tablicy 3, zaś przyjęte wartości poprawek temperatury na rys. 31. Do dalszej analizy przyjęto niepewność pomiaru na poziomie 0,5°C.

Tab. 3. Wzorcowanie czujników półprzewodnikowych i kalibracja układu rejestrującego.

numer kanału	różnice wskazań termometrów wzorcowych i wzorcowanych [K] dla temperatury 30, 50 i 70°C			współczynniki korekcyjne przyjęte do charakterystyki wzorcowania kanału układu rejestrującego		
	30°C	50°C	70°C	A	B	C
1	2,26	1,31	0,28	-0,355	14,450	1,770
2	2,18	1,23	0,17	-0,355	14,460	1,817
3	2,32	1,26	0,14	-0,355	14,460	1,761
4	2,17	1,21	0,16	-0,355	14,460	1,834
5	1,86	0,87	-0,09	-0,355	14,465	1,726
6	2,02	0,87	-0,25	-0,355	14,480	1,622
7	1,87	0,87	-0,16	-0,355	14,470	1,714
8	1,92	0,74	-0,34	-0,355	14,530	1,599
9	1,68	0,64	-0,64	-0,355	14,470	2,005
10	2,09	1,04	-0,26	-0,355	14,510	1,821
11	2,21	1,31	0,13	-0,355	14,470	1,793
12	2,03	1,28	0,32	-0,355	14,440	1,882

Tab. 3. (c.d.)

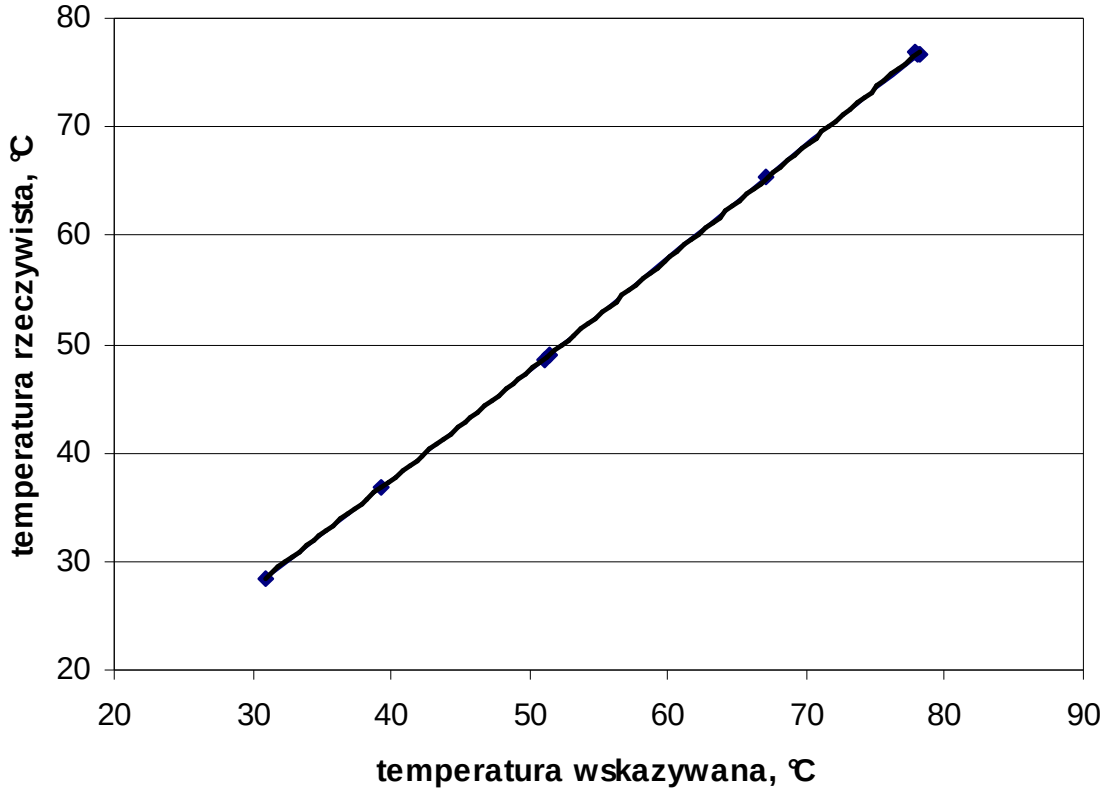
numer kanału	różnice wskazań termometrów wzorcowych i wzorcowanych [K] dla temperatury 30, 50 i 70°C			współczynniki korekcyjne przyjęte do charakterystyki wzorcowania kanału układu rejestrującego		
	30°C	50°C	70°C	A	B	C
13	2,08	1,21	0,14	-0,355	14,460	1,862
14	2,14	1,11	-0,11	-0,355	14,500	1,792
15	1,92	1,12	0,13	-0,355	14,465	1,950
16	1,97	0,88	-0,36	-0,355	14,520	1,614
17	2,17	1,30	0,16	-0,355	14,460	1,768
18	2,53	1,52	0,23	-0,355	14,440	1,580
19	2,41	1,32	0,04	-0,355	14,490	1,598
20	2,34	1,46	0,37	-0,355	14,460	1,605
21	2,13	1,22	0,17	-0,355	14,460	1,876
22	2,15	1,21	0,17	-0,355	14,460	1,841
23	2,13	1,18	0,14	-0,355	14,460	1,868
24	2,28	1,42	0,40	-0,355	14,460	1,650



Rys. 31. Wartości poprawek temperatury dla poszczególnych kanałów układu rejestrującego.

Ze względu na większe wymiary geometryczne czujników półprzewodnikowych, w czasie pomiarów temperatury ścianki rur dokonywano kontroli wskazań wybranych czujników za pomocą miniaturowego czujnika typu Pt100. Czujnik ten, współpracujący z innym układem rejestracji danych, sprawdzono wcześniej w przestrzeni powietrznej ultratermostatu.

Wyniki tego sprawdzenia zamieszczono na rys. 32. Do dalszej analizy przyjęto niepewność pomiaru na poziomie 0,5°C.



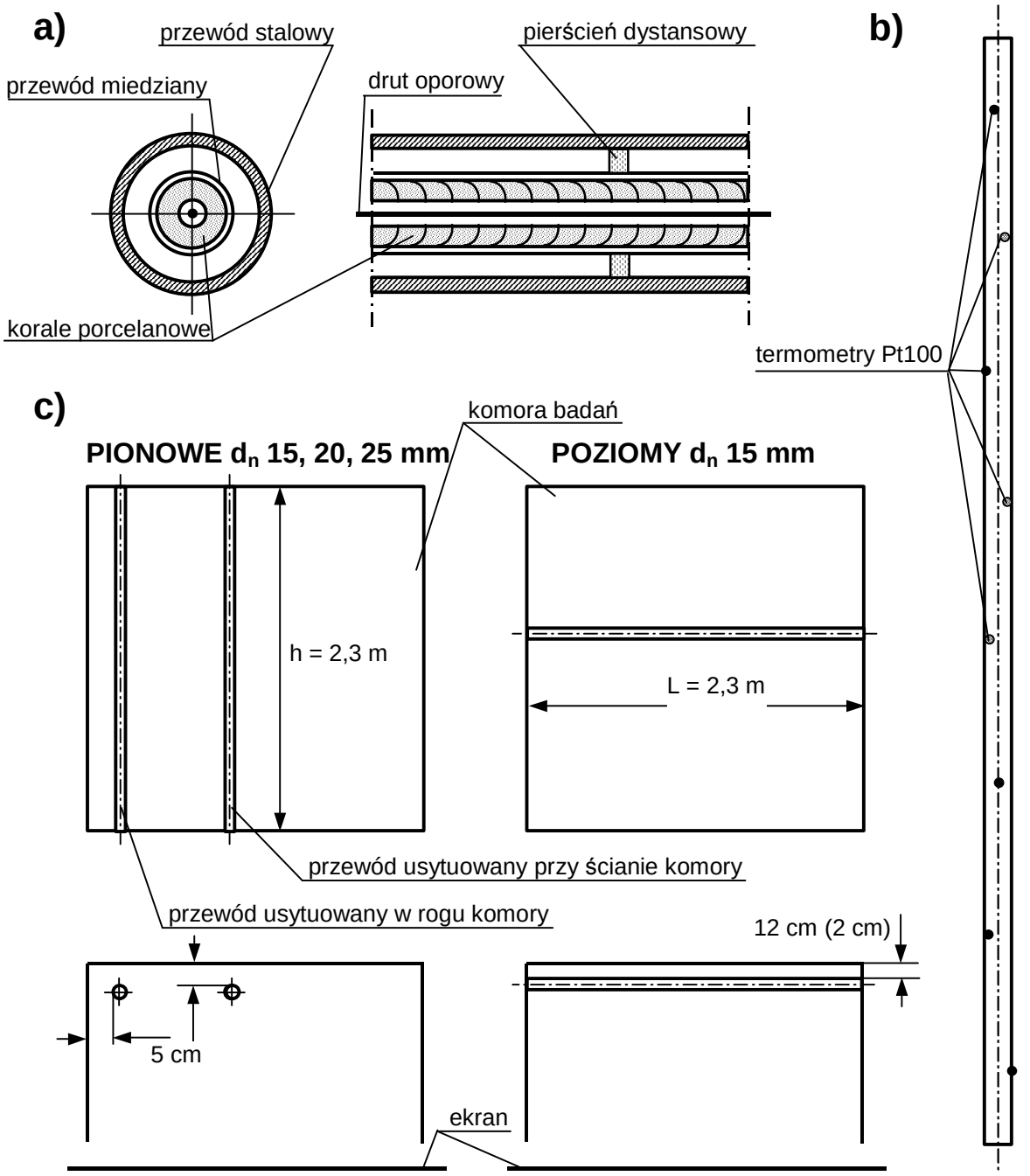
Rys. 32. Charakterystyka miniaturowego termometru kontrolnego typu Pt100.

Temperatura powietrza w komorze mierzona była dokładnym termometrem szklanym (świadectwo uwierzytelnienia Okręgowego Urzędu Miar w Warszawie) w dużej odległości od badanych przewodów (1,5 ÷ 2,0 m). Dokładność odczytu wynosiła 0,05°C.

4.2. Przeprowadzenie badań

4.2.1. Ogólny opis układu

Ostatecznie w komorze do badań cieplnych umieszczono 3 przewody stalowe o średnicach nominalnych: 15, 20, 25 mm i długościach 2,3 m każdy. W przewodach tych centrycznie umieszczono rurki miedziane o średnicy 6 lub 10 mm zawierające prosty drut oporowy w otoczce z koralików ceramicznych. Konstrukcję i usytuowanie badanych w komorze przewodów pokazano na rysunku 33. Zmiana wydajności cieplnej poszczególnych rur w zakresie 0 ÷ 200 W, realizowana była przy użyciu autotransformatora i rejestrowana watomierzem cyfrowym z dokładnością 0,5 W.



Rys. 33. Budowa badanych przewodów i ich rozmieszczenie w komorze do badań cieplnych: a) przekroje poprzeczny i podłużny przewodów, b) rozmieszczenie termometrów na ściance przewodu, c) usytuowanie przewodów w komorze.

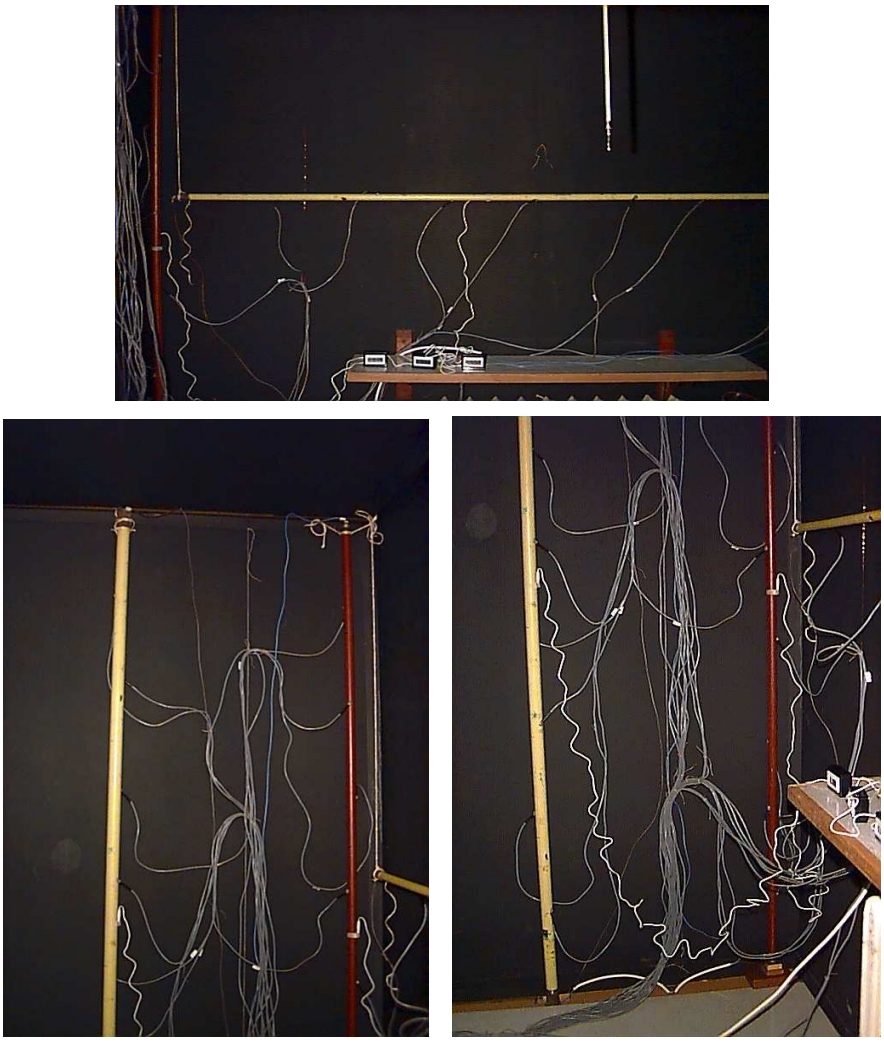
Założeniem stawianym modelowi badawczemu było stworzenie podobnych warunków wymiany ciepła, jak w rzeczywistych instalacjach ogrzewczych, tzn. w przestrzeni półograniczonej. Dlatego przewody umieszczono przy ścianie bądź w rogu komory a więc tak, jak sytuuje się piony i gałązki instalacji c.o., nie wykonywano natomiast badań przewodów w prze-

strzeni nieograniczonej. Także przyjęty do badań zakres wartości temperatury odpowiada typowym temperaturom eksploatacyjnym w pompowych instalacjach centralnego ogrzewania.

Ostatecznie do badań przeznaczono trzy przewody z grzejnikami elektrycznymi, a mianowicie:

- d_n 15 mm, umieszczony poziomo przy ścianie komory,
- d_n 20 mm, umieszczony pionowo w rogu komory,
- d_n 25 mm, umieszczony pionowo przy ścianie komory.

Na każdym przewodzie umieszczono 8 czujników półprzewodnikowych w równych odległościach od siebie (rys. 33 i 34). Wypróbowano różne sposoby przytwierdzenia czujników do powierzchni przewodu, m.in. cybanty stalowe, plastry, taśmy fizelinowe, różne kleje. Ostatecznie zastosowano klej typu cjanopan. Założono stałą wartość temperatury w dowolnym przekroju poprzecznym przewodu. Wyniki pomiarów rejestrowano wielokanałowym interfejsem pomiarowym (APEK) współpracującym z komputerem.



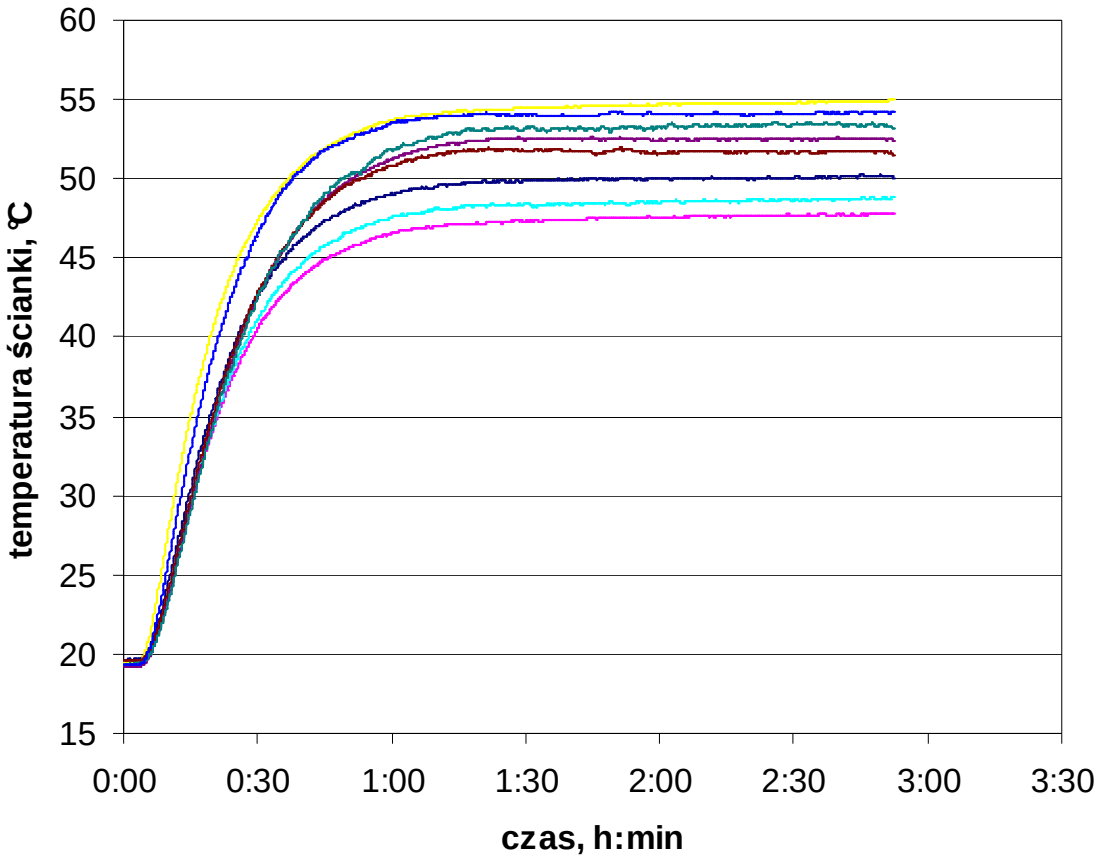
Rys. 34. Rozmieszczenie przewodów i czujników w komorze do badań cieplnych.

