

## Czym zajmuje się fizyka?

Zapraszamy na wspólną wyprawę w świat fizyki. Pokażemy w niej, że otaczające nas przedmioty i zachodzące zjawiska oglądane przez pryzmat fizyki są ciekawsze i podporządkowane logicznym prawom. Spojrzymy również na nowe, rozwijające się szybko obszary fizyki, które odkrywają przed człowiekiem nieznane dotąd możliwości.



*Rys. 0.0.1. Maszyny proste - dźwignia i koło w pracach konstrukcyjnych przed dwoma wiekami.*

Umiejętne wykorzystanie praw fizyki stanowi podstawę rozwoju technicznego. Już od dawna prawa te wykorzystywane były bardzo zręcznie (patrz obok). Dowody tego podziwiamy we wspaniałych budowlach skonstruowanych przed wiekami.

Postęp techniczny wynika bezpośrednio z rozwoju fizyki. Energia elektryczna, telefony komórkowe, płyty kompaktowe, samoloty, statki kosmiczne, nowoczesne metody radioterapii, nanotechnologie - wszystko to opiera się na odkryciach z dziedziny fizyki.



*Fot. 0.0.1. Podbój kosmosu byłby niemożliwy bez wykorzystania wiedzy ze wszystkich niemalże działów fizyki. [WiŻ, Nr7,1999r.]*

### **Właśnie dlatego fizyka stanowi jeden z pierwszych przedmiotów nauczania na Politechnice.**

Nauka fizyki poprzedzona jest kursem matematyki, bowiem matematyka stanowi język i narzędzie fizyki. Z kolei, prawa fizyki wykorzystywane są w innych naukach przyrodniczych, w zastosowaniach technicznych, a nawet w socjologii i ekonomii.

### **Fizyka zajmuje się badaniem struktury i własności materii oraz zjawisk zachodzących w przyrodzie.**

W zjawiskach fizycznych demonstrują się własności materii wynikające z jej struktury, fizyka zaś formułuje prawa, które opisują przebieg tych zjawisk w czasie i przestrzeni.

Wszystko, co wokół nas dzieje się w czasie i przestrzeni stanowi przedmiot naszej obserwacji i analizy zmierzającej do zrozumienia otaczającego nas świata. Różnorodność zachodzących zjawisk sprawia, że dlatego nie wszystkie z nich możemy obserwować bezpośrednio. Ich

rozpiętość przestrzenna i czasowa wykracza poza możliwości naszych oczu i czas życia człowieka.

### Skala przestrzenno-czasowa zjawisk fizycznych

Dla przedstawienia skali w jakiej zachodzą zjawiska fizyczne popatrzmy na zakres w jakim mieszczą się podstawowe wielkości charakteryzujące przebieg zjawisk - czas i przestrzeń. Podobny przegląd można byłoby zrobić dla wielu innych wielkości jak, masa, temperatura, ciśnienie itp.

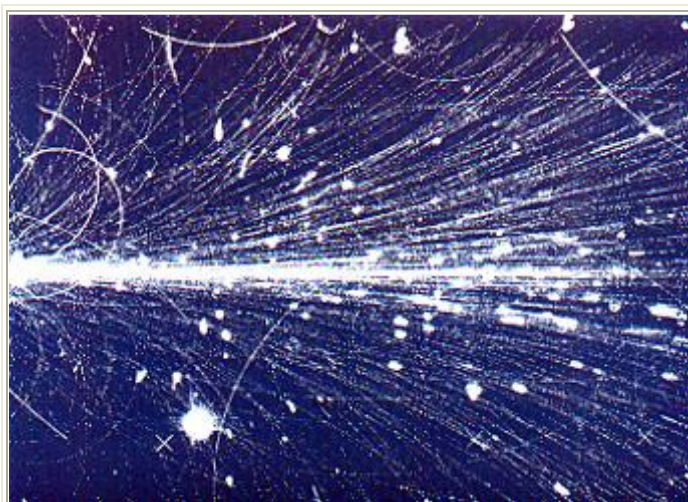


**Fot. 0.1.1.** *Odległość do tej galaktyki, to około 100 milionów lat świetlnych, czyli ok.  $10^{21}$  km*

Zacznijmy od charakterystycznych rozmiarów w skali makroskopowej. Wymieńmy (w kilometrach) przybliżone wartości kilku z nich: długość równika - 40 tysięcy, odległość do Księżyca - 384 tysiące, odległość do Słońca - 150 milionów, odległość do najbliższych gwiazd,  $4 \cdot 10^{13}$ , promień dostępnej do obserwacji części Wszechświata -  $1.5 \cdot 10^{23}$  kilometra.

Popatrzmy też na skalę czasu wyrażoną w latach: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi - 1/366, okres obrotu Ziemi wokół Słońca 1, okres obrotu Słońca wokół środka Galaktyki - 240 milionów, wiek Ziemi - 4.6 miliarda, wiek Wszechświata - około 15 miliardów.

Wyberzmy się w drugą "podróż Guliwera" tym razem w zakres rozmiarów i czasów mikroskopowych.



**Fot. 0.1.2.** *Cząstki wyemitowane w zderzeniu jąder atomowych. Zderzenie trwało około  $10^{-23}$  sekundy.*

Wymieńmy (w metrach) rzędy wielkości kilku typowych rozmiarów : grubość włosa -  $10^{-4}$ , średnica wirusa ospy -  $10^{-7}$ , promień atomu -  $10^{-9}$ , promień jądra atomowego -  $10^{-14}$ , rozmiar elektronu - poniżej  $10^{-18}$ .

Zróbmy to samo dla typowych wartości czasów wyrażonych w sekundach: mrugnięcie okiem - 0.15, błysk lampy błyskowej - 0.001, czas lotu elektronu w kineskopie -  $10^{-8}$ , najkrótsze błyski laserowe -  $10^{-15}$ , czas zderzeń jądrowych -  $10^{-23}$  sekundy.

Pokazaliśmy tu przykłady rozpiętości obiektów i zjawisk fizycznych w czasie i przestrzeni. Te największe stanowią domenę astronomii, te najmniejsze - fizyki cząstek elementarnych. Nie bez powodu wybraliśmy te dwie skrajności. Demonstrują one bowiem cechę, którą w pierwszej lekcji naszego kursu chcemy bardzo mocno podkreślić, mianowicie - **jedność fizyki**. Właśnie badania w dziedzinie cząstek elementarnych mogą w zasadniczy sposób przyczynić się do zrozumienia wielu zagadnień dotyczących ewolucji Wszechświata poczynając od pierwszych chwil po Wielkim Wybuchu. Jedność fizyki oznacza również uniwersalność praw fizycznych. Wielokrotnie w czasie naszego kursu będziemy to jeszcze podkreślać.

Uzyskiwanie informacji nieosiągalnej bezpośrednio wymaga zarówno rozwoju metod badawczych jak i urządzeń pomiarowych o coraz to większej skali złożoności. Rozwój środków komunikacji i telekomunikacji a także wzrost kosztów budowanych urządzeń sprawia, że coraz częściej prace w dziedzinie fizyki doświadczalnej łączą wiele laboratoriów z różnych krajów świata. Przykładem może być międzynarodowa organizacja "European Southern Observatory", która swe laboratoria pomiarowe zbudowała w górskich miejscowościach Chile: Paranal i La Silla. Laboratoria te, to cała sieć teleskopów, zaś uzyskiwane rezultaty pomiarów opracowywane są w wielu krajach europejskich.



*Fot.1.4. Fragment obserwatorium w La Silla. Laboratorium posiada 14 teleskopów optycznych i 15-metrowy radioteleskop dla sub-milimetrycznej długości fal. Więcej informacji można znaleźć pod adresem: <http://www.eso.org>*

Jest może paradoksalne, ale badanie najmniejszych składników materii - cząstek elementarnych - wymaga konstruowania największych urządzeń pomiarowych, a eksperymenty realizowane są przez zespoły złożone z tysięcy specjalistów z wielu krajów. Największym w świecie ośrodkiem fizyki cząstek elementarnych jest **CERN** (European Laboratory for Particle Physics). Dla ogarnięcia rozmiarów znajdującego się tam kompleksu pomiarowego niezbędne jest - zdjęcie lotnicze.

### **Wielkości fizyczne i ich jednostki**

**Przygotujmy sobie warsztat pracy.** Badane zjawiska fizyczne opisywać będziemy za pomocą **wielkości fizycznych** wyrażających w sposób ilościowy własności materii i zjawisk. Wielkościom fizycznym przypisujemy liczby zwane ich wartościami.

Wyróżniamy kilka typów wielkości fizycznych.

**Wielkości skalarne** są najprostsze i wyrażane są ilościowo jedną liczbą. Do skalarnych wielkości fizycznych zaliczamy np. masę, czas, temperaturę, potencjał elektryczny.

**Wielkości wektorowe** wyrażamy za pomocą  $n$  liczb ustawionych w określonej kolejności, czyli uporządkowanych. Liczby te nazywamy składowymi wektora. Liczba  $n$  odpowiada wymiarowi przestrzeni, w której prowadzimy analizę badanego zjawiska. Niekoniecznie musi to być przestrzeń trójwymiarowa. Jeśli badane zjawisko z założenia zachodzi w płaszczyźnie, analiza nasza może ograniczyć się do dwóch wymiarów, jeśli ruch odbywa się wzdłuż linii prostej - do jednego. W tzw. mechanice relatywistycznej analizę prowadzić będziemy w przestrzeni czterowymiarowej zwanej czasoprzestrzenią, a odpowiadające tej przestrzeni wektory nazywać będziemy czterowektorami. Pełne określenie wielkości wektorowej wymaga podania długości, kierunku i zwrotu wektora. Długość wektora określa wartość wielkości wektorowej. Do wielkości wektorowych zaliczamy np. prędkość, przyspieszenie, siłę, natężenie pola elektrycznego i magnetycznego, pęd, moment pędu itd.

**Wielkości tensorowe** stosujemy do badania ośrodków i zjawisk o cechach anizotropowych czyli takich, których własności zależą od kierunku w przestrzeni. Przedstawiamy je za pomocą tablicy liczb, które zapisujemy w postaci macierzy. Za pomocą tensorów opisujemy na przykład własności kryształów i ośrodków ciągłych. Takie wielkości jak przewodność elektryczna, przenikalność elektryczna i magnetyczna zależą od kierunku względem osi krystalograficznych w kryształach - mają więc charakter tensorowy.

Wielkości fizyczne wyrażamy ilościowo w postaci liczb, które informują ile razy wynik pomiaru jest większy, bądź mniejszy, od wartości przyjętej umownie za jednostkę. Zawsze więc podając wartość dowolnej wielkości fizycznej musimy jednoznacznie określić w jakich jednostkach wielkość ta jest wyrażona. Definicje i prawa fizyczne wiążą ze sobą różne wielkości, co umożliwia wyrażenie jednej wielkości za pomocą innych. Okazuje się, że można określić zestaw kilku podstawowych wielkości fizycznych i za ich pomocą wyrazić inne. Ułatwia to bardzo działania na jednostkach przy opisie ilościowym zjawisk fizycznych.

W Polsce stosujemy **Międzynarodowy Układ Jednostek, "SI"**. Podstawowymi jednostkami tego układu są: jednostka długości (metr), masy (kilogram) i czasu (sekunda). Oprócz nich, za podstawowe uważa się jeszcze jednostki natężenia prądu, światłości, temperatury bezwzględnej oraz ilości materii.

Poniżej wymienione są podstawowe jednostki układu SI. Podajemy jakiej wielkości jednostka dotyczy, jej nazwę i oznaczenie.

wielkość fizyczna	nazwa jednostki	oznaczenie
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
natężenie prądu	amper	A
temperatura bezwzględna	kelwin	K
światłość	kandela	cd
ilość materii	mol	

Kilka bliższych informacji o jednostkach podstawowych.

**Jednostka długości - Metr** jest to długość drogi, którą światło przebywa w próżni w czasie równym **1/299792458** sekundy.

**Jednostka masy - Kilogram** jest to masa wzorca wykonanego ze stopu platyny i irydu (stop bardzo twardy i odporny na korozję) i przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wąg w Sèvres koło Paryża. Warto dodać, że jest to w przybliżeniu masa jednego litra czystej wody w temperaturze 4°C.

**Jednostka czasu - Sekunda** jest to przedział czasu równy 9 192 631 770 okresom promieniowania emitowanego przy przejściu pomiędzy dwoma nadsztylnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu  $^{133}\text{Cs}$ .

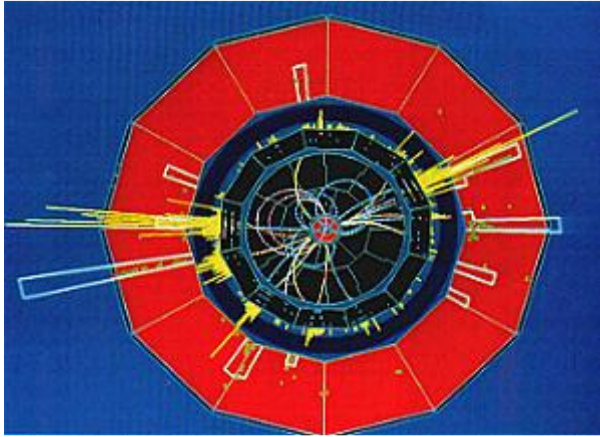
Jednostki innych wielkości fizycznych, to **jednostki pochodne**. Tworzymy je wykorzystując wzory definiujące wielkości fizyczne lub wyrażające prawa fizyki, które wiążą te jednostki z jednostkami podstawowymi; dla przykładu: prędkość to stosunek długości drogi do czasu, więc jednostką prędkości w układzie SI jest metr na sekundę.

Niekiedy używamy jednostek jednej wielkości dla wyrażenia innej. Dla przykładu, odległość do gwiazd wyraża się często w latach świetlnych. W tym przypadku do określenia długości użyliśmy jednostki czasu wykorzystując znany związek pomiędzy drogą, prędkością i czasem  $s = v \cdot t$  gdzie prędkością jest prędkość światła. Inny przykład, to wyrażanie masy w jednostkach energii wykorzystując słynny wzór Einsteina  $E = m \cdot c^2$ . Masę cząstek elementarnych wyrażamy zazwyczaj w megaelektronowoltach ( $MeV$ ). Znając wartość prędkości światła i masę w megaelektronowoltach, nietrudno jednak wyrazić ją także w kilogramach. Będzie to oczywiście wartość bardzo mała.

Zestawienie podstawowych i pochodnych jednostek układu SI, dla wielkości fizycznych omawianych w tym kursie, zawiera **INDEX**.



**Fot.1.5.** Schemat rozmieszczenia pierścieni akceleryjnych w laboratorium CERN na terytorium Szwajcarii i Francji. W pierścieniach tych przyspieszane są cząstki i jądra atomowe do prędkości bardzo bliskich prędkości światła. Same pierścienie znajdują się kilkadziesiąt metrów pod ziemią. Długość największego z nich, to 27 km. (CERN Courier 39/8, 1999)



**Fot.1.6.** Zderzenie  $e+e-$  zarejestrowane w eksperymencie ALEPH w CERN

Jako przykład metody pomiarowej pokazujemy na **Fot.1.6** rezultat wizualizacji komputerowej zarejestrowanej w układzie pomiarowym eksperymencie ALEPH odkrytej niedawno cząstki, zwanej bozonem pośredniczącym **Z**. Badany proces trwa ok.  $10^{-23}$  sekundy. Cząstki tej nie możemy obserwować bezpośrednio, ale identyfikujemy ją poprzez produkty rozpadu, co w końcowym rezultacie prowadzi do emisji obserwowalnych cząstek tworzących tzw. "wytryski" (ang. - jets) pokazane na ilustracji kolorem żółtym.

Oczywiście, każdy dział fizyki ma rozwinięte odpowiednie metody pomiarowe, które nie sposób tu prezentować szczegółowo. Przedstawiony przykład demonstruje jedną z metod, w której poznane już procesy wykorzystuje się do badania procesów nieznanych.

# Mechanika

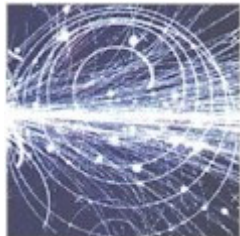
## 1. Zjawiska ruchu



**Ruch** należy do najczęściej obserwowanych zjawisk fizycznych. Z wieloma przejawami ruchu mamy do czynienia w naszym bezpośrednim otoczeniu; wiele innych możemy oglądać na ekranach odbiorników telewizyjnych. Jesteśmy świadomi także zarówno ruchu planet, gwiazd i galaktyk jak i ruchu molekuł, atomów i cząstek elementarnych pomimo, że nie możemy tych ruchów obserwować bezpośrednio. Ruch jest też odpowiedzialny za wiele zjawisk fizycznych, jak zjawiska termiczne, akustyczne, czy elektryczne.

*Fot. 1.1.1 Start wahadłowca "Columbia". Ruch ten jedynie krótki czas możemy obserwować gołym okiem, ale trajektoria tego ruchu wyznaczona jest bardzo precyzyjnie. (CERN Courier 39/7, 1999)*

Często ruch zachodzi z tak dużą prędkością i w tak krótkim czasie, że nie można obserwować okiem bezpośrednio jego przebiegu. Wówczas staramy się za pomocą odpowiednich przyrządów zarejestrować tor poruszającego się obiektu i z kształtu toru wnioskować o prędkości obiektu i czasie trwania ruchu.



*Fot. 1.1.2. Ten ruch cząstek elementarnych i jąder atomowych, których prędkości bliskie są prędkości światła, trwał ułamki milionowych części sekundy. Dla utrwalenia śladów takich ruchów stosujemy specjalne układy detekcyjne oraz komputerowe systemy wizualizacji. (CERN, Rap. Ann. 1986)*

W niektórych przypadkach ruch jest tak powolny, że wykorzystujemy inne efekty wywołane przez ruch, by wnioskować o jego istnieniu.



*Fot. 1.1.3. Rejestrowanie ruchu ciał niebieskich wymaga długiego czasu obserwacji. Na zdjęciu - Teleskop "Gemini" na Hawajach. Widoczne są ślady ruchu samochodów i ... gwiazd. (Cern Courier, 39/7, 1999)*

Ruch polega na zmianie wzajemnego położenia ciał. Zmiana ta odbywa się w czasie i przestrzeni. Opis ruchu, to znalezienie związków pomiędzy upływem czasu a zmianą

położenia ciał. Dla ilościowego opisu ruchu wprowadza się szereg pojęć i definicji. Wymieńmy najbardziej podstawowe:

- **Układ odniesienia** - to ciało lub zbiór ciał względem których opisujemy ruch innych ciał.
- **Punkt materialny** - to ciało, którego rozmiary w badanym ruchu można uznać za pomijalnie małe.
- **Ciało sztywne** - to takie ciało, które nie ulega odkształceniu w czasie rozpatrywanego ruchu.
- **Stan spoczynku** - względem danego układu odniesienia ma miejsce wtedy, kiedy ciało nie zmienia swego położenia względem tego układu.



*Fot.1.1..4. Ruch samolotu na trasie, to na ogół ruch postępowy.*

- **Ruch postępowy** -to ruch, w którym wszystkie punkty danego ciała przemieszczają się tak samo co do wartości i kierunku względem zadanego układu odniesienia.
- **Ruch jest prostoliniowy** - jeśli przemieszczenie to odbywa się wzdłuż linii prostej.



- **Ruch obrotowy** - ma miejsce, kiedy wszystkie punkty danego ciała poruszają się po okręgach, których środki znajdują się na jednej prostej. Prosta tą nazywa się **osią obrotu**.
- **Ruch jest płaski**, kiedy kierunek ruchu zmienia się, ale ruch zachodzi w jednej płaszczyźnie.



*Fot. 1.1..5.Ruch na karuzeli jest przykładem ruchu obrotowego.*

Kiedy wprowadzimy pojęcia układu współrzędnych i będziemy omawiać szczegółowo wybrane rodzaje ruchów, wprowadzimy bardziej precyzyjne ich definicje. Typowe przykłady ruchu postępowego i obrotowego ilustrują zdjęcia pokazane powyżej.

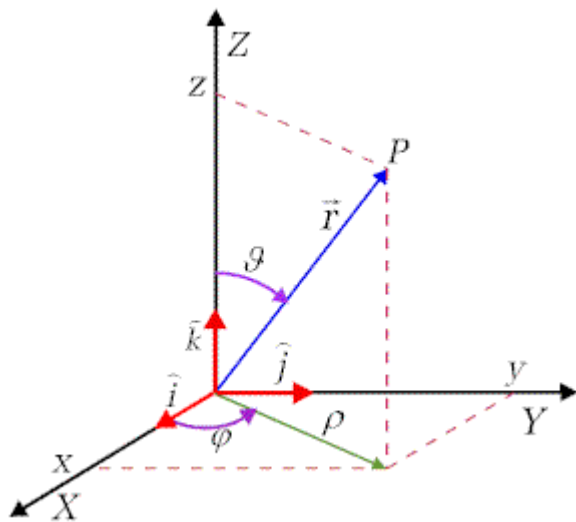
- Opis ruchu, w którym odpowiadamy na pytania "kiedy" i "gdzie" znajduje się ciało, czyli analizujemy ruch w kategoriach przestrzeni i czasu, nosi nazwę **kinematyki**. Kinematyczny opis ruchu nie zajmuje się więc przyczynami wywołującymi ruch.
- Badaniem wzajemnych oddziaływań wywołujących ruch ciał i analizą związków pomiędzy siłami działającymi na ciała a ich ruchem zajmuje się dział fizyki zwany **dynamiką**.

Nasze rozważania o ruchu zaczniemy od kinematyki punktu materialnego.



## 2. Układy współrzędnych i wektor położenia

Przy opisie ruchu posługujemy się pojęciem **układu współrzędnych**, który wiążemy z wybranym przez nas układem odniesienia. Opis ruchu polega na przyporządkowaniu danemu punktowi  $P$  zespołu liczb określających w każdej chwili czasu w jednoznaczny sposób jego położenie w przestrzeni oraz kierunek i wartość jego prędkości i przyspieszenia. Wybór układu odniesienia oraz odpowiedniego układu współrzędnych zależy od rodzaju opisywanego ruchu. Specyfika ruchu często sugeruje wybór odpowiedniego układu współrzędnych.



**Rys. 1.2.1.** Punkt  $P$  i jego współrzędne w przestrzeni trójwymiarowej.

Na Rys.1.2.1. pokazane są wielkości określające położenie punktu w przestrzeni trójwymiarowej za pomocą **wektora położenia**  $\vec{r}$  (zwanego też **promieniem wodzącym**). Początek tego wektora znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec w danym punkcie przestrzeni. Na rysunku kolorem niebieskim pokazany jest wektor położenia punktu  $P$ . Kolorem czerwonym zaznaczone są **wersory**, czyli wektory o jednostkowej długości, określające kierunki osi układu współrzędnych prostokątnych. Symbole  $\rho, \theta, \varphi$  omówione będą poniżej.

Więcej informacji o wektorach zawiera **INDEX** - przypomnienie wiadomości z matematyki ([wektory](#)).

### Układ współrzędnych prostokątnych (kartezjański)

Położenie ciała w układzie współrzędnych prostokątnych wyznaczone jest przez podanie trzech liczb określających współrzędne wektora położenia  $(x, y, z)$  względem początku układu  $(0,0,0)$  na trzech przecinających się w tym punkcie prostopadłych do siebie prostych zwanych osiami  $(X, Y, Z)$ . Układ jest prawoskrętny, kiedy obrót osi  $X$  w kierunku osi  $Y$  wyznacza kierunek osi  $Z$  zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. Pokazany na rysunku układ jest układem prawoskrętnym.

Wektor położenia w układzie prostokątnym jest więc sumą wektorową wersorów  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  pomnożonych przez odpowiadające im składowe promienia wodzącego:

$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k} \quad (1.2.1)$$

Długość wektora położenia jest liczbą dodatnią i wynosi

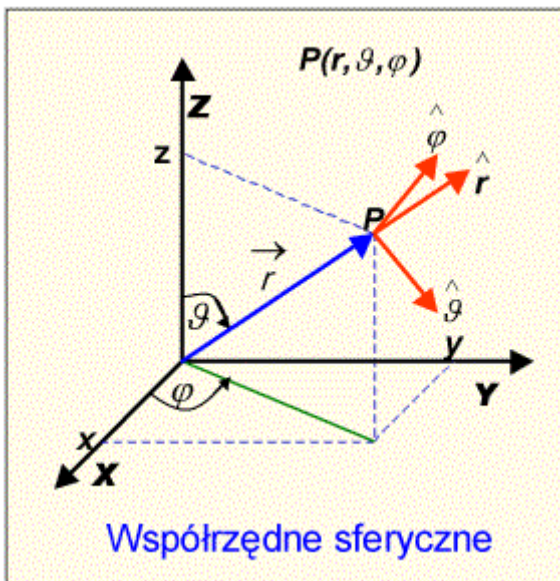
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2.2)$$

## Układ współrzędnych sferycznych

Położenie ciała określone jest tu przez podanie długości promienia wodzącego  $\vec{r}$  oraz dwóch kątów  $\vartheta$  i  $\varphi$ , jakie promień  $\vec{r}$  tworzy z osią  $Z$  i odpowiednio rzut promienia  $\vec{r}$  na płaszczyznę  $(X, Y)$  z osią  $X$ . Wersor współrzędnej  $\hat{r}$  skierowany jest zawsze wzdłuż promienia wodzącego, a wersory obu kątów skierowane są w strony określone przez aktualne kierunki ich przyrostów (patrz - Rys.1.2). Jest to istotna różnica pomiędzy układem sferycznym a prostokątnym, gdzie kierunki wersorów są na stałe związane z osiami układu współrzędnych

Wektor położenia w układzie sferycznym:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r} \quad (1.2.3)$$



Współrzędne w układzie prostokątnym wyrażone przez współrzędne sferyczne:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Współrzędne w układzie sferycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

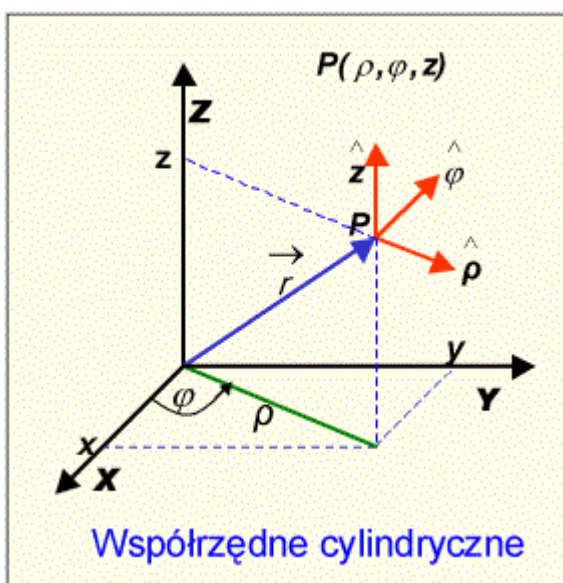
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

**Rys. 1.2.2.** Punkt  $P$  i jego położenie w układzie współrzędnych sferycznych.

Układ współrzędnych sferycznych będziemy stosować do opisu ruchu ciał wokół zadanego punktu w przestrzeni trójwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w przestrzeni mają symetrię sferyczną.

## Układ współrzędnych cylindrycznych (walcowy)

W układzie tym położenie ciała określone jest przez podanie długości rzutu promienia wodzącego na płaszczyznę  $(X, Y)$  oznaczonego jako  $\rho$ , kąta  $\varphi$  jaki tworzy rzut  $\rho$  z osią  $X$  oraz współrzędnej  $z$ . Wersor współrzędnej  $\rho$  skierowany jest zawsze wzdłuż kierunku rzutu promienia wodzącego na płaszczyznę  $(X, Y)$ , kierunek wersora kąta  $\varphi$  określony jest przez aktualny kierunek zmiany tego kąta, wersor współrzędnej  $z$  zachowuje stały kierunek, podobnie jak w układzie współrzędnych prostokątnych. (patrz Rys.1.3)



Wektor położenia w układzie współrzędnych cylindrycznych:

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{z} \quad (1.2.6)$$

Współrzędne w układzie prostokątnym wyrażone przez współrzędne cylindryczne:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \varphi \\ y &= \rho \cdot \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Współrzędne w układzie cylindrycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

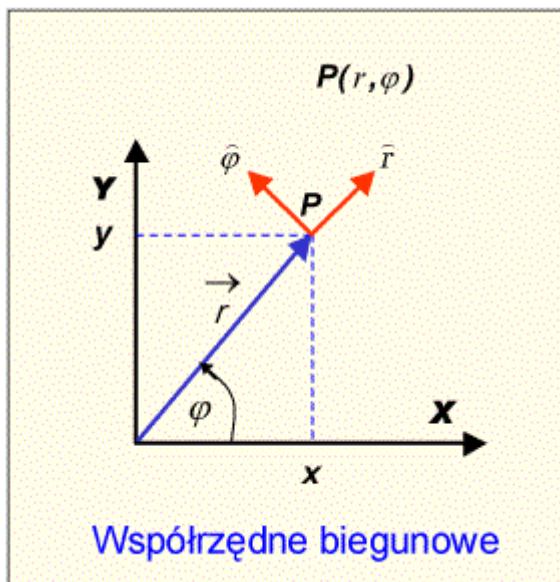
**Rys. 1.2.3.** Punkt  $P$  i jego położenie w układzie współrzędnych cylindrycznych.

Układ współrzędnych cylindrycznych będziemy stosować do opisu ruchu ciał wokół zadanej osi w przestrzeni trójwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w przestrzeni mają symetrię walcową.

## Układ współrzędnych biegunowych

Kiedy ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie nazywamy go ruchem płaskim. O tym, że ruch jest płaski decydują pewne czynniki fizyczne; powiemy więcej o tym w dalszej części kursu. Możemy zawsze tak dobrać osie układu współrzędnych, by ruch taki odbywał się w płaszczyźnie przez nas zadanej, np.  $(X, Y)$ . Ruch płaski możemy traktować jako szczególny przypadek ruchu przestrzennego, kiedy w układzie prostokątnym i cylindrycznym współrzędna  $z$  równa jest zero, a w układzie sferycznym kąt  $\vartheta$  równy jest  $\pi/1$ .

Do opisu ruchu płaskiego stosujemy często układ współrzędnych biegunowych. W układzie tym położenie punktu wyrażone jest przez dwie liczby: długość promienia wodzącego  $r$  i kąt obrotu  $\varphi$ , liczony względem osi  $X$ . Wersor promienia wodzącego skierowany jest wzdłuż jego kierunku; wersor kąta  $\varphi$  jest do niego prostopadły (patrz Rys.1.4)



Wektor położenia w układzie współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r} \quad (1.2.9)$$

Współrzędne w dwuwymiarowym układzie prostokątnym wyrażone przez współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Współrzędne w układzie biegunowym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

**Rys. 1.2.4.** Punkt  $P$  i jego położenie w układzie współrzędnych biegunowych.

Układ współrzędnych biegunowych będziemy stosować do opisu ruchu ciał wokół zadanego punktu w przestrzeni dwuwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w płaszczyźnie mają symetrię obrotową.

## 3. Prędkość

Wiemy już jak wyznaczyć położenie punktu materialnego w przestrzeni trójwymiarowej posługując się układem współrzędnych prostokątnych. Ruch - to jednak zmiana tego

położenia w czasie, co oznacza, że zarówno długość jak i kierunek wektora położenia są funkcją czasu  $t$ .

Zapiszemy to następująco:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k} \quad (1.3.1)$$

Podobnie zapisać możemy przyrost wektora położenia w zadanym przedziale czasu  $\Delta t$ .

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot \hat{i} + \Delta y \cdot \hat{j} + \Delta z \cdot \hat{k} \quad (1.3.2)$$

Zmianę położenia w jednostce czasu otrzymamy przez podzielenie przyrostu wektora położenia przez przyrost czasu:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (1.3.3)$$

Kiedy przyrost czasu zdąży do zera, iloraz różnicowy (1.3.3) przechodzi w pochodną wektora położenia względem czasu.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k} = \vec{v} \quad (1.3.4)$$

## Pochodna wektora położenia względem czasu

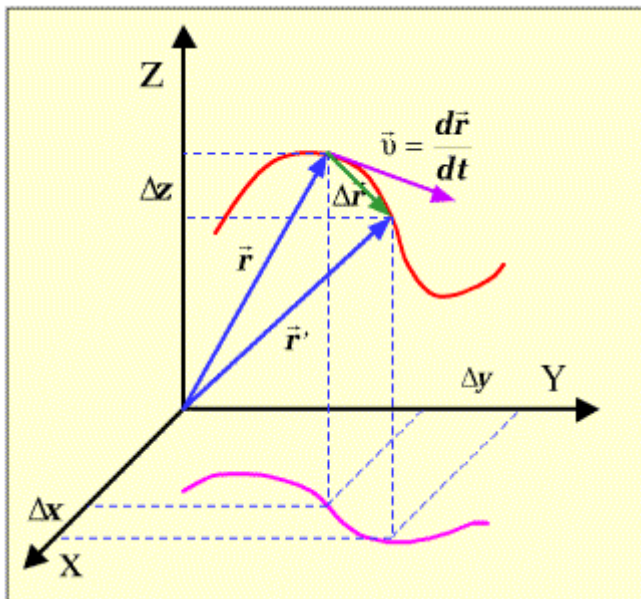
Pochodna wektora położenia względem czasu w zadanej chwili  $t$  nazywa się **prędkością chwilową** ciała

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	(1.3.5)
---------------------------------	---------

Z matematyki wiemy, że pochodna określa lokalną szybkość zmiany funkcji i wyznaczona jest przez styczną do funkcji w danym punkcie. Naszą funkcją jest położenie ciała, a zmiana tego położenia w czasie wyznacza tor ciała w przestrzeni. Oznacza to, że kierunek wektora prędkości chwilowej pokrywa się ze styczną do toru w danym punkcie, a jego zwrot wyznaczony jest przez znak przyrostu wektora położenia.

Na rysunku obok kolorem czerwonym pokazany jest przykładowy tor ciała w przestrzeni.

Rzut toru na płaszczyznę poziomą pokazany jest kolorem różowym. Kolorem niebieskim zaznaczone są promienie wodzące dla dwóch punktów na torze, a kolorem zielonym ich różnica, czyli przyrost wektora położenia.



Na osiach układu współrzędnych zaznaczone są jego składowe. Zmiana położenia odbywa się w czasie, a więc każdemu punktowi na torze odpowiada określony czas. Kiedy różnica czasu zmierza do zera wektory położenia zbliżają się do siebie, a iloraz przyrostu wektora położenia do przyrostu czasu zmierza do skończonej wartości, która jest właśnie prędkością chwilową ciała. Wektor prędkości zaznaczony jest kolorem fioletowym. Wektor ten jest styczny do toru ciała w każdym jego punkcie.

**Rys. 1.3.1.** Przykładowy tor ciała w przestrzeni.

Jednostką prędkości w układzie SI jest prędkość ciała poruszającego się ruchem jednostajnym, które w ciągu jednostki czasu (sekundy) przebywa jednostkę długości (metr). Jednostkę prędkości zapisujemy w postaci **1 m/s**.

### Składowe wektora prędkości

Wspominaliśmy już, że specyfika ruchu sugeruje wybór odpowiedniego układu współrzędnych. Kiedy analizujemy ruch pasażera pędzącego pociągu widać celowość zastosowania dwuwymiarowego układu prostokątnego i wybór osi wzdłuż i w poprzek kierunku ruchu pociągu. Kiedy jednak pociąg zakręca i jedzie po łuku będącym elementem okręgu, może okazać się przydatne wykonanie analizy w układzie biegunowym. Kiedy jeszcze dodatkowo pociąg pokonuje wzniesienie - wybór układu sferycznego lub cylindrycznego może być uzasadniony.

Zdefiniowany już wcześniej wektor prędkości w układzie współrzędnych prostokątnych możemy zapisać w postaci sumy jego składowych jako:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{v_x}_{\vec{v}_x} \cdot \underbrace{\vec{i}}_{\vec{i}} + \underbrace{v_y}_{\vec{v}_y} \cdot \underbrace{\vec{j}}_{\vec{j}} + \underbrace{v_z}_{\vec{v}_z} \cdot \underbrace{\vec{k}}_{\vec{k}} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \quad (1.3.6)$$

gdzie współrzędne wektora prędkości wynoszą

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.3.7)$$

Forma tego zapisu jest analogiczna do zapisu wektora położenia, wzór (1.2.1)

Wartość bezwzględna wektora prędkości wyrażoną przez jej współrzędne w układzie kartezjańskim zapiszemy analogicznie do wzoru (1.2.2)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.3.8)$$

Zwróćmy uwagę, że w życiu codziennym właśnie wartość bezwzględną (moduł) prędkości nazywamy "prędkością" lub "szybkością" nie interesując się na ogół kierunkiem tego wektora.

#### 4. Przemieszczenie i droga

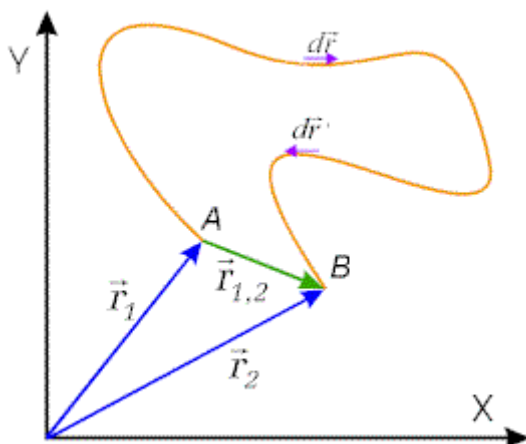
Wzór (1.3.5) wyrażający definicję prędkości łączy trzy podstawowe pojęcia fizyki ruchu: czas, przemieszczenie i prędkość. Zapiszmy to w następujący sposób

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt \quad (1.4.1)$$

Wzór ten wyraża różniczkę wektora położenia, czyli przemieszczenie jako iloczyn prędkości chwilowej i przyrostu czasu. Konsekwentnie, przemieszczenie ciała w skończonym przedziale czasu  $t=t_2-t_1$  wyrazić można w postaci całki oznaczonej

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \quad (1.4.2)$$

Pamiętamy, że całka jest sumą nieskończonej liczby przyrostów stanowiących wyrażenie podcałkowe. W naszym przypadku jest to suma wektorowa elementarnych przemieszczeń wyrażonych wzorem (1.4.1).



Załączony rysunek ilustruje te zależności. Przemieszczenie pomiędzy punktami A i B odbywało się po skomplikowanej i długiej drodze (pokazanej kolorem pomarańczowym), chociaż przemieszczenie końcowe jest niewielkie, bowiem punkt B położony jest w pobliżu punktu A. Jest to rezultatem obliczenia całki jako wektorowej sumy przemieszczeń. Na rysunku pokazane są kolorem fioletowym dwa przemieszczenia, które kompensują się wzajemnie przy obliczaniu wektorowej sumy przyrostów.

*Rys. 1.4.1. Przemieszczenie i droga*

Kiedy interesuje nas długość przebytej drogi musimy obliczać sumę długości, czyli bezwzględnych wartości przemieszczeń elementarnych. Czynimy to zamieniając wektor prędkości we wzorze (1.4.1) jego wartością bezwzględną.

Droga przebyta w czasie  $t$  wyrażona jest więc wartością skalarną, czyli liczbą określoną wzorem

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (1.4.3)$$

Zauważmy, że kiedy prędkość w danym przedziale czasu nie zmienia swej wartości bezwzględnej uzyskujemy znany ze szkoły wzór

$$s = v \cdot t \quad (1.4.4)$$

*Jednostką przemieszczenia i drogi w układzie SI jest jednostka długości (metr) co zapisujemy w postaci **1 m**.*

## 5. Przyspieszenie i jego składowe: normalna i styczna

Zdefiniowaliśmy prędkość jako granicę stosunku przyrostu wektora położenia do przedziału czasu w którym ten przyrost nastąpił. Podobnie, granicę stosunku przyrostu wektora prędkości do czasu, w którym ten przyrost nastąpił nazywamy **przyspieszeniem chwilowym** lub krótko - przyspieszeniem. Przyspieszenie jest więc pochodną wektora prędkości względem czasu, a co za tym idzie - drugą pochodną względem czasu wektora położenia. W układzie współrzędnych prostokątnych zapiszemy to w następujący sposób.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a} \quad (1.5.1)$$

Zmiana wektora prędkości może dotyczyć zarówno bezwzględnej wartości jak i kierunku. Pamiętając, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru poruszającego się ciała możemy określić jego wartość bezwzględną oraz jego kierunek w postaci zapisu

$$\vec{v} = v \cdot \hat{\tau} \quad (1.5.2)$$

gdzie  $v$  jest wartością bezwzględną prędkości, a  $\hat{\tau}$  jest wersorem stycznym do toru w danym punkcie. Wektor przyspieszenia

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.5.3)$$

możemy więc, wykorzystując zapis (1.5.2), wyrazić w formie



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \hat{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} + v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} \quad (1.5.4)$$

Pierwszy składnik w prawej części wzoru, to składowa przyspieszenia styczna do toru. Składowa ta jest tym większa im większa jest zmiana bezwzględnej wartości prędkości w czasie. Drugi składnik - składowa normalna (czyli prostopadła) odpowiedzialny jest za zmianę kierunku wektora prędkości. Jest on tym większy im większa jest prędkość ciała i im szybciej zmienia ono kierunek swego ruchu. Miarą zmiany kierunku ruchu ciała jest krzywizna jego toru wyrażana zwykle poprzez promień krzywizny, który określany jest jako promień okręgu stycznego do toru na małym odcinku w pobliżu danego punktu. Jeżeli długość tego odcinka zdąży do zera, mówimy o promieniu krzywizny w danym punkcie toru. Promień ten jest stały dla ruchu po okręgu i jest nieskończony dla ruchu po prostej.

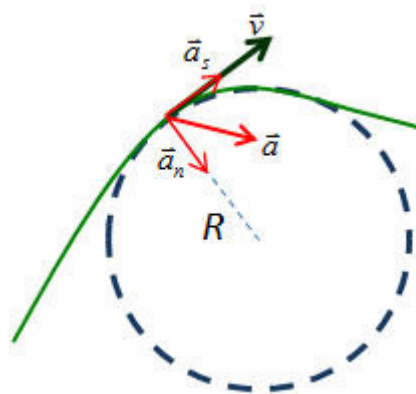
Można wykazać, że składowa normalna przyspieszenia wyraża się wzorem  $a_n = \frac{v^2}{R}$ . Wektor przyspieszenia jest sumą składowej stycznej i normalnej:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \hat{n} \quad (1.5.5)$$

W ten sposób przedstawiliśmy przyspieszenie w postaci dwóch prostopadłych do siebie składowych, których wartości bezwzględne wynoszą

$a_s = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.5.6)$
--

Pierwsza skierowana zawsze zgodnie z aktualnym kierunkiem wektora prędkości, czyli styczna do toru w danym punkcie, nosi nazwę **składowej stycznej**, druga - skierowana do środka okręgu określającego aktualny promień krzywizny toru nosi nazwę **składowej normalnej** przyspieszenia i nazywana jest też **przyspieszeniem dośrodkowym**. Zauważmy, że ciało porusza się ruchem przyspieszonym także wtedy, kiedy bezwzględna wartość jego prędkości nie zmienia się, ale kiedy porusza się ruchem krzywoliniowym. Szczególnym przypadkiem takiego ruchu jest ruch po okręgu.



Na rysunku obok przedstawiony jest kolorem zielonym przykładowy tor samochodu na zakręcie drogi. Promień toru wynosi  $R$ . Przyspieszenie samochodu można rozłożyć na dwie składowe:

1.  $\vec{a}_s$  - składowa styczna powoduje zmianę **wartości** prędkości. Pojawia się, gdy kierowca naciska na pedał gazu lub hamulca.
1.  $\vec{a}_n$  - składowa normalna powoduje zmianę **kierunku** prędkości. Pojawia się, gdy kierowca kręci kierownicą.

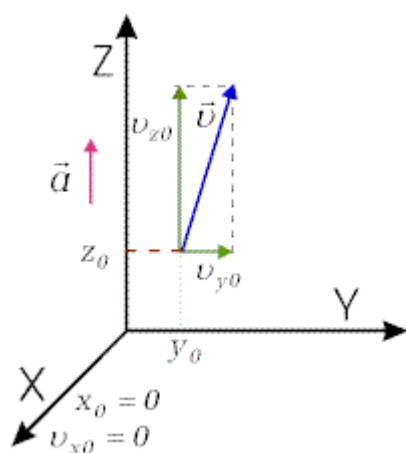
**Rys. 1.5.1.** Przykładowy tor samochodu na zakręcie drogi

Jednostką przyspieszenia w układzie SI jest przyspieszenie ciała poruszającego się ruchem jednostajnym, którego prędkość w ciągu jednostki czasu (sekundy) przyrasta o jednostkę prędkości (metr na sekundę). Jednostkę przyspieszenia zapisujemy w postaci  $b > 1 \text{ m/s}^2$ .

## 6. Przykład ruchu - rzut ukośny

Ruch, w którym przyspieszenie zachowuje stałą wartość co do wartości bezwzględnej i kierunku nazywamy ruchem jednostajnie zmiennym.

Z ruchami tego typu spotykamy się codziennie, bowiem są to wszelkie ruchy odbywające się z przyspieszeniem ziemskim. Tak poruszają się spadające lub rzucone przedmioty, takim ruchem (choć o innej wartości przyspieszenia) poruszają się zjeżdżające po zboczu góry o stałym nachyleniu pojazdy, gdy nie występuje hamowanie i opory ruchu są pomijalnie małe, tak porusza się kula karabinowa lub strzała z łuku, jeśli także opory powietrza można zaniedbać, tak porusza się strumień wody wyrzucany pod ciśnieniem. W dalszej części kursu fizyki zobaczymy, że tak również poruszają się ładunki elektryczne w jednorodnym polu elektrycznym. Znajduje to wielorakie zastosowania, np. w konstrukcji kineskopów telewizyjnych oraz akceleratorów cząstek i jąder atomowych stosowanych w badaniach naukowych, przemyśle i medycynie.



**Rys.1.6.1.** Relacje kinematyczne w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Kierunek wektora przyspieszenia może być dowolny. Jedyne dla sprecyzowania naszych dalszych rozważań przyjmijmy, że przyspieszenie skierowane jest wzdłuż osi Z. (Patrz - rysunek) W momencie, kiedy rozpoczynamy obserwację ruchu, ciało przez nas obserwowane może już poruszać się, czyli można mu przypisać pewien wektor prędkości początkowej. Wreszcie, ciało w tym momencie znajduje się w określonym punkcie przestrzeni, który określamy przez podanie jego współrzędnych. Dwa wektory: przyspieszenia i prędkości początkowej wyznaczają płaszczyznę ruchu. Możemy tak dobrać kierunki osi układu współrzędnych, by była to np. płaszczyzna (Y,Z). Wówczas, składowe prędkości i położenia wzdłuż osi X w początkowej chwili  $t=0$ , równe są zeru.

Warunki początkowe ruchu (dla  $t = 0$ ) w układzie współrzędnych prostokątnych określamy w następujący sposób

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \mathbf{0} \cdot \vec{i} + \mathbf{0} \cdot \vec{j} + a_{z0} \cdot \vec{k} = \{0, 0, a_{z0}\} \\
\vec{v} &= \mathbf{0} \cdot \vec{i} + v_{y0} \cdot \vec{j} + v_{z0} \cdot \vec{k} = \{0, v_{y0}, v_{z0}\} \\
\vec{r} &= \mathbf{0} \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k} = \{0, y_0, z_0\}
\end{aligned}
\tag{1.6.1}$$

W rozpatrywanym przez nas ruchu wektor przyspieszenia nie zmienia się w czasie. Pamiętając, że przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu, możemy wyznaczyć prędkość wykonując operację odwrotną do różniczkowania, czyli całkując przyspieszenie po czasie. Zapiszmy te relacje dla poszczególnych składowych

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x \cdot dt = \mathbf{0} \cdot dt \Rightarrow v_x = \int \mathbf{0} \cdot dt = \mathbf{0} + C_{vx} = C_{vx}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow dv_y = a_y \cdot dt = \mathbf{0} \cdot dt \Rightarrow v_y = \int \mathbf{0} \cdot dt = \mathbf{0} + C_{vy} = C_{vy} \tag{1.6.2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow dv_z = a_z \cdot dt = a_{z0} \cdot dt \Rightarrow v_z = \int a_{z0} \cdot dt = a_{z0} \cdot t + C_{vz}$$

Jak wiemy z matematyki, każda z całek nieoznaczonych określona jest z dokładnością do stałej całkowania. Stałe te oznaczyliśmy literą C, z odpowiednim indeksem. Są one niezależne od czasu, możemy więc wyznaczyć je w oparciu o wartości składowych prędkości dla  $t=0$ , (wzór (1.6.2)) otrzymując

$$C_{vx} = \mathbf{0}, \quad C_{vy} = v_{y0}, \quad C_{vz} = v_{z0} \tag{1.6.3}$$

W ten sposób mamy wyznaczone trzy składowe wektora prędkości ciała

$$v_x = \mathbf{0}, \quad v_y = v_{y0}, \quad v_z = a_{z0} \cdot t + v_{z0} \tag{1.6.4}$$

Podobnie wyznaczamy współrzędne wektora położenia pamiętając, że prędkość jest pochodną położenia względem czasu. Uzyskujemy w ten sposób wartości współrzędnych w funkcji czasu.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x \cdot dt = \mathbf{0} \cdot dt \Rightarrow x = \int \mathbf{0} \cdot dt = \mathbf{0} + C_x = \mathbf{0} \tag{1.6.5}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y \cdot dt = v_{y0} \cdot dt \Rightarrow y = \int v_{y0} \cdot dt = v_{y0} \cdot t + y_0 \quad (1.6.6)$$

$$\begin{aligned} v_z = \frac{dz}{dt} &\Rightarrow dz = v_z \cdot dt = (a_{z0} \cdot t + v_{z0}) \cdot dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \int (a_{z0} \cdot t + v_{z0}) \cdot dt = a_{z0} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{z0} \cdot t + z_0 \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

W ten sposób mamy wyznaczone wektory prędkości i położenia dla dowolnej chwili naszego ruchu. Zależności wektorów położenia od czasu noszą nazwę **równań ruchu**. Wzory (1.6.5-1.6.7) stanowią więc rozwiązanie równań ruchu dla przypadku ruchu jednostajnie zmiennego. Wzory te są też **równaniami toru** poruszającego się ciała zapisanymi w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas. Zauważamy, że w naszym przypadku ruch odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie (Y,Z). Ruch taki nazywamy **ruchem płaskim**. Możemy łatwo zapisać równanie toru ciała w naszym ruchu w postaci bezpośredniej zależności  $z = f(y)$ . Zapis taki uzyskamy eliminując czas z zależności (1.6.6), (1.6.7). Z równania (1.6.6) wyznaczmy czas

$$t = \frac{y - y_0}{v_{y0}} \quad (1.6.8)$$

i wstawiamy do równania (1.6.7) otrzymując

$$z = a_{z0} \cdot t^2 / 2 + v_{z0} \cdot t + z_0 = \left( \frac{a_{z0}}{2 \cdot v_{y0}^2} \right) \cdot (y - y_0)^2 + \left( \frac{v_{z0}}{v_{y0}} \right) \cdot (y - y_0) + z_0 \quad (1.6.9)$$

W uzyskanej zależności bez trudu rozpoznajemy równanie paraboli. Równanie to możemy przepisać też w postaci

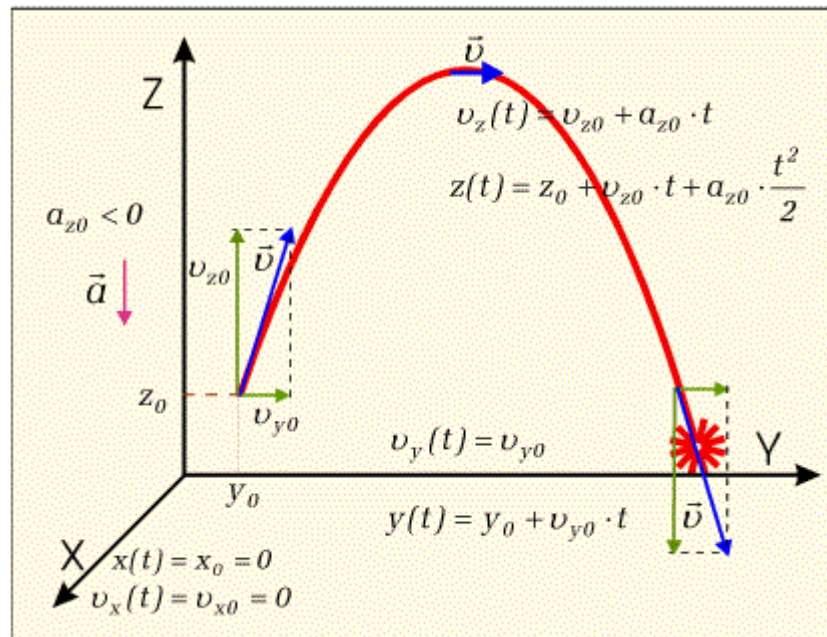
$$z = \left( \frac{a_{z0}}{2 \cdot (v_0 \cdot \cos \theta_0)^2} \right) \cdot \Delta y^2 + \operatorname{tg} \theta_0 \cdot \Delta y + z_0 \quad (1.6.10)$$

gdzie

$$\Delta y = y - y_0, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{v_{z0}}{v_{y0}}, \quad \cos \theta_0 = \frac{v_{y0}}{\sqrt{v_{y0}^2 + v_{z0}^2}} = \frac{v_{y0}}{v_0} \quad (1.6.11)$$

Przyrost współrzędnej  $y$  oznaczyliśmy tu przez  $\Delta y$  i wprowadziliśmy kąt nachylenia  $\theta$  wektora prędkości  $v_0$  względem osi  $Y$ .

Rys. 1.6.2. przedstawia graficzną prezentację rozpatrywanego przez nas ruchu z wyszczególnieniem podstawowych symboli i zależności. W tym przypadku wektor przyspieszenia skierowany jest w stronę przeciwną niż składowa  $v_z$  wektora prędkości. Tor na rysunku odpowiada znanemu z kursu szkolnego przypadkowi rzutu ukośnego i może być uznany np. za tor pocisku armatniego w idealnym przypadku braku oporów ruchu.



*Rys. 1.6.2. Kinematyka rzutu ukośnego*

### Ilustracja graficzna - test

Wszystko, co opisaliśmy za pomocą definicji i wzorów, znajduje żywe odzwierciedlenie w otaczającej nas rzeczywistości. Cały pęk "rzutów ukośnych" pokazany jest na stronie tytułowej naszego kursu. Teraz zaś Ty sam sprawdź czy rozumiesz znaczenie poszczególnych pojęć i wzorów

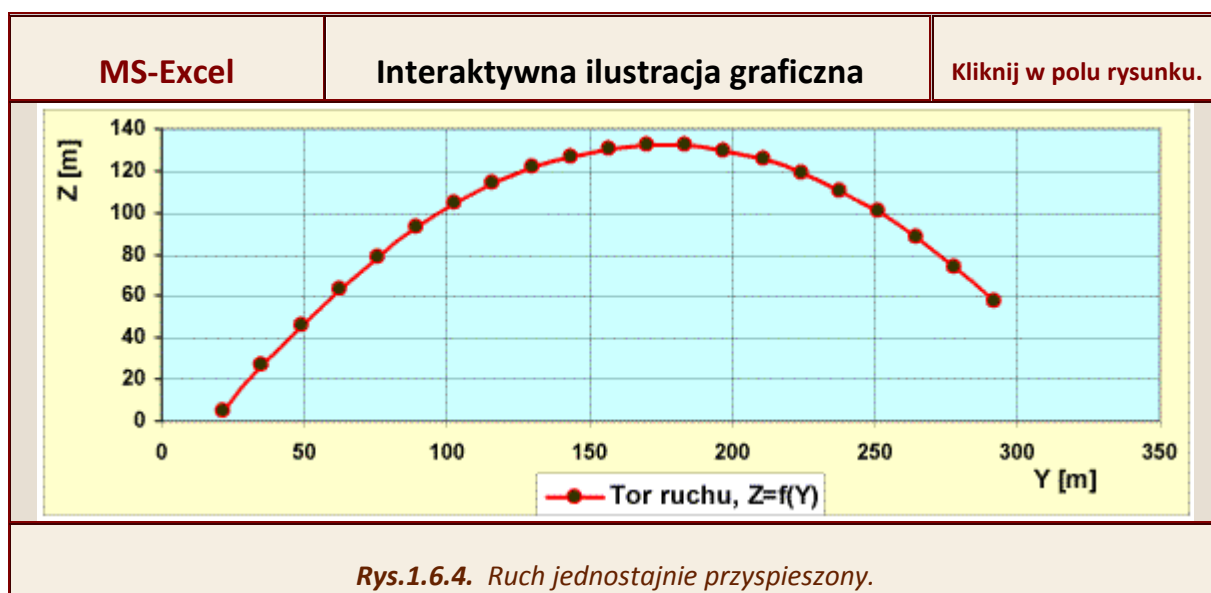


Dla przykładu - wyznacz przy założonych przez siebie warunkach początkowych:

1. czas, po którym ciało wystrzelone do góry z określoną prędkością osiągnie największą wysokość,
2. wartość tej wysokości wyrażoną w metrach,
3. zasięg lotu ciała wystrzelonego pod danym kątem do poziomu,
4. kąt dla którego zasięg będzie największy
5. całkowity czas lotu wystrzelonego pod danym kątem pocisku,
6. prędkość pocisku w najwyższym punkcie oraz w momencie uderzenia o ziemię,
7. prędkość wyrzucanej pionowo wody w słynnej fontannie na jeziorze genewskim, gdzie wysokość słupa wody osiąga 130m. (patrz zdjęcie obok)
8. Masę wody utrzymującej się w powietrzu wiedząc, że fontanna wyrzuca 500 litrów wody na sekundę.

**Rys.1.6.3.** Jaka masa wody utrzymuje się w powietrzu i z jaką prędkością jest wyrzucana woda w słynnej genewskiej fontannie?

A teraz, wyniki swych obliczeń możesz sam sprawdzić wykonując modelowanie ruchu jednostajnie przyspieszonego za pomocą interaktywnej ilustracji graficznej. Rysunek poniżej prezentuje przykładowy wykres uzyskany z użyciem tego programu.



Najlepszą weryfikacją obliczeń jest eksperyment. Wykonamy go teraz w naszym Domowym Laboratorium Fizycznym.

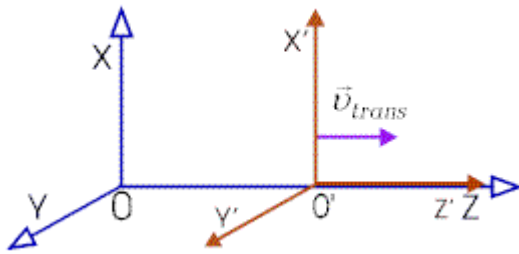
## Domowe Laboratorium Fizyczne



Sprawdzenie czy trajektoria rzutu ukośnego ma rzeczywiście kształt paraboli może być trudne, bowiem zwykle rzucony przedmiot nie pozostawia śladu. W naszym domowym laboratorium rolę wyrzucanych w sposób ciągły przedmiotów odgrywa strumień wody w łazience.

- Zaobserwuj dla jakiego kąta względem poziomu zasięg strumienia wody jest największy.
- Oszacuj prędkość strumienia wody wiedząc, że wysokość kafelka wynosi 15cm.

### 7. Transformacja Galileusza



*Rys.1.7.1. Układ ruchomy porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym wzdłuż osi Z.*

Opis ruchu punktu materialnego zależy od wyboru układu odniesienia. Jak zmieniają się współrzędne punktu, gdy przechodzimy z jednego układu do innego? Rozpatrzmy najprostszy przypadek. Układ ruchomy ( $X'Y'Z'$ ) porusza się względem układu nieruchomego ( $XYZ$ ) ruchem jednostajnym i prostoliniowym z prędkością  $\vec{v}_{trans} = (0, 0, v_{trans})$  wzdłuż osi  $Z'$ , która pokrywa się z osią  $Z$  (patrz Rys.1.7.1).

Jeśli punkt porusza się w układzie ruchym z prędkością  $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ , to jego prędkość w układzie nieruchomym wynosi  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , gdzie

$$v_x = v'_x \quad v_y = v'_y \quad v_z = v'_z + v_{trans} \quad (1.7.1)$$

Współrzędne punktu w układzie nieruchomym ( $x, y, z$ ) związane są ze współrzędnymi w układzie poruszającym się ( $x', y', z'$ ) wzorami:

$$x = x' \quad y = y' \quad z = z' + v_{trans} \cdot t \quad t = t' \quad (1.7.2)$$

Ostatnia z równości wyraża założenie o równości upływu czasu, w różnych układach odniesienia. Do tego zagadnienia powrócimy jeszcze przy omawianiu ruchów z prędkościami bliskimi prędkości światła.

Transformacja odwrotna, tj. wyrażenie współrzędnych punktu w układzie ruchym przez jego współrzędne w układzie nieruchomym, określona jest wzorami:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - v_{0z} \cdot t, \quad t' = t \quad (1.7.3)$$

Zależności te stanowią treść tzw. **transformacji Galileusza** łączącej współrzędne punktu w układzie, który porusza się ze stałą prędkością w nie zmieniającym się kierunku, zgodnym ze zwrotami osi  $Z$  i  $Z'$  oraz w układzie nieruchomym, gdy osie obu układów są wzajemnie równoległe.

Przytoczmy kilka przykładów transformacji Galileusza w praktyce. Pierwszym jest oczywiście przykład z poruszającymi się ruchem jednostajnym, prostoliniowym: wagonem, statkiem czy samolotem, których ruch względem ziemi dodaje się do naszego ruchu wewnątrz nich. Klasycznym przykładem są też ruchome schody. Transformacja Galileusza ostrzega również, by (niezależnie od innych względów) nie wyrzucać przedmiotów z jadących pojazdów. Wyrzucony, nawet z niewielką prędkością, przedmiot z pędzącego samochodu porusza się z podobną jak samochód prędkością względem drogi i może być po prostu - niebezpieczny.

## Zadania

### Zadanie 1.1 współrzędne kartezjańskie

Ruch plamki na ekranie oscyloskopu, w układzie kartezjańskim osi XY, opisuje wektor położenia

$$\vec{r}(t) = [A \cdot \cos(\omega \cdot t), B \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

gdzie A, B,  $\omega$  to stałe dodatnie, natomiast t - czas.

Znaleźć:

1. równanie toru plamki,
2. równanie krzywej po której będzie poruszać się plamka w przypadku, gdy B = A,
3. wektor prędkości,
4. wektor przyspieszenia.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ oraz } y(t) = B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Równie toru otrzymujemy eliminując czas z powyższych równań ruchu.

Ponieważ  $\frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega \cdot t)$  oraz  $\frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\omega \cdot t)$ , to  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)$ ,

czyli ruch odbywa się po elipsie o równaniu  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ .

W przypadku szczególnym, gdy B = A,



ruch odbywa się po okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 = A^2$ .

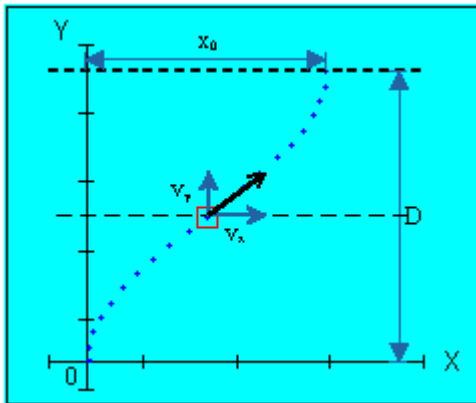
Z definicji wektora prędkości,

w tym ruchu, 
$$\vec{v}(t) = \left[ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right] = [-A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t), B \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)]$$

Z definicji wektora przyspieszenia,

w tym ruchu, 
$$\vec{a}(t) = \left[ \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right] = [-A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t), -B \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

### Zadanie 1.2 zasada niezależności ruchów



Łódź przepływa w poprzek rzekę ze stałą względem wody prędkością  $v_y$ , prostopadłą do kierunku prądu rzeki. Prędkość wody w rzece  $v_x$ , jest równa zero przy brzegach, po środku nurtu osiąga wartość  $u$ , a zmienia się wraz z odległością od brzegu zgodnie ze wzorem:

$$v_x = u \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{D}\right),$$

gdzie  $D$  jest szerokością rzeki.

**Rys. z1.2.1. Znaczenie wielkości występujących w zadaniu.**

Znaleźć:

1. wektor prędkości łodzi,
2. równanie toru łodzi,
3. odległość  $x_0$ , o którą prąd rzeki znosi łódź od miejsca startu do miejsca przybicia na przeciwległym brzegu.

Rozwiązanie

Początek układu współrzędnych kartezjańskich (punkt 0,0) umieszczamy w miejscu startu łodzi. Daje to warunki początkowe, dla czasu  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 0$ .

1. Wektor prędkości :

$$\vec{v} = [v_x, v_y] = \left[ u \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{D}\right), v_y \right].$$

2. Ruch łodzi w poprzek rzeki wynika z nałożenia się dwóch niezależnych ruchów, w kierunku osi OX z podaną prędkością  $v_x$  i osi OY ze stałą prędkością  $v_y$ .

Znaczy to że:  $y(t) = v_y \cdot t$ .

Natomiast w kierunku osi OX:  $v_x = \frac{dx}{dt} = u \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{D}\right)$ , czyli

$$x(t) = \int v_x dt = \int u \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot v_y \cdot t}{D}\right) dt = -\frac{u \cdot D}{\pi \cdot v_y} \cos\left(\frac{\pi \cdot v_y}{D} \cdot t\right) + \text{const}$$

Stałą całkowania const wyznaczamy z warunku początkowego:  $x(0) = 0$ , więc

$$x(0) = -\frac{u \cdot D}{\pi \cdot v_y} + \text{const} \quad \text{const} = \frac{u \cdot D}{\pi \cdot v_y}$$

, a stąd

i dlatego

$$x(t) = \frac{u \cdot D}{\pi \cdot v_y} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot v_y}{D} \cdot t\right) \right] = \frac{2 \cdot u \cdot D}{\pi \cdot v_y} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot v_y}{2 \cdot D} \cdot t\right)$$

Eliminując z powyższego równania ruchu czas (przez podstawienie  $y = v_y \cdot t$ ), otrzymujemy

równanie toru:

$$x = \frac{2 \cdot u \cdot D}{\pi \cdot v_y} \sin^2\left(\frac{\pi \cdot y}{2 \cdot D}\right)$$

$$x_0 = \frac{2 \cdot u \cdot D}{\pi \cdot v_y}$$

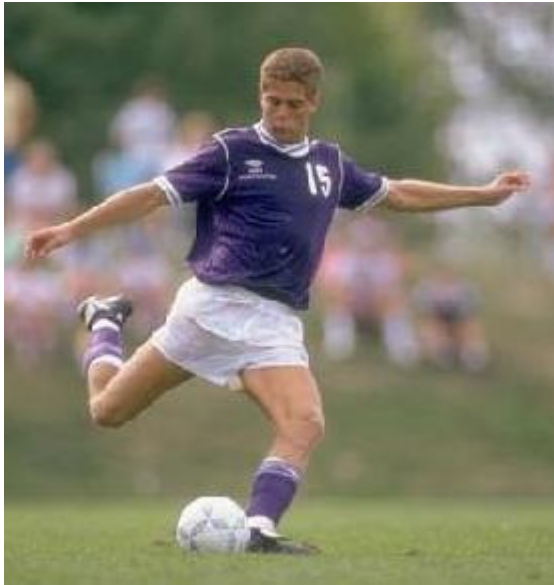
3. Gdy współrzędna  $y = D$ , to współrzędna  $x = x_0$ , dlatego

## Słownik

<b>kinematyka</b>	opis ruchu, w którym zajmujemy się związkami pomiędzy położeniem, prędkością, przyspieszeniem i czasem
<b>dynamika</b>	analiza związków pomiędzy siłami działającymi na ciała a ich ruchem.
<b>ruch postępowy</b>	ruch, w którym wszystkie punkty danego ciała przemieszczają się tak samo co do wartości i kierunku względem danego układu odniesienia
<b>ruch prostoliniowy</b>	ruch, w którym przemieszczenie ciała odbywa się wzdłuż linii prostej
<b>ruch płaski</b>	ruch, który zachodzi w jednej płaszczyźnie; torem ciała jest krzywa płaska.

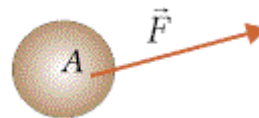
<b>układ odniesienia</b>	punkt w przestrzeni, ciało lub zbiór ciał względem których badamy ruch innych ciał
<b>punkt materialny</b>	ciało, którego rozmiary w badanym ruchu można uznać za pomijalnie małe.
<b>ciało sztywne</b>	ciało, które nie ulega odkształceniu w czasie rozpatrywanego ruchu
<b>stan spoczynku</b>	stan kiedy ciało nie zmienia swego położenia względem układu odniesienia
<b>układ współrzędnych</b>	określony w danym układzie odniesienia zespół osi przecinających się w punkcie zwanym początkiem układu i umożliwiający wyznaczenie położenia dowolnego innego punktu w danym układzie
<b>wektor położenia (promień wodzący)</b>	wektor, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec określa położenie (współrzędne) danego punktu
<b>układ współrzędnych prostokątnych</b>	układ współrzędnych, w którym położenie punktu określone jest przez podanie wartości rzutów wektora położenia na prostopadłe do siebie osie układu
<b>układ współrzędnych sferycznych</b>	układ współrzędnych, w którym położenie punktu określone jest przez podanie długości promienia wodzącego oraz dwóch kątów jakie z osiami układu tworzy promień wodzący i jego rzut
<b>układ współrzędnych cylindrycznych</b>	układ współrzędnych, w którym położenie punktu określone jest przez podanie rzutu wektora położenia na jedną z osi oraz rzutu na prostopadłą do niej płaszczyznę i kąt rzutu w tej płaszczyźnie na jedną z osi
<b>układ współrzędnych biegunowych</b>	dwuwymiarowy układ współrzędnych, w którym położenie punktu określone jest przez podanie długości promienia wodzącego oraz kąta jaki tworzy z jedną z osi układu
<b>wersor</b>	wektor o długości jednostkowej
<b>prędkość</b>	pochodna wektora położenia względem czasu
<b>przemieszczenie</b>	różnica wektorów położenia ciała w dwóch różnych chwilach czasu
<b>przebyta droga</b>	całka oznaczona z bezwzględnej wartości prędkości po czasie
<b>prędkość średnia</b>	iloraz przebytej drogi przez czas, w którym droga ta została przebyta
<b>przyspieszenie</b>	pochodna wektora prędkości względem czasu
<b>przyspieszenie normalne</b>	składowa przyspieszenia skierowana do środka okręgu określającego lokalny promień krzywizny w danym punkcie
<b>przyspieszenie styczne</b>	składowa przyspieszenia styczna do toru w danym punkcie, czyli skierowana wzdłuż kierunku wektora prędkości w tym punkcie
<b>równanie ruchu</b>	równanie wyrażające zależność położenia ciała w funkcji czasu
<b>równanie toru</b>	równanie określające kształt toru ciała w przestrzeni

## Przyczyny ruchu



*Fot. 2.0.1. Piłka jest jeszcze w stanie spoczynku, ale za chwile zostanie wprowadzona w ruch pod działaniem siły wywartej na nią przez piłkarza.*

W poprzedniej lekcji zajmowaliśmy się opisem ruchu nie wnikając w to, jakie przyczyny ten ruch powodują. **Dynamika ruchu** bada związki pomiędzy czynnikami wywołującymi ruch, a właściwościami tego ruchu. Aby nieruchome ciało wprowadzić w ruch musi ono być poddane działaniu siły, która zmieni jego stan spoczynku w stan ruchu. **Siły stanowią przyczynę wywołującą ruch ciał materialnych i powodującą zmianę stanu ruchu.**



Siła jest wielkością wektorową. Posiada określoną wartość, punkt przyłożenia, kierunek i zwrot. Siła  $\vec{F}$  na rysunku powyżej przyłożona jest do ciała w punkcie  $A$ , zaś jej kierunek i zwrot wskazuje strzałka, której długość proporcjonalna jest do wartości siły.

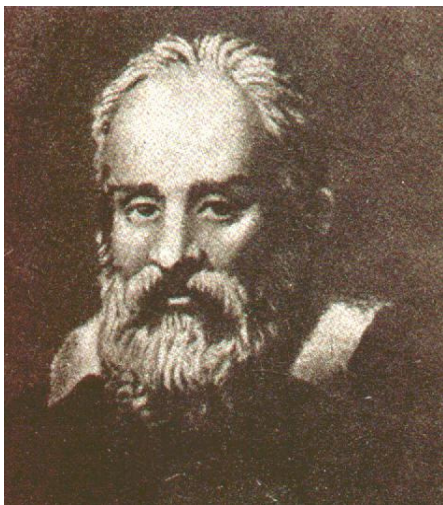
Czy jednak przyłożona do ciała siła zawsze wywołuje jego ruch? Kiedy ciało poruszy się, a kiedy nie, jeśli poddane zostanie działaniu siły lub układu sił? Jeżeli ciało poruszy się pod wpływem działającej na niego siły, to jak ruch ten zależy od wartości tej siły i czy tylko od samej siły jest zależny? Kiedy zaś ciało porusza się, to czy ruch ten może trwać dowolnie długo, czy też ciało zatrzyma się samo?

Popatrzmy bliżej na relacje pomiędzy siłą i ruchem. Stojący na szafie wazon nie porusza się (nie spada) choć wiemy, że działa na niego wszechobecna na Ziemi siła ciężkości. Owszem - spada, kiedy pozbawimy go podpory jaką jest górna ścianka szafy. Pod wpływem siły ciężkości prędkość jego się zwiększa. Jeśli wazon jest ciężki i spada z wysoka, może uszkodzić stojącą na stole lampę, a przy tym i sam może ulec rozbiciu. W końcu jednak zatrzymuje się pomimo istnienia sił ciężkości.

Przykład ten, chociaż banalny, pokazuje rozmaite relacje pomiędzy siłą i ruchem. W celu uogólnienia można zamiast wazonu rozważać ruch innych przedmiotów, można odmienić kierunek ruchu zamieniając spadanie w dół - wyrzucaniem do góry, a siłę ciężkości zamienić ciśnieniem gazów wybuchowych w lufie armatniej. Stąd tylko jeden krok do problemów, gdy gazy te będą nie w lufie, ale w dyszy rakiety lub komorze spalania samolotu odrzutowego. Z kolei - zderzenie wazonu z lampą nie różni się w swej naturze od zderzeń pojazdów czy wreszcie - zderzeń cząstek elementarnych lub jąder atomowych.

Sformułujmy bardziej ogólnie wyniki obserwacji z naszego przykładu:

1. Kiedy pomimo działania siły (tu - siły ciężenia) ciało nie porusza się (wazon nie spada) - to znaczy, że na to ciało działa równocześnie jakaś inna równoważąca siła lub siły. Sumaryczna siła wynosi więc zero. Stan taki może trwać dowolnie długo, ale kiedy siły działające na ciało przestają się równoważyć (pozbawiamy wazon podpory) wtedy...
2. Działająca na ciało niezrównoważona siła (tu - siła ciężkości) zmienia stan jego ruchu - zamienia bezruch w ruch i zamienia małą prędkość w większą, czyli nadaje ciało przyspieszenie. Kiedy zaś ciało oddziałuje na drugie - wtedy...
3. Działanie jednego ciała na drugie (wazonu na lampę) wywołuje reakcję ze strony drugiego ciała na pierwsze (lampy na wazon). Im większe działanie pierwsze, tym większe i drugie, ale skierowane w odwrotną stronę - ku pierwszemu.