4.2.2. Kryteria stanu ustalonego układu grzejnik-otoczenie

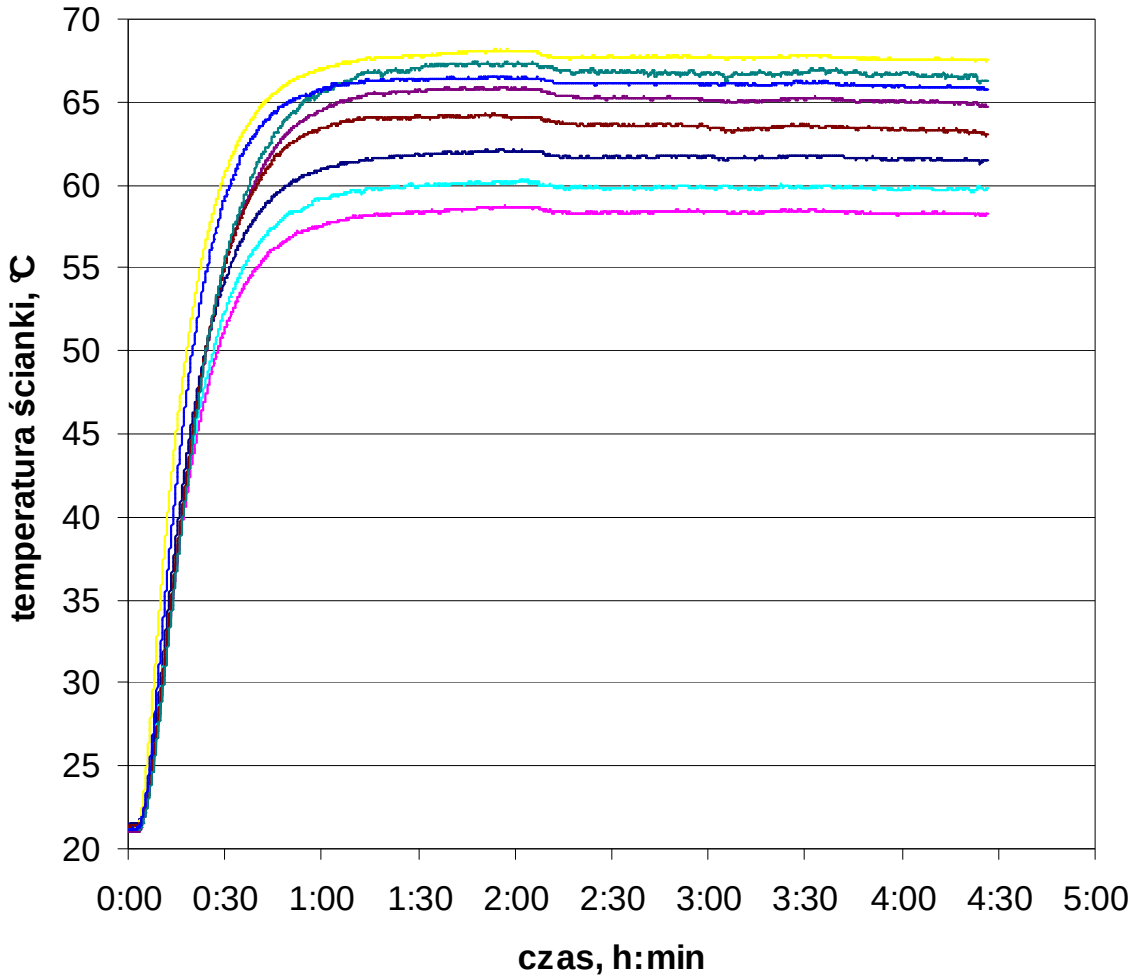
Przedmiotem prowadzonych badań był proces wymiany ciepła w układzie przewód z grzejnikiem elektrycznym — otoczenie w warunkach ustalonej wymiany ciepła. W tym przypadku stan ustalony osiągany jest w momencie uzyskania stałych wartości temperatury w następujących miejscach badanego układu:

- na ściankach przewodów,
- powietrza w komorze poza warstwą przyścienną.

Stwierdzono, że stały poziom wartości temperatury na powierzchni zewnętrznej ścianki przewodów, występuje już po 1 godzinie od momentu włączenia zasilania (rys. 35 i 36). Niestety nadal nie udało się uzyskać jednorodnego rozkładu temperatury na powierzchni ścianki, choć tym razem mogło być to spowodowane większą powierzchnią zewnętrzną i pojemnością cieplną samych czujników półprzewodnikowych. Różnice wskazań pogłębiają się ze wzrostem temperatury ścianki. Nie stwierdzono stratyfikacji temperatury w wyniku obecności powietrza w przewodach.



Rys. 35. Zmiana temperatury ścianki wzdłuż wysokości przewodu, d_n 20, Q = 103 W.

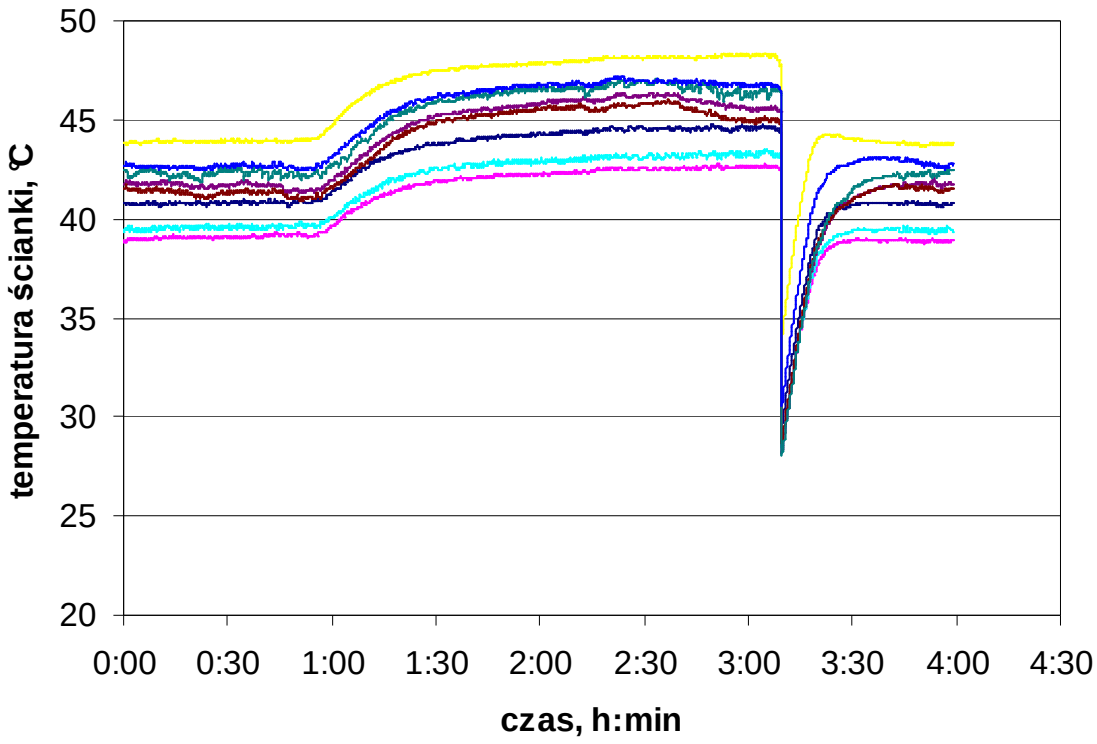


Rys. 36. Zmiana temperatury ścianki wzdłuż wysokości przewodu, d_n 20, Q = 148 W.

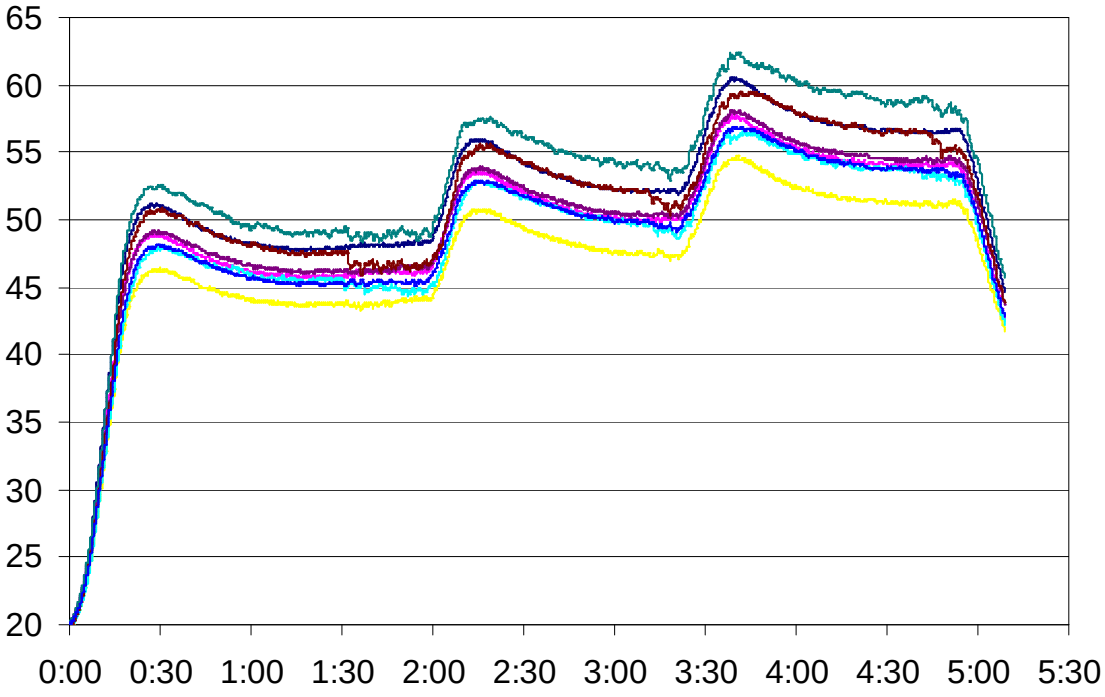
Temperatura powietrza w komorze w okresie prowadzonych badań wzrastała od 18 ÷ 20°C do poziomu 19 ÷ 23°C w zależności od mocy cieplnych badanych przewodów. Wzrost ten trwał 3 ÷ 4 godziny do osiągnięcia wartości stałej, stąd wniosek, że taki właśnie czas potrzebny jest do osiągnięcia warunków ustalonej wymiany ciepła.

Nie stwierdzono istotnego wpływu zmian wartości temperatury zewnętrznej na temperaturę powietrza w komorze.

Na rys. 37 pokazano skutki awarii sieci elektrycznej lub układu zbierania danych podczas prowadzonych badań, zaś na rysunku 38 — zbyt duże wstępne nagrzanie przewodów i pomiary przed osiągnięciem stałej wartości temperatury ścianki (stan nieustalony).



Rys. 37. Skutki awarii układu rejestracji danych lub sieci energetycznej.



Rys. 38. Stan nieustalony dla trzech poziomów mocy cieplnej przewodu.

4.2.3. Badania z zastosowaniem czujników półprzewodnikowych

W pierwszej serii badań przeprowadzono pomiary w 7 punktach. Temperaturą charakterystyczną była średnia arytmetyczna uśrednionej temperatury na powierzchni ścianki i powietrza w komorze (średnia temperatura warstwy przyściennej). Stwierdzono niższe wskazania czujników półprzewodnikowych od rzeczywistej wartości temperatury ścianki. Przy wykorzystaniu pomiarów porównawczych czujnikiem miniaturowym Pt100 wprowadzono korekty rzędu 3 do 5 K. Czas stabilizacji przy każdym punkcie pomiarowym wynosił 2 godziny. Wyniki zestawiono w tablicach 4, 5 i 6. Na rys. 39 pokazano rozrzut punktów charakterystycznych i linię trendu równania kryterialnego.

Tab. 4. Wyniki badań I serii przewodu poziomego d_n 15 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
48,1	21,6	58,7	26,5	34,9	**6,1**	**8,3**	**14,4**	32 437,9	6,5
52,2	22,0	71,4	30,2	37,1	**6,2**	**9,1**	**15,4**	35 505,6	7,1
56,8	20,7	86,1	36,1	38,7	**6,4**	**9,2**	**15,5**	41 170,5	7,1
62,3	21,1	101,8	41,2	41,7	**6,5**	**9,5**	**16,1**	44 574,0	7,3
68,7	21,5	120,4	47,2	45,1	**6,8**	**9,8**	**16,6**	48 171,5	7,4
72,6	20,3	133,1	52,3	46,4	**6,9**	**9,7**	**16,5**	52 095,1	7,3
79,2	20,8	153,7	58,4	50,0	**7,1**	**10,0**	**17,1**	54 781,6	7,5

Tab. 5. Wyniki badań I serii przewodu pionowego d_n 20 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
47,1	21,6	59,7	25,5	34,3	**6,1**	**5,8**	**11,9**	$4{,}12\cdot10^{10}$	498,5
51,9	22,0	72,4	29,9	36,9	**6,2**	**6,1**	**12,3**	$4{,}61\cdot10^{10}$	516,4
56,5	20,7	88,1	35,8	38,6	**6,3**	**6,2**	**12,5**	$5{,}36\cdot10^{10}$	521,4
62,3	21,1	101,8	41,2	41,7	**6,5**	**6,0**	**12,5**	$5{,}84\cdot10^{10}$	503,8
67,8	21,5	119,4	46,3	44,7	**6,7**	**6,4**	**13,1**	$6{,}23\cdot10^{10}$	528,5
70,6	20,3	130,2	50,3	45,5	**6,8**	**6,3**	**13,1**	$6{,}68\cdot10^{10}$	526,7
77,9	20,8	154,6	57,1	49,4	**7,1**	**6,7**	**13,7**	$7{,}09\cdot10^{10}$	548,7

Tab. 6. Wyniki badań I serii przewodu pionowego d_n 25 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
45,4	21,6	68,5	23,8	33,5	**6,0**	**5,3**	**11,3**	$4{,}27\cdot10^{10}$	470,7
50,5	22,0	88,1	28,5	36,3	**6,2**	**6,0**	**12,2**	$4{,}87\cdot10^{10}$	523,3
54,3	20,7	107,7	33,6	37,5	**6,3**	**6,3**	**12,6**	$5{,}61\cdot10^{10}$	553,7
60,1	21,1	124,3	39,0	40,6	**6,5**	**6,1**	**12,5**	$6{,}16\cdot10^{10}$	526,1
65,6	21,5	144,9	44,1	43,6	**6,7**	**6,3**	**12,9**	$6{,}61\cdot10^{10}$	538,0
67,9	20,3	166,4	47,6	44,1	**6,7**	**7,0**	**13,7**	$7{,}07\cdot10^{10}$	604,5
75,8	20,8	197,7	55,0	48,3	**7,0**	**7,2**	**14,1**	$7{,}60\cdot10^{10}$	606,6

Przyjęto następujące oznaczenia:

t_w – średnia temperatura ścianki przewodu, °C

t_i – temperatura powietrza w komorze poza warstwą przyścienną, °C

Q – moc cieplna doprowadzona do przewodu, W

Δt_{ar} – średnia arytmetyczna różnica temperatury ścianki i powietrza, K

t_m – średnia temperatura warstwy przyściennej (tzw. temperatura charakterystyczna), °C

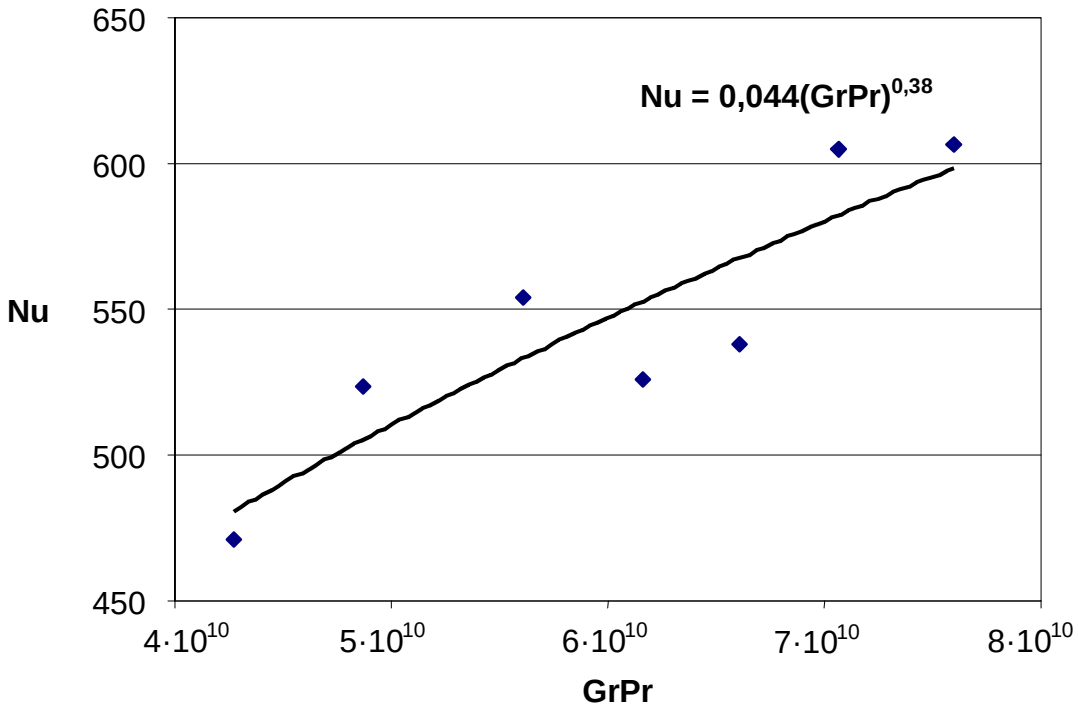
α_r – współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania, W/m^{2}K

α_k – współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji, W/m^{2}K

α_c – całkowity współczynnik przejmowania ciepła, W/m^{2}K

GrPr – iloczyn liczb Grashofa i Prandtla,

Nu – liczba Nusselta.



Rys. 39. Rozrzut punktów pomiarowych i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 25 mm.

W drugiej serii badań przeprowadzono pomiary w 3 punktach. Czas stabilizacji wynosił minimum 4 godziny. Do analizy przyjęto temperaturę ścianki skorygowaną o wielkości

określone w wyniku badań termograficznych (patrz rozdział 4.2.4.) uznając tę metodę za bardziej wiarygodną. Wyniki zamieszczono w tablicach 7, 8 i 9 oraz na rysunkach 40, 41 i 42.

Tab. 7. Wyniki badań II serii przewodu poziomego d_n 15 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
41,2	19,1	62,0	22,1	30,2	**5,83**	**12,40**	**18,23**	29483,3	9,8
50,3	20,9	89,0	29,4	35,6	**6,16**	**13,51**	**19,67**	35488,3	10,6
61,3	22,8	126,0	38,5	42,1	**6,56**	**14,71**	**21,26**	41419,9	11,3

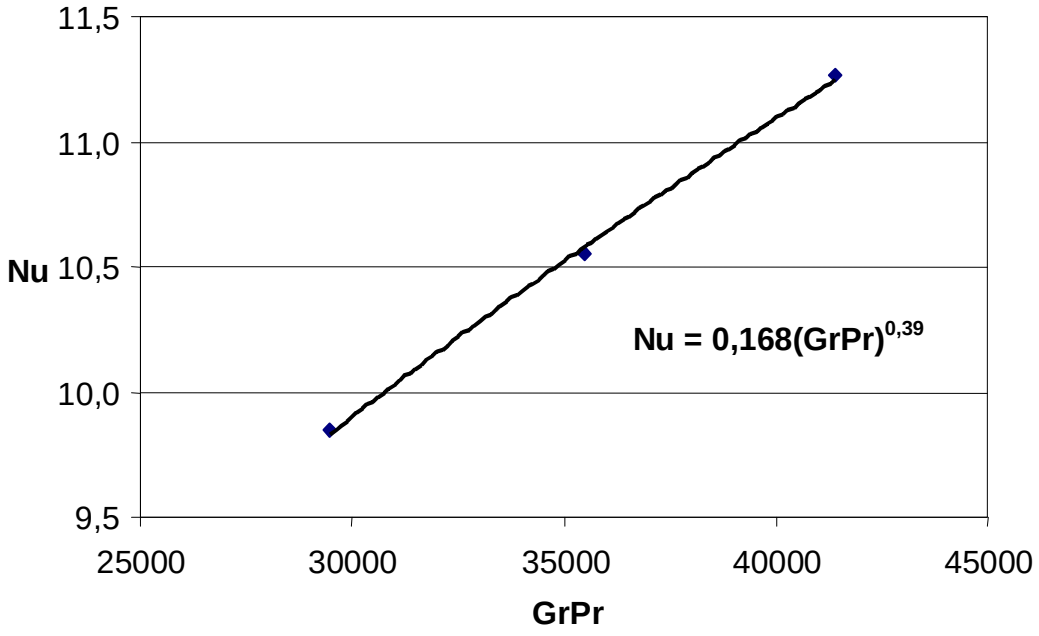
Tab. 8. Wyniki badań II serii przewodu pionowego d_n 20 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
40,1	19,1	64,0	21,0	29,6	**5,80**	**9,68**	**15,48**	$3{,}71\cdot10^{10}$	842,4
51,6	20,9	103,0	30,7	36,3	**6,20**	**10,84**	**17,04**	$4{,}79\cdot10^{10}$	924,4
63,6	22,8	148,0	40,8	43,2	**6,63**	**11,79**	**18,42**	$5{,}63\cdot10^{10}$	984,5

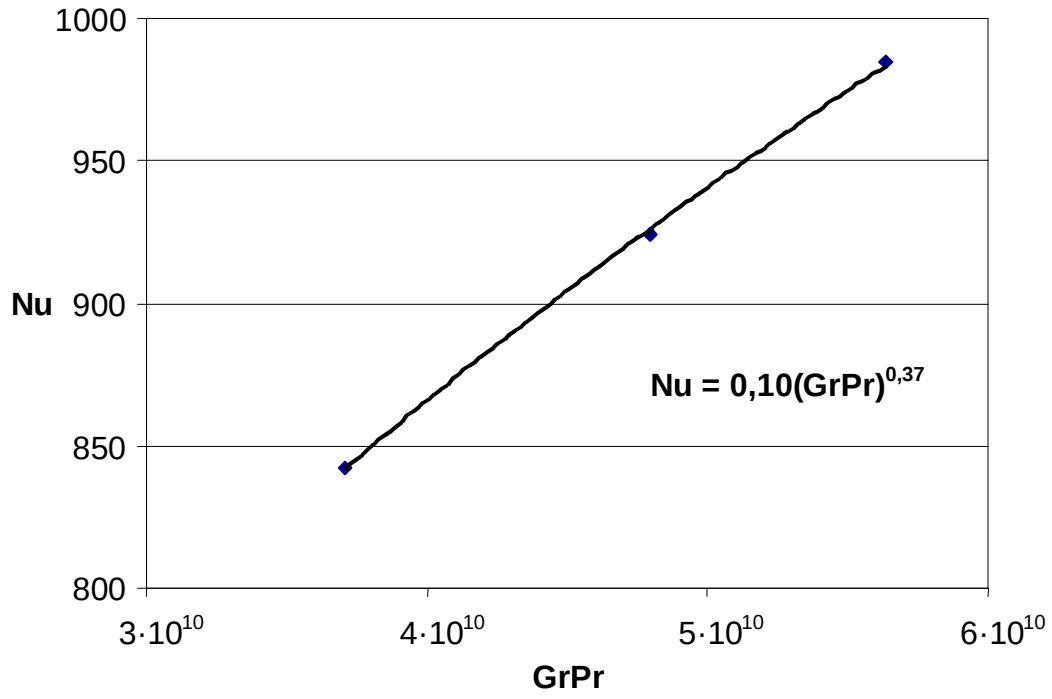
Tab. 9. Wyniki badań II serii przewodu pionowego d_n 25 mm.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	GrPr	Nu
38,3	19,1	74,0	19,2	28,7	**5,74**	**9,42**	**15,17**	$3{,}76\cdot10^{10}$	847,1
50,4	20,9	126,0	29,5	35,7	**6,16**	**10,65**	**16,81**	$5{,}09\cdot10^{10}$	937,0
60,1	22,8	171,0	37,3	41,5	**6,52**	**11,52**	**18,04**	$5{,}80\cdot10^{10}$	996,2

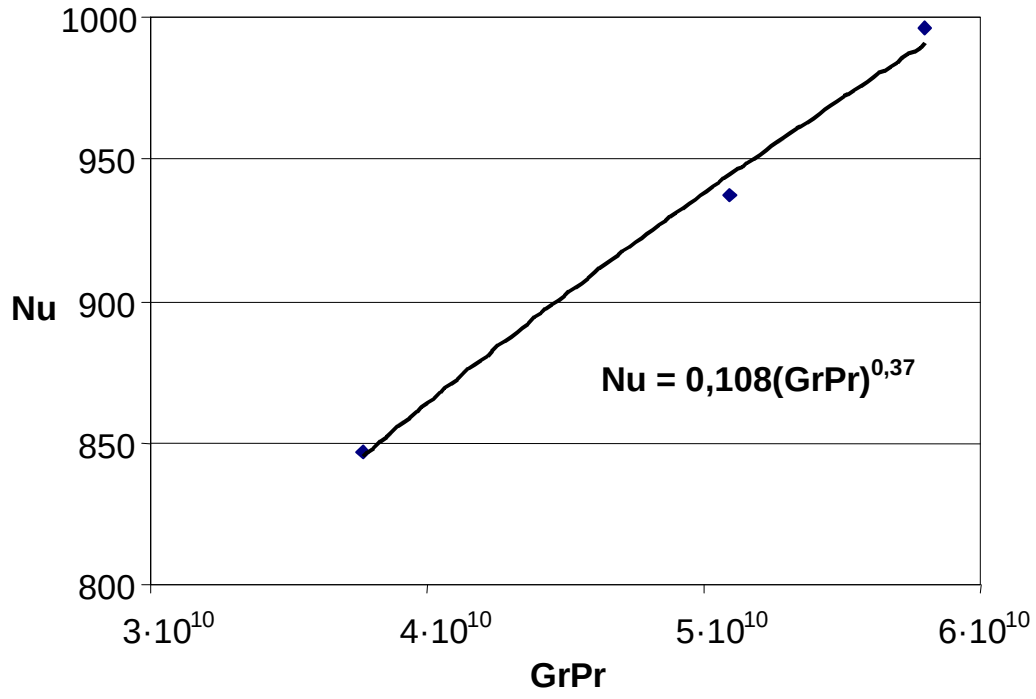
Oznaczenia jak w tablicy 4.



Rys. 40. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 15 mm.



Rys. 41. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 20 mm.



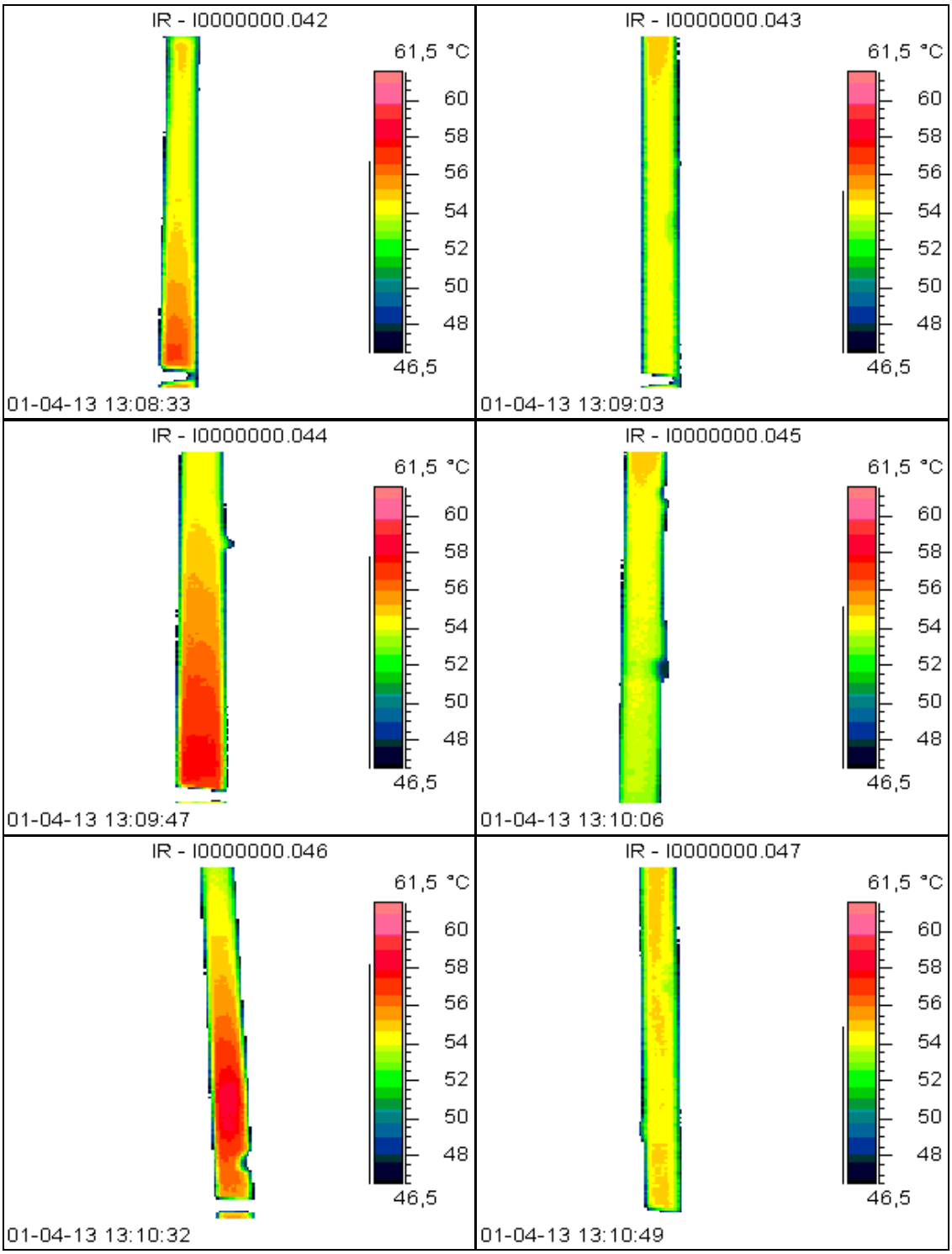
Rys. 42. Punkty pomiarowe i równanie kryterialne dla pionowego przewodu d_n 25 mm.

4.2.4. Badania termograficzne

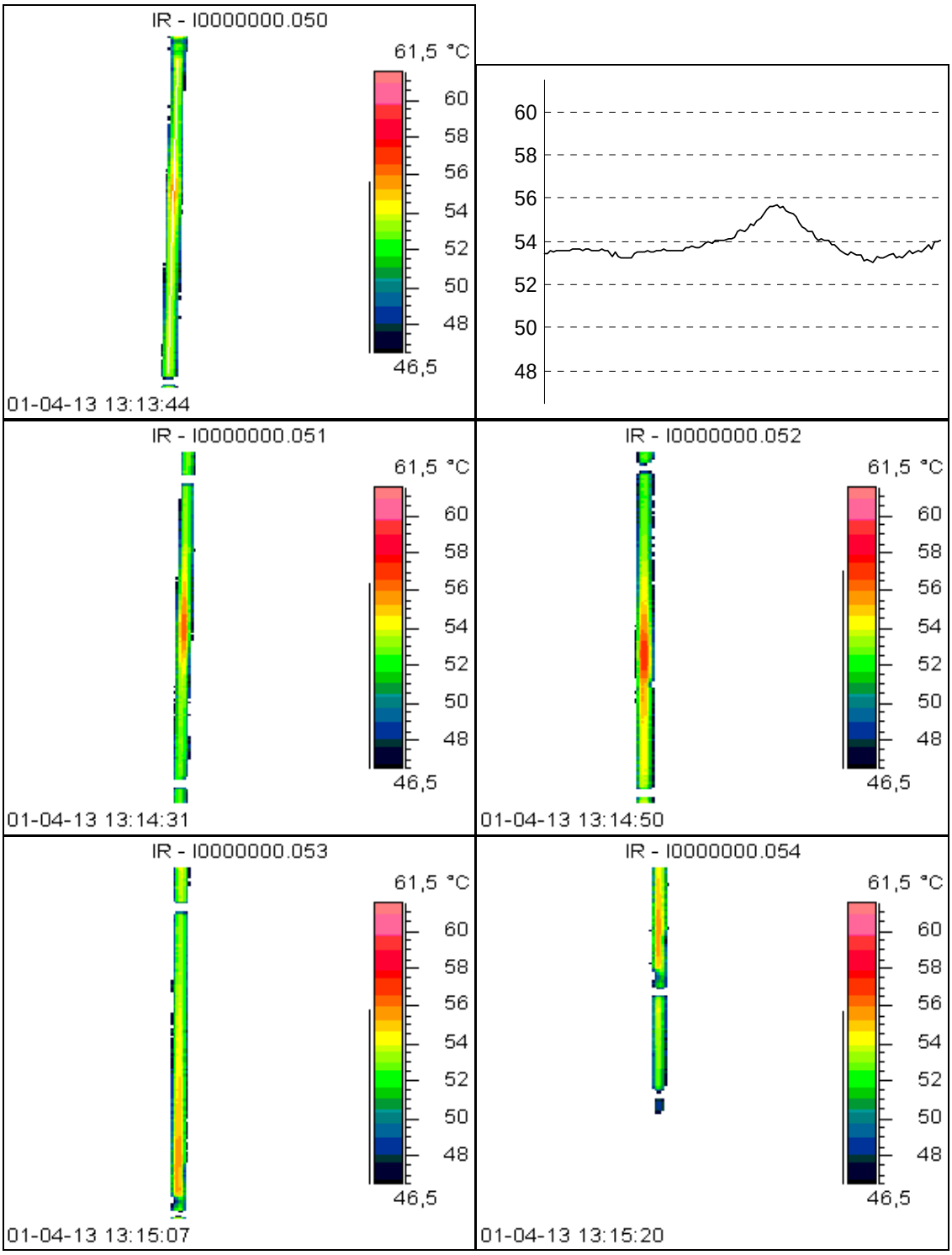
Celem dokładnego określenia rozkładu temperatury na powierzchni badanych przewodów oraz weryfikacji wskazań czujników półprzewodnikowych, dla stanu ustalonego wykonano pomiary wykorzystując technikę termowizji (rys. 43, 44, 45 i 46).

Badania te przeprowadzono przy współpracy z Instytutem Techniki Grzewczej i Sanitarnej w Radomiu. Do pomiarów wykorzystano kamerę termowizyjną AGEMA Thermovision 470 Pro produkcji szwedzkiej. Jak wykazał Rymarczyk [99], metoda ta przy użyciu ww. kamery, zapewnia dokładność pomiaru 0,2 K w przypadku, gdy obiektem wizowania był wzorzec promieniowania o znanej emisyjności powierzchni. Wykonano badania sprawdzające dokładność wskazań aparatury, które przeprowadzono w warunkach zbliżonych do warunków kalibracji kamery w zakresie temperatury wzorca od 30,0 do 95,0°C.

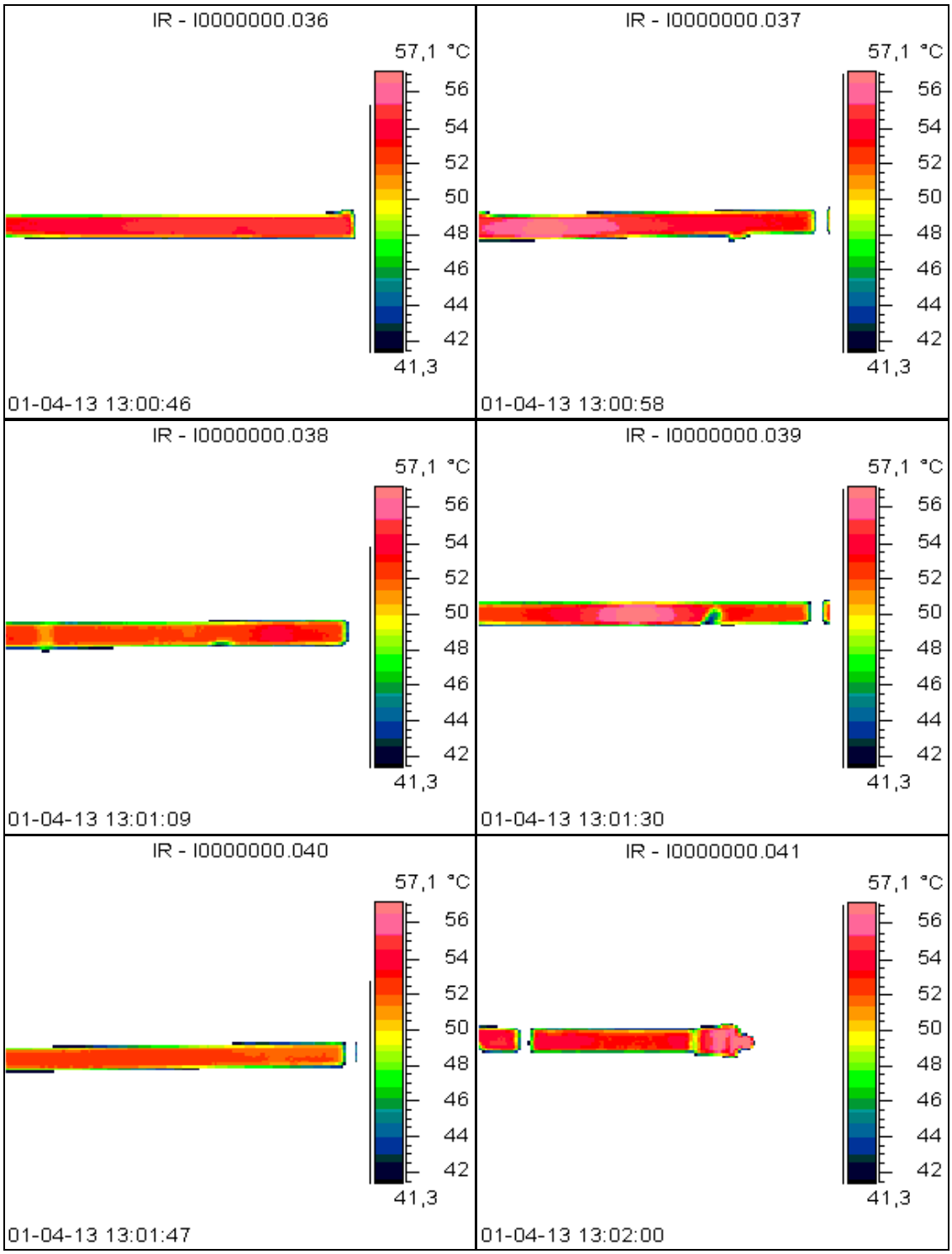
Pomiary te potwierdziły nierównomierny rozkład temperatury na powierzchni ścianki i występowanie obszarów o podwyższonej, jak i obniżonej temperaturze. Miejscowe „ogniska” spowodowane są mostkowaniem ciepła przez dystansy z tworzyw sztucznych, obszary zimniejsze to prawdopodobnie uszkodzona (niejednorodna) ściana przewodu lub miejsce zamontowania czujnika. Linie na przekrojach poprzecznych o temperaturze zbliżonej do temperatury tła, to „znaczniki” — miejsca styku dwóch termogramów przy zdjęciach z bliższej odległości, służące do późniejszej analizy.