Przykłady można mnożyć. Łączy je jedna wspólna cecha - wszelkie zmiany charakteru ruchu zachodzą pod wpływem sił wywieranych na ciało, zaś stan spoczynku jest rezultatem równowagi tych sił. Kiedy więc na ciało działają siły równoważące się lub nie działają żadne siły, charakter ruchu nie może się zmieniać - jeśli ciało jest w spoczynku, powinno w spoczynku pozostać, jeśli jest w ruchu - powinno pozostać w ruchu. Stwierdzenie to wydaje się oczywiste, a przecież przez wieki uważano, że to właśnie dla podtrzymania ruchu potrzebne jest przyłożenie zewnętrznej siły, bo w przeciwnym przypadku ciało zatrzyma się. Nie brano pod uwagę, że we wszystkich obserwowanych przypadkach ruchu działała siła zewnętrzna przeciwdziałająca ruchowi, przykładana w

postaci oporów ruchu.

*Galileusz jako pierwszy powiązał przypadek spoczynku i ruchu jednostajnego prostoliniowego, jako nie dające się odróżnić stany ruchu. Na ilustracji - Galileusz (Galileo Galilei, 1564 - 1642)*

W tej lekcji poznamy prawa ruchu, czyli zasady pozwalające powiązać własności ruchu z przyczynami, które ten ruch wywołują. Przedyskutujemy przykłady pokazujące równoważność stanu spoczynku i ruchu jednostajnego prostoliniowego, wprowadzimy pojęcie układu inercjalnego i poznamy przypadki układów nieinercjalnych. Omówimy relacje pomiędzy siłą i przyspieszeniem i wprowadzimy pojęcie masy bezwładnej. Zobaczymy, że zapoczątkowana przez Galileusza i Newtona mechanika klasyczna potrafi opisać w postaci prostych praw niezwykle złożoność ruchów wśród których żyjemy.

## 1. Zasady dynamiki



Prawa ruchu zostały sformułowane przez Izaaka Newtona i przedstawione w 1686 roku w dziele

***"Philosophiae naturalis principia mathematica"***

w postaci trzech zasad dynamiki.

Podany w pierwszej części wykładu przykład stanowi ilustrację zasad dynamiki. Trzy wysunięte tam wnioski odpowiadają właśnie trzem zasadom dynamiki sformułowanym przez Newtona. Zasady te omówimy teraz bardziej szczegółowo.

*Fot.2.1.1. Na fotografii - Isaac Newton (1642 - 1727) - figura w gabinecie figur woskowych Mme Tussaud w Londynie (WiŻ, 5/1977,s.28)*

## Pierwsza zasada dynamiki

Zapiszmy pierwszą zasadę dynamiki w sposób podobny do oryginalnego sformułowania Newtona. Zauważmy też, że zasadę tę wyraża pierwszy wniosek z naszego przykładu.

### **pierwsza zasada dynamiki**

*Jeżeli na ciało nie są wywierane siły (lub działające siły się równoważą ) to ciało to pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego, prostoliniowego*

Zasadniczą wartością pierwszej zasady dynamiki jest wprowadzenie równoważności stanu spoczynku i stanu ruchu jednostajnego prostoliniowego. Rozpatrzmy to na przykładzie ruchu pociągów.

Kiedy siedzimy w przedziale wagonu jadącego pociągu, układem nieruchomym jest dla nas wagon, bo względem nas się nie porusza. Kiedy stoimy na peronie, układem nieruchomym jest stacja kolejowa. Oba te układy odniesienia są jednakowo dobre do badania stanu ruchu innych przedmiotów, jeśli tylko w czasie prowadzenia obserwacji, prędkość pociągu nie zmienia ani wartości, ani kierunku. Pasażer takiego pociągu nie może stwierdzić czy pociąg stoi na stacji czy jedzie z dużą prędkością jeśli nie wyjrzy przez okno, (zaniedbując oczywiście efekty szumu, czy wibracji towarzyszących często ruchowi pociągu). Jego walizka na półce pozostawać będzie nieruchoma. Kiedy jednak pociąg nagle zahamuje, to walizka może spaść z półki, choć nikt z pasażerów jej w tym czasie nie dotyka. Jest to oczywiście w sprzeczności z pierwszą zasadą dynamiki rozpatrywaną w układzie odniesienia związanym z pociągiem. Układ taki nie jest więc dobrym układem odniesienia.

Układy, w których pierwsza zasada dynamiki jest spełniona, nazywamy **układami inercjalnymi**; układy, w których spełniona nie jest - **układami nieinercjalnymi**. Jadący pociąg może być układem inercjalnym ale tylko wtedy gdy wektor jego prędkości zachowuje stałą wartość, kierunek i zwrot. Zauważmy, że kiedy znany jest jeden układ inercjalny, to znanych jest ich nieskończenie wiele. Każdy bowiem układ poruszający się względem układu inercjalnego z dowolną ale stałą co do wartości i kierunku prędkością jest też układem inercjalnym. Pierwsza zasada dynamiki stanowi więc definicję układu inercjalnego.

## Masa i środek masy

Dla sformułowania drugiej zasady dynamiki konieczne jest wprowadzenie pojęcia masy. Już Newton określił masę jako miarę ilości materii uważając tę jej właściwość za niezależną od stanu ruchu obiektów materialnych.

Jednostkę masy (kilogram, kg) wprowadziliśmy już w pierwszej lekcji. W drugiej, zdefiniowaliśmy pojęcie punktu materialnego. Teraz, **każdemu obiektowi materialnemu**

przypiszemy masę  $m$  jako miarę jego bezwładności przy działaniu na ciało siły, która nadaje mu przyspieszenie.

Kiedy interesuje nas ruch układu wielu punktów materialnych, wprowadzamy pojęcie **środka masy**. Wektor położenia środka masy dla układu  $N$  punktów związany jest z masami  $m_i$  oraz promieniami wodzącymi  $\vec{r}_i$  wszystkich punktów wchodzących w skład układu wzorem

$$\vec{r}_{sm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i, \quad \text{gdzie} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (2.1.1)$$

jest masą całego układu.

## Wektor pędu

Dla ilościowego opisu ruchu ciała o danej masie wprowadza się pojęcie **wektora pędu** zdefiniowanego jako iloczyn masy ciała i wektora jego prędkości. Pęd jest więc także wektorem, a jego kierunek zgodny jest z kierunkiem wektora prędkości.

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	(2.1.2)
-----------------------------	---------

Pęd układu punktów materialnych stanowi wektorową sumę pędów wszystkich punktów wchodzących w jego skład

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i \quad (2.1.3)$$

## Druga zasada dynamiki

Kiedy ciało jest pod działaniem sił nie równoważących się wzajemnie, to zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki jego stan spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego ulega zmianie - zmienia się wektor jego prędkości. Intuicyjnie wyczuwamy, że zmiana prędkości będzie tym większa, im większa siła będzie na ciało działać oraz, że kierunek zmiany prędkości będzie zgodny z kierunkiem działania siły. Z doświadczenia wiemy też, że większą siłę trzeba przykładać do ciał o większej masie niż o mniejszej, by osiągnąć tą samą zmianę prędkości.

Druga zasady dynamiki wyraża związek pomiędzy zmianą w czasie pędu ciała, a siłą pod wpływem której zmiana ta zachodzi. Zmianę pędu w czasie wyrażamy jako pochodną pędu względem czasu, otrzymując wzór wyrażający ilościowo drugą zasadę dynamiki

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	(2.1.4)
---------------------------------	---------

Pochodna pędu względem czasu informuje jak szybko następuje zmiana pędu w czasie. Możemy więc drugą zasadę dynamiki sformułować słowami w sposób następujący:

### **druga zasada dynamiki**

*Szybkość zmiany pędu ciała równa jest wypadkowej sile działającej na to ciało.*

W ten sposób druga zasada dynamiki daje nam ilościowe określenie siły.

Jeśli przyjmiemy, że masa ciała podczas ruchu pozostaje stała, to równanie (2.1.4) możemy przepisać w postaci

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad (2.1.5)$$

gdzie  $\vec{a}$  jest wektorem przyspieszenia ciała. Druga zasada dynamiki może więc być także sformułowana inaczej.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	(2.1.6)
-----------------------------	---------

lub słowami

### **druga zasada dynamiki (dla $m=const$ )**

*Iloczyn masy ciała przez jego przyspieszenie równy jest sile działającej na to ciało*

Założenie o stałości masy nie zawsze jest jednak spełnione, a tylko wtedy gdy prędkości poruszających się obiektów są dużo mniejsze niż prędkość światła tj, gdy  $v \ll c$ . Pierwsze sformułowanie drugiej zasady dynamiki jest więc ogólniejsze od drugiego. Więcej na ten temat powiemy w następnych lekcjach.

### **Masa bezwładna i ciężar ciała**

Zapiszmy inaczej wzór (2.1.6). Kiedy na ciało o masie  $m$  działamy siłą  $\vec{F}$ , nadajemy mu przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F} \quad (2.1.7)$$

Przyspieszenie jest więc proporcjonalne do działającej na ciało siły, zaś współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy ciała. Oznacza to, że im większa jest masa ciała (mianownik ułamka) tym większej musimy użyć siły (licznik) by przyspieszenie ciała mogło pozostać bez zmian. Mówimy, że masa jest miarą bezwładności ciała czyli "oporu" jaki ciało stawia sile, która zmienia stan jego ruchu. To właśnie dlatego konstruktorzy samochodów starają się zmniejszać ich masę, by uzyskać większe przyspieszenia przy tej samej mocy silnika, to dlatego większą siłę musimy przykładać otwierając masywne drzwi, choć otwierając - wcale ich nie podnosimy, a jedynie obracamy.



Masa i ciężar ciała to nie to samo. Masa, która jest własnością danego ciała zwana jest też **masą bezwładną** w odróżnieniu od ciężaru ciała, który jest różny na Ziemi, na Księżycu lub w statku kosmicznym. Masa bezwładna jest współczynnikiem proporcjonalności w równaniu (2.1.6). **Ciężar ciała** jest wypadkową siły jaka działa na ciało wskutek przyciągania grawitacyjnego i siły odśrodkowej obrotowego ruchu Ziemi. Ciężar ciała możemy wyrazić za pomocą równania (2.1.6) jako

$$\vec{P} = \vec{F}_g = m \cdot \vec{g} \quad (2.1.8)$$

gdzie ciężar  $\vec{P}$  jest po prostu siłą działającą na ciało o masie  $m$  znajdujące się na powierzchni Ziemi, a  $\vec{g}$  jest wektorem przyspieszenia jakie uzyskuje ciało spadające swobodnie pod wpływem siły ciężkości w danym miejscu. Przyspieszenie  $\vec{g}$  zwane jest **przyspieszeniem ziemskim** i nie zależy od własności spadających przedmiotów, ale od masy Ziemi i odległości danego ciała od środka jej masy. Dlatego też inna jest wartość tego przyspieszenia na biegunie, inna na równiku, bowiem Ziemia nie jest idealną kulą; inna jest także wysoko nad powierzchnią Ziemi. Przybliżona wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ . O siłach działających na ciała poruszające się w polu grawitacyjnym Ziemi dowiemy się więcej w lekcji poświęconej grawitacji. Oczywiście, można też podobnie zdefiniować przyspieszenie na Księżycu, Marsie itd.

Jednostką siły w układzie SI jest **niuton (N)**. Jest to siła, która masie równej jednej jednostce masy (kilogram) nadaje przyspieszenie równe jednej jednostce przyspieszenia ( $1 \text{ m/s}^2$ );

$$1\text{N} = 1 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

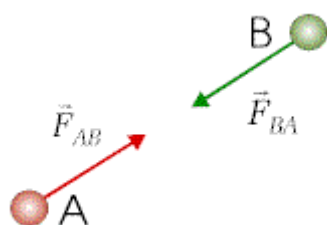
. Stosowaną niekiedy jednostką jest też kilogram siły. Jest to siła odpowiadająca ciężarowi masy **1kg** i wynosi  $1\text{kG} \approx 9.81\text{N}$ .

Domowe Laboratorium Fizyczne		
W naszym Domowym Laboratorium Fizycznym możemy wykonać proste ale efektowne doświadczenie demonstrujące poglądowo rolę bezwładności. Zanim jednak uruchomisz demonstrację, spróbuj odpowiedzieć na zawarte w dolnej części tabelki pytanie.		
Na zaczepionej u góry nici zawieszony jest arbuz. U dołu przymocowana jest taka sama druga nić. )====>>>		Kasia wykonuje doświadczenie.  Będzie ciągnąć za nić zaczepioną u dołu.
<b><u>Najpierw pociągnie szybko,</u></b>		<b><u>...a teraz będzie ciągnąć powoli.</u></b>
<p><b>Odpowiedz</b> - która nić, dolna czy górna, zerwie się kiedy Kasia pociągnie szybko, a która - kiedy będzie ciągnąć powoli. Uzasadnij swoją odpowiedź. Teraz zobacz wynik doświadczenia.</p>		

Druga zasada dynamiki stanowi fundament całej fizyki klasycznej. W niezwykle prostej postaci wzoru (2.1.10a) zawarte są prawa ruchu obiektów materialnych poczynając od

przykładowego wazonu spadającego z szafy, a kończąc na ruchu samolotów, rakiet i ciał niebieskich. Zasada ta wyznacza związek pomiędzy przyczyną (siłą) i skutkiem jej działania (przyspieszenie) stanowiąc podstawę deterministycznego rozumienia praw fizyki wyrażanego przez tzw. **zasadę przyczynowości**. Zgodnie z tą zasadą znajomość warunków początkowych (położenia i prędkości ciał w danej chwili) oraz działających na te ciała sił wyznacza jednoznacznie stan ich ruchu w dowolnej chwili. Zakres stosowalności drugiej zasady dynamiki wyznaczony został dopiero w początkach XX-go wieku poprzez mechanikę relatywistyczną i kwantową. Zasada ta jest jednak szczególnym przypadkiem obu tych teorii fizycznych.

## Trzecia zasada dynamiki



W naszym przykładzie z wazonem zwracaliśmy uwagę, że kiedy leży on na szafie czy na stole, działają na niego wzajemnie równoważące się siły: siła przyciągania ziemskiego skierowana w dół i skierowana w górę siła reakcji podłoża jakim jest ścianka szafy czy powierzchnia stołu. Siły te muszą znosić się wzajemnie, w przeciwnym bowiem przypadku wazon zacząłby się poruszać zgodnie z drugą zasadą dynamiki.

Ta relacja pomiędzy oddziaływującymi na siebie ciałami stanowi treść trzeciej zasady dynamiki.

### trzecia zasada dynamiki

*Oddziaływania wzajemne dwóch ciał są zawsze równe co do wartości ale przeciwnie skierowane.*

Kiedy więc ciało **A** (patrz, rysunek obok) działa na ciało **B** daną siłą  $\vec{F}_{BA}$ , to ciało **B** działa na ciało **A** taką samą siłą lecz przeciwnie skierowaną,  $-\vec{F}_{AB}$ . Możemy to zapisać w postaci

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$	(2.1.9)
--------------------------------	---------

Wzór ten oznacza, że siły akcji i reakcji mają ten sam kierunek, równe wartości i przeciwne zwroty. Jeśli nazwiemy siłę pochodzącą od jednego ciała - siłą akcji, a pochodzącą od drugiego - siłą reakcji, to trzecią zasadę dynamiki możemy sformułować inaczej:

### trzecia zasada dynamiki

*Każdej akcji towarzyszy zawsze równa co do wartości lecz przeciwnie skierowana reakcja.*

Widzimy więc, że siły zawsze występują parami (uświadomił nam to Newton w trzeciej zasadzie dynamiki), ale są przyłożone do różnych ciał. Zwróćmy uwagę, że gdyby były przyłożone do jednego ciała, to znosiłyby się i w naszym świecie nie byłoby ruchów zmiennych.



**Fot.2.1.2.** Przeciąganie liny jest typowym przykładem akcji i reakcji. (Wiź, 6/2000,s.57)

## 2. Równania Newtona

Zasady dynamiki Newtona opisują wszelkie ruchy ciał makroskopowych (czyli takich, których masy są dużo większe od masy atomu) i odbywające się z prędkościami małymi w stosunku do prędkości światła. Praktycznie, oznacza to ruch jakichkolwiek makroskopowych obiektów materialnych. Dlatego też często mechanikę opisującą ruchy ciał makroskopowych z niewielkimi prędkościami za pomocą zasad Newtona nazywamy mechaniką newtonowską. Zastosowanie prostych wzorów (2.4) i (2.6) umożliwia zarówno wyjaśnienie skomplikowanych ruchów statków kosmicznych, jak i wiele zjawisk z życia codziennego prowadząc niekiedy do zaskakujących wniosków.

### Relacja: siła - przyspieszenie

Na początek "doświadczenie", które każdy z nas wykonywał wielokrotnie - wbijanie gwoźdźcia w kawałek drewna. Nie mamy zamiaru uczyć Cię tu wbijania gwoździ w deskę, ale chcemy - byś rozumiejąc dobrze istotę drugiej zasady dynamiki - umiał ją w przyszłości stosować w rozwiązywaniu problemów znacznie bardziej złożonych.

#### Domowe Laboratorium Fizyczne



Najpierw podejmę próbę wciśnięcia gwoźdźcia palcem - oczywiście - bez powodzenia...

Potem wbiję go bez większego wysiłku uderzeniem młotka (byle nie w palec).

Wykonuję czynność banalną, a przecież zdumiewającą.

Oszacuj wartość siły, którą działam na gwóźdź, kiedy wbijam go młotkiem w kawałek deski.

Skorzystajmy z równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki dla przypadku ruchu młotka wbijającego gwóźdź.

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} \approx m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.2.1)$$

Założyliśmy, dla uproszczenia, że ruch młotka wbijającego gwóźdź jest ruchem jednostajnie opóźnionym, więc wartość opóźnienia uzyskujemy dzieląc różnicę  $\Delta v$  prędkości początkowej  $v_0$  i końcowej (zero) przez czas wbijania  $\Delta t$ . Weźmy dla przykładu masę młotka  $m=0.5\text{kg}$ , prędkość w momencie uderzenia  $v_0=10\text{m/s}$  i zagłębienie się gwoździa  $1\text{cm}$ . Czas wbijania będzie ilorazem zagłębienia przez średnią prędkość równą połowie prędkości początkowej, czyli  $\Delta t = 0.002\text{s}$ . Mamy więc,

$$F = 0.5\text{kg} \cdot \frac{10\text{m/s}}{0.002\text{s}} = 0.5\text{kg} \cdot 5000\text{m/s}^2 = 2500\text{N} \approx 250\text{kG} \quad (2.2.2)$$

Siła wykonanego bez trudu uderzenia półkilogramowym młotkiem trzykrotnie przekroczyła średni ciężar ciała człowieka (!). Nic dziwnego, że nie miałem szans wcisnąć gwoździa palcem. Cała tajemnica zawarta jest tu w ogromnej wartości,  $5000\text{m/s}^2$ , opóźnienia (czyli ujemnego przyspieszenia) wynikającego z krótkiego czasu uderzenia. To dlatego przy wbijaniu gwoździa deska musi spoczywać na twardym podłożu. To właśnie dlatego spadające na kamienną posadzkę naczynia na ogół kończą stłuczeniem się. To dlatego tak tragiczne bywają skutki zderzenia samochodu z drzewem i znacznie lepiej jest "wylądować w rowie". To dlatego w konstrukcji samochodu tworzy się "strefę zgniecenia". Przykłady można mnożyć...

## Układ równań Newtona

W lekcji drugiej podaliśmy definicję ruchu jednostajnie przyspieszonego. "Ruch, w którym przyspieszenie jest stałe co do wartości bezwzględnej i kierunku nazywamy ruchem jednostajnie przyspieszonym."

Powstaje jednak pytanie - "kiedy taki ruch może zachodzić"? W jakich warunkach przyspieszenie zachowuje stałą wartość? Kinematyka nie zajmuje się poszukiwaniem odpowiedzi na te pytania. Dla znalezienia odpowiedzi musimy skorzystać z równań dynamiki.

Potraktujmy to zagadnienie bardziej ogólnie i zapiszmy równanie (2.1.6) wyrażające treść drugiej zasady dynamiki pamiętając, że przyspieszenie jest drugą pochodną położenia względem czasu; wzór (1.5.1).

$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	(2.2.3)
---	---------

Wektory występujące w tym równaniu mają w przestrzeni trójwymiarowej po trzy składowe, które w układzie współrzędnych prostokątnych odpowiadają kierunkom osi układu. To równanie wektorowe w rozpisaniu na składowe w danym układzie odniesienia ma postać układu trzech równań skalarnych zwanych **równaniami Newtona**.

$$\begin{aligned}
 F_x &= m \cdot a_x = m \cdot \frac{dv_x}{dt} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \\
 F_y &= m \cdot a_y = m \cdot \frac{dv_y}{dt} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 F_z &= m \cdot a_z = m \cdot \frac{dv_z}{dt} = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.4}$$

Jest to układ równań różniczkowych drugiego rzędu. Równania te są podstawowymi równaniami dynamiki. Jak wspomniane było wcześniej, wiążą one przyczynę (siła) z jej skutkiem (ruch). Ich konkretna forma określona jest przez rodzaj siły, która ruch wywołuje. W naszych lekcjach fizyki będziemy formułować i rozwiązywać równania Newtona dla kilku ważnych przypadków sił.

Zanim omówimy kilka konkretnych przykładów - zapamiętajmy, że o rodzaju ruchu ciała decyduje działająca nań siła.

1. Jeżeli siła jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym, prostoliniowym.
2. Jeżeli siła jest stała, to ruch jest jednostajnie zmienny (jeśli masa ciała nie zmienia się tj. jeśli  $m = \text{const}$ )
3. Jeżeli siła jest zmienna, to ruch jest zmienny, a jego charakter zależy od zmienności siły.

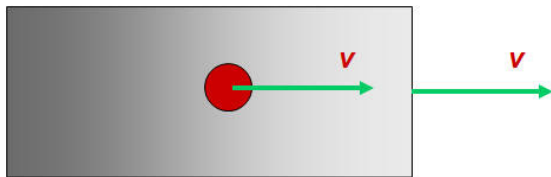
### 3. Siły bezwładności

Autobus, którym jedziemy ostro hamuje. Dobrze znamy taką sytuację - musimy się wtedy mocno trzymać, aby nie upaść. Odczuwamy działanie tzw. siły bezwładności. Siły bezwładności obserwujemy w układach nieinercjalnych, czyli poruszających się z przyspieszeniem. Wartość siły bezwładności jest wprost proporcjonalna do przyspieszenia układu i masy ciała, kierunek jest przeciwny do kierunku przyspieszenia. Siłę bezwładności wyrażamy wzorem:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_{ukł} \tag{2.3.1}$$

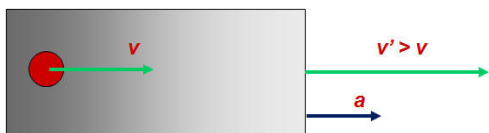
Siły bezwładności nazywamy siłami pozornymi, ponieważ nie jest to realne oddziaływanie między ciałami. Siły bezwładności występują tylko w układach nieinercjalnych, natomiast obserwując to samo ciało z układu inercjalnego, można jego ruch wyjaśnić tylko działaniem sił rzeczywistych - siły bezwładności w tym opisie w ogóle nie występują. Wyjaśnimy to na konkretnych przykładach.

Wyobraźmy sobie, że na podłodze autobusu leży piłka. Kiedy autobus przyspiesza, pasażer widzi, że piłka toczy się do tyłu. Zobaczmy jak ruch piłki w przyspieszającym pojeździe wygląda z zewnątrz, z układu nieruchomego (inercjalnego).



Kiedy autobus jedzie ze stałą prędkością (układ inercjalny), piłka ma taką samą prędkość jak autobus i pozostaje względem autobusu w spoczynku.

**Rys. 2.3.1.** Piłka w układzie inercjalnym



Autobus przyspiesza (układ nieinercjalny), jego prędkość rośnie, ale prędkość piłki pozostaje taka, jak poprzednio. W rezultacie obserwator patrzący na piłkę z zewnątrz widzi, że autobus "ucieka" spod piłki - piłka pozostaje z tyłu. Na piłkę nie działa żadna siła. Natomiast pasażer autobusu widzi, że piłka zaczyna toczyć się do tyłu. Interpretuje ruch piłki względem autobusu jako wynik działania siły bezwładności, działającej przeciwnie do kierunku przyspieszenia autobusu.

**Rys. 2.3.2.** Piłka w układzie nieinercjalnym

### Przykład

Oblicz siłę działającą na pasażera samochodu, który przy prędkości 60 km/h wpadł na drzewo. Strefa zgniotu w tym samochodzie wynosi 1 m, a masa pasażera 70 kg.

Zakładamy, że po uderzeniu w drzewo samochód porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ujemnym. Prędkość końcowa równa jest zero, droga przebyta podczas hamowania wynosi 1 m. Przyspieszenie samochodu obliczymy ze wzorów na prędkość końcową i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$v_k = v_0 - at = 0, \quad S = v_0 t - \frac{at^2}{2}. \quad \text{Z pierwszego wzoru obliczamy czas hamowania i}$$

wstawiamy do drugiego:

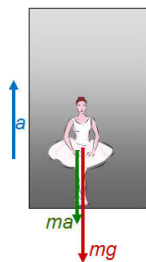
$$S = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{a}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2S}$$

Na pasażera w układzie nieinercyjnym (hamującym samochodzie) działa siła bezwładności skierowana do przodu równa

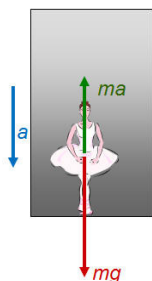
$$F_b = ma = \frac{mv_0^2}{2S}$$

Wstawiamy dane liczbowe:  $m = 70 \text{ kg}$ ,  $v_0 = 60 \text{ km/h} = 16,7 \text{ m/s}$ ,  $S = 1 \text{ m}$  i otrzymujemy:  $F_b = 9722 \text{ N}$  co odpowiada ciężarowi ciała o masie prawie 1 tony. Zauważmy, że siła ta jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości początkowej, a więc dwukrotne zwiększenie prędkości skutkuje czterokrotnym zwiększeniem siły. Siła jest też odwrotnie proporcjonalna do drogi hamowania. Jeśli więc pojazd jest sztywny i podczas zderzenia odkształci się na przykład tylko o 10 cm, to siła bezwładności wzrośnie dziesięciokrotnie!

Innym przykładem jest przyspieszająca lub hamująca winda.



Kiedy winda rusza w górę z przyspieszeniem  $a$ , na pasażerkę, oprócz siły ciężkości  $mg$ , działa siła bezwładności skierowana przeciwnie do kierunku przyspieszenia windy i równa  $ma$ . Całkowita siła przyciskająca pasażerkę do podłogi wynosi więc:

$$F = mg + ma$$


W sytuacji, kiedy winda porusza się w dół z przyspieszeniem  $a$ , siła bezwładności działa w górę i odejmuje się od siły ciężkości:

$$F = mg - ma$$

A co się stanie, gdy winda będzie spadała swobodnie z przyspieszeniem ziemskim? Wtedy wypadkowa siła działająca na pasażerkę stanie się równa zero - pasażerka będzie w stanie nieważkości.

Takiego stanu doświadczają skoczkowie spadochronowi uprawiający skoki z opóźnionym otwarciem spadochronu. Obejrzyj [film](#), zrealizowany przez operatora spadającego razem ze skoczkami (z układu nieinercyjnego). Obserwator oglądający te akrobacje z układu nieruchomego widzi, że na skoczków działa tylko siła ciężkości.

**Rys. 2.3.3** Siły bezwładności w windzie

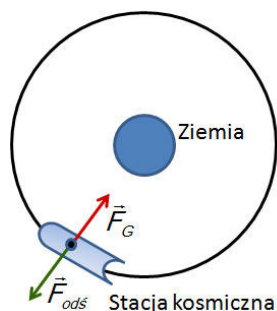
## Siła odśrodkowa



Wyobraźmy sobie, że kręcimy się na karuzeli w wesołym miasteczku. Czujemy siłę wciskającą nas w krzeselko. Nic dziwnego - znajdujemy się bowiem w układzie nieinercyjnym. Krzeselko porusza się po okręgu, a więc działa na niego siła dośrodkowa nadająca mu przyspieszenie dośrodkowe. Siła bezwładności zwana siłą odśrodkową jest równa:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_{\text{dośr}} = m\vec{r}\omega^2 \quad (2.3.2)$$

Siłę odśrodkową odczuwa tylko obserwator znajdujący się w układzie obracającym się - układzie nieinercyjnym. Wyobraźmy sobie człowieka stojącego na obracającej się tarczy trzymającego na nitce kulkę. W pewnym momencie nitka pęka. Jak ruch kulki wygląda dla obserwatora w układzie inercyjnym (nieruchomym) i dla obserwatora w układzie nieinercyjnym (obracającej się tarczy)? Obserwator w układzie nieruchomym stwierdza początkowo istnienie siły dośrodkowej - realnej siły oddziaływania nitki na kulkę. Gdy nitka ulega przerwaniu siła dośrodkowa znika i kulka porusza się dalej po stycznej. Natomiast obserwator na tarczy widzi, że na kulkę działa siła odśrodkowa, która w momencie przerwania nitki wyrzuca kulkę na zewnątrz wzdłuż promienia.



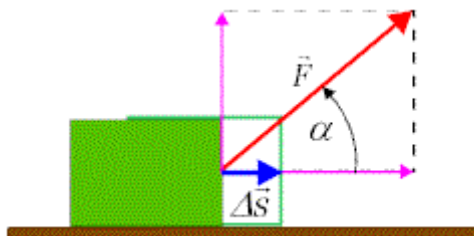
Rozważmy sytuację kosmonautów na stacji kosmicznej poruszającej się po orbicie okołozemskiej. W układzie nieinercyjnym (stacja kosmiczna) na pasażerów działa siła przyciągania Ziemi  $\vec{F}_G$  i równa jej siła odśrodkowa  $\vec{F}_{\text{odś}}$ . W rezultacie kosmonauci nie odczuwają działania żadnej siły - są w stanie nieważkości. Obejrzyj film o życiu na stacji kosmicznej. Dla obserwatora w układzie inercyjnym kosmonauci poruszają się z takim samym przyspieszeniem dośrodkowym jak stacja. W jego układzie na kosmonautów działa tylko rzeczywista siła grawitacji. Zwróćmy uwagę na analogię do sytuacji windy spadającej swobodnie. W ogólności możemy powiedzieć, że stan nieważkości występuje w układach poruszających się swobodnie w polu grawitacyjnym.



Rys. 2.3.4. Siły bezwładności na stacji kosmicznej

## 4. Praca i Moc

### Praca



**Praca** stałej siły  $\vec{F}$  przy przemieszczeniu ciała o odcinek  $\Delta\vec{s}$  określona jest jako iloczyn skalarny

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha \quad (2.4.1)$$

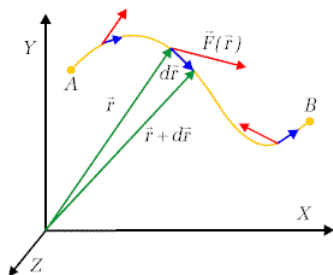
Rys.2.4.1. Siła, przemieszczenie i praca.

gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy kierunkiem działania siły, a kierunkiem przemieszczenia. Kiedy kąt ten jest kątem ostrym, praca ma wartość dodatnią, kiedy rozwartym - ujemną; kiedy wynosi  $90^\circ$ , praca wynosi zero. Siła, której kierunek jest przeciwny do kierunku ruchu wykonuje pracę ujemną.

Zauważamy, że praca wykonywana jest jedynie przez składową siły równoległą do kierunku ruchu. Składowa prostopadła żadnej pracy nie wykonuje, choć zmniejsza nacisk przesuwanego przedmiotu na podłoże. Pamiętajmy o tym przy przemieszczaniu ciężkich przedmiotów.

Zauważmy też, że mówimy tu o pracy wykonanej nad układem fizycznym jakim jest przesuwane ciało przez siły zewnętrzne, które to ciało przesuwać (człowiek, koń, traktor...). Uogólniając - praca wykonana nad układem fizycznym przez siły zewnętrzne jest dodatnia, a praca wykonana przez układ fizyczny kosztem energii tego układu (mechanicznej, cieplnej, elektrycznej itd.) jest ujemna. Definicję tę wykorzystywać będziemy wielokrotnie.

Zakładaliśmy tu, że siła pozostaje stała przy przemieszczeniu ciała o odcinek  $\Delta\vec{s}$ . W ogólnym przypadku siła nie musi mieć stałego kierunku ani wartości. Kierunek ruchu ciała też może się zmieniać.



Rys.2.4.2. Siły i elementarne przesunięcia na torze AB.

Rozpatrzmy ogólniejszy przypadek zilustrowany na Rys.2.8. Wektor siły, oznaczony kolorem czerwonym, jest funkcją położenia ciała na torze. Kolorem niebieskim oznaczone są elementarne przemieszczenia dla których przyjmujemy, że siła pozostaje stała pod względem wartości, kierunku i zwrotu. Praca elementarna na takim odcinku toru wynosi

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.4.2)$$

Pracę na torze pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  możemy wyznaczyć przez sumowanie elementarnych przyczynków wykonanych na odcinkach toru o długościach dążących do zera. Zauważmy przy tym, że te elementarne przyczynki pracy równe są iloczynom składowej siły stycznej do toru w danym punkcie przez wartość elementarnego przemieszczenia.

Sumowanie to sprowadza się do wyznaczenia wartości całki

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.4.3)$$

## Moc

Szybkość wykonywania pracy przez daną siłę charakteryzuje **moc**, którą wyrażamy jako stosunek pracy  $dW$  do przedziału czasu  $dt$ , w którym praca ta została wykonana.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.4.4)$$

Wzór (2.6) pokazuje, że moc wyrazić można także jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora prędkości ciała, do którego siła ta jest przyłożona. Jak powiemy później, wykonana praca prowadzi do zmiany energii układu fizycznego. Moc charakteryzuje więc także szybkość zmiany energii układu.

Za jednostkę pracy przyjmuje się pracę jednostkowej siły przy przesunięciu równym jednostce długości i kącie pomiędzy wektorami siły i przesunięcia równym zeru.

Jednostką pracy w układzie SI jest jeden dżul ( $1J = 1 \cdot N \cdot m$ )

Jednostką mocy jest taka moc, kiedy jednostkowa praca wykonana jest w jednostce czasu.

Jednostką mocy w układzie SI jest jeden wat ( $1W = 1 \cdot \frac{J}{s}$ ).

## 5. Siły zachowawcze i dyssypatywne

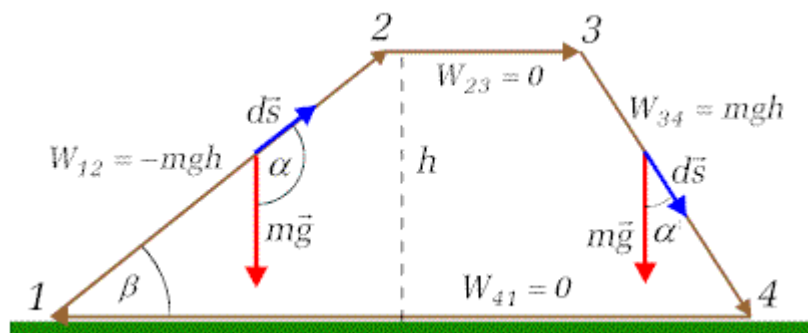


**Fot.2.5.1.** W tym przypadku siła grawitacji wykonuje pracę dodatnią.

Powróćmy do przykładu narciarza. Przykład ten traktujemy jako ilustrację całej klasy ruchów odbywających się pod wpływem siły ciężkości.

Przy podchodzeniu w górę narciarz musi pokonać siłę grawitacji, która skierowana jest pionowo w dół i równa jest ciężarowi narciarza. Praca tej siły przy jego ruchu w górę ma znak ujemny, bowiem kąt  $\alpha$  pomiędzy kierunkiem siły i kierunkiem ruchu jest rozwarty. Narciarz zaś wznosi się dzięki sile swych mięśni. Odwrotnie jest przy zjeździe w dół. Wtedy praca siły ciężkości mieć będzie znak dodatni. Rezultatem działania tej siły będzie nadanie narciarzowi pewnej prędkości.

Zależności te ilustruje Rys.2.5.2. przedstawiający schematycznie trasę narciarza, który wychodzi na górę o wysokości  $h$  z lewej strony wzniesienia (odcinek 1-2) przechodzi poziomy fragment trasy (odcinek 2-3), zjeżdża z prawej (odcinek 3-4), a następnie wraca do punktu wyjścia (odcinek 4-1).



**Rys.2.5.2.** Schemat zamkniętego toru narciarza. Podane są wartości pracy wykonanej przez siłę ciężkości na poszczególnych odcinkach toru.

Wektor siły ciężkości, pokazany kolorem czerwonym, ma kierunek pionowy, a jego wartość wynosi  $m\vec{g}$ . Na pierwszym odcinku toru, od punktu 1 do punktu 2, zaznaczono elementarne przemieszczenie  $d\vec{s}$  oraz kąt, jaki tworzy ono z kierunkiem siły ciężkości, analogicznie do oznaczeń na Rys. 2.1. Wykorzystując wzór (2.1) możemy wyznaczyć wartość pracy  $W_{12}$  wykonanej przez siłę ciężkości na tym odcinku. Oznaczając przez  $s_{12}$  długość tego odcinka otrzymujemy

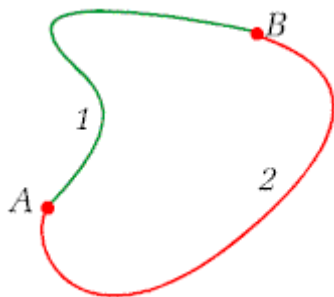
$$\begin{aligned}
 W_{12} &= m \cdot g \cdot s_{12} \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot s_{12} \cdot \cos(90^\circ + \beta) = -m \cdot g \cdot s_{12} \cdot \sin \beta = \\
 &= -m \cdot g \cdot s_{12} \cdot \underbrace{\sin \beta}_{h/s_{12}} = -m \cdot g \cdot h
 \end{aligned}
 \tag{2.5.1}$$

Zauważmy, że praca ta nie zależy od kąta nachylenia stoku. Na odcinku 3-4 wartość pracy będzie taka sama, ale znak będzie dodatni. W przypadku ruchu po poziomej części toru siła ciężkości nie wykonuje żadnej pracy, bowiem kierunek ruchu jest prostopadły do kierunku siły. Sumaryczna praca wyniesie więc

$$W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = -m \cdot g \cdot h + 0 + m \cdot g \cdot h + 0 = 0 \quad (2.5.2)$$

Otrzymaliśmy bardzo ważny wynik. Praca siły grawitacji po torze zamkniętym jest równa zeru. Łatwo zauważyć, że wniosek ten pozostanie słuszny także i wtedy, kiedy tor będzie miał jakikolwiek, choćby bardzo skomplikowany, kształt. Zawsze bowiem możemy rozłożyć tor na sumę dowolnie małych odcinków prostoliniowych sprowadzając problem do rozpatrzonego powyżej.

Z faktu zerowania się pracy na torze zamkniętym wynika inny ważny wniosek. Praca potrzebna na przemieszczenie ciała pod wpływem siły ciężkości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami nie zależy od kształtu drogi a jedynie od położenia samych punktów.



Rzeczywiście, dla dowolnie wybranego toru możemy znaleźć drugi tor stanowiący jego dopełnienie do toru zamkniętego; patrz schemat obok. Fakt zerowania się pracy na drodze zamkniętej zapiszemy w postaci  $(W_{AB})_1 + (W_{BA})_2 = 0$ .

Z drugiej strony, praca na tej samej drodze od punktu A do B i od B do A różni się tylko znakiem, np.  $(W_{AB})_2 = -(W_{BA})_2$ . Biorąc pod uwagę obie te zależności znajdujemy że  $(W_{AB})_1 = (W_{AB})_2$ .

W ruchu narciarza (i w większości innych ruchów) niebagatelną rolę odgrywają jednak także siły oporu powietrza i siły tarcia przy poruszaniu się. Czy praca tych sił po torze zamkniętym też będzie równa zeru?

Pamiętamy (lekcja trzecia, segment czwarty), że siły tarcia skierowane są zawsze przeciwko ruchowi. Podobną własność mają siły oporu ośrodka. Praca tych sił ma więc znak ujemny w czasie całego ruchu. Sumaryczna praca po torze zamkniętym nie będzie więc dla tych sił równa zeru.

**Jeśli praca wykonana przez siłę przy przemieszczeniu ciała po torze zamkniętym o dowolnym kształcie równa jest zeru, to siłę taką nazywamy siłą zachowawczą. Siłę, która nie spełnia tego warunku nazywamy siłą dyssypatywną lub rozpraszącą.**

Przykładem siły zachowawczej jest siła ciężenia, oraz znana nam już siła sprężystości. Do sił dyssypatywnych zaliczamy siły tarcia i siły oporu powietrza.

W dalszej części kursu poznamy jeszcze inne przykłady obu rodzajów sił.

## 6. Energia potencjalna i kinetyczna

Energia, to możliwość wykonania pracy, zaś praca wykonana nad ciałem zmienia jego energię. Energia mechaniczna może występować pod dwoma postaciami: energii potencjalnej - związanej z położeniem ciała w przestrzeni, w której działają siły (przestrzeń taką nazywamy polem sił) oraz energii kinetycznej - związanej z jego ruchem.

## Energia potencjalna

Dla określenia energii potencjalnej ciała musimy najpierw zdefiniować położenie punktu odniesienia względem którego energię tę będziemy określać. Energię potencjalną określamy za pomocą wprowadzonego już pojęcia pracy.

**Energia potencjalna** ciała w danym punkcie, względem określonego punktu odniesienia, równa jest pracy jaką wykonują siły zachowawcze przy przemieszczeniu ciała z danego punktu do punktu odniesienia.

Nie bez powodu zaznaczyliśmy, że chodzi tu o pracę sił zachowawczych. Praca wykonywana przez siły dyssypatywne powoduje wydzielenie się ciepła, wywołuje różnorodne skutki zewnętrzne i zamienia się na inne niż mechaniczne rodzaje energii. Ta rozproszona energia nie stanowi energii potencjalnej ciała.

Stosując definicję energii potencjalnej do naszego przykładu z narciarzem stwierdzamy że:

1. energia potencjalna ciała w polu sił ciężkości w punktach o tej samej wysokości (2 i 3) oraz (1 i 4) jest taka sama,
2. energia potencjalna w punkcie o wysokości  $h$  (na wierzchołku) względem punktu odniesienia (u podnóża góry) wynosi

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

(2.6.1)

taka jest bowiem praca sił ciężkości na trasie od wierzchołka do podnóża,  $W_{34}$  (zob. Rys.2.5.2).

Uogólniając nasze rozważania możemy związek pomiędzy pracą wykonaną przez siły zachowawcze a wartościami energii potencjalnych w zadanych punktach na torze (oznaczymy je literami  $A$  i  $B$ ) oraz przyrostem energii potencjalnej  $\Delta E_p$  zapisać w postaci

$$W_{AB} = E_{p_A} - E_{p_B} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p \quad (2.6.2)$$

Wartość i znak pracy siły zachowawczej przy przesunięciu ciała pomiędzy dwoma dowolnymi punktami określają ubytek energii potencjalnej ciała przy tym przesunięciu, tzn. wziętą ze znakiem minus różnicę energii potencjalnej w punkcie końcowym i początkowym.

Dla ilustracji zapiszmy to dla odcinka trasy narciarza pomiędzy punktami 3 i 2.

$$W_{34} = E_{p_3} - E_{p_4} = -(E_{p_4} - E_{p_3}) = -\Delta E_p \quad (2.6.3)$$

*(Jako ćwiczenie własne określ przyrost energii potencjalnej pomiędzy innymi punktami na trasie narciarza.)*

Kiedy ruch odbywa się wzdłuż kierunku działania siły, na przykład wzdłuż osi  $X$ , możemy zapis wektorowy zastąpić zapisem skalarnym otrzymując związek w postaci

$$dW = F \cdot dx = -dE_p \quad \text{lub} \quad F = -\frac{dE_p}{dx} \quad (2.6.4)$$

W dalszej części kursu fizyki wyrazimy ten ważny związek w bardziej ogólnej postaci.

## Energia kinetyczna

Energię kinetyczną ciała określimy także za pomocą pojęcia pracy. Przekształcimy w tym celu wzór (2.4.3)

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_{v_A}^{v_B} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = \\ &= m \cdot \int_{v_A}^{v_B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \frac{v^2}{2} \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Dokonałiśmy tu zamiany zmiennej całkowania korzystając ze znanej nam już definicji prędkości (patrz wzór (2.3.5)). Zastąpiliśmy także siłę iloczynem masy i przyspieszenia wykorzystując drugą zasadę dynamiki. Wielkość określona wzorem

$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$	(2.6.6)
-------------------------------	---------

nosi nazwę **energii kinetycznej** ciała o masie  $m$  i prędkości  $v$ .

Związek pomiędzy pracą wykonaną nad danym ciałem, a zmianą jego energii kinetycznej możemy więc zapisać w postaci

$$W_{AB} = E_{k_B} - E_{k_A} \quad (2.6.7)$$

### 6.3 Twierdzenie o pracy i energii

Jeśli pracę nad ciałem wykonuje nie jedna, a wiele sił, to zmiana jego energii kinetycznej równa jest pracy wykonanej przez ich siłę wypadkową. Związek pomiędzy pracą wykonaną przez wypadkową działających na ciało sił, a zmianą jego energii kinetycznej - znany jest jako **twierdzenie o pracy i energii**.

**Praca wykonana przez wypadkową sił działających na ciało równa jest zmianie jego energii kinetycznej.**

Nie zawsze zmiana ta jest dodatnia. Praca sił grawitacji nad wyrzuconym do góry przedmiotem powoduje zmniejszenie jego prędkości. Podobny skutek wywołują siły tarcia i oporu powietrza. Prace różnych sił działających równocześnie na ciało mogą mieć różny znak. Pamiętać jednak należy, że twierdzenie o pracy i energii odnosi się do pracy wykonanej przez **wypadkową** wszystkich działających na ciało sił. Zwróćmy też uwagę, że twierdzenie to obejmuje wszelkie działające na ciało siły, włączając w to siły dysypatywne, jak siły tarcia.

Twierdzenie to ma wielkie znaczenie praktyczne przy rozwiązywaniu problemów, kiedy poszukujemy związku pomiędzy zmianą prędkości ciała a wykonaną nad nim pracą.

Zwróćmy też uwagę, że z podanego wyżej określenia energii potencjalnej i kinetycznej wynika, że jednostki energii są takie same jak jednostki pracy.

## 7. Prawo zachowania energii

Zdefiniowaliśmy już energię potencjalną i kinetyczną, a równocześnie pokazaliśmy związek pomiędzy zmianami tych energii, a pracą wykonywaną przez siły działające na ciało. Przypomnijmy jeszcze raz odpowiednie wyrażenia (wzory: (2.6.2), (2.6.7)) - zapisując je dla przypadku, gdy pracę nad ciałem przy przesunięciu z punktu **A** do **B** wykonują wyłącznie siły zachowawcze.

$$W_{AB} = E_{p_B} - E_{p_A} = E_{k_B} - E_{k_A} \quad (2.7.1)$$

Z wzoru tego wynika natychmiast, że

$$E_{p_A} + E_{k_A} = E_{p_B} + E_{k_B} \quad (2.7.2)$$

Widzimy, że suma energii potencjalnej i kinetycznej dla punktów **A** i **B** na drodze poruszającego się ciała jest taka sama. Punkty te są dowolnie wybranymi punktami na torze. Oznacza to, że suma obu rodzajów energii, stanowiąca całkowitą energię mechaniczną ciała, pozostaje stała, kiedy ciało porusza się pod działaniem sił zachowawczych, czyli

$E_p + E_k = \text{const}$	$(2.7.3)$
----------------------------	-----------

Wzór ten wyraża prawo, zwane też **zasadą**, zachowania energii mechanicznej, które sformułować można następująco

### zasada zachowania energii mechanicznej

*Całkowita energia mechaniczna ciała, na które działają tylko siły zachowawcze, jest stała.*

Wzór (2.60) można także zapisać w postaci

$$-(E_{p_B} - E_{p_A}) = E_{k_B} - E_{k_A}, \quad \text{czyli} \quad -\Delta E_p = \Delta E_k \quad (2.7.4)$$

Zapis ten określa prawo zmian energii potencjalnej i kinetycznej ciała gdy działają nań wyłącznie siły zachowawcze. Wówczas ubytkowi energii potencjalnej towarzyszy zawsze równy mu co do wartości bezwzględnej przyrost energii kinetycznej i *vice versa*.

Kiedy na ciało działają siły dyssypatywne zasada zachowania energii mechanicznej nie jest spełniona. Siły te zmieniają energię mechaniczną ciała. Następuje zamiana energii mechanicznej na inne rodzaje energii, np. energię cieplną, chemiczną, elektryczną, jądrową itp.

Zasada zachowania energii może być jednak sformułowana bardziej ogólnie. Rozpatrzmy **układ odosobniony**, czyli taki, który w żaden sposób nie oddziałuje z otoczeniem, a więc nie wymienia ani energii ani masy z otoczeniem i weźmy pod uwagę sumę wszystkich postaci energii w dowolnych procesach zachodzących w tym układzie. Nazwijmy tę energię - całkowitą energią układu. Zasadę zachowania energii możemy sformułować wtedy w sposób ogólny.

### **zasada zachowania energii**

*Energia całkowita układu odosobnionego jest stała.*

Zasada zachowania energii należy do fundamentalnych zasad fizyki, chociaż sformułowana została na podstawie faktów doświadczalnych i może być obalona przez stwierdzenie faktów przeczących jej słuszności. Faktów takich dotychczas nie znaleziono. Ich poszukiwania doprowadziły natomiast do odkrycia wielu efektów fizycznych, których nieuwzględnienie interpretowano początkowo jako niezgodność z zasadą zachowania energii.

## **8. Prawo zachowania pędu**

Przypomnijmy sobie drugą zasadę dynamiki, która mówi, że pochodna pędu ciała względem czasu równa jest sile działającej na ciało.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.8.1)$$

Równanie to można zastosować również do układu ciał. W takim przypadku  $\vec{F}$  oznacza wypadkową wszystkich sił zewnętrznych działających na układ, a  $\vec{P}$  wektorową sumę pędów wszystkich ciał układu, czyli całkowity pęd układu.

Kiedy wypadkowa sił zewnętrznych wynosi zero, to równa jest także zero pochodna całkowitego pędu względem czasu, co oznacza, że sam pęd nie zmienia się, tzn. pozostaje stały co do wartości, kierunku i zwrotu. Stwierdzenie to wyraża zasadę zachowania pędu.

### **zasada zachowania pędu**

*Jeżeli na układ nie działają siły zewnętrzne lub działa układ sił zrównoważonych, to pęd układu pozostaje stały.*

co można krótko zapisać w postaci



<b>Jeżeli</b> $\vec{F}^{(z)} = 0$ <b>to</b> $\vec{p} = \overset{\rightarrow}{const}$	(2.8.2)
--	---------

Zasada zachowania pędu jest kolejną fundamentalną zasadą fizyki.



*Fot.2.8.1. Kształty rozpryskujących się fajerwerków odzwierciedlają bardzo efektownie zasadę zachowania pędu.*

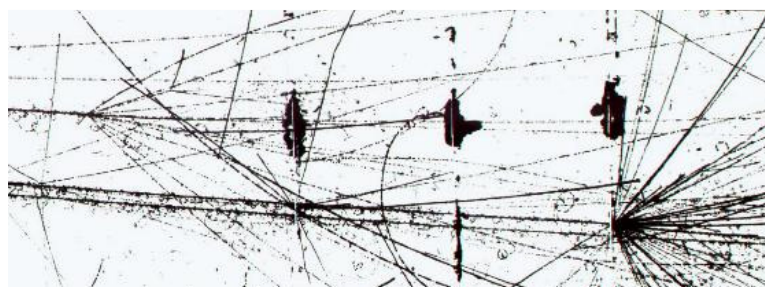
Na szczególne podkreślenie zasługuje niezależność całkowitego pędu układu od wszelkich oddziaływań wewnętrznych pomiędzy jego elementami. Kiedy więc jakiś element układu uzyskuje pęd w wyniku zachodzących w układzie procesów, pozostała część układu uzyskuje pęd o tej samej wartości, lecz przeciwnie skierowany. To właśnie zachowanie pędu jest podstawą działania silników odrzutowych i raketowych, jest też powodem odrzutu przy strzałach z broni palnej itd. Bardzo ciekawym wizualnie przykładem zachowania pędu jest kulisty kształt rozpryskujących się fajerwerków, gdzie suma pędów wszystkich fragmentów pocisku musi być bliska zeru, bo taki jest pęd pocisku u wierzchołka lotu, a siły wybuchu są siłami wewnętrznymi w układzie fajerwerku jako całości, Fot. 2.8.1.

Warto też dodać, że pęd układu nie może być zamieniony na coś innego, w odróżnieniu od energii mechanicznej, która może ulec zamianie na inne rodzaje energii. Zasada zachowania pędu obowiązuje więc także w procesach, w których naruszona jest zasada zachowania energii mechanicznej.

## 9. Przykłady: zderzenia ciał

Zderzenie, to proces w którym na uczestniczące w nim ciała działają wielkie siły, ale w stosunkowo krótkim czasie. Wynikają z tego ważne dla praktycznej analizy wnioski :

1. Działające podczas zderzenia siły są na ogół o wiele większe od innych, długotrwałych sił zewnętrznych działających równocześnie. Te inne siły można na ogół pominąć rozpatrując proces zderzenia.
2. Czas zderzenia jest na tyle krótki, że wyraźnie można wydzielić stan zderzających się ciał "przed" i "po" zderzeniu.
3. Siły występujące podczas zderzenia można zaliczyć do sił wewnętrznych działających w układzie zamkniętym który stanowią zderzające się obiekty, zgodnych z trzecią zasadą dynamiki. (Takie siły nazywa się siłami newtonowskimi.)

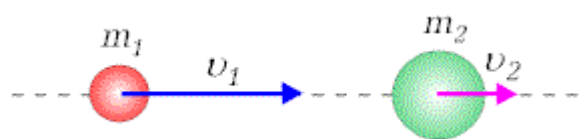


**Fot.2.9.1.** Zderzenia cząstek elementarnych i jąder atomowych; ich analiza stanowi ważny element badań w fizyce jądrowej. Na zdjęciu, zderzenia dwóch jąder węgla (z lewej) oraz jądra węgla z jądrem tantalu (z prawej) zarejestrowane w propanowej komorze pęcherzykowej Zjednoczonego Instytutu Badań Jądrowych w Dubnej. Są to przykłady zderzeń niesprężystych, w których część energii zużyta jest na rozbitcie jąder i produkcję nowych cząstek.

Jeżeli podczas zderzenia zachowana jest energia kinetyczna, to zderzenie takie nazywamy **zderzeniem sprężystym**, jeżeli zachowana nie jest - **zderzeniem niesprężystym**. Prawo zachowania pędu stosować można zawsze, jeśli tylko założenie o braku sił zewnętrznych działających na układ jest spełnione. (W praktyce, można stosować często i w przypadkach gdy na układ zderzających się ciał działają siły zewnętrzne ze względu na wymienioną w punkcie 1. właściwość zderzeń). Jeśli przed zderzeniem ciała poruszały się wzdłuż jednej prostej, to ich zderzenie nazywamy **centralnym**, jeśli wzdłuż prostych nie pokrywających się, to zderzenie nazywamy **niecentralnym lub peryferycznym**.

Badania zderzeń mają zwykle na celu uzyskanie możliwie najpełniejszej informacji o ruchu ciał po zderzeniu na podstawie znajomości stanu początkowego zderzających się ciał. W tym celu stosuje się prawa zachowania do stanów układu ciał przed i po zderzeniu. Okazuje się, że nawet bez znajomości sił działających w procesie zderzenia i wykorzystując jedynie prawa zachowania możemy dowiedzieć się wiele o badanym przez nas procesie.

## Zderzenia sprężyste



Rozpatrzmy przykład sprężystego zderzenia centralnego, na przykładzie zderzenia kul o masach  $m_1$  i  $m_2$  poruszających się wzdłuż

**Rys.2.9.2.** Kule poruszające się z różnymi prędkościami wzdłuż jednej prostej. *jednej prostej z prędkościami  $u_1$  i  $u_2$  w danym układzie odniesienia.*

Zapisać prawa zachowania. Mówią one, że suma pędów oraz energii kinetycznych przed i po zderzeniu są sobie równe. Indeksami ( ' ) oznaczymy prędkości kul po zderzeniu. Rozpatrujemy przypadek jednowymiarowy, więc zasadę zachowania pędu zapiszemy w postaci skalarnej zakładając, że zwroty wszystkich wektorów pędów są jednakowe.

### Prawo zachowania pędu:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \quad (2.9.1)$$

**Prawo zachowania energii:**

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \quad (2.9.2)$$

Przepiszmy te równania nieco inaczej. Równanie (2.9.1) zapisujemy w postaci

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \quad (2.9.3)$$

Analogicznie przepisujemy równanie (2.9.2)

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2) \quad (2.9.4)$$

Dzieląc stronami równanie (2.9.4) przez (2.9.3) i wykonując elementarne działania arytmetyczne otrzymujemy związek, który jest niezależny od mas zderzających się kul. (Zakładamy, że różnice prędkości w równaniu (2.9.3) nie są równe zero.)

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2, \quad (2.9.5)$$

Związek ten można przepisać w postaci

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \quad (2.9.6)$$

Uzyskaliśmy pierwszy rezultat. Prędkość zbliżania się kul przed zderzeniem równa jest prędkości ich oddalania się po zderzeniu czyli ich prędkości względne przed i po zderzeniu są takie same.

Możemy teraz wyznaczyć prędkości kul po zderzeniu. Z równanie (2.9.6) widać, że

$$v_2' = v_1 - v_2 + v_1' \quad (2.9.7)$$

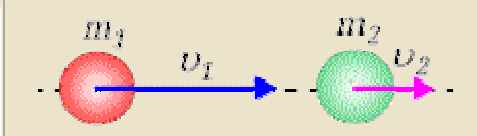
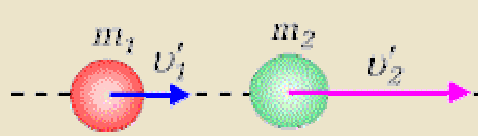

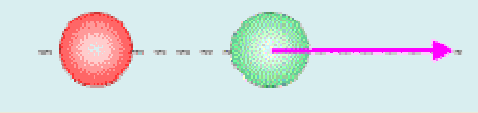
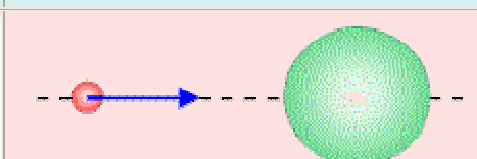
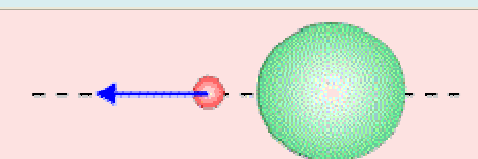
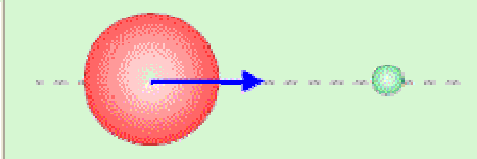
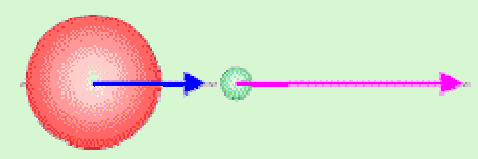
Podstawiając to do równania (2.9.7) możemy wyznaczyć prędkość pierwszej kuli po zderzeniu

$v_1' = v_1 \cdot \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) + v_2 \cdot \left( \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right)$	(2.9.8)
--	---------

Podobnie uzyskuje się wzór na prędkość drugiej kuli po zderzeniu

$$v_2' = v_2 \cdot \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) + v_1 \cdot \left( \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \right) \quad (2.9.9)$$

Uzyskaliśmy poszukiwane wzory ogólne na prędkości kul po zderzeniu. Rozpatrzmy teraz kilka szczególnych i ciekawych przypadków podstawiając założone warunki do wzorów (2.9.8) i (2.9.9). Zamieszczona poniżej tabela określa te warunki i pokazuje ich ilustrację graficzną przed i po zderzeniu.

	Warunek	Przed zderzeniem	Po zderzeniu
A	$m_1 = m_2$		
		kule wymieniają się prędkościami	$v_1' = v_2$ oraz $v_2' = v_1$
B	$m_1 = m_2$ $v_2 = 0$		
		pierwsza kula zatrzymuje się po zderzeniu, druga porusza się z prędkością pierwszej przed zderzeniem	$v_1 = 0$ oraz $v_2' = v_1$
C	$m_2 \gg m_1$ $v_2 = 0$		
		pierwsza kula odbije się z prawie niezmienną prędkością, druga (praktycznie) pozostaje w spoczynku	$v_1' \cong -v_1$ oraz $v_2' \cong 0$
D	$m_2 \ll m_1$ $v_2 = 0$		
		pierwsza kula prawie nie zmieni swej prędkości, druga uzyska podwójną prędkość pierwszej	$v_1' \cong v_1$ oraz $v_2' \cong 2 \cdot v_1$

*Rys.2.9.3. Różne przypadki zderzeń sprężystych kul*

Podamy dwa przykłady opisanych tu przypadków zderzeń sprężystych.

**Pierwszy dotyczy procesu spowalniania neutronów.** Jak osłonić się przed strumieniem szybkich neutronów? Czy stawiać ścianę z ołowiu, czy może zastosować "płaszcz" wodny? Neutrony nie posiadają ładunku elektrycznego i nie wywołują jonizacji ale ulegają sprężystym rozproszeniom na jądrach atomowych. Kiedy neutron trafia w ośrodek złożony z ciężkich jąder, to jego zachowanie podobne jest do zachowania się kuli pierwszej z przykładu C. Neutron będzie odbijał się wielokrotnie od ciężkich jąder, ale jego energia pozostanie prawie niezmienną. W rezultacie opuści materiał i nie zostanie zahamowany. Kiedy jednak znajdzie się w ośrodku złożonym z lekkich jąder, to bardzo szybko nastąpi wymiana jego energii z innymi jądrami o niewielkiej masie, podobnie jak w rozpatrywanym przez nas przypadku B. Widać, że znacznie lepszym materiałem spowalniającym neutrony jest woda, bowiem jądrami atomów wodoru są protony o masie bardzo bliskiej masy neutronów. Jądra ołowiu mają zaś masę ponad 200 razy większą od masy neutronu.

**Drugi przykład - to odbijanie piłki o powierzchnię Ziemi.** Masa Ziemi jest znacznie większa od masy piłki i prędkość Ziemi przed i po zderzeniu jest praktycznie taka sama, zaś piłka odbija się w przeciwnym kierunku i z podobną prędkością, podobnie jak w przykładzie C.

## Zderzenia niesprężyste

Gdyby po zderzeniu kule zlepily się i dalej poruszały wspólnie z tą samą prędkością  $v_{12}$  mielibyśmy do czynienia ze zderzeniem całkowicie niesprężystym, zwanym też - doskonale plastycznym. W takim zderzeniu nie jest zachowana energia kinetyczna, kule zwykle ulegają odkształceniu i rozgrzaniu, pewna energia zużyta jest na ich zlepienie itp. Spełnione jest jednak prawo zachowania pędu.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12} \quad (2.9.10)$$

Z równania tego natychmiast wyznaczmy wspólną prędkość  $v_{12}$  połączonych razem kul

$$v_{12} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.9.11)$$

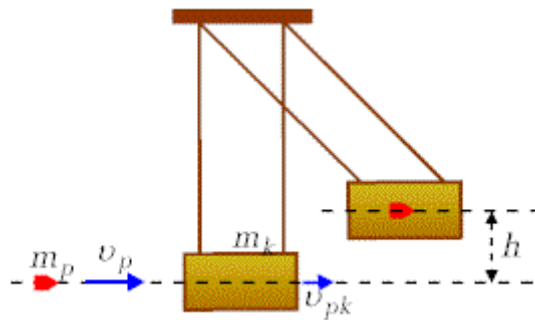
Przekonaj się jednak, że zachodzi nierówność:

$$E_{k_{12}} = (m_1 + m_2) \cdot \frac{v_{12}^2}{2} < (E_{k_1} + E_{k_2}) = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} \quad (2.9.12)$$

W układzie odniesienia poruszającym się z prędkością  $v_{12}$  pęd połączonych z sobą kul wynosi oczywiście zero, bo w swym własnym układzie kule nie poruszają się. Wynika stąd ciekawy wniosek. Prędkość  $v_{12}$ , to prędkość przy której sumaryczny pęd kul był równy zeru także przed zderzeniem, co wynika bezpośrednio z zasady zachowania pędu. Konsekwentnie - także sumaryczny pęd kul po zderzeniu sprężystym musi być równy zeru w tym układzie, ponieważ jest równy pędowi kul przed zderzeniem. Układ, w którym sumaryczny pęd wszystkich ciał wchodzących w jego skład równy jest zeru nazywamy układem środka masy.

## Wahadło balistyczne

Przykładem, w którym wykorzystujemy prawo zachowania pędu w procesie zderzenia niesprężystego, jak i prawo zachowania energii dla sił zachowawczych, jest tzw. wahadło balistyczne służące do pomiaru szybkości pocisków.



Wahadło to stanowi klocek drewniany o masie  $m_k$  zawieszony na lekkiej linie. Pocisk o masie  $m_p$  poruszający się z prędkością  $v_p$  uderza w klocek i grzęźnie w nim, a cały układ uzyskuje prędkość  $v_{pk}$ . Jest to typowy przykład zderzenia niesprężystego, w którym energia mechaniczna nie jest zachowana.

Rys 2.9.4. Wahadło balistyczne

Prawo zachowania pędu jest jednak spełnione i wymaga by

$$m_p \cdot v_p = (m_p + m_k) \cdot v_{pk} \quad (2.9.14)$$

Po uderzeniu pocisku wahadło uzyskuje prędkość  $v_{pk}$  i energię kinetyczną

$$E_k^{(pk)} = \frac{(m_p + m_k)}{2} \cdot v_{pk}^2 \quad (2.9.15)$$

Układ znajduje się pod działaniem zachowawczej siły ciężkości, która sprawia, że prędkość wahadła zmniejsza się do zera po osiągnięciu wysokości  $h$ , zaś cała energia kinetyczna układu zamienia się w energię potencjalną. Możemy więc teraz zastosować prawo zachowania energii. Otrzymujemy związek

$$\frac{(m_p + m_k)}{2} \cdot v_{pk}^2 = (m_p + m_k) \cdot g \cdot h \quad (2.9.16)$$

skąd wyznaczamy natychmiast prędkość początkową układu

$$v_{pk} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}, \quad (2.9.17)$$

a ze wzoru (2.29) - prędkość pocisku

$$v_p = \frac{(m_p + m_k)}{m_p} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (2.9.18)$$

Znając prędkość, możemy wyznaczyć energię kinetyczną pocisku

$$E_k^{(p)} = \frac{m_p}{2} \cdot v_p^2 = \frac{(m_p + m_k)^2}{m_p} \cdot g \cdot h \quad (2.9.19)$$

oraz jej stosunek do energii kinetycznej układu

$$\frac{E_k^{(p)}}{E_k^{(pk)}} = \frac{(m_p + m_k)}{m_p} = 1 + \frac{m_k}{m_p} > 1 \quad (2.9.20)$$

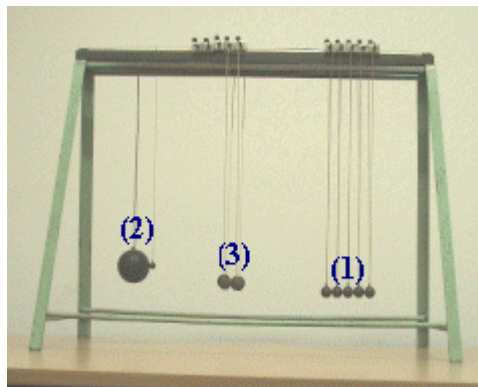
Stosunek ten jest znacznie większy niż 1 bowiem masa kloca jest zwykle znacznie większa od masy pocisku. Stracona energia mechaniczna zamieniła się na ciepło powodując rozgrzanie pocisku i kloca.

## Doświadczenia

Sfilmowaliśmy doświadczenia wykonane z wykorzystaniem zestawów kul:

- (1) pięć jednakowych kul - zderzenia sprężyste.
- (2) mała kulka i duża kula - zderzenia sprężyste.
- (3) kulki plastelinowe - zderzenia niesprężyste.

Obejrzyj te doświadczenia klikając odpowiednio w polu obrazka, bądź wykorzystując inne dostępne połączenia.



Fot. 2.9.5. Zestawy kul.

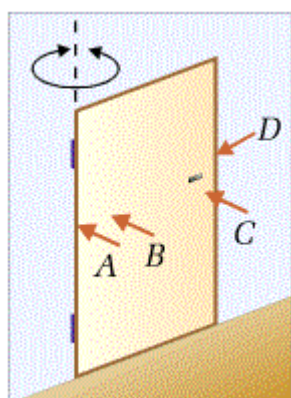
## 10. Opis ruchu obrotowego



*Fot.2.10.1. Ruch śmigła samolotu, to jeden z wielu przykładów ruchu obrotowego.*

Z ruchem obrotowym spotykamy się równie często jak z ruchem postępowym - zaczynając od otwierania drzwi, poprzez obracające się koła rowerów, samochodów czy pociągów, kręcące się wirniki silników elektrycznych, wirujące śmigła samolotów i helikopterów... aż po ruch planet i innych ciał niebieskich.

Ruch obrotowy posiada szereg specyficznych cech zasługujących na uwagę i wyjaśnienie. Dlaczego rower przewraca się kiedy stoi, a zachowuje pozycję pionową, kiedy jest w ruchu? Dlaczego baletnica na lodzie podnosi w górę ręce by kręcić piruety? Po co w helikopterach instaluje się śmigło ustawione pionowo? Czy Ziemia zużywa energię, gdy kręci się wokół Słońca?



Powiedzieliśmy w lekcji trzeciej, że siły są przyczyną zmiany stanu ruchu ciał. Zmiana ta zależy nie tylko od samej wartości działającej siły, ale także od miejsca jej przyłożenia oraz kierunku jej działania. Rysunek 2.10.2. pokazuje cztery przykłady działania na drzwi tą samą siłą. W przypadkach *A* i *D* działająca siła nie spowoduje ruchu drzwi. W przypadku *B* potrzebne jest przyłożenie znacznej siły. Najłatwiej poruszyć drzwi przykładając siłę w pobliżu punktu *C* i tam właśnie instaluje się klamki.

*Rys. 2.10.2. Skutek działania siły wywieranej na drzwi zależy od miejsca jej przyłożenia i kierunku jej działania.*

Ten prosty przykład ilustruje specyficzne cechy ruchu obrotowego. Ruch odbywa się wokół określonej prostej, zwanej osią obrotu. Widzimy, że ważną rolę odgrywa odległość punktu przyłożenia siły od tej osi. Prędkość i przyspieszenie punktów poruszających się ruchem obrotowym też są zależne od odległości od osi obrotu, nie są więc jednakowe dla wszystkich punktów. Jak więc formułować równania dynamiki, gdy działa siła jedna, a przyspieszenia różnych punktów są różne?

Wspólny jest jednak kąt obrotu. Gdyby więc zamiast przemieszczenia liniowego rozważać przemieszczenie kątowe, opis byłby o wiele prostszy. Widać, że celowe jest wprowadzenie wielkości specyficznych dla ruchu obrotowego i dla nich formułować równania dynamiki. To właśnie będzie przedmiotem lekcji, którą rozpoczynamy.

Powiedzieliśmy już, że w ruchu obrotowym wszystkie punkty poruszającego się ciała zataczają okręgi, których środki leżą na osi obrotu. Oś ta nie musi jednak zachowywać stałego położenia w czasie ruchu; może zmieniać swą orientację i może się przesuwać. Bardzo często mamy więc do czynienia z kombinacją ruchu postępowego i obrotowego. W

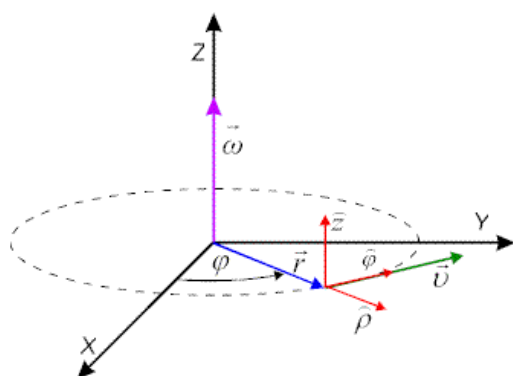


lekcji trzeciej dowiedzieliśmy się, że ruch postępowy układu punktów materialnych możemy opisać zakładając, że wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działa na jeden punkt, którym jest środek masy układu. W czasie ruchu postępowego ciało może wykonywać także ruch obrotowy. Możemy jednak oddzielić ruch postępowy od obrotowego opisując ruch postępowy środka masy. Pozostaje wtedy tylko opis ruchu obrotowego.

Ogólnie mówiąc, ruch obrotowy może odbywać się wokół osi obrotu, lub wokół punktu. Ruch wokół punktu ma miejsce wtedy, kiedy każdy punkt układu porusza się po powierzchni sfery o wspólnym środku zwanym punktem obrotu. Ruch ten można jednak rozłożyć na trzy składowe ruchy wokół trzech osi (np. osi układu współrzędnych prostokątnych). Rozważania nasze ograniczymy więc do ruchu wokół stałej osi obrotu.

Wyobraźmy sobie obracającą się tarczę. Prędkości różnych punktów tarczy są różne. Najszybciej poruszają się punkty na obwodzie tarczy, punkty położone bliżej osi poruszają się wolniej. Widzimy, że w opisie ruchu obrotowego pojęcie prędkości liniowej (1.3.5) należy zastąpić pojęciem prędkości kątowej jednakowej dla wszystkich punktów obracającego się ciała. Wartość prędkości kątowej równa jest pochodnej względem czasu kąta zakreślanego przez promień wodzący (Rys. 2.10.3)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.10.1)$$



Prędkość kątowa jest wektorem o kierunku pokrywającym się z osią obrotu. Zwrot wektora zgodny jest z regułą śruby prawoskrętnej. Przy zmianie kierunku ruchu obrotowego zwrot tego wektora zmieni się na przeciwny. Wektor prędkości kątowej można przedstawić jako:

$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{z}$	(2.10.2)
--	----------

gdzie  $\hat{z}$  jest wersorem o kierunku osi obrotu. Jeżeli prędkość kątowa zachowuje stałą wartość, to w ruchu tym możemy wyrazić moduł prędkości kątowej jako  $\omega = \varphi/t$  gdzie  $\varphi$  jest kątem obrotu wykonanym w czasie  $t$ .

Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę.

**Rys. 2.10.3.** Określenie wektora prędkości kątowej  $\vec{\omega}$ .

Ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową opisuje się także podając czas, w którym poruszające się ciało wykonuje jeden pełny obrót, czyli kiedy kąt obrotu wynosi  $2\pi$ . Czas ten, oznaczany zwykle jako  $T$ , nosi nazwę **okresu** w ruchu obrotowym. Liczbę obrotów wykonanych przez ciało w czasie jednej sekundy, czyli odwrotność okresu, nazywa się **częstotliwością** i oznacza zwykle jako  $\nu$  lub  $f$ . Zapiszmy relacje pomiędzy tymi wielkościami.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \quad v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot v \quad (2.10.3)$$

Jednostką okresu jest sekunda, jednostką częstotliwości jest jeden herc (Hz); jego wymiarem jest odwrotność sekundy.

Kiedy prędkość kątowna zmienia się w czasie mówimy o ruchu obrotowym przyspieszonym.

**Przyspieszenie kątowe**,  $\vec{\varepsilon}$ , które charakteryzuje zmianę prędkości kątovej w czasie, określamy jako pochodną prędkości kątovej względem czasu, czyli drugą pochodną współrzędnej kątovej  $\varphi$  względem czasu

$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$	(2.10.4)
--	----------

gdzie  $\vec{\varphi} = \vec{z} \cdot \varphi$ . Kierunek wektora przyspieszenia kątowego określony jest więc przez kierunek zmiany prędkości kątovej.

Związek prędkości liniowej i kątovej dany jest wzorem:

$$v = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega \quad (2.10.5)$$

Możemy też wyrazić składową normalną wektora przyspieszenia przez prędkość kątową.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2 \quad (2.10.6)$$

gdzie  $r$  jest promieniem krzywizny toru.

Wartość przyspieszenia kątowego wiąże się ze składową styczną wektora przyspieszenia zależnością

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r \cdot \omega)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon \quad (2.10.7)$$

przyjmujemy bowiem, że wartość  $r$  nie zmienia się w czasie.

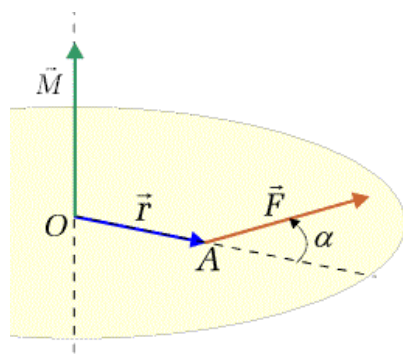
Przypominamy, że powyższe relacje spełnione są przy założeniu, że ruch obrotowy zachodzi wokół ustalonej osi obrotu.

## 11. Równanie ruchu obrotowego

### Moment siły i moment pędu

Wielkością która dla ruchu obrotowego stanowi odpowiednik siły w ruchu postępowym jest moment siły. Moment siły zdefiniowany jest zawsze względem określonego punktu w przestrzeni, choć w czasie ruchu położenie tego punktu może się zmieniać.

Rozważmy punkt materialny A, na który działa siła  $\vec{F}$ . Na rysunku 2.11.1 pokazany jest schemat geometryczny ilustrujący definicję momentu siły. Oczywiście, płaszczyzna, w której leżą wektory  $\vec{F}$  i  $\vec{r}$  może być dowolnie ułożona w przestrzeni.



Moment siły  $\vec{F}$  przyłożonej w punkcie A, określony względem punktu O, jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego  $\vec{r}$  mającego początek w punkcie O i siły  $\vec{F}$ ,

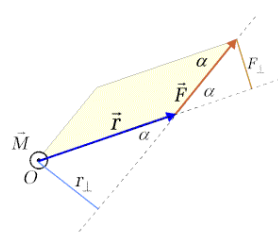
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	(2.11.1)
------------------------------------	----------

Zwróćmy uwagę, że jest to jednocześnie moment siły  $\vec{F}$  względem osi, na której leży punkt O, prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ .

### Rys.2.11.1. Moment siły $\vec{M}$ .

Na rysunku 2.11.1 kolorem kremowym zaznaczona jest płaszczyzna wyznaczona przez wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ . Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, wektor momentu siły jest prostopadły do tej płaszczyzny. Zwrot tego wektora określony jest przez regułę śruby prawoskrętnej. Bezwzględna wartość momentu siły wynosi

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha \quad (2.11.2)$$



Rys.2.11.2. Rzut na płaszczyznę wyznaczoną przez wektor siły,  $\vec{F}$  i promień wodzący  $\vec{r}$ .

Wartość momentu siły możemy wyrazić jako iloczyn siły przez składową promienia wodzącego prostopadłą do siły. Składową tą nazywamy ramieniem siły. Jest to odległość kierunku działania siły od osi obrotu.

$$M = (r \cdot \sin \alpha) \cdot F = r_{\perp} \cdot F \quad (2.11.3)$$

Możemy też wydzielić składową siły prostopadłą do promienia wodzącego. Wówczas wartość momentu siły możemy zapisać w postaci

$$M = r \cdot (F \cdot \sin\alpha) = r \cdot F_{\perp} \quad (2.11.4)$$

Widać, że wartość momentu siły określa składowa promienia wodzącego prostopadła do kierunku działania siły lub składowa siły prostopadła do promienia wodzącego. Kiedy kierunek siły pokrywa się z kierunkiem promienia wodzącego moment siły równy jest zeru. Kolorem kremowym na Rysunku 2.4 zaznaczony jest równoległobok oparty na wektorach  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ . Pole tego równoległoboku równe jest wartości bezwzględnej momentu siły. Kierunek wektora momentu siły jest w tym przypadku prostopadły do ekranu, a zwrot jest w naszą stronę, co zaznaczamy symbolem  $\odot$ .

Jakie będą skutki działania momentu siły na punkt materialny o masie  $m$ ? Składowa siły prostopadła do promienia wodzącego nadaje przyspieszenie zgodne z kierunkiem ruchu punktu, znane nam z lekcji drugiej jako przyspieszenie styczne. Wykorzystując wzór (2.11.3) możemy więc napisać

$$M = r \cdot F_{\perp} = r \cdot m \cdot a_s = r \cdot m \cdot r \cdot \varepsilon = m \cdot r^2 \cdot \varepsilon = I \cdot \varepsilon \quad (2.11.5)$$

Wprowadzona tu wielkość

$I = m \cdot r^2$	(2.11.6)
-------------------	----------

zwana **momentem bezwładności punktu materialnego**, odgrywa zasadniczą rolę w opisie ruchu obrotowego i będzie omawiana szczegółowo w dalszej części tej lekcji.

Podobnie jak wektor momentu siły określa się **wektor momentu pędu** względem osi obrotu (lub punktu  $O$ ). Jest on równy iloczynowi wektorowemu promienia wodzącego i pędu punktu materialnego.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$	(2.11.7)
---	----------

## Równanie Newtona dla ruchu obrotowego

Wartość momentu pędu punktu materialnego poruszającego się po okręgu ze stałą prędkością  $v$  można wyrazić:

$$L = r \cdot p = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot (\omega \cdot r) = m r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega \quad (2.11.8)$$

Wzór (2.11.8) można zapisać wektorowo:

$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$	(2.11.9)
----------------------------------	----------

Wektor momentu pędu ma kierunek zgodny z kierunkiem osi obrotu podobnie jak wektor prędkości kątowej.

Przekształćmy teraz drugą zasadę dynamiki do postaci opisującej ruch obrotowy. Pomnóżmy w tym celu wektorowo obie strony równania (2.1.4) przez  $\vec{r}$ . Otrzymujemy równanie

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.11.10)$$

Widzimy, że lewa strona tego równania jest znanym nam już momentem siły. Dla znalezienia znaczenia fizycznego prawej strony obliczmy pochodną względem czasu momentu pędu.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.11.11)$$

Zauważamy natychmiast, że pierwszy człon po prawej stronie tego wzoru równy jest zeru. Wynika to z własności iloczynu wektorowego. Pochodna wektora promienia wodzącego względem czasu, to z definicji wektor prędkości, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem wektora pędu ciała, a iloczyn wektorowy dwóch wektorów równoległych jest równy zeru. W rezultacie otrzymujemy.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.11.12)$$

Podstawiając ten związek do równania (2.11.10) i pamiętając w dalszym ciągu, że lewa strona równania (2.11.10) jest momentem siły (2.11.1), mamy

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$	(2.11.13)
---------------------------------	-----------

Wyraziliśmy w ten sposób drugą zasadę dynamiki poprzez związek pomiędzy momentem siły i pochodną momentu pędu względem czasu. Związek ten jest zwany **drugą zasadą dynamiki ruchu obrotowego**.

Zakładając, że moment bezwładności zachowuje w czasie ruchu wartość stałą  $I = \text{const}$ , możemy zapisać pochodną momentu pędu względem czasu w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\epsilon} \quad (2.11.14)$$

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego może więc być zapisana także w formie

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\omega}$$

(2.11.15)

## 12. Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Pamiętamy, że energia kinetyczna  $E_k$  punktu materialnego równa jest połowie iloczynu jego masy  $m$  przez kwadrat jego prędkości  $v$ :

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (2.12.1)$$

Energia kinetyczna posiada własność addytywności. Oznacza to, że energia kinetyczna układu  $N$  punktów materialnych równa jest sumie ich energii kinetycznych.

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} \quad (2.12.2)$$

Rozważmy ruch obrotowy układu **sztwno związanych** punktów materialnych. Typowym przykładem takiego układu jest ciało sztywne. Pamiętamy, że w ruchu obrotowym prędkość  $v_i$  poruszającego się punktu  $i$  zależna jest od jego odległości od osi obrotu  $r_i$  natomiast prędkość kątową  $\omega$  jest dla wszystkich punktów taka sama. Prędkość liniowa punktu  $i$  wiąże się z prędkością kątową związkiem:

$$v_i = r_i \cdot \omega \quad (2.12.3)$$

Wykorzystamy te informacje zapisując wyrażenie dla energii kinetycznej układu punktów materialnych będących w ruchu obrotowym.

$$E_k = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \cdot r_i^2) \quad (2.12.4)$$

Rozpoznajemy tu wprowadzoną wzorem (2.12.11) wielkość  $I$  zwaną momentem bezwładności, która dla układu punktów materialnych określona jest wyrażeniem

$$I = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot r_i^2)$$

(2.12.5)

Zwróćmy uwagę, że moment bezwładności nie stanowi własności ciała, jak np. masa. W jego określeniu występuje bowiem kwadrat odległości od punktu względem którego następuje obrót, jest więc zależny od położenia tego punktu w przestrzeni. Można powiedzieć, że moment bezwładności względem danej osi obrotu określa sposób przestrzennego rozłożenia masy względem tej osi w kierunku do niej prostopadłym.

Energię kinetyczną ruchu obrotowego sztywnego układu punktów materialnych wyrażamy więc wzorem

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad (2.12.6)$$

Widzimy, że wzór na energię kinetyczną w ruchu obrotowym ma podobną postać do wzoru (2.6.6), ale prędkość zastąpiła prędkość kątową, a masę zastąpił moment bezwładności.

### 13. Moment bezwładności bryły sztywnej

Ciało sztywne traktujemy jako układ nieskończenie wielu punktów materialnych, których wzajemne odległości pozostają niezmiennic w czasie ruchu. Moment bezwładności dla ciała sztywnego wyznaczmy więc zastępując sumowanie we wzorze (2.12.5) całkowaniem po całej objętości ciała. Odpowiada to wykonaniu przejścia granicznego

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\Delta m_i \cdot r_i^2) = \int_M r^2 dm \quad (2.13.1)$$

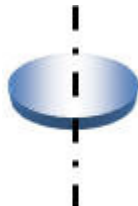
gdzie  $\Delta m_i$  jest elementem masy ciała znajdującym się w odległości  $r_i$  od osi obrotu. Element masy możemy z kolei wyrazić przez element objętości, jeśli tylko znamy gęstość ciała  $\rho$  w danym jego miejscu pamiętając, że  $dm = \rho \cdot dV$ . Wzór na moment bezwładności ciała sztywnego możemy więc zapisać w postaci

$$I = \int_V (r^2 \cdot \rho) dV \quad (2.13.2)$$

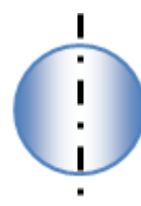
Przykładowe momenty bezwładności dla kilku typowych brył podano poniżej.



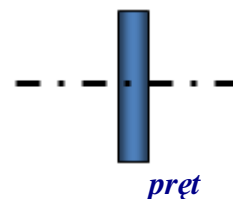
*kula*  
 $I = \frac{2mR^2}{5}$



*tarcza*  
 $I = \frac{mR^2}{2}$



*tarcza*  
 $I = \frac{mR^2}{4}$



*pręt*  
 $I = \frac{mR^2}{12}$

Zwróćmy uwagę, że o ile masa danego ciała określona jest jednoznacznie, to moment bezwładności jest różny dla różnych osi obrotu. Można pokazać, że jeśli znany jest moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała  $I_{cm}$ , to moment bezwładności względem osi do niej równoległej i przesuniętej o odcinek  $d$  dany jest wzorem:

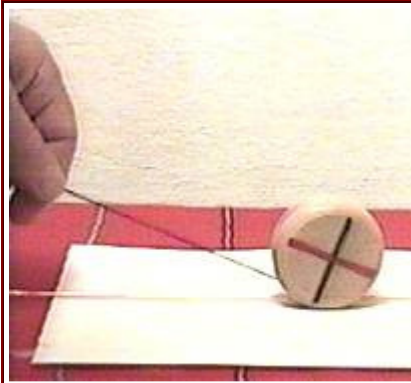
$$I = I_{cm} + M \cdot d^2$$

(2.13.3)

Wzór ten nosi nazwę twierdzenia Steinera.

Na zakończenie - proste doświadczenie w domowym laboratorium fizycznym, gdzie możesz wykorzystać wiele ze zdobytych już wiadomości. Najpierw zastanów się jaka będzie odpowiedź na zawarte poniżej pytania, potem zobacz demonstrację, następnie postaraj się poprzeć swe obserwacje rachunkowo.

### Domowe Laboratorium Fizyczne



Odpowiedz - gdy ciągniemy za nić nawiniętą na szpulce, jak to jest pokazane na fotografii obok, to czy nić będzie się:

- 1. nawijać** - szpulka potoczy się w lewo,
- 2. odwijać** - szpulka potoczy się w prawo,
- 3. ani nawijać, ani odwijać** - szpulka przesunie się w lewo bez toczenia ?

Od czego to będzie zależeć, np.: od masy szpulki, ilości nawiniętej na szpulce nici, kąta pomiędzy kierunkiem ciągniętej nici i płaszczyzną stołu, współczynnika tarcia szpulki o stół, od czegoś innego jeszcze...?

Postaraj się odpowiedzieć przed uruchomieniem pokazu, a teraz sprawdź swą odpowiedź klikając w polu fotografii.

Na koniec, kiedy znasz już odpowiedź, popisz się przed domownikami pytając ich o to samo.

## 14. Zasada zachowania momentu pędu

Drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego (2.11.13) można zapisać dla układu wielu ciał, jeśli moment siły zastąpimy wektorową sumą wszystkich zewnętrznych momentów sił działających na układ a moment pędu oznaczać będzie całkowity moment pędu układu, czyli wektorową sumę momentów pędów poszczególnych ciał. W ten sposób uzyskujemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego układu wielu ciał:

$$\vec{M}_{zewn} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.13.1)$$

Kiedy więc wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ równy jest zeru, to pochodna momentu pędu względem czasu równa jest zeru, co oznacza, że moment pędu pozostaje stały. Jest to treścią kolejnego podstawowego prawa mechaniki - zasady zachowania momentu pędu

### zasada zachowania momentu pędu

*Jeżeli wypadkowy moment sił wewnętrznych działających na układ równy jest zeru, to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.*



Jeśli sztywny układ punktów materialnych lub ciało sztywne jest układem symetrycznym względem osi obrotu, to całkowity moment pędu będzie równoległy do osi obrotu i zgodny z kierunkiem wektora prędkości kątowej. Mamy wtedy

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (2.13.2)$$

Zapisaaliśmy tę zależność w postaci wektorowej pamiętając, że odnosi się to do przypadków układów symetrycznych względem osi obrotu.

Jeśli na układ nie działają siły zewnętrzne lub moment sił zewnętrznych względem możliwej osi obrotu wynosi zero, to zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, całkowity moment pędu układu pozostaje niezmienny. Z drugiej strony, moment pędu układów symetrycznych przy obrotach wokół osi symetrii, jest iloczynem momentu bezwładności ciała i jego prędkości kątowej. Jeśli więc zmienia się moment bezwładności ciała (bez wpływu sił zewnętrznych), to musi zmienić się także prędkość kątowa, by moment pędu pozostał niezmienny.

Powróćmy do pytań postawionych we wstępie do tej lekcji. Nie dziwi nas, że koło rowerowe wprawione w ruch obrotowy, któremu nadaliśmy określony pod względem wartości i kierunku moment pędu, może się długo obracać - bo zachowuje się wartość bezwzględna momentu pędu, a moment sił hamujących w łożyskach o niewielkiej średnicy jest stosunkowo mały. Nie dziwi nas też, że rower w ruchu nie przewraca się - bo kierunek wektora momentu pędu kół jest zachowany. To tu właśnie leży tajemnica piruetów kręconych na lodzie, kiedy łyżwiarz przyciągając do siebie ręce lub podnosząc je do góry zmniejsza wartość momentu bezwładności względem osi obrotu, a w konsekwencji zwiększa się jego prędkość kątowa. Wiemy, że helikopter kręciłby się wokół osi pionowej, gdyby nie było dodatkowego śmigła równoważącego moment pędu uzyskany wskutek obrotu śmigła zasadniczego. Rozumiemy dlaczego układ Słoneczny zachowuje swą stabilność przy braku działających z zewnątrz momentów sił. Pamiętajmy jednak, że planety nie są punktami materialnymi i ich ruch obrotowy wokół własnej osi musi być brany pod uwagę w ogólnym bilansie momentu pędu. Więcej o ruchu ciał pod wpływem sił grawitacji powiemy w lekcji ósmej.

## **Pokazy z sali wykładowej Wydziału Fizyki PW**

Oto pokazy prezentujące doświadczalne potwierdzenie **zasady zachowania momentu pędu** opracowane przez dr **Krystynę Wosińską** przy współudziale studentów Wydziału Fizyki PW: Hani, Marcina i Michała.

Zobaczmy, jak zmiana momentu bezwładności układu wpływa na prędkość kątową, kiedy na układ nie działa zewnętrzny moment siły.

### **hantle**

Pokazy z sali wykładowej Wydziału Fizyki P.W.



### Zasada zachowania momentu pędu I

$\Leftarrow$ =( Moment bezwładności duży -  
prędkość kątowna mała

Moment bezwładności mały -  
prędkość kątowna duża  
) $\Rightarrow$



Hania rozpoczyna ruch wirowy trzymając w wyciągniętych rękach dwa ciężarki. Kiedy przyciąga je do siebie, czyli zbliża do osi obrotu, moment bezwładności układu zmniejsza się, a prędkość kątowna rośnie, bowiem:  $L_z = I \cdot \omega = const$  gdzie:  $L_z$  - składowa pionowa momentu pędu,  $I$  - moment bezwładności,  $\omega$  - prędkość kątowna. Kiedy Hania wyprostowuje ręce, czyli zwiększa moment bezwładności względem osi obrotu, prędkość kątowna maleje.

## koło rowerowe

Inne doświadczenie ilustrujące **zasadę zachowania momentu pędu**:

Początkowo oś koła, a więc i wektor momentu pędu skierowane są poziomo. Składowa pionowa wektora momentu pędu równa jest zeru.

Pokazy z sali wykładowej Wydziału Fizyki P.W.



### Zasada zachowania momentu pędu II

$\Leftarrow$ =( Marcin otrzymuje wirujące koło.

Marcin obraca oś wirującego koła do pionu.  
) $\Rightarrow$



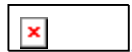
W czasie obracania osi koła moment pędu koła nie jest zachowany - Marcin musi wywierać znaczną siłę na obracaną oś, a także na oparcie krzesła. Moment siły reakcji więzów zmienia

moment pędu koła - po obrocie moment pędu koła skierowany jest pionowo. Ponieważ jednak działające w czasie obracania siły były siłami wewnętrznymi (działającymi w układzie Marcin - krzesło) składowa pionowa całkowitego momentu pędu układu pozostaje równa zero. Marcin obraca się teraz wraz z wirującym kołem wokół osi pionowej w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu koła, a wartość jego momentu pędu  $L_M$  jest równa wartości momentu pędu koła  $L_k$ :

$$L_M = L_k.$$

**Zatrzymujemy Marcina.** Moment pędu Marcina został przekazany Ziemi. Moment pędu koła nie zmienił się - nadal wynosi  $L_k$ .

**Marcin obraca oś koła o  $180^\circ$ .** Moment pędu koła zmienia się z  $L_k$  na  $-L_k$ . Aby całkowity moment pędu pozostał stały, Marcin kręci się teraz z momentem pędu  $L$ , który spełnia równanie:  $L_k = -L_k + L$ . Wyznaczamy stąd  $L$ :



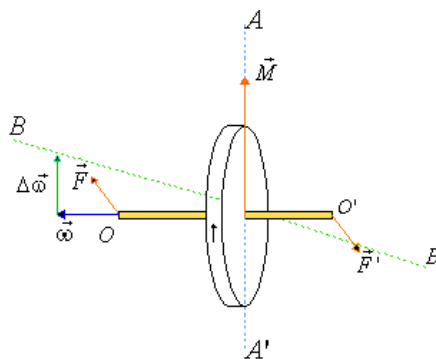
Moment pędu, a więc i prędkość kątowna Marcina jest dwa razy większa niż na początku. A dlaczego koło podparte w jednym punkcie osi nie spadło na ziemię? Wyjaśnienie znajdziesz w „Pokazach z sali wykładowej” - "Siły żyroskopowe"

## walizka

Każdy z nas potrafi intuicyjnie przewidzieć skutki działania siły. Na przykład wiemy, co się wydarzy, kiedy popchniemy leżący na stole przedmiot. Intuicja nas jednak zawodzi, gdy mamy do czynienia z momentem siły. Dlatego często skutek działania momentu siły wydaje się nam zaskakujący. Obejrzyjmy kolejny film z serii „Pokazy z sali wykładowej”.

Pokazy z sali wykładowej Wydziału Fizyki P.W.		
	<p style="text-align: center;"><b>Siły żyroskopowe.</b></p> <p>Michał zmierzy się z walizką o dziwnych właściwościach.</p>	

Walizka zawierająca wirujące koło unosi się w jedną lub drugą stronę, kiedy trzymający ją



Michał obraca się wokół swojej osi. Wytlumaczenie tego zjawiska pokazuje rysunek obok. Początkowo koło zamknięte w walizce wiruje w płaszczyźnie pionowej - wektor prędkości kątowej  $\vec{\omega}$  skierowany jest poziomo wzdłuż osi OO'. Kiedy Michał próbuje obrócić się z walizką, przykłada do niej parę sił F i F', które skierowane są poziomo, prostopadle do osi OO'. Moment tej pary sił jest skierowany pionowo wzdłuż osi AA'. Moment siły  $\vec{M}$  nadaje układowi przyspieszenie

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

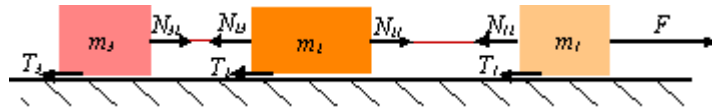
kątowe  $\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$ , skierowane tak jak moment siły, czyli pionowo do góry. Oznacza to, że po pewnym czasie  $\Delta t$  nastąpi zmiana wektora prędkości kątowej  $\vec{\omega}$  o wektor  $\Delta\vec{\omega}$ , który jest skierowany tak jak wektor  $\vec{\epsilon}$  pionowo w górę. Suma wektorów  $\vec{\omega}$  i  $\Delta\vec{\omega}$  jest prędkością kątową koła po czasie  $\Delta t$ . Jak widać kierunek tej nowej prędkości kątowej wyznaczony jest przez prostą BB'. Kierunek prędkości kątowej pokrywa się zawsze z osią obrotu, więc na skutek działania momentu siły  $\vec{M}$  oś obrotu koła będzie obracać się wokół osi poziomej, prostopadłej do OO'. Obserwujemy to jako unoszenie się walizki w jedną lub drugą stronę w zależności od kierunku obrotu Michała, a więc od zwrotu momentu siły  $\vec{M}$ . Gdyby oś obrotu walizki była umocowana, na więzy działałyby siły, które nazywamy siłami żyroskopowymi. Siły te stanowią poważny problem techniczny w urządzeniach zawierających wirujące części, na które działają momenty sił. Podobny skutek działania momentu siły obserwowaliśmy w poprzednim filmie, gdzie pan Andrzej podtrzymywał wirujące koło w jednym punkcie oddalonym od środka ciężkości. Moment siły ciężkości względem punktu podparcia skierowany był poziomo i taki też był kierunek przyrostu prędkości kątowej  $\Delta\vec{\omega}$ . W rezultacie obserwowaliśmy obrót osi koła w płaszczyźnie poziomej. Zjawisko to zna każdy, kto próbował jeździć na rowerze nie trzymając kierownicy. Lekkie przechylenie roweru w jedną stronę (powstaje wtedy moment siły ciężkości względem punktu podparcia roweru) powoduje skręcenie koła w stronę przechylenia.

## Zadania

### Zadanie 2.1 zasady dynamiki Newtona

Trzy ciała o masach  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  połączone nićmi, przesuwają się po poziomej płaszczyźnie pod wpływem przyłożonej siły F. Współczynnik tarcia między masami  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  i podłożem wynosi  $\mu$ .

Proszę znaleźć przyspieszenie mas a oraz siły napinające obie nici:  $N_1$  i  $N_2$ , odpowiednio.



Rys. z2.1.1. Siły działające w kierunku poziomym.

## Rozwiązanie

Napięta (rozciągana) siła  $N_1$  nie działa na masy  $m_1$  i  $m_2$ , znajdujące się na jej końcach, siłami  $N_{12}$  i  $N_{21}$ . Druga nić, napięta siła  $N_2$  działa na masy  $m_2$  i  $m_3$  siłami  $N_{23}$  oraz  $N_{32}$ .

Na podstawie trzeciej zasady dynamiki Newtona:

$$|\vec{N}_1| = |\vec{N}_{12}| = |\vec{N}_{21}| \text{ oraz } |\vec{N}_2| = |\vec{N}_{23}| = |\vec{N}_{32}|.$$

Ruch mas  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  odbywa się pod wpływem przyłożonej siły  $F$  (zgodnie z zaznaczonym kierunkiem), z przyspieszeniem  $a$  i zgodnie z drugą zasadą dynamiki:

$$m_1 a = F - T_1 - N_1,$$

$$m_2 a = N_1 - T_2 - N_2,$$

$$m_3 a = N_2 - T_3.$$

Siły tarcia są proporcjonalne do sił nacisku, więc:  $T_1 = \mu m_1 g$ ,  $T_2 = \mu m_2 g$ ,  $T_3 = \mu m_3 g$ .

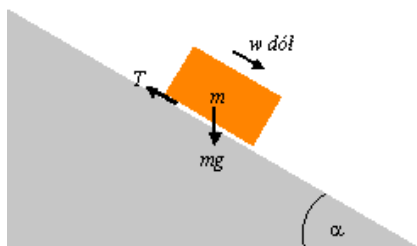
Odpowiedź otrzymamy rozwiązując powyższy układ równań.

## Zadanie 2.2 ruch postępowy po równi pochyłej

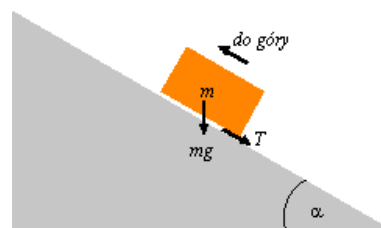
Z jakim przyspieszeniem porusza się masa  $m$ :

- w dół równi,
- w górę równi?

Współczynnik tarcia między ciałem o masie  $m$  i równią wynosi  $\mu$ .



Rys. z2.2.1a. Masa  $m$  porusza się w dół równi.

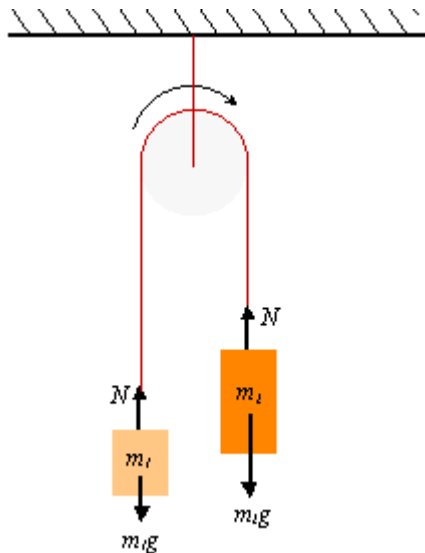


Rys. z2.2.1b. Masa  $m$  porusza się w górę równi.

## Rozwiązanie

<i>Masa <math>m</math> porusza się w dół równi z przyspieszeniem <math>a</math>, gdy <math>\operatorname{tg} \alpha &gt; \mu</math> to jej prędkość rośnie, gdy <math>\operatorname{tg} \alpha &lt; \mu</math> to maleje.</i>	<i>Masa <math>m</math> porusza się w górę równi z opóźnieniem <math>a</math>, jej prędkość maleje.</i>
Równanie ruchu Newtona: $m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha - T$ , gdzie $T = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$ . Stąd otrzymujemy $a = g(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$ .	Równanie ruchu Newtona: $m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin \alpha + T$ , gdzie $T = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$ . Stąd otrzymujemy $a = g(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)$ .

### Zadanie 2.3 maszyna Atwooda, czyli bloczek nieruchomy



Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią przerzuconą przez bloczek, którego masę należy zaniedbać. Bloczek obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Proszę obliczyć:

- przyspieszenie mas  $a$
- oraz naciąg nici  $N$ ,

a ponadto znaleźć warunek jaki musi spełniać masa  $m_2$  aby ruch odbywał się w podanym kierunku.

## Rozwiązanie

Bloczek o zaniedbywalnej masie służy do "przeniesienia" siły naciągu nici. Z drugiej zasady dynamiki Newtona, równania ruchu postępowego mas:

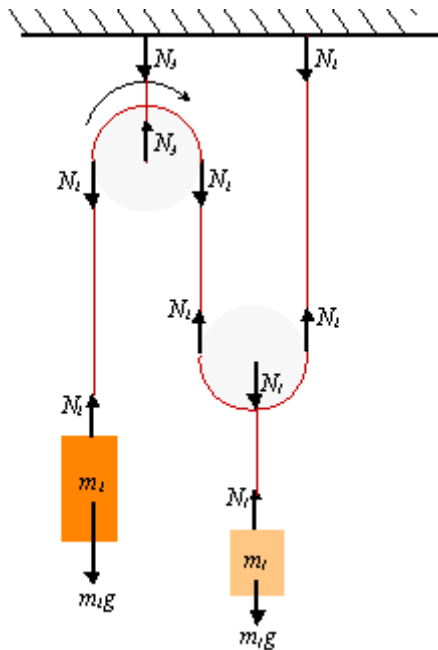
$$\begin{aligned} m_1 a &= N - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - N \end{aligned}$$

gdzie umownie, dodatni zwrot mają wektory skierowane zgodnie z kierunkiem wynikającym z obrotów bloczka.

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy przyspieszenie  $a$  oraz naciąg nici  $N$ .

Ruch mas odbywa się we wskazanym strzałką kierunku, gdy  $a \geq 0$ .

## Zadanie 2.4 układ mas w ruchu



Układ mas przedstawiony na rysunku jest w ruchu.

Proszę obliczyć:

- przyspieszenia mas  $a_1$  oraz  $a_2$ , dla masy  $m_1$  i  $m_2$ .
- naciągi nici  $N_1$ ,  $N_2$  i  $N_3$ .

Masy bloczków oraz nierozciągliwej nici zaniedbać, tarcie również.

### Rozwiązanie

Mamy układ równań ruchu dla masy  $m_1$  i  $m_2$ , odpowiednio:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - N_1 \\ m_2 a_2 &= N_2 - m_2 g, \end{aligned}$$

związek między przyspieszeniami  $\left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \frac{1}{2}$  wynikający z zależności kinematycznych oraz zależności między siłami naciągu nici:  $N_1 = 2N_2$ ,  $N_3 = 2N_2$ .

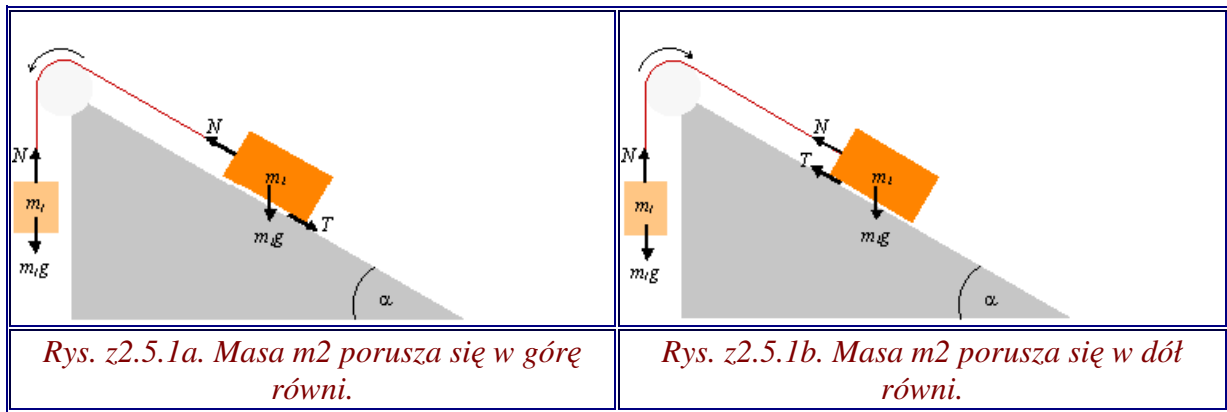
Tak więc do rozwiązania jest układ pięciu niezależnych równań z pięcioma niewiadomymi.

## Zadanie 2.5 warunek określonego ruchu

Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączono nicią, która przerzucona jest przez bloczek znajdujący się w wierzchołku równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ . Współczynnik tarcia między ciałem o masie  $m_2$  i równią wynosi  $\mu$ . Masę bloczka należy zaniedbać.

Jaka powinna być masa  $m_1$ , aby ciało o masie  $m_2$  poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym:

- w górę równi,
- w dół równi?



Rozwiązanie

warunek określonego ruchu

Masa $m_2$ porusza się w górę równi	Masa $m_2$ porusza się w dół równi
<p>Równania ruchu Newtona:</p> $m_1 a = m_1 g - N$ $m_2 a = N - m_2 g \sin \alpha - m_2 g \mu \cos \alpha$ $a = \frac{m_1 - m_2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2} g$ <p>Stąd,</p> <p>Z warunku ruchu, <math>a &gt; 0</math>, otrzymujemy zależność:</p> $m_1 > m_2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$	<p>Równania ruchu Newtona:</p> $m_1 a = N - m_1 g$ $m_2 a = m_2 g \sin \alpha - N - m_2 g \mu \cos \alpha$ $a = \frac{m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_1 g}{m_1 + m_2}$ <p>Stąd,</p> <p>Z warunku ruchu, <math>a &gt; 0</math>, otrzymujemy zależności:</p> $m_1 < m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \text{ oraz } m < t g \alpha.$

### Zadanie 2.6 zasada zachowania pędu i energii

Z wózka o masie  $M$ , jadącego z prędkością  $v$  po gładkim, poziomym torze wyrzucono worek o masie  $m$  z prędkością  $u$  względem wózka.



Obliczyć prędkość wózka po wyrzuceniu worka oraz pracę wyrzucenia worka z wózka.

Zadanie rozwiązać uwzględniając dwa przypadki:

1) worek został wyrzucony zgodnie z kierunkiem ruchu wózka



2) worek został wyrzucony w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wózka.

Rozwiązanie

Korzystając z zasady zachowania pędu

$$(M + m)\vec{v} = M\vec{v}_k + m(\vec{v} + \vec{u}),$$

a stąd prędkość wózka po wyrzuceniu worka

$$v_k = v \mp \frac{m}{M} u, \text{ gdzie znak "-" dotyczy przypadku 1), a znak "+" przypadku 2).}$$

Praca  $W$ , wykonana przez człowieka zwiększy energię kinetyczną układu mas  $M$  oraz  $m$ ,  
 $W = \Delta E$ .

Zmiana energii kinetycznej układu równa jest różnicy energii końcowej  $E_k$  i początkowej  $E_0$ ,  
tj.  $\Delta E = E_k - E_0$ .

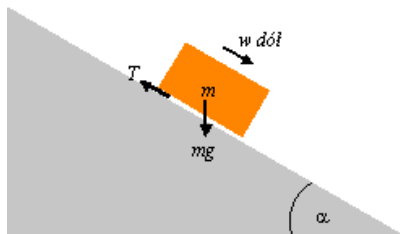
$$\text{Dlatego, } W = \frac{Mv_k^2}{2} + \frac{m(v \pm u)^2}{2} - \frac{(M + m)v^2}{2} = \frac{mu^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right).$$

### Zadanie 2.7 energia i praca

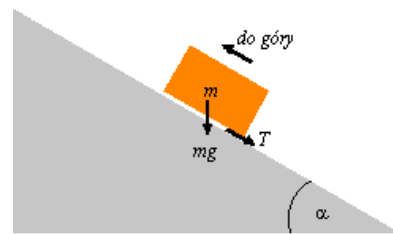
Z jakim przyspieszeniem porusza się masa  $m$ :

- a) swobodnie w dół równi,
- b) w górę równi?

Współczynnik tarcia między ciałem o masie  $m$  i równią wynosi  $\mu$  oraz  $\text{tg}\alpha > \mu$ . Przy rozwiązywaniu tego zadania należy zastosować zasadę zachowania energii.



Rys. z2.7.1a Masa  $m$  porusza się w dół równi.



Rys. z2.7.1b Masa  $m$  porusza się w górę równi.

Rozwiązanie

Przypadek a)

Przypadek b)

<p>Masa <math>m</math> porusza się w dół równi z przyspieszeniem <math>a</math>, jej energia kinetyczna wzrasta, energia potencjalna maleje. Bilans energii uzupełnia praca siły tarcia.</p>	<p>Masa <math>m</math> porusza się w górę równi z opóźnieniem <math>a</math>, jej energia kinetyczna maleje, energia potencjalna wzrasta. Bilans energii uzupełnia praca siły tarcia.</p>
<p>Zasada zachowania energii:</p> $mgh = \frac{mv^2}{2} + W,$ <p>gdzie <math>W</math> - to praca siły tarcia  <math>T = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha</math> na drodze <math>s</math>, <math>h</math> - to wysokość mierzona od podstawy równi.</p> <p>Po podstawieniu</p> $mgs \cdot \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \mu mg \cos \alpha \cdot s,$ <p>czyli <math>v = \sqrt{2gs(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}</math>.</p> <p>Stąd otrzymujemy przyspieszenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym  <math>a = g(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)</math>.</p>	<p>Zasada zachowania energii:</p> $\frac{mv^2}{2} = mgh + W,$ <p>gdzie <math>W</math> - to praca siły tarcia  <math>T = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha</math> na drodze <math>s</math>, <math>h</math> - to wysokość mierzona od podstawy równi.</p> <p>Po podstawieniu</p> $\frac{mv^2}{2} = mgs \cdot \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha \cdot s,$ <p>czyli <math>v = \sqrt{2gs(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}</math>.</p> <p>Stąd otrzymujemy opóźnienie w ruchu jednostajnie opóźnionym  <math>a = g(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)</math>.</p>

### Zadanie 2.8 zderzenie niesprężyste

Kulka ● o masie  $m$ , poruszająca się z prędkością  $v$ , zderza się niesprężysto ze spoczywającą kulą ● o masie  $M$ .



Rys. z2.8.1. Niesprężyste zderzenie kul.

Jaka część energii kinetycznej kulki ● o masie  $m$  zamieni się w energię wewnętrzną. Zderzenie jest doskonale niesprężyste.

Rozwiązanie

Dla zderzeń doskonale niesprężystych spełniona jest zasada zachowania pędu (wykład)

$$M \cdot \vec{V} + m \cdot \vec{v} = (M + m) \cdot \vec{v}_x$$

gdzie skalarnie:  $MV = 0$  to pęd kuli nieruchomej  $\bullet$ , przed zderzeniem,

$mv$  to pęd kulki uderzającej  $\bullet$ , przed zderzeniem,

$(M+m)v_x$  to pęd obu kul, po zderzeniu .

Po zderzeniu obie kule  $\bullet$  poruszają się z prędkością:

$$v_x = \frac{mv}{M+m}$$

$$E_{kx} = \frac{(M+m)}{2} \cdot v_x^2$$

i posiadają wtedy energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

która jest mniejsza od tej energii którą posiadała kulka przed zderzeniem z nieruchomą kulą.

Część energii kinetycznej jaką posiadała kulka przed zderzeniem z nieruchomą kulą, przy zderzeniu kul, zamieniła się na energię cieplną.

$$\frac{E_k - E_{kx}}{E_k} = \frac{M}{m+M}$$

## Zadanie 2.9 zderzenie centralne

Dwie kule o masach  $m$  i  $M$   $\bullet$  zderzają się centralnie, niesprężysto.



Rys. z2.9.1. Centralne, niesprężyste zderzenie kul.

Wiadomo, że energia kinetyczna jednej z kul ( tu ) jest  $n$  razy większa od energii kinetycznej drugiej z kul ( tu  $\bullet$  ). Jaki musi być stosunek mas  $M/m$ , aby po zderzeniu obie poruszały się w kierunku ruchu tej z kul która miała mniejszą energię?

Rozwiązanie

Zderzenie jest centralne, a to znaczy że wektory prędkości (i pędów też) obu kul leżą na prostej przechodzącej przez środki tych kul. Ponadto jest doskonale niesprężyste, a więc dla układu izolowanych kul spełniona jest zasada zachowania pędu.

$$M \cdot \vec{V} + m \cdot \vec{v} = (M + m) \cdot \vec{v}_x$$

Prawo zachowania pędu jest prawem wektorowym, w przypadku zderzenia centralnego sprowadza się do jednego równania skalarnego:

$$M \cdot V - m \cdot v = (M + m) \cdot v_x$$

gdzie za pomocą znaków "+" i "-" uwzględnione są przeciwne zwroty wektorów prędkości kulek przed ich zderzeniem.

Po zderzeniu niesprężystym obie kulki poruszają się z prędkością:

$$v_x = \frac{M \cdot V - mv}{M + m}$$

w kierunku ruchu tej z kul która miała przed zderzeniem mniejszą energię.

Kierunek ruchu kulek (zwrot wektora ich prędkości  $v_x$  -> skalarnie znak) jest taki jaki miała kulka o mniejszej energii kinetycznej, czyli dodatni.

Warunek na iloraz  $M/m$  otrzymamy rozwiązując nierówność:  $v_x > 0$ , przy uwzględnieniu, że

$$\frac{mv^2}{2} = n \cdot \frac{MV^2}{2}$$

## Słownik

<b>pierwsza zasada dynamiki</b>	Każde ciało pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnie prostoliniowego, jeżeli nie doznaje działania siły lub działające na ciało siły się równoważą
<b>druga zasada dynamiki</b>	Szybkość zmiany pędu ciała równa jest wypadkowej sile działającej na to ciało.
<b>trzecia zasada dynamiki</b>	Oddziaływania wzajemne dwóch ciał są zawsze równe co do wartości ale przeciwnie skierowane.
<b>układ inercjalny</b>	układ, w którym spełniona jest pierwsza zasada dynamiki
<b>pęd ciała</b>	iloczyn masy ciała i wektora jego prędkości
<b>bezwładność</b>	własność ciał materialnych polegająca na stawianiu oporu siłom zewnętrznym działającym na ciało oraz zachowywaniu stanu ruchu w przypadku, kiedy na ciało siły zewnętrzne nie działają
<b>masa bezwładna</b>	miara bezwładności ciała
<b>ciężar ciała</b>	siła jaka działa na ciało wskutek przyciągania grawitacyjnego
<b>przyspieszenie ziemskie</b>	przyspieszenia jakie uzyskuje ciało spadające swobodnie pod wpływem siły ciężkości

<b>zasada przyczynowości</b>	zasada - zgodnie z którą znajomość warunków początkowych oraz działających na ciała sił wyznacza stan ich ruchu w dowolnej chwili czasu
<b>równanie Newtona</b>	układ trzech równań skalarnych (w przestrzeni trójwymiarowej) wyrażających ilościowo treść drugiej zasady dynamiki
<b>siła tarcia</b>	siła przeciwdziałająca ruchowi ciała; występuje kiedy stykające się powierzchnie przesuwają się względem siebie
<b>siła tarcia statycznego</b>	wartość graniczna siły tarcia, przy której ciało pozostaje jeszcze nieruchome pomimo przyłożenia siły zewnętrznej
<b>siła tarcia kinetycznego</b>	siła tarcia występująca, kiedy ciało jest w ruchu
<b>współczynnik tarcia</b>	stosunek siły tarcia do siły nacisku będący właściwością trących się powierzchni
<b>praca</b>	jest iloczynem skalarnym wektorów: siły działającej na ciało i przemieszczenia ciała
<b>moc</b>	stosunek pracy do czasu, w którym została wykonana, praca wykonana w jednostce czasu; określa szybkość zmiany energii układu fizycznego
<b>siła zachowawcza</b>	siła, której praca wykonana przy przemieszczeniu ciała po torze zamkniętym o dowolnym kształcie równa jest zeru
<b>siła dyssypatywna</b>	siła, która nie spełnia warunku siły zachowawczej
<b>energia potencjalna</b>	równa jest pracy jaką wykonuje siła zachowawcza przy przemieszczeniu ciała z danego punktu do punktu odniesienia
<b>energia kinetyczna</b>	energia ciała będącego w ruchu, połowa iloczynu masy ciała i kwadratu jego prędkości
<b>twierdzenie o pracy i energii</b>	Praca wykonana przez wypadkową sił działających na ciało równa jest zmianie jego energii kinetycznej.
<b>prawo zachowania energii mechanicznej</b>	Całkowita energia mechaniczna ciała, na które działają tylko siły zachowawcze, jest stała.
<b>prawo zachowania energii</b>	Energia całkowita układu odosobnionego jest stała.
<b>prawo zachowania pędu</b>	Jeżeli na układ nie działają siły zewnętrzne lub działają układ sił zrównoważonych, to pęd układu zachowuje wartość stałą.
<b>zderzenie sprężyste</b>	jeżeli w procesie zderzenia zachowana jest energia kinetyczna
<b>zderzenie centralne</b>	jeśli przed zderzeniem i po zderzeniu ciała poruszają się wzdłuż jednej prostej

<b>ruch obrotowy</b>	ruch, w którym wszystkie punkty danego ciała poruszają się po okręgach, których środki znajdują się na jednej prostej zwanej osią obrotu
<b>prędkość kąтова</b>	wielkość wektorowa, której wartość równa jest pochodnej położenia kąowego względem czasu
<b>częstość</b>	zwana też prędkością kątową, częstością kołową lub pulsacją; pochodna przemieszczenia kąowego względem czasu (kąt zakreślony w jednostce czasu przez ciało będące w ruchu obrotowym)
<b>okres</b>	czas, w którym ciało wykonuje jeden pełny obrót
<b>częstotliwość</b>	liczba obrotów wykonanych przez ciało w czasie jednej sekundy, odwrotność okresu
<b>przyspieszenie kątowe</b>	pochodna prędkości kąowej względem czasu
<b>moment siły</b>	(względem danego punktu) - iloczyn wektorowy promienia wodzącego mającego początek w danym punkcie i siły działającej na ciało
<b>moment pędu</b>	(punktu materialnego względem danego punktu) - iloczyn wektorowy promienia wodzącego punktu materialnego i jego pędu
<b>ramię siły</b>	składowa promienia wodzącego prostopadła do linii działania siły
<b>moment bezwładności</b>	dla punktu materialnego - iloczyn masy przez kwadrat odległości od osi obrotu, dla układu punktów - suma momentów bezwładności wszystkich punktów
<b>druga zasada dynamiki ruchu obrotowego</b>	szybkość zmiany momentu pędu równa jest momentowi siły
<b>twierdzenie Steinera</b>	wzór określający moment bezwładności względem osi nie przechodzącej przez środek masy ciała
<b>zasada zachowania momentu pędu</b>	Moment pędu układu, na który nie działa moment sił zewnętrznych jest wektorem stałym.

## Wstęp

### Ruchy harmoniczne i ich cechy wspólne

Poszukaj cech wspólnych w następujących ruchach:



- ruch huśtawki,
- drgania strun w instrumentach muzycznych,
- ruch wahadła zegara mechanicznego,
- ruch ciężarka wiszącego na sprężynie,
- drgania szyb okiennych przy hałaśliwej ulicy.
- drgania napięcia w obwodach prądu zmiennego



*Jakie są wspólne cechy tych ruchów? Podaj jeszcze kilka podobnych przykładów.*

We wszystkich tych przypadkach ciało porusza się tam i z powrotem wracając co pewien okres czasu do tego samego punktu. Ruch taki nazywamy ruchem okresowym, drgającym lub oscylacyjnym. Często ruch drgający towarzyszy innym rodzajom ruchu, np. kołysanie poruszającego się pociągu lub samochodu o niesprawnych amortyzatorach; często dotyczy okresowych zmian innych wielkości niż położenie ciała, np. napięcia elektrycznego, lub ciśnienia; bywa też, że ruch ten "ukrywa się" pod postaciami innych zjawisk, np. w akustyce, optyce lub w procesach elektromagnetycznych. W dalszej części wykładu poznamy jeszcze wiele innych przykładów podobnych ruchów w różnych działach fizyki.

Ruchy drgające można opisać, w sposób dokładny lub przybliżony, za pomocą wyrażeń zawierających funkcje  $\sin$  i  $\cos$ . Funkcje te nazywamy funkcjami harmonicznymi, zaś opis taki nosi nazwę analizy harmonicznej. W przypadkach niektórych ruchów drgających, zwanych **ruchami harmonicznymi**, opis ten jest szczególnie prosty. Siły wywołujące te ruchy nazywamy **siłami harmonicznymi**. Ruchy takie będą przedmiotem naszych dalszych rozważań. Pamiętajmy, że ruchy harmoniczne są ruchami drgającymi, jednak nie wszystkie ruchy należące do klasy ruchów okresowych, drgających lub oscylacyjnych są ruchami harmonicznymi.

*Popatrz "okiem fizyka" na ruchy drgające i postaraj się odnaleźć wspólne cechy tych ruchów. Zwróć także uwagę na występujące między nimi różnice odpowiadając na następujące pytania:*

- Jakie są specyficzne cechy siły działającej na ciało poruszające się ruchem drgającym.
- W jakim położeniu ciała siła ta jest największa, a w jakim najmniejsza?
- Kiedy największa jest prędkość wyrzucanej z łuku strzały?
- W jakim położeniu największe jest jej przyspieszenie?

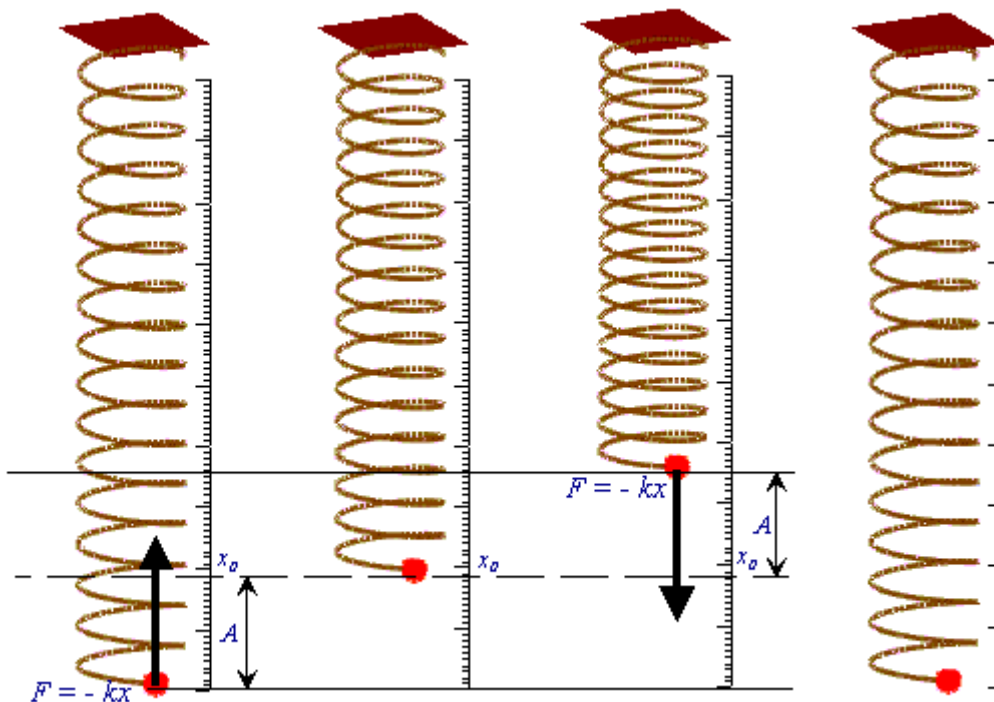
- Od czego zależy wysokość tonu struny skrzypcowej, a od czego siła dźwięku?
- Dlaczego wprowadzone w ruch drgający wahadło stopniowo zmniejsza swe wychylenia.
- Od czego zależy siła tłumiąca ruch wahadła?
- W jaki sposób można podtrzymać ruch drgający?
- Wymień cechy wspólne i różnice w ruchu wahadła i tłoka w silniku spalinowym?

Wspólne charakterystyczne cechy ruchów harmonicznycch zawarte są w równaniu opisującym ten ruch. W rozwiązaniu tego równania znajdziemy odpowiedzi zarówno na te, jak i na inne pytania dotyczące ruchu harmonicznego.

**Zapamiętaj** - równanie ruchu harmonicznego, zwane też równaniem oscylatora harmonicznego, jest jednym z fundamentalnych równań w fizyce. Równanie to spotkasz jeszcze wielokrotnie w kursie fizyki, dlatego trzeba koniecznie zrozumieć jego sens, postać oraz formę rozwiązania i znaczenie występujących w nim parametrów.

## 1. Równanie ruchu harmonicznego

Jako przykład rozpatrzmy ruch ciała o masie  $m$  zawieszonoego na sprężynie (czerwona kulka).



Im więcej rozciągamy sprężynę, tym większa siła "stara się" przywrócić ją znów do położenia równowagi działając wzdłuż kierunku rozciągania ale mając zwrot przeciwny niż zwrot odchylenia. (Patrz rysunek i animacja powyżej.) Jeśli odkształcenia są doskonale sprężyste, to wartość siły wyrażona jest przez znane nam już prawo Hooke'a, wzór (3.47). Najogólniej możemy to zapisać w postaci

$$F = -k \cdot x$$

(3.1.1)



W zależności tej  $F$  jest siłą,  $x$  - odchyleniem, czyli aktualnym położeniem ciała określonym względem położenia równowagi;  $k$  jest współczynnikiem proporcjonalności charakteryzującym własności sprężyny. Jeżeli współczynnik ten nie zmienia się w czasie ruchu, to **wartość siły jest wprost proporcjonalna do wielkości odchylenia od położenia równowagi**. Ruch odbywający się pod wpływem takiej siły nazywamy ruchem harmonicznym, a siły o tej własności nazywamy **siłami harmonicznymi**. Proporcjonalność siły do odchylenia jest najbardziej charakterystyczną własnością, wspólną dla wszystkich sił harmonicznymi, mimo że siły te nie ograniczają się wyłącznie do sił sprężystości. Znak minus oznacza, że kierunek siły jest przeciwny do kierunku odchylenia.

## Równanie Newtona dla siły harmoniczej

Korzystając z drugiego prawa dynamiki możemy równanie ruchu ciała o masie  $m$  pod działaniem siły (3.1) zapisać następująco:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x \quad (3.1.2)$$

Przepiszemy to równanie w postaci

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x \quad (3.1.2a)$$

gdzie wprowadziliśmy wielkość  $\omega$  zdefiniowaną jako

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (3.1.3)$$

Równanie (3.2a) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Niewiadomą w tym równaniu jest odchylenie od położenia równowagi  $x$ , a ściślej mówiąc, zależność tego odchylenia od czasu  $t$ . Poszukujemy więc takiej funkcji  $x=f(t)$ , której druga pochodna  $d^2x/dt^2$  równa jest jej samej <sup>wziętej</sup>  $\omega^2$  ze znakiem minus i pomnożonej przez pewną stałą, którą oznaczyliśmy przez  $\omega^2$ .

Jaka funkcja ma taką właściwość? Oczywiście - funkcje, *sinus* i *cosinus*. Nietrudno sprawdzić, że podany wyżej warunek zostanie zachowany także jeśli funkcje te pomnożymy przez stały czynnik, a do argumentu dodamy dowolną stałą.

## Postać rozwiązania

Sprawdźmy więc, czy podany wyżej warunek będzie spełniony zakładając, że rozwiązanie ma postać:

$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$	(3.1.4)
--	---------

gdzie  $A$  oraz  $\varphi$ , to wartości stałe, nie zmieniające się w czasie.

Obliczamy pierwszą pochodną, czyli  $dx/dt$ . Zwróćmy uwagę, że pierwsza pochodna położenia względem czasu to po prostu chwilowa prędkość ciała,  $v$ .

$$\frac{dx}{dt} = v = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3.1.5)$$

Druga pochodna, czyli przyspieszenie ciała  $a$ , wynosi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3.1.6)$$

Rzeczywiście, druga pochodna ma tę samą postać, co funkcja (3.4) ale wzięta ze znakiem minus i pomnożona przez  $\omega^2$ . Sprawdziliśmy, że funkcja (3.4) jest rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego.

## Znaczenie parametrów

Przeanalizujmy teraz sens fizyczny stałych:  $A$ ,  $\omega$  oraz  $\varphi$ , stanowiących parametry naszego rozwiązania.

- Wielkość  $A$ , to **amplituda** drgań harmonicznyc. Aby określić znaczenie tego parametru przypomnijmy, że maksymalna i minimalna wartość funkcji sinus i cosinus to +1 i -1. Wartość  $A$  równa jest więc, zgodnie ze wzorem (3.4), maksymalnemu odchyleniu od położenia równowagi. Wymiar tej stałej jest taki sam, jak wymiar odchylenia.
- Wielkość  $\omega$  nazywa się **częstotliwością drgań własnych układu**. Wielkość ta jest zasadniczą charakterystyką układu wykonującego drgania pod wpływem siły harmonicznyc i określona jest wzorem (3.3).
- Wielkość  $\varphi$ , to **faza początkowa** ruchu harmonicznyc. Z postaci wzoru (3.4) widać, że wartość  $\varphi$  wraz z wartością amplitudy określa odchylenie od położenia równowagi w chwili początkowej tj. dla  $t=0$ .

Zauważmy teraz, że jeśli argument funkcji **cosinus** w formule (3.4) zmienimy o wielokrotność  $2\pi$ , to wartość funkcji nie zmieni się, bo takie są własności funkcji **sinus** i **cosinus**. Aby zaś wyrażenie w nawiasie formuły (3.4) wzrosło o  $2\pi$ , musimy czas  $t$  zwiększyć o  $2\pi / \omega$  (sprawdź to). Po czasie  $2\pi / \omega \in$  ciało przyjmie znów to samo położenie. Sytuacja będzie powtarzać się po kolejnych, takich samych przyrostach czasu. Przedział czasu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.1.7)$$

to **okres** w ruchu harmonicznym i wyraża się w jednostkach czasu czyli np. w sekundach. Odwrotność okresu

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.8)$$

nazywa się **częstotliwością** w ruchu harmonicznym. Jest to liczba okresów  $T$  w jednostce czasu. Wymiarem częstotliwości jest  $1/s$ ; jednostką jest **1 herc (Hz)**, Częstotliwość drgań wynosi **1Hz**, kiedy okres równy jest jednej sekundzie, czyli w czasie jednej sekundy zachodzi jedno drganie..

Zauważmy następnie, że jeśli faza początkowa będzie równa  $-\pi/2$ , to otrzymamy z równania (3.4)

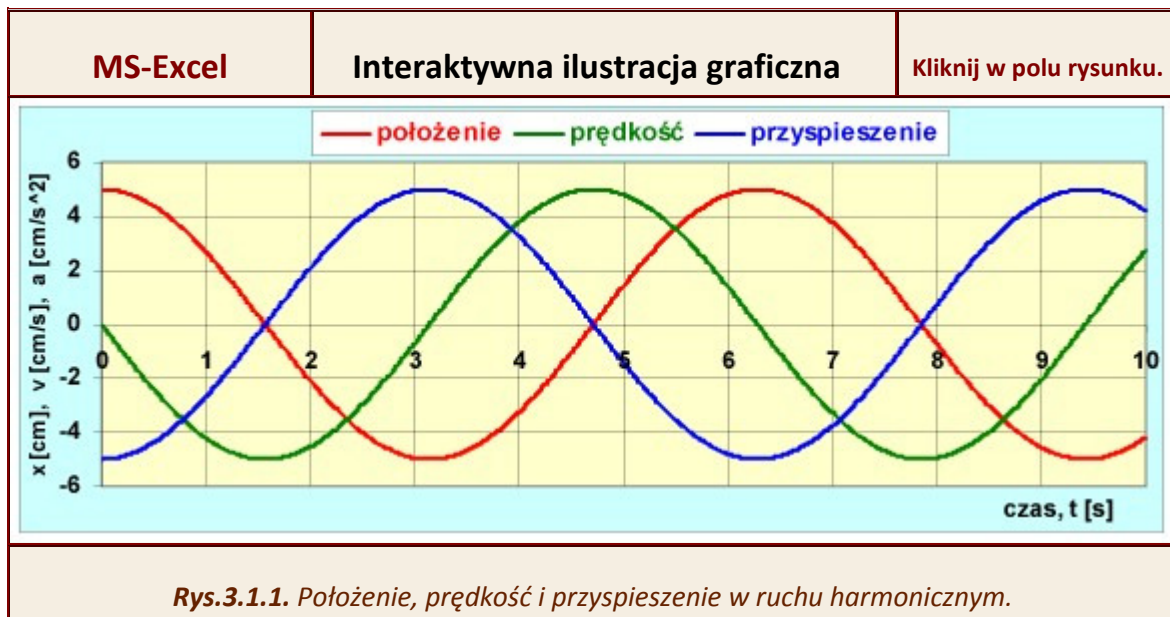
$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - \pi/2) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3.1.9)$$

czyli dla  $t=0$  wychylenie będzie  $x=0$ . W zależności od fazy początkowej ruch oscylatora harmonicznego możemy więc opisywać zarówno funkcją **cosinus** jak i **sinus**. Oczywiście, jeśli do wartości fazy początkowej dodamy liczbę będącą wielokrotnością kąta pełnego  $360^\circ$  czyli  $2\pi$ , to uzyskamy znów to samo wychylenie,  $x$ .

Bardzo ważną cechą ruchów harmonicznycch, wyróżniającą je wśród innych rodzajów ruchów, jest **izochronizm**, czyli niezależność okresu drgań własnych układu drgającego od amplitudy, co stanowi podstawę funkcjonowania zegarów mechanicznych. Warto dodać, że izochronizm wahadła odkrył w swych doświadczeniach Galileusz w roku 1583.

## Interaktywna ilustracja graficzna

Opisane wyżej zależności możesz teraz sprawdzić sam korzystając z interaktywnej ilustracji graficznej. Z jej pomocą możesz prześledzić zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia od czasu dla wybranych przez Ciebie wartości parametrów:  $A$ ,  $k$ ,  $m$  i  $\varphi$ . Stopień zrozumienia przez Ciebie tych zależności możesz sprawdzić odpowiadając na załączone tam pytania.



## 2. Bilans energii w ruchu harmonicznym

### Energia potencjalna i kinetyczna

Przypomnijmy związek pomiędzy siłą  $F$ , a zmianą energii potencjalnej  $dE_p$  na odcinku drogi  $dx$ , w pobliżu punktu  $x$ ; wzór (2.6.4).

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad \text{lub} \quad dE_p(x) = -F(x) \cdot dx \quad (3.2.1)$$

W naszym przypadku siłę i odchylenie od położenia równowagi łączy związek (3.1.1). Energię potencjalną w punkcie  $x$  możemy więc wyznaczyć jako

$$E_p(x) = -\int_0^x (-k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \quad (3.2.2)$$

przyjmując, że w położeniu równowagi ( $x=0$ ),  $E_p(x)=0$ .

Energia kinetyczna ciała o masie  $m$  poruszającego się z prędkością  $v$  wynosi

$$E_k(v) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3.2.3)$$

## (2.2) Energia całkowita

Dodajmy do siebie obie energie:

$$E_p + E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3.2.4)$$

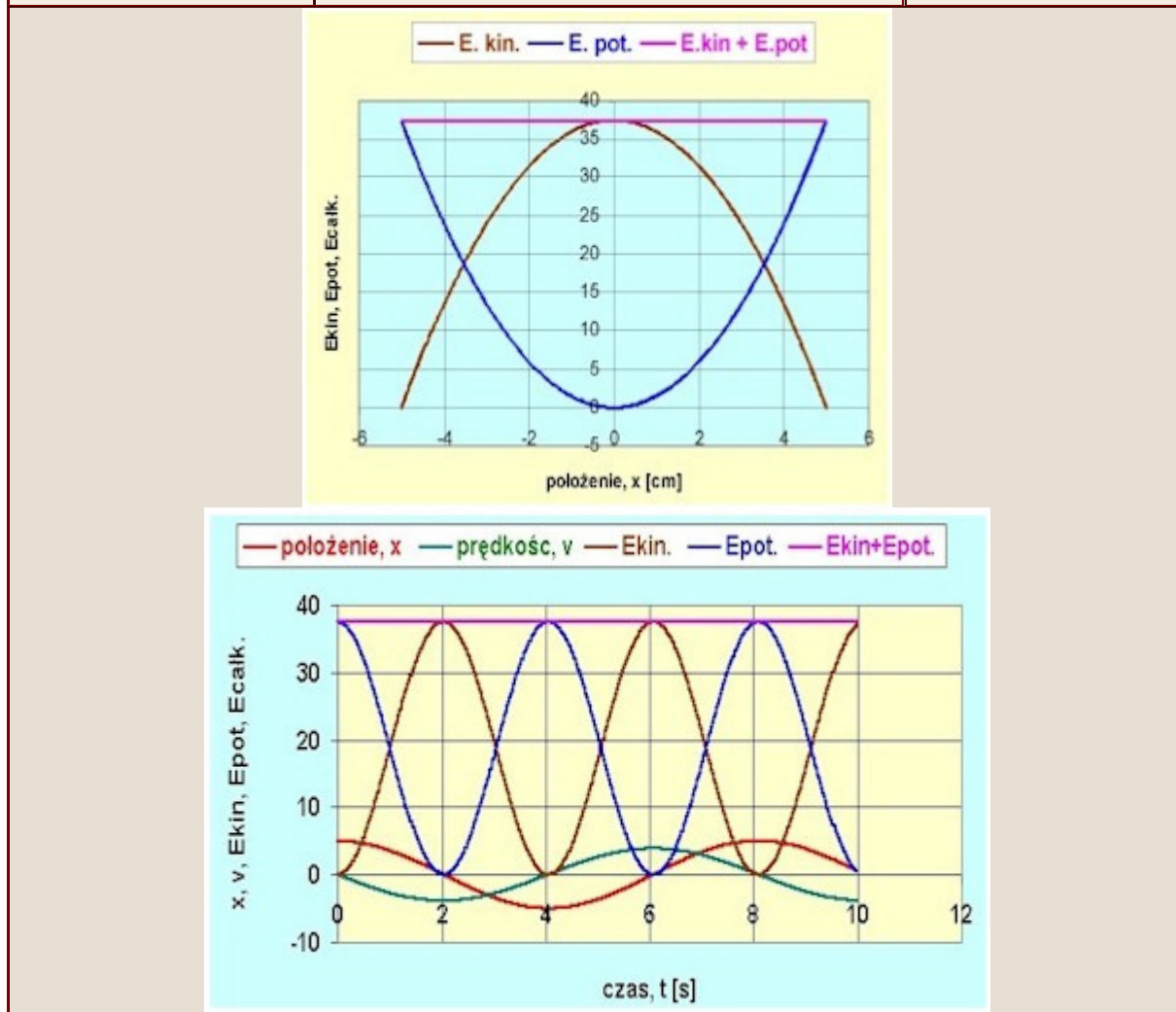
Podstawiając wartości  $x$  oraz  $v$  ze wzorów (3.1.4) i (3.1.5) otrzymujemy:

$E_p + E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$	(3.2.5)
---	---------

**Suma energii potencjalnej i kinetycznej w ruchu harmonicznym nie zależy ani od  $x$ , ani od  $v$  i jest w każdej chwili czasu (a więc również i w każdym punkcie) taka sama, wprost proporcjonalna do kwadratu amplitudy.** Wynik ten jest konsekwencją zasady zachowania energii mechanicznej pokazując, że siły harmoniczne są siłami zachowawczymi. Rzeczywiście, odchylenie ciała od położenia równowagi, to dostarczenie mu energii potencjalnej. Jeżeli potem nie ingerujemy w ruch ciała, to uzyskiwana w czasie ruchu do położenia równowagi energia kinetyczna jest równoważna traconej przez ciało energii potencjalnej. Po minięciu położenia równowagi sytuacja jest odwrotna - ciało traci energię kinetyczną, ale zyskuje potencjalną itd.

### Interaktywna ilustracja graficzna

Załączone rysunki przedstawiają zależność od położenia i od czasu energii kinetycznej i potencjalnej oraz będącej ich sumą energii całkowitej. Widzimy, że zmniejszaniu się energii potencjalnej towarzyszy wzrost energii kinetycznej, i na odwrót, zaś suma obu rodzajów energii pozostaje wartością stałą niezależnie od położenia i od czasu. Związki pomiędzy położeniem ciała i jego prędkością, a energią kinetyczną, potencjalną i całkowitą możesz prześledzić sam korzystając z załączonej ilustracji interaktywnej.



**Rys.3.2.1.** Bilans energii w ruchu harmonicznym w funkcji położenia i czasu

A teraz pytanie - prędkość, położenie i przyspieszenie są funkcjami czasu o okresie  $T$ , ale okres zmienności energii kinetycznej i potencjalnej wynosi  $T/2$ . Dlaczego tak jest? Przeanalizuj uważnie postać zależności od  $x$  i  $v$  we wzorach (3.2.2) oraz (3.2.3).

### 3. Drgania harmoniczne tłumione

Dotychczas rozważaliśmy ruch harmoniczny swobodny, w którym nie występowały żadne siły poza siłą harmoniczną. Na ogół jednak ruch jest tłumiony wskutek oporu powietrza lub innych oporów występujących w układzie drgającym. Opory te są zwykle tym większe, im większa jest prędkość ciała. Czujemy to wyraźnie po wysunięciu ręki przez okno jadącego samochodu lub pociągu. Siła działająca na ciało zawiera więc dodatkowy człon proporcjonalny do prędkości.

$F = -k \cdot x - b \frac{dx}{dt}$	(3.3.1)
------------------------------------	---------

Parametr  $b$ , jest tu współczynnikiem proporcjonalności. Równanie ruchu zapiszemy następująco:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \quad (3.3.2)$$

Rozwiązaniem tego równania opisującym przypadek drgań tłumionych jest funkcja:

$x = A \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega' \cdot t + \varphi) = A' \cdot \cos(\omega' \cdot t + \varphi)$	(3.3.3)
---	---------

gdzie amplituda drgań  $A' = A \cdot e^{-\beta \cdot t}$ , zmniejsza się z czasem w sposób wykładniczy.

Wielkość  $\beta = b/2m$  zwane jest **współczynnikiem tłumienia**. Współczynnik ten rośnie proporcjonalnie do wzrostu oporów ruchu ale jest też odwrotnie proporcjonalny do masy drgającego ciała. Im większa jest masa ciała tym mniejszy wpływ na ruch drgający mają opory ruchu.

Zauważmy, że rozwiązanie (3.3.3) ma postać bardzo podobną do rozwiązania opisującego drgania swobodne. Tłumienie zmienia jednak amplitudę i częstość drgań.

Częstość drgań tłumionych  $\omega'$  nie zmienia się w czasie i wynosi:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (3.3.4)$$

Częstość ta jest mniejsza niż częstości drgań własnych układu swobodnego. W konsekwencji zwiększa się okres drgań,  $T'$ .

$$T' = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \quad (3.3.5)$$

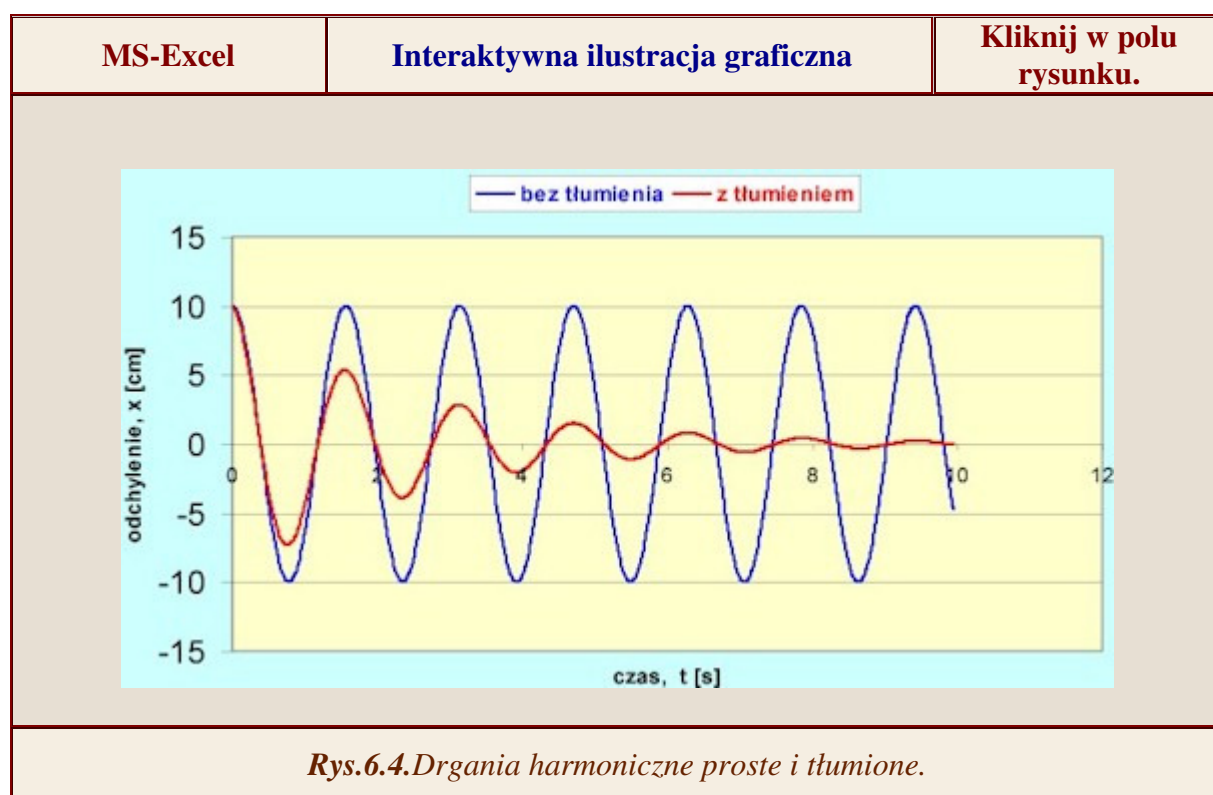
Kiedy jednak oporu ruchu rosną tak, że wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze (3.3.5) staje się równe zero to częstość drgań maleje do zera, a okres rośnie do nieskończoności - ruch przestaje być ruchem okresowym. Takie tłumienie nazywamy krytycznym. Ten **przypadek graniczny** odpowiada sytuacji, w której układ najszybciej osiąga położenie równowagi. Przy dalszym wzroście współczynnika tłumienia ruch będzie miał charakter aperiodyczny (pełzający). Układ będzie zdążał do położenia równowagi, ale wolniej niż w przypadku granicznym. Określenie warunków, w których ruch drgający zmienia się w ruch aperiodyczny odgrywa istotną rolę w konstrukcji układów, gdzie ważne jest tłumienie niepożądanych drgań: przyrządy pomiarowe, amortyzatory itp.