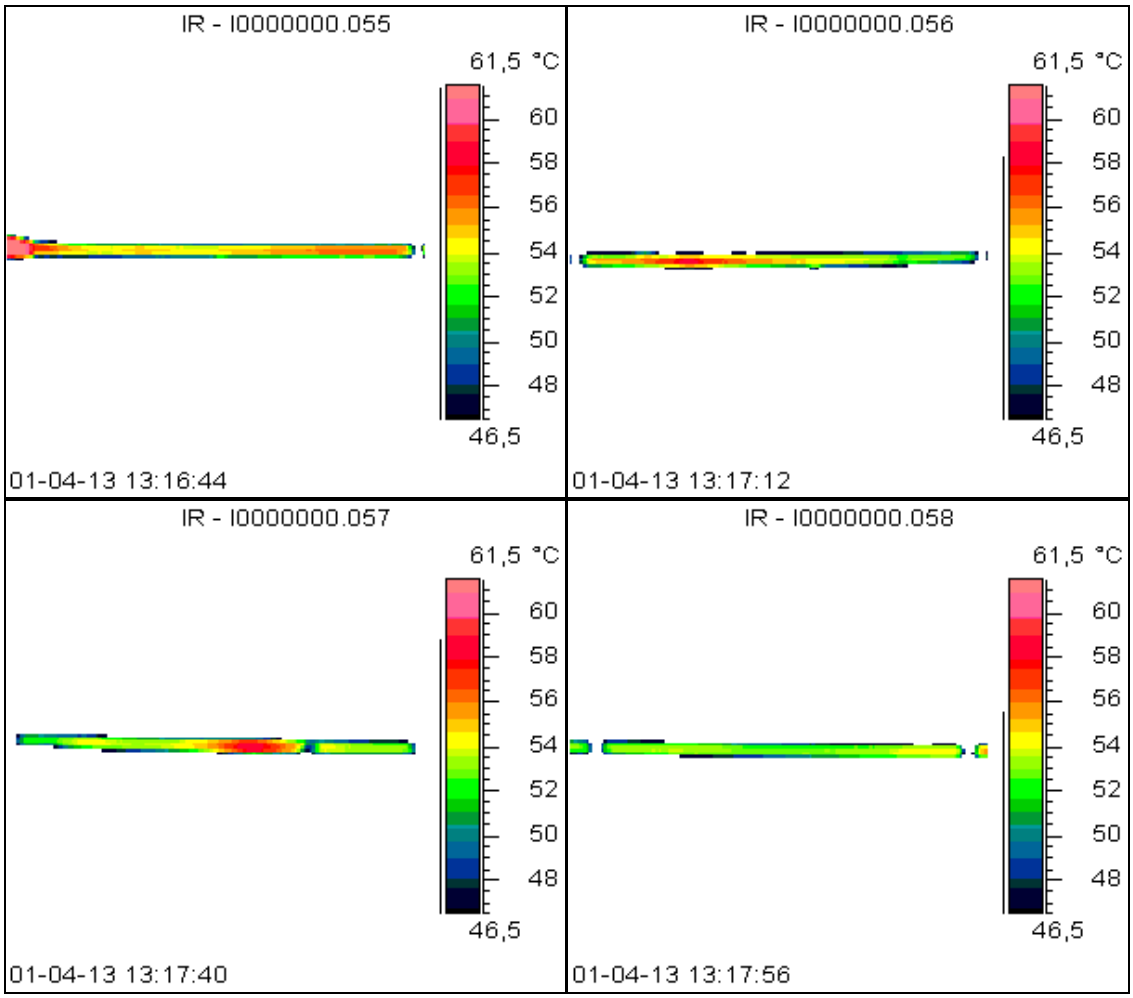
Rys. 43. Termogramy przewodu pionowego d_n 25 mm. Zbliżenia.



Rys. 44. Termogramy przewodu pionowego d_n 20 mm. Rozkład temperatury na powierzchni.



Rys. 45. Termogramy przewodu poziomego d_n 15 mm. Zbliżenia.



Rys. 46. Termogramy przewodu poziomego d_n 15 mm. Zdjęcia z dalszej odległości.

Nierównomierność rozkładu temperatury na powierzchni ścianki badanych przewodów okazała się zbyt duża, tak że na podstawie przeprowadzonych badań nie można jeszcze określić charakterystyki cieplnej przewodów pionowych i poziomych. Zastosowane czujniki półprzewodnikowe mają zbyt dużą powierzchnię zewnętrzną i nie wskazują rzeczywistej temperatury na powierzchni ścianki. Stosowanie różnego rodzaju poprawek jest w tym przypadku kłopotliwe i mało dokładne. Dlatego w kolejnych seriach badań użyte zostały czujniki miniaturowe typu Pt100.

4.2.5. Wyniki badań z zastosowaniem czujników miniaturowych typu Pt100

W następnej serii badań przeprowadzono pomiary w 4 punktach. Temperaturą charakterystyczną była średnia arytmetyczna uśrednionej temperatury na powierzchni ścianki i powietrza w komorze (średnia temperatura warstwy przyściennej t_m). Czas stabilizacji przy każdym punkcie pomiarowym wynosił 2 godziny. Otrzymane wyniki zestawiono w tablicach 10, 11, 12, 13, 14, 15 i 16.

Tab. 10. Wyniki badań przewodu poziomego d_n 15 mm umieszczonego 12 cm od ściany.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
39,0	26,9	24,5	12,1	32,9	**6,0**	**7,2**	**13,2**	$1{,}53\cdot10^4$	5,7
44,8	26,9	38,0	17,9	35,8	**6,2**	**7,7**	**13,8**	$2{,}15\cdot10^4$	6,0
51,9	27,0	56,5	24,9	39,4	**6,4**	**8,4**	**14,8**	$2{,}80\cdot10^4$	6,5
59,3	27,0	78,0	32,3	43,2	**6,6**	**9,1**	**15,7**	$3{,}41\cdot10^4$	6,9

Tab. 11. Wyniki badań przewodu poziomego d_n 15 mm umieszczonego 2 cm od ściany.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
39,3	26,9	25,5	12,4	33,1	**6,0**	**7,4**	**13,4**	$1{,}57\cdot10^4$	5,8
44,7	26,9	38,5	17,8	35,8	**6,2**	**7,9**	**14,1**	$2{,}14\cdot10^4$	6,2
51,1	27,0	55,5	24,1	39,1	**6,4**	**8,6**	**15,0**	$2{,}73\cdot10^4$	6,6
59,1	27,1	79,0	32,0	43,1	**6,6**	**9,4**	**16,1**	$3{,}38\cdot10^4$	7,2

Tab. 12. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 15 mm umieszczonego przy ścianie.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
40,9	26,8	25,5	14,1	33,8	**6,0**	**5,7**	**11,8**	$2{,}21\cdot10^{10}$	487,1
46,4	27,0	38,0	19,4	36,7	**6,2**	**6,5**	**12,7**	$2{,}89\cdot10^{10}$	546,3
54,7	27,0	57,5	27,6	40,8	**6,5**	**7,0**	**13,5**	$3{,}82\cdot10^{10}$	584,8
62,4	27,1	78,5	35,3	44,8	**6,7**	**7,7**	**14,5**	$4{,}56\cdot10^{10}$	635,1

Tab. 13. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 15 mm umieszczonego w rogu.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
43,3	26,8	26,0	16,5	35,1	**6,1**	**4,1**	**10,2**	$2{,}53\cdot10^{10}$	347,4
49,1	27,0	37,0	22,1	38,1	**6,3**	**4,6**	**10,9**	$3{,}21\cdot10^{10}$	382,8
58,3	27,1	56,0	31,2	42,7	**6,6**	**5,1**	**11,7**	$4{,}17\cdot10^{10}$	418,9
69,0	27,1	79,0	41,8	48,0	**6,9**	**5,3**	**12,3**	$5{,}11\cdot10^{10}$	432,9

Tab. 14. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 20 mm umieszczonego przy ścianie.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
40,8	26,2	28,5	14,6	33,5	**6,0**	**4,0**	**10,1**	$2{,}30\cdot10^{10}$	342,0
50,0	26,5	50,0	23,4	38,3	**6,3**	**4,7**	**11,0**	$3{,}40\cdot10^{10}$	389,9
58,1	26,7	71,5	31,4	42,4	**6,6**	**5,1**	**11,7**	$4{,}24\cdot10^{10}$	423,7
64,5	26,9	88,5	37,7	45,7	**6,8**	**5,3**	**12,1**	$4{,}79\cdot10^{10}$	433,9

Tab. 15. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 20 mm umieszczonego w rogu.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
42,4	26,3	29,5	16,0	34,3	**6,1**	**3,4**	**9,5**	$2{,}49\cdot10^{10}$	288,2
51,9	26,4	50,5	25,5	39,2	**6,4**	**3,8**	**10,2**	$3{,}63\cdot10^{10}$	320,1
61,1	26,8	72,5	34,4	43,9	**6,7**	**4,2**	**10,9**	$4{,}50\cdot10^{10}$	344,0
68,2	26,9	90,5	41,3	47,5	**6,9**	**4,4**	**11,3**	$5{,}09\cdot10^{10}$	354,4

Tab. 16. Wyniki badań przewodu pionowego d_n 25 mm umieszczonego przy ścianie.

t_w	t_i	Q	Δt_{ar}	t_m	α_r	α_k	α_c	Ra	Nu
35,3	25,2	25,5	10,1	30,3	**5,8**	**4,3**	**10,2**	$1{,}80\cdot10^{10}$	378,7
42,1	25,2	46,5	16,9	33,7	**6,0**	**5,0**	**11,1**	$2{,}83\cdot10^{10}$	437,6
47,9	25,5	65,5	22,5	36,7	**6,2**	**5,5**	**11,7**	$3{,}57\cdot10^{10}$	472,7
54,2	25,5	88,0	28,8	39,8	**6,4**	**5,9**	**12,3**	$4{,}33\cdot10^{10}$	499,5
59,7	25,5	110,0	34,3	42,6	**6,6**	**6,3**	**12,9**	$4{,}90\cdot10^{10}$	532,9

Zastosowane miniaturowych cienkowarstwowych rezystorów termometrycznych Pt100 typu CP 111 klasy B (KFAP S.A.) pozwoliło zminimalizować zakłócenie przyściennej warstwy powietrza wokół badanych przewodów (wymiary czyjników 10×2×1,5 mm). Rezystory te posiadają ponadto bardzo dobre własności dynamiczne, czyli małą bezwładność pomiaru (czas T [0,9] wynosi w przypadku powietrza 20 s). Zakres pomiarowy zastosowanych rezystorów: –50 ÷ +400°C.

4.3. Opracowanie wyników badań

4.3.1. Określenie niepewności wykonanych pomiarów

Średni błąd względny pomiarów współczynnika przejmowania ciepła metodą prezentowaną w niniejszej rozprawie, określono korzystając z rozwinięcia Taylora [27], [28]. Przyjęto następujące wartości maksymalnego błędu bezwzględnego wartości mierzonych (tab. 17).

Tab. 17. Maksymalny błąd bezwzględny wartości mierzonych.

Max. błąd bezwzględny	Wartość	Jedn.
Δ_t (temperatura)	0,5	K
$\Delta_{\Delta t}$ (różnica temperatury)	1,0	K
Δ_Q (moc cieplna)	0,5	W

Zakresy oraz średnie wartości wielkości mierzonych, bądź określanych pośrednio, występujących we wzorze na współczynnik przejmowania ciepła przy opisanych badaniach, były następujące (tab. 18).

Tab. 18. Średnie wartości wielkości fizycznych i stałych uzyskane podczas badań.

Opis	Zakres pomiarowy	Średnia	Jedn.
$t_w - t_i$ (różnica temperatury)	12 ÷ 42	27,0	ºC
Q (moc cieplna)	25 ÷ 110	67,5	W
t_m (temperatura charakterystyczna)	30 ÷ 48	39,0	ºC
Pr (liczba Prandtla)	0,694 ÷ 0,701	0,698	-
λ (wsp. przewodności cieplnej)	0,026 ÷ 0,030	0,028	W/mK
ν (wsp. lepkości kinematycznej)	0,000016÷0,000020	0,000018	m^2/s
L (wysokość przewodów pionowych)	2,3	2,3	m
D (średnica zewnętrzna przewodów)	0,213 ÷ 0,337	0,0275	m
C (stała)	0,12 ÷ 0,40	0,26	-
n (stała)	0,28 ÷ 0,35	0,315	-

Maksymalny błąd bezwzględny przy określaniu właściwości fizycznych powietrza wynikający z przyjętych niepewności pomiaru temperatury podano w tab. 19.

Tab. 19. Maksymalny błąd bezwzględny przy określaniu właściwości fizycznych powietrza.

Max błąd bezwzględny	Wartość	Jedn.
Δ_{Pr}	1,0E-04	-
Δ_λ	4,5E-05	W/mK
Δ_ν	4,8E-08	m^2/s

Całkowity współczynnik przejmowania ciepła określono z zależności:

$$\alpha_c = \frac{1}{\pi D L}\frac{Q}{(t_w - t_i)} \tag{219}$$

Stąd średni błąd względny pomiaru współczynnika α_c wynosi:

$$\Delta_{\alpha_c} = \left[\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{\Delta t}}{t_w - t_i}\right)^2\right]^{1/2} \tag{220}$$

Natomiast współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji określono korzystając z równania definicyjnego na liczby Nusselta i Grashofa oraz z zależności uogólnionej $Nu = C\,(Ra)^n$ otrzymując po przekształceniach:

$$\alpha_k = \frac{C\left(g L^3\right)^n}{L}\left(\frac{1}{T_m}\right)^n \left(t_w - t_i\right)^n Pr^n \lambda \left(\frac{1}{\nu^2}\right)^n \tag{221}$$

Stąd średni błąd względny pomiaru współczynnika α_k wynosi:

$$\Delta_{\alpha_k} = \left[\left(\frac{\Delta_t}{T_m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{\Delta t}}{t_s - t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{Pr}}{Pr}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_\nu}{\nu}\right)^2\right]^{1/2} \tag{222}$$

W tablicy 20 zestawiono obliczone wartości średniego względnego błędu kwadratowego wartości średnich.

Tab. 20. Średni względny błąd kwadratowy wykonanych pomiarów.

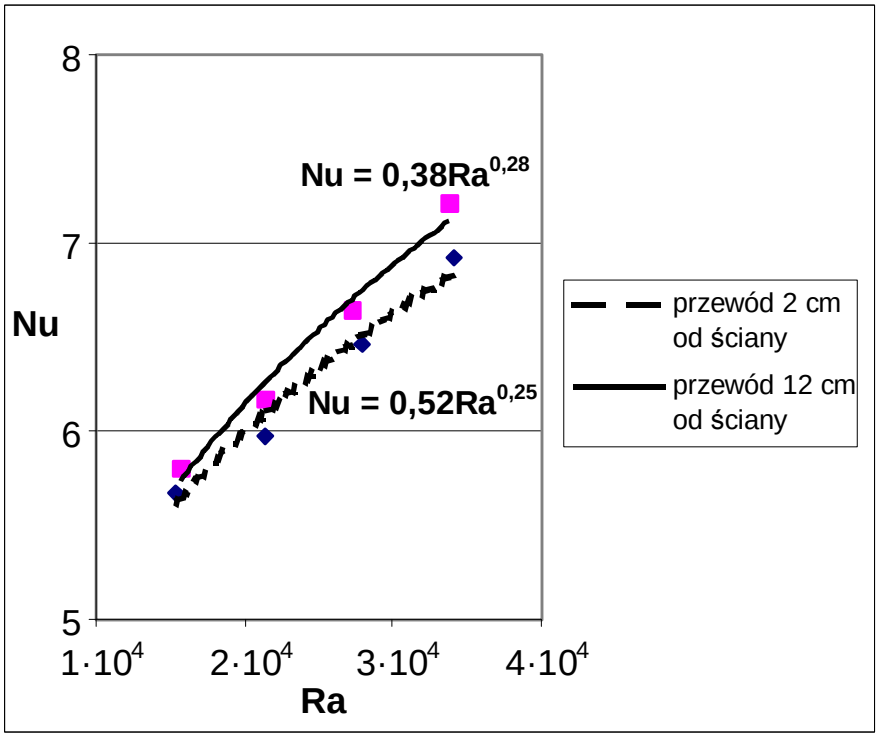
Średni błąd względny pomiaru Δ_α	Wartość
Całkowity współczynnik przejmowania ciepła α_c	3,8%
Współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji α_k	3,9%

Otrzymane wyniki należy zatem podać z następującymi niepewnościami:

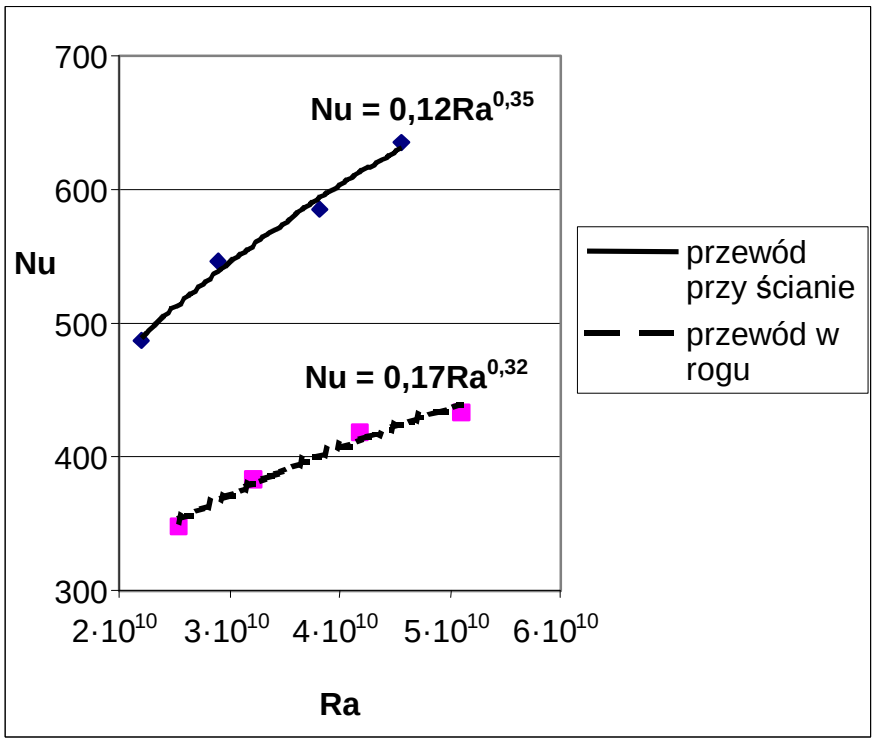
$$\alpha = \alpha_o \pm \Delta_\alpha \alpha_o \tag{223}$$

4.3.2. Określenie równań kryterialnych

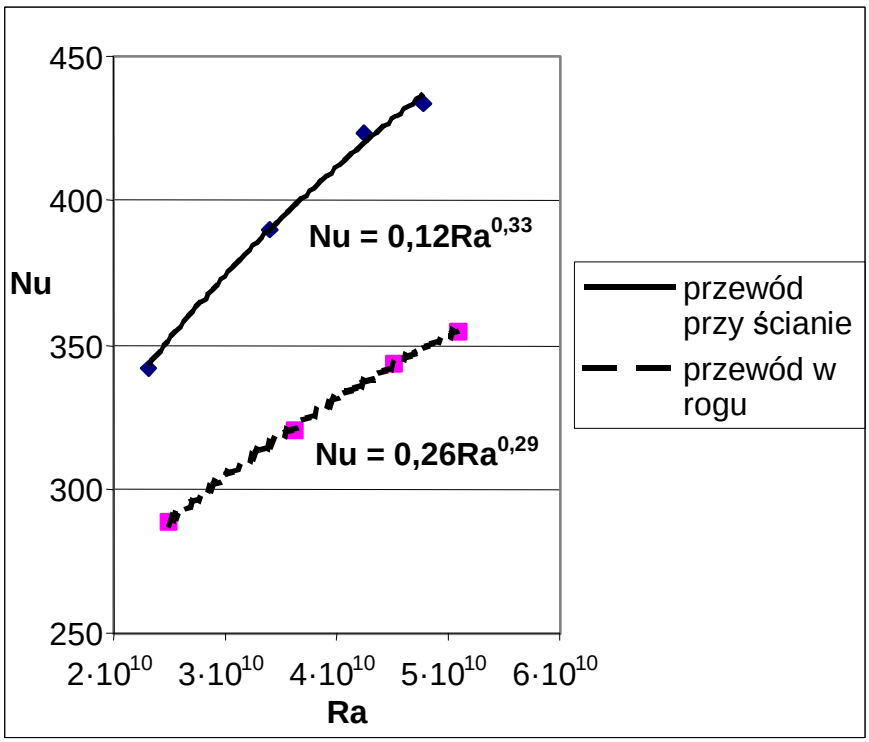
Na podstawie uzyskanych wyników badań otrzymano następujące kryterialne równania wymiany ciepła opisujące proces przejmowania ciepła między ścianką przewodu a powietrzem (rys. 47, 48, 49 i 50):



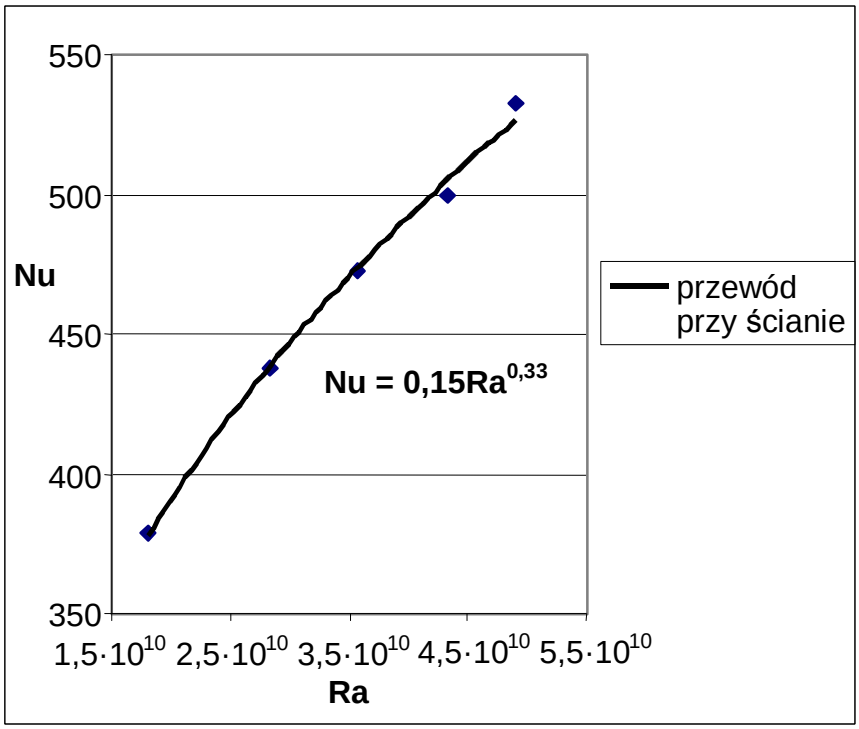
Rys. 47. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu poziomego d_n 15 mm.



Rys. 48. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 15 mm.



Rys. 49. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 20 mm.



Rys. 50. Korelacje liczb charakterystycznych otrzymane dla przewodu pionowego d_n 25 mm.

Otrzymane korelacje charakterystycznych liczb podobieństwa wskazują na wyraźny spadek ilości ciepła przekazywanego na drodze konwekcji (liczba Nusselta) dla przewodów pionowych umieszczonych w rogu pomieszczenia. Natomiast umieszczenie przewodu poziomego d_n 20 mm w odległościach 2 i 12 cm od ściany nie ma znaczącego wpływu na intensywność procesu wymiany ciepła pomiędzy zewnętrzną powierzchnią ścianki przewodu i powietrzem.

4.3.3. Analityczne określenie charakterystyk cieplnych pionów w instalacjach centralnego ogrzewania

Dla celów porównawczych metodą uproszczoną określono charakterystyki cieplne przewodów pionowych dla typowych warunków pracy instalacji centralnego ogrzewania. Punktem wyjścia była zależność uogólniona, wyprowadzona na podstawie analizy równań ruchu i energii, opisująca konwekcję swobodną w stanie ustalonym, przy założeniu znikomego wpływu sił bezwładności w stosunku do sił wyporu zależność ta ma następującą postać:

$$Nu = f(Gr\ Pr) = C\ (Ra)^{n} \tag{224}$$

O charakterze ruchu powietrza oraz o wyborze postaci szczególnych tego równania, decyduje wartość liczby Rayleigha Ra. Na zewnątrz przewodów poziomych w instalacjach c.o. występuje laminarna warstwa przyścienna ($Ra = 5\cdot10^2 \div 2\cdot10^7$) i można korzystać z równania [62]:

$$Nu = 0{,}54\ (Ra)^{0{,}25} \tag{225}$$

Natomiast w przypadku rur pionowych częściej występuje przejściowa i turbulentna zewnętrzna warstwa przyścienna [62], ($Ra > 2\cdot10^7$):

$$Nu = 0{,}135\ (Ra)^{0{,}33} \tag{226}$$

Dla tych zależności przyjmuje się przedział zmienności temperatury na powierzchni zewnętrznej przewodu t_w i otoczenia t_f, i określa całkowity współczynnik przejmowania ciepła α_c w funkcji temperatury charakterystycznej $t_m = 0{,}5\ (t_w + t_f)$.

Przyjmując dla rur pionowych następujące średnie wartości parametrów powietrza w warstwie przyściennej o temperaturze $25 < t_m < 45°C$:

$\beta = 3{,}25\cdot10^{-3}\ K^{-1}$, $Pr = 0{,}7$, $\lambda = 2{,}71\cdot10^{-2}\ W/mK$, $\nu = 1{,}65\cdot10^{-5}\ m^2/s$

otrzymuje się: $\alpha_k = 1{,}50\ \Delta t^{0{,}33}\ W/m^2K$, gdzie $\Delta t = t_w - t_f$.

Korzystając z zależności $\alpha_r = q_r/\Delta t$ i przyjmując $30 < t_w < 70°C$, $t_f = 20°C$, $\varepsilon = 0{,}92$, otrzymuje się: $\alpha_r \approx 2{,}01\ \Delta t^{0{,}33}$ a zatem:

$$\alpha_c = \alpha_k + \alpha_r = 3{,}51\cdot\Delta t^{0{,}33}\ \ W/m^2K. \tag{227}$$

Z uwagi na końcową postać poszukiwanej charakterystyki cieplnej $Q = C\,\Delta t_{ar}^{\,n}\,L\,d_z$ współczynnik α_c należy również odnieść do średniej arytmetycznej różnicy temperatury ($\Delta t_{ar} = t_{śr} - t_f$, gdzie $t_{śr}$ – średnia temperatura wody w przewodzie). Zakładając prędkość wody w = 0,05 ÷ 0,5 m/s otrzymuje się współczynnik przejmowania ciepła po stronie wewnętrznej α_w = 550 ÷ 3500 W/m^{2}K, zaś średni jednostkowy opór cieplny przejmowania po stronie wewnętrznej i jednostkowy opór cieplny przewodzenia (rura stalowa) $R = 1{,}3\cdot 10^{-2}$ m^{2}K/W. Ponieważ $R << R_c = 1/(\pi\, d_z\, \alpha_c)$, otrzymana analitycznie charakterystyka $Q \sim k_L = 1/(R + R_c)$ jest obarczona średnim błędem równym 1,6%.

Rozwiązując graficznie równanie $k_L = f(d_z\, \alpha_c)$, dla $\alpha_c \approx 11$ W/m^{2}K otrzymuje się:

$$k_L = 10{,}72\,\Delta t^{0{,}33}\,d_z,\ \text{W/mK}, \tag{228}$$

oraz równanie charakterystyki cieplnej dla stalowych przewodów pionowych [37]:

$$Q = 10{,}72\,\Delta t_{ar}^{\,1{,}33}\,d_z\,L,\ \ \text{W} \tag{229}$$

Charakterystyka podana w „Pomocach do projektowania instalacji centralnego ogrzewania" [51] ma postać:

$$Q = 9{,}2\,\Delta t_{ar}^{\,1{,}33}\,d_z\,L,\ \ \text{W} \tag{230}$$

Do obliczeń komputerowych przy zastosowaniu programu „Audytor c.o." [114] przyjmuje się:

$$Q = 13{,}98\,\Delta t_{ar}^{\,1{,}27}\,d_z\,L,\ \ \text{W} \tag{231}$$

Z porównania wzorów (229) i (230) wynika, że wydajność cieplna przewodów pionowych, przyjmowana dotychczas przy projektowaniu instalacji c.o., jest zaniżona w stosunku do wydajności określonej analitycznie przez autora metodą uproszczoną. Otrzymana charakterystyka jest bardzo zbliżona do charakterystyki dla przewodów pionowych umieszczonych w rogu pomieszczenia otrzymanej doświadczalnie (patrz rys. 52).

4.3.4. Określenie i porównanie uogólnionych charakterystyk cieplnych badanych przewodów

Na podstawie wyników badań zestawionych w tablicach 10÷16 wyprowadzono równania charakterystyk cieplnych przewodów. Punkty pomiarowe naniesiono na wykresy i połączono potęgową linią trendu. Otrzymane równania uogólniono i pokazano na rys. 51 i 52. Wykresy prezentują porównanie charakterystyk cieplnych otrzymanych na podstawie przeprowadzonych badań, z charakterystykami zalecanymi przy projektowaniu instalacji centralnego ogrzewania [51] i dla przewodów pionowych również z charakterystyką określoną metodą uproszczoną (patrz rozdział 4.3.3).

Dla przewodu poziomego d_n 15 mm otrzymane równanie charakterystyki cieplnej ma postać:

$$Q = 0{,}56\ \Delta t_{ar}^{1{,}18}\ L, \quad W \tag{232}$$

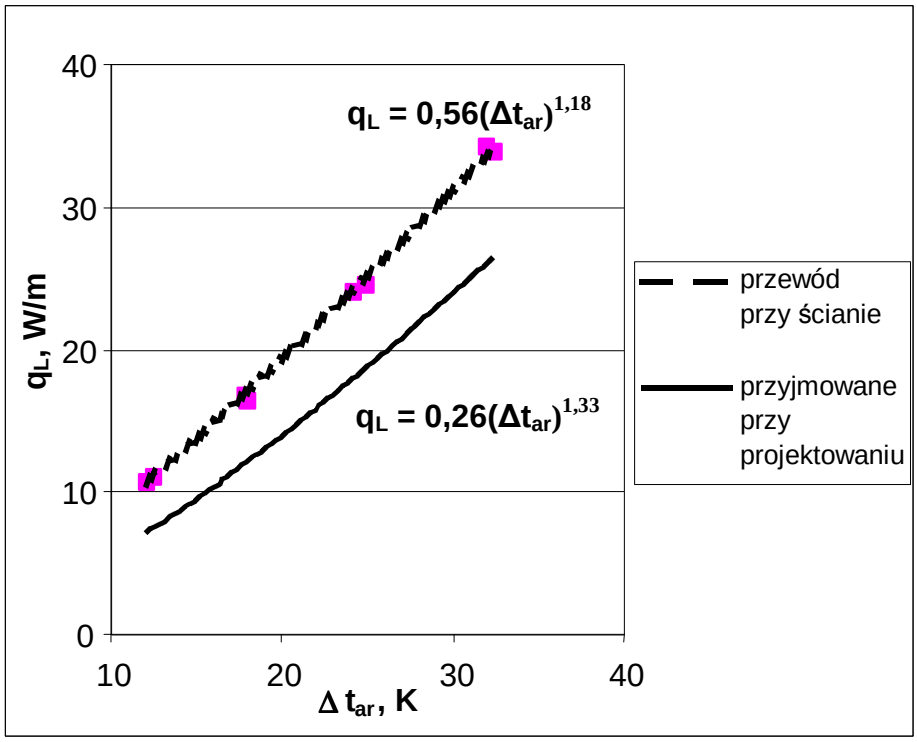
Natomiast dla przewodów pionowych umieszczonych przy ścianie:

$$Q = 21{,}08\ \Delta t_{ar}^{1{,}18}\ d_z\ L, \quad W \tag{233}$$

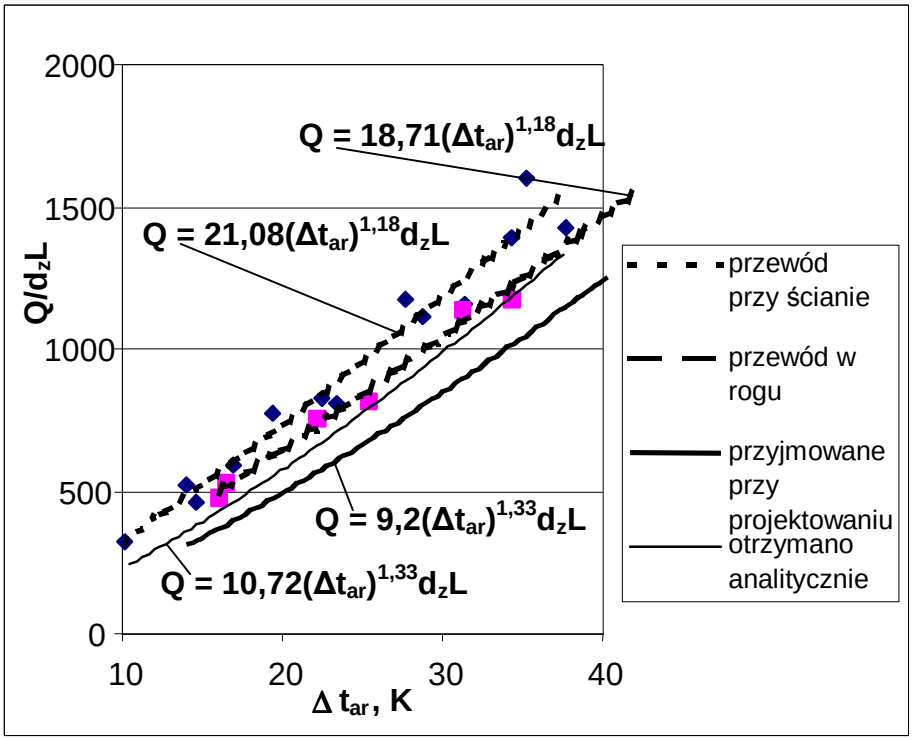
zaś dla przewodów pionowych umieszczonych w rogu pomieszczenia:

$$Q = 18{,}71\ \Delta t_{ar}^{1{,}18}\ d_z\ L, \quad W \tag{234}$$

Ponieważ do opracowania wyników pomiarów przyjmowano $\Delta t = t_w - t_f$ zamiast Δt_{ar}, moc cieplną przewodów określoną na podstawie charakterystyk otrzymanych doświadczalnie, należałoby zmniejszyć: $Q_{rzecz} = 0{,}984\ Q$ (patrz rozdział 4.1.2).



Rys. 51. Charakterystyki cieplne przewodu poziomego d_n 15 mm.



Rys. 52. Uogólnione charakterystyki cieplne przewodów pionowych.

Z porównania otrzymanych wartości wydajności cieplnych przewodów (233), (234) i ich wydajności przyjmowanych przy projektowaniu dla danych wartości Δt_{ar} wynika, że wydajność cieplna przewodów stalowych przyjmowana przy projektowaniu instalacji c.o. [51] jest zaniżona średnio o 20% w stosunku do wydajności zmierzonych [37]. Ilustrują to tabele 21 i 22.

Tab. 21. Porównanie wydajności cieplnych stalowych nieizolowanych przewodów pionowych.

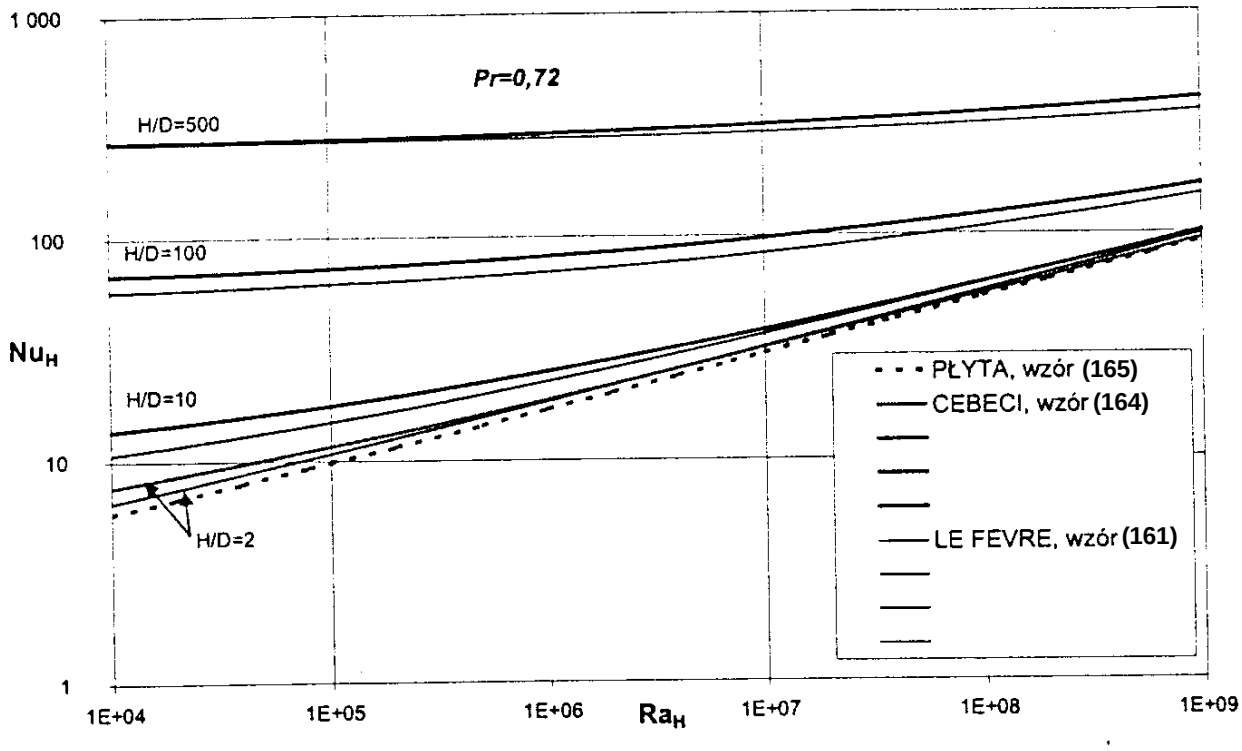
Δt_{ar}, K	wydajność cieplna uzyskana podczas badań, Q/d_zL	wydajność cieplna przyjmowana przy projektowaniu, Q/d_zL	różnica
20	693,6	494,5	29%
30	1 101,2	847,9	23%
40	1 528,6	1 243,2	19%
50	1 971,3	1 672,7	15%
60	2 426,8	2 131,7	12%

Tab. 22. Porównanie wydajności cieplnych stalowych nieizolowanych przewodów poziomych.