Wyróżniamy więc trzy przypadki:

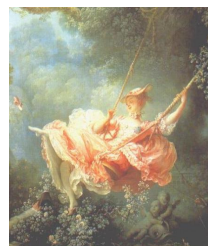
1	$\omega^2 - \beta^2 > 0$	zachodzą drgania, których charakter zależy od wartości współczynnika tłumienia
---	--------------------------	--

2	$\omega^2 - \beta^2 = 0$	<b>Przypadek graniczny</b> - częstość drgań maleje do zera (okres dąży do nieskończoności). W tym przypadku układ najszybciej powraca do stanu równowagi.
3	$\omega^2 - \beta^2 < 0$	układ nie wykonuje drgań, ale wraca do stanu równowagi w sposób <b>aperiodyczny</b> , przy czym wolniej niż w przypadku drugim

Zależność wychylenia od czasu dla wybranych przez Ciebie wartości współczynników tłumienia możesz teraz zobaczyć korzystając z załączonej aplikacji. Rysunek przedstawiony poniżej pokazuje przykładowe zależności odchylenia od czasu dla drgań swobodnych i tłumionych



#### 4. Ruch harmoniczny wymuszony



Czy można podtrzymać ruch drgający pomimo istnienia sił oporu? Można, bo umiemy podtrzymać zarówno ruch wahadła zegara, jak i huśtawki, czy struny skrzypcowej. Co więcej, można wzmocnić lub wywołać ruch drgający.

Popatrz jeszcze raz na obraz z pierwszej strony tej lekcji. [Obejrzyj go uważnie w powiększeniu](#) i odszukaj na nim siłę, która podtrzymuje ten ruch.

Ruch możemy podtrzymać poprzez przyłożenie zewnętrznej siły okresowej, co widać wyraźnie na załączonym obrazie. Zasadniczą rolę w podtrzymaniu tego ruchu odgrywa związek pomiędzy częstością oscylacji własnych układu, a częstością siły wymuszającej.



Ruchy tego typu nazywamy **oscylacjami lub drganiami wymuszonymi**. Częstość tych drgań jest narzucona przez okresową **siłę wymuszającą**, ale zarówno ich amplituda jak i faza zależą od relacji pomiędzy częstością siły wymuszającej a częstością drgań własnych układu.

Zapiszmy postać siły wymuszającej  $F_w$  o amplitudzie  $F_0$  i częstości  $\omega_w$  w najprostszy sposób

$$F_w = F_0 \cdot \cos(\omega_w \cdot t) \quad (3.4.1)$$

Równanie ruchu harmonicznego tłumionego z siłą wymuszającą ma postać;

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega_w \cdot t) \quad (3.4.2)$$

Pamiętając wzór (3.1.3) określający częstość własną drgań swobodnych oraz definicję współczynnika tłumienia można równanie (3.4.2) zapisać w postaci

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_w \cdot t) \quad (3.4.3)$$

Rozwiązanie tego równania jest podobne do równania (3.1.4) ale amplituda i faza określone są przez relacje pomiędzy częstością drgań własnych, częstością siły wymuszającej oraz współczynnikiem tłumienia.

Rozwiązanie to można zapisać następująco:

$$x = A \cdot \cos(\omega_w \cdot t - \varphi) \quad (3.4.4)$$

gdzie amplituda wynosi

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_w^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \omega_w^2}} \quad (3.4.5)$$

zaś faza wyznaczająca opóźnienie drgania układu względem siły wymuszającej określona jest wzorem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cdot \beta \cdot \omega_w}{\omega^2 - \omega_w^2} \quad (3.4.6)$$

Amplituda drgań określona wzorem (3.4.5) osiąga największą wartość gdy  $dA_0 / d\omega_w = 0$ , a więc gdy

$$\omega_w = \omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2 \cdot \beta^2} \quad (3.4.7)$$

Wartość amplitudy wynosi wtedy

$$A_{rez} = \frac{F_0 / m}{2 \cdot \beta \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \quad (3.4.8)$$

Stan, w którym amplituda drgań osiąga największą wartość, nazywamy stanem **rezonansu**. Odpowiadająca maksymalnej amplitudzie częstość siły wymuszającej nosi nazwę **częstości rezonansowej**.

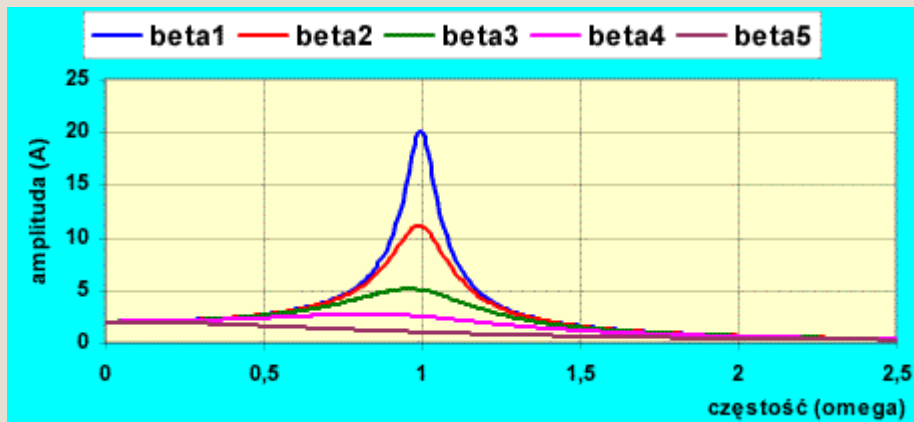
Zapiszmy charakterystyczne cechy drgań wymuszonych.

- Układ drga z częstością siły wymuszającej i jest ruchem nie tłumionym.
- Amplituda drgań zależy zarówno od współczynnika tłumienia, jak i od różnicy pomiędzy częstością drgań własnych układu i częstością siły wymuszającej.
- Amplituda osiąga wartość nieskończoną kiedy brak jest tłumienia, a obie częstości są sobie równe, czyli częstość rezonansowa równa jest częstości drgań własnych układu. Dla wartości współczynników tłumienia różnych od zera amplituda osiąga największą wartość (czyli występuje rezonans) dla częstości określonych wzorem (6.39), a więc mniejszych od częstości drgań własnych.

Zależności te ilustruje poniższy rysunek. Kolejne numery krzywych odpowiadają zwiększającym się wartościom współczynnika tłumienia. Zwróć uwagę, że wraz ze wzrostem tłumienia:

- obniża się maksimum krzywej rezonansowej,
- położenie maksimum (częstość rezonansowa) przesuwa się w kierunku mniejszych częstości,
- krzywa rezonansowa staje się "szersza" (poszerza się w połowie swej wysokości).

Możesz także sam wprowadzić inne wartości współczynników tłumienia i obserwować kształt krzywej rezonansowej korzystając z załączonej aplikacji.



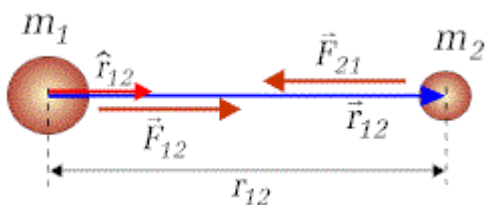
Rys.6.4. Zjawisko rezonansu.

Ze zjawiskiem rezonansu spotykamy się często w życiu codziennym, np. drgania elementów samochodu w czasie jazdy, drgania szyb okiennych w przypadku hałasu na ulicy itp. Warto zwrócić uwagę, że już niewielkie siły wymuszające mogą doprowadzić do znacznego wzrostu amplitudy drgań i niebezpiecznych wibracji w przypadku rezonansu. Jest to szczególnie istotne przy **konstrukcji** mostów, skrzydeł samolotów, kadłubów okrętów itp.

## 5. Prawo powszechnego ciążenia

**Prawo powszechnego ciążenia** określa siłę przyciągania wzajemnego dwóch punktów materialnych o masach  $m_1$  i  $m_2$  znajdujących się w odległości równej  $r_{12}$  ( patrz Rys. 3.5.1).

**Siła wzajemnego przyciągania dwóch punktów materialnych jest proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości**

Rys.3.5.1. Wektor  $\vec{r}_{12}$  łączy środki kul.

Prawo to odnosi się także do kul jednorodnych i takich, których gęstość masy zależna jest tylko od promienia, czyli odległości od środka kuli. Zwróćmy też uwagę, że siła grawitacji jest zawsze siłą przyciągającą w odróżnieniu np. od siły elektrostatycznego oddziaływania ładunków gdzie mamy do czynienia zarówno z przyciąganiem jak i z odpychaniem. Wektor siły grawitacji leży na prostej łączącej oba punkty materialne. (Na rysunku, jedynie dla zachowania czytelności, wektory siły są odsunięte nieco od tej prostej.)

Siła przyciągająca  $\vec{F}_{12}$  działająca ze strony masy  $m_2$  na masę  $m_1$  ma zwrot wektora  $\vec{r}_{12}$ , którego początek znajduje się w środku masy  $m_1$ , a koniec w środku masy  $m_2$ . Siła ta określona jest wyrażeniem

$$\vec{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12} \quad (3.5.1)$$

gdzie  $G$  jest współczynnikiem proporcjonalności zwanym stałą grawitacji, a  $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12} / r_{12}$  jest wersorem, czyli wektorem jednostkowym skierowanym tak samo jak wektor  $\vec{r}_{12}$ .

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki, siła przyciągająca masy  $m_1$  działająca na masę  $m_2$  ma taką samą wartość, ale przeciwny zwrot

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12} \quad (3.5.2)$$

Wyznaczenie stałej grawitacji było zadaniem trudnym, bowiem siła grawitacji pomiędzy ciałami o mierzalnych bezpośrednio masach jest bardzo mała. Pierwszy pomiar wykonany został przez Cavendisha w 1798 roku. Wartość stałej grawitacji wynosi:

$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . Oznacza to, że dwie kule o masach  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$  przyciągają się z odległości  $r = 1 \text{ m}$  siłą  $F = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ . Stała grawitacji jest stałą uniwersalną; jej wartość nie zależy od oddziaływujących ciał ani od własności ośrodka (przestrzeni) w której znajdują się ciała.

## 6. Praca sił grawitacyjnych

Oddziaływanie grawitacyjne pomiędzy ciałami oddalonymi od siebie nie jest oddziaływaniem z odległości (jak początkowo uważano za Newtonem) lecz przenosi się za pośrednictwem pola grawitacyjnego. Istnienie pola grawitacyjnego oznacza, że na znajdujące się w nim ciała materialne działa siła wprost proporcjonalna do ich masy. Każde ciało na które działa pole wytwarza również swoje własne pole modyfikując w ten sposób otaczającą przestrzeń i oddziałując na inne ciała. W tej lekcji rozważamy własności pola grawitacyjnego pamiętając jednak, że w przyrodzie występują też pola o innych własnościach, np. pole elektryczne, magnetyczne czy też pole sił jądrowych. Więcej informacji o własnościach pól podamy w kursie Fizyka II.

Wykorzystując pojęcie pola możemy powiedzieć, że wzór (3.5.1) wyraża siłę oddziaływania pola grawitacyjnego wytworzonego przez masę  $m_2$  na odległą od niej o odcinek  $r$  masę  $m_1$ . Siła ta zależna jest jednak także od samej masy  $m_1$ , nie może więc stanowić charakterystyki pola. Można uwolnić się od tej zależności dzieląc siłę działającą na ciało o danej masie przez wartość tej masy. Uzyska się wtedy informacje o sile działającej na masę jednostkową.

Dla ilościowego wyrażenia wielkości sił działających w danym polu wprowadza się wielkość wektorową  $\vec{g}$  zwaną **natężeniem pola grawitacyjnego** i zdefiniowaną wzorem

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (3.6.1)$$

gdzie  $\vec{F}$  jest siłą działającą na punkt materialny o masie  $m$ .

Zwróćmy uwagę, że zwrot tak zdefiniowanej siły jest przeciwny do zwrotu wektora określającego położenie masy  $m$  względem masy  $M$  wytwarzającej pole. Jeżeli więc interesuje nas natężenie pola w punkcie odległym od tej masy o odcinek  $r$ , to wyrażając siłę występującą w definicji natężenia pola wzorem (3.6.1), otrzymujemy wyrażenie

$$\vec{\gamma} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{F}}{r} \quad (3.6.2)$$

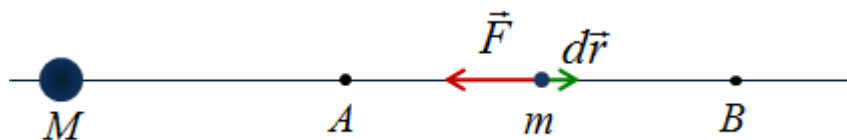
W ten sposób każdemu punktowi w przestrzeni możemy przypisać wektor zwany natężeniem pola grawitacyjnego w tym punkcie. Cała przestrzeń w której działa pole staje się w ten sposób polem wektorowym. Znając masę ciała umieszczonego w danym punkcie pola oraz natężenie pola w tym punkcie możemy na podstawie wzoru (3.6.1) wyznaczyć siłę działającą na to ciało  $\vec{F} = \vec{\gamma} \cdot m$ .

Siłę, z jaką działa masa Ziemi na dowolne ciało o masie  $m$ , nazywamy ciężarem ciała i określamy wyrażeniem  $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ , gdzie  $\vec{g}$  jest przyspieszeniem z jakim porusza się (spada swobodnie) ciało pod działaniem wyłącznie siły ciężkości w danym punkcie pola grawitacyjnego Ziemi. Natężenie ziemskiego pola grawitacyjnego w danym punkcie wynosi więc

$$\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}), \quad (3.6.3)$$

czyli równe jest przyspieszeniu ziemskiemu w tym punkcie.

Obliczmy teraz pracę wykonaną przez siły grawitacji wytwarzane przez ciało o masie  $M$  przy przemieszczaniu punktu materialnego o masie  $m$  z punktu  $A$  do punktu  $B$ , Rys. 3.6.1. Dla uproszczenia zakładamy, że ciało o masie  $M$  jest także punktem materialnym lub jednorodną kulą.



Symbolem  $\vec{F}$  i strzałką czerwoną oznaczona jest siła działająca na masę  $m$  ze strony masy  $M$ . Odległość punktu  $A$  od środka masy  $M$  wynosi  $r_A$ ; odległość punktu  $B$  wynosi  $r_B$ .

**Rys.3.6.1.** Przemieszczenie masy  $m$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  w polu grawitacyjnym masy  $M$ .

Wartość siły działającej na masę  $m$  ze strony masy  $M$  wynosi

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (3.6.4)$$

Praca wykonana przez siły przyciągania grawitacyjnego przy przesunięciu masy  $m$  o infinytezymalny odcinek  $d\vec{r}$  wynosi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr \quad (3.6.5)$$

Praca jest ujemna, bo wektor siły tworzy kąt  $180^\circ$  z wektorem przesunięcia, a cosinus kąta  $180^\circ$  wynosi -1.

Praca pola przy przesunięciu masy  $m$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  wyniesie:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \left( -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \right) dr = -G \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} - \left( -G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} \right) = U_A - U_B \quad (3.6.6)$$

Można wykazać, że praca wykonana przez siły grawitacji przy przemieszczeniu masy  $m$  od punktu  $A$  do punktu  $B$  nie zależy od drogi po której odbywało się przemieszczenie, a jedynie od różnicy odwrotności odległości punktów od środka masy  $M$  wytwarzającej pole. Niezależnie od tego, czy przemieszczenie odbywa się po linii prostej, czy po dowolnej krzywej - wykonana praca jest taka sama. Stąd wniosek, że kiedy położenia obu punktów pokrywają się, tzn. ciało porusza się po drodze zamkniętej, wykonana praca wynosi zero, choćby droga przemieszczenia była długa i skomplikowana.

Wykonana praca wiąże się ze zmianą położenia, a nie prędkości - równa jest więc różnicy energii potencjalnych masy  $m$  w punktach  $A$  i  $B$ , co oznaczyliśmy jako  $U_A - U_B$ . Dodanie lub odjęcie stałej wartości do  $U_A$  i  $U_B$  nie zmienia ich różnicy. Mówimy, że energia potencjalna wyznaczona została z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej, tzn., że możemy napisać

$$U = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} + const \quad (3.6.7)$$

Z postaci wzoru (3.6.7) widać natychmiast, że jeżeli  $r = \infty$ , to energia potencjalna równa jest tej stałej tzn.  $U_\infty = const$ . Wtedy jednak znika oddziaływanie grawitacyjne. Przyjmijmy więc, że stała ta równa jest zeru, a wtedy

$U = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$	(3.6.8)
------------------------------------	---------

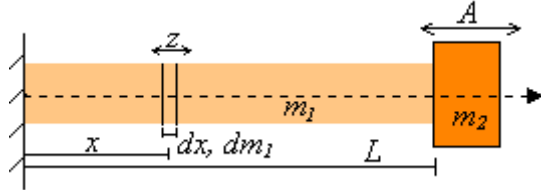
Wyrażenie to określa **energię potencjalną** punktu materialnego o masie  $m$  będącego pod działaniem siły grawitacji pochodzącej od znajdującego się w odległości  $r$  ciała o masie  $M$ . Znak minus oznacza, że masa  $m$  znajduje się w polu siły przyciągającej do masy  $M$ .

## Zadania

### Zadanie 3.1 swobodne drgania harmoniczne

Jednorodny, sprężysty pręt o współczynniku sprężystości  $k$ , długości  $L$  i masie  $m_1$  z zamocowaną na końcu masą  $m_2$  wychylono w poziomie z położenia równowagi (odkształcenie sprężyste w granicy stosowalności prawa Hooke'a). Obliczyć okres swobodnych drgań harmonicznch pręta.

Rozwiązanie



Wprowadzamy dodatkowe oznaczenia:  $A$  - amplituda drgań masy  $m_2$ ,  $z$  - amplituda drgań elementu pręta o grubości  $-dx$ , masie  $-dm_1$ , znajdującego się w odległości  $-x$  od miejsca sztywnego zamocowania pręta (jest tam też umieszczony początek układu współrzędnych).

Podczas drgań pręta różne jego elementy wykonują drgania o różnej amplitudzie  $z$ , chociaż ze stałą częstością  $\omega$  - z tą samą częstością  $\omega$  drga też masa  $m_2$ . Oczywiście, koniec pręta przymocowany do ściany nie zmienia swego położenia.

$$\frac{z}{x} = \frac{A}{L}$$

Dlatego też spełniona jest zależność:

Gęstość jednorodnego pręta o masie  $m_1$ , długości  $L$  i powierzchni przekroju  $S$  wynosi

$$\rho = \frac{m_1}{L \cdot S}$$

więc element masy  $dm_1$  będzie

$$dm_1 = \rho \cdot S \cdot dx = \frac{m_1}{L} \cdot dx$$

Całkowita energia dla masy  $m_2$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot m_2 \cdot A^2 \quad (*)$$

Energia drgającej masy  $dm_1$

$$dE_1 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot z^2 \cdot dm_1 = \frac{m_1 \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot L^3} \cdot x^2 dx$$

Energia wszystkich elementów pręta o masie  $m_1$  i długości  $L$

$$E_1 = \frac{m_1 \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot L^3} \cdot \int_0^L x^2 dx = \frac{m_1 \cdot A^2 \cdot \omega^2}{3} \quad (**)$$

Całkowita energia układu mas  $m_1$  i  $m_2$  jest sumą odpowiednich energii (\*) i (\*\*) z jednej strony ale też może być zapisana za pomocą wzoru w postaci ogólnej [\(wykład\)](#).

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

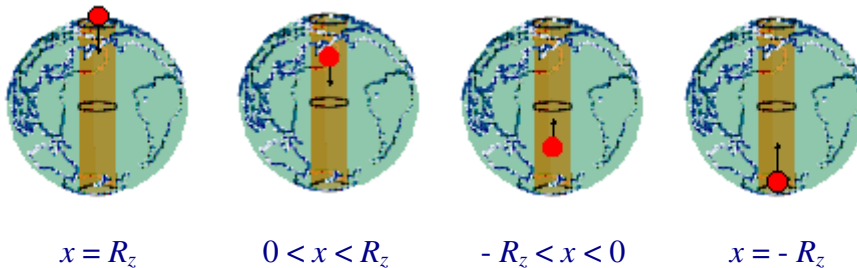
dlatego  $\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) \omega^2 = k$  oraz  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m_1}{3} + m_2}{k}}$ .

### Zadanie 3.2 pole grawitacyjne wewnątrz Ziemi

Zbadać ruch kulki o masie  $m$  w fikcyjnym tunelu przechodzącym przez środek Ziemi. Przyjmąc, że Ziemia jest jednorodną kulą, masa wpada do tunelu z zerową prędkością początkową (swobodnie), a opory ruchu są do zaniechania. Znane są: stała grawitacji -  $G$ , gęstość Ziemi -  $\rho$ , promień Ziemi -  $R_z$ .

Rozwiązanie

Podczas ruchu w tunelu masa znajduje się w różnych odległościach  $x$  od środka Ziemi.



Masa  $m$  znajdująca się w odległości  $x$  od środka Ziemi przyciągana jest przez planetę siłą zależną od  $x$

$$F(x) = -\frac{m \left( \frac{4}{3} \pi \cdot x^3 \cdot \rho \right) \cdot G}{x^2} = -m \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G \cdot x = -k \cdot x$$

więc siłą harmoniczną proporcjonalną do wychylenia, tu - odległości od środka Ziemi.

Masa  $m$  wykonuje ruch harmoniczny o częstotliwości  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G}$ .



$$x(t) = R_z \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot G} \cdot t\right)$$

Równanie kinematyczne ruchu masy ma postać

Znajomość równania ruchu zapewnia pełną charakterystykę ruchu.

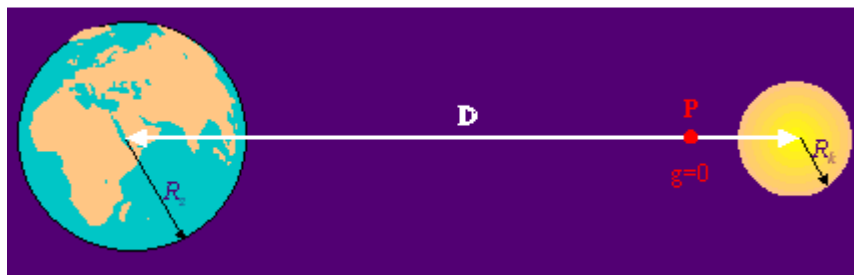
### Zadanie 3.3 natężenie i potencjał pola grawitacyjnego

Proszę ocenić, z jaką minimalną prędkością należałoby wystrzelić raketę z powierzchni Ziemi, aby zdołała dotrzeć do Księżyca. Jaką prędkość miałaby ta raketa przy powierzchni Księżyca? Przyjąć, że Ziemia i Księżyc są kulami, których środki znajdują się w odległości  $D = 3,84 \times 10^8$  m. Masa Ziemi -  $M_z = 5,96 \times 10^{24}$  kg, a dla uproszczenia obliczeń - masa Księżyca  $M_k = 1/81 M_z$ , promień Ziemi  $R_z = 6,37 \times 10^6$  m, a promień księżycy  $R_k = 1/4 R_z$ .

Rozwiązanie

Ruch rakiety będzie odbywał się w wypadkowym polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca. Przyciąganie ziemskie będzie działało hamująco, a przyciąganie księżycowe przyspieszająco. Na prostej łączącej środki Ziemi i Księżyca znajduje się taki punkt P, w którym wypadkowe natężenie pola grawitacyjnego  $g$  jest równe zero, tzn.

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \vec{0}, \text{ czyli } |\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|$$



Rys. z3.3.1. Położenie punktu P, na prostej łączącej Ziemię i Księżyc

Jeśli punkt ten znajduje się w odległości  $x$  od środka Ziemi, to w punkcie tym

$$g_1 = G \frac{M_z}{x^2}, \quad g_2 = G \frac{M_k}{(D-x)^2}$$

oraz

$$G \frac{M_z}{x^2} = G \frac{\frac{1}{81} M_z}{(D-x)^2}$$

Z powyższego równania wynika zależność  $x^2 = 81(D-x)^2$ , a to daje  $x = 0,9D$ .

Znaczy to, że pole grawitacyjne Ziemi będzie "działało efektywnie" w odległościach  $x < 0,9D$  od jej środka, dalej będzie działało tylko pole grawitacyjne Księżyca. Wystarczy zatem rakiecie znajdującej się na powierzchni Ziemi nadać taką prędkość, która umożliwiła by jej dotarcie do miejsca oddalonego o  $0,9D$  od środka Ziemi. Dalszą drogę bowiem, rakietę przebędzie pod wpływem pola grawitacyjnego Księżyca i będzie spadać na Księżyc ruchem przyspieszonym.

Z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_z}{R_z} - G \frac{mM_k}{D - R_z} = -G \frac{mM_z}{0,9D} - G \frac{mM_k}{0,1D},$$

czyli suma energii kinetycznej i potencjalnej rakiety na powierzchni Ziemi równa jest energii potencjalnej rakiety w punkcie P, ponieważ w tym miejscu energia kinetyczna rakiety jest równa zeru.

Po przekształceniu powyższego równania można obliczyć minimalną prędkość rakiety, z jaką należałoby ją wystrzelić z powierzchni Ziemi, aby zdołała dolecieć do Księżyca:

$$v^2 = 2GM_z \left[ \frac{1}{R_z} - \frac{1}{0,9D} + \frac{1}{81(D - R_z)} - \frac{1}{8,1D} \right].$$

Wykorzystując zasadę zachowania energii można również obliczyć prędkość z jaką rakietę spadnie na Księżyc. Z zależności

$$-G \frac{mM_z}{0,9D} - G \frac{mM_k}{0,1D} = \frac{1}{2}mv_k^2 - G \frac{mM_k}{R_k} - G \frac{mM_z}{D - R_k},$$

gdzie lewa strona przedstawia energię potencjalną rakiety w punkcie P, a prawa energię rakiety na powierzchni Księżyca, otrzymujemy że

$$v_k^2 = 2GM_k \left[ \frac{1}{R_k} - \frac{90}{D} - \frac{1}{0,1D} + \frac{81}{D - R_k} \right].$$

Proszę samodzielnie dokończyć rozwiązywanie zadania.

## Słownik

<b>drżania proste harmoniczne</b>	drżania, w których na układ działa wyłącznie siła harmoniczna (proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie skierowana)
<b>amplituda drżania</b>	największe odchylenie od położenia równowagi
<b>okres drżania</b>	czas trwania jednego cyklu drżania
<b>częstotliwość drżania własnych</b>	liczba cykli drżania w ciągu jednej sekundy, gdy na układ działa wyłącznie siła harmoniczna
<b>faza początkowa</b>	argument funkcji cos (lub sin) dla chwili $t=0$ określający początkową

	wartość odchylenia od położenia równowagi
<b>drgania tłumione</b>	drgania, w których występuje dodatkowa siła przeciwdziałająca ruchowi
<b>współczynnik tłumienia</b>	wielkość charakteryzująca siłę tłumiącą w ruchu harmonicznym
<b>drgania wymuszone</b>	drgania, w których występuje zewnętrzna siła periodyczna, zwana <b>siłą wymuszającą</b> .
<b>rezonans</b>	zjawisko wystąpienia maksymalnej amplitudy dla drgań wymuszonych
<b>prawo powszechnego ciężenia</b>	Siła wzajemnego przyciągania dwóch punktów materialnych jest proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości.
<b>natężenie pola grawitacyjnego</b>	wektor równy stosunkowi siły działającej na punkt materialny w polu grawitacyjnym do jego masy; siła działająca na masę jednostkową
<b>potencjał pola</b>	praca wykonana przez siły grawitacji przy przemieszczeniu punktu materialnego o jednostkowej masie z danego punktu pola do nieskończoności
<b>powierzchnia ekwipotencjalna</b>	powierzchnia, na której leżą punkty o tej samej wartości potencjału

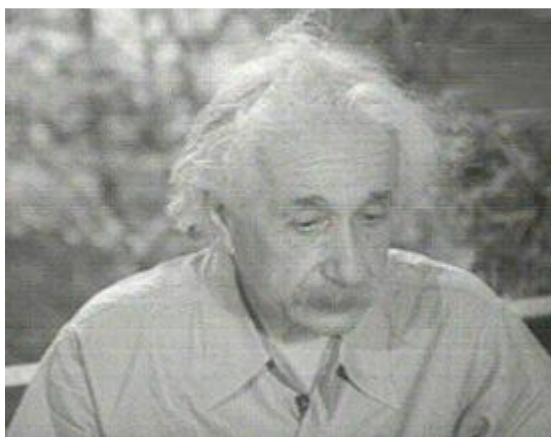
## Wstęp



**Fot. 4.0.1** W jonowodzie zderzacza RHIC w Brookhaven poruszają się w dwóch przeciwnych kierunkach jony złota z prędkością równą 0.99996 prędkości światła.

Mechanika oparta na równaniach dynamiki Newtona i transformacji Galileusza uznawana była przez ponad dwa wieki za teorię rządzącą ruchem wszelkich ciał materialnych. W międzyczasie zmierzono prędkość światła, a Michelson i Morley w swym słynnym doświadczeniu wykonanym w 1887 roku stwierdzili, że prędkość ruchu Ziemi na orbicie okołosłonecznej nie dodaje się do prędkości światła ani od niej nie odejmuje. Wynika z tego, że prędkość światła w próżni jest niezależna od ruchu układu w którym znajduje się źródło światła lub w którym wykonuje się pomiar. Prędkość ta ma zawsze tą samą wartość, która wynosi

$$c = 299792458 \text{ m/s} \\ \approx 300000 \text{ km/s}$$

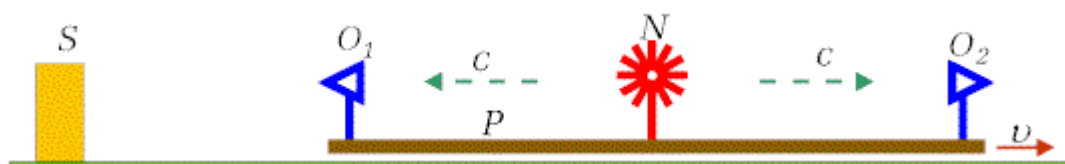


**Fot. 4.0.1** Albert Einstein.

Konsekwencje z tego wynikające zrewolucjonizowały rozwój fizyki XX-go wieku.

Sformułowana w 1905 roku przez Alberta Einsteina szczególna teoria względności zajęła miejsce mechaniki newtonowskiej. Trzeba jednak dodać, że teoria względności nie obaliła słuszności zasad dynamiki Newtona, ale uściśliła je i określiła zakres ich stosowalności. Szczególna teoria względności i wartość prędkości światła były przedmiotem różnorodnych weryfikacji, ale do tej pory wyniki doświadczalne potwierdzają stałość prędkości światła i pozostają w zgodzie ze szczególną teorią względności.

Dla uświadomienia sobie konsekwencji wynikających z faktu niezależności prędkości światła od ruchu układu odniesienia, rozpatruje się często następujące doświadczenie, **Rys.10.1**.



**Rys. 4.0.1.** Zdarzenia równoczesne w układzie  $P$  nie są równoczesne w układzie  $S$ .

Nadajnik,  $N$  znajdujący się na środku platformy  $P$  emituje błyski światła we wszystkich kierunkach. Na obu końcach platformy ustawione są układy pomiarowe (odbiorniki:  $O_1$  i  $O_2$ ), które rejestrują czas nadejścia do nich sygnału świetlnego, Platforma porusza się względem

nieruchomej stacji  $S$ . Rozpatrujemy czas rejestracji sygnału przez oba odbiorniki. Pamiętajmy, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich kierunkach i równa jest  $c$  zarówno w układzie platformy, jak i w układzie stacji.

W układzie własnym platformy sygnał świetlny zostanie zarejestrowany równocześnie przez oba odbiorniki co jest naturalną konsekwencją symetrii układu pomiarowego. W układzie stacji zauważamy, że odbiornik  $O_1$  zbliża się do sygnału świetlnego, a odbiornik  $O_2$  oddala się. Światło dotrze więc wcześniej do pierwszego, a później do drugiego odbiornika.

Otrzymaliśmy paradoksalny wynik. W układzie stacji istnieje moment, kiedy odbiornik  $O_1$  "wie" o nadejściu sygnału, a odbiornik  $O_2$  - jeszcze nie. W układzie platformy taka sytuacja jest niemożliwa; obydwa sygnały zostaną odebrane równocześnie. Widzimy, że równoczesność zdarzeń jest pojęciem względnym i wyciągamy wniosek, że czas biegnie różnie w różnych układach odniesienia.

Prędkość światła w próżni jest graniczną prędkością rozchodzenia się sygnałów niezależnie od ruchu układu odniesienia. Nie można zwiększyć tej prędkości umieszczając nadajnik na czymś, co już się porusza. Obiekty obdarzone masą zawsze poruszają się z prędkościami mniejszymi od prędkości światła. Stwierdzenia te są jednak sprzeczne z transformacją Galileusza, gdzie prędkości obiektu i danego układu odniesienia dodają się, gdy ruch rozpatrujemy w innym układzie.

Podany przykład ułatwia nam zmianę sposobu myślenia, kiedy rozpatrujemy pojęcia czasu i przestrzeni oraz ich wzajemne relacje. W tej lekcji zobaczymy, że nie można tych pojęć rozpatrywać niezależnie. Wprowadzimy więc pojęcie czterowymiarowej przestrzeni zwanej czasoprzestrzenią, i określimy tzw. interwał czasoprzestrzenny, który zachowuje swą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Zacznijmy od podania postulatów Einsteina.

## 1. Czasoprzestrzeń

Ogłoszona przez Einsteina szczególna teoria względności opiera się na dwóch postulatach.

### postulaty Einsteina:

1. *Prawa przyrody są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.*
2. *Prędkość światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia i nie zależy od ruchu źródeł i odbiorników światła.*

Konsekwencją tych postulatów jest związek pomiędzy współrzędnymi w przestrzeni trójwymiarowej i czasem. Przestrzeń i czas tworzą w szczególnej teorii względności czterowymiarową **czasoprzestrzeń**, w której każdemu punktowi przypisuje się cztery współrzędne  $(x, y, z, c \cdot t)$ . Współrzędne te opisują zdarzenie, które zachodzi w określonym punkcie przestrzeni i w określonej chwili czasu.

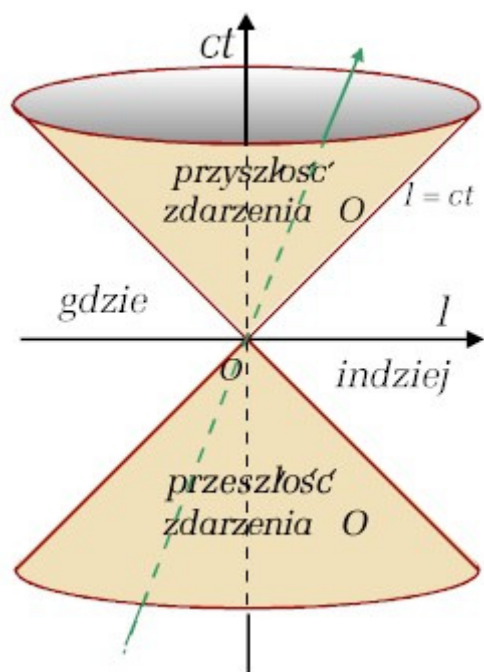
Pamiętamy, że odległość pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni trójwymiarowej określona jest wyrażeniem

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (4.1.1)$$

Odległość pomiędzy dwoma punktami w czasoprzestrzeni nazywamy **interwałem czasoprzestrzennym** (lub krótko interwałem) i określamy wzorem

$$\Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (4.1.2)$$

Zauważmy, że odległość ta jest niezerowa nawet wtedy, gdy zdarzenia zachodzą w tym samym punkcie przestrzeni trójwymiarowej. Punkt w czasoprzestrzeni nosi nazwę punktu świata, a zbiór punktów opisujących przemieszczenia danego ciała w czasie i przestrzeni tworzy linię świata. Linie te mieszczą się wewnątrz stożka zwanego **stożkiem świetlnym lub stożkiem Minkowskiego**.



Stożek ten (Rys.4.1.1.) opisany jest równaniem

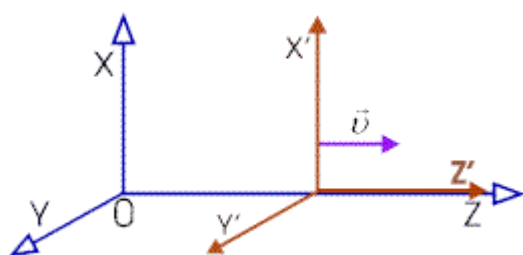
$$c^2 \cdot t^2 = x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (4.1.3)$$

Trajektorie wszystkich sygnałów, które rozchodzą się z danego punktu  $O$  z prędkością światła znajdują się na powierzchni tego stożka. Wszystkie o prędkościach mniejszych mieszczą się wewnątrz stożka.

Stożek ten określa przeszłość i przyszłość zdarzenia  $O$ . Wszystko co w przeszłości mogło mieć wpływ na zdarzenie  $O$  mieści się w dolnej części stożka. Wszystko co może stanowić przyszłość tego zdarzenia mieści się w części górnej. Wszystkie zdarzenia z obszaru "gdzie indziej" ani nie mogły mieć wpływu na zdarzenie  $O$  w przeszłości, ani nie mogą mieć w przyszłości; nie pozostają z tym zdarzeniem w żadnym stosunku przyczynowym. Wszystkie działania, które odbywały się z prędkościami mniejszymi od prędkości światła mieszczą się wewnątrz stożka i pokazane są na rysunku zieloną linią. Linia ta nosi nazwę linii świata zdarzenia  $O$ .

**Rys.4.1.1.** Stożek Minkowskiego. Cała przeszłość i przyszłość zdarzenia  $O$  mieści się w obrębie stożka.

## 2. Transformacja Lorentza



Przypomnijmy sobie transformację Galileusza omawianą w lekcji 1. Zgodnie ze wzorem (1.7.1) prędkość ciała poruszającego się w jednym układzie jest w układzie drugim, poruszającym się względem pierwszego, "sumą odpowiedniej składowej w układzie ruchomym i prędkości translacyjnej samego układu". Kiedy jednak

**Rys 4.2.1.** Ruch względny układów odniesienia.

sygnał świetlny zostaje wyemitowany w układzie ruchomym, to zgodnie z transformacją Galileusza, w układzie nieruchomym do jego prędkości musi być dodana prędkość wzajemna obu układów. W rezultacie otrzymuje się wartość prędkości większą niż  $c$ , a to jest niemożliwe.

Nie możemy też zastosować transformacji Galileusza do innych obiektów, bowiem w jej sformułowaniu nie istnieje pojęcie prędkości granicznej. Dochodzimy do wniosku, że transformacja Galileusza ma określone granice stosowalności i dla dużych prędkości powinna być zastąpiona inną. Ta inna transformacja musi zapewnić stałość prędkości światła, powinna też przechodzić w transformację Galileusza dla małych prędkości. W [załączonym uzupełnieniu](#) pokazane jest jak warunki te można wykorzystać do znalezienia szukanej transformacji zwanej **transformacją Lorentza**. Poniżej podajemy jej postać, a w następnych segmentach rozważymy kilka płynących z tej transformacji wniosków.

Dla przypadku, kiedy oba układy mają osie wzajemnie równoległe, a układ oznaczony symbolami ze znakiem ( ' "prim" ) porusza się wzdłuż osi  $Z$  z prędkością  $u$ , transformacja ta określona jest wzorami

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{z' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{u \cdot z'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.2.1)$$

oraz transformacja odwrotna

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - u \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{u \cdot z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.2.2)$$

gdzie  $\beta = u/c$ . Nietrudno zauważyć, że transformacja ta przechodzi w transformację Galileusza, kiedy  $\beta$  staje się bliskie zeru, czyli kiedy prędkość układu ruchomego jest dużo mniejsza od prędkości światła.

Zapiszmy te wzory w łatwiejszej do zapamiętania formie wykorzystując tzw. czynnik Lorentza  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.2.3)$$

oraz mnożąc obustronnie wzór na transformacje czasu przez  $c$ . Otrzymujemy wtedy prosty zapis wzorów transformacyjnych:

$$\begin{aligned}
x &= x', & y &= y', & z &= \gamma \cdot (z' + \beta \cdot c \cdot t') & c \cdot t &= \gamma \cdot (c \cdot t' + \beta \cdot z') \\
x' &= \gamma \cdot (x - \beta \cdot c \cdot t) & y' &= y, & z' &= \gamma \cdot (z - \beta \cdot c \cdot t) & c \cdot t' &= \gamma \cdot (c \cdot t - \beta \cdot z)
\end{aligned}
\tag{4.2.4}$$

### 3. Skrócenie długości

Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć długość pręta, który spoczywa ułożony wzdłuż osi  $Z$ . W tym celu odczytujemy współrzędne jego końców  $z_1$  i  $z_2$ . Długość pręta jest różnicą współrzędnych jego końców i wynosi  $l = z_2 - z_1$ . Długość tego pręta w układzie poruszającym się znajdziemy określając położenie jego końców  $z'_1$  i  $z'_2$  w tej samej chwili czasu, czyli dla  $t'_1 = t'_2$ . W tym układzie długość pręta będzie  $l' = z'_2 - z'_1$ .

Dla wyrażenia długości pręta w układzie poruszającym się przez jego długość w układzie nieruchomym korzystamy z tych wzorów transformacyjnych (4.2.1), które zawierają  $z$ ,  $z'$  i  $t$  podstawiając tę samą wartość  $t$  dla obu końców pręta. W rezultacie otrzymamy

$$z_1 = \frac{z'_1 + v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad z_2 = \frac{z'_2 + v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad z_2 - z_1 = \frac{(z'_2 - z'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}
\tag{4.3.1}$$

Widzimy więc, że

$$l = z_2 - z_1 = (z'_2 - z'_1) \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = l \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l'}{\gamma}
\tag{4.3.2}$$

gdzie  $\gamma$  jest tzw. czynnikiem Lorentza określonym jako

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
\tag{4.3.3}$$

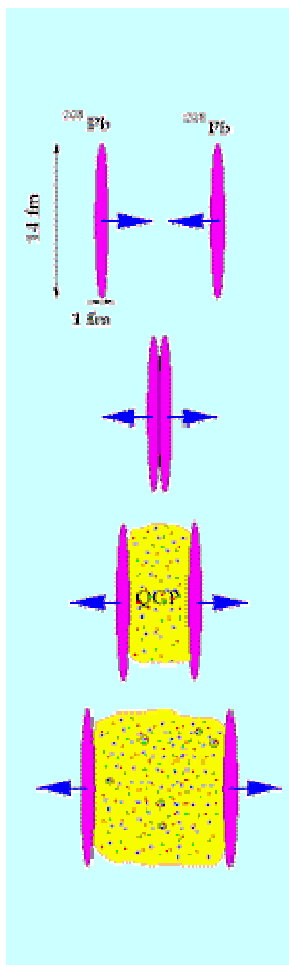
Widzimy, że  $\gamma \geq 1$ , bowiem  $0 \leq \beta < 1$ . Czynnikiem Lorentza równy jest jedności dla przypadku, kiedy prędkość równa jest zeru i zdąża do nieskończoności dla prędkości zbliżających się do prędkości światła.

Podobne obliczenia możemy wykonać zakładając, że pręt spoczywa w układzie poruszającym się ale obserwowany jest w układzie nieruchomym, względem którego się porusza.

Zakładamy wtedy warunek  $t_1 = t_2$  i korzystamy z wzorów transformacyjnych (4.2.2). W rezultacie otrzymujemy taki sam wynik

$$l = z_2 - z_1 = (z'_2 - z'_1) \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = l' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l'}{\gamma}
\tag{4.3.4}$$





Zauważamy, że **długość pręta** mierzona w układzie względem którego pręt się porusza jest **mniejsza niż długość w układzie, w którym pręt spoczywa**. Efekt ten nazywamy często "skróceniem Lorentza" albo kontrakcją długości. Największa długość pręta jest wtedy, kiedy mierzona jest w układzie, w którym pozostaje on nieruchomy. Długość tę nazywamy długością własną pręta, zaś układ odniesienia w którym pręt spoczywa, **układem własnym** pręta.

Oczywiście, efekt ten jest niezauważalny w świecie makroskopowym, bowiem wartość czynnika Lorentza jest praktycznie równa jedności dla wszelkich ruchów, które możemy obserwować bezpośrednio. Fizycy, zajmujący się oddziaływaniami cząstek elementarnych lub zderzeniami ciężkich jonów wielkich energii stosują transformację Lorentza przy wszelkich obliczeniach dotyczących ruchu tych obiektów mikroskopowych. Ilustrację tego stanowi rysunek 4.3.3.

*Rys. 4.3.1. Poglądowa ilustracja zderzenia jonów ołowiu przyspieszonych do energii rzędu kilkudziesięciu tysięcy megaelektronowoltów. W wyniku skrócenia Lorentza kształt ich ze zbliżonego do kuli przekształcił się w formę dysków. Zauważmy bowiem, że wymiary ciał skracają się tylko w kierunku ruchu. Środkowy obszar pokazany kolorem żółtym, to poszukiwany obecnie nowy stan materii zwany plazmą kwarkowo-gluonową. Zainteresowanych tymi zagadnieniami odsyłamy do strony internetowej Europejskiego Laboratorium Fizyki Cząstek CERN (<http://www.cern.ch>).*

#### 4. Dylatacja czasu

Przez okno jadącego pociągu spogląda pasażer. Kiedy mijają stację  $A$  zapamiętał wskazanie zegara stacyjnego. Spojrzał też na swój zegarek i zapamiętał jego wskazanie. To samo uczynił, gdy mijają stację  $B$ . Kiedy jednak odjął wskazania czasu swego zegarka na stacji  $A$  od wskazań na stacji  $B$  oraz to samo uczynił dla zegarów stacyjnych doszedł do wniosku, że jego zegarek musi się późnić, bowiem wskazywał mniejszą różnicę czasu. W domu sprawdził, że jego zegarek chodzi jednak bezbłędnie. Wtedy zrozumiał co to jest **dylatacja czasu**.



*Fot.4.4.1. Jeden z najszybszych pociągów świata, francuski TGV, rozwinął na trasie z Paryża*

do Nantes prędkość 500 km/godz. Stanowi to 0.00000046 część prędkości światła - to jednak o wiele za mało, by zaobserwować zjawisko dylatacji czasu.

**UWAGA:** W naszym opowiadaniu nie chodzi oczywiście o pociąg rzeczywisty - choćby najszybszy, jak na fotografii powyżej - ale o hipotetyczny pojazd, który porusza się z prędkością bliską prędkości światła.

Wyraźmy położenie i czas w układzie własnym pasażera poprzez współrzędne i czas w układzie własnym mijanych stacji. Współrzędne pasażera  $z'$  w jego własnym układzie równe są, oczywiście, zero, (bo jest on zawsze w środku własnego układu odniesienia). Stosujemy transformację Lorentza, wzór (4.2.4)

$$0 = \gamma \cdot (z_A - v \cdot t_A), \quad 0 = \gamma \cdot (z_B - v \cdot t_B) \quad (4.4.1)$$

Czas w układzie własnym pasażera, kiedy mijał stacje  $A$  i  $B$ .

$$t'_A = \gamma \cdot \left( t_A - \frac{v \cdot z_A}{c^2} \right) \quad t'_B = \gamma \cdot \left( t_B - \frac{v \cdot z_B}{c^2} \right) \quad (4.4.2)$$

Czas  $\Delta t'$ , który minął w układzie własnym pasażera wynosi

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \cdot \left[ t_B - t_A - \frac{v}{c^2} \cdot (z_B - z_A) \right] = \gamma \cdot \left[ \Delta t - \frac{v}{c^2} \cdot (z_B - z_A) \right] \quad (4.4.3)$$

gdzie  $\Delta t$  jest różnicą wskazań zegarów stacyjnych.

Ze wzoru (4.4.1) mamy

$$z_B - z_A = v \cdot (t_B - t_A) = v \cdot \Delta t \quad (4.4.4)$$

Wstawiamy to do wzoru (4.4.3), otrzymując

$$\Delta t' = \gamma \cdot \left( \Delta t - \frac{v^2}{c^2} \cdot \Delta t \right) = \gamma \cdot \Delta t \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (4.4.5)$$

Różnica czasu w układzie stacji wyrażona przez różnicę czasu w układzie pasażera jest

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.4.6)$$

Pamiętając, że  $\gamma$  jest (dla prędkości większych od zera i mniejszych od  $c$ ) większa od jedności widzimy, że  $\Delta t > \Delta t'$ , co zaobserwował pasażer z naszego opowiadania. Dyżurny na stacji powie zaś, zakładając, że zegary na wszystkich stacjach pracują jednakowo, że czas w

układzie poruszającym się biegnie wolniej. Czas podróży pasażera wskazany na zegarze dyżurnego stacji jest bowiem dłuższy niż czas wskazany przez zegar poruszający się z pasażerem.

Zjawisko to nosi nazwę **dylatacji (wydłużenia) czasu**. Zjawisko to jest obserwowane przez fizyków, którzy mierzą czas życia rozpadających się cząstek, na przykład mezonów  $\pi$ . Kiedy cząstka porusza się w układzie laboratoryjnym z prędkością bliską prędkości światła, jej czas życia ulega wydłużeniu, co bez trudu można sprawdzić doświadczalnie.

## 5. Transformacja prędkości

Zapiszmy współrzędne wektora prędkości punktu materialnego w nieruchomym układzie odniesienia w chwili  $t$ ;

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (4.5.1)$$

Podobnie czynimy dla drugiego układu o osiach wzajemnie równoległych, poruszającego się względem pierwszego ze stałą prędkością  $v_0$  w kierunku osi  $Z$  i  $Z'$  tj.  $\vec{v}_0 = [0, 0, v_0]$

(Wszystkie wielkości odnoszące się do drugiego układu będziemy oznaczać symbolem <sup>(')</sup>, "prim"),

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (4.5.2)$$

Ze wzorów transformacyjnych (4.2.4) wynika, że

$$dx = dx', \quad dy = dy', \quad dz = \frac{dz' + v_0 \cdot dt'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt' + (v_0/c^2) \cdot dz'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (4.5.3)$$

Stąd możemy wyznaczyć składowe prędkości dzieląc pierwsze trzy równania określające transformacje przyrostów współrzędnych przez czwarte, określające przyrost czasu.

Otrzymujemy

$$v_x = \frac{v'_x \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 \cdot v'_z/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 \cdot v'_z/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z + v_0}{1 + v_0 \cdot v'_z/c^2} \quad (4.5.4)$$

Widać, że gdy prędkość  $v_0$  będzie mała w stosunku do prędkości światła, to wzory (4.5.4) przechodzą w znane z lekcji pierwszej wzory otrzymane za pomocą transformacji Galileusza (1.7.1)

Prędkości w układzie <sup>(')</sup>:

$$v'_x = \frac{v_x \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 \cdot v_z/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 \cdot v_z/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z - v_0}{1 - v_0 \cdot v_z/c^2} \quad (4.5.5)$$

W szczególności, jeśli ciało porusza się wzdłuż osi  $Z$  z prędkością  $v = v_z$  w układzie nieruchomym i  $v' = v'_z$  w układzie poruszającym się z prędkością  $v_0$  względem układu nieruchomego, to relacja pomiędzy tymi prędkościami ma postać

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v' \cdot v_0/c^2} \quad (4.5.6)$$

Łatwo zauważyć, że jeśli za rozważane prędkości podstawimy prędkość światła tj.  $v' = v_0 = c$ , to prędkość ta będzie w obu układach taka sama i równa  $c$ . Jeśli prędkości będą mniejsze, to w wyniku transformacji uzyskamy prędkość, która również będzie mniejsza od prędkości światła, ale jej wartość będzie inna niż przewiduje to transformacja Galileusza. Powoduje to mianownik we wzorze (4.5.6). Widzimy, że w żadnym przypadku prędkość światła nie będzie przekroczona.

## 6. Równoważność masy i energii

Przypomnijmy wzór (2.1.5) z lekcji drugiej wyrażający drugą zasadę dynamiki Newtona.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad (4.6.1)$$

Napisaliśmy go zakładając "że masa ciała podczas ruchu pozostaje stała". Założenie to trwało od czasu Newtona przez ponad dwa wieki. W swej szczególnej teorii względności Einstein odstąpił od tego założenia przyjmując, że masa ciała rośnie wraz ze wzrostem jego prędkości

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma \quad (4.6.2)$$

gdzie  $m_0$  nosi nazwę masy spoczynkowej, ponieważ  $m = m_0$  gdy prędkość równa jest zero.

W rezultacie, wartość pędu nie będzie proporcjonalna do prędkości ciała, ale będzie rosłać szybciej

$$p = m \cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = m_0 \cdot \gamma \cdot v \quad (4.6.3)$$

Uwzględniając taką zależność pędu od prędkości możemy zapisać drugą zasadę dynamiki w postaci relatywistycznej

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \\ &= \frac{m_0 \cdot \vec{a}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^3} \cdot \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{v}\end{aligned}\quad (4.6.4)$$

Widzimy, że siła nie jest już proporcjonalna do przyspieszenia. Co więcej, jeśli kierunek prędkości nie będzie taki sam jak kierunek siły, to i kierunek przyspieszenia będzie różny od kierunku siły. Jeśli zaś prędkość będzie się zbliżać do prędkości światła, to przyspieszenie będzie dążyć do zera. W rezultacie prędkość ciała nie będzie mogła osiągnąć prędkości światła, chociaż pęd będzie mógł wzrastać nieograniczenie. Widzimy jednak, że kiedy prędkość jest dużo mniejsza od prędkości światła, to masa jest bliska masie spoczynkowej i prawa ruchu Newtona są wystarczająco dobrze spełnione.

Dla wyrażenia energii w postaci relatywistycznej obliczymy pracę, jaką wykonuje siła na danej drodze. Szczegóły tych obliczeń [podane są oddzielnie](#).

Uzyskany wynik pokazuje, że przyrost energii kinetycznej jest różnicą masy relatywistycznej i masy spoczynkowej pomnożonych przez kwadrat prędkości światła - określa więc związek masy z energią. Wielkość  $m \cdot c^2$  nazywa się **energią całkowitą**, a  $m_0 \cdot c^2$  **energią spoczynkową**. Mamy więc następujący związek

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma = E_k + m_0 \cdot c^2 \quad (4.6.5)$$

Uzyskaliśmy słynny związek Einsteina pokazujący równoważność masy relatywistycznej i energii całkowitej, która jest sumą energii kinetycznej i spoczynkowej

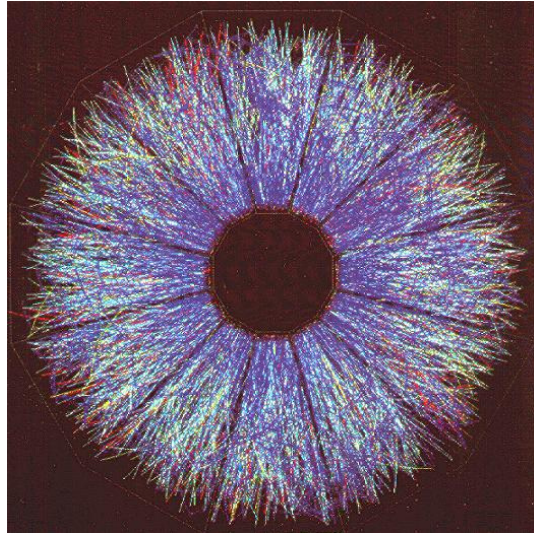
$E = m \cdot c^2$	(4.6.6)
-------------------	---------

Warto dodać, że Einstein uogólnił ten związek na przypadek gdy energią całkowitą stanowi energia spoczynkowa, kinetyczna i wszelkie inne formy energii.

Gdy prędkość jest znacznie mniejsza niż prędkość światła to energię kinetyczną możemy wyrazić ([patrz objaśnienie](#)) znanym wzorem  $E_k = mv^2/2$ .

Dowodem słuszności związku wyrażającego równoważność masy i energii może być zamieszczone poniżej zdjęcie przedstawiające ponad 1000 cząstek wyprodukowanych w wyniku zderzenia dwóch jąder złota, których sumaryczna energia w układzie środka masy wynosiła 130 GeV (gigaelektronowoltów). Jądra przyspieszone były w specjalnym akceleratorze tzw. zderzaczu RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) w Brookhaven National Laboratory, w USA.

*Fot.4.6.1. Ślady cząstek zarejestrowanych w komorze projekcji czasowej detektora STAR w czerwcu 2000 roku. [CERN Courier, Vol.40, Nb.8, (2000)]*



## Zadania

### Zadanie 4.1 transformacja prędkości, prędkość względna

Po torach równoległych poruszają się dwie cząstki  $\gamma$  (fotony), z których każda, jak wiadomo, ma w próżni prędkość  $c$ . Jaka prędkość będzie miała jedna cząstka względem drugiej, gdy

- cząstki zbliżają się,
- oddalają się wzajemnie.

Rozwiązanie

Relatywistycznie, tj. gdy prędkości  $v$  oraz  $v_0$  zmierzone w układzie  $U$  są porównywalne z prędkością światła, prędkość względna  $v'$ , wyrażona w układzie  $U'$  będzie:

$$v' = \frac{v \mp v_0}{1 \mp \frac{vv_0}{c^2}}$$

W powyższym wzorze znak " $\mp$ " uwzględnia przypadek zgodnych zwrotów wektorów prędkości "-" oraz przeciwnych zwrotów tych wektorów "+".

<p><b>Rys. 4.1.1a.</b> Fotony zbliżają się do siebie, zwroty wektorów ich prędkości są przeciwne.</p>	<p><b>Rys. 4.1.1b.</b> Fotony oddalają się od siebie, zwroty wektorów ich prędkości są przeciwne.</p>

W tym zadaniu oba fotony poruszają się z prędkością  $c$ , a zwroty ich prędkości są przeciwne, co daje

$$v' = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

#### Zadanie 4.2 relatywistyczne skrócenie długości

Z jaką prędkością powinien poruszać się pręt w kierunku swej długości, aby doznał relatywistycznego skrócenia o połowę?

Rozwiązanie

Jeśli  $L$  to długość pręta spoczywającego, to dwukrotne zmniejszenie jego długości opisuje wzór

$$\frac{1}{2}L = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Prędkość  $v$  obliczamy z powyższego równania:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4}, \text{ a to daje } v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

#### Zadanie 4.3 dylatacja czasu

W promieniowaniu kosmicznym spotyka się protony o energii  $10^{11}$  GeV. Proszę ocenić, ile czasu potrzebuje taki "ultraszybki" proton na przebycie całej naszej Galaktyki, jeżeli jej średnicę szacuje się na  $10^5$  lat świetlnych? Energia spoczynkowa protonu  $9,38 \cdot 10^8$  eV.

Czas mierzymy w układzie odniesienia:

- $U$  - związanym z Ziemią,
- $U'$  - związanym z protonem.

Rozwiązanie

W układzie  $U$  związanym z Ziemią

Ponieważ proton o tej energii porusza się w układzie związanym z Ziemią z prędkością bliską prędkości światła to czas jego podróży przez Galaktykę będzie bardzo bliski wartości  $t = 10^5$  lat świetlnych  $= 3,16 \cdot 10^{12}$  s.

W układzie U' związanym z protonem

W układzie poruszającym się z prędkością  $v$  czas  $t'$  płynie wolniej (dylatacja czasu), zatem czas  $t'$  podróży protonu będzie równy

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Energia spoczynkowa protonu  $E_0 = m_0 c^2$ , energia protonu będącego w ruchu  $E = mc^2$  oraz

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zatem dwa ostatnie równania dają

$$t' = t \cdot \frac{m_0 \cdot c^2}{E}$$

## Słownik

<b>czasoprzestrzeń</b>	przestrzeń czterowymiarowa , w której każdemu punktowi przypisuje się cztery współrzędne $(x,y,z,t)$ . Współrzędne te opisują zdarzenie, które zachodzi w określonym punkcie przestrzeni i w określonej chwili.
<b>interwał</b>	odległość pomiędzy dwoma punktami w czasoprzestrzeni
<b>stożek świetlny</b>	zbiór punktów czasoprzestrzeni rozdzielający przeszłość, teraźniejszość i przyszłość danego zdarzenia oraz obszary zdarzeń powiązanych i niepowiązanych przyczynowo z danym zdarzeniem
<b>transformacja Lorentza</b>	transformacja współrzędnych położenia i czasu uwzględniająca skończoną prędkość światła, jednakową w każdym układzie odniesienia
<b>skrócenie długości</b>	efekt polegający na tym, że długość obiektu poruszającego się względem danego układu odniesienia jest mniejsza kierunku ruchu układu w układzie nieruchomym niż w układzie, w którym ten obiekt spoczywa
<b>dylatacja czasu</b>	efekt polegający na zwiększeniu czasu trwania zdarzeń, mierzonego w układzie poruszającym się, w stosunku do czasu trwania zdarzeń w układzie, w którym dane zdarzenia zachodzą
<b>energia spoczynkowa</b>	energia odpowiadająca masie ciała będącego w spoczynku Równa jest masie ciała spoczywającego pomnożonej przez kwadrat prędkości światła; $E_0 = m_0 c^2$ .
<b>energia całkowita</b>	pełna energia ciała z uwzględnieniem energii spoczynkowej i relatywistycznego wzrostu masy $E = mc^2$ .



# Elementy termodynamiki



*Fot. 5.0.1. Płonąca świeca jest w równowadze mechanicznej z otoczeniem, ale nie jest w równowadze termicznej.*

W termodynamice zajmujemy się zjawiskami cieplnymi i ich powiązaniem z innymi zjawiskami (mechanicznymi, elektrycznymi, magnetycznymi). Klasycznie rozważamy związki między wielkościami makroskopowymi, takimi jak temperatura, ciśnienie, objętość bazując na zasadach termodynamiki ustalanych na podstawie doświadczenia. Przy opisie zjawisk metodami statystycznymi uwzględniamy wielkości mikroskopowe dla atomów i cząsteczek, takie jak ich masy, prędkości, energie. Wielkości makroskopowe i mikroskopowe są ze sobą związane i dają się wyrazić odpowiednimi zależnościami, bo służą wyjaśnieniu tych samych zjawisk.

## 1. Struktura materii

Dla ilościowego opisu struktury atomowej bądź cząsteczkowej ciał (opisu mikroskopowego) oraz do opisu takich własności ciał, które dostępne są naszym obserwacjom i pomiarom (opisu makroskopowego) wprowadza się szereg pojęć i definicji.

*Masa atomowa (cząsteczkowa)* - to stosunek masy atomu danego pierwiastka chemicznego (cząsteczki związku chemicznego) do  $1/12$  masy atomu węgla  $^{12}\text{C}$ . Z definicji tej wynika że wielkości te są bezwymiarowe.

*Mol* - jest taką ilością danej substancji, która zawiera liczbę atomów (cząsteczek) równą liczbie atomów w 12 gramach (0,012kg) węgla  $^{12}\text{C}$ .

*Liczba Avogadro* - to liczba atomów bądź cząsteczek w jednym molu substancji. Określona doświadczalnie liczba ta wynosi  $N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} / \text{mol}$ .

*Warunki normalne* - określone są przez wartość ciśnienia równą:

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$$

oraz wartość temperatury równą

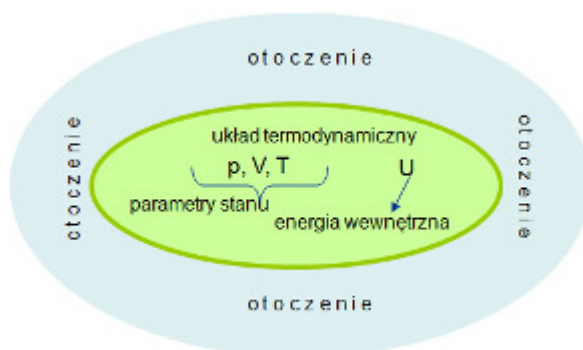
$$T_0 = 273.15K = 0^{\circ}C$$

*Prawo Avogadro* - głosi, że w warunkach jednakowego ciśnienia i temperatury jednakowe objętości różnych gazów zawierają jednakową liczbę cząsteczek.

W warunkach normalnych objętość jednego mola gazu wynosi  $V_0 = 22.414 \text{ dm}^3$ .

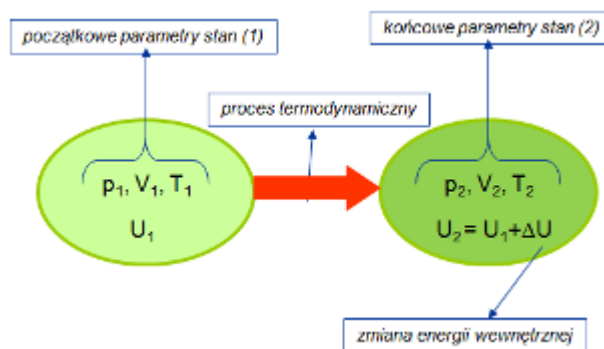
## 2. Układ i stan układu

- *Układ fizyczny* - to ciało lub zbiór rozważanych przez nas ciał. Jest to najbardziej ogólne określenie i stosujemy je w każdym dziale fizyki.
- *Układ termodynamiczny* - układ fizyczny, w którym obok innych zjawisk (mechanicznych, elektrycznych, magnetycznych itd.) uwzględniamy zjawiska cieplne.



- *Otoczenie* - to ciało lub zbiór ciał, które nie należą do układu, ale mogą z nim na różne sposoby oddziaływać.
- *Układ zamknięty* - to układ który nie wymienia materii z otoczeniem. W przeciwnym przypadku układ nazywamy otwartym.
- *Układ izolowany* - to układ który nie wymienia zarówno materii jak i energii z otoczeniem.
- *Stan układu* - charakteryzuje własności układu i określony jest poprzez wartości parametrów stanu.
- Podstawowymi parametrami stanu są: ciśnienie, objętość i temperatura.
- *Stan równowagowy układu* - to taki stan, w którym wszystkie parametry stanu mają określone wartości i które pozostają niezmiennie, jeśli nie zmieniają się warunki zewnętrzne, w jakich znajduje się układ.
- *Stan nierównowagowy* - ma miejsce wtedy, gdy któryś z parametrów stanu nie ma określonej wartości lub jego wartość jest inna niż w stanie równowagi i zależy od czynników zaburzających równowagę, na przykład temperatura w różnych punktach ciała jest różna.
- *Stan nierównowagowy, stacjonarny* - jeśli parametry w stanie nierównowagi są ustalone (nie zmieniają się w czasie).

*Przemiana* albo *proces* - to przechodzenie układu z jednego stanu równowagi do drugiego, charakteryzującego się innymi wartościami parametrów stanu. Nazwa przemiany zaczyna się zwykle od przedrostka "izo", jeśli któryś z parametrów stanu pozostaje w czasie przemiany niezmienny; na przykład przemiana izotermiczna zachodzi w stałej temperaturze.



*Relaksacja* - to taki rodzaj przemiany, w którym układ przechodzi samorzutnie ze stanu nierównowagowego do stanu równowagi.

Przemiana oznacza zmianę stanu układu. Jeśli więc układ znajdował się w stanie równowagi, to przemiana oznacza naruszenie tego stanu. Kiedy jednak przemiana następuje powoli, w granicznym przypadku - nieskończenie powoli, to możemy uważać, że proces taki przechodzi przez ciąg stanów równowagowych.

- *Przemiana kwazistatyczna* - to taki proces, który może być traktowany jako ciąg stanów równowagowych. Przemiana kwazistatyczna powinna zachodzić nieskończenie powoli. W wielu przypadkach możemy jednak uważać rzeczywiste przemiany za kwazistatyczne, jeśli tylko zachodzą wystarczająco wolno.
- *Przemiana odwracalna* - to taki proces, który może przebiegać w odwrotną stronę i możliwe jest przywrócenie stanu początkowego układu oraz jego otoczenia (tzn. bez wywoływania zmian w otoczeniu). Oznacza to, że jeśli układ przechodzi od stanu *A* do stanu *B* przechodząc przez ciąg stanów pośrednich, to możliwe jest także przejście ze stanu *B* do stanu *A* w ten sposób, że układ przechodzi przez te same stany pośrednie, ale w odwrotnej kolejności. Oznacza to również, że dla takiego przeprowadzenia układu w kierunku odwrotnym konieczna jest znajomość wszystkich (równowagowych) stanów pośrednich. **Przemiany kwazistatyczne są przemianami odwracalnymi.**
- *Przemiana kołowa (cykliczna)* - to proces, w którym układ po przejściu szeregu stanów pośrednich powraca do stanu początkowego.

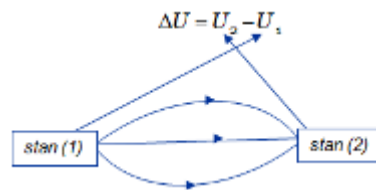
Zapiszmy wyrażenie na energię całkowitą układu w postaci:

$$E = E_k + E_p + U \quad (5.2.1)$$

gdzie  $E_k$  jest energią kinetyczną układu jako całości, a  $E_p$  - energią potencjalną w zewnętrznym polu sił. Te postacie energii znamy już z pierwszej części naszego kursu - dotyczącej ruchu.

Wielkość  $U$ , to *energia wewnętrzna układu*. Na energię wewnętrzną składa się energia kinetyczna chaotycznego ruchu cząsteczek, energia potencjalna oddziaływań międzycząsteczkowych i wewnątrzcząsteczkowych, a także energia spoczynkowa wynikająca z równoważności masy i energii. W naszych rozważaniach zajmować się będziemy głównie zmianami energii wewnętrznej wynikającej z zachodzących przemian, nie zaś wartością bezwzględną tej energii (np. związaną z masą cząstek). Należy jednak zauważyć, że energia

kinetyczna wywołana w procesach jądrowych wiąże się ze znaczącymi zmianami masy, które uwzględnia się w bilansie energetycznym.

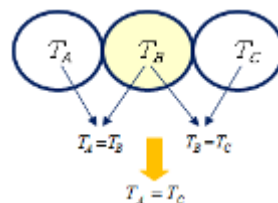


Energia wewnętrzna jest *funkcją stanu układu*. Oznacza to, że parametry stanu określają całkowicie wartość energii wewnętrznej niezależnie od tego jakim przemianom układ podlegał dążąc do tego stanu. Kiedy układ przechodzi od jednego stanu do drugiego, to zmiana energii wewnętrznej jest różnicą energii wewnętrznych w stanach końcowym i początkowym. Różnica ta nie zależy natomiast od rodzaju przemiany i od tego przez jakie stany pośrednie układ przechodził. Wynika z tego, że jeżeli po zakończeniu przemiany układ powraca do tego samego stanu, to energia wewnętrzna mieć będzie taką samą wartość jak w stanie początkowym, czyli przyrost energii wewnętrznej będzie równy zeru.

### 3. Zerowa zasada termodynamiki

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi termicznej jest równość temperatur. Stwierdzenie to znane jest jako *zerowa zasada termodynamiki*. Zasadę tę formułuje się także w postaci:

Jeśli  $(T_A = T_B)$  oraz  $(T_B = T_C)$ , to  $(T_A = T_C)$ ,



gdzie przez  $T$  z odpowiednimi indeksami oznaczyliśmy temperatury ciał  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Traktując ciało  $B$ , jako ciało wzorcowe możemy uznać zerową zasadę termodynamiki za metodę pomiaru temperatury. Możemy też powiedzieć, że zerowa zasada termodynamiki określa własności równowagi termicznej układu; jest ona przekazywalna (tranzytywna) w układzie ciał będących w kontakcie termicznym.

Temperaturę wyrażamy zazwyczaj w skali Celsjusza lub Kelvina. Temperaturze (wody z lodem pod ciśnieniem atmosferycznym)  $t = 0^{\circ}\text{C}$  odpowiada temperatura  $T = 273,15\text{ K}$ . Jednostki obu skal są takie same.

### 4. Pojemność cieplna

*Pojemność cieplna*, określona jest jako stosunek ilości ciepła  $\delta Q$  przekazanej układowi w danym procesie do odpowiadającej mu zmiany temperatury  $dT$ .

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

pojemność cieplna →  $C = \frac{\delta Q}{dT}$  ← ciepło przekazane  
zmiana temperatury

Jednostką pojemności cieplnej jest ( $J/K$ ). Pojemność cieplna danej masy substancji zależy od jej składu chemicznego, stanu termodynamicznego, a także od rodzaju procesu, w którym następuje wymiana ciepła. Związek pomiędzy ilością wymienionego ciepła a odpowiadającą mu zmianą temperatury dla  $n_M$  moli danej substancji określa wzór

$$\delta Q = n_M \cdot C_x \cdot dT \quad (5.4.1)$$

gdzie  $C_x$  jest pojemnością cieplną jednego mola substancji i zwane jest *ciepłem molowym* lub **molowym ciepłem właściwym** w przemianie "x", tzn. ciepłem, którego wymiana powoduje zmianę temperatury 1-go mola gazu o 1 kelwin. Jednostką ciepła molowego jest  $\left(\frac{J}{\text{mol} \cdot K}\right)$ .

**Pojemność cieplną jednego mola gazu nazywamy ciepłem molowym.**

Określa się także wielkość zwaną *ciepłem właściwym*, która jest **pojemnością cieplną przypadającą na jednostkę masy** danej substancji. Jednostką ciepła właściwego jest, więc  $\left(\frac{J}{\text{kg} \cdot K}\right)$ .