Δt_{ar}, K	wydajność cieplna uzyskana podczas badań, Q	wydajność cieplna przyjmowana przy projektowaniu, Q	różnica
20	43,9	32,2	27%
30	70,8	55,3	22%
40	99,5	81,1	18%
50	129,4	109,1	16%
60	160,5	139,0	13%

4.4. Porównanie rozwiązań analitycznych otrzymanych przez innych autorów

Porównanie wzorów (161) i (164) (patrz 2.3.3) dla różnych wartości parametru H/D pokazano na rys. 53. Wzór (161) daje nieco niższe wartości liczby Nusselta niż (164) oparty na wynikach obliczeń Cebeci [10]. Niewielkie różnice pomiędzy tymi wzorami mogą wynikać stąd, że Le Févre i Ede [54] wzór (161) otrzymali na podstawie przybliżonego rozwiązania równań całkowych hydrodynamicznej i termicznej laminarnej warstwy przyściennej. W rozwiązaniu tym wykorzystali profile prędkości i temperatury uzyskane z rozwiązania warstwy przyściennej na powierzchni pionowej ściany płaskiej. Zatem do obliczeń średnich współczynników konwekcji naturalnej na powierzchni pionowych rur w powietrzu ($Pr \approx 0{,}72$, $Ra_H \leq 10^9$), wzór (164) jest bardziej wiarygodny, gdyż oparty jest na wynikach obliczeń numerycznych równań różniczkowych laminarnej warstwy przyściennej, tworzącej się na powierzchni pionowego cylindra w spokojnym płynie [10].



Rys. 53. Wpływ parametru H/D i liczby Rayleigha na średnią liczbę Nusselta na powierzchni pionowego cylindra w powietrzu (Pr = 0,72) [7].

Liczba Nusselta rośnie ze wzrostem parametru H/D, co jest efektem rosnącego wpływu krzywizny warstwy przyściennej. W tablicy 23 porównano średnie współczynniki przejmowania ciepła na pionowych powierzchniach ściany płaskiej i rury w powietrzu.

Tab. 23. Porównanie średnich współczynników przejmowania ciepła na drodze konwekcji na pionowych powierzchniach ściany płaskiej (wzór (165)), i rury (wzór (164)) umieszczonych w spokojnym powietrzu o temperaturze t_f = 20°C dla D = 12,7 mm [7].

t_w	H	H/D	Ra_H	Ściana płaska		Rura		$(\alpha_H - \alpha_{H\text{-}FP})/\alpha_H$
[°C]	[m]	[–]	[–]	$Nu_{H\text{-}FP}$ [–]	$\alpha_{H\text{-}FP}$ [W/m^{2}K]	Nu_H [–]	α_H [W/m^{2}K]	[%]
40	0,65	51,2	$4{,}77\cdot10^8$	76,7	3,12	116,0	4,72	33,9
60	0,65	51,2	$8{,}21\cdot10^8$	87,7	3,67	127,5	5,33	31,2
80	0,65	51,2	$1{,}07\cdot10^9$	93,6	4,02	133,5	5,74	29,9
40	0,80	63,0	$8{,}88\cdot10^8$	98,5	2,96	137,6	4,55	35,0
60	0,80	63,0	$1{,}53\cdot10^9$	102,4	3,48	151,0	5,14	32,2
80	0,80	63,0	$1{,}99\cdot10^9$	109,2	3,81	158,1	5,52	30,9

Jak wynika z tablicy 23 obliczanie zysków ciepła od rur pionowych o długości względnej H/D ponad 51 powoduje ich zaniżenie o ponad 30%. Wzrost zaniżenia zysków ciepła dla mniejszych różnic temperatury ścianki i płynu wynika z tego, że wtedy dla danego

płynu maleje liczba Grashofa, a grubość warstwy przyściennej rośnie i stąd efekt jej zakrzywienia jest silniejszy. Ze wzrostem długości rury wielkość zysków ciepła staje się jeszcze bardziej zaniżona [77].

4.5. Porównanie wartości współczynnika przejmowania ciepła otrzymanych drogą doświadczalną z wartościami teoretycznymi

Wartości zestawione w tablicy 23 opisują konwekcję swobodną przy laminarnym i przejściowym ruchu płynu wzdłuż pionowej powierzchni (por. rozdział 2.3.5). Wynika to z przyjętych wartości charakterystycznego wymiaru geometrycznego: 0,65 i 0,80 m. Badania przeprowadzone w niniejszej rozprawie wykazały, że na powierzchni zewnętrznej tzw. pionów c.o. stosowanych w budownictwie występuje także ruch turbulentny. Przy tym rodzaju ruchu wzrasta znacznie wartość liczby Nusselta, a tym samym współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji przez omywające rurę powietrze. Porównanie wyników otrzymanych przez innych autorów z wynikami otrzymanymi przez autora rozprawy zawiera tablica 24.

Tab. 24. Porównanie wartości średniej liczby Nusselta i współczynnika α_k otrzymanych z równania (161) (Le Févre i Ede), (164) (Cebeci) z wynikami otrzymanymi przez autora rozprawy dla przewodu pionowego d_n 20 mm, umieszczonego w rogu pomieszczenia (H/D = 85,5).

temp. charakterystyczna	średnia liczba Nusselta			średni współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji		
t_m [°C]	Nu_H (161)	Nu_H (164)	Nu_H (autor)	α_H (161)	α_H (164)	α_H (autor)
34	261,6	272,2	288,2	3,1	3,2	3,4
39	283,0	292,8	320,1	3,4	3,5	3,8
44	296,1	305,4	344,0	3,6	3,7	4,2
48	303,9	312,9	354,4	3,7	3,8	4,4

Przyjęty zakres temperatury t_m odpowiada temperaturom eksploatacyjnym dla typowych instalacji centralnych ogrzewań wodnych. Wartości otrzymane przez autora rozprawy są większe o 9 ÷ 14%, przy czym różnica powiększa się ze wzrostem temperatury charakterystycznej warstwy granicznej t_m. Różnica związana jest także z wprowadzanymi założeniami upraszczającymi, które wynikają ze złożoności opisu zagadnienia i trudności w jego rozwiązaniu.

5. POMIARY WARTOŚCI TRANSPORTOWEJ STRATY CIEPŁA W TRADYCYJNEJ INSTALACJI CENTRALNEGO OGRZEWANIA

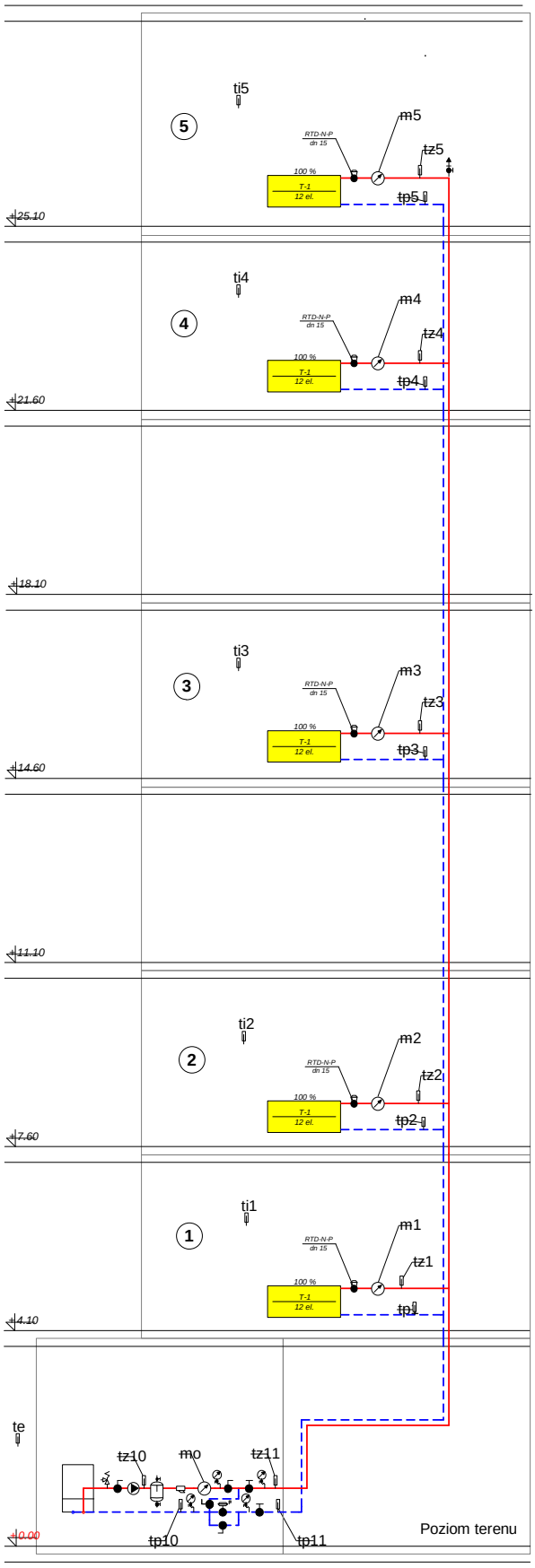
5.1. Opis stanowiska badawczego do określania wielkości transportowej straty ciepła

5.1.1. Rzeczywisty model instalacji c.o. wodnej

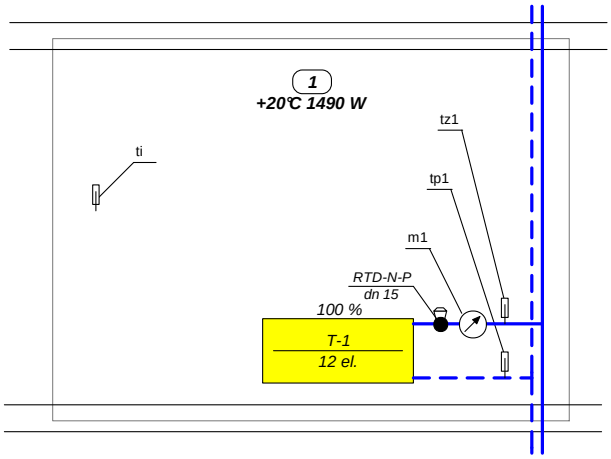
Wykorzystane stanowisko badawcze to autonomiczna instalacja c.o. wodna składająca się z jednego pionu zlokalizowanego w gmachu Wydziału Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Źródłem ciepła jest elektryczny kocioł typu DHZ 15 firmy Hydrotherm o mocy 15 kW podgrzewający wodę do maksymalnej temperatury 95°C. Kocioł wyposażony jest w 3 grzałki 380 V o mocach 2 × 6 kW + 3 kW, regulowane wbudowanym termostatem. W celu zapewnienia stałej wartości temperatury wody wypływającej z kotła, konieczne było dodatkowe wyposażenie układu w mikroprocesorowy regulator temperatury z algorytmem PID-Fuzzy Logic firmy LUMEL.

Ciepło doprowadzane jest do grzejników konwekcyjnych tupu T1 (5 grzejników po 12 elementów) podłączonych w układzie dwururowym, rozdział dolny, pompa na zasilaniu, system otwarty. Przy grzejnikach zamontowano zawory z nastawą wstępną typu RTD-N (Danfoss) bez głowic termostatycznych. Schemat stanowiska zamieszczono na rys. 54.

Parametry pracy pionu badawczego rejestrowane są za pomocą czujników platynowych typu Pt1000 w układzie dwuprzewodowym oraz wodomierzy wirnikowych jednostrumieniowych z przetwornikami magnetycznymi typu EEM-VS 0,6 i EEM-VS 2,5 (Danfoss). Usytuowanie punktów pomiarowych pokazano na rys. 55 i 56. Czujniki i wodomierze są podłączone poprzez sterowniki swobodnie programowane typu DANDUC (Danfoss) do centralnego systemu monitorowania parametrów pracy sieci cieplnych i instalacji wewnętrznych Politechniki Warszawskiej.



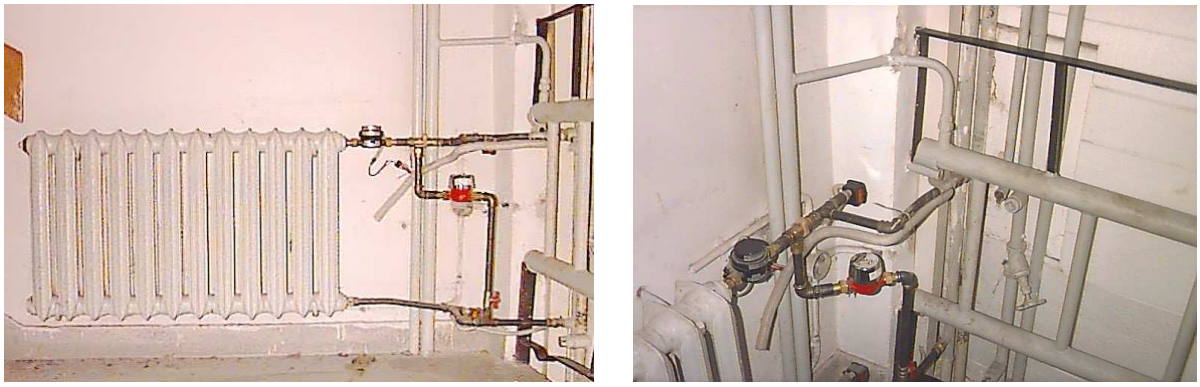
Rys. 54. Schemat pionu badawczego wraz ze źródłem ciepła i rozmieszczeniem punktów pomiarowych.



Rys. 55. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na pionopiętrze.

Aby zapewnić spójność pomiarów temperatury dokonano sprawdzenia czujników Pt1000 w pełnym układzie rejestracji wyników badań w ultratermostacie przy użyciu dokładnych termometrów szklanych, posiadających świadectwa uwierzytelnienia Okręgowego Urzędu Miar w Warszawie. Maksymalne odchylenie (tolerancja) od charakterystyki nominalnej według PN-EN 60751 wyniosło 0,6 K.

Wodomierze z przetwornikami i układ rejestracji wyników badań sprawdzono metodą bilansu strumienia masy wody dla całego pionu. Mierzone przepływy mieszczą się w granicach dopuszczalnych błędów wskazań zastosowanych przepływomierzy i założonych przepływów (błąd wynosi 3 ÷ 5%).



Rys. 56. Grzejnik pionu badawczego wraz z oprzyrządowaniem.

Założeniem badawczym było stworzenie stanowiska w skali 1:1 układu odbioru ciepła, jaki powszechnie występuje w budownictwie mieszkaniowym. W celu zbliżenia warunków pracy stanowiska do warunków, w jakich pracuje typowa instalacja c.o. w budynku mieszkalnym odpowiednio dobrano: parametry pracy pionu, rodzaj odbiorników, sieci przewodów i armatury oraz zbudowano ściankę z materiału izolującego rozgraniczającą piony instalacji c.o. od przeszklonej ściany zewnętrznej.

5.1.2. Model analityczny i jego weryfikacja fizykalna

Zaprojektowano pion instalacji centralnego ogrzewania (stanowisko badawcze w skali rzeczywistej) dostarczający ciepło do poszczególnych pomieszczeń w założonej ilości Q_o = 5·1490 = 7450 W. Jest to moc cieplna pięciu grzejników typu T1 zainstalowanych na stanowisku, wielkości 12 elementów każdy, deklarowana przez producenta dla warunków obliczeniowych (współczynnik obciążenia cieplnego φ = 1,00) — 90/70/20°C. Dla wyeksponowania wagi zagadnienia udziału transportowych strat ciepła w bilansie cieplnym ogrzewanych pomieszczeń, przy projektowaniu nie uwzględniono zysków ciepła od przewodów, ani obniżenia temperatury wody zasilającej grzejniki na kolejnych kondygnacjach. Obliczeniowy przepływ przez grzejnik wynosi zatem: $g_o = Q_o / c_p \left(t_z - t_p\right)$, kg/s, zaś dla całego pionu: $G_o = 5\,g_o$. Przepływy te, przy założeniu regulacji jakościowej, są takie same, również w warunkach ustalonych we wszystkich punktach pracy instalacji c.o. w ciągu sezonu ogrzewczego (np. dla φ = 0,50 i φ = 0,33). Wówczas eksploatacyjna temperatura zasilania i powrotu wynosi:

$$t_{zx} = t_i + \Delta t_{ar} \varphi^{\frac{1}{1+m}} + 0{,}5\,\varphi\left(t_z - t_p\right), \qquad t_{px} = t_i + \Delta t_{ar} \varphi^{\frac{1}{1+m}} - 0{,}5\,\varphi\left(t_z - t_p\right) \tag{235}$$

gdzie:

Δt_{ar} – średnia arytmetyczna różnica temperatury, ($\Delta t_{ar} = 0{,}5\left(t_z + t_p\right) - t_i$),

m – wykładnik charakterystyki cieplnej grzejnika T1, (dla grzejnika typu T1 m = 0,29) [90],

$Q_x = \varphi Q_o$ – chwilowe zapotrzebowanie ciepła, W.

Powyższe założenia wyjściowe ilustruje tablica 25.

Tab. 25. Założenia. Zestawienie parametrów pionu badawczego.

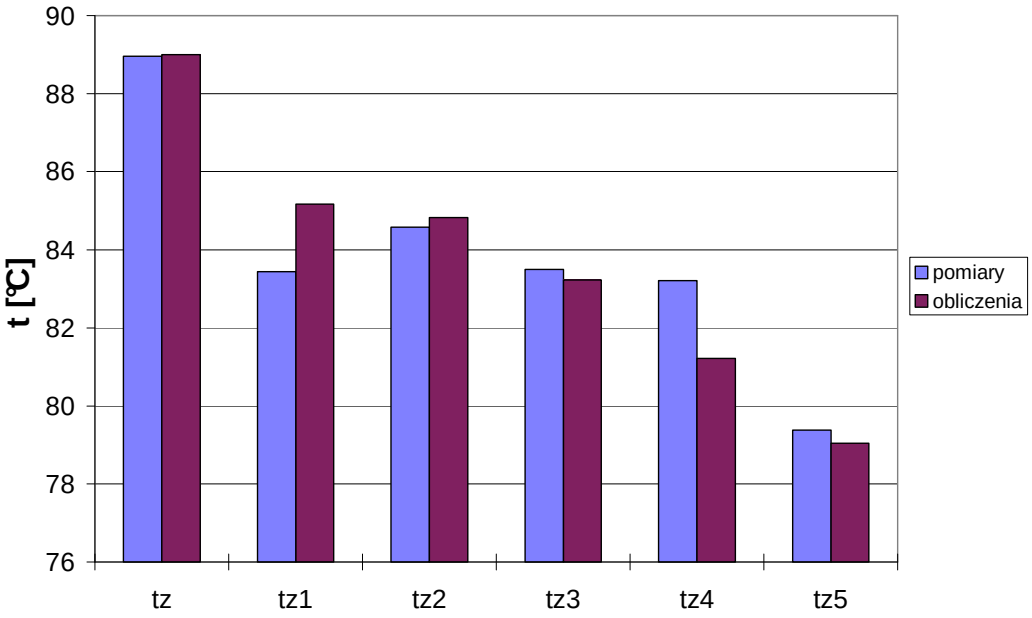
φ	1,00	0,50	0,33
t_z, °C	90,0	60,0	48,6
t_p, °C	70,0	50,0	42,0
t_i, °C	20,0	20,0	20,0
Q_o, W	1 490	745	492
g_o, kg/h	63,9	63,9	63,9
G_o, kg/h	319,5	319,5	319,5

Weryfikacja tego modelu polegała na wykonaniu pomiarów w trzech założonych stanach ustalonych i porównaniu mocy cieplnej dostarczanej do reprezentatywnych pomieszczeń z zakładanym zapotrzebowaniem na ciepło.

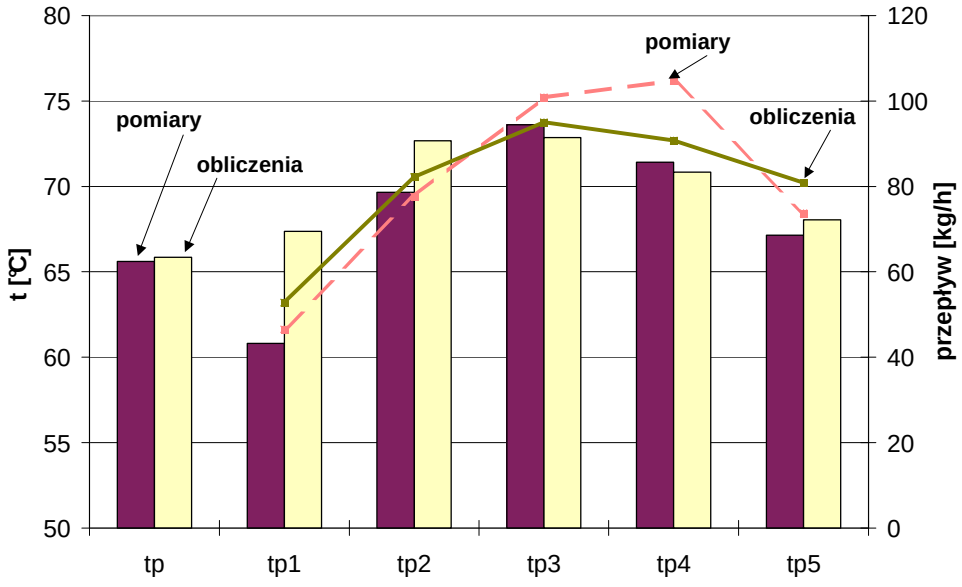
5.2. Badania układu

5.2.1. Pierwsza seria pomiarów

Pion badawczy wyregulowano cieplnie i hydraulicznie za pomocą nastaw wstępnych zaworów grzejnikowych, dobranych przy użyciu programu komputerowego Audytor c.o. [114]. Następnie wykonano pomiary w ustalonych warunkach obliczeniowych t_z/t_p = 90/70°C i porównano wartości temperatury wody i przepływów obliczeniowych (projektowanych) w poszczególnych grzejnikach, z wartościami rzeczywistymi (rys. 57 i 58).



Rys. 57. Temperatury zasilania, model wodny, pomiary i obliczenia.



Rys. 58. Temperatury powrotu i przepływ, model wodny, pomiary i obliczenia.

5.2.2. Druga seria pomiarów

W dalszej części badań na kotle zadano obliczeniową temperaturę zasilania t_z = 90°C i doprowadzono pion do warunków ustalonych monitorując temperatury i przepływy w punktach pomiarowych. Następnie zmieniano nastawy zaworów grzejnikowych i zaworu podpionowego oraz wysokość podnoszenia pompy aż do osiągnięcia założonych przepływów (dokładność ok. 5%). Po osiągnięciu stanu ustalonego zapisano wskazania czujników pomiarowych i obniżono temperaturę zasilania do t_{zx} = 60°C, a następnie do t_{zx} = 48,6°C, nie zmieniając nastaw zaworów. Do obliczeń dysponowano zatem wartościami wielkości mierzonych w trzech stanach ustalonych, przy założeniu regulacji jakościowej. Błąd niezamknięcia bilansu strumienia masy dla całego pionu w zależności od stanu wyniósł 1 ÷ 5%, zaś dla poszczególnych grzejników niedopasowanie strumieni masy przy założeniu regulacji jakościowej — 2 ÷ 8%.

Przeprowadzono obliczenia mające na celu porównanie teoretycznych wydajności grzejników określanych za pomocą następujących wzorów:

- wzór eksploatacyjny, Q_{exp}:

$$Q_{exp} = G\,\Delta t_1\,c_p\left[1-\left(1+\frac{m\,C\,F_g\,\Delta t_1^{m}}{c_p\,G}\right)^{-\frac{1}{m}}\right] \tag{236}$$

gdzie:

G – masowy strumień wody, kg/s

$\Delta t_1 = t_z - t_i$ – początkowa różnica temperatury, K

$F_g = 0{,}23\,n$ – pole zewnętrznej powierzchni wymiany ciepła grzejnika, m^2

$C = 3{,}44\,n^{-0{,}06}$ – współczynnik charakterystyki cieplnej grzejnika, [90].

- charakterystykę cieplną grzejnika, Q_{grz}, [114]:

$$Q_{grz} = 3{,}49\,\Delta t_{ar}^{1{,}25}\,F_g^{0{,}94}\,\varepsilon_{\Delta t} \tag{237}$$

gdzie:

$\varepsilon_{\Delta t}$ – współczynnik poprawkowy średniej arytmetycznej różnicy temperatury,

$$\varepsilon_{\Delta t} = \frac{m(1-X)}{\left(\frac{1}{X^m}-1\right)\left(\frac{X+1}{2}\right)^{m+1}};\; X = \frac{t_p - t_i}{t_z - t_i} \tag{238}$$

- równanie bilansowe, Q_g:

$$Q_g = G\,c_p\,(t_z - t_p) \tag{239}$$

Na podstawie tych samych zależności określono wydajności grzejników korzystając z wartości zmierzonych. Jako rzeczywistą wydajność cieplną grzejnika należy traktować wartość Q_g uzyskaną z równania bilansowego.

Zyski ciepła od przewodów Q_z określono z następujących zależności, [51]:

- przewody pionowe:

$$Q_{pion} = 2{,}96\,\Delta t_{ar}^{1{,}33}\,\pi\,d_z\,L, W \tag{240}$$

- przewody poziome:

$$Q_{poziom} = 2{,}46\,\Delta t_{ar}^{1{,}33}\,\pi\,d_z^{0{,}88}\,L, W \tag{241}$$

gdzie: L – długość przewodu, m.

5.3. Opracowanie wyników badań

Teoretyczną wydajność cieplną całego pionu Q_p określono jako sumę wydajności grzejników i przewodów, zaś wydajność rzeczywistą — podstawiając do równania bilansowego globalne wartości spadków temperatury i przepływu mierzone na wyjściu z kotłowni. Błąd pomiarowy δ określa stopień niezamknięcia bilansu cieplnego pionu badawczego. Otrzymane wyniki zamieszczono w tablicy 26.

Tab. 26. Zestawienie zbilansowanych mocy cieplnych, [W] (Q_p – całkowita wydajność cieplna pionu).

	φ = 1.00		φ = 0.50		φ = 0.33	
	teoretyczna	rzeczywista	teoretyczna	rzeczywista	teoretyczna	rzeczywista
Q_{exp}	7 465	5 725	3 740	2 802	2 472	1 755
Q_{grz}	7 468	5 929	3 746	2 875	2 476	1 798
Q_g	7 450	4 919	3 710	2 355	2 447	1 474
Q_z	3 272	4 294	1 522	2 369	918	1 663
Q_p	10 722	9 070	5 232	4 386	3 365	2 756
δ	0%	2%	0%	8%	0%	14%

Dużo niższe wartości rzeczywistych wydajności cieplnych grzejników wynikają z obniżenia temperatury zasilania o przynajmniej 8°C oraz nieco wyższej wartości temperatury wewnętrznej (22 ÷ 24°C). Zdaniem autora takie założenia przyjęte przy prowadzonych badaniach są odzwierciedleniem rzeczywistych warunków pracy instalacji tradycyjnych. Dużo wyższe wartości rzeczywistych zysków ciepła od przewodów wskazują na potrzebę weryfikacji charakterystyk cieplnych przewodów stosowanych przy projektowaniu instalacji c.o.

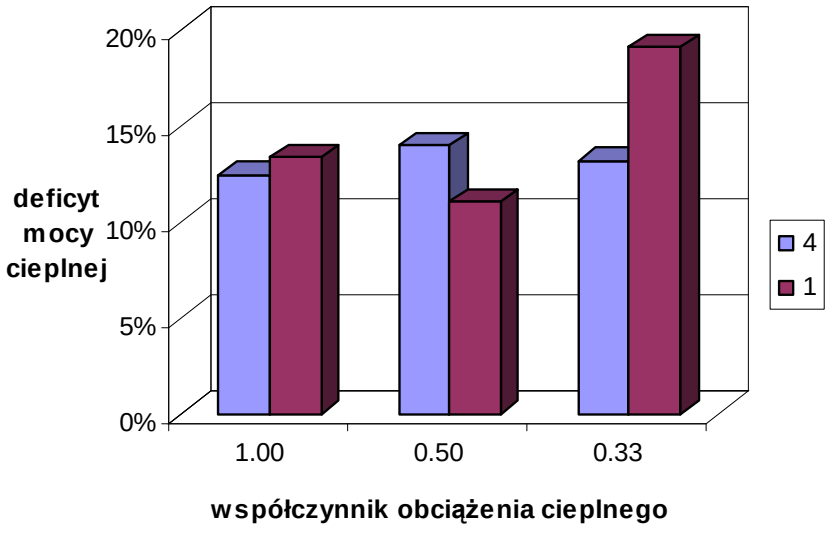
Te dwa fakty są spowodowane niekorzystnym wpływem zjawiska transportowej straty ciepła i potwierdzają tezy niniejszej rozprawy. Maksymalny teoretyczny błąd określenia rzeczywistej mocy cieplnej z równania bilansowego na stanowisku badawczym wynosi 12%, w rzeczywistości dla stanu $\varphi = 0{,}33$ wynosił on $\delta = 14\%$.

W tab. 27 pokazano wpływ straty transportowej oraz założeń przyjmowanych przy projektowaniu instalacji c.o. na bilans ciepła w wybranych pomieszczeniach. Zapotrzebowanie ciepła dla pomieszczenia nr 4 w warunkach obliczeniowych, zgodnie z „Wytycznymi projektowania instalacji c.o." [44] wynosi: $Q_o = 1{,}07 \cdot 1490 = 1594$ W (6. z 7. kondygnacji w pionie: $\beta_s = 1{,}07$).

Tab. 27. Bilansy ciepła w reprezentatywnych pomieszczeniach 1 i 4, [W].

nr.	φ = 1.00			φ = 0.50			φ = 0.33		
	teor.	Q_g+Q_z	$Q_g+0.7Q_z$	teor.	Q_g+Q_z	$Q_g+0.7Q_z$	teor.	Q_g+Q_z	$Q_g+0.7Q_z$
4	1 594	1 507	1 396	797	740	686	526	488	457
1	1 490	1 374	1 291	745	711	666	492	434	400

Nawet przy uwzględnieniu całości zysków ciepła w bilansie cieplnym pomieszczenia ($Q_o = Q_g + Q_z$), występuje deficyt mocy w ciągu całego sezonu ogrzewczego. Jeśli przyjąć, iż tylko 70% zysków ciepła przekazywane jest efektywnie do pomieszczenia (jak ma to miejsce przy projektowaniu instalacji c.o.), deficyt mocy cieplnej wynosi kilkanaście procent (patrz rys. 59). Należy przypomnieć, iż przy doborze grzejników nie uwzględniono zysków ciepła od przewodów.



Rys. 59. Deficyt mocy cieplnej w wybranych pomieszczeniach nr 1 i 4.

5.4. Wpływ transportowej straty ciepła na wymiarowanie instalacji centralnego ogrzewania

Zjawisko transportowej straty ciepła nie było do tej pory należycie, tzn. w rzeczywistej skali, uwzględniane przy projektowaniu instalacji centralnych ogrzewań wodnych z nieizolowaną siecią przewodów [42], [44], [51], [98]. Otrzymane wyniki badań świadczą o bardzo znaczącym i większym niż przyjmowano wpływie transportowej straty ciepła na pracę tradycyjnych instalacji centralnego ogrzewania [39], [40], [88], [89]. Dlatego też, aby zminimalizować niekorzystny wpływ straty transportowej na jakość pracy instalacji c.o., sieć przewodów należy koniecznie izolować termicznie [25], [39], [82], [84], [87]. Rozwiązaniem branym pod uwagę przez projektanta instalacji, zwłaszcza w budynkach wysokich, może być spięcie pionów na ostatniej kondygnacji, czyli stworzenie małych obiegów cyrkulacyjnych (warunkiem koniecznym jest oczywiście izolacja sieci przewodów). Spowoduje to wzrost temperatury wody zasilającej najdalsze grzejniki i zminimalizuje cieplne rozregulowanie instalacji [85], [87].

Niepokojące są otrzymane dysproporcje energii cieplnej przekazywanej przez grzejnik i przewody w bilansie cieplnym pomieszczenia (tab. 27). Pozwala to przypuszczać, iż projektowanie instalacji centralnego ogrzewania z wykorzystaniem dotychczas stosowanych zależności, odbywa się po niebezpiecznej stronie. Ważnym aspektem aplikacyjnym prowadzonych badań jest wpływ ilości ciepła dostarczanego do pomieszczenia przez przewody, na jakość rozliczania indywidualnych odbiorców ciepła na podstawie wskazań grzejnikowych podzielników kosztów (dyfuzyjnych bądź elektrycznych) [22], [38], [45], [82], [86], [95], [108]. Dokładne określenie wielkości zysków ciepła od przewodów jest konieczne, ponieważ to ciepło znajduje się poza ewidencją podzielnika grzejnikowego.

Przeprowadzone badania potwierdzają tezę, iż projektowanie instalacji ogrzewań wodnych systemu tradycyjnego, zwłaszcza w budynkach wysokich, poddanych termorenowacji, wymaga dokładnego komputerowego wspomagania programami odwzorowującymi rzeczywiste procesy wymiany ciepła w grzejnikach i w sieci przewodów [41], [42], [63], [83], [94], [110].

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

6.1. Podsumowanie

Zasadniczą częścią rozprawy jest eksperymentalne określenie wartości współczynnika przejmowania ciepła z powierzchni nieizolowanych przewodów stalowych do powietrza. Na podstawie tych badań wyprowadzono charakterystyki cieplne przewodów zarówno pionowych, jak i poziomych. Następnie zbadano wpływ zjawiska rozpraszania ciepła przez sieć przewodów instalacji centralnego ogrzewania, o którego intensywności decyduje wartość współczynnika przejmowania ciepła. Niekorzystne zjawisko rozpraszania ciepła ma natomiast znaczący wpływ na wymiarowanie i eksploatację instalacji c.o. systemu tradycyjnego.

Z przedstawionych powyżej analiz wynika, że tezy stawiane na wstępie rozprawy zostały udowodnione zarówno na podstawie przeprowadzonych badań laboratoryjnych w komorze do badań cieplnych, jak i na modelu w skali rzeczywistej. Wyniki eksperymentów zostały zweryfikowane analitycznie przy użyciu różnych metod (symulacyjnych i uproszczonych) oraz porównane z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. Uzyskane niepewności pomiarowe są zadowalające dla rozpatrywanych zagadnień technicznych i mieszczą się w granicach dokładności zastosowanych metod badawczych.

Zastosowane wyposażenie pomiarowe i badawcze gwarantuje spójność pomiarową z wzorcami odniesienia. Szczególną uwagę zwrócono na zapewnienie powtarzalności i odtwarzalności wykonywanych badań. Zapisy z badań oraz szczegółowe dane pomiarowe i wyniki badań znajdują się w archiwum autora.

Punktem odniesienia dla tematu i zagadnień podnoszonych w rozprawie był obszerny przegląd literatury ujmującej zarówno teorię wymiany ciepła w warunkach konwekcji swobodnej, jak i stosowane metody doświadczalnego wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła. Charakterystyki cieplne przewodów określono operując całkowitym współczynnikiem przejmowania ciepła z zewnętrznej powierzchni ścianki przewodu do powietrza, wygodnym do zastosowania przy projektowaniu instalacji.

Przy wyborze rozpatrywanych zagadnień brano pod uwagę przede wszystkim ich aplikacyjny charakter oraz potrzebę i możliwość przeniesienia uzyskanych wyników do branżowej praktyki projektowej i eksploatacyjnej. Stanowiska pomiarowe zaprojektowano i wykonano tak, aby w jak największym stopniu odpowiadały rzeczywistym instalacjom. Zakresy pomiarowe i parametry pracy stanowisk ustawiono tak, aby odzwierciedlały warunki pracy typowych instalacji centralnego ogrzewania.

6.2. Wnioski

- Przeprowadzone badania dowodzą, iż rzeczywisty współczynnik przejmowania ciepła z zewnętrznej powierzchni przewodów do powietrza jest większy, niż przyjmowano dotychczas. Także rzeczywista wydajność cieplna nieizolowanych przewodów stalowych w tradycyjnych instalacjach centralnego ogrzewania jest średnio o 20% większa od wydajności przyjmowanych przy ich projektowaniu.
- Podczas badań potwierdzono, że dla przewodów pionowych na wartość współczynnika przejmowania ciepła po ich stronie zewnętrznej, ma wpływ usytuowanie przewodu w pomieszczeniu (przy ścianie bądź w rogu pomieszczenia). Natomiast w przypadku przewodów poziomych nie ma to większego znaczenia.
- Otrzymane wyniki badań wskazują na potrzebę weryfikacji charakterystyk cieplnych przewodów stalowych zarówno pionowych, jak i poziomych, wykorzystywanych dotychczas przy projektowaniu i regulacji instalacji centralnego ogrzewania. W rozprawie zaprezentowano charakterystyki cieplne przewodów otrzymane przez autora drogą eksperymentu, a następnie zweryfikowane, które proponuje się zastosować w praktyce projektowej.
- Niekorzystne zjawisko transportowej straty ciepła związane z zyskami ciepła od sieci przewodów, ma wpływ na pracę instalacji tradycyjnych znacznie większy niż sądzono dotychczas. Projektowanie i regulacja instalacji c.o. z wykorzystaniem przytoczonych, obecnie stosowanych zależności, może powodować jej wadliwą pracę.
- Regulacja ilościowa instalacji centralnego ogrzewania wodnego, wprowadzona dla racjonalizacji zużycia ciepła, powoduje wzrost niekorzystnego wpływu zjawiska transportowej straty ciepła na pracę tej instalacji, zwłaszcza w przypadku niewłaściwej regulacji wstępnej.
- Zyski ciepła od nieizolowanych pionów instalacji c.o., stanowią istotną składową w bilansie cieplnym ogrzewanych pomieszczeń, zwłaszcza w budynkach ocieplonych. W budynkach takich często dochodzi do sytuacji, w której grzejnik pokrywa tylko niewielką część zapotrzebowania na ciepło pomieszczenia.
- Ilość ciepła dostarczanego do pomieszczenia przez przewody, będąca poza ewidencją grzejnikowych podzielników kosztów, rzutuje na jakość rozliczania indywidualnych odbiorców ciepła. Wymiarowanie instalacji ogrzewań wodnych systemu tradycyjnego, wymaga dokładnego, komputerowego wspomagania programami odwzorowującymi także rzeczywiste procesy wymiany ciepła w sieci przewodów.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASHRE: „*1996 ASHRE Handbook – HVAC systems and equipment*", American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Atlanta, 1996.