**Pojemność cieplną jednostki masy gazu nazywamy ciepłem właściwym.**

## 5. Ciepło i praca

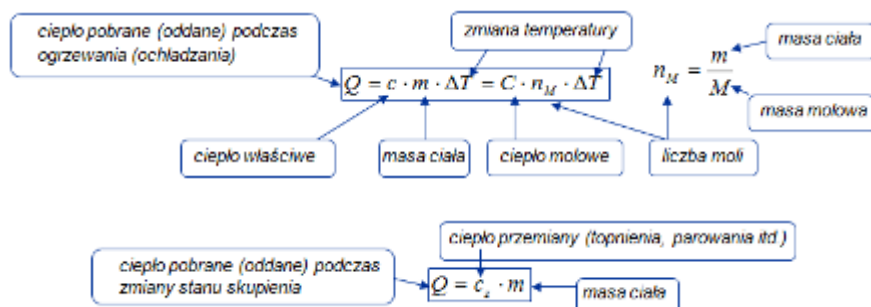
*Ciepło* jest energią przekazywaną od układu o wyższej temperaturze do układu o niższej temperaturze. Ciepło (również praca) nie charakteryzuje ani stanu końcowego ani stanu początkowego układu, ale proces zmian energii. Ciepła nie należy utożsamiać z energią wewnętrzną. Ciepło i pracę mierzymy w tych samych jednostkach. W układzie SI jest to dżul – 1 J. W praktyce używaną jednostką bywa kaloria (1 cal). 1 cal = 4,1868 J.

Energię można przekazywać ciałom na dwa różne sposoby: ciepła i pracy. Przekazywanie energii w postaci ciepła nazywamy dostarczaniem ciepła ciału, a w postaci pracy wykonywaniem pracy nad danym ciałem. W izolowanym układzie termodynamicznym ciało o różnych temperaturach obowiązuje zasada bilansu cieplnego.

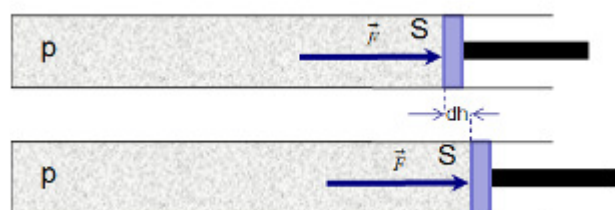
$$Q_{\text{pobrane}} = Q_{\text{oddane}}$$

ciepło pobrane przez ciało o niższej temperaturze →  $Q_{\text{pobrane}} = Q_{\text{oddane}}$  ← ciepło oddane przez ciało o wyższej temperaturze

Ilość ciepła, jaką układ pobiera (oddaje), gdy jego temperatura zwiększa się (zmniejsza się) zależy od tego, w jakich warunkach zachodzi proces wymiany ciepła. Doświadczenia wykazują, że ciepło właściwe wielu substancji zmienia się z temperaturą. Dlatego podane wzory stosuje się, w praktyce, tylko przy niezbyt dużych różnicach temperatur. W tablicach podawane są najczęściej wartości ciepła właściwego i ciepła przemiany dla procesów zachodzących przy ciśnieniu atmosferycznym. Dostarczanie ciepła ciału prowadzi do zmiany jego temperatury lub zmiany jego stanu skupienia (przemiany fazowe).



Praca wykonana przez układ termodynamiczny wiąże się ze zmianą objętości układu pod wpływem wywieranego ciśnienia. Jako przykład rozważmy cylinder o przekroju  $S$  zamknięty szczelnym tłokiem, który może się przesuwać.



Wykonana przez układ praca elementarna  $\delta W'$  związana z przesunięciem tłoka o infinitezmalny odcinek  $dh$  równa jest iloczynowi działającej na tłok siły pomnożonej przez wielkość tego przesunięcia. Przesunięcie następuje pod wpływem ciśnienia  $P$ , więc siła równa jest iloczynowi ciśnienia i powierzchni, na którą ciśnienie to działa.

Mamy, zatem 
$$\delta W' = p \cdot S \cdot dh = p \cdot dV$$

Przez  $dV$  oznaczyliśmy przyrost objętości związany z infinitezmalnym przesunięciem tłoka o odcinek  $dh$ . Pracę związaną ze skończonym przesunięciem tłoka i wynikającą z tego zmianą objętości od  $V_1$  do  $V_2$  wyznaczamy jako całkę

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV$$

objętość końcowa  $\nearrow$   
 $\nwarrow$  objętość początkowa

## 6. Gaz doskonały

Większość naszych rozważań dotyczyć będzie przemian gazowych. Własności poszczególnych gazów zależą od ich struktury mikroskopowej oraz parametrów makroskopowych określonych przez wartości ciśnienia i temperatury. Jako swego rodzaju gaz

modelowy traktuje się tzw. *gaz doskonały*, którego własności makroskopowe i mikroskopowe są jednoznacznie określone. Okazuje się, że gazy rzeczywiste stosują się dobrze do praw określonych dla gazu doskonałego, jeśli ich ciśnienie jest dostatecznie małe. Niektóre gazy, np. azot i tlen nawet przy ciśnieniu atmosferycznym i temperaturze pokojowej mają własności zbliżone do własności gazu doskonałego.

Określimy mikroskopowe własności gazu doskonałego jako zbioru identycznych cząsteczek, nie wnikając na tym etapie rozważań głębiej w ich wewnętrzną strukturę.

- 1. **Cząsteczki gazu traktujemy jak punkty materialne** przy opisie ich ruchów termicznych. Nie rozpatrujemy indywidualnych własności cząsteczek gazu (np. powietrza czy pary wodnej), ale wszystkie uważamy za identyczne. Objętość zajmowana przez cząsteczki jest tak mała w stosunku do objętości naczynia, że można ją pominąć.
- 2. **Cząsteczki poruszają się chaotycznie a ruch ich podlega zasadom dynamiki klasycznej.** Wszystkie kierunki ruchu cząsteczek są jednakowo prawdopodobne, zaś ich zderzenia wzajemne lub zderzenia ze ściankami naczynia możemy opisywać stosując równania Newtona.
- 3. **Całkowita liczba cząsteczek jest bardzo duża.** Oznacza to, że pomimo cząsteczkowej struktury gazu można uśrednić wielkości mikroskopowe, aby scharakteryzować jego makroskopowe własności.
- 4. **Zderzenia cząsteczek są doskonale sprężyste i natychmiastowe.** W zderzeniach spełnione są zasady zachowania energii kinetycznej i pędu. Cząsteczki posiadają tylko energię kinetyczną. Zaniebujemy się energią potencjalną wynikającą z sił ich wzajemnego oddziaływania. Czas trwania zderzeń jest pomijalnie mały w stosunku do czasu pomiędzy zderzeniami.

Podane wyżej własności gazu doskonałego będziemy wykorzystywać rozważając zagadnienia opisu statystycznego ruchów cieplnych.

Z makroskopowego punktu widzenia, stan gazu doskonałego określamy podając wartości trzech parametrów: temperatury  $T$ , ciśnienia  $P$  i objętości  $V$ . Parametry te nie są jednak niezależne. Łączy je związek zwany *równaniem stanu gazu doskonałego* stanowiący

$$\frac{P \cdot V}{T} = const \quad (5.10)$$

Nietrudno znaleźć wartość stałej występującej we wzorze (11.10) pamiętając, że w warunkach danego ciśnienia i temperatury (warunkach normalnych) jeden mol każdego gazu zajmuje objętość równą  $22,4140 \text{ dm}^3$ . Oznaczając stałą z równania (11.10) dla jednego mola gazu symbolem  $R$  otrzymujemy równanie stanu gazu doskonałego w postaci

$p \cdot V = R \cdot T$ ,	(5.11)
---------------------------	--------

gdzie wartość stałej  $R$ , zwanej *uniwersalną stałą gazową* albo *stałą Clapeyrona* wynosi

$$R = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = 8.314511 \frac{J}{mol \cdot K} \quad (5.12)$$

Wzór (5.11) można uznać za makroskopową definicję gazu doskonałego. Gaz doskonały to więc taki gaz, który spełnia podane wyżej równanie stanu.

Jeśli zamiast jednego mola będziemy rozważać ilość gazu równą  $n_M$  molom, wówczas równanie stanu będzie mieć postać

$$p \cdot V = n_M \cdot R \cdot T \quad (5.13)$$

Równanie to nosi nazwę *równania Clapeyrona*.

Uniwersalna stała gazowa odniesiona do jednego mola i podzielona przez liczbę Avogadro, czyli liczba cząsteczek zawartych w jednym molu, ma sens stałej gazowej przypadającej na jedną cząsteczkę i zwana jest *stałą Boltzmann*. Jest to jedna z podstawowych stałych uniwersalnych w fizyce, która wielokrotnie będziemy stosować w trakcie naszego kursu.

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.380658 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (5.14)$$

Równanie stanu gazu dla jednego mola można więc zapisać także w postaci

$$p \cdot V = k \cdot N_A \cdot T \quad (5.15)$$

Dzieląc obie strony tego równania przez  $V$  otrzymamy inną postać równania stanu:

$$p = n \cdot k \cdot T \quad (5.16)$$

gdzie  $n = N_A/V$  jest liczbą cząsteczek w jednostce objętości. (Pamiętamy, że  $V$  jest objętością jednego mola.) Zauważmy, że zgodnie z równaniem (5.16) ciśnienie gazu doskonałego w danej temperaturze jest wprost proporcjonalne do liczby cząsteczek w jednostce objętości (koncentracji cząsteczek).

## Zadania

### Zadanie 5.1 równanie stanu gazu doskonałego

Ile moli gazu doskonałego znajduje się w objętości 22,4 litra, przy ciśnieniu  $p_0 = 101325$  Pa i temperaturze  $t_0 = 0^\circ$  C?

Rozwiązanie

Z równania Clapeyrona mamy, że



$$n_M = \frac{p \cdot V}{R \cdot T},$$

gdzie:  $p$  to ciśnienie gazu (w paskalach),  $V$  to objętość (w metrach sześciennych),  $T$  to temperatura (w kelwinach), a  $R$  to uniwersalna stała gazowa.

### Zadanie 5.2 przemiana gazu doskonałego

Porcja gazu doskonałego o parametrach początkowych  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  poddana została przemianie w wyniku, czego objętość wzrosła czterokrotnie, a ciśnienie zmalało dwukrotnie. Jak zmieniła się temperatura tej porcji gazu?

Rozwiązanie

Dla tej porcji gazu mamy, że

przed przemianą  $\frac{p_0 V_0}{n_M R} = T_0$ , a po przemianie  $\frac{p_k V_k}{n_M R} = T_k$ . Ponieważ  $V_k = 4V_0$  i  $p_k = \frac{p_0}{2}$  to  $T_k = 2T_0$ .

### Zadanie 5.3 mieszanina gazów

Zbiornik o objętości  $V = 0,02 \text{ m}^3$  zawiera mieszaninę wodoru i azotu w temperaturze  $T = 300\text{K}$ . Masy gazów:  $m_1 = 2 \text{ g}$  - to masa wodoru,  $m_2 = 7\text{g}$  - to masa azotu, a ich masy molowe wynoszą odpowiednio  $M_1 = 2 \text{ g/mol}$  i  $M_2 = 28 \text{ g/mol}$ . Jakie jest ciśnienie mieszaniny tych gazów?

Rozwiązanie

Równanie stanu mieszaniny gazów doskonałych:

$$pV = n_M \cdot RT,$$

gdzie  $n_M$  jest całkowitą liczbą moli gazu w mieszaninie,  $V$  - objętością zbiornika,  $p$  to ciśnienie w zbiorniku z mieszaniną,  $T$  jest temperaturą mieszaniny gazów podaną w kelwinach, a  $R$  jest stałą gazową.

W mieszaninie gazów  $n_M = n_{M_1} + n_{M_2}$ , gdzie  $n_{M_1}$  to liczba moli wodoru, a  $n_{M_2}$  to liczba moli azotu oraz

$$n_M = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

Możemy zapisać więc równanie stanu mieszaniny gazów:  $pV = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \cdot RT$ .

$$p = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \cdot \frac{RT}{V}$$

Stąd obliczamy ciśnienie mieszaniny:

#### Zadanie 5.4 bilans energetyczny

Do jednego litra wody o temperaturze 20°C dolewamy jeden litr wody o temperaturze 100°C. Temperatura zmieszanej wody wynosi 60°C. Oblicz ile ciepła pobrała woda zimna oraz ile

ciepła oddała woda gorąca. Znane są dla wody: gęstość  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i ciepło właściwe  $c_w = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ .

Rozwiązanie

Masę litra wody obliczymy ze znanego wzoru  $m = \rho \cdot V$ . Podane w treści temperatury oznaczmy:  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = 60^\circ\text{C}$ . W kelwinach będzie to  $T_1 = 20^\circ\text{C} + 273\text{K}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C} + 273\text{K}$ ,  $T_3 = 60^\circ\text{C} + 273\text{K}$ .

Ciepło pobrane przez zimniejszą wodę i ciepło oddane przez wodę gorącą to

$$Q_{\text{pobrane}} = m \cdot c_w \cdot (T_3 - T_1)$$

$$Q_{\text{oddane}} = m \cdot c_w \cdot (T_2 - T_3)$$

Po podstawieniu podanych wartości otrzymujemy  $Q_{\text{pobrane}} = Q_{\text{oddane}} = 167,6 \text{ kJ}$ .

Uwaga, można się tu przekonać, że  $\Delta T[\text{K}] = \Delta t[^\circ\text{C}]$ .

#### Zadanie 5.5 topnienie śniegu

Do naczynia ze śniegiem o temperaturze 0°C wlewamy 0,5 kg gorącej wody o temperaturze 100°C. Oblicz masę stopionego śniegu. Ciepło właściwe wody  $c_w = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$  i ciepło

topnienia lodu (śniegu)  $c_t = 334 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ .

Rozwiązanie

Ciepło oddane przez gorącą wodę  $Q = m \cdot c_w \cdot (t_2 - t_1)$  to ciepło pobrane przez śnieg  $Q = m_x \cdot c_t$ .

$$\text{Stąd } m_x = \frac{m \cdot c_w \cdot (t_2 - t_1)}{c_t}$$

#### Słownik

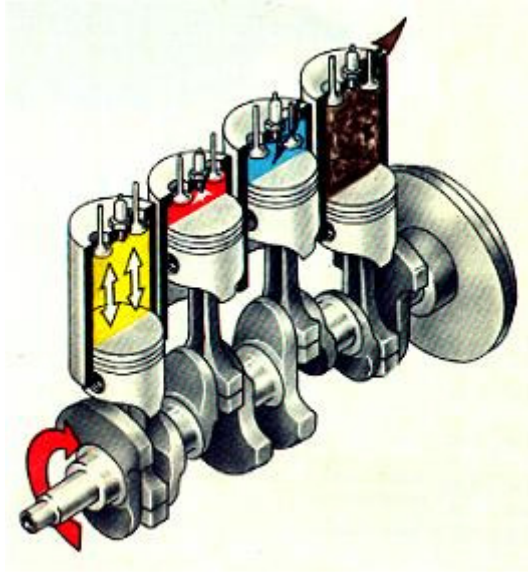
<i>mol</i>	ilość substancji, która zawiera liczbę atomów (cząsteczek) równą liczbie atomów w 12 gramach (0.012kg) węgla $^{12}\text{C}$ .
------------	--

<i>liczba Avogadro</i>	liczba atomów bądź cząsteczek w jednym molu substancji. Określona doświadczalnie liczba ta wynosi $N_A=6.0221367 \cdot 10^{23}/mol$ .
<i>warunki normalne</i>	określone są przez wartość ciśnienia: $p=101325Pa$ i temperatury: $T=273.15K$
<i>prawo Avogadro</i>	W warunkach jednakowego ciśnienia i temperatury jednakowe objętości różnych gazów zawierają jednakową liczbę cząsteczek.
<i>układ fizyczny</i>	ciało lub zbiór rozważanych przez nas ciał.
<i>otoczenie</i>	ciało lub zbiór ciał, które nie należą do układu, ale mogą z nim na różne sposoby oddziaływać
<i>układ zamknięty</i>	układ który nie wymienia materii z otoczeniem; w przeciwnym przypadku układ nazywamy otwartym.
<i>układ izolowany</i>	układ który nie wymienia zarówno materii jak i energii z otoczeniem.
<i>stan układu</i>	charakteryzuje własności układu i określony jest poprzez wartości <i>parametrów stanu</i> .
<i>stan równowagowy układu</i>	stan, w którym wszystkie parametry stanu mają określone wartości i pozostają niezmiennie, jeśli nie zmieniają się warunki zewnętrzne w jakich znajduje się układ.
<i>stan nierównowagowy</i>	gdy któryś z parametrów stanu nie ma określonej wartości lub jego wartość jest inna niż w stanie równowagi przy danych warunkach zewnętrznych
<i>zerowa zasada termodynamiki</i>	warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi termicznej ciał jest równość ich temperatur
<i>przemiana (proces)</i>	przechodzenie układu z jednego stanu do drugiego, charakteryzującego się innymi wartościami parametrów stanu.
<i>relaksacja</i>	rodzaj przemiany, w którym układ przechodzi ze stanu nierównowagowego do stanu równowagi
<i>przemiana kwazistatyczna</i>	zachodzący nieskończenie powoli proces, który może być traktowany jako ciąg stanów równowagowych.
<i>przemiana odwracalna</i>	proces, w którym układ wraz z otoczeniem może przejść ze stanu końcowego, do początkowego
<i>przemiana kołowa (cykl)</i>	proces, w którym układ po przejściu szeregu stanów pośrednich powraca do stanu początkowego.
<i>energia wewnętrzna układu</i>	na energię wewnętrzną składa się energia kinetyczna chaotycznego ruchu cząsteczek, energia potencjalna oddziaływań cząsteczkowych oraz energia spoczynkowa wynikająca z równoważności masy i energii
<i>funkcja stanu układu</i>	funkcja określona całkowicie przez wartości parametrów stanu niezależnie od tego jakim przemianom układ podlegał
<i>pojemność cieplna</i>	ilość ciepła potrzebna do podwyższenia temperatury ciała o jeden kelwin
<i>molowe</i>	ilość ciepła potrzebna do podwyższenia temperatury jednego mola

*ciepło właściwe*

substancji o jeden kelwin

## Jak przemienić ciepło w pracę?



*Rys. 6.0.1. W silniku spalinowym następuje zamiana (części) ciepła na pracę.*

Pytanie to stało się w XIX wieku bodźcem rozwoju termodynamiki i doprowadziło do skonstruowania silników cieplnych. Ciepło jest równoważne pracy zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki i możliwa jest zarówno przemiana ciepła w pracę jak i pracy w ciepło.

### **Czy jednak całe ciepło w przemianach termodynamicznych może być przemienione w pracę?**

Obserwując działanie silników samochodowych widzimy - że nie. Silnik rozgrzewa się bowiem i musi być specjalnie chłodzony ogrzewając przy tym atmosferę nawet podczas gorącego lata, chociaż wcale nam na tym nie zależy. Dlaczego nikt nie zużywa tego marnowanego ciepła? (Całe szczęście, że przynajmniej zimą ciepło to przydaje się do ogrzania wnętrza samochodu.)

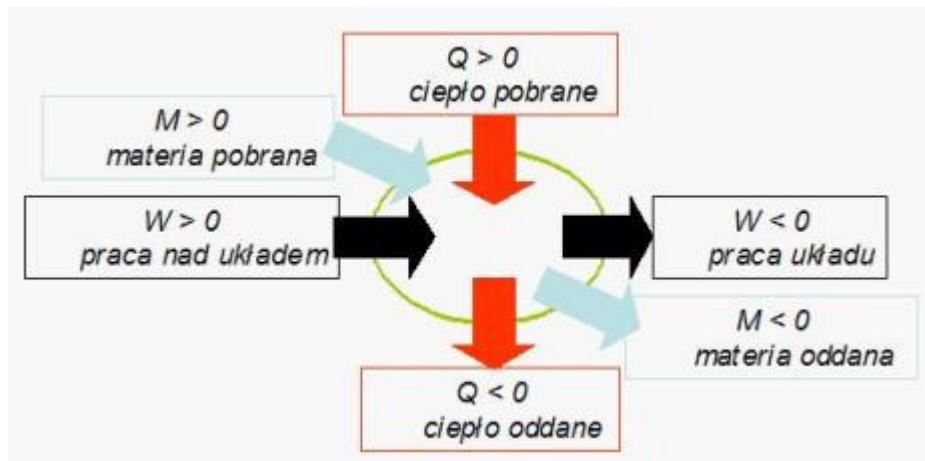
Jest jednak głębsza przyczyna uniemożliwiająca przemianę całego ciepła w pracę.

Temu zagadnieniu, i związanym z nim tematami, poświęcona jest właśnie ta lekcja.

### **1. Pierwsza zasada termodynamiki**

Oznaczamy przez  $\Delta U$  zmianę energii wewnętrznej układu, który przechodzi ze stanu o energii wewnętrznej  $U_1$  do stanu o energii wewnętrznej  $U_2$ . Zmiana ta może zachodzić na kilka sposobów:

1. przez wykonanie pracy  $W$  nad układem lub przez układ nad otoczeniem,
2. przez wymianę ciepła  $Q$  między układem i otoczeniem,
3. przez wymianę materii  $M$  pomiędzy układem, a otoczeniem.



Zapiszemy to następująco

$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q + M$	(6.1.1)
------------------------------------	---------

Wprowadzamy tu konwencję, którą będziemy stosować w dalszych rozważaniach:

Praca  $W$  jest dodatnia ( $W > 0$ ) jeżeli jest wykonywana przez siły zewnętrzne (otoczenie) nad układem fizycznym. Kiedy układ fizyczny wykonuje pracę nad otoczeniem (kosztem swej energii wewnętrznej) praca ta jest ujemna ( $W < 0$ ). Podobnie, ciepło jest dodatnie ( $Q > 0$ ) jeśli przepływa z otoczenia do układu, a ujemne ( $Q < 0$ ) jeśli przepływa z układu do otoczenia. Dla przykładu, kiedy siły zewnętrzne (otoczenie) wykonują pracę sprężając gaz ( $\Delta V < 0$ ), to wykonana praca jest dodatnia, kiedy gaz wykonuje pracę nad otoczeniem rozprężając się ( $\Delta V > 0$ ), praca jest ujemna.

Wzór (6.1.1) wyraża zasadę zachowania energii w procesach termodynamicznych i nosi nazwę *pierwszej zasady termodynamiki*. Zasada ta może więc być sformułowana w następujący sposób.

### **pierwsza zasada termodynamiki**

*Przyrost energii wewnętrznej układu przy przejściu ze stanu początkowego do końcowego równy jest sumie dostarczonej do układu energii cieplnej, wykonanej nad układem pracy oraz energii uzyskanej wskutek wymiany materii z otoczeniem. Przyrost ten nie zależy od sposobu, w jaki dokonuje się przejście, a określony jest całkowicie przez początkowy i końcowy stan układu.*

W ten sposób pierwsza zasada termodynamiki wskazuje na trzy różne sposoby zmiany energii wewnętrznej układu: na drodze wykonywania pracy nad układem bądź przez układ oraz poprzez wymianę ciepła lub/i materii pomiędzy układem a otoczeniem.

W niektórych zagadnieniach użytecznie jest przyjąć, że praca dodatnia, to praca wykonana przez układ. Tak zdefiniowaną pracę oznaczamy będziemy przez  $W'$ . Z definicji tych wynika związek:  $W' = -W$ , a wzór (6.1.1) możemy zapisać w formie

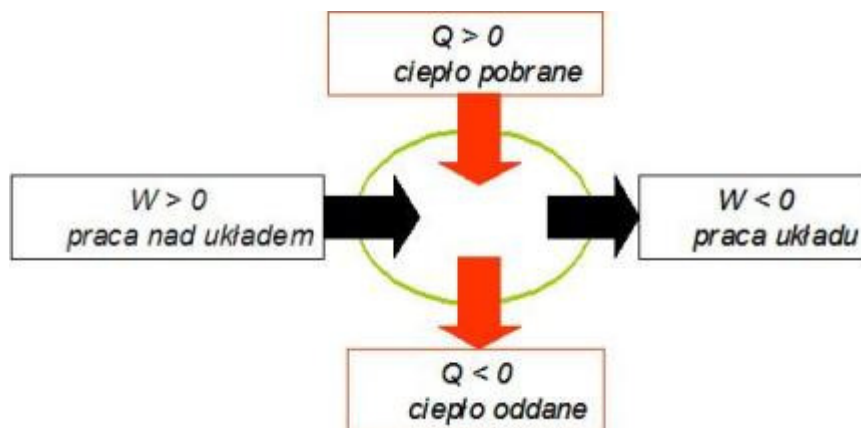
$$\Delta U + W' = Q + M \quad (6.1.2)$$

Wzór ten pokazuje, że wskutek wymiany z otoczeniem ciepła lub materii (prawa strona wzoru), układ może wykonać pracę lub/i powiększyć swą energię wewnętrzną (lewa strona wzoru). Kiedy zaś stan początkowy pokrywa się ze stanem końcowym, to energia wewnętrzna obu stanów jest taka sama, czyli  $\Delta U = 0$  i praca wykonana przez układ

$$W' = Q + M \quad (6.1.3)$$

jest tylko wtedy różna od zera, kiedy między układem i otoczeniem jest wymieniana energia. Niemożliwe jest więc skonstruowanie silnika cyklicznego, który pracowałby bez pobierania z otoczenia energii. Taki hipotetyczny silnik nazwano perpetuum mobile I-go rodzaju. Niekiedy więc formułuje się pierwszą zasadę termodynamiki jako niemożliwość skonstruowania perpetuum mobile pierwszego rodzaju.

**W naszych dalszych rozważaniach będziemy omawiać układy nie wymieniające materii z otoczeniem, dla których  $M = 0$ .** Zmiana energii wewnętrznej  $\Delta U$  układu o stałej masie dokonuje się poprzez wymianę ciepła  $Q$ , co zachodzi w warunkach różnicy temperatur pomiędzy układem i otoczeniem, lub/i poprzez pracę  $W$  wykonaną nad układem lub przez układ nad otoczeniem,



$$\Delta U = Q + W \quad (6.1.4)$$

Dla wyznaczenia skończonej pracy wykonanej w procesie kwazistatycznym, odwracalnym, można rozpatrywać przemianę jako ciąg procesów elementarnych, w których zmiany parametrów układu są nieskończenie małe. Dla procesu elementarnego zapiszemy pierwszą zasadę termodynamiki w postaci

$dU = \delta Q + \delta W$	(6.1.5)
----------------------------	---------

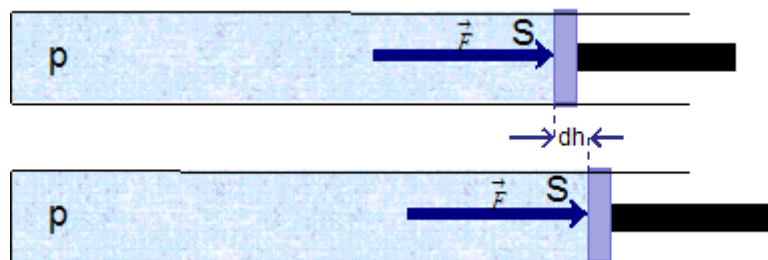
**UWAGA:** Symbolami  $\delta Q$  i  $\delta W$  oznaczamy różniczkowe porcje (a nie skończone przyrosty) wymienianego przez układ ciepła i wykonanej pracy przy nieskończenie małych (infinitesimalnych) zmianach parametrów stanu układu. Wynika, to z faktu, że ciepło i praca nie są funkcjami stanu, bowiem jak zobaczymy, zależą od drogi przejścia pomiędzy stanami.

Mówimy więc, że są **funkcjami procesu**. Symbol  $dU$  oznacza zmianę energii wewnętrznej, która jest funkcją stanu. W przemianie kołowej, kiedy układ powraca do stanu początkowego, jego energia wewnętrzna będzie taką samą wartością jak w stanie początkowym, co zapisujemy w postaci

$$\oint dU = 0 \quad (6.1.6)$$

Nieskończenie mały przyrost, dla którego spełniony jest warunek (6.1.6), nazywamy **różniczką zupełną**. Kiedy warunek ten nie jest spełniony, mamy do czynienia z **wyrażeniem różniczkowym**. Różniczkami zupełnymi są więc nieskończenie małe przyrosty funkcji stanu, ale nie są nimi infinitezymalne ilości wymienianego ciepła, lub wykonanej pracy. Bilans ilości ciepła pobranego i oddanego przez układ w przemianie kołowej lub wykonanej przez układ pracy nie musi być równy zero. Zobacz także [komentarz](#).

Praca wykonana przez układ termodynamiczny wiąże się ze zmianą objętości układu pod wpływem wywieranego ciśnienia. Jako przykład rozważmy cylinder o przekroju  $S$  zamknięty szczelnym tłokiem, który może się przesuwać.



Wykonana przez układ praca elementarna  $\delta W'$  związana z przesunięciem tłoka o infinitezymalny odcinek  $dh$  równa jest iloczynowi działającej na tłok siły pomnożonej przez wielkość tego przesunięcia. Przesunięcie następuje pod wpływem ciśnienia  $P$ , więc siła równa jest iloczynowi ciśnienia i powierzchni, na którą ciśnienie to działa.

Mamy więc

$$\delta W' = p \cdot S \cdot dh = p \cdot dV \quad (6.1.7)$$

Przez  $dV$  oznaczyliśmy przyrost objętości związany z infinitezymalnym przesunięciem tłoka o odcinek  $dh$ . Praca została wykonana przez układ, więc oznacza to zmniejszenie się jego energii wewnętrznej. Kiedy wykonywana jest praca nad układem, to przyrost energii wewnętrznej układu jest dodatni, ale praca taka wiąże się ze zmniejszeniem objętości układu więc znak przyrostu objętości jest ujemny. Pierwszą zasadę termodynamiki wyrażoną w postaci różniczkowej wzorem (6.1.5) możemy więc zapisać w innej, użytecznej postaci przyjmując  $\delta W = -p \cdot dV$  czyli tak, by wykonana praca nad układem powodowała wzrost energii wewnętrznej układu.

$$dU = \delta Q - p \cdot dV \quad (6.1.8)$$



Wykonaną nad układem pracę związaną ze skończonym przesunięciem tłoka i wynikającą z tego zmianą objętości od  $V_1$  do  $V_2$  wyznaczamy jako całkę

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (6.1.9)$$

Dla wyznaczenia tej pracy należy podstawić funkcję określającą zależność ciśnienia od objętości w danej przemianie termodynamicznej prowadzącej od stanu **1** do stanu **2**, a następnie obliczyć wartość całki. Zapamiętajmy - jest to jedna z "recept" na rozwiązywanie wielu zadań z zakresu termodynamiki.

## 2. Podstawowe procesy cieplne

Rozważmy kilka podstawowych procesów cieplnych (termodynamicznych).

Proces, w którym objętość układu pozostaje stała, czyli  $V = \text{const}$ , nazywamy *przemianą izochoryczną*. W przemianie tej **nie jest wykonywana praca**, więc w oparciu o pierwszą zasadę termodynamiki mamy dla przemiany izochorycznej relację

$$\delta Q_V = dU, \quad (6.2.1)$$

co oznacza, że w przemianie izochorycznej możemy zmienić energię wewnętrzną układu jedynie na drodze wymiany ciepła.

Ciepło molowe substancji w procesie przebiegającym bez zmiany objętości wyraża się wzorem

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (6.2.2)$$

gdzie indeks  $V$  przy znaku pochodnej cząstkowej oznacza, że proces zachodzi w stałej objętości.

Energia wewnętrzna danej masy gazu doskonałego zależy jednak wyłącznie od temperatury. Przekonuje nas o tym doświadczenie J.P. Joule'a z rozprężaniem rozrzedzonego gazu do próżni gdy układ jest w osłonie izolacyjnej uniemożliwiającej wymianę ciepła z otoczeniem. Możemy więc zapisać wzór (6.2.2) dla gazu doskonałego w postaci

$$C_V = \frac{dU}{dT} \quad (6.2.3)$$

czyli w dowolnym procesie kwazistatycznym, odwracalnym niezależnie jaka wielkość jest stała zmiana energii wewnętrznej  $n_M$  moli gazu doskonałego jest określona wzorem .

$$dU = n_M \cdot C_V \cdot dT \quad (6.2.4)$$

Bardziej szczegółowe uzasadnienie tego wzoru w oparciu o analizę doświadczenia Joule'a zawiera [załączony przypis](#). Zapamiętajmy więc, że wzór (6.2.4) określający zmianę energii wewnętrznej ma charakter uniwersalny, tzn. mimo że został sformułowany dla przypadku przemiany izochorycznej i występuje w nim ciepło molowe  $C_V$ , [może być stosowany przy opisie innych przemian gazowych](#), gdyż energia wewnętrzna jest funkcją stanu. Informacja ta jest bardzo użyteczna przy rozwiązywaniu zadań.

Jeśli dany proces zachodzi w stałej temperaturze, czyli  $T = const$ , to mówimy, że zachodzi *przemiana izotermiczna*. Z równania stanu gazu wynika natychmiast, że w przemianie tej ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości, bowiem dla danej masy gazu wyrażonej w molach mamy

$$p \cdot V = n_M \cdot R \cdot T, \quad \text{czyli} \quad p = \frac{const}{V} \quad (6.2.5)$$

Związek ten zwany jest *prawem Boyle'a Mariotte'a*.

**Pracę** wykonaną nad układem przy przemianie izotermicznej wyznaczamy w oparciu o definicję (6.1.9) oraz korzystając z równania stanu dla przemiany izotermicznej (6.2.5).

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = - n_M \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = - n_M \cdot R \cdot T \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) = \\ &= n_M \cdot R \cdot T \cdot \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Zapiszmy pierwszą zasadę termodynamiki dla przemiany izotermicznej w postaci różniczkowej, wzór (6.1.8)

$$dU = \delta Q_T - p \cdot dV \quad (6.2.7)$$

W przemianie izotermicznej  $T=const$ , więc  $dU=0$ . Oznacza to, że **w przemianie izotermicznej energia wewnętrzna układu nie zmienia się**. Widzimy dalej, że mimo iż temperatura układu jest stała, to [jest wymieniane ciepło](#) między układem i otoczeniem. Ilość tego ciepła możemy określić w oparciu o równanie (6.2.7)

$$0 = \delta Q_T - p \cdot dV, \quad \text{czyli} \quad \delta Q_T = p \cdot dV \quad (6.2.8)$$

co określa, uwzględniając zmianę znaku, wyrażenie (6.2.6). Wymiana ciepła następuje więc na skutek wykonanej pracy. Jeśli praca jest wykonywana nad układem ( $\delta W > 0$ ), to ciepło w równej ilości musi być oddawane do otoczenia ( $\delta Q < 0$ ) i *vice versa*.

Jeśli proces zachodzi pod stałym ciśnieniem, czyli  $P = const$ , to mówimy, że zachodzi *przemiana izobaryczna*. Z równania stanu wynika, że w tym przypadku objętość jest liniową funkcją temperatury. Przy wzroście objętości praca jest wykonywana przez gaz ( $W < 0, W' > 0$ )

$$(W > 0, W' < 0)$$

, a przy zmniejszeniu objętości, przez otoczenie, Ciśnienie zachowuje stałą wartość, więc **praca** wykonana nad układem w przemianie izobarycznej wynosi

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = -p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot (V_1 - V_2) \quad (6.2.9)$$

Podwyższenie temperatury o jeden kelwin wymaga więcej ciepła niż w przypadku ogrzewania bez zmiany objętości, bowiem część ciepła zużywana jest na wykonanie pracy.

$$dU = \delta Q_p - p \cdot dV \quad (6.2.10)$$

Wyrażenie to możemy przepisać dla  $n_M$  moli w innej postaci wykorzystując wzory: (6.2.4) oraz (6.2.10a)

$$n_M \cdot C_V \cdot dT = n_M \cdot C_p \cdot dT - p \cdot dV \quad (6.2.11)$$

gdzie wprowadziliśmy pojęcie **ciepła molowego przy stałym ciśnieniu**

$$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT} \quad (6.2.12)$$

Z równania (6.2.11) wynika, że w procesie izobarycznym energię wewnętrzną możemy zmienić zarówno na drodze wykonania pracy jak i wymiany ciepła.

Różniczkując równanie stanu (6.2.12a) dla procesu izobarycznego, w którym  $P = const$  mamy

$$p \cdot dV = n_M \cdot R \cdot dT \quad (6.2.13)$$

Wykorzystując ten związek możemy równanie (6.2.11) przepisać w postaci

$$n_M \cdot C_V \cdot dT = n_M \cdot C_p \cdot dT - n_M \cdot R \cdot dT \quad (6.2.14)$$

skąd otrzymujemy

$$C_p = C_V + R \quad (6.2.15)$$

Stosunek ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości jest parametrem określającym rodzaj gazu i oznaczany jest zwykle symbolem  $\kappa$  (kappa).

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} \quad (6.2.16)$$

Wykorzystując wzór (6.2.14) mamy związek

$$\kappa = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \quad \text{lub} \quad C_V = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (6.2.17)$$

Ze związków tych widzimy, że  $\kappa > 1$ .

Korzystając ze wzorów (6.2.14) i (6.2.16) można ciepło molowe  $C_p$  i  $C_V$  wyrazić za pomocą współczynnika  $\kappa$

$$C_V = \frac{R}{\kappa - 1}, \quad C_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \quad (6.2.18)$$

Przemiana, która zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem - to *przemiana adiabatyczna*. Dla przemiany tej mamy więc

$$\delta Q = 0 \quad (6.2.19)$$

W takim przypadku pierwsza zasada termodynamiki, wzór (5.8), przyjmie postać.

$$dU = -p \cdot dV, \quad (6.2.20)$$

co oznacza, że w przemianie tej energię wewnętrzną można zmienić jedynie poprzez wykonanie pracy. Zapiśmy to bardziej szczegółowo wykorzystując równanie stanu (6.2.12a) i wzór (6.2.4).

$$\frac{dU}{n_M \cdot C_V \cdot dT} = - \frac{n_M \cdot R \cdot T / V}{p} \cdot dV, \quad \text{czyli} \quad n_M \cdot C_V \cdot dT + \frac{n_M \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = 0 \quad (6.2.21)$$

Można to zapisać nieco inaczej dzieląc obustronnie ostatnie równanie przez  $\kappa > 1$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} = 0 \quad (6.2.22)$$

Pamiętając z matematyki, że  $d(\ln x) = dx/x$  oraz, że różniczka sumy równa jest sumie różniczek, możemy to równanie przepisać w postaci

$$d\left(\ln T + \frac{R}{C_V} \cdot \ln V\right) = 0 \quad (6.2.23)$$

Jeśli różniczka funkcji równa jest zeru, to funkcja równa jest stałej, czyli

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \cdot \ln V = \text{const} \quad (6.2.24)$$

Pamiętając (wzór [6.2.17](#)), że  $R/C_V = \kappa - 1$  możemy wzór (6.2.24) przepisać w innej postaci

$$\ln T + (\kappa - 1) \cdot \ln V = \text{const} \quad \text{lub} \quad \ln(T \cdot V^{\kappa-1}) = \text{const} \quad (6.2.25)$$

Jeśli logarytm funkcji równy jest stałej, to i sama funkcja pozostaje stała. Możemy więc napisać

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const} \quad (6.2.26)$$

Wykorzystując równanie stanu gazu doskonałego  $pV=RT$  możemy wzór (6.2.26) zapisać w postaci

$$\frac{p \cdot V}{R} \cdot V^{\kappa-1} = \text{const} \quad \text{lub} \quad \frac{p \cdot V^\kappa}{R} = \text{const} \quad (6.2.27)$$

Wzory (6.2.27) pozostaną w mocy, jeśli stałą gazową  $R$  włączymy do stałej po prawej stronie. Otrzymamy wtedy

$p \cdot V^\kappa = \text{const}$	(6.2.28)
-----------------------------------	----------

Wzór ten jest równaniem adiabaty i nosi nazwę *równania Poissona*. Postępując podobnie można otrzymać równania określające zależności między innymi parametrami stanu dla przemiany adiabatycznej.

$p \cdot T^{\kappa/(1-\kappa)} = \text{const}, \quad V \cdot T^{1/(\kappa-1)} = \text{const}$	(6.2.29)
---	----------

Realizacja przemiany adiabatycznej jest trudna, gdyż wymaga idealnej izolacji cieplnej gazu od otoczenia. Warto jednak zauważyć, że gdy sprężanie lub rozprężanie gazu zachodzi bardzo szybko, to nawet mimo nienajlepszej izolacji cieplnej przemiana taka ma charakter bardzo zbliżony do przemiany adiabatycznej. Właściwość tę wykorzystuje się w pracy silników cieplnych.

Jeśli w czasie przemiany pojemność cieplna ciała pozostaje stała, czyli  $C = \text{const}$ , to mówimy, że zachodzi *przemiana politropowa*. Znajdźmy dla gazu doskonałego związek pomiędzy ciśnieniem i objętością w takiej przemianie, czyli równanie politropy.

Zapiszmy pierwszą zasadę termodynamiki dla gazu doskonałego w postaci różniczkowej, wzór (6.1.5) pamiętając przy tym, że  $\delta Q = C \cdot dT$ , wzór (6.2.10a) oraz, że  $dU = C_V \cdot dT$

$$n_M \cdot C_V \cdot dT = n_M \cdot C \cdot dT - p \cdot dV \quad (6.2.30)$$

Wzór ten można też zapisać inaczej

$$n_M \cdot (C - C_V) \cdot dT = p \cdot dV \quad \text{lub} \quad dT = \frac{p \cdot dV}{n_M \cdot (C - C_V)} \quad (6.2.31)$$

Wykorzystamy także równanie stanu gazu doskonałego (6.2.12a) różniczkując je

$$p \cdot dV + V \cdot dp = n_M \cdot R \cdot dT \quad (6.2.32)$$

Wstawiając wyrażenie na  $dT$  ze wzoru (6.2.31) do równania (6.2.32) otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$(C - C_V - R) \cdot p \cdot dV + (C - C_V) \cdot V \cdot dp = 0 \quad (6.2.33)$$

Pamiętając, że  $C_V + R = C_P$  i dzieląc stronami równanie (6.2.33) przez  $p \cdot V$  otrzymujemy równanie różniczkowe, w którym zauważamy wyrażenia będące różniczkami logarytmu

$$(C - C_P) \cdot \frac{dV}{V} + (C - C_V) \cdot \frac{dp}{p} = 0 \quad (6.2.34)$$

Całkowanie tego równania daje w wyniku

$$(C - C_P) \cdot \ln V + (C - C_V) \cdot \ln p = \text{const} \quad (6.2.35)$$

Dzieląc obie strony tego równania przez  $(C - C_V)$ , co jest możliwe tylko, jeżeli  $(C \neq C_V)$  otrzymujemy po skorzystaniu z własności wyrażen logarymicznych

$p \cdot V^n = \text{const}$	(6.2.36)
------------------------------	----------

gdzie

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} \quad (6.2.37)$$

nazywa się wykładnikiem politropy. (Pamiętajmy by nie mylić tego oznaczenia z oznaczeniem we wzorze (6.2.37a), także literą "n", liczby cząsteczek w jednostce objętości. Nie wprowadzamy tu nowych oznaczeń, by pozostać w zgodności z ogólnie przyjętym nazewnictwem.)

Ze wzoru (6.2.37) można obliczyć ciepło molowe  $C$  w zależności od wykładnika  $n$ .

$$C = \frac{n \cdot C_v - C_p}{n - 1} \quad (6.2.38)$$

Wzór (6.2.36) jest **równaniem politropy** gazu doskonałego obejmującym przypadki dla których ( $C \neq C_v$ ). Kiedy zaś ( $C = C_v$ ) to równanie (6.2.35) przyjmuje postać

$$(C - C_p) \cdot \ln V = const \quad (6.2.39)$$

Przemiana taka zachodzi więc przy stałej objętości; jest to **przemiana izochoryczna**. Na podstawie wzoru (6.2.37) widzimy, że w tym przypadku wykładnik politropy  $n \rightarrow \infty$ .

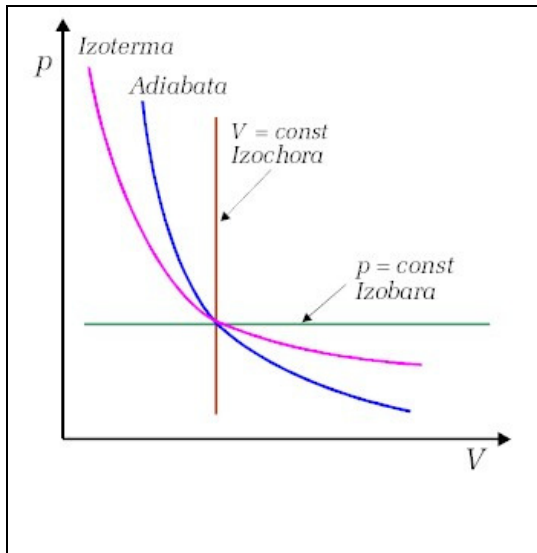
Kiedy  $n = 0$ , to wzór (6.2.36) przyjmuje postać  $P = const$ . Mamy wtedy do czynienia z **przemianą izobaryczną** zachodzącą przy stałym ciśnieniu.

Kiedy  $n = 1$ , mamy równanie  $P \cdot V = const$ . Pamiętając o postaci równania stanu  $P \cdot V = R \cdot T$  widzimy, że przypadek ten dotyczy **przemiany izotermicznej**.

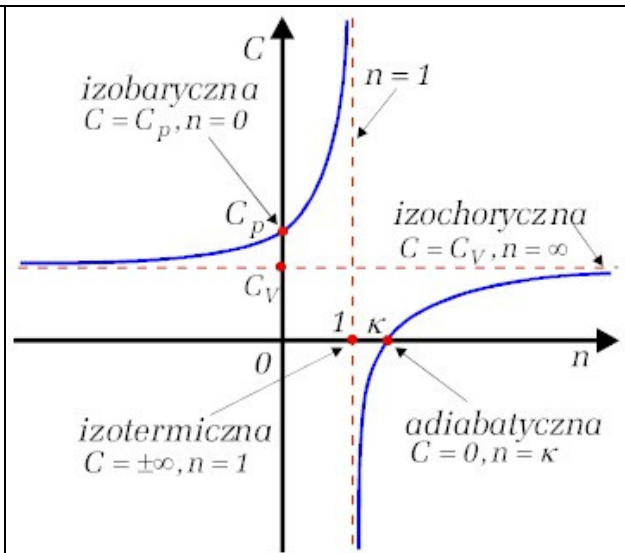
Kiedy  $C = 0$ , to  $n = C_p / C_v = \kappa$  i równanie takiej przemiany przyjmuje postać  $P \cdot V^\kappa = const$ . Zerowe ciepło właściwe przemiany oznacza, patrz wzór (6.2.10a), że układ nie pobiera i nie oddaje ciepła,  $\delta Q = 0$  pomimo zmiany temperatury, czyli nie wymienia ciepła z otoczeniem. Jest to więc **przemiana adiabatyczna**.

Widzimy więc, że wszystkie opisane przemiany są faktycznie różnymi odmianami przemiany politropowej, czyli tworzą rodzinę przemian politropowych (bardziej po polsku - wielokierunkowych).

Rysunki: 6.2.1 i 6.2.2 podsumowują omawiane zagadnienia. Na Rys. 6.2.1 przedstawione są podstawowe procesy cieplne we współrzędnych (ciśnienie, objętość). Na Rys. 6.2.2 pokazana jest zależność ciepła molowego od wykładnika politropy, wzór (6.2.38). Na uwagę zasługuje fakt, że dla wartości  $n$  większych od 1 i mniejszych od  $\kappa$ , ciepło molowe przyjmuje wartości ujemne co oznacza, że temperatura obniża się pomimo doprowadzanego do układu ciepła. W takim procesie układ wykonuje pracę zarówno wskutek doprowadzanego ciepła jak i kosztem swej energii wewnętrznej.



**Rys. 6.2.1.** Podstawowe przemiany cieplne w układzie współrzędnych  $(p, V)$

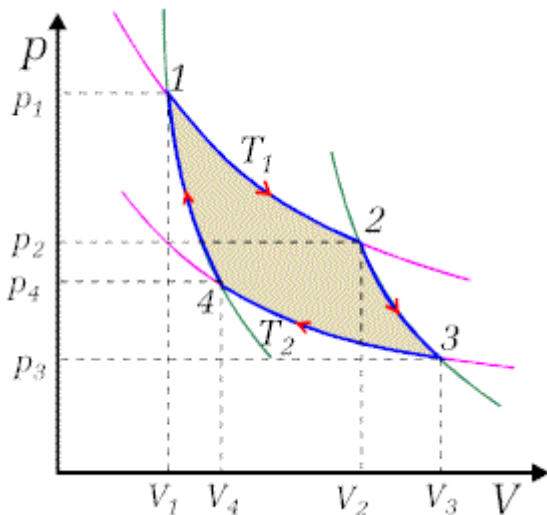


**Rys. 6.2.2.** Ciepło molowe  $C$  procesów cieplnych w funkcji wykładnika politropy  $n$

### 3. Silniki cieplne

W silnikach cieplnych realizowany jest cykl przemian termodynamicznych. Oznacza to, że układ, który przemianom tym podlega powraca cyklicznie do stanu początkowego. Nie oznacza to jednak, że cykl taki musi być odwracalny. Pamiętajmy, że proces odwracalny to taki, który może przebiegać od stanu początkowego do końcowego i odwrotnie przechodząc przez ten sam ciąg procesów kwazistacjonarnych bez wprowadzania zmian w otoczeniu. Warunek ten nie jest nigdy spełniony w rzeczywistych silnikach cieplnych.

Zanim jednak będziemy rozpatrywać pracę konkretnych typów silników zajmiemy się cyklem, który będzie wygodnym punktem odniesienia do dalszych naszych rozważań. Cykl ten rozpatrywany był przez francuskiego inżyniera i fizyka **Leonarda Sadi Carnota** na początku XIX-go wieku i zwany jest **cyklem Carnota**. **Jest to cykl odwracalny składający się z dwóch przemian izotermicznych oraz dwóch adiabatycznych.**



Schemat przebiegu cyklu ilustruje **Rys.13.2**. Kolorem różowym zaznaczone są izotermy, kolorem zielonym - adiabaty. Te ich odcinki, które tworzą cykl, zaznaczone są kolorem niebieskim. Przebieg cyklu rozpoczyna się w punkcie **1** przemianą izotermiczną zachodzącą przy temperaturze  $T_1$ , w wyniku której następuje rozprężanie gazu od objętości  $V_1$  do  $V_2$  przy czym ciśnienie zmienia się od  $p_1$  do  $p_2$ . Ciepło pobierane jest przy tym ze zbiornika o nieskończonej pojemności cieplnej, więc jego temperatura nie ulega zmianie pomimo przekazania układowi ciepła. Proces **2-3** jest procesem adiabatycznym, proces **3-4** jest znów



Rys. 6.3.1. Schemat cyklu Carnota

procesem izotermicznym, ale zachodzącym przy niższej temperaturze  $T_2$ , w którym układ oddaje ciepło tzw. chłodnicy o wielkiej pojemności cieplnej; proces **4-1** jest drugim procesem adiabatycznym.

Pierwsza przemiana zachodzi przy stałej temperaturze, więc energia wewnętrzna gazu nie ulega zmianie. Gaz **pobiera** ciepło  $Q_1$  ze źródła ciepła i w całości zużywa go na wykonanie pracy

$$W'_1 = Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = R \cdot T_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (6.3.1)$$

W przemianie drugiej, zachodzącej pomiędzy punktami **2** i **3**, gaz ulega rozprężeniu adiabatycznemu. Oznacza to, że odcięty został zarówno dopływ ciepła, jak i możliwość przekazania ciepła otoczeniu, ale rozprężanie odbywało się nadal do objętości  $V_3$ .

Trzeci etap jest znów przemianą izotermiczną, w której gaz zostaje sprężony od objętości  $V_3$  do  $V_4$ . Gaz **oddaje** ciepło do chłodnicy o wielkiej pojemności cieplnej, więc temperatura  $T_2$  pozostaje niezmienną, ale wskutek rozprężania adiabatycznego od objętości  $V_2$  do  $V_3$ , które zaszło wcześniej, jest niższa od temperatury  $T_1$ . Praca wykonana przez gaz w tym procesie wynosi

$$W'_2 = Q_2 = \int_{V_3}^{V_4} p \cdot dV = R \cdot T_2 \cdot \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = -R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} < 0 \quad (6.3.2)$$

Zauważmy, że w tym przypadku obie wielkości: wykonana praca i ciepło "pobrane" z chłodnicy są ujemne. Ciepło oddane, któremu przypisujemy wartość dodatnią, oznacza się zwykle symbolem  $\bar{Q}$ . Mamy więc

$$\bar{Q}_2 = -Q_2 \quad (6.3.3)$$

Czwarty proces jest znów adiabatyczny i przeprowadza układ od punktu **4** do początkowego punktu **1**. W ten sposób cykl zostaje zamknięty, a energia wewnętrzna po wykonaniu całego cyklu ma swą pierwotną wartość. Przyrost energii wewnętrznej układu równy jest zeru, a sumaryczna wykonana praca równa jest pobranemu przez układ ciepłu zgodnie ze wzorem [\(6.1.4\)](#)

$$W' = W'_1 + W'_2 = Q_1 - \bar{Q}_2 \quad (6.3.4)$$

Stosunek pracy wykonanej przez układ w jednym cyklu do pobranego w tym cyklu ciepła nazywamy *sprawnością lub wydajnością silnika cieplnego (maszyny cieplnej)*. W naszym przypadku mamy

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - \bar{Q}_2}{Q_1} = 1 - \frac{\bar{Q}_2}{Q_1} \quad (6.3.5)$$

Widzimy, że sprawność byłaby równa jedności gdyby całe ciepło zostało zamienione na pracę. Układ musiałby wyłącznie pobierać ciepło. Część ciepła musi być jednak oddawana otoczeniu i w rezultacie sprawność jest zawsze mniejsza od jedności.

Wykorzystując własności przemiany adiabatycznej, wzór (6.2.26), mamy w naszym przypadku związku

$$T_1 \cdot V_2^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_3^{\kappa-1} \quad \text{oraz} \quad T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_4^{\kappa-1} \quad (6.3.6)$$

Dzieląc stronami pierwsze z równań (6.3.6) przez drugie otrzymujemy

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} \quad \text{czyli} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (6.3.7)$$

Wykorzystując ten związek mamy na podstawie wzorów (6.3.1) oraz (6.3.2)

$$\frac{\bar{Q}_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{lub} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{\bar{Q}_2}{T_2} \quad (6.3.8)$$

Wynika z tego, że **sprawność silnika Carnota** może być przedstawiona w postaci

$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$	(6.3.9)
--	---------

Otrzymaliśmy ważny związek, który mówi, że sprawność silnika Carnota określona jest wyłącznie stosunkiem temperatur; mniejszej do większej, i że rośnie wraz ze zmniejszaniem się tego stosunku. Widzimy też, że sprawność ta jest mniejsza od jedności, co oznacza, że nie całe pobrane ciepło zamienia się na pracę. Część ciepła oddawana jest chłodnicy, ale jest to konieczne dla przeprowadzenia cyklu kołowego.

Jeśli cykl jest nieodwracalny, co może być wynikiem niedoskonałej izolacji cieplnej lub tego, że przemiany nie są kwazistatyczne, to sprawność silnika jest mniejsza niż w przypadku cyklu odwracalnego.

$$\eta = 1 - \frac{\bar{Q}_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6.3.10)$$

Wniosek, że sprawność silnika Carnota zależy wyłącznie od stosunku temperatur znany jest pod nazwą pierwszego twierdzenia Carnota.

**Twierdzenia Carnota:** 1. Wszystkie silniki pracujące w odwracalnym cyklu Carnota pomiędzy tymi samymi temperaturami mają tę samą sprawność.

Twierdzenie to oznacza również, że sprawność dowolnego cyklu odwracalnego, ale składającego się z innych przemian niż cykl Carnota nie może być większa od sprawności odwracalnego cyklu Carnota.

Drugie twierdzenie dotyczy sprawności silników nieodwracalnych.

2. Sprawność cyklu nieodwracalnego jest zawsze mniejsza od sprawności cyklu odwracalnego.

Zwróćmy uwagę, że możliwe jest także przeprowadzenie cyklu w kierunku odwrotnym. Oznacza to, że nad układem wykonywana jest praca, zaś ciepło odbierane jest z chłodnicy i przekazywane nagrzewnicy. Układ taki działa jak maszyna chłodząca, czyli może stanowić lodówkę. Ciepło odbierane jest wtedy od ciała o temperaturze niższej i przekazywane ciału o temperaturze wyższej poprzez wykonanie pracy. Odpowiednikiem sprawności jest tutaj skuteczność chłodzenia określona jako

$$\xi = \frac{Q}{W'} = \frac{\bar{Q}_2}{Q_1 - \bar{Q}_2} \quad (6.3.11)$$

#### 4. Entropia

Cykl Carnota jest dobrym przykładem do wprowadzenia jeszcze jednej ważnej funkcji stanu. Zauważmy, że ze wzorów (13.3) i (13.8) wynika związek

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \quad \text{lub} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (6.4.1)$$

Związki te można łatwo uogólnić na dowolny cykl odwracalny traktując go jako złożenie wielu cykli Carnota, patrz **Rys. 6.4.1**. Wówczas dla każdego elementarnego cyklu mamy

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0 \quad (6.4.2)$$

Stosunek ilości ciepła pobranego z danego źródła do jego temperatury bezwzględnej  $\Delta Q/T$  nazywamy *ciepłem zredukowanym*. Widzimy więc, że suma ciepł zredukowanych w każdym elementarnym cyklu Carnota równa jest zeru.



Kiedy zapiszemy takie równania dla  $N$  cykli, otrzymamy

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0 \quad (6.4.3)$$

Zwróćmy uwagę, że adiabaty znajdujące się wewnątrz konturu przekrywają się parami, co odpowiada sprężaniu i rozprężaniu gazu. W rezultacie następuje kompensacja pochodzących od nich wkładów i sumaryczny cykl zawiera tylko elementy brzegowe izoterm i adiabat. W ten sposób przybliżamy dowolny odwracalny cykl kołowy sumą cykli Carnota. Kiedy liczba cykli elementarnych  $N$  rośnie, otrzymujemy w granicy

**Rys.13.3.** Każdy proces odwracalny można aproksymować złożeniem cykli Carnota.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{T_i} = \oint_C \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (6.4.4)$$

Widzimy, że całka po obwodzie zamkniętym  $C$  z wyrażenia  $\delta Q/T$  równa jest zeru. Oznacza to również, że w przypadku procesu przeprowadzającego układ z jakiegoś stanu  $A$  do innego stanu  $B$  całka z tego wyrażenia nie będzie zależać od drogi całkowania. (Przypomnij sobie analogiczną własność pracy wykonywanej w polu sił zachowawczych, omawianą w lekcji czwartej lub zmiany energii wewnętrznej gazu w procesach kwazistatycznych, odwracalnych.) Własność ta oznacza, że funkcja określona tą całką jest funkcją stanu. Nosi ona nazwę *entropii* i oznaczana jest przez  $S$ . Mamy więc:

$dS = \frac{\delta Q}{T}$	(6.4.5)
---------------------------	---------

Funkcję tę poznamy w dalszej części kursu [w interpretacji statystycznej](#) jako wielkość związaną z prawdopodobieństwem stanu układu.

Dla kołowego procesu odwracalnego mamy

$$\oint_C \frac{\delta Q}{T} = \oint_C dS = 0 \quad (6.4.6)$$

Dla przemiany przeprowadzającej w sposób odwracalny układ ze stanu  $A$  do stanu  $B$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B dS = S_B - S_A \quad (6.4.7)$$

Podana tu definicja nie pozwala na wyznaczenie bezwzględnej wartości entropii bowiem z zależności (6.4.7), widać, że

$$S_B = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + S_A \quad (6.4.8)$$

Dla wyznaczenia entropii układu w danym stanie musielibyśmy znać wartość bezwzględną entropii stanu początkowego. Możemy jednak wyznaczyć przyrost entropii w danym procesie i to (jak zobaczymy) ma zasadnicze znaczenie dotyczące określenia możliwości zachodzenia oraz kierunku przebiegu procesów w przyrodzie. Ważną cechą entropii jest także jej **addytywność**, co oznacza, że entropia układu jest sumą entropii podukładów. Warto też zwrócić uwagę, że ponieważ w przemianie adiabatycznej, odwracalnej mamy  $\delta Q = 0$ , to wartość entropii jest dla tej przemiany stała;  $S = \text{const}, dS = 0$ . Proces adiabatyczny, odwracalny nazywa się dlatego *procesem izoentropowym*.

Zauważmy, że w przypadku procesów nieodwracalnych wzrasta oddane otoczeniu ciepło o znaku ujemnym w stosunku do ciepła pobranego, któremu przypisaliśmy znak dodatni. Przyczyną jest niekwazistatyczny przebieg procesu, niedoskonała izolacja układu itp.

Sprawność silników nieodwracalnych jest mniejsza niż odwracalnego silnika Carnota. Z nierówności (6.3.10) wynika, że

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (6.4.9)$$

co możemy przepisać w postaci

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0 \quad (6.4.10)$$

Porównując tę zależność ze wzorem (6.4.1) widzimy, że ciepło zredukowane w procesach nieodwracalnych jest mniejsze niż w procesach odwracalnych. Wartość całki z lewej strony wzoru (6.4.6) też będzie mniejsza w procesach nieodwracalnych niż w odwracalnych, dla których wartość ta równa jest zeru. Łącznie dla obu typów procesów możemy zapisać nierówność postaci

$\oint_C \frac{\delta Q}{T} = \oint_C dS \leq 0$	(6.4.11)
--	----------

Nierówność ta zwana jest *nierównością Clausiusa*. Przypadek znaku równości dotyczy procesów odwracalnych.

Porównajmy ze sobą sumaryczne ciepło zredukowane i zmiany entropii dla przemian odwracalnych i nieodwracalnych. Rozpatrzmy cykl kołowy, w którym przemiana ze stanu *A* do *B* jest nieodwracalna, a przemiana z *B* do *A* jest odwracalna. W oparciu o nierówność Clausiusa możemy napisać

$$\int_{A(n)}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B(o)}^A \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad (6.4.12)$$

gdzie wskaźnikami (*n*) i (*o*) oznaczyliśmy odpowiednio przemianę nieodwracalną i odwracalną. Dla przemiany odwracalnej mamy

$$\int_{B(o)}^A \frac{\delta Q}{T} = S(A) - S(B) \quad (6.4.13)$$

Biorąc to pod uwagę możemy wzór (6.4.12) przepisać w postaci

$$\int_{A(n)}^B \frac{\delta Q}{T} + S(A) - S(B) < 0 \quad (6.4.14)$$

lub inaczej

$$\int_{A(n)}^B \frac{\delta Q}{T} < S(B) - S(A) \quad (6.4.15)$$

Oznacza to, że sumaryczne ciepło zredukowane w procesie nieodwracalnym między stanami *A* i *B* jest mniejsze od zmiany entropii przy przejściu odwracalnym między tymi stanami. Dla układu izolowanego nie wymieniającego ciepła z otoczeniem mamy  $\delta Q = 0$ , czyli

$$\int_{A(n)}^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (6.4.16)$$

Wzór (6.4.15) możemy dla takiego przypadku napisać w postaci

$$S(B) > S(A) \quad (6.4.17)$$

Rezultat ten znany jest jako *prawo wzrostu entropii*.

*Entropia układu izolowanego, w którym zachodzą procesy nieodwracalne może tylko rosnąć.*

Jeżeli w układzie zachodzą wyłącznie procesy odwracalne, albo układ osiągnął stan równowagi termodynamicznej wtedy entropia pozostaje stała.

Jak wspominaliśmy już, stwierdzenie to stanowi zasadniczą wartość pojęcia entropii. Jest to funkcja stanu określająca kierunek przebiegu procesów, zarówno wyidealizowanych (odwracalnych) jak i rzeczywistych. Określając zmiany entropii możemy przewidzieć, czy dany proces jest możliwy, czy też nie lub czy może zajść samorzutnie w układzie pozostawionym sobie.

## 5. Druga zasada termodynamiki

Poznaliśmy już pierwszą zasadę termodynamiki będącą faktycznie zasadą zachowania energii odniesioną do procesów termodynamicznych. Zasada ta określa warunki energetyczne zachodzenia procesów w przyrodzie i łączy ilościowo przekaz ciepła oraz wykonaną pracę ze zmianami energii wewnętrznej układu. Odnosi się ona do wszelkich pomyślanych procesów, niekoniecznie dających się zrealizować w rzeczywistości. Oznacza też niemożliwość skonstruowania perpetuum mobile pierwszego rodzaju jako sprzecznego z zasadą zachowania energii. Jednakże - pierwsza zasada termodynamiki nie wyróżnia żadnego kierunku zachodzenia procesów chociaż wiemy, że kierunki te są wyróżnione.

Pierwsza zasada termodynamiki nie wystarcza do pełnego opisu procesów zachodzących w przyrodzie. Dla przykładu, całkowicie zgodna z pierwszą zasadą termodynamiki byłaby zamiana na pracę nieprzebranej ilości energii cieplnej tkwiącej w wodach mórz i oceanów, w powietrzu, czy skorupie ziemskiej. Wiemy, że energia ta nie może być w całości zamieniona na pracę.

Wymieńmy jeszcze inne przykłady procesów, które nie mogą zachodzić, chociaż nie są sprzeczne z zasadą zachowania energii.

- Wiemy, że wskutek tarcia wytwarzają się znaczne ilości ciepła. Pierwotni ludzie tak właśnie rozniecali ogień. Tarcie jest przyczyną rozgrzewania się hamulców w samochodach. Nie zdarza się jednak, by ciepło powstałe wskutek ruchu trących się przedmiotów sprawiło te przedmioty z powrotem w ruch.
- Gdy w naczyniu znajduje się powietrze pod ciśnieniem większym od ciśnienia atmosferycznego, to opuści ono naczynie, kiedy tylko pojawi się w nim otwór. Proces ten następuje samorzutnie aż do momentu wyrównania się ciśnień wewnątrz i na zewnątrz naczynia. Jest to jednak proces nieodwracalny, bowiem proces odwrotny jest nieprawdopodobny.
- Kiedy stykają się dwa ciała o różnych temperaturach następuje przepływ ciepła od ciała o temperaturze wyższej do ciała o niższej temperaturze. Proces trwa aż do momentu wyrównania się temperatur. Nie obserwujemy nigdy samorzutnego przepływu ciepła od ciał chłodniejszych do cieplejszych.

W tej lekcji wprowadziliśmy fenomenologiczną definicję entropii, która ma takie same własności, jak i ta - wprowadzona w dalszej lekcji na gruncie statystyki. Określiliśmy też granice sprawności silników cieplnych stwierdzając, że sprawność wszystkich silników rzeczywistych czyli pracujących w cyklu nieodwracalnym jest mniejsza niż silnika odwracalnego. Poznaliśmy więc szereg warunków zachodzenia procesów w przyrodzie - innych niż te, wynikające z zasady zachowania energii.

Warunki te ujęte są w postaci *drugiej zasady termodynamiki*, która może być sformułowana na kilka sposobów.

**1. Sformułowanie podane przez Clausiusa w 1850r.** *Niemożliwe jest przekazywanie ciepła przez ciało o temperaturze niższej ciału o temperaturze wyższej bez wprowadzenia innych zmian w obu ciałach i w otoczeniu.*

**2. Sformułowanie podane przez Kelvina w 1851r.** *Nieemożliwe jest pobieranie ciepła z jednego termostatu i zamiana go w całości na pracę bez wprowadzania innych zmian w układzie i w otoczeniu.*

Właśnie sformułowanie Kelvina wskazuje na brak możliwości wykorzystania ciepła zmagazynowanego w wodzie oceanów. Już na przykładzie silnika Carnota widzieliśmy, że dla wykonania pracy konieczne było oddawanie części ciepła otoczeniu, a warunkiem tego był termostat o niższej temperaturze niż źródło ciepła. Kiedy zaś temperatury źródła i odbiornika ciepła stają się bliskie, to wydajność silnika zmniejsza się do zera.

Hipotetyczny silnik, który pobierałby ciepło z otoczenia i zamieniał je w całości na pracę nazwano "perpetuum mobile drugiego rodzaju". Drugą zasadę termodynamiki sformułować można więc także w następujący sposób.

*Skonstruowanie perpetuum mobile drugiego rodzaju jest niemożliwe*

Uogólnieniem wszystkich tych sformułowań jest prawo wzrostu entropii.

*Entropia układu izolowanego nie może maleć.*

Wynika z tego, że procesy zachodzące samorzutnie w układzie izolowanym prowadzą do wzrostu entropii, czyli osiągnięcie stanu równowagi oznacza osiągnięcie największej wartości entropii układu. Wzrost entropii układu oznacza, że układ przechodzi do stanu bardziej prawdopodobnego. Wszystkie procesy zachodzące w przyrodzie są więc jednokierunkowe (nieodwracalne), gdyż przejście do stanu o mniejszej entropii byłoby przejściem do stanu mniej prawdopodobnego.

## 6. Gaz rzeczywisty

Własności gazów rzeczywistych bliskie są własnościom gazu doskonałego przy dostatecznie małych ciśnieniach i wystarczająco wysokich temperaturach, a więc przy małych gęstościach. Jeśli warunki te nie są spełnione, to równanie stanu gazu doskonałego nie opisuje poprawnie własności gazów rzeczywistych.

Przy opisie mikroskopowych własności gazu doskonałego zakłada się, że cząsteczki gazu zajmują znikomą objętość, a ich oddziaływania sprowadzają się do zderzeń sprężystych. W rzeczywistości, objętość dostępna dla ruchu cząsteczek jest pomniejszona, bowiem nie mogą one zbliżyć się do siebie na odległość mniejszą niż wynosi średnica cząsteczki i nie mogą zbliżyć się do ścianek na odległość mniejszą od ich promienia. Ciśnienie także jest wynikiem nie tylko sprężystych i natychmiastowych zderzeń cząsteczek, ale również rezultatem ich wzajemnych oddziaływań poza momentami zderzeń. Objętość dostępna dla ruchu cząsteczek jest zatem pomniejszona w stosunku do objętości gazu doskonałego, a ciśnienie - powiększone. Efekty te zostały uwzględnione w równaniu van der Waalsa w postaci dodatkowych członów, które dodaje się do ciśnienia i odejmuje od objętości.

$$(p + p') \cdot (V - V') = R \cdot T \quad (6.6.1)$$

Jeśli wartości  $p'$  i  $V'$  są równe zero, otrzymujemy znane nam równanie stanu gazu doskonałego dla jednego mola gazu. Ciśnienie  $p'$  zwane jest ciśnieniem kohezyjnym.



Ciśnienie to proporcjonalne jest do gęstości gazu  $\rho$  i sił wzajemnego oddziaływania cząsteczek. Siły te także wzrastają proporcjonalnie do gęstości gazu, a gęstość jest odwrotnie proporcjonalna do objętości. Mamy więc

$$p' \sim \rho \cdot F \sim \rho^2 \sim 1/V^2 \quad (6.6.2)$$

Zmniejszenie objętości proporcjonalne jest do liczby cząsteczek, a liczba ta, przy danym ciśnieniu, jest proporcjonalna do objętości naczynia. Objętość  $V'$  stanowi więc tę część objętości, która jest efektywnie zajęta przez cząsteczki gazu.

Wprowadzając oznaczenia:  $p' = a/V^2$  oraz  $V' = b$ , otrzymujemy równanie znane jako **równanie van der Waalsa**.

<b>równanie van der Waalsa</b>	$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R \cdot T$	(6.6.3)
--------------------------------	--	---------

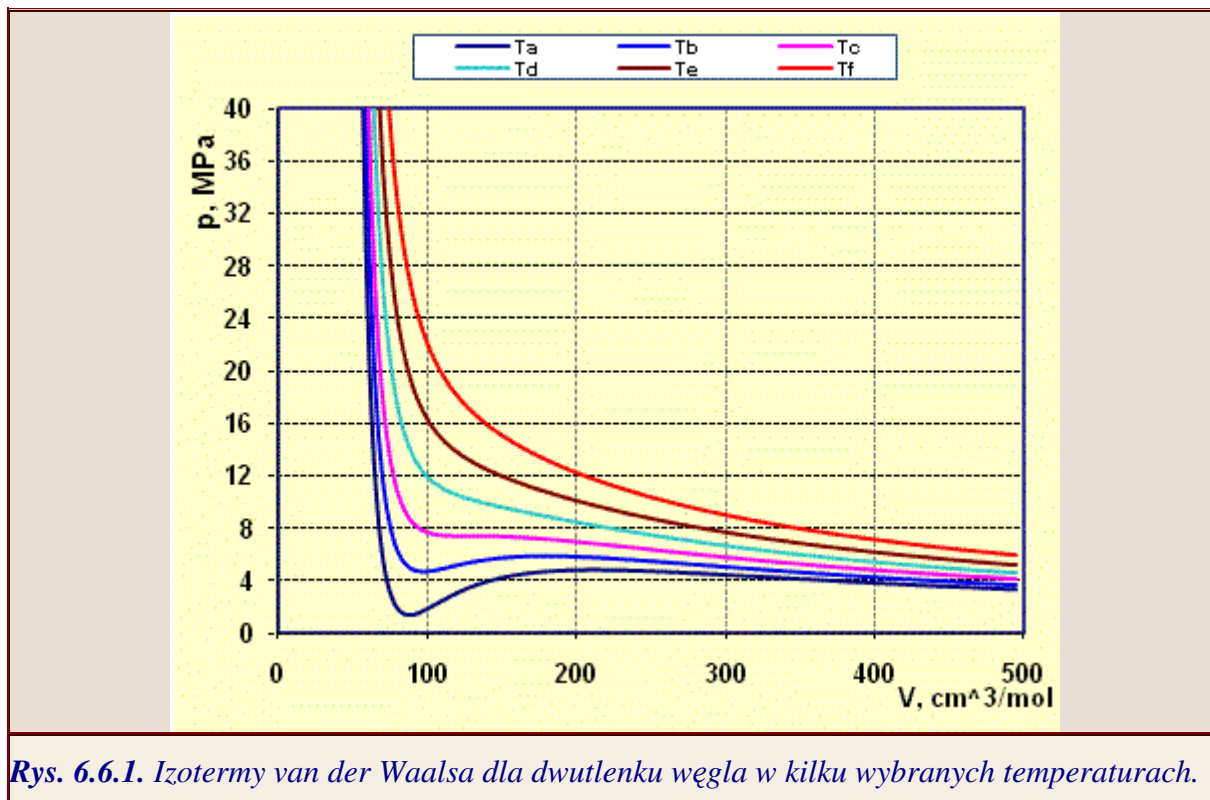
Stałe  $a$  i  $b$  charakteryzują własności jednego mola danego gazu rzeczywistego.

Zależność ciśnienia od objętości przy stałej temperaturze dla gazu van der Waalsa wynikająca z równania (6.6.3) ma postać

$$p = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (6.6.4)$$

Przykładowe izotermy van der Waalsa dla dwutlenku węgla  $CO_2$  pokazane są na Rys. 6.6.1.

<b>MS EXCEL</b>	<b>Interaktywna ilustracja graficzna</b>	kliknij w polu rysunku.
-----------------	--	-------------------------



*Rys. 6.6.1. Izotermy van der Waalsa dla dwutlenku węgla w kilku wybranych temperaturach.*

Z postaci wzorów (6.6.3) i (6.6.4) oraz kształtu izoterm widzimy, że sprężając gaz przy stałej temperaturze mamy dla temperatur wysokich systematyczny wzrost ciśnienia przy zmniejszaniu się objętości, podobnie jak dla gazu doskonałego. Najmniejsza wartość objętości równa jest parametrowi  $b$ , który opisuje efektywną objętość zajmowaną przez jeden mol cząsteczek gazu. Kiedy więc objętość staje się bliska  $b$ , to ciśnienie dąży do nieskończoności, bowiem różnica w mianowniku wyrażenia  $RT/(V - b)$  dąży do zera. Z kolei, wyrażenie  $-a/V^2$  obniża wartość ciśnienia, co przy stosunkowo niskich temperaturach powoduje powstanie lokalnego minimum w obszarze pomiędzy punktami **C** i **B**.