[2] Baehr H. D., Stephan K.: „*Heat and Mass Transfer*", Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] Bejan A.: „*Heat Transfer*", John Wiley & Sons, New York, 1993.

[4] Bejan A.: „*Convection Heat Transfer*", John Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] Bennett C. O., Myers J. E.: „*Momentum, Heat and Mass Transfer*", McGraw-Hill, New York, 1962.

[6] Bieniasz B. (red.): „*Wymiana ciepła i masy – Laboratorium*", Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 1997.

[7] Bober K., Wojtkowiak J., Popiel C.: „*Konwekcja swobodna ciepła na pionowych rurach*", Mat. X Międzynarodowej Konferencji: Air-conditioning, Air-protection and District Heating, Wrocław – Szklarska Poręba, 2002.

[8] Bohdal T., Charun H., Czapp M., Dutkowski K.: „*Ćwiczenia laboratoryjne z termodynamiki*", Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin, 2000.

[9] Cebeci T., Bradshaw P.: „*Physical and Computational Aspects of Convectiv Heat Transfer*", Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[10] Cebeci T.: „*Laminar-free-convective-heat transfer from the outer surface of a vertical slender circular cylinder.*", Proc. 5th Int. Heat Transfer Conference, Paper NC 1.4, 1975, pp. 15-19.

[11] Chen C. C., Eichhorn R.: „*Natural convection from a vertical surface to a thermally stratified medium.*", J. Heat Transfer, 98, 1976, pp. 446-451.

[12] Chen T. S., Yuh C. F.: „*Combined heat and mass transfer in natural convection along a vertical cylinder.*", Int. J. Heat Mass Transfer, 23, 1980, pp. 451-461.

[13] Churchill S. W., Chu H. H. S.: „*Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder.*", Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1975, pp. 1049-1053.

[14] Churchill S. W., Chu H. H. S.: „*Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate.*", Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1975, pp. 1323-1329.

[15] Dring R. P., Gebhart B.: „*Transient natural convection from thin vertical cylinders.*", Trans. ASME, 1966, pp. 246-247.

[16] Eckert E. R. G., Diagula A. I.: Trans. ASME 1954, vol. 76, pp. 497-504.

[17] Ede A. J.: „*Advances in Free Convection*", Advances in Heat Transfer, Vol. 4, 1967, pp. 1-64.

[18] Elsner J.: „*Turbulencja przepływów*", PWN, Warszawa, 1987.

[19] Fanger P.O.: „*Thermal Comfort Analyses and Application in Environmental Engineering*", Danish Technical Press, Copenhagen, 1970.

[20] Fodemski T. R. (red.): „*Pomiary cieplne – część I.*", WNT, Warszawa, 2001.

[21] Fujii T., Tageuchi M., Fujii M., Suzaki K., Uehara H.: „Experiments on natural convection heat transfer from outer surface of a vertical cylinder to liquids.", Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 1970, pp. 753-787.

[22] Furtak L., Rabiej S., Wachnicki C., Wild J.: „*Metody rozliczeń kosztów zużycia ciepła i wody w budynkach*", Polska Korporacja Techniki Sanitarnej, Grzewczej, Gazowej i Klimatyzacji, Warszawa, 1998.

[23] Gebhart B.: „*Transient natural convection from vertical elements.*", Trans. ASME, 1961, pp. 61-70.

[24] Goldstein R. J., Briggs D. G.: „*Transient free convection about vertical plates and circular cylinders.*", Trans. ASME, 1964, pp. 490-500.

[25] Górecki A.: „*Kompleksowa technologia renowacji instalacji c.o.*", COBRI "INSTAL", Warszawa, 1995.

[26] Gröber H., Erk S.: *„Fundamentals of Heat Transfer”*, McGraw-Hill, New York, 1961.
[27] Guter R. S., Owczyński B. W.: *„Matematyczne opracowywanie wyników doświadczeń”*, PWN, Warszawa, 1965.
[28] Hänsel H.: *„Podstawy rachunku błędów”*, WNT, Warszawa, 1965.
[29] Hassani A. V., Hollands K. G. T.: *„On natural convection heat transfer from three-dimensional bodies of arbitrary shape.”*, J. Heat Transfer, 111, 1989, pp. 363-371.
[30] Heckel J. J., Chen T. S., Armaly B. F.: *„Natural convection along slender vertical cylinders with variable surface heat flux.”*, Trans. ASME, 111, 1989, pp. 1108-1111.
[31] Hobler T.: *„Ruch ciepła i wymienniki”*, WNT, Warszawa, 1986.
[32] Incropera F. P., DeWitt D. P.: *„Introduction to Heat Transfer”*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
[33] Jakob M.: *„Heat transfer”*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
[34] Jaluria Y.: *„Natural Convection Heat and Mass Transfer”*, Pergamon Press, New York, 1984.
[35] Kakac S., Aung W., Viskanta R.: *„Natural Convection, Fundamentals and Applications”*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[36] Kays W. M., Crawford M. D.: *„Convective Heat and Mass Transfer”*, McGraw-Hill, New York, 1993.
[37] Kędzierski P.: *„Charakterystyki cieplne nieizolowanych pionów stalowych w instalacjach centralnego ogrzewania.”*, COW nr 5, 2002, pp. 19-21.
[38] Kędzierski P.: *„Wpływ straty transportowej w instalacjach centralnego ogrzewania na rozliczanie kosztów dostawy ciepła do lokali mieszkalnych”*, Mat. III Konferencji Naukowo-Technicznej: Nowe rozwiązania funkcjonowania systemów rozliczeń kosztów ogrzewania drogą do racjonalnej gospodarki ciepłem w budynku, Kazimierz Dolny, 2002.
[39] Kędzierski P. (współautor): *„Instalacje ogrzewcze”*, Vademecum Budowlane, Arkady, Warszawa, 2001, pp. 843-861.
[40] Kędzierski P.: *„Wpływ transportowej straty ciepła na wymiarowanie i eksploatację tradycyjnych instalacji centralnego ogrzewania”*, Mat. XII Konferencji Ciepłowników: Systemy grzewcze w budownictwie, Solina, 2000.
[41] Kędzierski P.: *„Możliwości zastosowania poziomych ogrzewań jednorurowych w budownictwie wielorodzinnym”*, COW nr 1, 1999, pp. 29-34.
[42] Koczyk H. (red.): *„Ogrzewnictwo dla praktyków”*, Systherm Serwis, Poznań, 2002.
[43] Kostowski E.: *„Przepływ Ciepła”*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2000.
[44] Kołodziejczyk W., Płuciennik M.: *„Wytyczne projektowania instalacji c.o.”*, COBRTI „INSTAL”, Warszawa, 1995.
[45] Kołodziejczyk W.: *„Pomiary zużycia ciepła w budynkach.”*, Centralny Ośrodek Informacji Budownictwa, Warszawa, 1993.
[46] Kołodziejczyk L., Mańkowski S., Rubik M.: *„Pomiary w inżynierii sanitarnej.”*, Warszawa, Arkady, 1980.
[47] Kostowski E.: *„Promieniowanie cieplne”*, PWN, Warszawa, 1993.
[48] Kotlewski F., Mieszkowski M.: *„Pomiary w technice cieplnej.”*, Warszawa, WNT, 1972.
[49] Kuehn T. H., Goldstein R. J.: *„Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders.”*, Int. J. Heat Mass Transfer, 19, 1976, pp. 1127-1134.
[50] Kutateładze S. S.: *„Osnowy tieorii tiepłoobmiena”*, Atomizdat, Moskwa, 1979.
[51] Kwiatkowski J., Cholewa L.: *„Centralne ogrzewanie. Pomoce projektanta.”* ,Arkady, Warszawa, 1980.
[52] Lee H. R., Chen T. S., Armaly B. F.: *„Natural convection along slender vertical cylinders with variable surface temperature.”*, Trans. ASME, 110, 1988, pp. 103-108.

[53] Le Févre E. J.: *„Laminar free convection from a vertical plane surface.”*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Bruksela, Vol. 4, 1956, pp. 168.
[54] Le Févre E. J., Ede A. J.: *„Laminar free convection from the outer surface of a vertical circular cylinder.”*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Bruksela, Vol. 4, 1956, pp. 175-183.
[55] Lewandowski W. M., Szymański S., Kubski P., Radziemska E., Bieszk H., Wilczewski T: *„Natural convective heat transfer from isothermal conic.”*, Int. J. Heat Mass Transfer, 42, 1999, pp. 1895-1907.
[56] Łykow A. B.: *„Tieoria tiepłoprowodnosti”*, Szkoła Wyższa, Moskwa, 1967.
[57] Madejski J.: *„Teoria wymiany ciepła”*, PWN, Warszawa, 1963.
[58] Martin B. W.: *„An appreciation of advances in natural convection along an isothermal vertical surface.”*, Int. J. Heat Mass Transfer, 27, 1984, pp. 1583-1586.
[59] McAdams W. H.: *„Heat Transmission”*, McGraw-Hill, New York, 1954.
[60] Michalski L., Eckersdorf K., Kucharski J.: *„Termometria. Przyrządy i metody.”*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1998.
[61] Michalski L., Eckersdorf K.: *„Pomiary temperatury”*, WNT, Warszawa, 1986.
[62] Michiejew M.: *„Zasady wymiany ciepła”*, PWN, Warszawa, 1953.
[63] Mielnicki J. S.: *„Centralne ogrzewanie. Regulacja i eksploatacja.”*, Arkady, Warszawa, 1985.
[64] Minkowycz W. J., Sparrow E. M.: *„Lokal nonsimilar solutions of natural convection on a vertical cylinder.”*, J. Heat Transfer, 96, 1974, pp. 178-183.
[65] Morgan V. T.: *„The overal convective heat transfer from smooth circular cylinders.”*, Advances in Heat Transfer, Vol. 11, 1975, pp. 199-264.
[66] Nadziakiewicz J. (red.): *„Laboratorium techniki cieplnej”*, Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej nr 1853, Gliwice, 1995.
[67] Nagendra H. R., Tirunarayanan M. A., Ramachandran A.: *„Laminar free convection from vertical cylinders with uniform heat flux.”*, Trans. ASME, 1970, pp. 191-194.
[68] Nowak W., Sobański R.: *„Cieplne maszyny przepływowe”*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódźkiej nr 101 (606), 1991, pp. 129-160.
[69] Oosthuizen P. H.: *„Experimental study of free convective heat transfer from smooth circular cylinders.”*, Advances in Heat Transfer, Vol. 98, 1976, pp. 672-674.
[70] Oosthuizen P. H., Madan S.: *„Combined convective heat transfer from horizontal cylinders in air.”*, Trans. ASME, 1970, pp. 194-196.
[71] Ostrach S.: *„An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force.”*, NACA, Techn. Report 1111, 1953.
[72] Pastucha L., Otwinowski H.: *„Podstawy przekazywania ciepła”*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 1999.
[73] Pczelkin I. M.: „Sbornik. Konwektiwnyj i tuczistyj teploobmen”, Izd. AN SSR, Moskwa, 1960.
[74] Platten J. R., Legros J. C.: *„Convection in Liquids”*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
[75] Pohlhausen E.: *„Der Wärmeaustausch zwishen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung”*, Z. Angew. Math. Mech. 1, 1921, pp. 115-121.
[76] Poots G.: *„Laminar free convection near the lower stagnation point on an isothermal curved surface.”*, Int. J. Heat Mass Transfer, 7, 1964, pp. 863-874.
[77] Popiel C. O., Wojtkowiak J., Bober K.: *„Some experiments on natural-convective heat transfer from vertical cylinder.”*, Proc. of the 5th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Vol. 1, 2001, pp. 651-654.
[78] Popiel C. O.: *„Laminarna konwekcja swobodna w powietrzu na powierzchni okrągłego walca.”*, COW nr 6, 1978, pp. 152-154.

[79] Popiel C. O., Bogusławski L.: *„Local heat transfer coefficients on the rotating disk in still air.”*, Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1975, pp. 167-170.
[80] Powe R. E.: *„Bounding effects on the heat loss by free convection from spheres and cylinders.”*, Trans. ASME, 96, 1974, pp. 558-560.
[81] Prandtl L.: *„Űber Flűssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung”*, Verhandlungen des III int. Mathematiker-Kongresses (Heidelberg 1904), Teubner, Leipzig 1905.
[82] Rabjasz R., Dzierzgowski M., Turlejski S., Kostyrko K.: *„Czy systemy rozliczania kosztów ogrzewania wg ilości ciepła i wg komfortu są sprawiedliwe oraz czy ich nazwy są adekwatne do zasad funkcjonowania?”*, XIII Konferencja Ciepłowników: Efektywność dystrybucji i wykorzystania ciepła, Solina, 2001.
[83] Rabjasz R.: *„Jakich projektów modernizacji instalacji ogrzewczych w budynku wymagać powinien inwestor od projektanta”*, Materiały Budowlane nr 1, 2000.
[84] Rabjasz R.: *„Termorenowacja budynków w zakresie wodnych instalacji ogrzewczych”*, Rynek Instalacyjny nr 2, 2000.
[85] Rabjasz R., Dzierzgowski M.: *„Bazowe standardy techniczne istniejącej instalacji centralnego ogrzewania w budynku mieszkalnym, w którym może prawidłowo funkcjonować system indywidualnych rozliczeń kosztów ogrzewania zależny od zużycia ciepła”*, Konferencja naukowo-techniczna: Problemy rozliczania indywidualnych kosztów ogrzewania – teoria i praktyka, Jedlina, 2000.
[86] Rabjasz R., Turlejski S., Dzierzgowski M.: *„Jakość rozliczania kosztów ogrzewania na podstawie wskazań nagrzejnikowych podzielników zużycia ciepła”*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej – Inżynieria Środowiska, zeszyt nr 30/99, Warszawa, 1999.
[87] Rabjasz R.: *„Indywidualne wykresy regulacyjne dostosowane do charakterystyk cieplnych budynków”*, VI Krajowa Konferencja: Modernizacja Miejskich Systemów Ciepłowniczych w Polsce, Międzyzdroje, 1997.
[88] Rabjasz R.: *„Dostosowanie istniejącej instalacji centralnego ogrzewania do zmniejszonych potrzeb cieplnych budynku po jego termorenowacji.”*, Materiały konferencyjne VII Konferencji Ciepłowników Polski Południowo-Wschodniej, Solina, 1996.
[89] Rabjasz R.: *„Podstawy regulacji wstępnej instalacji c.o. przy zmienionym zapotrzebowaniu na ciepło”*, COW nr 9, 1990.
[90] Rabjasz R.: *„Statyczne i dynamiczne własności cieplne grzejników konwekcyjnych”*, Politechnika Warszawska. Prace Naukowe. Budownictwo z. 76, Warszawa, 1981.
[91] Recknagel H., Sprenger E., Hönmann W., Schramek E.: *„Poradnik. Ogrzewanie i klimatyzacja*”, EWFE, Gdańsk, 1994.
[92] Redekopp L. G.: *„Role of Buoyancy and the Boussinesq Approximation in Horizontal Boundary Layer.”*, J. Hydronauties nr 1, 1972.
[93] Reynolds O.: *„On the Motion of Water”*, Phil. Trans., v. 174 (1884), s. 935.
[94] Robakiewicz M.: *„Termomodernizacja budynków i systemów grzewczych. Poradnik.”*, Fundacja Poszanowania Energii, Warszawa, 2002.
[95] Robakiewicz M.: *„Jak zmniejszyć koszty ogrzewania budynków? Poradnik.”*, Fundacja Poszanowania Energii, Warszawa, 1996.
[96] Rohsenow W. M., Goldstein R. J.: *„Handbook of Heat Transfer”*, McGraw-Hill, New York, 1973, pp. 1-16.
[97] Rosiński M.: *„Termodynamiczna efektywność „płynnych żeber” ze strukturą kapilarno-porowatą w aspekcie odzyskiwania ciepła w instalacjach cieplnych”*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, z. 40/2002, Warszawa, 2002.
[98] Rosiński M.: *„Zamrażanie wody w przewodach ogrzewania za pomocą urządzenia wirowego Ranque’a”*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, z. 18/1993, Warszawa, 1993.

[99] Rymarczyk Z.: *„Zastosowanie termografii do badania rozkładu temperatury na powierzchniach elementów instalacji centralnego ogrzewania", (rozprawa doktorska)*, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1999.
[100] Sparrow E. M., Eichorn E., Gregg J. L.: *„Combined Forced and Free Convection in a Boundary Layer Flow"*, Phys. Fluids nr 3, 1959.
[101] Sparrow E. M., Gregg J. L.: *„Similar solutions for free convectionfron a nonisothermal vertical plate."*, Trans. ASME, 80, 1958, pp. 379-386.
[102] Sparrow E. M., Gregg J. L.: *„The variable fluid-property problem in free convection."*, Trans. ASME, 80, 1958, pp. 879-886.
[103] Sparrow E. M., Gregg J. L.: *„Laminar free convection from a vertical flat plate with uniform surface heat flux."*, Trans. ASME, 78, 1956, pp. 435-440.
[104] Sparrow E. M., Gregg J. L.: *„Laminar free convection heat transfer from the outer surface of a vertical circular cylinder."*, Trans. ASME, 78, 1956, pp. 1823.
[105] Squire H. B.: *„Modern developments in fluid dynamics"*, Oxford Univ. Press, New York, 1938.
[106] Staniszewski B.: *„Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne."*, PWN, Warszawa, 1980.
[107] Stephan K., Mayinger F.: *„Thermodynamik, Grundlagen und technische Anwendungen"*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[108] Szczechowiak E. (red.): *„Energooszczędne układy zaopatrzenia budynków w ciepło. Budowa i eksploatacja."*, Envirotech, Poznań, 1994.
[109] Szuster A., Utrysko B.: *„Hydraulika i podstawy hydromechaniki"*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1986.
[110] Szymański W.: *„Dostosowanie instalacji centralnego ogrzewania do rzeczywistego zapotrzebowania ciepła"*. Rynek Instalacyjny nr 3, 1998.
[111] Touloukian Y. S., Hawkins G. A., Jakob M.: *„Heat transfer by free convection from heated vertical surfaces to liquids."*, Trans. ASME, 70, 1948, pp. 13-23.
[112] Valusamy K.: *„Transient natural convection over a heat ganerating vertical cylinder."*, Int. J. Heat Mass Transfer, 35, 1992, pp. 1293-1306.
[113] Warner C. Y., Aparci V. S.: *„An experimental investigation of turbulent natural convection in air at low pressure rof a vertical heated flat plate."*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 1968, pp. 397.
[114] Wereszczyński P.: *„Audytor c.o. wersja 3.0. Podręcznik użytkownika."*, NAPE, Warszawa, 1999.
[115] White F. M.: *„Heat and mass transfer"*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1988.
[116] Wiśniewski S., Wiśniewski T. S.: *„Wymiana Ciepła"*, WNT, Warszawa, 1997.
[117] Wolfersdorf J., Hoecker R., Sattelmayer T., Trans. ASME, J. Heat Transfer, 115, 1993, pp. 319-324.
[118] Ziołkowski Z. (red.): *„Przenoszenie pędu ciepła i masy"*, Skrypty Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1973.