Naturalnym wnioskiem z analizy izoterm van der Waalsa jest to, że dla określonej temperatury nie pojawia się minimum, ale jedynie punkt przegięcia na poziomym odcinku krzywej. Punkt ten zwany jest *punktem krytycznym* i na rysunku 6.1 oznaczony jest literą **K**. Odpowiadające temu punktowi wartości ciśnienia, objętości i gęstości gazu noszą nazwę *wartości krytycznych*. Znaczenie tych wartości omówimy w dalszej części tej lekcji.

Znając wartości krytyczne dla danej substancji nietrudno jest wyznaczyć odpowiednie wartości współczynników  $a$  i  $b$  w równaniu van der Waalsa. W punkcie krytycznym styczna do izotermy jest pozioma, co oznacza zerowanie się pierwszej pochodnej ciśnienia względem objętości. Punkt ten jest też punktem przegięcia, co oznacza zerowanie się drugiej pochodnej. Mamy zatem dla  $T=const$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{R \cdot T}{(V-b)^2} + \frac{2 \cdot a}{V^3} = 0 \quad \text{oraz} \quad (6.6.5)$$

$$\frac{d^2 p}{dV^2} = \frac{2 \cdot R \cdot T}{(V-b)^3} - \frac{6 \cdot a}{V^4} = 0; \quad (\text{przy } T = \text{const})$$

Z równań tych wyznaczamy

$$T_{kr} = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot b \cdot R}, \quad p_{kr} = \frac{a}{27 \cdot b^2}, \quad V_{kr} = 3 \cdot b \quad (6.6.6)$$

Współczynniki równania van der Waalsa wyrażone przez wartości krytyczne wynoszą

$$a = \frac{27 \cdot (R \cdot T_{kr})^2}{64 \cdot p_{kr}}, \quad b = \frac{R \cdot T_{kr}}{8 \cdot p_{kr}} \quad (6.6.7)$$

Tak wyznaczone współczynniki zostały użyte w naszej interaktywnej ilustracji izoterm van der Waalsa dla dwutlenku węgla, gdzie  $T_{kr}=304K$ ,  $p_{kr}=7.38MPa$ .

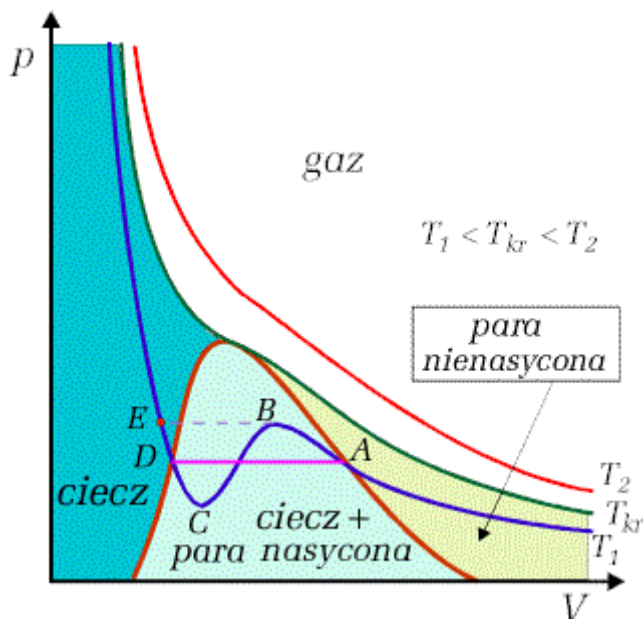
Na koniec warto zaznaczyć, że nasze dotychczasowe rozważania w tej lekcji odnosiły się do jednego mola gazu. Kiedy rozważamy  $n_M$  moli, wówczas dodatkowe człony równania (6.6.1)

są: 
$$p' = \frac{n_M^2 \cdot a}{V^2}, \quad V' = n_M \cdot b$$
, a równanie van der Waalsa ma postać

$$\left( p + \frac{n_M^2 \cdot a}{V^2} \right) \cdot (V - n_M \cdot b) = n_M \cdot R \cdot T \quad (6.6.8)$$

Należy dodać, że równanie van der Waalsa ma charakter empiryczny i jest jednym z kilku różnych równań stanu gazu rzeczywistego, najbardziej popularnym.

Przeanalizujemy nieco dokładniej postać izoterm van der Waalsa, dla różnych wartości temperatur. Przykładowe kształty izoterm dla trzech różnych temperatur spełniających warunek  $T_1 < T_{kr} < T_2$  przedstawia **Rys. 6.6.2**. Zaczniemy od przypadku temperatury niższej od temperatury krytycznej.



Rys. 6.6.2. Przykłady izoterm van der Waalsa

Kiedy poprzez zmniejszanie objętości naczynia sprężamy izotermicznie gaz rozpoczynając od dużej objętości i małego ciśnienia w temperaturze poniżej temperatury krytycznej (punkt oznaczony symbolem temperatury  $T_1$ ) - przesuwamy się po krzywej w kierunku punktów  $A$  i  $B$ . W punkcie  $B$  krzywa ma lokalne maksimum. Dalsze zwiększanie siły wywieranej na tłok powinno spowodować obniżenie ciśnienia wewnątrz naczynia. Musiałoby to doprowadzić do raptownego przejścia układu do stanu  $E$  o tym samym ciśnieniu, bowiem ciśnienie zewnętrzne byłoby większe od ciśnienia wewnętrznego. Tak się jednak nie dzieje. W punkcie  $A$  rozpoczyna się nowe zjawisko - skraplanie, czyli tworzenie się fazy ciekłej.

Para nienasycona, będąc w fazie gazowej, wskutek sprężania zwiększa swą gęstość i w punkcie  $A$  osiąga gęstość pary nasyconej w temperaturze  $T_1$ , czyli staje się parą nasyconą. Dalsze zmniejszanie objętości powoduje skraplanie pary nasyconej. Proces ten odbywa się wzdłuż prostej  $AD$ , przy stałym ciśnieniu.

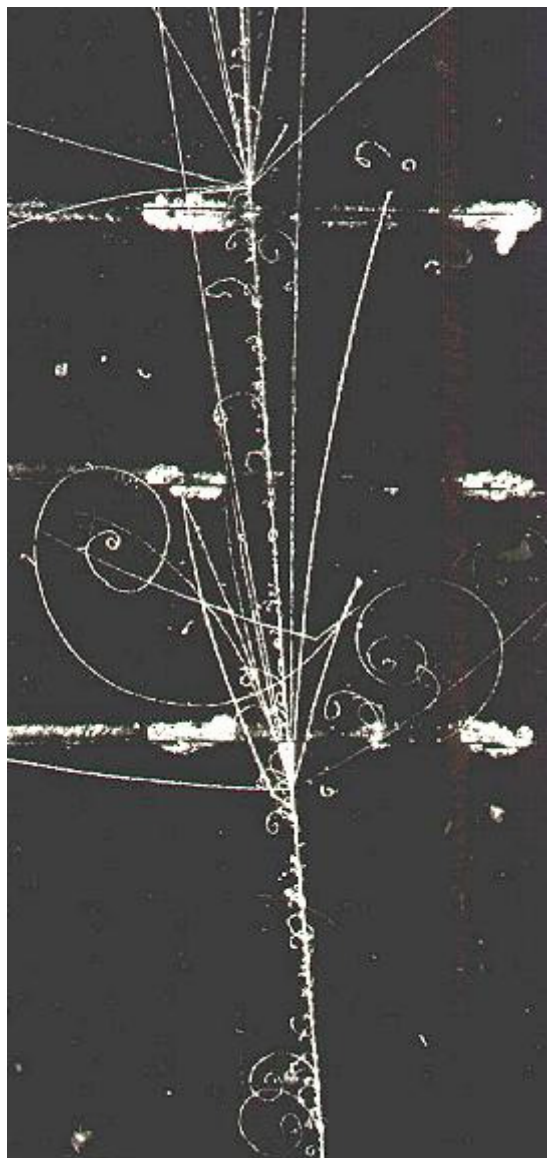
Przy zmniejszeniu się objętości na odcinku  $AD$  coraz więcej gazu ulega skropleniu. W naczyniu współistnieją wtedy dwie fazy - ciecz i para nasycona. W punkcie  $D$  cały gaz ulega skropleniu i następuje gwałtowny wzrost ciśnienia, ponieważ ściśliwość cieczy jest wielokrotnie mniejsza od ściśliwości gazów.

Fakt, że w punkcie  $A$  rozpoczyna się skraplanie nie oznacza, że odcinek krzywej  $AB$  jest dla gazu nieosiągalny. Proces skraplania rozpoczyna się na istniejących zwykle w gazie niejednorodnościach, które są centrami kondensacji. Jeśli proces sprężania przeprowadzany jest ostrożnie a gaz nie zawiera zanieczyszczeń możliwe jest przemieszczenie się do punktu  $B$ . Gaz w takim stanie nazywamy parą przesyconą.

Analogicznie do efektu powstawania pary przesyconej możliwe jest przejście w odwrotnym kierunku - od punktu  $D$  do punktu  $C$ . Uzyskujemy wtedy stan cieczy przegrzanej. Stany te są stanami metastabilnymi. Oznacza to, że wystarczy niewielkie zaburzenie, aby wyprowadzić ciecz lub gaz z takiego stanu. Następuje wtedy gwałtowna kondensacja (w przypadku pary przesyconej) lub wrzenie cieczy (w przypadku cieczy przegrzanej). Proces skraplania bądź wrzenia rozpoczyna się na występujących niejednorodnościach, a następnie obejmuje całą objętość.

Należy tu wspomnieć o niezwykłym zastosowaniu zjawiska powstawania pary przesyconej i cieczy przegrzanej. Zjawiska te zostały wykorzystane w konstrukcji detektorów promieniowania jonizującego i odegrały doniosłą rolę w badaniach z dziedziny cząstek

elementarnych. Kondensacja pary przesyconej wykorzystana została w działaniu **komory Wilsona**, zaś stan cieczy przegrzanej w **komorach pęcherzykowych**.

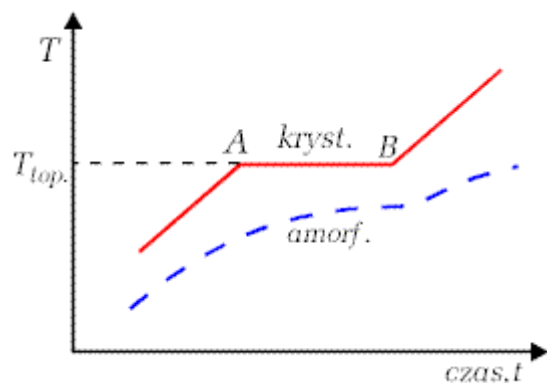


*Fot. 6.6.1. Wnętrze komory pęcherzykowej.*

**Fotografia 6.2.** przedstawia wnętrze komory pęcherzykowej wypełnionej ciekłym propanem. Stan przegrzania uzyskano poprzez gwałtowne obniżenie ciśnienia w komorze, dzięki czemu osiągnięto wartość poniżej punktu  $D$  z rysunku 6.2. W tym momencie do komory wstrzyknięta została wiązka jąder węgla z akceleratora. W rezultacie oddziaływań jądrowych, które nastąpiły wewnątrz komory, wyemitowanych zostało wiele cząstek, w tym także - cząstek naładowanych, które wywołują jonizację atomów ośrodka. Zjonizowane atomy stanowią bardzo skuteczne centra, na których rozpoczyna się proces wrzenia. W rezultacie, wzdłuż torów cząstek tworzą się mikropęcherzyki pary, które szybko powiększają się. Kiedy ich wielkość jest odpowiednia do sfotografowania uruchamiana jest lampa błyskowa i układ aparatów fotograficznych rejestruje obraz śladów cząstek emitowanych w oddziaływaniu jądrowym. (Więcej na ten temat powiemy, i do fotografii tej powrócimy, w drugiej części kursu fizyki.)

Warto zwrócić tu uwagę na niepożądany, ale interesujący z punktu widzenia naszych rozważań, element. Wewnątrz komory znajdowały się trzy płytki wykonane z tantalu. Płytki te stanowiły oczywiste zaburzenie jednorodności w komorze, mogły również drgnąć przy gwałtownym obniżaniu ciśnienia. W rezultacie, wokół nich nastąpiło również spontaniczne wrzenie propanu widoczne w postaci białych plam na zdjęciu.

Proces przechodzenia ze stanu stałego w stan ciekły nazywamy topnieniem. Proces ten wymaga dostarczenia ciepła, które dla jednostkowej masy substancji nosi nazwę *ciepła topnienia*. Proces ten dla substancji krystalicznych zachodzi w określonej temperaturze. Zakładając, że ilość dostarczanego ciepła na jednostkę czasu ma wartość stałą otrzymamy zależność temperatury od czasu dla ciała, które podlega procesowi topnienia w postaci przedstawionej na rysunku 6.6.3.



**Rys. 6.6.3.** Zależności temperatury od czasu dla ciał krystalicznych (kolor czerwony) i amorficznych (kolor niebieski).

Kolorem czerwonym pokazana jest zależność temperatury od czasu dla ciał krystalicznych. Temperatura ciała wzrasta wraz z upływem czasu, kiedy dostarczane jest ciepło. Po osiągnięciu temperatury topnienia, punkt **A**, ciepło zużywane jest na proces topnienia i temperatura pozostaje stała. Kiedy stopieniu ulega cała masa, punkt **B**, temperatura fazy ciekłej zaczyna dalej wzrastać.

W przypadku ciał amorficznych nie ma określonej temperatury topnienia. Przechodzenia ciała w stan ciekły odbywa się w określonym przedziale temperatury. Jest to rezultatem podobnej struktury ciał amorficznych i cieczy (brakiem uporządkowania atomów i cząsteczek na dużych odległościach).

Trzeba tu dodać, że rysunek 6.6.3 jest jedynie rysunkiem schematycznym. Nachylenia odcinków do punktu **A** i od punktu **B** będą różne, gdyż zależą one od ciepła właściwego, które dla fazy ciekłej ma inną wartość niż dla fazy stałej.

Procesem odwrotnym do topnienia jest proces krzepnięcia albo inaczej - krystalizacji. W procesie tym ciało oddaje ciepło, a sam proces rozpoczyna się także na centrach krystalizacji, podobnie jak na centrach kondensacji w przypadku skraplania. Także podobnie i tu możliwy jest proces przechłodzenia cieczy i pozostawanie jej w stanie metastabilnym. Drobną niejednorodność w postaci zanieczyszczenia może wówczas spowodować proces krystalizacji (bardziej ogólnie - solidyfikacji, gdyż nie zawsze powstający stan stały ma strukturę krystaliczną). W przypadku silnych, gwałtownych przechłodzeń możliwe jest przejście cieczy w stan amorficzny ciała stałego.

## Zadania

### Zadanie 6.1 praca gazu doskonałego

Proszę obliczyć pracę wykonaną przez gaz doskonały przy zmianie jego objętości od  $V_1$  do  $V_2$  w przemianie: izobarycznej, izotermicznej, politropowej i adiabatycznej.

### Rozwiązanie

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Praca przy zmianie objętości gazu, będzie:  $W'$ . Praca ta jest dodatnia gdy objętość gazu zwiększa się, a ujemna gdy maleje.

Gdy gaz podlega przemianie izobarycznej to:

$$p = p_1 = p_2$$

oraz

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

Dla przemiany izotermicznej  $p_1 V_1 = p_2 V_2 = pV$ . Po podstawieniu do wzoru na pracę

zależności  $p = \frac{p_1 V_1}{V}$ , dostajemy

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1 \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \left| \frac{V_2}{V_1} \right|$$

Gdy gaz podlega przemianie politropowej to:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n = pV^n,$$

gdzie  $n$  oznacza, tym razem, wykładnik politropy (6.3.37).

Wstawiając do wzoru na pracę, otrzymujemy

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \frac{V_1^n}{V^n} dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^n} dV = p_1 V_1^n \cdot \frac{1}{1-n} V^{1-n} \Big|_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1^n \cdot \frac{1}{1-n} \left( \frac{1}{V_2^{n-1}} - \frac{1}{V_1^{n-1}} \right)$$

Dla przemiany adiabatycznej, wykładnik  $n = \kappa$ . Przypadek adiabaty rozpatrzony został również w poprzednim zadaniu, w którym wzór na pracę, wykonaną nad układem, wprowadzony został innym sposobem.

W przypadku przemiany izotermicznej  $n = 1$ , a w przypadku przemiany izobarycznej  $n = 0$ .

Pracę  $W$  wykonaną nad układem znajdziemy np. przez zastosowanie wzoru ogólnego  $W = -W'$ .

### Zadanie 6.2 praca w przemianie adiabatycznej

Obliczyć pracę wykonaną przy adiabatycznym sprężaniu gazu doskonałego od objętości  $V_1$  do  $V_2$ , jeśli ciśnienie początkowe wynosiło  $p_1$ . Znany jest również wykładnik adiabaty  $\kappa$ .

### Rozwiązanie

W przemianie adiabatycznej nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem co wyrażamy zapisem  $Q = 0$ . W wyniku wykonanej pracy (nad gazem) wzrośnie energia wewnętrzna gazu  $\Delta U$ . Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki:

$$W = \Delta U = n_M C_v \Delta T$$

Dla przemiany adiabatycznej obowiązuje związek

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa,$$

gdzie  $p_1, V_1$  - to ciśnienie i objętość na początku przemiany, a  $p_2$  i  $V_2$  - to ciśnienie i objętość na końcu przemiany.

Zmianom ciśnienia i objętości w tej przemianie gazu doskonałego towarzyszy wzrost

temperatury od  $T_1 = \frac{p_1 V_1}{n_M R}$  do  $T_2 = \frac{p_2 V_2}{n_M R}$ . Zmiana temperatury  $\Delta T = T_2 - T_1$  będzie

wynosić 
$$\Delta T = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n_M R}.$$

Praca wykonana przy adiabatycznym sprężaniu cząsteczek gazu od objętości  $V_1$  do  $V_2$ , jeśli ciśnienie początkowe wynosiło  $p_1$ , będzie:

$$W = \frac{C_v}{R} \left( p_1 \frac{V_1^\kappa}{V_2^{\kappa-1}} - p_1 V_1 \right),$$

po uwzględnieniu zależności wynikającej z równania adiabaty:  $p_2 = p_1 \frac{V_1^\kappa}{V_2^\kappa}$ . Jeśli uwzględnimy, że dla gazu doskonałego spełniona jest zależność (6.2.17) to otrzymamy:

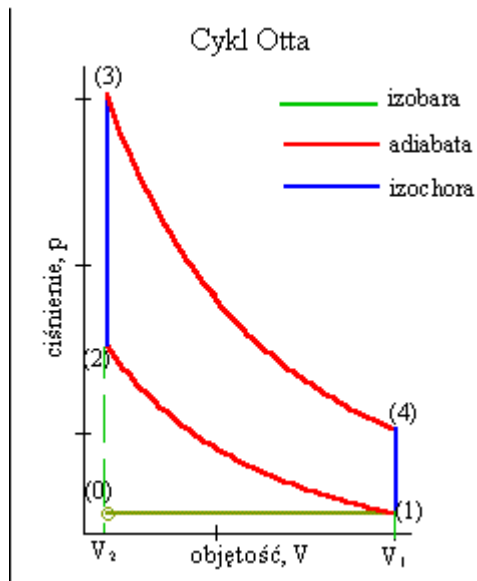
$$W = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Wykonaną pracę można również obliczyć (ten sam wynik) korzystając z definicji pracy w przemianie termodynamicznej.

### Zadanie 6.3 cykl Otta

Pracę czterosuwowego silnika benzynowego, z dobrym przybliżeniem, opisuje **cykl Otta** na który składa się sześć następujących procesów:



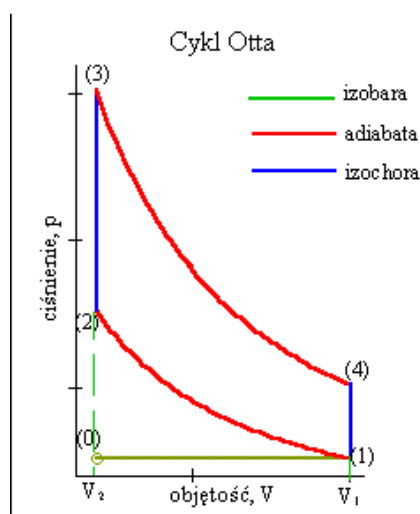


Rys. z6.3.1. Kolejne przemiany w cyklu

- proces (0) - (1) polega na izobarycznym (przy stałym ciśnieniu  $p_1$ ) wessaniu powietrza zawierającego pary benzyny do całkowitego wypełnienia objętości cylindra  $V_1$ ,
- proces (1) - (2) prowadzi do adiabatycznego sprężenia zassanej mieszanki, aż do minimalnej objętości cylindra  $V_2$ , przy czym temperatura i ciśnienie podnoszą się do wartości  $T_2$  i  $p_2$ ,
- proces (2) - (3) towarzyszy spalaniu (wybuchowi) mieszanki przy stałej objętości  $V_2 = V_3$ , czemu towarzyszy wzrost temperatury od  $T_2$  do  $T_3$ ,
- proces (3) - (4) polega na adiabatycznej ekspansji gazów spalinowych do objętości  $V_4$ , przy czym temperatura spada do wartości  $T_4$ ,
- proces (4) - (1) przedstawia (izochoryczny) spadek ciśnienia do  $p_1$  i temperatury do  $T_1$  w wyniku otwarcia wentyla wypustowego,
- proces (1) - (0) ilustruje powrót układu do stanu początkowego w którym zachodzi izobaryczne wypchnięcie reszty gazów spalinowych z układu spalania.

Obliczyć wydajność cyklu Otta. W odpowiedzi proszę uwzględnić tzw. stopień sprężenia tj. iloraz objętości  $V_2/V_1$ .

Rozwiązanie



Rys. z6.3.2. Kolejne przemiany w cyklu

W procesie (2) - (3) izochorycznego ogrzewania gaz pobiera ciepło

$$Q_3 = \Delta U_3 = nC_V \Delta T = nC_V (T_3 - T_2)$$

W procesie (4) - (1) izochorycznego ochładzania gaz oddaje ciepło

$$Q_4 = \Delta U_4 = nC_V \Delta T = nC_V (T_1 - T_4)$$

ale  $T_1 < T_4$ , więc ciepło oddane przez gaz wyniesie

$$|Q_4| = nC_V (T_4 - T_1)$$

Sprawność cyklu Otta obliczamy ze wzoru:

$$\eta = \frac{Q_3 - |Q_4|}{Q_3}$$

Po podstawieniu, otrzymujemy

$$\eta = \frac{T_3 - T_2 - T_4 + T_1}{T_3 - T_2}$$

Aby wyrazić tę sprawność za pomocą stopnia sprężenia wykorzystamy równania adiabat w

postaci  $TV^{\kappa-1} = \text{const}$ . Wykładnik w równaniu adiabaty (Poissona)  $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$

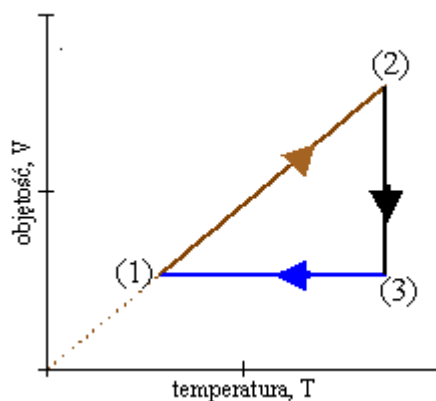
Dla procesu (1) - (2) mamy:  $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$ , dla procesu (3) - (4) mamy:  $T_3 V_3^{\kappa-1} = T_4 V_4^{\kappa-1}$ .  
Z powyższych równań obliczamy temperatury i podstawiamy do wzoru na sprawność.

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

Otrzymujemy, że

#### Zadanie 6.4 wykresy przemian

Gaz doskonały poddano kolejno trzem przemianom: (1)-->(2), (2)-->(3), (3)-->(1). Wykres zmian stanu tego gazu we współrzędnych T, V przedstawiony jest na *Rys. z6.4.1*, poniżej.



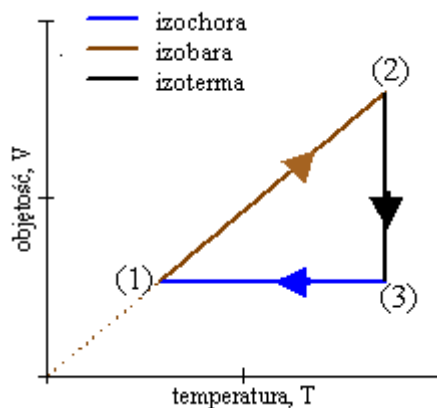
**Rys. z6.4.1. Przemiany w układzie T, V.**

- Jakim kolejnym przemianom poddano gaz?
- Przedstaw przemiany tego gazu na wykresach, we współrzędnych p,V oraz p,T.

Rozwiązanie

Analizujemy kolejno przemiany zilustrowane na podanym wykresie (*Rys. z6.4.2.*):

- przemiana (1) --> (2) to przemiana izobaryczna w której rośnie objętość i temperatura gazu
- przemiana (2) --> (3) to przemiana izotermiczna w której maleje objętość i rośnie ciśnienie gazu
- przemiana (3) --> (1) to przemiana izochoryczna w której maleje temperatura i ciśnienie gazu.



**Rys. z6.4.2. Przemiany przedstawione w układzie T, V.**

<p><b>Rys. z6.4.3. Przemiany w układzie p, T.</b></p>	<p><b>Rys. z6.4.4. Przemiany w układzie p, V.</b></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• przemiana (1) --&gt; (2) to przemiana izobaryczna w której rośnie objętość i temperatura gazu</li> <li>• przemiana (2) --&gt; (3) to przemiana izotermiczna w której maleje objętość i rośnie ciśnienie gazu</li> <li>• przemiana (3) --&gt; (1) to przemiana izochoryczna w której maleje temperatura i ciśnienie gazu.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• przemiana (1) --&gt; (2) to przemiana izobaryczna w której rośnie objętość i temperatura gazu</li> <li>• przemiana (2) --&gt; (3) to przemiana izotermiczna w której maleje objętość i rośnie ciśnienie gazu</li> <li>• przemiana (3) --&gt; (1) to przemiana izochoryczna w której maleje temperatura i ciśnienie gazu.</li> </ul>

## Zadanie 6.5 zmiana entropii

Oblicz zmianę entropii porcji  $n_M$  moli gazu doskonałego w procesie izotermicznego rozprężania od objętości  $V_0$  do objętości  $V_k$ .

Rozwiązanie

Z pierwszej zasady termodynamiki  $dU = \delta Q - p \cdot dV$ . Dla przemiany izotermicznej  $dU = 0$ .

Dlatego  $\delta Q = p \cdot dV$  oraz  $dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p \cdot dV}{T}$ . Z równania stanu gazu doskonałego  $\frac{p}{T} = \frac{n_M \cdot R}{V}$ , więc  $dS = n_M \cdot R \cdot \frac{dV}{V}$ .

$$\Delta S = S_k - S_0 = \int_{V_0}^{V_k} n_M \cdot R \cdot \frac{dV}{V} = n_M \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_0}$$

Poszukiwana zmiana entropii

## Słownik

<i>anizotropia</i>	zależność własności fizycznych ciała od kierunku
<i>ciecz przegrzana</i>	metastabilny stan cieczy, w warunkach ciśnienia i temperatury odpowiadających stanowi gazowemu danej substancji
<i>ciepło zredukowane</i>	stosunek ilości ciepła pobranego z danego źródła do jego temperatury bezwzględnej
<i>cykl Carnota</i>	cykl odwracalny składający się z dwóch przemian izotermicznych oraz dwóch adiabatycznych
<i>cykl Diesla</i>	cykl termodynamiczny składający się z dwóch adiabat izochory i izobary. Opisuje pracę silnika Diesla.
<i>cykl Otta</i>	cykl termodynamiczny składający się z dwóch adiabat i dwóch izochor. Do cyklu Otta zbliżony jest cykl pracy silnika benzynowego.
<i>druga zasada termodynamiki</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Niemożliwe jest przekazywanie ciepła przez ciało o temperaturze niższej ciała o temperaturze wyższej bez wprowadzenia innych zmian w obu ciałach i w otoczeniu</li> <li>2. Niemożliwe jest pobieranie ciepła z jednego termostatu i zamiana go na pracę bez wprowadzania innych zmian w układzie i w otoczeniu.</li> <li>3. Skonstruowanie perpetuum mobile drugiego rodzaju jest niemożliwe</li> <li>4. Entropia układu izolowanego nie może maleć.</li> </ol>
<i>entropia</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. funkcja stanu której przyrost w przemianie odwracalnej równy jest przyrostowi ciepła zredukowanego</li> <li>2. wielkość proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa</li> </ol>

	termodynamicznego stanu układu
<i>faza substancji</i>	stan substancji charakteryzujący się jednoznacznie określonymi własnościami
<i>nierówność Clausiusa</i>	suma wartości ciepł zredukowanych w każdej przemianie zamkniętej jest nie większa od zera
<i>para nasycona</i>	para o maksymalnej możliwej gęstości w danej temperaturze
<i>para przesycona</i>	metastabilny stan pary, w warunkach ciśnienia i temperatury odpowiadających stanowi ciekłemu danej substancji
<i>parowanie</i>	proces polegający na przejściu z fazy ciekłej do gazowej
<i>pierwsza zasada termodynamiki</i>	Przyrost energii wewnętrznej układu równy jest sumie dostarczonej do układu energii cieplnej, wykonanej nad układem pracy oraz energii uzyskanej wskutek wymiany materii z otoczeniem. Przyrost ten w procesach kwazistatycznych i odwracalnych nie zależy od sposobu, w jaki dokonuje się przejście, a określony jest całkowicie przez początkowy i końcowy stan układu
<i>prawo wzrostu entropii</i>	Entropia układu izolowanego, w którym zachodzą procesy nieodwracalne może tylko rosnąć.
<i>proces izoentropowy</i>	proces, w którym entropia zachowuje wartość stałą. Procesem takim jest każdy proces adiabatyczny, odwracalny.
<i>przejście fazowe</i>	proces w rezultacie którego zmienia się faza substancji
<i>przemiana izotermiczna</i>	proces, który zachodzi w stałej temperaturze; $T=const$
<i>prawo Boyle'a Mariotte'a</i>	odnosi się do przemiany izotermicznej: $pV=const$ . W stałej temperaturze iloczyn ciśnienia i objętości jest stały lub - ciśnienie zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do objętości.
<i>przemiana izochoryczna</i>	proces, który zachodzi przy stałej objętości; $V=const$
<i>przemiana izobaryczna</i>	proces, który zachodzi przy stałym ciśnieniu; $p=const$
<i>przemiana adiabatyczna</i>	przemiana, która zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem
<i>przemiana politropowa</i>	przemiana, w czasie której pojemność cieplna ciała pozostaje stała
<i>punkt potrójny</i>	punkt określający warunki ciśnienia i temperatury, w których mogą istnieć w równowadze trzy stany skupienia danej substancji: stała, ciekła i gazowa
<i>równanie van der Waalsa</i>	równanie stanu gazu rzeczywistego biorące pod uwagę objętość cząsteczek gazu i siły ich wzajemnych oddziaływań

<i>skraplanie</i>	proces polegający na przejściu z fazy gazowej do fazy ciekłej
<i>stan (punkt) krytyczny</i>	stan, w którym znikają różnice pomiędzy własnościami cieczy, pary nasyconej i gazu. Gęstości substancji w tych trzech stanach są jednakowe.
<i>stan metastabilny</i>	stan układu, który może być zmieniony wskutek bardzo niewielkiego zaburzenia warunków w jakich układ się znajduje
<i>stan równowagi dynamicznej</i>	stan którego własności makroskopowe nie zmieniają się w czasie pomimo zachodzących procesów w skali mikroskopowej
<i>sublimacja</i>	proces polegający na przejściu z fazy gazowej do fazy stałej
<i>twierdzenie Carnota</i>	1. Wszystkie silniki pracujące w odwracalnym cyklu Carnota pomiędzy tymi samymi temperaturami mają tę samą sprawność. 2. Sprawność cyklu nieodwracalnego jest zawsze mniejsza od sprawności cyklu odwracalnego.
<i>wartości krytyczne</i>	wartości ciśnienia, temperatury i gęstości w punkcie krytycznym
<i>wzór barometryczny</i>	podaje zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad powierzchnią Ziemi
<i>wykres stanu</i>	wykres we współrzędnych temperatury i ciśnienia określający warunki współistnienia faz danej substancji

## Teoria kinetyczna



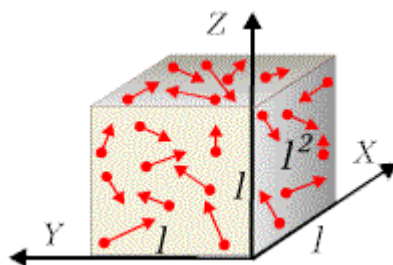
**Fot. 7.0.1.** Wystarczy zbliżyć się do kwitnących hiacyntów, by poczuć - rolę dyfuzji.

Substancje, z mikroskopowego punktu widzenia, mają budowę "ziarnistą". Składnikami ich są atomy bądź cząsteczki, których wzajemne oddziaływania określają własności makroskopowe substancji jak ciśnienie lub temperatura oraz stan skupienia: stały, ciekły lub gazowy. Ogromna liczba cząsteczek z jaką zwykle mamy do czynienia uniemożliwia stosowanie do opisu ich ruchu równań Newtona w takim sensie, jak się to czyni w mechanice. W jednym centymetrze sześciennym gazu mieści się w warunkach normalnych około  $10^{19}$  cząsteczek, które zderzają się ze sobą oraz ze ściankami naczynia. Do opisu ich ruchu stosuje się metody statystyczne, a wielkości makroskopowe charakteryzuje się poprzez uśrednione wartości wielkości mikroskopowych takich jak prędkości cząsteczek czy energie ich wzajemnego oddziaływania.

Dla ilościowego opisu zjawisk transportu wygodnie jest wprowadzić pojęcie *strumienia*, czyli wielkości określającej jaka wartość danej wielkości fizycznej przenoszona jest przez daną powierzchnię w jednostce czasu. Zarówno przenoszone wielkości, jak i powierzchnie mogą być różne; może to być na przykład strumień cieczy bądź strumień światła, może to być przekrój rury, ale może być też powierzchnia zamknięta, jak bańka żarówki itp. Strumień odniesiony do jednostkowej powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu nazywać będziemy *gęstością strumienia* (lub natężeniem strumienia).

Występujące w układzie niejednorodności będące przyczyną zjawisk transportu charakteryzowane są przez pochodne funkcji określających przestrzenny rozkład danej wielkości. Rozkład ten odpowiada istnieniu pola danej wielkości fizycznej, np. temperatury lub gęstości. Pochodna wyrażająca szybkość zmian danej wielkości w określonym punkcie pola i w określonym kierunku jest długością wektora zwanego *gradientem* tej wielkości. Chociaż pojęcie gradientu wprowadzimy formalnie w dalszej części kursu Podstaw Fizyki, to jednak już teraz będziemy je używać do opisu zjawisk transportu.

### 1. Ciśnienie



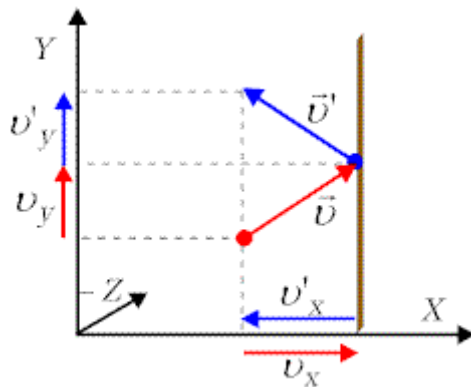
**Rys. 7.1.1.** Cząsteczki gazu w sześciennym naczyniu.

#### Czym jest ciśnienie gazu z mikroskopowego punktu widzenia?

Ścianki naczynia zawierającego pewną porcję gazu uderzane są ustawicznie przez cząsteczki będące w chaotycznym ruchu. Wyznamy przekaz pędu przy takich zderzeniach. Dla uproszczenia przyjmijmy, że naczynie ma kształt sześcianu o długości ścianek równej  $l$ .

Prędkość cząsteczki w układzie współrzędnych prostokątnych zapiszemy w postaci wektora

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (7.1.1)$$



Rys. 7.1.2. Zderzenie sprężyste cząsteczki gazu poruszającej się w płaszczyźnie  $(X, Y)$  ze ścianką prostopadłą do osi  $X$ .

W wyniku sprężystego zderzenia cząsteczki ze ścianką prostopadłą do osi  $X$  zmieni znak tylko składowa prędkości wzdłuż tej osi, czyli będzie

$$v'_x = -v_x, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \quad (7.1.2)$$

Dalsze nasze rozważania dotyczyć będą tylko kierunku  $X$ , stosować więc będziemy zapis skalarny. Zmiana składowej pędu wzdłuż osi  $X$  będzie różnicą pomiędzy pędem po i przed zderzeniem (Pęd oznaczamy tu dużą literą  $P$ , bowiem małą litera oznaczać będziemy ciśnienie.)

$$\Delta P_x = -m \cdot v_x - (m \cdot v_x) = -2m \cdot v_x \quad (7.1.3)$$

Pęd przekazany ściance będzie odwrotnego znaku, a więc wyniesie  $2m \cdot v_x$ . Czas przelotu cząsteczki przez kostkę wynosi  $t = l/v_x$  zaś przelot w obie strony trwać będzie dwa razy dłużej;  $\Delta t = 2 \cdot l/v_x$ . Częstość  $\nu$  uderzeń o ściankę, czyli liczba uderzeń w jednostce czasu będzie odwrotnością czasu przelotu cząsteczki w dwie strony czyli  $\nu = 1/\Delta t = v_x/(2 \cdot l)$ . Pęd przekazany ściance w jednostce czasu równy będzie pędowi przekazanemu w jednym uderzeniu pomnożonemu przez liczbę uderzeń w jednostce czasu.

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{v_x}{2 \cdot l} \cdot 2 \cdot m \cdot v_x = \frac{m \cdot v_x^2}{l} \quad (7.1.4)$$

Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że  $\Delta P/\Delta t = F$ . Pamiętamy też, że ciśnienie jest stosunkiem siły do powierzchni, na którą siła działa. Powierzchnia ta jest w naszym przypadku równa kwadratowi boku ścianki. Ciśnienie będące skutkiem uderzeń jednej cząsteczki w ściankę wynosi więc  $p = F/S = F/l^2$ . Sumując przyczynki od wszystkich uderzających w ściankę cząsteczek i dzieląc przez jej powierzchnię otrzymujemy wyrażenie na ciśnienie gazu działające na ściankę

$$p = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot v_{xi}^2}{l \cdot l^2} = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = \frac{\rho}{V} \cdot \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right) = \rho \cdot \langle v_x^2 \rangle \quad (7.1.5)$$

Założyliśmy tu, że wszystkie cząsteczki w liczbie  $N$  mają tę samą masę  $m$ . Długość ścianki w trzeciej potęgze zamieniliśmy objętością sześcianu  $V$ . Iloczyn masy cząsteczki  $m$  przez liczbę cząsteczek  $N$  jest masą gazu w naczyniu, zaś podzielony przez objętość  $V$  jest gęstością



gazu, którą oznaczyliśmy symbolem  $p$ . Symbol  $\langle v_x^2 \rangle$  oznacza wartość średnią kwadratu składowej wektora prędkości wzdłuż osi  $X$ .

Biorąc pod uwagę, że kwadrat wektora równy jest sumie kwadratów jego składowych  $\vec{v}^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  i pamiętając, że wszystkie kierunki wektora prędkości są tak samo prawdopodobne oraz, że ruchy w każdym kierunku są niezależne - możemy zamienić wartość średnią kwadratu składowej przez wartość średnią kwadratu wektora prędkości, czyli

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (7.1.6)$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór wyrażający związek pomiędzy mikroskopowymi (średnia prędkość cząsteczek) i makroskopowymi (ciśnienie i gęstość) własnościami gazu

$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{m \cdot N}{V} \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v^2 \rangle$	(7.1.7)
--	---------

W naszych rozważaniach nie uwzględnialiśmy zderzeń pomiędzy cząsteczkami. Zwróćmy jednak uwagę, że w zderzeniach sprężystych jest zachowany pęd oraz energia kinetyczna, a więc przy dużej liczbie zderzających się cząsteczek zderzenia te nie będą wpływać na wartość średnią pędu przekazywanego ściankom naczynia. Wybraliśmy także regularny (sześcienny) kształt naczynia. W warunkach równowagi ciśnienie wywierane na wszystkie ścianki o dowolnym kształcie a także wewnątrz naczynia jest jednakowe, o czym wiemy z prawa Pascala. Rozważania nasze mają więc ogólny charakter.

## 2. Temperatura

Dla znalezienia związku pomiędzy makroskopową i mikroskopową interpretacją temperatury pomnożmy lewą i prawą stronę równania (7.1.7) przez objętość naczynia  $V$  i porównajmy to wyrażenie z równaniem stanu gazu doskonałego

$$p \cdot V = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v^2 \rangle \cdot V = \frac{1}{3} \cdot \frac{n_M \cdot \mu}{\rho \cdot V} \cdot \langle v^2 \rangle = n_M \cdot R \cdot T \quad (7.2.1)$$

We wzorze tym iloczyn gęstości i objętości jest po prostu masą gazu, którą następnie wyraziliśmy w molach oznaczając przez  $M$  jego masę molową.

Mnożąc stronami przez  $3/2$  i dzieląc przez liczbę Avogadro otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{\mu}^{m_0}}{N_A} \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \cdot \frac{\overbrace{R}^k}{N_A} \cdot T \quad (7.2.2)$$

Zauważamy przy tym, że masa molowa podzielona przez liczbę Avogadro to po prostu masa jednej cząsteczki  $m_0$ . Iloraz stałej gazowej i liczby Avogadro, to stała Boltzmanna  $k$ , którą wprowadziliśmy wzorem (7.2.2a). Stała ta ma sens stałej gazowej odniesionej do jednej cząsteczki. Jak zobaczymy, stała ta odgrywa fundamentalną rolę w fizyce.

Wykorzystując wprowadzone oznaczenia możemy przepisać równanie (7.2.2) w postaci

$$\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad (7.2.3)$$

Wyrażenie po lewej stronie jest wielkością mikroskopową - średnią energią kinetyczną chaotycznego ruchu cząsteczek gazu przypadającą na jedną cząsteczkę; wyrażenie po prawej stronie jest proporcjonalne do wielkości makroskopowej - temperatury bezwzględnej ciała. Stwierdzamy więc że,

**temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej chaotycznego ruchu cząsteczek.**

Średnia wartość kwadratu prędkości wynosi

$\langle v^2 \rangle = \frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}$	(7.2.4)
---	---------

Na tej podstawie możemy określić tzw. średnią prędkość kwadratową definiując ją jako

$$v_{sr. kw.} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}} \quad (12.10b)$$

Zauważmy, że na podstawie wzoru (12.7) możemy średnią prędkość kwadratową wyrazić poprzez wielkości makroskopowe: ciśnienie  $p$  i gęstość gazu,  $\rho$ , bowiem na podstawie wzoru

(12.7) :  $v_{sr. kw.} = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{\rho}}$ . Mamy więc ideę prostego eksperymentu, za pomocą którego określając łatwo mierzalne wielkości makroskopowe:  $p$  (manometr) oraz objętość i masę gazu w celu wyznaczenia jego gęstości  $\rho$ , możemy wyznaczyć statystycznie uśrednioną wielkość mikroskopową jaką jest  $v_{sr. kw.}$ . Zaprojektuj taki eksperyment, i jeśli możesz - zrealizuj go.

### 3. Zasada ekwipartycji energii

W naszych rozważaniach uwzględnialiśmy tylko energię ruchu postępowego cząsteczek. Jest to wystarczające jeżeli rozpatrujemy gaz jednoatomowy - kiedy atomy możemy traktować jako punkty materialne. Do opisu ich położenia wystarczy podanie trzech współrzędnych. Cząsteczki wieloatomowe mogą wykonywać także ruch obrotowy; możliwe są również drgania atomów wchodzących w skład cząsteczki. Z ruchami tymi także wiąże się pewna

energia (z obrotem - energia kinetyczna ruchu obrotowego, z drganiami - energia kinetyczna i energia potencjalna).

Położenie punktu materialnego w przestrzeni jest w pełni opisane przez trzy współrzędne. Dwa połączone sztywno punkty materialne mogą być opisane za pomocą pięciu (a nie sześciu) liczb, bowiem fakt ich sztywnego połączenia sprawia, że do opisu ich położenia wystarczy podać położenie jednego z nich oraz dwa kąty określające orientację w przestrzeni prostej łączącej te punkty. Położenie drugiego punktu na tej prostej jest znane, skoro znana jest ich wzajemna odległość. Położenie  $N$  niezależnych punktów materialnych wymaga jednak  $3N$  liczb, skoro traktujemy te punkty jako niezależne. Położenie ciała sztywnego wymaga podania sześciu liczb. Pięć z nich określa, podobnie jak w przypadku układu dwóch ciał, położenie wybranego punktu, na przykład środka ciężkości, oraz kierunek wybranej prostej, na przykład osi obrotu. Punkty nie będące na osi mogą jednak zmieniać swe położenie wskutek ruchu obrotowego wokół osi, potrzeba więc jeszcze znać kąt obrotu - razem sześć liczb.

Liczbę niezależnych wielkości za pomocą których może być opisane położenie układu nazywamy *liczbą stopni swobody* układu. Liczba ta określa więc możliwości ruchów jakie może wykonywać cząsteczka. Z każdym ruchem wiąże się określona energia. Jeżeli ruch jest całkowicie chaotyczny i żaden rodzaj ruchu nie jest uprzywilejowany, to można przyjąć, że na każdy stopień swobody przypada jednakowa porcja energii. Stwierdzenie to jest treścią zasady ekwipartycji energii, czyli inaczej mówiąc, zasady równomiernego rozdziału energii na wszystkie stopnie swobody.

### Zasada ekwipartycji energii

*Na każdy stopień swobody cząsteczki przypada średnio ta sama energia.*

*Na każdy stopień swobody cząsteczki przypada średnio energia równa  $kT/2$ .*

W oparciu o nasze rozważania widzimy, że energia ruchu cząsteczek w gazach wieloatomowych jest większa niż w gazach jednoatomowych.

Średnia energia cząsteczki o danej liczbie stopni swobody  $f$  wynosi więc  $\langle E \rangle = (f/2) \cdot k \cdot T$ . Dla jednego mola gazu doskonałego, kiedy zaniedbuje się energię potencjalną wynikającą z sił wzajemnego oddziaływania cząsteczek, iloczyn  $\langle E \rangle \cdot N_A$  jest po prostu energią wewnętrzną gazu równą  $U = N_A \cdot \langle E \rangle = (f/2) \cdot N_A \cdot k \cdot T = (f/2) \cdot R \cdot T$ .

## 4. Energia wewnętrzna

Jej wartość możemy określić na przykładzie ruchu postępowego cząsteczek punktowych. W tym przypadku liczba stopni swobody wynosi 3, a średnia energia kinetyczna cząsteczki, jest równa  $3/2 \cdot k \cdot T$ . W naszych rozważaniach uwzględnialiśmy tylko energię ruchu postępowego cząsteczek. Jest to wystarczające, jeżeli rozpatrujemy gaz jednoatomowy - kiedy atomy możemy traktować jako punkty materialne. Do opisu ich położenia wystarczy podanie trzech współrzędnych. Cząsteczki wieloatomowe mogą wykonywać także ruch obrotowy; możliwe są również drgania atomów wchodzących w skład cząsteczki. Z ruchami tymi także wiąże się pewna energia (z obrotem - energia kinetyczna ruchu obrotowego, z

drganiami - energia kinetyczna i energia potencjalna). Położenie punktu materialnego w przestrzeni jest w pełni opisane przez trzy współrzędne. Dwa połączone sztywno punkty materialne mogą być opisane za pomocą pięciu (a nie sześciu) liczb, bowiem fakt ich sztywnego połączenia sprawia, że do opisu ich położenia wystarczy podać położenie jednego z nich oraz dwa kąty określające orientację w przestrzeni prostej łączącej te punkty. Położenie drugiego punktu na tej prostej jest znane, skoro znana jest ich wzajemna odległość. Położenie  $N$  niezależnych punktów materialnych wymaga jednak  $3N$  liczb, skoro traktujemy te punkty jako niezależne. Położenie ciała sztywnego wymaga podania sześciu liczb. Pięć z nich określa, podobnie jak w przypadku układu dwóch ciał, położenie wybranego punktu, na przykład środka ciężkości, oraz kierunku wybranej prostej, na przykład osi obrotu. Punkty nie znajdujące się na osi mogą jednak zmieniać swe położenie wskutek ruchu obrotowego wokół osi, potrzeba więc jeszcze znać kąt obrotu - razem sześć liczb. Nasze rozważania pokazują, że energia ruchu cząsteczek w gazach wieloatomowych jest większa niż w gazach jednoatomowych.

Średnia energia cząsteczki o danej liczbie stopni swobody  $i$  wynosi

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T$$

Dla  $N$  cząsteczek gazu doskonałego, kiedy zaniedbuje się energię potencjalną wynikającą z sił wzajemnego oddziaływania cząsteczek, iloczyn  $N \langle E \rangle$  jest po prostu energią wewnętrzną gazu równą

$$U = N \cdot \langle E \rangle = N \cdot \frac{i}{2} \cdot k \cdot T$$

$$U = n_M \cdot N_A \cdot \frac{i}{2} \cdot k \cdot T = n_M \cdot \frac{i}{2} \cdot R \cdot T$$

Dla  $n_M$  moli gazu doskonałego

Energię wewnętrzną układu  $U$  utożsamiamy z całkowitą energią wszystkich cząsteczek.

Ponieważ dla  $n_M$  moli gazu doskonałego  $dU = n_M \cdot C_V \cdot dT$

$$C_V = \frac{1}{n_M} \cdot \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} \cdot R$$

więc, otrzymujemy

Wykorzystując wzór Mayera  $C_P - C_V = R$ ,

można wyrazić wykładnik adiabaty za pomocą liczby stopni swobody:  $C_P = \frac{i+2}{2} \cdot R$ ,  $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$

więc  $\kappa = \frac{i+2}{i}$ .

## Słownik

<i>statystyczna interpretacja temperatury</i>	temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej chaotycznego ruchu cząsteczek
<i>liczba stopni swobody</i>	(dla układu mechanicznego) liczba niezależnych wielkości za pomocą których może być opisane położenie układu
<i>zasada ekwipartycji energii</i>	Na każdy stopień swobody cząsteczki przypada średnio ta sama energia równa $kT/2$ .
<i>rozkład Maxwella prędkości cząsteczek</i>	rozkład wartości prędkości chaotycznego ruchu cząsteczek gazu doskonałego dla zadanej temperatury i masy cząsteczek
<i>rozkład Boltzmann</i>	rozkład koncentracji cząsteczek w funkcji ich wysokości lub energii potencjalnej. Odnosi się nie tylko do pola sił przyciągania ziemskiego, ale do dowolnego pola potencjalnego, jeśli tylko cząsteczki poruszają się chaotycznym ruchem cieplnym.
<i>rozkład Maxwella-Boltzmann</i>	rozkład położzeń i prędkości cząsteczek będących w polu sił potencjalnych i znajdującym się w chaotycznym ruchu w określonej temperaturze
<i>mikrostan</i>	stan układu w którym opisane są stany wszystkich jego elementów
<i>hipoteza ergodyczna</i>	Prawdopodobieństwa wszystkich mikrostanów są jednakowe
<i>makrostan</i>	stan układu opisany za pomocą wielkości odnoszących się do całości układu
<i>prawdopodobieństwo termodynamiczne (waga statystyczna)</i>	odnosi się do makrostanu układu: liczba mikroskoopowych sposobów realizacji danego makrostanu (liczba mikrostanów odpowiadająca danemu makrostanowi)
<i>entropia</i>	definicja statystyczna: wielkość proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa termodynamicznego stanu układu
<i>fluktuacje</i>	losowe odchylenia danej wielkości od wartości średniej
<i>prawo wzrostu entropii</i>	entropia układu izolowanego nie może maleć, w procesach nieodwracalnych entropia układu rośnie

# Termodynamika statystyczna



*Fot. 8.0.1 Prawa statystyczne "gry w kości" i ruchów cieplnych są takie same.*

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki kostką do gry - jakie, że obie kostki pokażą te same liczby, - a jakie, że będą to szóstki? Jaka jest szansa trafienia szóstki w toto-lotka? Jakie jest prawdopodobieństwo, że połowa jąder preparatu promieniotwórczego rozpadnie się w danym czasie? Czy jest możliwe, by wszystkie cząsteczki powietrza wypełniającego mieszkanie znalazły się na raz w jednym pokoju, a w innych zapanowała próżnia?

Wszystkie te przykłady łączy wspólna cecha - dotyczą zdarzeń które mogą, ale nie muszą wystąpić. Prawdopodobieństwa ich wystąpienia różnią się jednak znacznie.

## 1. Ruch cieplny cząsteczek

Wiemy już, że przy ruchu cieplnym cząsteczek:

- Identyczne cząsteczki są w chaotycznym ruchu
- Wszystkie kierunki ich ruchu są jednakowo prawdopodobne
- Temperatura jest miarą ich średniej energii kinetycznej
- Prędkości zmieniają się w wyniku zderzeń
- Prędkości poszczególnych cząsteczek są różne w szerokim zakresie wartości.

Teraz przedstawimy te zagadnienia metodami statystycznymi. Termodynamika statystyczna opisuje układy wielu cząsteczek, z jakich składają się ciała za pomocą wielkości średnich (średnia prędkość, średnia droga, średnia energia itd.) oraz tzw. rozkładów statystycznych. Wiąże mikroskopowe, dane statystyczne o cząsteczkach z makroskopowymi parametrami stanu. Posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa i pozwala wyznaczać najbardziej prawdopodobne kierunki procesów.

## 2. Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek

Rozkład Maxwella opisuje prędkości cząsteczek gazu doskonałego będącego w stanie równowagi termodynamicznej, na który nie działają siły zewnętrzne. Pozwala obliczyć charakterystyczne wartości wielkości średnich: średnią prędkość kwadratową, średnią prędkość i prędkość najbardziej prawdopodobną oraz liczbę cząsteczek o prędkościach zawartych w przedziale wartości od  $v$  do  $v + dv$ .

Jeżeli mamy  $N$  cząsteczek, to liczba  $dN_v$  cząsteczek o prędkościach w przedziale od  $v$  do  $v + dv$  będzie określona wzorem

$$dN_v = N \cdot F(v) \cdot dv,$$

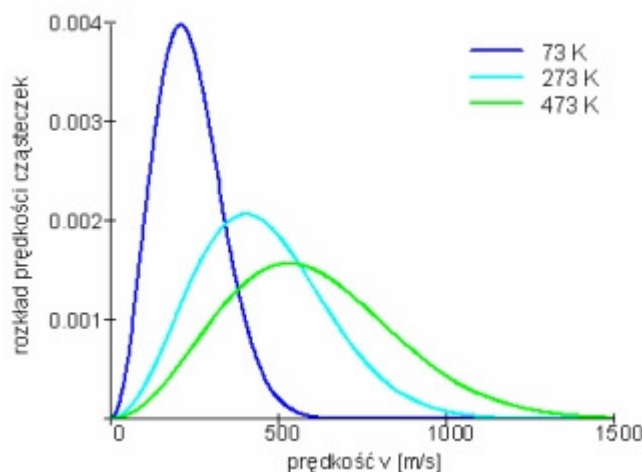
gdzie  $F(v)$  dane jest wzorem:

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T} \right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot v^2$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru i szersze omówienie tematu można znaleźć w [materiałach dodatkowych](#).

Co jest charakterystyczne w tym rozkładzie  $F(v)$ ? Jest to konieczność wystąpienia maksimum ze względu na iloczyn rosnącej parabolicznie i malejącej wykładniczo zależności od  $v$ . (Przeanalizuj dokładnie trzy człony wzoru na  $F(v)$ . Pierwszy, to czynnik normalizacyjny zawierający wyłącznie wartości stałe, drugi - to człon wykładniczy, ale z ujemną wartością w wykładniku, czyli malejący ze wzrostem prędkości i równy jedynie dla  $v = 0$ , ostatni - rosnący parabolicznie ze wzrostem prędkości. Rezultat jest zobrazowany na wykresie  $F(v)$  maxwellowskiej funkcji rozkładu prędkości cząsteczek azotu przy temperaturach: 73 K (-200°C), 273 K (0°C), 473 K (200°C).

Gdy temperatura rośnie maksimum krzywej rozkładu przesuwa się w stronę większych prędkości i krzywa ulega spłaszczeniu. Pole pod krzywą równe jest całkowitej liczbie cząsteczek w próbce i pozostaje stałe niezależnie od temperatury. Rozkład prędkości cząsteczek w danej temperaturze zależy od masy cząsteczek. Im mniejsza masa tym większa liczba cząsteczek o dużych prędkościach.



**Rys. 8.2.1** Maxwellowska funkcja rozkładu prędkości dla cząsteczek azotu przy temperaturach: - 200°C, 0°C, 200°C.

Dla każdej temperatury można określić prędkość, która występuje najczęściej, czyli najwięcej cząsteczek ma prędkości bliskie tej wartości. Wartość ta odpowiada maksimum rozkładu

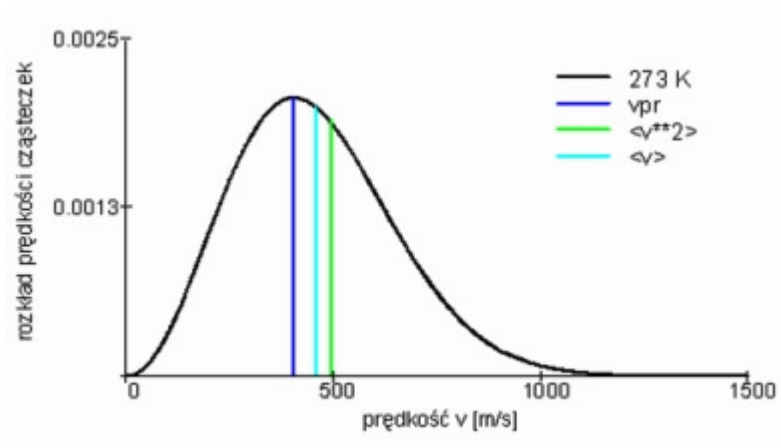
Maxwella. Prędkość tę nazywamy prędkością najbardziej prawdopodobną,  $v_p$ . Można ją

$$\left. \frac{dF(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

określić z matematycznego warunku na maksimum funkcji. Stąd otrzymuje

się  $v_p = \sqrt{2 \cdot k \cdot T / m_0}$ , a więc  $v_p < v_{sr.kw}$ : jak to wynika z definicji średniej prędkości kwadratowej (teoria kinetyczna).

Korzystając z funkcji rozkładu można, również, obliczyć odpowiednio prędkość średnią (średnia arytmetyczną wszystkich prędkości)

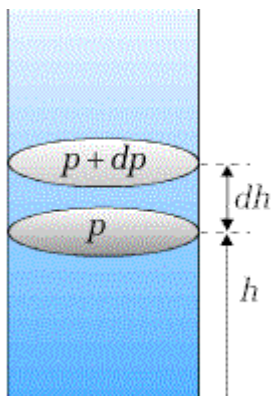


**Rys. 8.2.2** Maxwellowska funkcja rozkładu prędkości dla cząsteczek azotu przy temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ . Prędkość najbardziej prawdopodobna  $v_p = 402 \text{ m/s}$ , prędkość średnia  $\langle v \rangle = 454 \text{ m/s}$ , prędkość średnia kwadratowa  $\langle v_{sr.kw} \rangle = 493 \text{ m/s}$ .

Charakterystyczne prędkości obliczamy ze wzorów:

- prędkość najbardziej prawdopodobna 
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$
- prędkość średnia 
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}}$$
- prędkość średnia kwadratowa 
$$\langle v_{sr.kw} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$

### 3. Wzór barometryczny



Korzystając z poznanych w tej lekcji termodynamicznych własności gazów, możemy otrzymać bardzo ważny wzór określający zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad powierzchnią Ziemi. Ciśnienie atmosferyczne w danym punkcie nad powierzchnią Ziemi określone jest przez ciężar warstwy powietrza leżącej powyżej tego punktu, powinno więc zależeć od wysokości. Im większa wysokość, tym mniejsza jest warstwa powietrza, więc i ciśnienie jest mniejsze. Różnica ciśnień  $dp$  związana ze wzrostem wysokości  $dh$  ma więc znak ujemny i wynosi

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (8.3.1)$$



**Rys. 8.3.1 Ciśnienie**  
 gazu w funkcji  
 wysokości

gdzie  $\rho$  jest gęstością gazu na wysokości  $h$ , a  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim na tej wysokości.

Z dobrym przybliżeniem można potraktować powietrze jako gaz doskonały. Dzieląc obustronnie równanie stanu gazu doskonałego dla jednego mola  $p \cdot V = R \cdot T$  przez wartość średniej masy molowej powietrza, określonej z uwzględnieniem procentowej zawartości azotu, tlenu i pozostałych gazów w powietrzu, otrzymujemy

$$p \cdot \underbrace{(V/M)}_{1/\rho} = \frac{R \cdot T}{M}, \quad \text{czyli} \quad \rho = \frac{M \cdot p}{R \cdot T} \quad (8.3.2)$$

Wzór (8.3.1) możemy więc przepisać w postaci

$$dp = -\frac{M \cdot p \cdot g}{R \cdot T} \cdot dh \quad (8.3.3)$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dh \quad (8.3.4)$$

Zakładając, że temperatura atmosfery ma wartość stałą (tzw. atmosfera izotermiczna) i pole grawitacyjne jest jednorodne ( $g(h)=const$ ) możemy łatwo scałkować to równanie otrzymując

$$\ln p = -\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T} + \ln C, \quad (8.3.5)$$

gdzie  $\ln C$  to stała całkowania.

Ze wzoru (8.3.5) wynika, że

$$p = C \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}\right) \quad (8.3.6)$$

Dla  $h = 0$  ciśnienie równe jest ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$  na powierzchni Ziemi. Stąd wyznaczamy stałą;  $C = p_0$ . Ostatecznie otrzymujemy

$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}\right)$	(8.3.7)
---	---------

Jest to tzw. *wzór barometryczny*. Wynika z niego, że ciśnienie zmienia się z wysokością szybciej dla niższych temperatur oraz dla cięższego gazu, i że zmiana ta ma charakter

wykładniczy. Jak zobaczymy w dalszej lekcji wzór ten odegrał istotną rolę w rozwoju fizyki statystycznej.

Wzór (8.3.7) obowiązuje dla **atmosfery izotermicznej**, dla której mamy  $T = \text{const}$  oraz jednorodnego pola grawitacyjnego. Jeżeli warunki te nie są spełnione, należy podstawić zależność funkcyjną temperatury od wysokości oraz zależność  $g=g(h)$  do wzoru (8.3.7) i rozwiązać otrzymane równanie różniczkowe.

$$\frac{M}{R} = \frac{N_A \cdot m_0}{N_A \cdot k} = \frac{m_0}{k}$$

Korzystając z faktu, że  $\frac{M}{R} = \frac{N_A \cdot m_0}{N_A \cdot k} = \frac{m_0}{k}$ , gdzie  $m_0$  - średnia masa cząsteczki powietrza, możemy zależność (8.3.7) przedstawić w postaci

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}\right) \quad (8.3.8)$$

Zwróć uwagę na wyrażenia w liczniku i mianowniku wykładnika funkcji "exp" określającej ciśnienie. Jaki jest ich sens fizyczny?

#### 4. Rozkład Boltzmana

W rozważaniach dotyczących rozkładu Maxwella ignorowaliśmy całkowicie fakt, że cząsteczki poruszają się w polu sił ciężkości, a więc wyróżniony jest kierunek pionowy. Wzór barometryczny wskazuje, że ciężar cząsteczek ma wpływ na rozkład ciśnienia w funkcji wysokości. Jak uwzględnić ten efekt w opisie rozkładu prędkości cząsteczek?

Przepiszmy w nieco innej formie wzór barometryczny. Zakładając atmosferę izotermiczną, możemy zamienić ciśnienia  $p$  i  $p_0$  występujące we wzorze barometrycznym wielkościami  $n$  i  $n_0$ , które reprezentują koncentrację cząsteczek, czyli ich liczbę w jednostce objętości na wysokości  $h$  oraz na powierzchni Ziemi.

Wykorzystując to zapiszemy wzór barometryczny w formie

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}\right)$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie  $m_0 \cdot g \cdot h$  jest po prostu energią potencjalną  $E_P$  cząsteczki w polu sił ciężkości (przy założeniu jednorodnego pola grawitacyjnego).

Więc również

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_P}{k \cdot T}\right)$$

Ten wzór wyraża zależność koncentracji cząsteczek od ich wysokości lub grawitacyjnej energii potencjalnej. Wynikający z niego rozkład koncentracji nosi nazwę *rozkładu*

*Boltzmann* i odnosi się nie tylko do pola sił przyciągania ziemskiego, ale do dowolnego pola potencjalnego, jeśli tylko cząsteczki poruszają się chaotycznym ruchem cieplnym.

## 5. Makrostany i mikrostan

- Stan układu określany przez parametry makroskopowe, jak temperatura, ciśnienie, energia wewnętrzna, itd. nazywamy *makrostanem*.
- Stan układu wyznaczony przez określenie stanów wszystkich cząsteczek wchodzących w jego skład nazywamy *mikrostanem*.

Liczba możliwych mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi jest na ogół ogromna, analiza nasza będzie mieć charakter statystyczny. Liczba mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi nazywa się *prawdopodobieństwem termodynamicznym* lub *wagą statystyczną* makrostanu.

Rozpatrzmy sens wagi statystycznej na przykładzie naczynia z gazem, w którym znajduje się  $N$  cząsteczek. Stan danej cząsteczki opiszemy tylko jedną informacją - w której części naczynia, lewej czy prawej, cząsteczka się znajduje. Zbiór tych informacji dla wszystkich  $N$  cząsteczek określa mikrostan naszego układu. (Dla uproszczenia rozważań nie będziemy brać pod uwagę prędkości, kierunku ruchu, masy cząsteczek itp.). Makrostan układu określamy podając sumaryczną liczbę cząsteczek z jednej (np. lewej) strony naczynia. Nie bierzemy tu pod uwagę prędkości cząsteczek, ale makroskopowy parametr jakim jest ciśnienie gazu zależne od jego gęstości, a gęstość proporcjonalna jest do liczby cząsteczek w jednostce objętości. Liczba makrostanów, to liczba przypadków, w których  $k$  cząsteczek (nie ważne których) znajduje się z lewej strony oraz  $N - k$ , z prawej strony. Liczba mikrostanów dla danego makrostanu, w którym  $k$  cząsteczek znajduje się z lewej strony równa jest liczbie kombinacji  $k$  - elementowych w zbiorze o  $N$  elementach i wynosi:

$$\Omega(N, k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

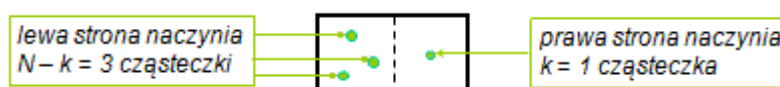
Dla zilustrowania tych relacji przeanalizujemy szczegółowo przypadek małej liczby cząsteczek, na przykład - czterech.

### Przykład

Układ termodynamiczny:  $N = 4$  cząsteczki gazu w zamkniętym naczyniu.


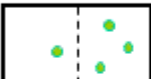
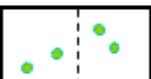
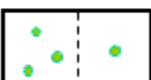

Charakterystyka układu:

- makrostany tj. liczby cząsteczek po jednej stronie (lewej, prawej) naczynia
- $2^N = 16$  mikrostanów tj. wszystkie możliwe położenia czterech cząsteczek w danych makrostanach.



**Rys. 8.5.1** Waga statystyczna danego makrostanu  $\Omega = 4$ . Prawdopodobieństwo termodynamiczne  $\Omega/2^N = 4/16$ .

Zakładamy, że cząsteczki są rozróżnialne (tzn. możemy je ponumerować cyframi 1, 2, 3, 4). W poniższej tabeli przedstawione są wszystkie możliwe sytuacje.

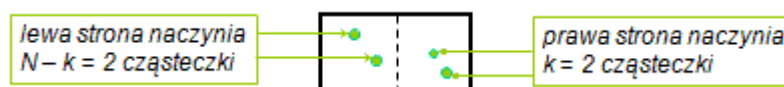
makrostany	mikrostany	liczba mikrostanów	prawdopodobieństwo
 L=0 P=4	l. (0) p. (1,2,3,4)	1	1/16
 L=1 P=3	l. (1,2,3,4) p. (2,3,4),(1,3,4),(2,1,4),(2,3,1)	4	4/16
 L=2 P=2	l. (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) p. (3,4),(2,4),(2,3),(1,4),(1,3),(1,2)	6	6/16
 L=3 P=1	l. (2,3,4),(1,3,4),(2,1,4),(2,3,1) p. (1,2,3,4)	4	4/16
 L=4 P=0	l. (1,2,3,4) p. (0)	1	1/16
		$\Sigma = 16$	$\Sigma = 1$

W lewej kolumnie tabeli wymienione są możliwe makrostany układu. Wszystkie możliwe mikrostany odpowiadające danemu makrostanowi wymienione są w kolejnej kolumnie. Podane są tam wszystkie sposoby, na jakie może być realizowany dany makrostan. W następnej kolumnie znajdują się liczby mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi, czyli wagi statystyczne poszczególnych makrostanów. W kolumnie z prawej strony podane są prawdopodobieństwa realizacji poszczególnych makrostanów. Na dole tablicy podana jest sumaryczna liczba mikrostanów oraz sumaryczne prawdopodobieństwo, które równe jest, oczywiście, jednoci. Założyliśmy, że cząsteczki są rozróżnialne (zostały ponumerowane). Liczba mikrostanów dla danego makrostanu, w którym  $k$  cząsteczek znajduje się z lewej strony równa jest liczbie kombinacji  $k$  - elementowych w zbiorze o  $N$  elementach i wynosi

$$\Omega(N, k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

. Jest to właśnie waga statystyczna danego makrostanu. Sumaryczna liczba wszystkich mikrostanów wynosi  $2^N$ . Prawdopodobieństwo danego makrostanu jest równe stosunkowi jego wagi statystycznej do sumarycznej liczby wszystkich mikrostanów i dla naszego przypadku podane jest w prawej kolumnie tabeli. Prawdopodobieństwo, że dana cząsteczka znajdzie się z prawej lub z lewej strony naczynia jest takie samo, czyli prawdopodobieństwa wszystkich mikrostanów są sobie równe. Uogólnienie tego stwierdzenia na zdefiniowane w dowolny sposób mikrostany nosi nazwę hipotezy ergodycznej.

Najbardziej prawdopodobne są makrostany, w których po obu stronach znajduje się ta sama liczba cząsteczek.

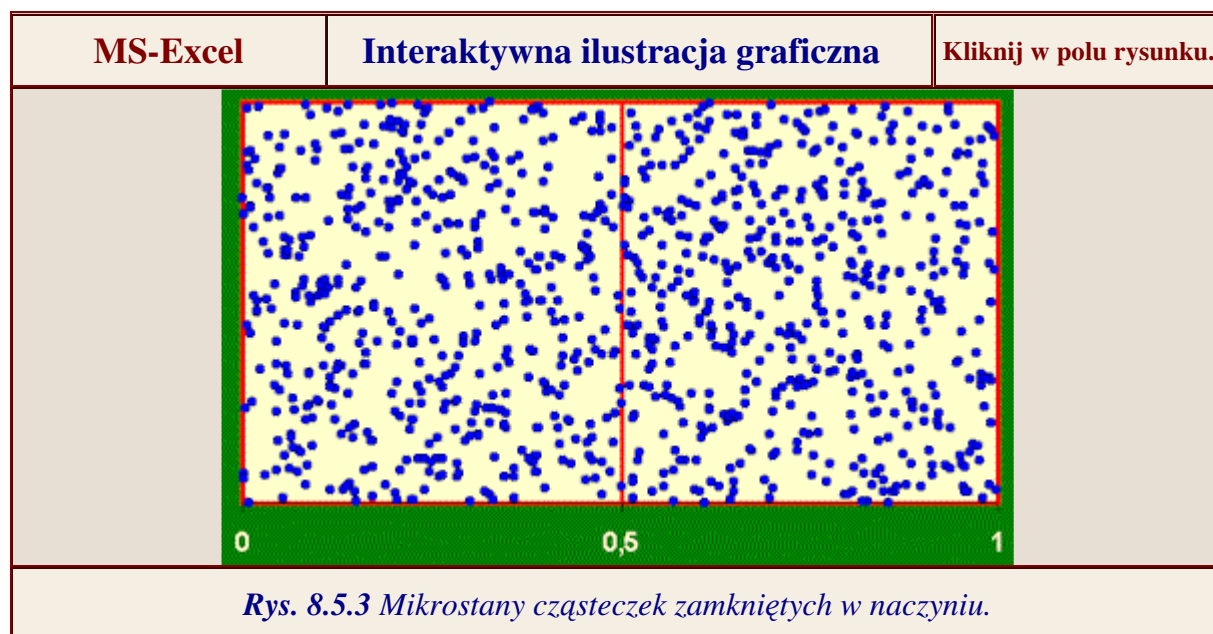


**Rys. 8.5.2** Waga statystyczna danego makrostanu  $\Omega = 6$ . Prawdopodobieństwo termodynamiczne  $\Omega/2^N = 6/16$ .

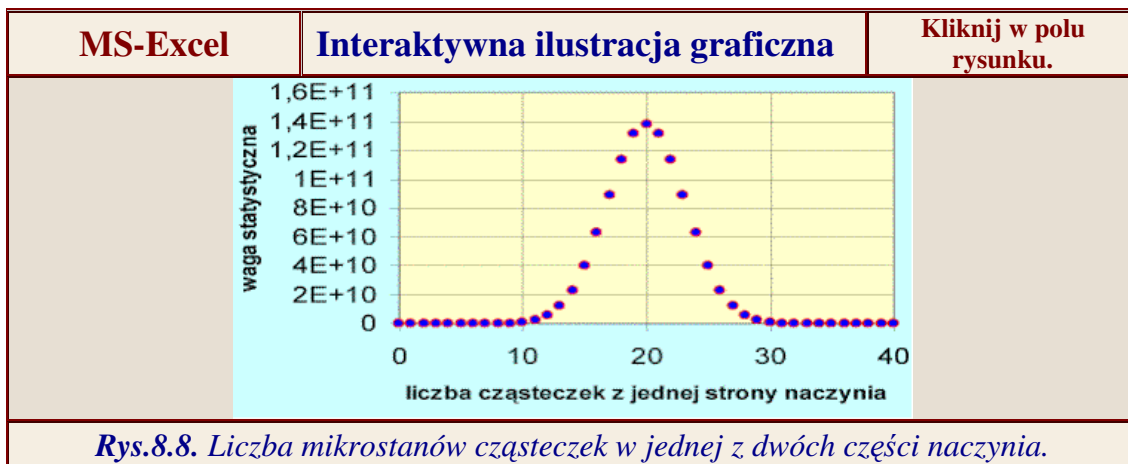
Gdybyśmy w stanie początkowym umieścili gaz z jednej strony naczynia, to po pewnym czasie cząsteczki zajęłyby pozycje odpowiadające największej wadze statystycznej, czyli największemu prawdopodobieństwu termodynamiczemu. Stan taki nazywamy *stanem równowagi*. Układ wyprowadzony ze stanu równowagi ma tendencję do samorzutnego powrotu do tego stanu. Inne stany układu są mniej prawdopodobne. Proces zmierzający do ustalenia się w układzie stanu równowagi jest procesem nieodwracalnym, bowiem proces do niego odwrotny jest bardzo mało prawdopodobny. Możemy więc powiedzieć, że dany proces jest wtedy nieodwracalny, gdy proces do niego odwrotny jest bardzo mało prawdopodobny.

A teraz sam sprawdź funkcjonowanie praw statystyki na przykładzie naczynia, w którym znajduje się pewna liczba cząsteczek. Stan każdej z nich określa miejsce jej położenia, po lewej bądź prawej stronie naczynia. Makrostan układu cząsteczek wyznacza sumaryczna liczba cząsteczek po danej stronie. Wykorzystując wyniki poprzedniej interaktywnej ilustracji możesz określić wagi statystyczne różnych makrostanów.

Dla praktycznego sprawdzenia proponujemy Ci określić liczbę prób niezbędną do uzyskania makrostanu, w którym wszystkie cząsteczki będą po jednej (np. lewej) stronie naczynia. Wykonaj to dla wzrastającej liczby cząsteczek. Wykreśl liczbę prób w funkcji  $N$ . Porównaj uzyskane wyniki z wagami statystycznymi wyznaczonymi w następnej ilustracji interaktywnej. Napisz swemu opiekunowi, do jakiej wartości  $N$  starczyło Ci cierpliwości.



Wykorzystując wyniki poprzedniej interaktywnej ilustracji możesz określić wagi statystyczne różnych makrostanów. Rysunek 12.4 pokazuje rozkład wag statystycznych poszczególnych makrostanów dla liczby cząsteczek  $N=40$ . Rozkłady wag statystycznych dla innych liczb cząsteczek możesz samemu zobaczyć uruchamiając interaktywną ilustrację graficzną.



## 6. Statystyczna definicja entropii

Kiedy układ składa się z nie oddziałujących podukładów wówczas prawdopodobieństwo stanu równe jest iloczynowi prawdopodobieństw stanów podukładów.

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

Stan układu, oprócz znanych nam już parametrów jak temperatura, czy ciśnienie można także scharakteryzować przez inną wielkość zawierającą informacje o jego prawdopodobieństwie termodynamicznym. Wielkością taką jest *entropia* zdefiniowana poprzez logarytm naturalny z prawdopodobieństwa termodynamicznego. Dzięki takiej definicji entropia układu jest sumą entropii podukładów, bowiem iloczyn prawdopodobieństw zamienia się w sumę ich logarytmów.

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2$$

Definicja entropii łącząca jej cechy mikroskopowe i makroskopowe oraz określająca jej sens statystyczny ma postać

$S = k \cdot \ln \Omega,$	(12.41)
---------------------------	---------

gdzie  $k$  jest znaną nam już stałą Boltzmanna. Entropia rośnie wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa stanu układu, jest logarymiczną miarą tego prawdopodobieństwa.

Jak wiemy, entropię można także zdefiniować poprzez wielkości makroskopowe (wzór).

Wymieńmy podstawowe własności entropii wynikające z naszych wcześniejszych rozważań. Przykładem może być rozważany przez nas układ podzielony umownie na część lewą i prawą.

1. Przemiany nieodwracalne zachodzące w układzie izolowanym prowadzą do wzrostu entropii układu.

Prawo to wyraża wzór

$$dS > 0 \quad (12.42)$$

Przykładem może być rozważany przez nas układ podzielony umownie na część lewą i prawą. Wzrost prawdopodobieństwa statystycznego równoważny jest ze wzrostem entropii tego układu.

Prawo wzrostu entropii ma charakter ogólny i odnosi się do wszelkich procesów zachodzących w przyrodzie. Wzrost entropii równoznaczny jest ze wzrostem nieuporządkowania elementów układu; z przechodzeniem ich od stanu uporządkowanego do stanu chaotycznego. Stanem pewnego uporządkowania jest zgromadzenie gazu w jednej części naczynia, ale także stanem uporządkowania jest półka z ustawionymi na niej książkami. Kiedy półka spada i w rezultacie książki są porzucane na podłodze, mamy także do czynienia ze wzrostem entropii układu. To samo dotyczy rozbitej szklanki, która spadła ze stołu, zburzonych w wyniku trzęsienia Ziemi domów, wracającej do położenia równowagi drgającej sprężyny itd.

2. W stanie równowagi entropia układu osiąga wartość maksymalną.

Kiedy więc w wyniku przemiany nieodwracalnej układ zwiększa swą entropię, to stan jego równowagi równoznaczny jest z maksymalną wartością entropii układu.

## Zadania

8.1. Oblicz charakterystyczne prędkości cząsteczek tlenu w powietrzu, przy pogodzie (temperatura 00C) określanej mianem marznącej mżawki. W jakiej relacji są te prędkości z dozwoloną dla pojazdów prędkością 50 km/godz?

## Rozwiązanie

Zastosuj równania podane w lekcji 8:

- prędkość najbardziej prawdopodobna 
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$
- prędkość średnia 
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}}$$
- prędkość średnia kwadratowa 
$$\langle v_{sr.kv} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$

8.2. Przy jakiej temperaturze średnia prędkość kwadratowa cząsteczek dwutlenku węgla będzie równa średniej prędkości kwadratowej cząsteczek azotu w temperaturze 0<sup>0</sup>C?

## Wskazówka

$$T_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot T_1$$

Uwzględniając definicję średniej prędkości kwadratowej cząsteczek

Proszę samodzielnie rozwiązać zadanie. Potrzebne będą masy cząsteczkowe azotu i dwutlenku węgla.

8.3. Oblicz zmianę entropii  $n$  moli gazu doskonałego w procesie izotermicznego rozprężania od objętości  $V_0$  do objętości  $V_k$ .

## Rozwiązanie

Układem jest porcja  $n_M$  moli gazu zawierająca liczbę  $N$  identycznych, niezależnych cząsteczek (podukładów). Prawdopodobieństwo stanu układu  $\Omega$  równe jest iloczynowi prawdopodobieństw stanów podukładów  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Dla pojedynczej cząsteczki prawdopodobieństwo jej przebywania w objętości  $V$  jest proporcjonalne do  $V$ , a dla  $N$  cząsteczek do  $V^N$ . Więc

$$\Omega_i = A \cdot V \text{ oraz } \Omega = \Omega_i^N = (A \cdot V)^N, \text{ gdzie } A \text{ jest stałą proporcjonalności.}$$

Z definicji entropii będzie  $S = k \cdot N(\ln A + \ln V)$ . Liczba cząsteczek i ich temperatura nie zmieniają się. Zwiększa się objętość porcji gazu od  $V_0$  do  $V_k$  i zwiększa się entropia (nieuporządkowanie) układu.

$$\Delta S = S_k - S_0 = k \cdot N(\ln A + \ln V_k) - k \cdot N(\ln A + \ln V_0) = k \cdot N \cdot \ln \frac{V_k}{V_0} = n_M \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_0}$$

8.4. Izolowany układ dwóch zbiorników. Zbiornik o objętości  $V_1$  zawierał  $n_{M1}$  moli gazu o temperaturze  $T$ . Zbiornik o objętości  $V_2$  zawierał  $n_{M2}$  moli również o temperaturze  $T$ . Oblicz zmianę entropii tych gazów po połączeniu zbiorników i powstaniu mieszaniny.

## Wskazówka

Dla tej mieszaniny gazów  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ .

## Słownik

<i>rozkład Maxwella prędkości cząsteczek</i>	rozkład wartości prędkości chaotycznego ruchu cząsteczek gazu doskonałego dla zadanej temperatury i masy cząsteczek
<i>rozkład Boltzmannna</i>	rozkład koncentracji cząsteczek w funkcji ich wysokości lub energii potencjalnej. Odnosi się nie tylko do pola sił przyciągania ziemskiego, ale do dowolnego pola potencjalnego, jeśli tylko cząsteczki poruszają się chaotycznym ruchem cieplnym.
<i>rozkład Maxwella-Boltzmannna</i>	rozkład położenia i prędkości cząsteczek będących w polu sił potencjalnych i znajdującym się w chaotycznym ruchu w określonej



	temperaturze
<i>wzór barometryczny</i>	podaje zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad powierzchnią Ziemi
<i>mikrostan</i>	stan układu w którym opisane są stany wszystkich jego elementów
<i>hipoteza ergodyczna</i>	Prawdopodobieństwa wszystkich mikrostanów są jednakowe
<i>makrostan</i>	stan układu opisany za pomocą wielkości odnoszących się do całości układu
<i>prawdopodobieństwo termodynamiczne (waga statystyczna)</i>	odnosi się do makrostanu układu: liczba mikroskoopowych sposobów realizacji danego makrostanu (liczba mikrostanów odpowiadająca danemu makrostanowi)
<i>entropia</i>	definicja statystyczna: wielkość proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa termodynamicznego stanu układu
<i>fluktuacje</i>	losowe odchylenia danej wielkości od wartości średniej
<i>prawo wzrostu entropii</i>	entropia układu izolowanego nie może maleć, w procesach nieodwracalnych entropia układu rośnie

# Termodynamika statystyczna



*Fot. 8.0.1 Prawa statystyczne "gry w kości" i ruchów cieplnych są takie same.*

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki kostką do gry - jakie, że obie kostki pokażą te same liczby, - a jakie, że będą to szóstki? Jaka jest szansa trafienia szóstki w toto-lotka? Jakie jest prawdopodobieństwo, że połowa jąder preparatu promieniotwórczego rozpadnie się w danym czasie? Czy jest możliwe, by wszystkie cząsteczki powietrza wypełniającego mieszkanie znalazły się na raz w jednym pokoju, a w innych zapanowała próżnia?

Wszystkie te przykłady łączy wspólna cecha - dotyczą zdarzeń które mogą, ale nie muszą wystąpić. Prawdopodobieństwa ich wystąpienia różnią się jednak znacznie.

## 1. Ruch cieplny cząsteczek

Wiemy już, że przy ruchu cieplnym cząsteczek:

- Identyczne cząsteczki są w chaotycznym ruchu
- Wszystkie kierunki ich ruchu są jednakowo prawdopodobne
- Temperatura jest miarą ich średniej energii kinetycznej
- Prędkości zmieniają się w wyniku zderzeń
- Prędkości poszczególnych cząsteczek są różne w szerokim zakresie wartości.

Teraz przedstawimy te zagadnienia metodami statystycznymi. Termodynamika statystyczna opisuje układy wielu cząsteczek, z jakich składają się ciała za pomocą wielkości średnich (średnia prędkość, średnia droga, średnia energia itd.) oraz tzw. rozkładów statystycznych. Wiąże mikroskopowe, dane statystyczne o cząsteczkach z makroskopowymi parametrami stanu. Posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa i pozwala wyznaczać najbardziej prawdopodobne kierunki procesów.

## 2. Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek

Rozkład Maxwella opisuje prędkości cząsteczek gazu doskonałego będącego w stanie równowagi termodynamicznej, na który nie działają siły zewnętrzne. Pozwala obliczyć charakterystyczne wartości wielkości średnich: średnią prędkość kwadratową, średnią prędkość i prędkość najbardziej prawdopodobną oraz liczbę cząsteczek o prędkościach zawartych w przedziale wartości od  $v$  do  $v + dv$ .

Jeżeli mamy  $N$  cząsteczek, to liczba  $dN_v$  cząsteczek o prędkościach w przedziale od  $v$  do  $v + dv$  będzie określona wzorem

$$dN_v = N \cdot F(v) \cdot dv,$$

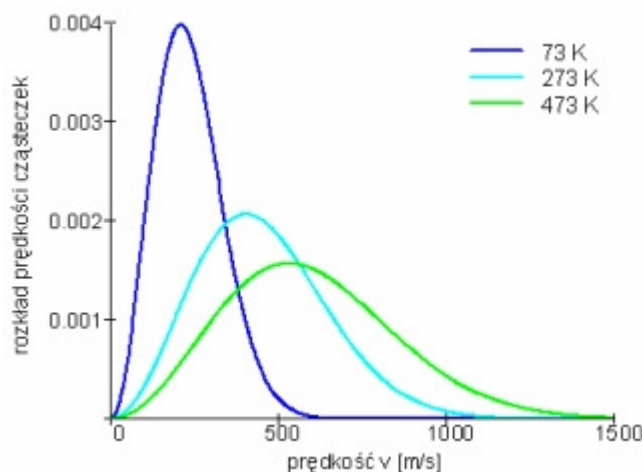
gdzie  $F(v)$  dane jest wzorem:

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \cdot \exp\left( -\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T} \right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot v^2$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru i szersze omówienie tematu można znaleźć w [materiałach dodatkowych](#).

Co jest charakterystyczne w tym rozkładzie  $F(v)$ ? Jest to konieczność wystąpienia maksimum ze względu na iloczyn rosnącej parabolicznie i malejącej wykładniczo zależności od  $v$ . (Przeanalizuj dokładnie trzy człony wzoru na  $F(v)$ . Pierwszy, to czynnik normalizacyjny zawierający wyłącznie wartości stałe, drugi - to człon wykładniczy, ale z ujemną wartością w wykładniku, czyli malejący ze wzrostem prędkości i równy jedynie dla  $v = 0$ , ostatni - rosnący parabolicznie ze wzrostem prędkości. Rezultat jest zobrazowany na wykresie  $F(v)$  maxwellowskiej funkcji rozkładu prędkości cząsteczek azotu przy temperaturach: 73 K (-200°C), 273 K (0°C), 473 K (200°C).

Gdy temperatura rośnie maksimum krzywej rozkładu przesuwa się w stronę większych prędkości i krzywa ulega spłaszczeniu. Pole pod krzywą równe jest całkowitej liczbie cząsteczek w próbce i pozostaje stałe niezależnie od temperatury. Rozkład prędkości cząsteczek w danej temperaturze zależy od masy cząsteczek. Im mniejsza masa tym większa liczba cząsteczek o dużych prędkościach.



**Rys. 8.2.1** Maxwellowska funkcja rozkładu prędkości dla cząsteczek azotu przy temperaturach: - 200°C, 0°C, 200°C.

Dla każdej temperatury można określić prędkość, która występuje najczęściej, czyli najwięcej cząsteczek ma prędkości bliskie tej wartości. Wartość ta odpowiada maksimum rozkładu

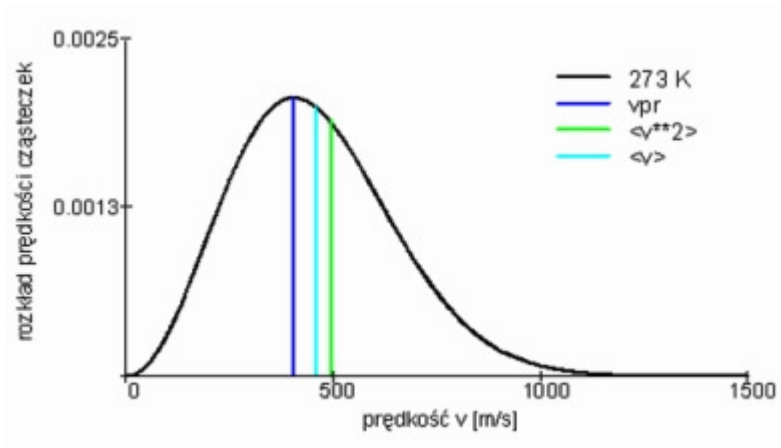
Maxwella. Prędkość tę nazywamy prędkością najbardziej prawdopodobną,  $v_p$ . Można ją

$$\left. \frac{dF(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

określić z matematycznego warunku na maksimum funkcji. Stąd otrzymuje

się  $v_p = \sqrt{2 \cdot k \cdot T / m_0}$ , a więc  $v_p < v_{sr.kw}$ : jak to wynika z definicji średniej prędkości kwadratowej (teoria kinetyczna).

Korzystając z funkcji rozkładu można, również, obliczyć odpowiednio prędkość średnią (średnia arytmetyczną wszystkich prędkości)

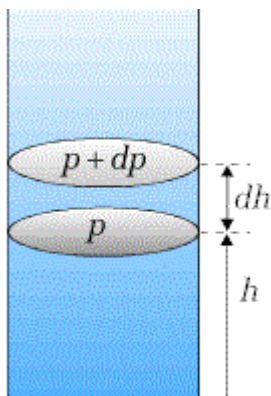


**Rys. 8.2.2** Maxwellowska funkcja rozkładu prędkości dla cząsteczek azotu przy temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ . Prędkość najbardziej prawdopodobna  $v_p = 402 \text{ m/s}$ , prędkość średnia  $\langle v \rangle = 454 \text{ m/s}$ , prędkość średnia kwadratowa  $\langle v_{sr.kw} \rangle = 493 \text{ m/s}$ .

Charakterystyczne prędkości obliczamy ze wzorów:

- prędkość najbardziej prawdopodobna 
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$
- prędkość średnia 
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}}$$
- prędkość średnia kwadratowa 
$$\langle v_{sr.kw} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$

### 3. Wzór barometryczny



Korzystając z poznanych w tej lekcji termodynamicznych własności gazów, możemy otrzymać bardzo ważny wzór określający zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad powierzchnią Ziemi. Ciśnienie atmosferyczne w danym punkcie nad powierzchnią Ziemi określone jest przez ciężar warstwy powietrza leżącej powyżej tego punktu, powinno więc zależeć od wysokości. Im większa wysokość, tym mniejsza jest warstwa powietrza, więc i ciśnienie jest mniejsze. Różnica ciśnień  $dp$  związana ze wzrostem wysokości  $dh$  ma więc znak ujemny i wynosi

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (8.3.1)$$

**Rys. 8.3.1 Ciśnienie**  
gazu w funkcji  
wysokości

gdzie  $\rho$  jest gęstością gazu na wysokości  $h$ , a  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim na tej wysokości.

Z dobrym przybliżeniem można potraktować powietrze jako gaz doskonały. Dzieląc obustronnie równanie stanu gazu doskonałego dla jednego mola  $p \cdot V = R \cdot T$  przez wartość średniej masy molowej powietrza, określonej z uwzględnieniem procentowej zawartości azotu, tlenu i pozostałych gazów w powietrzu, otrzymujemy

$$p \cdot \underbrace{(V/M)}_{1/\rho} = \frac{R \cdot T}{M}, \quad \text{czyli} \quad \rho = \frac{M \cdot p}{R \cdot T} \quad (8.3.2)$$

Wzór (8.3.1) możemy więc przepisać w postaci

$$dp = -\frac{M \cdot p \cdot g}{R \cdot T} \cdot dh \quad (8.3.3)$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dh \quad (8.3.4)$$

Zakładając, że temperatura atmosfery ma wartość stałą (tzw. atmosfera izotermiczna) i pole grawitacyjne jest jednorodne ( $g(h)=const$ ) możemy łatwo scałkować to równanie otrzymując

$$\ln p = -\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T} + \ln C, \quad (8.3.5)$$

gdzie  $\ln C$  to stała całkowania.

Ze wzoru (8.3.5) wynika, że

$$p = C \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}\right) \quad (8.3.6)$$

Dla  $h = 0$  ciśnienie równe jest ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$  na powierzchni Ziemi. Stąd wyznaczamy stałą;  $C = p_0$ . Ostatecznie otrzymujemy

$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}\right)$	(8.3.7)
---	---------

Jest to tzw. *wzór barometryczny*. Wynika z niego, że ciśnienie zmienia się z wysokością szybciej dla niższych temperatur oraz dla cięższego gazu, i że zmiana ta ma charakter

wykładniczy. Jak zobaczymy w dalszej lekcji wzór ten odegrał istotną rolę w rozwoju fizyki statystycznej.

Wzór (8.3.7) obowiązuje dla **atmosfery izotermicznej**, dla której mamy  $T = \text{const}$  oraz jednorodnego pola grawitacyjnego. Jeżeli warunki te nie są spełnione, należy podstawić zależność funkcyjną temperatury od wysokości oraz zależność  $g=g(h)$  do wzoru (8.3.7) i rozwiązać otrzymane równanie różniczkowe.

$$\frac{M}{R} = \frac{N_A \cdot m_0}{N_A \cdot k} = \frac{m_0}{k}$$

Korzystając z faktu, że  $\frac{M}{R} = \frac{N_A \cdot m_0}{N_A \cdot k} = \frac{m_0}{k}$ , gdzie  $m_0$  - średnia masa cząsteczki powietrza, możemy zależność (8.3.7) przedstawić w postaci

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}\right) \quad (8.3.8)$$

Zwróć uwagę na wyrażenia w liczniku i mianowniku wykładnika funkcji "exp" określającej ciśnienie. Jaki jest ich sens fizyczny?

#### 4. Rozkład Boltzmana

W rozważaniach dotyczących rozkładu Maxwella ignorowaliśmy całkowicie fakt, że cząsteczki poruszają się w polu sił ciężkości, a więc wyróżniony jest kierunek pionowy. Wzór barometryczny wskazuje, że ciężar cząsteczek ma wpływ na rozkład ciśnienia w funkcji wysokości. Jak uwzględnić ten efekt w opisie rozkładu prędkości cząsteczek?

Przepiszmy w nieco innej formie wzór barometryczny. Zakładając atmosferę izotermiczną, możemy zamienić ciśnienia  $p$  i  $p_0$  występujące we wzorze barometrycznym wielkościami  $n$  i  $n_0$ , które reprezentują koncentrację cząsteczek, czyli ich liczbę w jednostce objętości na wysokości  $h$  oraz na powierzchni Ziemi.

Wykorzystując to zapiszemy wzór barometryczny w formie

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}\right)$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie  $m_0 \cdot g \cdot h$  jest po prostu energią potencjalną  $E_P$  cząsteczki w polu sił ciężkości (przy założeniu jednorodnego pola grawitacyjnego).

Więc również

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_P}{k \cdot T}\right)$$

Ten wzór wyraża zależność koncentracji cząsteczek od ich wysokości lub grawitacyjnej energii potencjalnej. Wynikający z niego rozkład koncentracji nosi nazwę *rozkładu*

*Boltzmann* i odnosi się nie tylko do pola sił przyciągania ziemskiego, ale do dowolnego pola potencjalnego, jeśli tylko cząsteczki poruszają się chaotycznym ruchem cieplnym.

## 5. Makrostany i mikrostan

- Stan układu określany przez parametry makroskopowe, jak temperatura, ciśnienie, energia wewnętrzna, itd. nazywamy *makrostanem*.
- Stan układu wyznaczony przez określenie stanów wszystkich cząsteczek wchodzących w jego skład nazywamy *mikrostanem*.

Liczba możliwych mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi jest na ogół ogromna, analiza nasza będzie mieć charakter statystyczny. Liczba mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi nazywa się *prawdopodobieństwem termodynamicznym* lub *wagą statystyczną* makrostanu.

Rozpatrzmy sens wagi statystycznej na przykładzie naczynia z gazem, w którym znajduje się  $N$  cząsteczek. Stan danej cząsteczki opiszemy tylko jedną informacją - w której części naczynia, lewej czy prawej, cząsteczka się znajduje. Zbiór tych informacji dla wszystkich  $N$  cząsteczek określa mikrostan naszego układu. (Dla uproszczenia rozważań nie będziemy brać pod uwagę prędkości, kierunku ruchu, masy cząsteczek itp.). Makrostan układu określamy podając sumaryczną liczbę cząsteczek z jednej (np. lewej) strony naczynia. Nie bierzemy tu pod uwagę prędkości cząsteczek, ale makroskopowy parametr jakim jest ciśnienie gazu zależne od jego gęstości, a gęstość proporcjonalna jest do liczby cząsteczek w jednostce objętości. Liczba makrostanów, to liczba przypadków, w których  $k$  cząsteczek (nie ważne których) znajduje się z lewej strony oraz  $N - k$ , z prawej strony. Liczba mikrostanów dla danego makrostanu, w którym  $k$  cząsteczek znajduje się z lewej strony równa jest liczbie kombinacji  $k$  - elementowych w zbiorze o  $N$  elementach i wynosi:

$$\Omega(N, k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

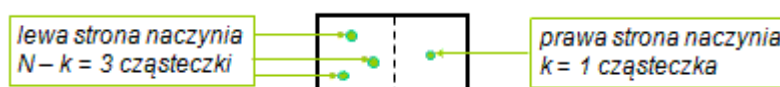
Dla zilustrowania tych relacji przeanalizujemy szczegółowo przypadek małej liczby cząsteczek, na przykład - czterech.

### Przykład

Układ termodynamiczny:  $N = 4$  cząsteczki gazu w zamkniętym naczyniu.

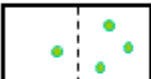
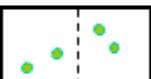
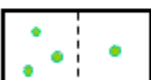
Charakterystyka układu:

- makrostany tj. liczby cząsteczek po jednej stronie (lewej, prawej) naczynia
- $2^N = 16$  mikrostanów tj. wszystkie możliwe położenia czterech cząsteczek w danych makrostanach.



**Rys. 8.5.1** Waga statystyczna danego makrostanu  $\Omega = 4$ . Prawdopodobieństwo termodynamiczne  $\Omega/2^N = 4/16$ .

Zakładamy, że cząsteczki są rozróżnialne (tzn. możemy je ponumerować cyframi 1, 2, 3, 4). W poniższej tabeli przedstawione są wszystkie możliwe sytuacje.

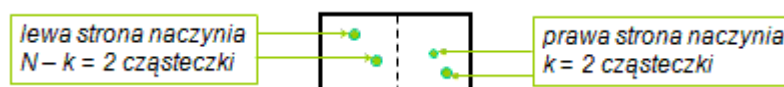
makrostany	mikrostany	liczba mikrostanów	prawdopodobieństwo
 L=0 P=4	l. (0) p. (1,2,3,4)	1	1/16
 L=1 P=3	l. (1,2,3,4) p. (2,3,4),(1,3,4),(2,1,4),(2,3,1)	4	4/16
 L=2 P=2	l. (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) p. (3,4),(2,4),(2,3),(1,4),(1,3),(1,2)	6	6/16
 L=3 P=1	l. (2,3,4),(1,3,4),(2,1,4),(2,3,1) p. (1,2,3,4)	4	4/16
 L=4 P=0	l. (1,2,3,4) p. (0)	1	1/16
		$\Sigma = 16$	$\Sigma = 1$

W lewej kolumnie tabeli wymienione są możliwe makrostany układu. Wszystkie możliwe mikrostany odpowiadające danemu makrostanowi wymienione są w kolejnej kolumnie. Podane są tam wszystkie sposoby, na jakie może być realizowany dany makrostan. W następnej kolumnie znajdują się liczby mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi, czyli wagi statystyczne poszczególnych makrostanów. W kolumnie z prawej strony podane są prawdopodobieństwa realizacji poszczególnych makrostanów. Na dole tablicy podana jest sumaryczna liczba mikrostanów oraz sumaryczne prawdopodobieństwo, które równe jest, oczywiście, jednoci. Założyliśmy, że cząsteczki są rozróżnialne (zostały ponumerowane). Liczba mikrostanów dla danego makrostanu, w którym  $k$  cząsteczek znajduje się z lewej strony równa jest liczbie kombinacji  $k$  - elementowych w zbiorze o  $N$  elementach i wynosi

$$\Omega(N, k) = \frac{N!}{k!(N - k)!}$$

. Jest to właśnie waga statystyczna danego makrostanu. Sumaryczna liczba wszystkich mikrostanów wynosi  $2^N$ . Prawdopodobieństwo danego makrostanu jest równe stosunkowi jego wagi statystycznej do sumarycznej liczby wszystkich mikrostanów i dla naszego przypadku podane jest w prawej kolumnie tabeli. Prawdopodobieństwo, że dana cząsteczka znajdzie się z prawej lub z lewej strony naczynia jest takie samo, czyli prawdopodobieństwa wszystkich mikrostanów są sobie równe. Uogólnienie tego stwierdzenia na zdefiniowane w dowolny sposób mikrostany nosi nazwę hipotezy ergodycznej.

Najbardziej prawdopodobne są makrostany, w których po obu stronach znajduje się ta sama liczba cząsteczek.



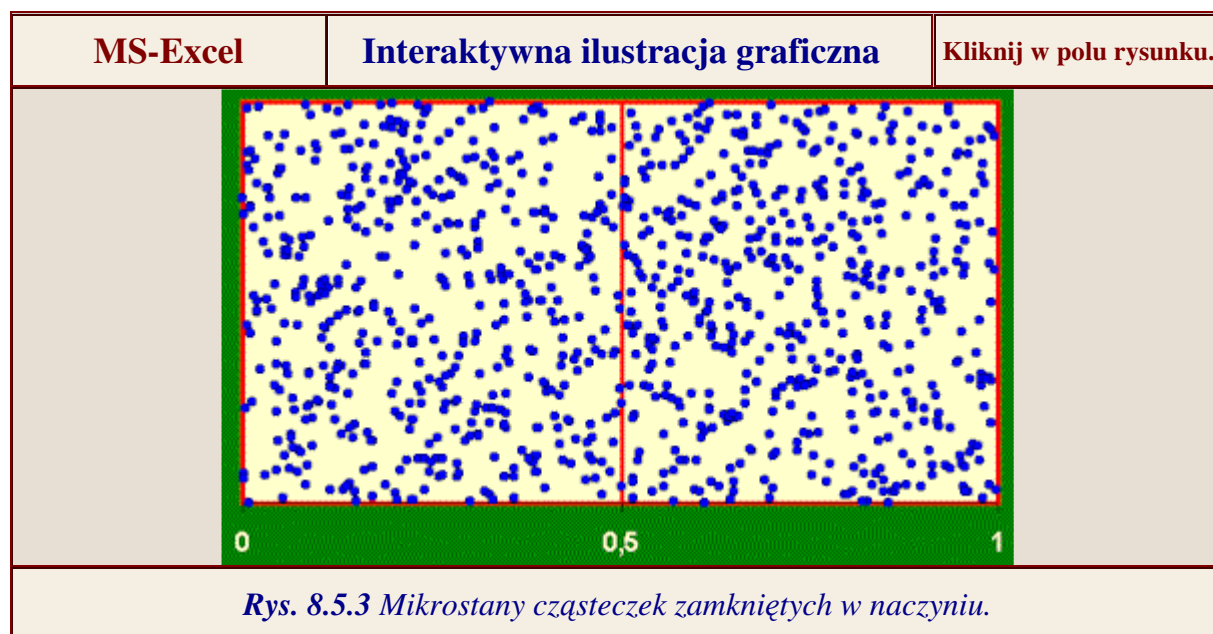


**Rys. 8.5.2** Waga statystyczna danego makrostanu  $\Omega = 6$ . Prawdopodobieństwo termodynamiczne  $\Omega/2^N = 6/16$ .

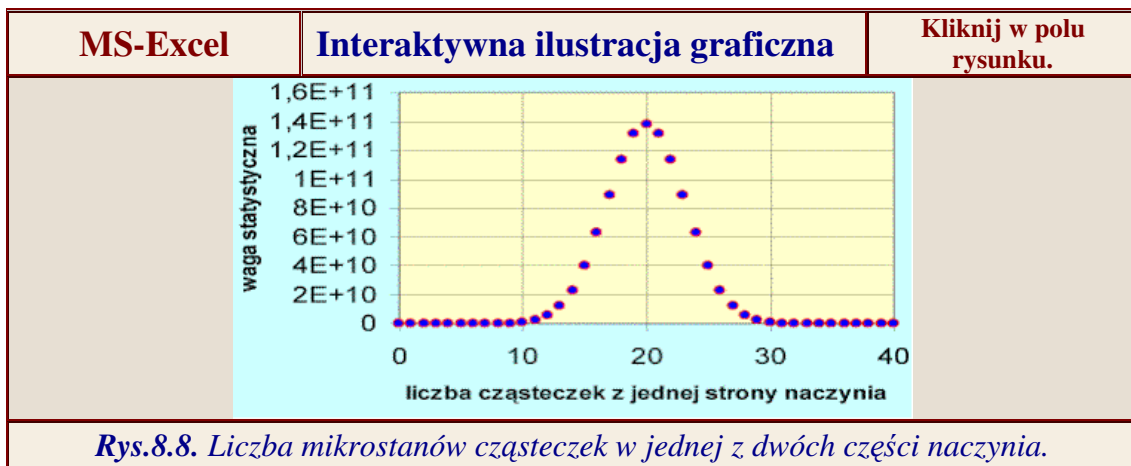
Gdybyśmy w stanie początkowym umieścili gaz z jednej strony naczynia, to po pewnym czasie cząsteczki zajęłyby pozycje odpowiadające największej wadze statystycznej, czyli największemu prawdopodobieństwu termodynamicznemu. Stan taki nazywamy *stanem równowagi*. Układ wyprowadzony ze stanu równowagi ma tendencję do samorzutnego powrotu do tego stanu. Inne stany układu są mniej prawdopodobne. Proces zmierzający do ustalenia się w układzie stanu równowagi jest procesem nieodwracalnym, bowiem proces do niego odwrotny jest bardzo mało prawdopodobny. Możemy więc powiedzieć, że dany proces jest wtedy nieodwracalny, gdy proces do niego odwrotny jest bardzo mało prawdopodobny.

A teraz sam sprawdź funkcjonowanie praw statystyki na przykładzie naczynia, w którym znajduje się pewna liczba cząsteczek. Stan każdej z nich określa miejsce jej położenia, po lewej bądź prawej stronie naczynia. Makrostan układu cząsteczek wyznacza sumaryczna liczba cząsteczek po danej stronie. Wykorzystując wyniki poprzedniej interaktywnej ilustracji możesz określić wagi statystyczne różnych makrostanów.

Dla praktycznego sprawdzenia proponujemy Ci określić liczbę prób niezbędną do uzyskania makrostanu, w którym wszystkie cząsteczki będą po jednej (np. lewej) stronie naczynia. Wykonaj to dla wzrastającej liczby cząsteczek. Wykreśl liczbę prób w funkcji  $N$ . Porównaj uzyskane wyniki z wagami statystycznymi wyznaczonymi w następnej ilustracji interaktywnej. Napisz swemu opiekunowi, do jakiej wartości  $N$  starczyło Ci cierpliwości.



Wykorzystując wyniki poprzedniej interaktywnej ilustracji możesz określić wagi statystyczne różnych makrostanów. Rysunek 12.4 pokazuje rozkład wag statystycznych poszczególnych makrostanów dla liczby cząsteczek  $N=40$ . Rozkłady wag statystycznych dla innych liczb cząsteczek możesz samemu zobaczyć uruchamiając interaktywną ilustrację graficzną.



## 6. Statystyczna definicja entropii

Kiedy układ składa się z nie oddziałujących podukładów wówczas prawdopodobieństwo stanu równe jest iloczynowi prawdopodobieństw stanów podukładów.

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

Stan układu, oprócz znanych nam już parametrów jak temperatura, czy ciśnienie można także scharakteryzować przez inną wielkość zawierającą informacje o jego prawdopodobieństwie termodynamicznym. Wielkością taką jest *entropia* zdefiniowana poprzez logarytm naturalny z prawdopodobieństwa termodynamicznego. Dzięki takiej definicji entropia układu jest sumą entropii podukładów, bowiem iloczyn prawdopodobieństw zamienia się w sumę ich logarytmów.

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2$$

Definicja entropii łącząca jej cechy mikroskopowe i makroskopowe oraz określająca jej sens statystyczny ma postać

$S = k \cdot \ln \Omega,$	(12.41)
---------------------------	---------

gdzie  $k$  jest znaną nam już stałą Boltzmanna. Entropia rośnie wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa stanu układu, jest logarymiczną miarą tego prawdopodobieństwa.

Jak wiemy, entropię można także zdefiniować poprzez wielkości makroskopowe (wzór ).

Wymieńmy podstawowe własności entropii wynikające z naszych wcześniejszych rozważań. Przykładem może być rozważany przez nas układ podzielony umownie na część lewą i prawą.

1. Przemiany nieodwracalne zachodzące w układzie izolowanym prowadzą do wzrostu entropii układu.

Prawo to wyraża wzór

$$dS > 0 \quad (12.42)$$

Przykładem może być rozważany przez nas układ podzielony umownie na część lewą i prawą. Wzrost prawdopodobieństwa statystycznego równoważny jest ze wzrostem entropii tego układu.

Prawo wzrostu entropii ma charakter ogólny i odnosi się do wszelkich procesów zachodzących w przyrodzie. Wzrost entropii równoznaczny jest ze wzrostem nieuporządkowania elementów układu; z przechodzeniem ich od stanu uporządkowanego do stanu chaotycznego. Stanem pewnego uporządkowania jest zgromadzenie gazu w jednej części naczynia, ale także stanem uporządkowania jest półka z ustawionymi na niej książkami. Kiedy półka spada i w rezultacie książki są porzucane na podłodze, mamy także do czynienia ze wzrostem entropii układu. To samo dotyczy rozbitej szklanki, która spadła ze stołu, zburzonych w wyniku trzęsienia Ziemi domów, wracającej do położenia równowagi drgającej sprężyny itd.

2. W stanie równowagi entropia układu osiąga wartość maksymalną.

Kiedy więc w wyniku przemiany nieodwracalnej układ zwiększa swą entropię, to stan jego równowagi równoznaczny jest z maksymalną wartością entropii układu.

## Zadania

8.1. Oblicz charakterystyczne prędkości cząsteczek tlenu w powietrzu, przy pogodzie (temperatura 0°C) określanej mianem marznącej mżawki. W jakiej relacji są te prędkości z dozwoloną dla pojazdów prędkością 50 km/godz?

## Rozwiązanie

Zastosuj równania podane w lekcji 8:

- prędkość najbardziej prawdopodobna 
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$
- prędkość średnia 
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}}$$
- prędkość średnia kwadratowa 
$$\langle v_{sr.kv} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$$

8.2. Przy jakiej temperaturze średnia prędkość kwadratowa cząsteczek dwutlenku węgla będzie równa średniej prędkości kwadratowej cząsteczek azotu w temperaturze 0°C?

## Wskazówka

$$T_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot T_1$$

Uwzględniając definicję średniej prędkości kwadratowej cząsteczek

Proszę samodzielnie rozwiązać zadanie. Potrzebne będą masy cząsteczkowe azotu i dwutlenku węgla.

8.3. Oblicz zmianę entropii  $n$  moli gazu doskonałego w procesie izotermicznego rozprężania od objętości  $V_0$  do objętości  $V_k$ .

## Rozwiązanie

Układem jest porcja  $n_M$  moli gazu zawierająca liczbę  $N$  identycznych, niezależnych cząsteczek (podukładów). Prawdopodobieństwo stanu układu  $\Omega$  równe jest iloczynowi prawdopodobieństw stanów podukładów  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Dla pojedynczej cząsteczki prawdopodobieństwo jej przebywania w objętości  $V$  jest proporcjonalne do  $V$ , a dla  $N$  cząsteczek do  $V^N$ . Więc

$$\Omega_i = A \cdot V \text{ oraz } \Omega = \Omega_i^N = (A \cdot V)^N, \text{ gdzie } A \text{ jest stałą proporcjonalności.}$$

Z definicji entropii będzie  $S = k \cdot N(\ln A + \ln V)$ . Liczba cząsteczek i ich temperatura nie zmieniają się. Zwiększa się objętość porcji gazu od  $V_0$  do  $V_k$  i zwiększa się entropia (nieuporządkowanie) układu.

$$\Delta S = S_k - S_0 = k \cdot N(\ln A + \ln V_k) - k \cdot N(\ln A + \ln V_0) = k \cdot N \cdot \ln \frac{V_k}{V_0} = n_M \cdot R \cdot \ln \frac{V_k}{V_0}$$

8.4. Izolowany układ dwóch zbiorników. Zbiornik o objętości  $V_1$  zawierał  $n_{M1}$  moli gazu o temperaturze  $T$ . Zbiornik o objętości  $V_2$  zawierał  $n_{M2}$  moli również o temperaturze  $T$ . Oblicz zmianę entropii tych gazów po połączeniu zbiorników i powstaniu mieszaniny.

## Wskazówka

Dla tej mieszaniny gazów  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ .

## Słownik

<i>rozkład Maxwella prędkości cząsteczek</i>	rozkład wartości prędkości chaotycznego ruchu cząsteczek gazu doskonałego dla zadanej temperatury i masy cząsteczek
<i>rozkład Boltzmannna</i>	rozkład koncentracji cząsteczek w funkcji ich wysokości lub energii potencjalnej. Odnosi się nie tylko do pola sił przyciągania ziemskiego, ale do dowolnego pola potencjalnego, jeśli tylko cząsteczki poruszają się chaotycznym ruchem cieplnym.
<i>rozkład Maxwella-Boltzmannna</i>	rozkład położenia i prędkości cząsteczek będących w polu sił potencjalnych i znajdującym się w chaotycznym ruchu w określonej

	temperaturze
<i>wzór barometryczny</i>	podaje zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad powierzchnią Ziemi
<i>mikrostan</i>	stan układu w którym opisane są stany wszystkich jego elementów
<i>hipoteza ergodyczna</i>	Prawdopodobieństwa wszystkich mikrostanów są jednakowe
<i>makrostan</i>	stan układu opisany za pomocą wielkości odnoszących się do całości układu
<i>prawdopodobieństwo termodynamiczne (waga statystyczna)</i>	odnosi się do makrostanu układu: liczba mikroskoopowych sposobów realizacji danego makrostanu (liczba mikrostanów odpowiadająca danemu makrostanowi)
<i>entropia</i>	definicja statystyczna: wielkość proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa termodynamicznego stanu układu
<i>fluktuacje</i>	losowe odchylenia danej wielkości od wartości średniej
<i>prawo wzrostu entropii</i>	entropia układu izolowanego nie może maleć, w procesach nieodwracalnych entropia układu rośnie

# Pole elektryczne

## Wstęp

Pierwsze, nieświadome obserwacje zjawisk elektrycznych, to niewątpliwie oglądane z lękiem przed wiekami - wyładowania atmosferyczne.



*Fot. 9.0.1 Zrozumienie praw fizyki spowodowało zmianę stanowiska człowieka - od strachu przed piorunem, do powszechnego wykorzystania energii elektrycznej.*

Przyciąganie skrawków pergaminu przez potarty sukniem bursztyn, opisane było już w czasach starożytnych przez Talesa z Miletu i właśnie od greckiej nazwy bursztynu "elektron" wywodzi się termin "elektryczność".

Za prawdziwy początek rozwoju wiedzy o elektryczności uznać można sformułowanie przez Coulomba w 1785 roku prawa oddziaływania wzajemnego ładunków elektrycznych. Poznanie praw opisujących zachowanie się cząstek niosących ładunki elektryczne oraz pól przez te ładunki wytwarzanych umożliwiło człowiekowi zarówno zrozumienie niebezpieczeństw związanych z wyładowaniami elektrycznymi w atmosferze jak i wykorzystanie ruchu ładunków elektrycznych w różnorodnych zastosowaniach praktycznych. Obecnie, energia elektryczna znajduje zastosowanie w niemalże wszystkich dziedzinach działalności człowieka.

Ładunek elektryczny stanowi własność niektórych cząstek; na przykład ładunek elektronów jest ujemny, protonów dodatni, neutrony są zaś elektrycznie obojętne. Ładunek elektronu jest elementarnym ładunkiem ujemnym, a ładunek protonu - elementarnym ładunkiem dodatnim. Ładunek ciał naładowanych elektrycznie jest zawsze wielokrotnością ładunku elementarnego. Taką elementarną wartość jakiejś wielkości nazywamy kwantem. Mówimy więc, że ładunek elektryczny podlega kwantowaniu, czyli może być wyrażony w postaci

$$q = \pm N \cdot e$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem danego ciała,  $e$  jest ładunkiem elementarnym, a  $N$  jest liczbą naturalną.

Jednostką ładunku elektrycznego w układzie SI jest 1 kulomb (1C). Kulomb jest jednostką pochodną i zdefiniowany jest jako ładunek przenoszony przez prąd elektryczny o natężeniu jednego ampera w czasie jednej sekundy;  $1C = 1A \cdot 1s$ . Ładunek elementarny wyrażony w kulombach wynosi:  $1e = 1.603 \cdot 10^{-19} C$ . Wartość ładunku elementarnego jest tak mała, że w zjawiskach makroskopowych nie zauważamy zwykle tej "ziarnistości" ładunku i traktujemy zmiany ładunków jako zachodzące w sposób ciągły.

Sumaryczny ładunek elektryczny pozostaje stały w dowolnych procesach zachodzących w układach elektrycznie izolowanych, czyli nie wymieniających ładunków z otoczeniem. Fakt ten jest treścią zasady zachowania ładunku.

*Całkowity ładunek układu elektrycznie izolowanego jest stały.*

Ładunki mogą jednak pojawiać się i znikać, czego przykładem są reakcje jądrowe zachodzące przy wysokich energiach, gdzie produkowane są tysiące cząstek naładowanych. W procesach anihilacji para elektron-pozyton zamienia się zaś w nie posiadające ładunku fotony. Procesy te nie są jednak sprzeczne z prawem zachowania ładunku. Prawo to stwierdza bowiem, że sumaryczny ładunek czyli suma ładunków w układzie, liczona z uwzględnieniem ich znaku, pozostaje stała. Jeśli więc produkowane są ładunki o znaku dodatnim, muszą być też produkowane ładunki znaku ujemnego, to samo dotyczy procesów anihilacji.

## 1. Prawo Coulomba

Na początek ważna uwaga: siła oddziaływania wzajemnego ładunków elektrycznych zależy od ośrodka, w którym ładunki te się znajdują. Początkowo zakładając będziemy, że ośrodkiem tym jest próżnia.

Siła oddziaływania wzajemnego ładunków elektrycznych stanowi treść prawa sformułowanego przez Coulomba.

**Siła wzajemnego oddziaływania dwóch, nie poruszających się, ładunków punktowych jest wprost proporcjonalna do iloczynu wartości tych ładunków oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.**

Zapisujemy to następująco:

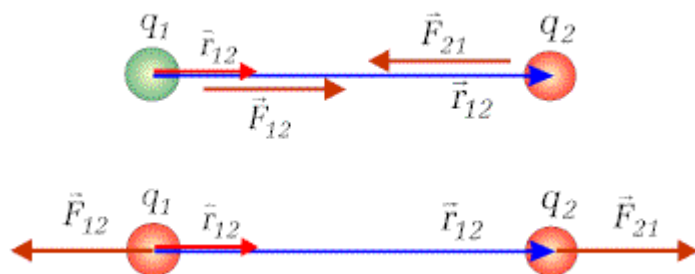
$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (9.1.1)$$

gdzie  $q_1$   $q_2$  to wartości ładunków,  $r$  - odległość między nimi.

Wielkość

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (9.1.2)$$

nosi nazwę przenikalności elektrycznej próżni.



**Rys.9.1.1.** Kierunki sił oddziaływania wzajemnego dwóch ładunków: górna część rysunku - różnoimiennych, dolna część - jednoimiennych. (W górnej części rysunku jedynie dla przejrzystości wektory sił odsunięte są od prostej łączącej ładunki.)

Kierunek wektora siły, której wartość określa prawo Coulomba, zgodny jest z kierunkiem wektora łączącego oba ładunki. Na rysunku 9.1.1 jest to wektor  $\vec{r}_{12}$ , zaznaczony kolorem niebieskim. Kolorem czerwonym zaznaczony jest wektor o kierunku wektora  $\vec{r}_{12}$ .

Zauważamy analogię pomiędzy prawem powszechnej grawitacji, omawianym w wykładzie trzecim, a prawem Coulomba, jeśli iloczyn mas zastąpimy iloczynem ładunków.

Pamiętamy jednak, że w przypadku sił grawitacyjnych mamy do czynienia zawsze z siłą przyciągającą, zaś w przypadku ładunków jednoimiennych siła wzajemnego oddziaływania jest odpychająca, co ilustruje dolna część rysunku 9.1.1. Ponadto, siła grawitacji nie zależy od ośrodka, w którym znajdują się ciała. Siły oddziaływania wzajemnego punktowych ładunków elektrycznych nazywamy często **siłami kulombowskimi**.

Wektor siły oddziaływania wzajemnego dwóch ładunków dla oznaczeń przyjętych na rysunku 9.1.1 możemy więc zapisać w postaci

$$\vec{F}_{12} = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{r}_{12} \qquad \vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{r}_{12} \qquad (9.1.3)$$

Zwróćmy uwagę, że w przypadku ładunków różnoimiennych (zaznaczonych na rysunku 9.1.1 kolorami: zielonym i czerwonym) iloczyn wartości ładunków ma znak ujemny.

Stwierdzono doświadczalnie, że obecność w pobliżu innych ładunków nie ma wpływu na siłę oddziaływania pomiędzy określonymi dwoma ładunkami. Jeśli więc w przestrzeni oprócz danego ładunku  $q_k$  znajduje się  $N$  innych ładunków  $q_i$ , to wypadkowa siła działająca na ten ładunek wyniesie.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ik} \qquad (9.1.4)$$



czyli jest sumą wektorową sił pochodzących od wszystkich  $N$  ładunków.

## 2. Natężenie pola elektrycznego

**Pole elektryczne** wytworzone przez ładunki elektryczne to przestrzeń, w której na umieszczony ładunek działa siła elektryczna. Wartość i kierunek tej siły określa prawo Coulomba. Punktowy ładunek  $q_0$  pozwalający wykryć istnienie pola elektrycznego nazywamy **ładunkiem próbnym**. Przyjmuje się, że jest to ładunek o znaku dodatnim na tyle mały, by wytwarzane przez niego pole było zaniedbywalne w stosunku do pola wytwarzanego przez inne ładunki. Jeżeli ładunki wytwarzające pole są nieruchome, to pole to nazywamy polem elektrostatycznym.

W tym miejscu druga ważna uwaga: rozważania nasze dotyczyć będą z reguły **ładunków punktowych** znajdujących się **w polu elektrostatycznym**. Założenie to przyjmować będziemy dalej bez dodatkowego przypominania. Na inne przypadki będziemy wyraźnie zwracać uwagę w tekście.

**Natężenie pola elektrycznego** jest wektorem określonym jako stosunek siły działającej w danym punkcie pola na punktowy ładunek próbny  $q_0$  do wartości tego ładunku:

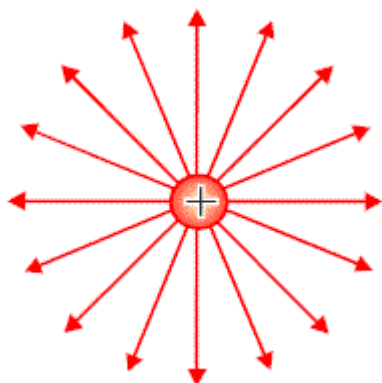
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (9.2.1)$$

czyli jest siłą działającą na umieszczony w danym punkcie przestrzeni ładunek jednostkowy. W przypadku pola wytwarzanego przez ładunek punktowy  $q$  mamy:

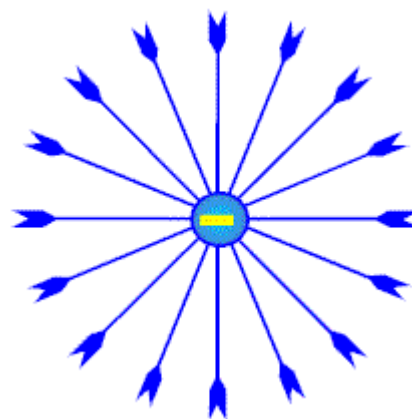
$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (9.2.1a)$$

gdzie  $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$  jest wektorem jednostkowym (wersorem) skierowanym od ładunku wytwarzającego pole do ładunku próbnego.

Pole elektrostatyczne wytworzone przez ładunek punktowy nazywa się często polem kulombowskim. Zapamiętajmy, że natężenie pola kulombowskiego zmienia się z odległością od ładunku będącego źródłem pola jak  $1/r^2$ .



Przyjmuje się, że kierunek natężenia pola pokrywa się z kierunkiem siły działającej na próbny ładunek o znaku dodatnim; patrz rysunek 9.2.1.



*Rys.9.2.1. Kierunki natężenia pola pochodzące od ładunku dodatniego (z lewej) i ujemnego (z prawej).*

Jednostką natężenia pola, wynikającą z definicji, jest w układzie **SI** siła o wartości jednego niutona działająca na ładunek próbny o wartości jednego kulomba, czyli **1N/C**.

Linie styczne do wektorów natężenia pola kulombowskiego (zwane liniami sił pola) będą tworzyły zbiór prostych radialnie wybiegających z punktu (lub wbiegających do punktu), w którym znajduje się ładunek będący źródłem pola. Punkty, w których natężenie pola ma taką samą wartość będą tworzyły powierzchnie sferyczne symetrycznie otaczające ładunek źródłowy. Możemy powiedzieć, że pole kulombowskie pojedynczego ładunku ma symetrię sferyczną.

Kiedy w przestrzeni znajduje się wiele ładunków, wówczas siła działająca na ładunek próbny równa jest sumie wektorowej sił pochodzących od poszczególnych ładunków, co jest konsekwencją wzoru (9.1.4). Fakt ten zwany jest **zasadą superpozycji pól** i wyrażony jest wzorem

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \quad (9.2.2)$$

Traktując element ładunku  $dq$  jako ładunek punktowy możemy pochodzące od niego natężenie pola w punkcie odległym o  $r$  zapisać wzorem

$$dE = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \quad (9.2.3)$$

Pole wypadkowe od ładunków rozłożonych w sposób ciągły otrzymamy z zasady superpozycji pól zastępując sumę we wzorze (9.2.2) całkowaniem

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \quad (9.2.4)$$

gdzie całkowanie wykonuje się po obszarze, w którym rozłożone są ładunki.

W ten sposób każdemu punktowi pola elektrycznego przypisaliśmy wektor określający wartość, kierunek i zwrot natężenia pola w tym punkcie. Dla praktycznego opisu wygodnie

jest posługiwać się pojęciem **linii sił**. Linie te prowadzone są tak, że w każdym punkcie styczna do linii sił pokrywa się z kierunkiem natężenia pola, a liczba linii przypadających na jednostkę powierzchni prostopadłej do linii sił w danym punkcie odpowiada wartości natężenia pola w tym punkcie.

Przykłady obliczeń natężenia pola dla układów ładunków punktowych oraz ładunku rozłożonego w sposób ciągły, omawiane są w części poświęconej zadaniom.

A teraz, jeśli używasz przeglądarki "**Internet Explorer**", możesz sam wygenerować układ linii sił oraz zobaczyć jakie są kierunki i wartości sił działających na ładunek próbny umieszczony w różnych punktach pola. Możesz też zobaczyć położenia tzw. powierzchni ekwipotencjalnych, o których będzie mowa w następnym segmencie tej lekcji. Poniżej zademonstrowany jest przykład dla układu ładunków składającego się z dwóch różnych ładunków dodatnich oraz jednego ujemnego. Aby uruchomić demonstrację, kliknij w polu ilustracji. Aplikacja ta została opracowana przez Twego kolegę, studenta IV-go roku Wydziału Fizyki, specjalności "fizyka komputerowa", pana **Piotra Zarzyckiego** w roku ak. 2001/2002.

**Pole elektrostatyczne układu ładunków punktowych**

Wprowadź liczbę ładunków: (1 do 5)

Wprowadź wartości ładunków: (-5 do -1) lub (1 do 5)

q1  q2  q3

linie sił (wyw.)  pow. ekwip. (wyzwela)  linie sił (dodawaj)

pow. ekwip. (dodawaj)  strzałki

**Uruchomienie demonstracji**

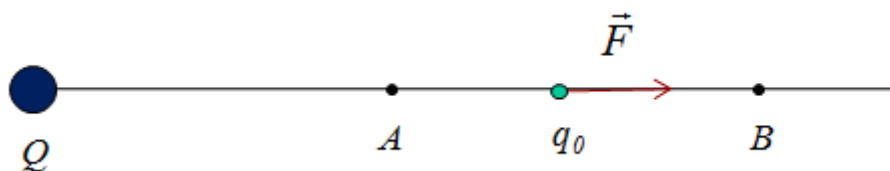
Zaczynamy od ustawiania ładunków na zakratkowanym obszarze po lewej stronie. Wybieramy punkt, gdzie chcemy ustawić ładunek i klikamy lewym przyciskiem myszki. Po ustawieniu wszystkich ładunków program jest gotowy do wizualizacji, która obejmuje:

- linie sił pola:** zaznaczamy kwadracik opisany "linie sił(dodawaj)" i klikamy lewym przyciskiem myszki na punkt, przez który ma przechodzić linia sił pola.
- powierzchnie ekwipotencjalne:** analogicznie, ale zaznaczamy kwadracik "pow. ekwip(dodawaj)"
- siły działające na ładunek próbny:** analogicznie, ale zaznaczamy kwadracik "strzałki"

Autor: Piotr Zarzycki (Student IV roku wydz. Fizyki PW, specjalność: Fizyka Komputerowa, rok ak. 2001/2002)

### 3. Potencjał pola

Obliczmy pracę wykonaną przez siły pola elektrycznego przy przemieszczaniu próbnego ładunku  $q_0$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  w polu elektrycznym wytworzonym przez punktowy ładunek  $Q$  (Rys.9.3.1).



Symbolem  $\vec{F}$  i strzałką brązową oznaczona jest siła działająca na ładunek

$q_0$  ze strony ładunku

$Q$  (Zakładamy, że znaki ładunków są takie same, więc siła  $\vec{F}$  jest odpychająca.)

Odległość punktu  $A$  od środka ładunku  $Q$

wynosi  $r_A$ ; odległość

punktu  $B$  wynosi  $r_B$ .

**Rys.9.3.1.** Przesunięcie ładunku  $q_0$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  w polu elektrycznym ładunku  $Q$ .

Wartość siły działającej na ładunek  $q_0$  ze strony ładunku  $Q$  wynosi:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r^2} \quad (9.3.1)$$

gdzie  $r$  to odległość między ładunkami  $Q$  i  $q_0$ .

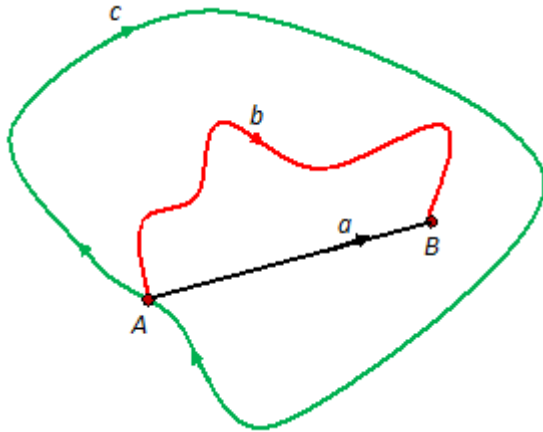
Praca  $dW$  wykonana przez siły oddziaływania elektrostatycznego przy przesunięciu ładunku  $q_0$  o odcinek  $dr$  wynosi więc:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr \quad (9.3.2)$$

Praca sił pola przy przesunięciu ładunku  $q_0$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  wyniesie:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr = -\frac{Q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r_A} - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r_B} \quad (9.3.3)$$

Można wykazać, że praca wykonana przez siły pola elektrycznego przy przemieszczeniu ładunku  $q_0$  z punktu  $A$  do punktu  $B$  nie zależy od kształtu drogi po której odbywało się przemieszczenie i określona jest przez wartości ładunków oraz odległości punktów  $A$  i  $B$  od ładunku wytwarzającego pole.



**Rys.9.3.2.** Praca sił pola elektrycznego podczas przemieszczenia ładunku z punktu  $A$  do punktu  $B$  jest taka sama, gdy przemieszczenie odbywa się po drodze  $a$  i  $b$ . Jeśli początek i koniec przesunięcia pokrywają się (droga  $c$ ), praca równa jest zeru.

Niezależnie od tego, czy przemieszczenie odbywa się po linii prostej, czy po dowolnej krzywej łączącej punkty  $A$  i  $B$  - wykonana praca jest taka sama (Rys. 9.3.2). Kiedy więc położenia obu punktów znajdują się w tej samej odległości od ładunku wytwarzającego pole - wykonana praca wynosi zero, niezależnie od kształtu drogi po której poruszał się ładunek  $q_0$ , choćby nawet droga ta była długa i skomplikowana. Oznacza to, że wykonana praca wynosi zero, kiedy punkt końcowy pokrywa się z punktem początkowym (przemieszczenie po drodze zamkniętej). Pole o takiej właściwości - praca na drodze zamkniętej równa jest zeru - nazywamy **polem zachowawczym**.

Wykonana praca wiąże się wyłącznie ze zmianą położenia - może więc być przyrównana do różnicy energii potencjalnych ładunku  $q_0$  w punktach  $A$  i  $B$ . Wzór (9.3.3) możemy więc zapisać:

$$W = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r_A} - \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r_B} = U_A - U_B \quad (9.3.4)$$

gdzie  $U_A$  - to energia potencjalna ładunku  $q_0$  w punkcie  $A$ ,  $U_B$  - energia potencjalna ładunku  $q_0$  w punkcie  $B$ .

Dodanie lub odjęcie stałej wartości do  $U_A$  i  $U_B$  nie zmienia różnicy  $U_A - U_B$ . Mówimy, że energia potencjalna wyznaczona została z dokładnością do stałej dowolnej

$$U = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r} + const \quad (9.3.5)$$

Z postaci wzoru (9.3.5) widać, że jeżeli  $r = \infty$ , to energia potencjalna równa jest tej stałej tzn.  $U_\infty = const$ . Wtedy jednak znika oddziaływanie elektrostatyczne. Przyjmujemy więc, że stała ta równa jest zeru, a wtedy

$$U = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r} \quad (9.3.6)$$

### (3.1) Potencjał pola

Wyrażenie (9.3.6) określa energię potencjalną ładunku  $q_0$  będącego pod działaniem siły pochodzącej od ładunku  $Q$  znajdującego się w odległości  $r$  od ładunku  $q_0$ . Energia ta równa jest pracy wykonanej przy przemieszczeniu ładunku  $q_0$  z danego punktu pola do nieskończoności. Energia ta również charakteryzuje pole w danym punkcie, jest jednak wciąż zależna od wartości ładunku próbnego.

Podobnie jak w przypadku definicji natężenia pola definiujemy więc inną wielkość charakteryzującą pole, zwaną **potencjałem pola**,  $\varphi$ , w danym punkcie.

$$\varphi = \frac{U}{q_0} \quad (9.3.7)$$

Potencjał jest więc energią potencjalną jednostkowego, punktowego ładunku dodatniego znajdującego się w danym punkcie pola. W przypadku pola wytwarzanego przez ładunek punktowy  $Q$  mamy więc

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad (9.3.8)$$

Mówimy, że pole ładunku punktowego jest polem potencjalnym i potencjał tego pola (zwanego polem kulombowskim) zmienia się z odległością jak  $1/r$ .

Kiedy pole wytwarzane jest przez **układ  $N$  ładunków**, wówczas w konsekwencji zasady superpozycji pól, praca związana z przemieszczeniem ładunku pomiędzy dwoma punktami w tym polu równa jest sumie prac sił pochodzących od poszczególnych ładunków.

$$W = \sum_{i=1}^N W_i \quad (9.3.9)$$

Podobnie, potencjał pola równy będzie:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (9.3.10)$$

co oznacza, że potencjał pola pochodzącego od sumy ładunków równy jest sumie potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków tego układu.

Ze wzoru (9.3.6) wynika, że znając potencjał pola w danym punkcie można wyznaczyć energię potencjalną ładunku  $q$ , który w tym punkcie się znajduje

$$U = \varphi \cdot q \quad (9.3.11)$$

Znając potencjał w dwóch punktach pola można z kolei wyznaczyć pracę sił pola przy przesuwanii ładunku  $q$  pomiędzy tymi punktami

$$W = U_A - U_B = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \quad (9.3.12)$$

Praca ta równa jest iloczynowi ładunku i różnicy potencjałów pomiędzy położeniem początkowym i końcowym tego ładunku. Kiedy punkt końcowy przesuwa się do nieskończoności, gdzie potencjał pola równy jest zeru (wygodnie jest tak przyjąć, gdyż pole w nieskończoności znika), to wykonana praca wynosi

$$W_\infty = U_A = q \cdot \varphi_A \quad (9.3.13)$$

Wynika stąd ważny wniosek

*Potencjał w danym punkcie pola równy jest liczbowo pracy wykonanej przez siły pola przy przesunięciu jednostkowego ładunku dodatniego z tego punktu do nieskończoności.*

Zwróćmy jednak uwagę, że zarówno energia potencjalna, jak i potencjał są określone w sposób względny. Oznacza to, że jako stan odniesienia można wybrać dowolny stan układu fizycznego i można mu arbitralnie przypisać dowolną wartość energii potencjalnej (potencjału). Założenie, że jest to stan, w którym znika oddziaływanie (znika pole) oraz energia potencjalna w tym stanie (potencjał) jest równa zeru, jest stosowane najczęściej.

Jednostką potencjału jest jeden wolt (**1V**). Jest to potencjał w takim punkcie pola, z którego przesunięcie ładunku **1C** do nieskończoności wymaga pracy równej **1J**; czyli **1V=1J/1C**.

W fizyce mikrocząstek za jednostkę energii przyjmuje się bardzo często energię jaką uzyskuje elektron przy przechodzeniu pomiędzy punktami pola o różnicy potencjałów równej **1V**. Taką jednostkę nazywamy elektronowoltem i oznaczamy **1eV**. Z określenia tej jednostki wynika, że **1eV  $\approx$  1,6  $\cdot$  10<sup>-19</sup> C  $\cdot$  V = 1,6  $\cdot$  10<sup>-19</sup> J**

### (3.2) Związek natężenia pola z potencjałem

Praca związana z przemieszczaniem ładunku w polu elektrycznym jest bezpośrednią konsekwencją sił działających na ładunek; siły zaś bezpośrednio wiążą się z natężeniem pola elektrycznego. Stwierdzenia te prowadzą do wniosku, że pomiędzy natężeniem pola i potencjałem musi istnieć określony związek.

Z kursu mechaniki pamiętamy, że wykonanie pracy przez siły potencjalne nad ciałem powoduje ubytek energii potencjalnej ciała (Patrz wzory (2.6.2) i (2.6.3) w wykładzie drugim).

W przypadku pola elektrostatycznego praca wykonana przez siłę  $\vec{F}$  na drodze  $d\vec{p}$  spowoduje zmianę energii potencjalnej  $-dU$ :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{p} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{p} = -dU = -q \cdot d\varphi, \quad (9.3.13)$$

czyli

$$\vec{E} \cdot d\vec{p} = -d\varphi. \quad (9.3.14)$$

Pamiętając o własnościach iloczynu skalarnego wektorów widzimy natychmiast, że kiedy ruch odbywa się w kierunku prostopadłym do kierunku natężenia pola, to zmiana potencjału wynosi zero. Mówimy wtedy, że ruch odbywa się po tzw. **powierzchni ekwipotencjalnej**. Kiedy zaś ruch odbywa się wzdłuż kierunku natężenia pola to zmiana potencjału z tym ruchem związana jest największa. Dla takiego przypadku możemy wzór (9.3.14) zapisać w postaci skalarnej. Niech kierunek wektora natężenia pola będzie zgodny z kierunkiem osi  $X$ , wtedy

$$E \cdot dx = -d\varphi, \quad (9.3.15)$$

z czego wynika, że

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.3.16)$$

Kiedy jednak kierunki wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{p}$  będą dowolne, wówczas dla składowych  $E_x$ ,  $E_y$  i  $E_z$  możemy zapisać analogicznie

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (9.3.17)$$

W postaci wektorowej możemy relacje (9.3.17) zapisać następująco

$$\vec{E} = -\left( \frac{d\varphi}{dx} \cdot \hat{i} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \hat{j} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \hat{k} \right) \quad (9.3.18)$$

Wyrażenie po prawej stronie wzoru (9.3.18) nazywamy gradientem potencjału pola elektrycznego. *Więcej informacji o funkcjach wektorowych znajdziesz [tutaj](#).*

Gradient - wektor, którego składowe są pochodnymi po współrzędnych przestrzennych - jest miarą szybkości, z jaką potencjał zmienia się w przestrzeni. Od szybkości zmian potencjału w przestrzeni, a nie od wartości potencjału zależy natężenie pola. Związane jest to z faktem, że potencjał jest określony z dokładnością do stałej. Możemy przypisać danemu punktowi zupełnie dowolną wartość potencjału (np. 1 000 V), ale jeśli we wszystkich sąsiednich punktach potencjał jest taki sam, to natężenie pola równe jest zero, czyli nie ma w tym obszarze pola elektrycznego.



Zapamiętajmy ważny związek łączący natężenie i potencjał pola.

**Natężenie pola elektrycznego w danym punkcie równe jest gradientowi potencjału pola w tym punkcie, wziętemu ze znakiem minus.**

Związek (9.3.18) umożliwia wyznaczenie natężenia pola, jeśli znamy rozkład jego potencjału i na odwrót - wyznaczenie potencjału jeśli znamy rozkład natężenia pola. Pamiętając, że siłę działającą na ładunek w polu możemy wyrazić przez iloczyn wartości ładunku i natężenia pola, możemy zapisać wyrażenie na pracę sił pola elektrycznego przy przemieszczaniu ładunku pomiędzy punktami A i B w postaci (patrz wzory (9.3.2), (9.3.4) i (9.3.12)):

$$W = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \quad (9.3.19)$$

Dzieląc obustronnie ostatnią równość przez  $q$  otrzymujemy

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (9.3.20)$$

Z wzoru tego wynika ważna zależność

$$\varphi_B = \varphi_A - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9.3.20a)$$

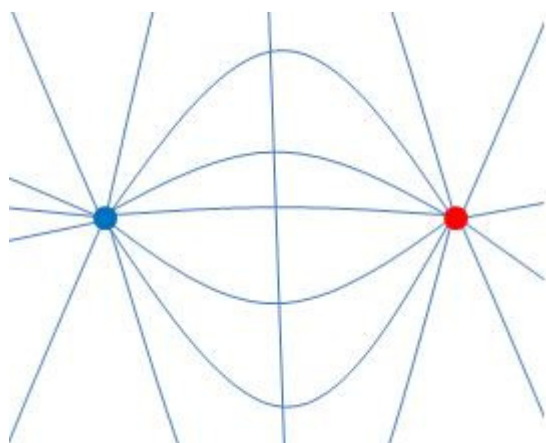
pokazująca wspomnianą już względność pojęcia potencjału.

Mając na uwadze, że praca na odcinku od  $A$  do  $B$  zależy wyłącznie od różnicy potencjałów w tych punktach i nie jest zależna od drogi po której odbywa się przemieszczenie, to dla przemieszczenia po konturze zamkniętej, kiedy punkty  $A$  i  $B$  pokrywają się, mamy

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (9.3.21)$$

Oczywiście zakładamy tu, że w czasie przemieszczenia natężenie pola w poszczególnych punktach nie zmienia się w czasie. Pole takie nazwalibyśmy elektrostatycznym. Wyrażenie po lewej stronie wzoru (9.3.21) nazywamy cyrkulacją wektora natężenia pola. Równanie (2.3.21) stwierdzające, że cyrkulacja wektora natężenia pola po konturze zamkniętej jest równa zero, określa podstawową właściwość pola elektrostatycznego i jest spełnione dla wszystkich pól potencjalnych (posiadających potencjał).

A teraz możesz sam wygenerować układ linii sił dla różnych układów ładunków. Możesz też zobaczyć rozkład potencjału i położenia tzw. powierzchni ekwipotencjalnych.

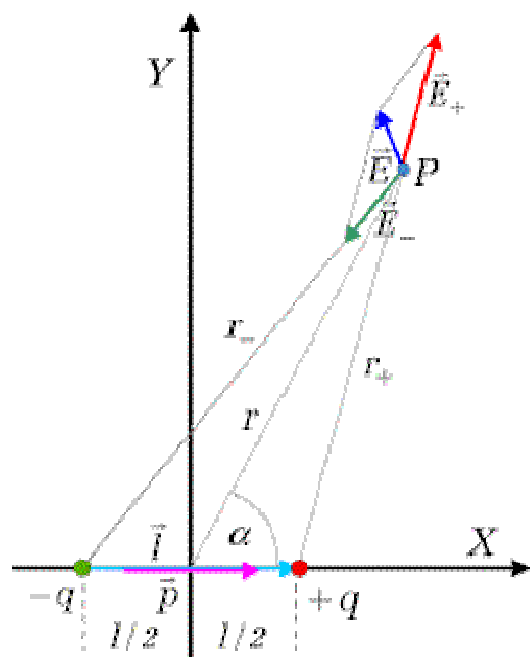


Aby uruchomić demonstrację, kliknij w polu ilustracji.

Autorzy symulacji: Zbigniew Kąkol i Jan Żukrowski, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.

## 4. Dipol elektryczny

Najprostszym przykładem układu ładunków elektrycznych jest układ dwóch ładunków znajdujących się w pewnej stałej odległości od siebie.



Jeśli są to ładunki o takich samych wartościach ale różnych znakach:  $+q$ ,  $-q$  oraz odległość między nimi  $l$  jest dużo mniejsza niż odległość do punktu  $P$ , w których wyznaczmy pole, to układ taki nazywamy **dipolem elektrycznym**; Układ taki pokazany jest na rysunku 1.4.1., gdzie jednak nie są zachowane proporcje dotyczące odległości punktu  $P$ . Punkty, w których znajdują się ładunki, nazywamy **biegunami dipola**. Prosta przechodzącą przez oba ładunki nazywamy **osią dipola** (na rysunku oś ta pokrywa się z osią  $X$ ); wektor łączący oba ładunki i skierowany w kierunku ładunku dodatniego nazywamy **ramieniem dipola** (na rysunku zaznaczony kolorem niebieskim), zaś iloczyn ramienia dipola przez wartość ładunku dodatniego nazywamy **elektrycznym momentem dipolowym**,  $\vec{p}$ . Wektor ten zaznaczony jest na rysunku kolorem różowym

Rys. 9.4.1. Dipol elektryczny

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} \quad (9.4.1)$$

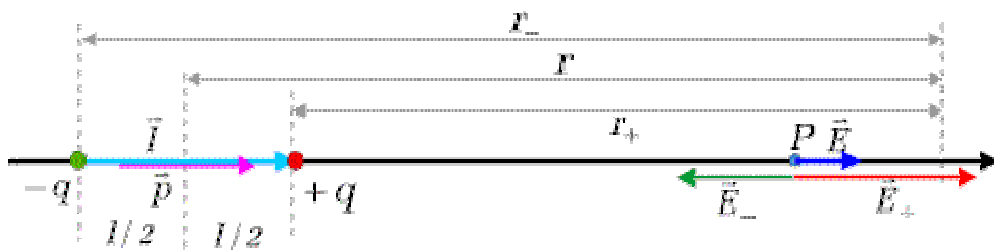
Warto zaznaczyć, że elektryczne własności molekuł dielektryków podobne są do własności dipoli.

Natężenie pola w danym punkcie przestrzeni pochodzące od dipola możemy wyznaczyć korzystając z zasady superpozycji pól tj. sumując natężenia pól pochodzących od obu ładunków.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad (9.4.2)$$

Rozpatrzmy dwie najprostsze sytuacje.

W przypadku gdy rozważany punkt znajduje się na osi dipola, to wektor natężenia pola leży również na tej osi. Ilustruje to rysunek 9.4.2



*Rys. 9.4.2. Natężenie pola elektrycznego w punkcie P leżącym na osi dipola.*

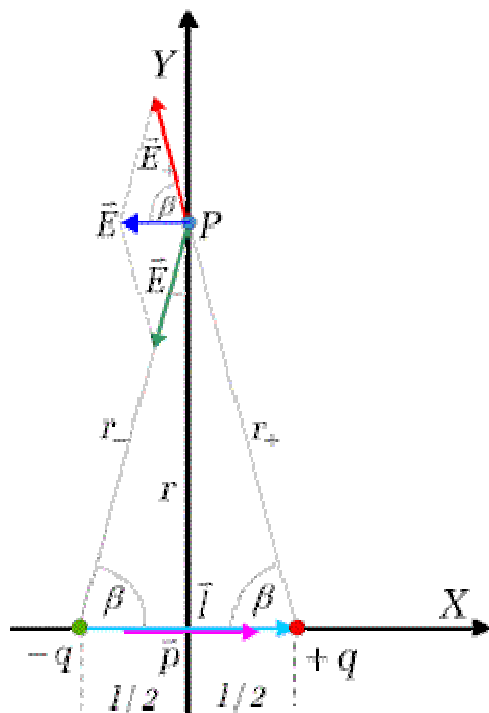
Wektory natężeń pól od ładunku dodatniego i ujemnego leżą na tej samej osi ale są przeciwnie skierowane. Natężenie pola jest więc ich różnicą arytmetyczną; patrz rysunek 9.4.2.

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 \cdot r_-^2} \right) = \\ &= \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{l}{(r_- - r_+) \cdot (r_- + r_+)} \right) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot l \cdot r}{r_+^2 \cdot r_-^2} \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

gdzie przez  $r$  oznaczyliśmy odległość punktu  $P$  od środka dipola. Pamiętając o założeniu, że odległość ta jest znacznie większa od odległości pomiędzy ładunkami, tj.  $r_+ \approx r_- \approx r \gg l$ , otrzymujemy:

$$E \approx \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 r^4} = \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \quad (9.4.4)$$

Drugim szczególnym przypadkiem jest położenie punktu na prostej prostopadłej do osi dipola i przechodzącej przez jego środek. Przypadek ten ilustruje Rys. 9.4.3.



**Rys.9.4.3.** Pole elektryczne dipola na prostej przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego osi

Natężenie pola jest sumą wektorową natężeń pól pochodzących od obu ładunków (wzór 9.4.2). Szczegółowe rachunki [przedstawione oddzielnie](#) prowadzą do wyrażenia na wartość E:

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \quad (9.4.5)$$

Pamiętając znów, że  $r \gg l$  i zanedbując wielkość  $l^2/4$  w porównaniu z  $r^2$  otrzymujemy

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot l}{r^3} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \quad (9.4.6)$$

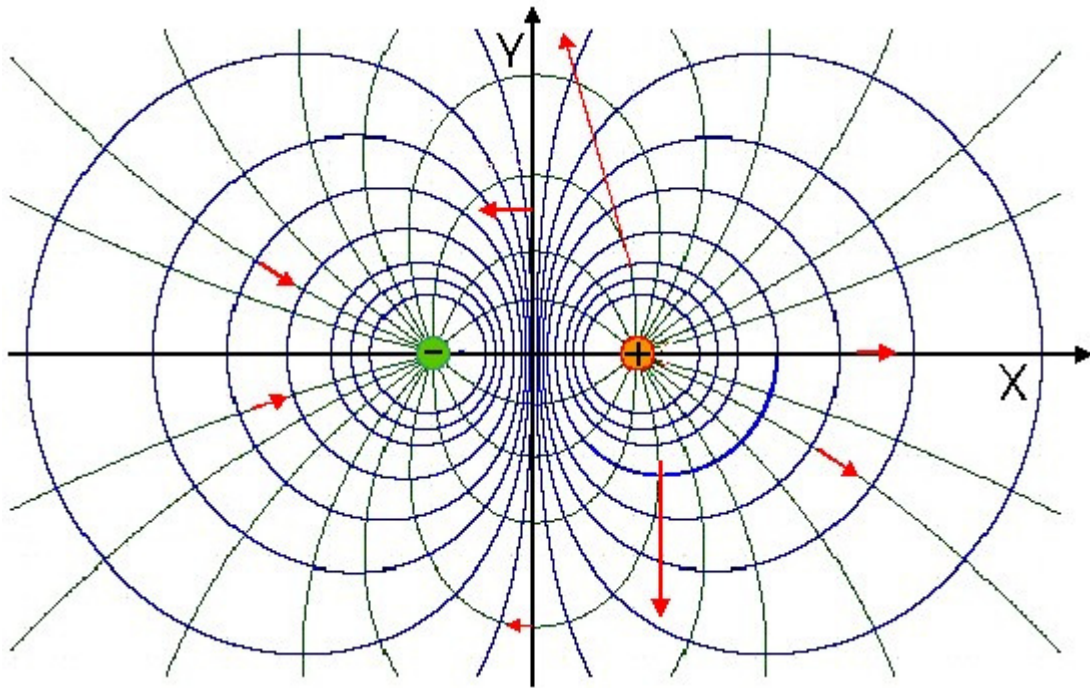
Porównując wzory (9.4.4) i (9.4.5) widzimy, że natężenie pola w punktach jednakowo odległych od środka dipola jest dwukrotnie większe dla punktów leżących na jego osi w stosunku do punktów leżących na prostej prostopadłej do osi dipola i przechodzącej przez jego środek. Zauważmy również, że pole elektryczne pochodzące od dipola zmniejsza się proporcjonalnie do  $1/r^3$  tj. szybciej niż pole pochodzące od ładunku punktowego, które zmniejsza się jak  $1/r^2$ . Nic dziwnego, sumaryczny ładunek dipola wynosi zero.

Dla kompletności podamy jeszcze bez wyprowadzania wzór na pole dipola w dowolnym punkcie, którego położenie określa odległość  $r$  i kąt  $\alpha$ , zgodnie z rysunkiem 9.4.1.

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (9.4.7)$$

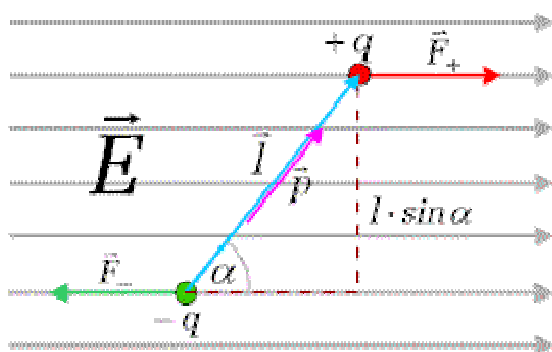
Dla kąta  $\alpha$  równego 0 i 90 stopni wzór ten przechodzi odpowiednio we wzory (9.4.4) i (9.4.6).

Dla ilustracji, na rysunku 9.4.4 pokazane są linie sił pola dla dipola elektrycznego oraz prostopadłe do nich linie odpowiadające przecięciu powierzchni ekwipotencjalnych z płaszczyzną XY. Dla kilku punktów pokazane są też wektory natężenia pola, które zawsze są styczne do linii sił pola.



Rys.9.4.4. Dipol elektryczny i wytworzone przez niego pole elektryczne.

Spróbuj także sam określić kierunek i oszacować wartość natężenia pola w innych punktach.



Na dipol umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym działa para sił, której moment wynosi (patrz rysunek 9.4.5)

$$M = E \cdot \frac{p}{q} \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (9.4.8)$$

co w postaci wektorowej można zapisać jako

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (9.4.9)$$

Moment sił będzie więc powodował obrót dipola tak, by jego oś ustawiona była wzdłuż linii sił pola elektrycznego ( $\alpha = 0$ ). Wtedy  $\vec{M} = \mathbf{0}$  i wektor momentu dipolowego  $\vec{p}$  będzie równoległy do wektora  $\vec{E}$ .

Rys.9.4.5. Dipol w polu elektrycznym

## 5. Ruch cząstki naładowanej w polu elektrycznym

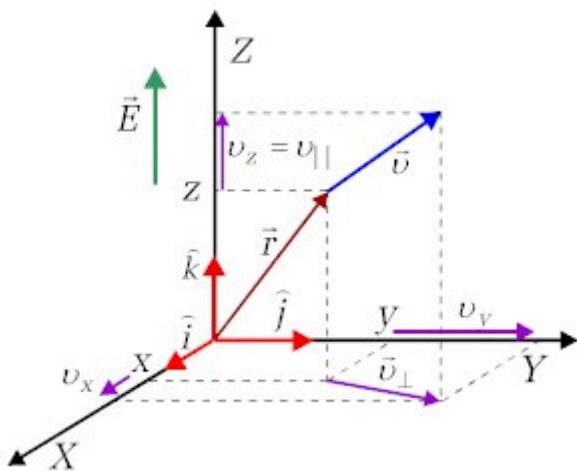
Jak wiemy, siła  $\vec{F}$  działająca na ładunek  $q$  umieszczony w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  określona jest wzorem.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (9.5.1)$$

gdzie znak ładunku może być dodatni bądź ujemny. Kierunek siły zgodny jest z kierunkiem wektora natężenia pola, a zwrot zależy od znaku ładunku.

Zapiszmy równania Newtona dla tego przypadku. Pamiętajmy, że  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , gdzie  $m$  jest masą cząstki, a  $\vec{a}$  jest jej przyspieszeniem. Z kolei, przyspieszenie jest drugą pochodną wektora położenia  $\vec{r}$  i pierwszą pochodną wektora prędkości względem czasu. Wektory te mogą mieć dowolną orientację w przestrzeni. Równanie ruchu ma więc postać.

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q \cdot \vec{E} \quad (9.5.2)$$



Określmy warunki początkowe dla naszego przypadku. Przyjmijmy, że wektor natężenia pola skierowany jest wzdłuż osi  $Z$ , czyli jego składowe  $(E_x, E_y, E_z)$  można zapisać jako  $(0, 0, E)$ . Składowe wektora położenia i prędkości przyjmijmy za dowolne i oznaczmy je dla chwili czasu  $t = 0$  symbolami  $(x_0, y_0, z_0)$  oraz  $(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ . Ilustruje to rysunek 9.5.1.

**Rys.9.5.1** Wektory: położenia, prędkości i pola elektrycznego

Równania Newtona dla poszczególnych składowych oraz ich rozwiązania mają więc postać.

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= m \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv_z}{dt} = q \cdot E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v_x &= v_{x0} \\ v_y &= v_{y0} \\ v_z &= \frac{q \cdot E}{m} \cdot t + v_{z0} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= v_{x0} \cdot t + x_0 \\ y &= v_{y0} \cdot t + y_0 \\ z &= \frac{q \cdot E}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{z0} \cdot t + z_0 \end{aligned} \right. \quad (9.5.3)$$

Zauważamy, że ruch w każdym z kierunków jest niezależny od ruchów w kierunkach pozostałych. Jeśli więc wszystkie prędkości początkowe równe będą zero, to ruch będzie odbywał się tylko w kierunku zgodnym z kierunkiem wektora natężenia pola, czyli w naszym przypadku w kierunku osi  $Z$ . Będzie to ruch jednostajnie przyspieszony, jednowymiarowy. Przyspieszenie w tym ruchu zapisać więc można w postaci skalarnej

$$a = \frac{q \cdot E}{m} \quad (9.5.4)$$

bowiem kierunek przyspieszenia w tym ruchu jest także wielkością stałą.

Jeśli ładunek cząstki jest ujemny, to ruch będzie odbywał się w kierunku przeciwnym do kierunku wektora  $\vec{E}$ . Jeśli dodatkowo w chwili  $t = 0$  składowa prędkości w kierunku  $Z$  była nierówna zero i dodatnia to ruch będzie ruchem jednostajnie opóźnionym aż do momentu kiedy ujemny przyrost prędkości będzie równy prędkości początkowej, czyli kiedy  $t = v_{z0} \cdot m / (q \cdot E)$ . Jeśli w chwili  $t = 0$  składowa prędkości w kierunku  $X$  była nierówna zero, to ruch w tym kierunku będzie ruchem jednostajnym, prostoliniowym, a cząstka poruszać się będzie w płaszczyźnie  $(X,Z)$  - będzie to więc ruch płaski. Zwróćmy też uwagę, że przyspieszenie w tym ruchu określa czynnik  $q \cdot E / m$  wyrażający proporcjonalność przyspieszenia cząstki do wartości natężenia pola i ładunku cząstki i odwrotną proporcjonalność do jej masy.

Rozważania nasze możesz teraz sprawdzić samemu za pomocą przygotowanego w tym celu **interaktywnego testu graficznego**.

Rozważmy bliżej ruch elektronu w polu elektrycznym. Ładunek elektronu wynosi (porównaj z tablicami stałych fizycznych)  $q_e = 1.602\ 177\ 33 \cdot 10^{-19}\ C$ , a jego masa  $m_e = 9.109\ 389\ 7 \cdot 10^{-31}\ kg$ ; stosunek ładunku elektronu do jego masy wynosi  $q_e / m_e = 1.75881962 \cdot 10^{11}\ C/kg$ . Natężenie pola wyrazić możemy w niutonach na kulomb lub, co jest równoważne, w woltach na metr. Wymiar wyrażenia  $q \cdot E / m$  jest więc  $C \cdot \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{kg} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{1}{kg} = \frac{m}{s^2}$ . W układzie SI wyrażenie to możemy więc zapisać dla elektronu w postaci

$$E \cdot \frac{q_e}{m_e} = E \cdot 1.75881962 \cdot 10^{11} \frac{m}{s^2} = E \cdot 1.75881962 \cdot 10^{-7} \frac{m}{ns^2} \quad (9.5.5)$$

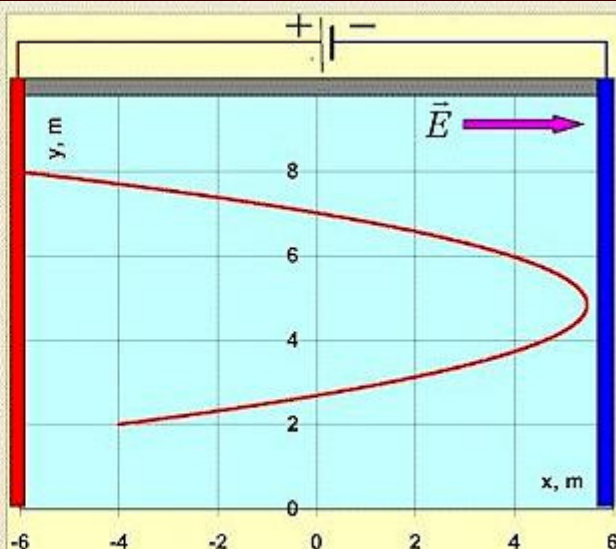
Wyraziliśmy to w metrach na nanosekundę do kwadratu, bo w praktycznych zastosowaniach wygodniej będzie wyrażać czas ruchu elektronu w nanosekundach.

<b>MS-Excel</b>	<b>Interaktywny test graficzny</b>	<b>Kliknij w polu rysunku.</b>
-----------------	------------------------------------	--------------------------------

## Ruch cząstki naładowanej w polu elektrycznym

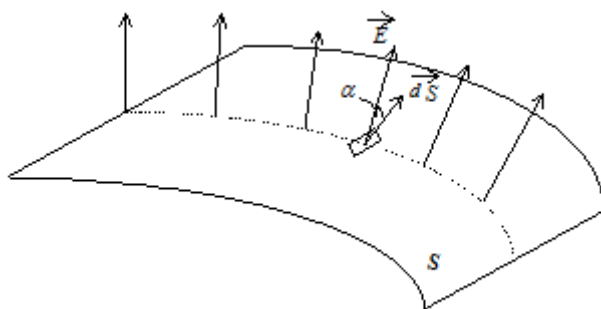
$$\text{Siła : } \vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Masa (w jednostkach masy elektronu)	$m =$	1	
Ładunek (w jednostkach ładunku elementarnego)	$q =$	-1	
Natężenie pola elektr.	$E =$	3000	V/m
Składowa X prędkości	$v_{x0} =$	0,1	m/ns
Składowa Y prędkości	$v_{y0} =$	0,015	m/ns
Położenie początkowe X	$x_0 =$	-4	m
Położenie początkowe Y	$y_0 =$	2	m
czas obserwacji	$t_0 =$	400	ns



Rys.9.5.2. Przykład ruchu cząstki w polu elektrycznym.

## 6. Prawo Gaussa



Rys.9.6.1. Strumień wektora natężenia pola elektrycznego  $E$  przez powierzchnię  $dS$ .

### Strumień wektora natężenia pola elektrycznego

Porcję strumienia wektora natężenia pola elektrycznego  $d\Phi_E$  przez mały element powierzchni  $dS$  (tak mały, że może być traktowany jako płaski, a natężenie pola w jego obrębie jest wektorem stałym) definiujemy jako skalarny iloczyn wektora natężenia pola i wektora prostopadłego do tego elementu powierzchni, o wartości równej polu powierzchni  $dS$ :

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (9.6.1)$$

Wartość strumienia wektora natężenia pola elektrycznego przez całą powierzchnię  $S$ , którą obliczamy przez zsumowanie porcji strumienia przez poszczególne elementy powierzchni  $dS$ , jest równa liczbie linii sił pola przecinających tę powierzchnię. W najprostszym przypadku, gdy pole elektryczne jest jednorodne, strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez płaszczyznę o powierzchni  $S$  jest równy:

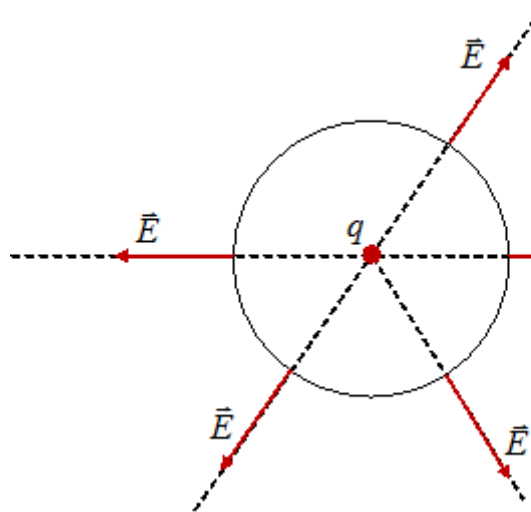
$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (9.6.2)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między wektorem



natężenia pola elektrycznego i normalną do powierzchni.

Strumień wektora natężenia jednorodnego pola przez powierzchnię prostopadłą do linii sił pola równy jest iloczynowi natężenia pola i polu powierzchni:  $\Phi_E = E \cdot S$ . W przypadku powierzchni równoległej do linii sił pola (linie sił nie przebijają powierzchni) strumień równy jest zeru.



Obliczmy strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą otaczającą punktowy ładunek elektryczny (Rys. 9.6.2). Wybierzmy powierzchnię kuli, w której środku znajduje się ładunek punktowy wytwarzający pole. Wektor natężenia pola elektrycznego w każdym punkcie wybranej powierzchni jest jednakowy i prostopadły do powierzchni. Strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez element powierzchni  $dS$  wynosi więc:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{E}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS \quad (9.6.3)$$

Aby obliczyć strumień natężenia pola przez całą powierzchnię kulistą, należy scałkować to wyrażenie:

Rys.9.6.2. Strumień pola elektrycznego ładunku punkowego  $q$  przez powierzchnię kulistą.

$$\Phi_E = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 \quad (9.6.4)$$

Całka po powierzchni kuli równa jest powierzchni kuli:  $\oint_S dS = 4\pi r^2$

Otrzymaliśmy ważny wzór, który mówi, że strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię otaczającą ładunek jest proporcjonalny do tego ładunku:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (9.6.5)$$

Możemy ten wzór uogólnić dla dowolnej powierzchni zamkniętej, obejmującej ładunek punktowy  $q$ .

Kiedy wewnątrz danej powierzchni zamkniętej znajduje się wiele ładunków punktowych, to zgodnie z zasadą superpozycji pól mamy dla  $n$  ładunków

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \quad (9.6.6)$$

Przez  $\vec{E}_i$  oznaczyliśmy pole pochodzące od ładunku o numerze  $i$ . Mając na uwadze, że każda z całek po prawej stronie wzoru (9.6.6) równa jest  $q_i / \epsilon_0$  otrzymujemy

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (9.6.7)$$

Wzór (9.6.7) zawiera w sobie treść **prawa Gaussa** dla natężenia pola elektrycznego.

**Strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą równy jest sumie ładunków obejmowanych przez tę powierzchnię, podzielonej przez  $\epsilon_0$**

Zwróćmy uwagę, że kiedy suma ładunków wewnątrz powierzchni równa jest zeru, lub kiedy zamknięta powierzchnia nie obejmuje żadnego ładunku, to wówczas strumień równy jest zeru.

Kiedy mamy do czynienia z ciągłym rozkładem ładunków w danej objętości  $V$ , możemy zdefiniować gęstość ładunku  $\rho$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (9.6.8)$$

gdzie  $dq$  jest ładunkiem zawartym w elemencie objętości  $dV$ . Całkowity ładunek wyznaczymy całkując gęstość ładunku po objętości  $V$

$$\sum q_i = \int_V \rho \cdot dV \quad (9.6.9)$$

Zależność (9.6.7) można dla przypadku ładunków o rozkładzie ciągłym zapisać więc w postaci

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho \cdot dV \quad (9.6.10)$$

### Przykład:

Wykorzystajmy prawo Gaussa do obliczenia natężenia pola w punktach znajdujących się na zewnątrz i wewnątrz powierzchni kulistej (sfery) o promieniu  $R$  naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową  $\sigma$ . Niech  $r$  będzie odległością punktu od środka naładowanej powierzchni kulistej. Ze względu na symetrię sferyczną wektor natężenia pola jest w każdym

punkcie skierowany wzdłuż promienia, a wartość natężenia pola jest jednakowa dla równoodległych od środka sfery punktów. Prawo Gaussa możemy w tym przypadku zapisać dla punktu **na zewnątrz** naładowanej powierzchni w postaci skalarnej:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (9.6.11)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot \overbrace{4 \cdot \pi \cdot r^2}^{S_r} = \overbrace{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma}^q / \epsilon_0$$

We wzorze (9.6.11) najpierw skorzystaliśmy z faktu, że kierunek wektora natężenia pola pokrywa się z kierunkiem normalnej do powierzchni sferycznej (zamieniając iloczyn skalarny wektorów iloczynem ich wartości), następnie wiedząc, że natężenie pola jest stałe dla stałej odległości od środka powierzchni kulistej, wyłączyliśmy  $E$  przed znak całki, potem wykonaliśmy całkowanie po powierzchni o promieniu  $r$ , co dało po prostu powierzchnię sfery  $S_r$ . Wreszcie ostatnia równość jest zapisem prawa Gaussa, gdzie gęstość powierzchniowa  $\sigma$  pomnożona przez pole sfery o promieniu  $R$  jest całkowitym ładunkiem zgromadzonym na powierzchni tej sfery. Natężenie pola na zewnątrz sfery wyraża się więc wzorem

$$E = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \epsilon_0} \quad (9.6.12)$$

Dla punktów znajdujących się w odległości mniejszej niż  $R$  od środka naładowanej powierzchni kulistej natężenie pola musi być równe zero, bowiem **wewnątrz sfery** o promieniu mniejszym niż  $R$  nie ma po prostu żadnego ładunku.

Kiedy **ładunek rozłożony jest jednorodnie w całej objętości kuli**, nie tylko na powierzchni, z gęstością objętościową  $\rho$  to stosując bezpośrednio wzór (9.6.10) dla dowolnego punktu wewnątrz kuli, otrzymujemy

$$\overbrace{4 \cdot \pi \cdot r^2}^{S_r} \cdot E = \overbrace{(4/3) \cdot \pi \cdot r^3}^{V_r} \cdot \rho / \epsilon_0 \quad (9.6.13)$$

skąd otrzymujemy natychmiast wyrażenie na natężenie pola wewnątrz kuli w punkcie odległym o  $r$  od jej środka

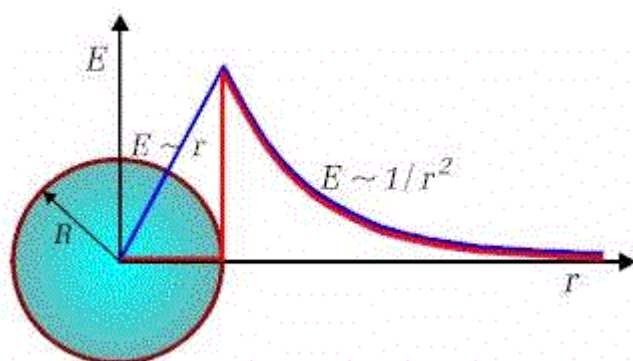
$$E = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \quad (9.6.14)$$

Natężenie pola na zewnątrz kuli otrzymamy identycznie jak dla powierzchni sferycznej zastępując tylko powierzchniową gęstość ładunku, gęstością objętościową. Całkowity ładunek

kuli jest wtedy równy  $q = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho$ .

Uzyskaliśmy szereg ważnych rezultatów mówiących, że natężenie pola elektrycznego:

1. wewnątrz naładowanej powierzchni kulistej równe jest zeru, zaś na zewnątrz jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od jej środka ,
2. wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli jest proporcjonalne do odległości od jej środka,
3. na zewnątrz kuli jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od jej środka , co odpowiada sytuacji, jakby cały ładunek był skupiony w środku kuli.
4. pola na zewnątrz kuli i powierzchni kulistej są identyczne, jeśli ten sam ładunek zgromadzony jest w obu przypadkach.



Zależności te zilustrowane są na rysunku 9.6.3. gdzie pokazana jest zależność natężenia pola elektrycznego od odległości punktu w którym wyznaczamy pole od środka kuli. Kolorem **czzerwonym** pokazana jest ta zależność dla naładowanej powierzchni kulistej i kolorem **niebieskim** dla jednorodnie naładowanej kuli.

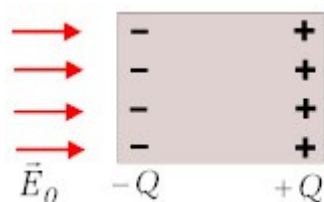
*Rys. 9.6.3. Natężenie pola elektrycznego od naładowanej powierzchni kulistej i jednorodnie naładowanej kuli*

W obu przypadkach natężenie pola na zewnątrz kuli jest takie, jakby było wytworzone przez ładunek punktowy umieszczony w środku kuli. Ze spostrzeżenia tego wynika, że prawo Coulomba opisuje oddziaływanie nie tylko ładunków punktowych, ale również ładunków o rozkładzie kulistosymetrycznym.

## 7. Przewodniki w polu elektrycznym

**Przewodniki to materiały, w których ładunki elektryczne mogą swobodnie się przemieszczać.** W metalach ładunkami tymi są elektrony zwane walencyjnymi, które mogą poruszać się łatwo w całej objętości. Wyróżnić można tu dwa przypadki.

1.) Kiedy neutralny przewodnik znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym wówczas na swobodne elektrony działają siły proporcjonalne do natężenia pola.



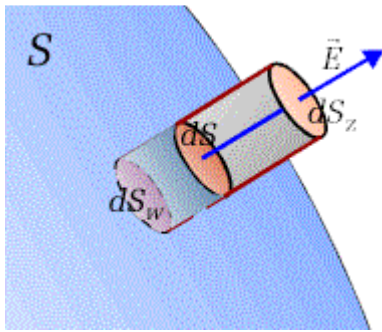
*Rys.9.7.1. Przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym*

W rezultacie następuje przegrupowanie ładunków aż do momentu, kiedy działające na ładunki siły znikają, czyli natężenie pola w dowolnym punkcie wewnątrz przewodnika staje się równe zero. Zjawisko to nazywamy indukcją elektrostatyczną, a ładunek pojawiający się na powierzchni przewodnika - **ładunkiem zaindukowanym** (indukcyjnym).

Pole elektryczne wytworzone przez przegrupowane ładunki znosi się z polem wnikającym do przewodnika. Po usunięciu zewnętrznego pola elektrycznego ruch cieplny powoduje powrót do równomiernego rozkładu elektronów w przewodniku

2.) Ładujemy elektrycznie neutralny przewodnik znajdujący się w przestrzeni bez pola elektrycznego, wprowadzając nań ładunek z zewnątrz. Na powierzchni naładowanego przewodnika wektor natężenia pola musi być prostopadły do powierzchni, gdyż w przeciwnym razie składowa styczna do powierzchni powodowałaby przemieszczanie się ładunków w przewodniku. W konsekwencji, zarówno objętość przewodnika jak i jego powierzchnia stanowią obszary ekwipotencjalne, a nierównoważone ładunki elektryczne wprowadzone na przewodnik, rozłożone są jedynie na powierzchni przewodnika.

Jakie będzie natężenie pola w pobliżu powierzchni przewodnika? Skorzystajmy w tym celu z twierdzenia Gaussa. Niech gęstość ładunku zaindukowanego przez pole zewnętrzne lub wprowadzonego na przewodnik wynosi na powierzchni przewodnika  $\sigma$ .



*Rys.9.7.2. Natężenie pola w pobliżu przewodnika łatwo znaleźć stosując prawo Gaussa.*

Wydzielmy na powierzchni  $S$  przewodnika element  $dS$  i mały cylinder zamknięty ściankami  $dS_z$  i  $dS_w$ . Pierwsza z nich jest na zewnątrz przewodnika, druga jest wewnątrz, a ich powierzchnie równe są  $dS$ . Cylinder ten przecina powierzchnię przewodnika jak to pokazano na rysunku 9.7.2. Zauważmy, że strumień natężenia pola przez powierzchnię cylindra ogranicza się do ścianki zewnętrznej cylindra  $dS_z$ , bowiem wewnątrz przewodnika natężenie pola równe jest zero, a kierunek wektora  $\vec{E}$  pokrywa się z osią cylindra, czyli strumień przez ściankę boczną równy jest także zero.

Na podstawie prawa Gaussa (wzór 9.6.5) możemy napisać dla naszego przypadku

$$d\Phi = E \cdot dS_z = E \cdot dS = \frac{dq}{\epsilon_0} \quad (9.7.1)$$

Wynika z tego, że

$$E = \sigma / \epsilon_0 \quad (9.7.2)$$

Natężenie pola w pobliżu powierzchni przewodnika na której znajduje się ładunek jest proporcjonalne do powierzchniowej gęstości ładunku.

Kiedy przewodnik ma nieregularny kształt wówczas gęstość ładunku na powierzchni nie jest jednakowa, ale jest odwrotnie proporcjonalna do lokalnego promienia krzywizny powierzchni. Na ostrych zakończeniach przedmiotów metalowych gęstość ładunku jest więc szczególnie duża. Rzeczywiście, w pobliżu takich miejsc powierzchnie ekwipotencjalne zbliżają się i zakrzywiają, odzwierciedlają bowiem w pobliżu przewodnika jego kształt. Duże zmiany potencjału oznaczają dużą wartość natężenia pola, patrz wzór (9.3.18), zaś duże

natężenie pola odpowiada dużej gęstości powierzchniowej ładunku, wzór (9.7.2). Z kolei na elementach powierzchni o dużym promieniu krzywizny (wypłaszczonych) gęstość ładunku jest najmniejsza, zaś na wewnętrznych powierzchniach wydrążonych przedmiotów metalowych gęstość ładunku wynosi zero. Tak więc ładunek (zaindukowany polem zewnętrznym lub wprowadzony na przewodnik poprzez jego naładowanie) rozkłada się na jego powierzchni zewnętrznej z gęstością odwrotnie proporcjonalna do lokalnego promienia krzywizny powierzchni.

Kiedy przewodnik ma postać pustej w środku kuli wówczas przekazywane mu ładunki gromadzą się na jego zewnętrznej powierzchni. Zostało to pomysłowo wykorzystane w budowie generatora wysokiego napięcia Van de Graaffa. Uproszczony schemat tego generatora i jego zasada działania przedstawione są oddzielnie.

Fakt znikania pola elektrycznego wewnątrz przewodnika (lub w obszarze otoczonym przewodnikiem) ma znaczenie praktyczne. Występuje tu bowiem efekt "ekranowania" czyli pozbycie się wpływu zewnętrznych pól elektrycznych.

## 8. Pojemność elektryczna

Potencjał przewodnika proporcjonalny jest do zgromadzonego na nim ładunku. Rzeczywiście, oddalanie bądź przybliżanie od/do naładowanego przewodnika innych ładunków wiąże się z wykonaniem pracy. Praca ta jest tym większa im większe jest natężenie pola w punkcie, do którego ładunek jest przemieszczany. Natężenie pola w pobliżu przewodnika proporcjonalne jest do gęstości powierzchniowej ładunku. Gęstość ta proporcjonalna jest do całkowitego zgromadzonego ładunku, ale zależy również od rozmiarów i kształtu przewodnika. Związek proporcjonalności pomiędzy ładunkiem zgromadzonym w przewodniku i jego potencjałem zapisujemy w postaci.

$$\varphi = \frac{1}{C} \cdot q \quad (9.8.1)$$

Współczynnik proporcjonalności  $1/C$  charakteryzuje własności przewodnika, zaś  $C$  nazywamy jego pojemnością elektryczną. Ze wzoru (9.8.1) wynika bezpośrednio definicja pojemności elektrycznej odosobnionego przewodnika (tj. przewodnika, w którego otoczeniu nie ma innych ciał przewodzących lub nieprzewodzących). Określona wartość pojemności oznacza, że stosunek ładunku wprowadzonego na przewodnik do potencjału wytworzonego na jego powierzchni jest stały

$$\frac{q}{\varphi} = \text{const} = C \quad (9.8.2)$$

zaś  $C$  zależy od kształtu i rozmiarów przewodnika określając jego zdolność do gromadzenia ładunku elektrycznego. Jeśli więc zmiana zgromadzonego w przewodniku ładunku o jednostkową wartość ( $1C$ ) odpowiada zmianie jego potencjału także o jednostkową wartość ( $1V$ ), to mówimy, że pojemność tego przewodnika równa jest jednej jednostce pojemności. Jest nią jeden farad ( $1F$ ). Farad jest dużą jednostką. Pojemności typowych elementów

układów elektronicznych są znacznie mniejsze tj. rzędu  $\mu F = 10^{-6} F$  lub nawet  $pF = 10^{-12} F$ .

Jako przykład wyznaczmy pojemność przewodnika kulistego o promieniu  $R$ . W tym celu przyjmijmy, że kula ta naładowana jest ładunkiem  $q$  oraz, że nie jest pod działaniem zewnętrznego pola elektrycznego. W rozdziale 9.6 wykazaliśmy, że pole wytwarzane przez ładunek  $q$  rozłożony jednorodnie na kuli jest identyczne z polem ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w środku kuli. Podstawiając do definicji (9.8.2) wzór na potencjał pola ładunku punktowego  $q$  w odległości  $R$  od niego

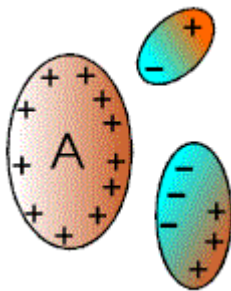
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (9.8.3)$$

otrzymujemy wyrażenie na pojemność kuli:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R \quad (9.8.4)$$

Widzimy, że pojemność elektryczna przewodnika nie zależy od materiału z jakiego jest wykonany, a jedynie od geometrii jego powierzchni zewnętrznej, decydującej o rozkładzie przestrzennym ładunku - w tym przypadku od promienia kuli  $R$ .

Kiedy jednak przewodnik jest pod działaniem zewnętrznego pola elektrycznego jego potencjał ulega zmniejszeniu.



**Rys.9.8.1.**  
*Pojemność układu przewodników*

Można to zilustrować przykładem. Kiedy do naładowanego przewodnika  $A$  zbliżamy inne przewodniki to indukowany w nich ładunek przeciwnego znaku po stronie naładowanego przewodnika spowoduje osłabienie wytwarzanego przez ten przewodnik potencjału. Zmniejszenie potencjału przy tym samym ładunku oznacza zaś zwiększenie pojemności.

Układ przewodników o stosunkowo dużych powierzchniach położonych blisko siebie może gromadzić znaczne ładunki elektryczne. Układ dwóch przewodników mających równe różnoimienne ładunki nazywamy **kondensatorem**. Kształt kondensatorów jest zwykle taki, by pole skupione było pomiędzy bliskimi sobie powierzchniami, zwanymi okładkami, i było zawarte wewnątrz kondensatora.

Pojemność kondensatora wynikająca z definicji pojemności odosobnionego przewodnika (9.8.2) jako pojemność wzajemna dwóch przewodników określona jest przez ładunek gromadzony na jednej z okładek kondensatora przy danej różnicy potencjałów pomiędzy jego okładkami (całkowity ładunek gromadzony na kondensatorze to :  $+q +(-q)=0$ )

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} \quad (9.8.5)$$

gdzie przez  $U$  oznaczyliśmy różnicę potencjałów

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (9.8.6)$$

Zapišmy wzór na pojemność kondensatora płaskiego złożonego z dwóch jednakowych okładek o powierzchniach równych  $S$  i odległości pomiędzy nimi równej  $d$ . Jeżeli na każdej z okładek zgromadzony jest ładunek o wartości bezwzględnej  $q$ , to natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami będzie zgodnie ze wzorem (9.7.2)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S} \quad (9.8.7)$$

Przyjmując, że pole to jest jednorodne możemy na podstawie wzoru (9.3.20) napisać:

$$E \cdot d = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot d = \varphi_1 - \varphi_2 = U \quad (9.8.8)$$

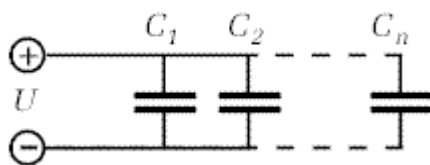
Stąd zgodnie z definicją pojemności kondensatora (9.8.5) mamy

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d} \quad (9.8.9)$$

Widzimy, że pojemność kondensatora płaskiego jest tym większa im większa jest powierzchnia jego okładek oraz im mniejsza jest odległość między nimi. W dalszej części kursu zobaczymy, że pojemność kondensatora zależy także od rodzaju dielektryka umieszczonego między okładkami.

Kondensatory możemy łączyć na dwa sposoby: równoległe bądź szeregowo.

### Równoległe połączenie kondensatorów ( jednakowe $U$ )



Kiedy łączymy kondensatory równoległe, jak na rysunku 9.8.2, to napięcie na wszystkich kondensatorach jest jednakowe. Ładunek zgromadzony na każdym z nich będzie natomiast zgodnie ze wzorem (9.8.5) iloczynem pojemności danego kondensatora i przyłożonego napięcia tzn.:

**Rys.9.8.2.** Układ kondensatorów połączonych równoległe

$$q_1 = U \cdot C_1, \quad q_2 = U \cdot C_2, \dots, \quad q_n = U \cdot C_n \quad (9.8.10)$$

Całkowity ładunek jest sumą ładunków zgromadzonych na wszystkich kondensatorach, czyli

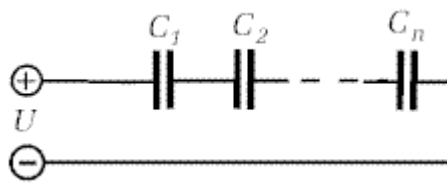
$$q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \cdot U = \left( \sum_{i=1}^n C_i \right) \cdot U = C \cdot U \quad (9.8.11)$$



Pojemność sumaryczna kondensatorów połączonych równoległe jest sumą ich pojemności, czyli

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (9.8.12)$$

### Szeregowe połączenie kondensatorów ( jednakowe $q$ )



Kiedy kondensatory połączone są szeregowo, to suma napięć na nich równa jest  $U$ , a ładunek każdego z nich jest taki sam, jako rezultat rozdzielenia ładunku pomiędzy okładkami dwóch sąsiadujących kondensatorów wskutek zjawiska indukcji elektrostatycznej. Napięcie  $i$ -tego kondensatora jest równe  $U_i = q/C_i$ . Mamy więc:

*Rys.9.8.3. Układ kondensatorów połączonych szeregowo*

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{q}{C} \quad (9.8.13)$$

Pojemność kondensatorów połączonych szeregowo wynosi więc

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (9.8.14)$$

Pojemność ta jest mniejsza od najmniejszej pojemności w układzie.

## 9. Pole elektryczne w dielektrykach

W odróżnieniu od przewodników - **dielektryki** - to materiały, w których ładunki elektryczne **nie mogą** swobodnie się przemieszczać. Mówimy, że ładunki elektryczne w dielektrykach są "zlokalizowane". Nie oznacza to, że ładunki w dielektryku są całkowicie nieruchome. Właśnie pewne przesunięcia ładunków i zmiana orientacji układu ładunków w atomach dielektryków pod wpływem pola elektrycznego jest przyczyną ich ciekawych własności elektrycznych.

Omawiając zagadnienia dotyczące pojemności elektrycznej zakładaliśmy, że pomiędzy okładkami kondensatora panuje próżnia. Jeśli jednak miejsce to wypełnimy dielektrykiem utrzymując te same ładunki na okładkach, to zauważymy że pojemność kondensatora się zwiększa. Zmiana pojemności zależy od rodzaju materiału umieszczonego pomiędzy okładkami kondensatora. Zgodnie ze wzorem (9.8.5) wzrostowi pojemności przy niezmiennym ładunku odpowiada zmniejszenie różnicy potencjałów. Kiedy więc w kondensatorze próżniowym o pojemności  $C_0$  zgromadzonemu ładunkowi  $q$  odpowiada różnica potencjałów  $U_0$ , to po umieszczeniu pomiędzy okładkami dielektryka ulegnie ona zmniejszeniu do wartości  $U$  wyrażonej stosunkiem

$$\frac{U_0}{U} = \frac{q}{C_0} \bigg/ \frac{q}{C} = \frac{C}{C_0} = \varepsilon \quad (9.9.1)$$

Wielkość  $\varepsilon$ , charakteryzującą dany dielektryk, nazywamy **względną przenikalnością elektryczną dielektryka**,  $\varepsilon \geq 1$ ,  $\varepsilon = 1$  dla próżni.

	$\varepsilon$
powietrze	1,00059
woda (t = 0°C)	88
spirytus etylowy (t = 25°C)	33,1
szkło	3,2 - 3,5
ebonit	2,7 - 3,5
specjalne masy ceramiczne	1000 - 10000

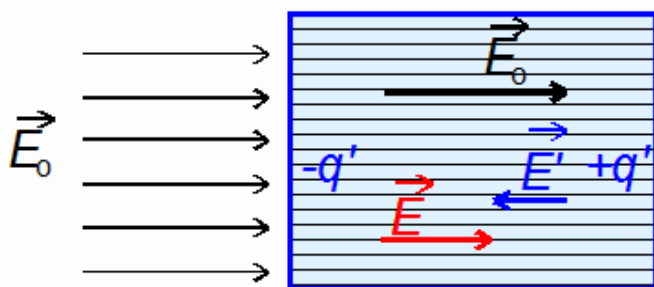
*Przykładowe wartości względnych przenikalności elektrycznych (zwanymi dawniej stałymi dielektrycznymi) niektórych materiałów.*

Co jest przyczyną tych "magicznych" własności dielektryków powiększających pojemność kondensatorów? Dla zrozumienia tego efektu trzeba sięgnąć do atomowej budowy materii. Atomy i cząsteczki, to układy ładunków dodatnich i ujemnych o wielkości kilku angstromów ( $10^{-10}$  m).

**Dielektryki polarne** to substancje, których atomy (cząsteczki) posiadają trwały elektryczny moment dipolowy, wynikający z asymetrii rozkładu ładunku dodatniego i ujemnego. Ruch cieplny sprawia, że ustawienia dipoli są chaotyczne i wypadkowy moment dipolowy jest równy zeru. Zewnętrzne pole elektryczne wnikając do takiego dielektryka stara się uporządkować dipole tak, żeby ich elektryczne momenty dipolowe były ustawione zgodnie z wektorem natężenia pola.

**Dielektryki niepolarne** to substancje, których atomy (cząsteczki) nie posiadają trwałego momentu dipolowego, co wynika z symetrii rozkładu ładunku dodatniego i ujemnego. W takich dielektrykach zewnętrzne pole elektryczne powoduje polaryzację dielektryczną - niewielkie przesunięcia ładunków związanych, których skutkiem jest uzyskanie przez każdy atom (cząsteczkę) pewnego momentu dipolowego, zgodnego z wektorem natężenia pola zewnętrznego.

### Dielektryk w zewnętrznym polu elektrycznym.



W wyniku konkurencji porządkującego działania zewnętrznego pola elektrycznego i dezorganizującego działania ruchu cieplnego pewna część dipoli jest uporządkowana. Uporządkowanie dipoli powoduje, że na powierzchniach bocznych dielektryka powstają indukowane

*Rys. 9.9.1. Pole elektryczne w dielektryku*

ładunki  $+q'_i - q'_i$ , które wytwarzają wewnątrz dielektryka dodatkowe pole elektryczne  $\vec{E}'$ . Wektor natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez uporządkowane dipole ma zwrot przeciwny do wektora natężenia pola wnikającego. **Zatem wypadkowe pole elektryczne  $\vec{E}$  w dielektryku jest słabsze od pola wnikającego.**

$$E = E_0 - E' \quad (9.9.2)$$

Wypadkowy moment dipolowy dielektryka umieszczonego w polu elektrycznym jest różny od zera. Wielkością charakteryzującą stopień polaryzacji dielektryka jest **wektor polaryzacji** zdefiniowany jako całkowity moment dipolowy jednostkowej objętości dielektryka.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad (9.9.3)$$

gdzie  $n$  jest liczbą cząsteczek o momentach dipolowych  $\vec{p}_i$  w elemencie objętości  $\Delta V$ .

W dowolnego rodzaju dielektrykach izotropowych wektor polaryzacji  $\vec{P}$  jest wprost proporcjonalny do natężenia pola  $\vec{E}$  w danym punkcie:

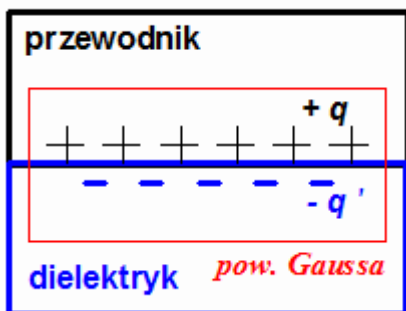
$$\vec{P} = \kappa \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (9.9.4)$$

gdzie  $\kappa$  jest **podatnością elektryczną dielektryka**. Jest to stała bezwymiarowa charakteryzująca dany materiał. W substancjach nieizotropowych związek (9.9.4) ma bardziej skomplikowaną formę.

Zgodnie ze wzorami (9.8.9) i (9.9.1) pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem będzie równa

$$C = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot S}{d} \quad (9.9.5)$$

Dla wyznaczenia natężenia pola elektrycznego w dielektryku wypełniającym przestrzeń pomiędzy okładkami kondensatora naładowanego ładunkiem  $q$  na każdej z okładek, posłużmy się prawem Gaussa.



Weźmy izolowany przewodnik, na powierzchni którego znajduje się ładunek  $+q$ . Pod nieobecność dielektryka prawo Gaussa na granicy przewodnik - próżnia (dla zamkniętej powierzchni prostopadłościanu, którego przekrój przedstawiono na rysunku linią czerwoną) ma postać:

$$E_0 S = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (9.9.6)$$

*Rys. 9.9.2. Analiza sytuacji na granicy przewodnik - dielektryk. Czerwoną linią zaznaczono powierzchnię Gaussa, czyli dowolnie wybraną powierzchnię zamkniętą.*

Strumień natężenia pola elektrycznego równy jest iloczynowi natężenia  $E_0$  i powierzchni podstawy  $S$ , ponieważ w przewodniku natężenie równe jest zero.

Teraz stosujemy prawo Gaussa, wzór (9.9.6.), do przypadku przewodnika graniczącego z dielektrykiem. Cały strumień przez powierzchnię zamkniętą sprowadza się do strumienia przez jej fragment znajdujący się wewnątrz dielektryka. Z kolei ładunek całkowity obejmowany przez tę powierzchnię równy jest sumie ładunku zgromadzonego na okładce oraz przeciwnego znaku ładunku indukowanego na powierzchni dielektryka. Mamy więc

$$E \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (q - q') \quad (9.9.7)$$

skąd otrzymujemy wyrażenie na natężenie pola w dielektryku

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S} - \frac{q'}{\epsilon_0 \cdot S} \quad (9.9.8)$$

Pierwszy składnik w wyrażeniu po prawej stronie określa natężenie pola pomiędzy okładkami kondensatora próżniowego (wzór (9.8.7)). Natężenie pola pomniejszone jest jednak o drugi składnik będący rezultatem indukowanego ładunku związanego w dielektryku.

Pamiętając o proporcjonalności natężenia pola w kondensatorze i różnicy potencjałów między okładkami, wzór (9.8.8.), możemy na podstawie wzoru (9.9.1) napisać wzór na natężenie pola w dielektryku w innej postaci

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot S} \quad (9.9.9)$$

Ze wzorów (9.9.7) i (9.9.8.) możemy łatwo wyznaczyć wartość ładunku związanego (polaryzacyjnego). Mamy bowiem

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot S} - \frac{q'}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{q}{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot S} \quad \text{czyli} \quad q' = q \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \quad (9.9.10)$$

Widzimy, że kiedy  $\epsilon = 1$ , czyli pomiędzy okładkami panuje próżnia, to ładunek związany równy jest zeru - co jest oczywiste, a kiedy  $\epsilon \rightarrow \infty$  to ładunek związany całkowicie kompensuje ładunki swobodne i natężenie pola w ośrodku między okładkami wynosi zero - co jest ciekawe.

Kiedy natomiast zapiszemy wzór (9.9.10) w postaci

$$\frac{D}{S} = \epsilon_0 \cdot \frac{E}{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot S} + \frac{q'}{S} \quad (9.9.11)$$

to otrzymujemy interesujący związek, który ma ważną interpretację fizyczną.

Po pierwsze widzimy, że stosunek ładunku do powierzchni, to po prostu powierzchniowa gęstość ładunku, którą zwykliśmy oznaczać symbolem  $\sigma$ . Możemy więc wzór (9.9.11) przepisać następująco

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon \cdot \epsilon_0} + \sigma' \quad (9.9.12)$$

gdzie  $\sigma$  to powierzchniowa gęstość ładunku  $q$  na okładkach kondensatora, zaś  $\sigma'$  to powierzchniowa gęstość ładunku  $q'$  związanego na powierzchni dielektryka.

Po drugie, nietrudno zauważyć że drugi składnik po prawej stronie wzoru (9.9.10), kiedy licznik i mianownik pomnożymy przez grubość dielektryka  $d$  stanowi wartość elektrycznego momentu dipolowego jednostki objętości warstwy dielektryka, a więc oznacza wartość wektora polaryzacji określonego wzorem (9.9.3) i odniesionego do całej objętości dielektryka.

$$\frac{q'}{S} = \frac{q' \cdot d}{S \cdot d} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^N p_i = P \quad (9.9.13)$$

Zauważamy również, że pierwszy składnik po prawej stronie wzoru (9.9.11) określa zgodnie z wzorem (9.9.8), wartość natężenia pola  $E$  w dielektryku o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ . Suma zaś wartości wektora polaryzacji i wektora natężenia pola pomnożonego przez przenikalność elektryczną próżni  $\epsilon_0$  stanowi wartość tzw. **wektora indukcji elektrycznej  $\vec{D}$**  zwanego też **wektorem przesunięcia elektrycznego**. Oznaczenia te zaznaczono symbolami u góry we wzorze (9.9.10)

W postaci wektorowej związek ten zapisuje się w postaci

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad (9.9.14)$$

Zależność tę niekiedy nazywa się **równaniem elektrostatyki dielektryków**, albo związkiem pomiędzy trzema wektorami charakteryzującymi pole elektryczne: wektorem indukcji elektrycznej  $\vec{D}$ , wektorem natężenia pola  $\vec{E}$  i wektorem polaryzacji  $\vec{P}$ .

Zapiszmy jeszcze parę użytecznych związków. Wykorzystując wzór (9.9.8) możemy napisać

$$q/S = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E \quad (9.9.15)$$

ale zauważamy, że  $q/S$  to wartość wektora indukcji elektrycznej. Otrzymujemy stąd ważny związek wektora natężenia pola i wektora indukcji elektrycznej

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (9.9.16)$$

Zależność (9.9.16) wykorzystuje się często do definicji wektora indukcji elektrycznej. Zwróćmy bowiem uwagę, że natężenie pola elektrycznego  $E$  nie określa jednoznacznie w ośrodkach materialnych ładunków źródłowych wytwarzających to pole, zwanych ładunkami swobodnymi. W próżni (na przykładzie kondensatora płaskiego, na którego okładkach

rozłożony jest ładunek z gęstością  $\sigma$ ) natężenie pola wynosi  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Gdy kondensator ten wypełnimy dielektrykiem o przenikalności elektrycznej  $\epsilon$  (utrzymując na okładkach ten sam ładunek swobodny  $\sigma$ ) natężenia pola zmniejsza się  $\epsilon$ -krotnie ( $E = E_0 / \epsilon$ , patrz wzór

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

(9.9.8)) i wynosi  $E = \frac{\sigma}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$ . Chcąc wobec tego określić ładunek źródłowy (swobodny) niezależnie od ośrodka poprzez wektor charakteryzujący pole, należy obok wektora natężenia pola wprowadzić nowy wektor, którego wartość nie zależałaby od przenikalności elektrycznej ośrodka. Łatwo zauważyć, że warunek ten spełnia wielkość zdefiniowana wzorem (9.9.16), mianowicie wektor indukcji elektrycznej.

## 10. Energia pola elektrycznego

Naładowany kondensator magazynuje pewną porcję energii. Intuicyjnie wyczuwamy, że będzie ona tym większa, im większy ładunek będzie zgromadzony na kondensatorze i im większa będzie różnica potencjałów, do jakiej kondensator zostanie naładowany. Energia ta jest równoważna pracy jaką w tym celu należy wykonać. Pracę związaną z przeniesieniem ładunku już obliczaliśmy. Równa jest ona iloczynowi ładunku i różnicy potencjałów pomiędzy którymi był przemieszczany, patrz wzór (9.3.11). W procesie ładowania kondensatora różnica potencjałów nie jest jednak stała. Jak zwykle w takich przypadkach, zapiszemy wyrażenie określające pracę związaną z przeniesieniem dążącej do zera porcji ładunku i wykonamy całkowanie. Praca elementarna przeniesienia ładunku  $dq$  pomiędzy punktami o różnicy potencjałów  $U$  wynosi

$$dW = dq \cdot U = dq \cdot \frac{q}{C} \quad (9.10.1)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem już zgromadzonym na kondensatorze wytwarzającym różnicę potencjałów  $U$ . Całkowita praca związana z przeniesieniem ładunku  $Q$  będzie określona przez całkę

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} \quad (9.10.2)$$

Rzeczywiście, wykonana praca równa energii naładowanego kondensatora jest proporcjonalna do iloczynu zgromadzonego ładunku i napięcia. Współczynnik  $1/2$  też intuicyjnie jest jasny, jako określający średnią wartość napięcia w procesie ładowania. Jeśli jest to próżniowy kondensator płaski to wzór (9.10.2) można zapisać inaczej wykorzystując wzory (9.8.8) i (9.8.9)

$$E_c = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d} \cdot \frac{d^2 \cdot E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} \cdot V \quad (9.10.3)$$

gdzie przez  $V$  oznaczyliśmy iloczyn pola powierzchni i odległości pomiędzy okładkami kondensatora czyli zawartą tam objętość, a więc objętość obszaru, w którym istnieje pole elektryczne. Pole to powstało wskutek ładowania kondensatora, a więc energię naładowanego kondensatora możemy traktować jako energię tego pola.

Mając na uwadze, że natężenie pola w objętości pomiędzy okładkami ma stałą wartość, możemy zdefiniować gęstość energii, czyli energię przypadającą na jednostkę objętości pola

$$w_E = \frac{E_c}{V} = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} \quad (9.10.4)$$

Jeśli przestrzeń pomiędzy okładkami kondensatora będzie wypełniona dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ , gęstość energii pola elektrycznego w dielektryku wynosi

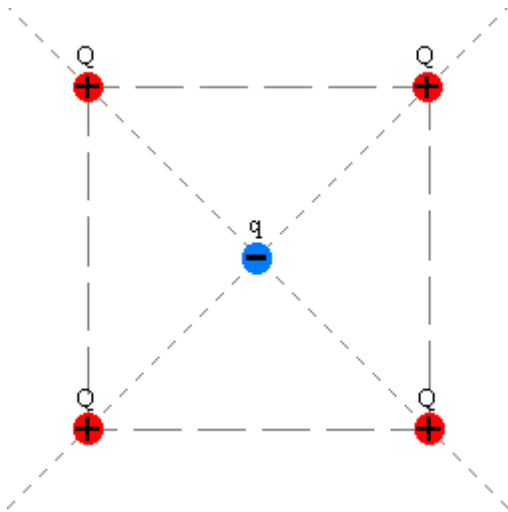
$$w_E = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E^2}{2} \quad (9.10.5)$$

co korzystając ze wzoru (9.9.16) można zapisać w postaci

$$w_E = \frac{E \cdot D}{2} \quad (9.10.6)$$

## Zadania

### Zadanie 9.1 ładunki punktowe

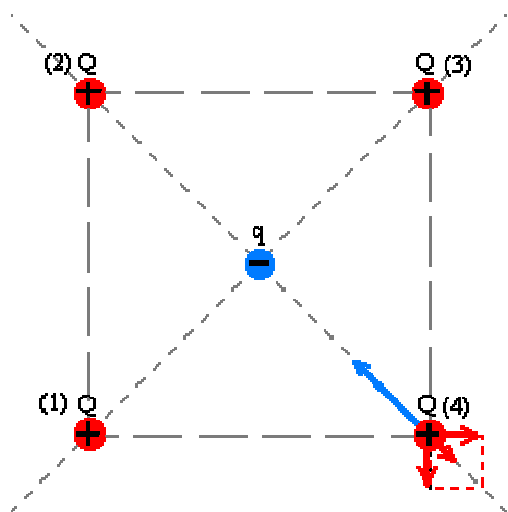


W wierzchołkach kwadratu znajdują się cztery jednakowe, dodatnie ładunki punktowe  $Q$ , a w środku symetrii tego kwadratu umieszczony jest ujemny ładunek  $-q$ , który utrzymuje cały układ w równowadze (Rys. z9.1.1.).

Proszę znaleźć wielkość ładunku  $q$ .

Rys. z9.1.1. Rozmieszczenie ładunków.

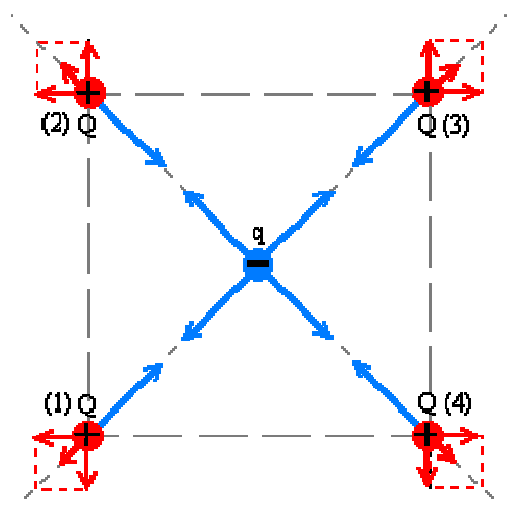
### Zadanie 9.1 wskazówka



Ładunki dodatnie  $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4)$ , znajdujące się w wierzchołkach kwadratu, odpychają się, a ładunek ujemny  $-q$  przyciąga każdy z tych ładunków. Aby układ ładunków był w równowadze wypadkowa siła działająca na każdy z ładunków musi być równa zero. Do obliczenia wielkości ładunku  $q$  wystarczy obliczyć wypadkową siłę (równą zero) działającą np. na  $Q(4)$ , (Rys. z9.1.2).

Rys. z9.1.2. Siły działające na  $Q(4)$ .

### Zadanie 9.1 rozwiązanie



Ładunki dodatnie  $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4)$ , znajdujące się w wierzchołkach kwadratu, odpychają się siłami Coulomba (Rys. z9.1.3.). Jeśli oznaczymy, że długość boku kwadratu wynosi  $a$ , będą to siły o wielkościach :

$$F_{\text{odpychanie}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{a^2},$$



dla ładunków odległych o  $a$  oraz

$$F_{\text{odpychanie}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{(\sqrt{2} \cdot a)^2},$$

Rys. z9.1.3. Siły działające na układ ładunków. dla ładunków odległych o  $\sqrt{2} \cdot a$ .

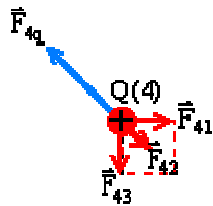
Ładunek ujemny  $-q$  przyciąga każdy ładunek dodatni  $Q$  siłami Coulomba (Rys. z9.1.3.) o wielkości :

$$F_{\text{przycią}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{qQ}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}.$$

Aby układ ładunków był w równowadze wypadkowa siła działająca na każdy z ładunków musi być równa zero. Do obliczenia wielkości ładunku  $q$  wystarczy obliczyć wypadkową siłę (równą zero) działającą np. na  $Q(4)$ .

Na ładunek  $Q(4)$  oddziałują ładunki  $Q(1)$  i  $Q(3)$  siłami odpychania  $\vec{F}_{41}$  i  $\vec{F}_{43}$  o równych wielkościach :

$$F_{41} = F_{43} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{a^2}$$



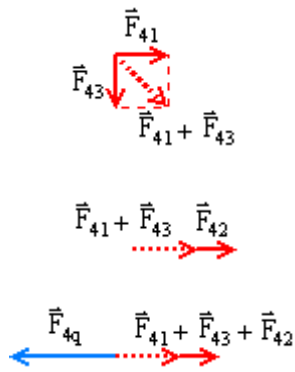
oraz ładunek  $Q(2)$  dwukrotnie mniejszą siłą  $\vec{F}_{42}$  o wielkości

$$F_{42} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{(\sqrt{2} \cdot a)^2}.$$

Rys. z9.1.4. Siły działające na  $Q(4)$ .

Ładunek ujemny  $-q$  przyciąga ładunek dodatni  $Q(4)$  siłą Coulomba  $\vec{F}_{4q}$  o wielkości :

$$F_{4q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{qQ}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}.$$



Rys. z9.1.5. Wypadkowa siła działająca na Q(4).

Wypadkowa siła odpychająca Q(4) jest sumą wektorów  $\vec{F}_{41}$ ,  $\vec{F}_{43}$  i  $\vec{F}_{42}$ . Siła ta zrównoważona jest przez siłę przyciągania  $\vec{F}_{4q}$ .

$$\vec{F}_{41} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{4q} = \vec{0}$$

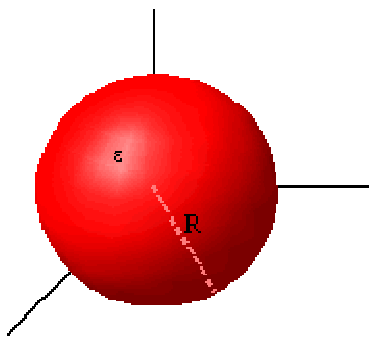
$$|\vec{F}_{41} + \vec{F}_{43}| + |\vec{F}_{42}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{a^2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{2a^2}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q^2}{a^2} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{2qQ}{a^2}, \text{ a stąd}$$

$$q = -\frac{1}{4} (2\sqrt{2} + 1) \cdot Q$$

## Zadanie 9.2 prawo Gaussa



Rys. z9.2.1. Naładowana kula.

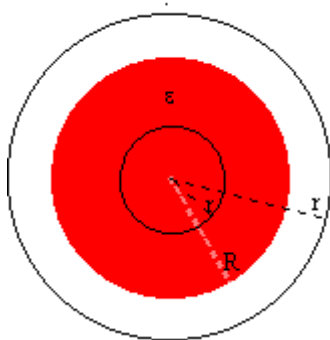
Kula o promieniu R, wykonana z dielektryka o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ , została naładowana równomiernie ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho$ . Proszę obliczyć dla wytworzonego w przestrzeni pola elektrycznego:

- indukcję - D,
- natężenie - E,
- polaryzację - P.

Wyniki obliczeń należy przedyskutować dla różnych odległości od środka kuli.

## Zadanie 9.2 wskazówka

Ładunek rozłożony równomiernie w kuli wytwarza pole o symetrii kulistej. Wektory  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  oraz  $\mathbf{P}$  mają kierunek radialny oraz stałą wielkość na powierzchni kuli o dowolnym promieniu r.



Z prawa Gaussa,

- dla  $r \leq R$ :  $D(r) = \frac{\rho \cdot r}{3}$ ,  $E(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0\epsilon}$ ,
- dla  $r > R$ :  $D(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2}$ ,  $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ .

Rys. z9.2.2. Przekrój kuli. Stan polaryzacji dielektryka  $P(r)$  można obliczyć z zależności:  $P(r) = D(r) - \epsilon_0 E(r)$ .

## Zadanie 9.2 rozwiązanie

Ładunek rozłożony równomiernie w kuli wytwarza pole o symetrii kulistej. Wektory  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  oraz  $\mathbf{P}$  mają kierunek radialny oraz stałą wielkość na powierzchni kuli o dowolnym promieniu  $r$ . Z prawa Gaussa

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

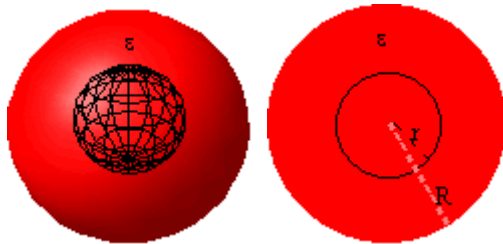
gdzie, dla kuli, wektor  $d\mathbf{S}$  ma kierunek radialny, podobnie jak wektor  $\mathbf{D}$ . Wobec powyższego, iloczyn skalarny będzie

$$\vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot dS,$$

a całkowanie sprowadzi się do mnożenia

$$\oint_S D \cdot dS = D \oint_S dS = D \cdot S$$

w obszarze  $r < R$

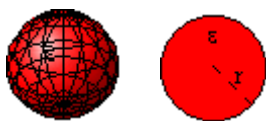


Dla odległości  $r$  mniejszych od promienia  $R$  naładowanej równomiernie kuli, z prawa Gaussa

$$D \cdot 4\pi r^2 = q,$$

gdzie dla kulistej powłoki o promieniu  $r$  jej powierzchnia  $S = 4\pi r^2$ .

Rys. z9.2.3. Promień powłoki  $r$  mniejszy od promienia naładowanej kuli  $R$ .



Rys. z9.2.4. Ładunek  $q$  wewnątrz powłoki o promieniu  $r$ .

Ładunek  $q$  wewnątrz powłoki o promieniu  $r$ :

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

Stąd indukcja pola elektrycznego rośnie z odległością od środka kuli zgodnie z zależnością:

$$D(r) = \frac{\rho \cdot r}{3},$$

a natężenie pola wg wzoru:

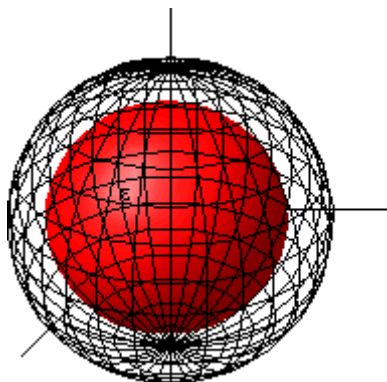
$$E(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0 \epsilon}$$

Stan polaryzacji dielektryka  $P(r)$  można obliczyć z zależności :  $P(r) = D(r) - \epsilon_0 E(r)$ .

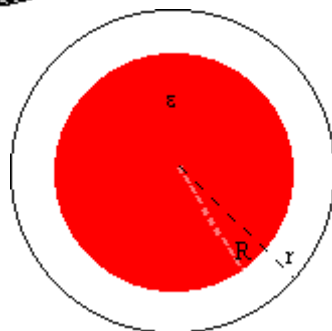
Po wykonaniu odejmowania :

$$P(r) = \frac{\rho r}{3} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

**w obszarze  $r > R$**



Dla odległości  $r$  większych od promienia  $R$  naładowanej równomiernie kuli, z prawa Gaussa



$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$ , gdzie dla kulistej powłoki o promieniu  $r$  jej powierzchnia  $S = 4\pi r^2$ .

*Rys. z9.2.5. Promień powłoki  $r$  większy od promienia naładowanej kuli  $R$ .*

Ładunek  $Q$  wewnątrz powłoki kulistej o promieniu  $r$  :

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

Stąd indukcja pola elektrycznego maleje z odległością od środka naładowanej kuli zgodnie z zależnością :

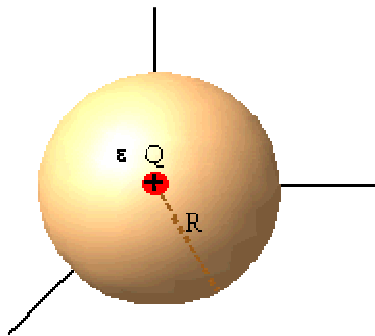
$$D(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2}$$

a natężenie pola wg wzoru podanego na wykładzie:

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

W rozpatrywanym obszarze nie ma dielektryka, zatem  $P(r) = 0$ .

### Zadanie 9.3 potencjał pola elektrycznego



Ładunek punktowy  $Q$  znajduje się w środku kuli o promieniu  $R$  wykonanej z dielektryka o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ .

Proszę obliczyć dla wytworzonego w przestrzeni pola elektrycznego:

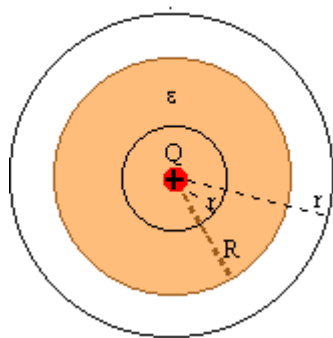
- indukcję -  $D$ ,
- potencjał -  $\phi$ .

Wyniki obliczeń należy przedyskutować dla różnych odległości od środka kuli.

*Rys. z9.3.1. Wielkości występujące w zadaniu.*

### Zadanie 9.3 wskazówka

Punktowy ładunek  $Q$  umieszczony w środku kuli wytwarza pole o symetrii kulistej. Wektor  $D$  ma kierunek radialny oraz stałą wielkość na powierzchni kuli o dowolnym promieniu  $r$ .



Z prawa Gaussa,

- dla  $r \leq R$ :  $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$ ,  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$ ,
- dla  $r > R$ :  $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$ ,  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

*Rys. z9.3.2. Przekrój kuli.*

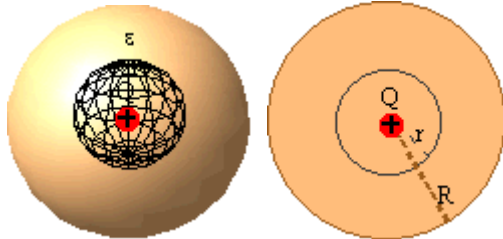
Do obliczenia potencjału pola elektrostatycznego można wykorzystać zależność wiążącą potencjał i natężenie pola zachowawczego.

### Zadanie 9.3 rozwiązanie

Punktowy ładunek  $Q$  umieszczony w środku kuli wytwarza pole o symetrii kulistej. Wektor  $D$  ma kierunek radialny oraz stałą wielkość na powierzchni kuli o dowolnym promieniu  $r$ .  
Z prawa Gaussa,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \oint dS = D \cdot S$$

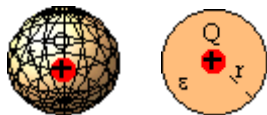
### indukcja, w obszarze $r < R$



Dla odległości  $r$  mniejszych od promienia  $R$  kuli wykonanej z dielektryka, z prawa Gaussa

$D \cdot S = Q$ , gdzie dla kulistej powłoki o promieniu  $r$  jej powierzchnia  $S = 4\pi r^2$ .

*Rys. z9.3.3. Promień powłoki  $r$  mniejszy od promienia kuli  $R$ .*



Ładunek  $Q$  wewnątrz powłoki o promieniu  $r$ .

*Rys. z9.3.4. Ładunek  $Q$  wewnątrz powłoki o promieniu  $r$ .*

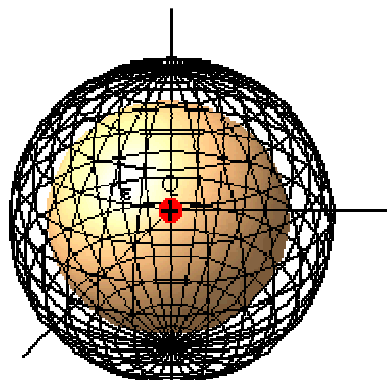
Stąd indukcja pola elektrycznego maleje z odległością od środka kuli zgodnie z zależnością:

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

a natężenie pola wg wzoru

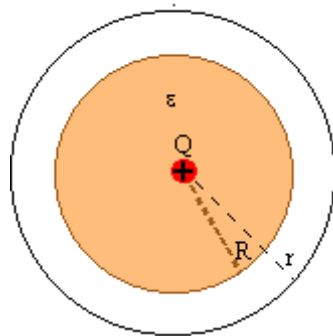
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}$$

### indukcja, w obszarze $r > R$



Dla odległości  $r$  większych od promienia  $R$  kuli wykonanej z dielektryka, z prawa Gaussa

$D \cdot S = Q$ , gdzie dla kulistej powłoki o promieniu  $r$  jej powierzchnia  $S = 4\pi r^2$ .



Rys. z9.3.5. Promień powłoki  $r$  większy od promienia kuli  $R$ .

Stąd indukcja pola elektrycznego maleje z odległością od środka kuli zgodnie z zależnością:

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

### potencjał, w obszarze $r > R$

Do obliczenia potencjału pola elektrostatycznego wykorzystamy zależność wiążącą **potencjał i natężenie pola zachowawczego**. Przyjmujemy, że potencjał pola w nieskończonej odległości od kuli jest równy zero.

Ponieważ w tym obszarze  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  to

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r E(r) dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

### potencjał, w obszarze $r < R$

Ponieważ w tym obszarze  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}$  to

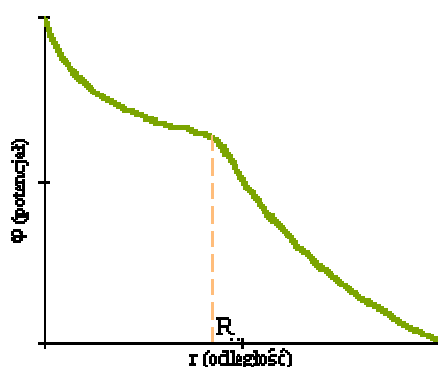
$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r E(r) dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr + \frac{1}{\epsilon} \int_R^r \frac{1}{r^2} dr \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{R-r}{\epsilon r} \right].$$

### Zadanie 9.3 odpowiedź

Obliczone zależności indukcji elektrycznej i potencjału wytworzonego pola od odległości od środka kuli.

<i>odległość</i>	<i>indukcja</i>	<i>potencjał</i>
$r \leq R$	$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$	$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{R-r}{sr} \right]$
$r > R$	$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$	$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$

Obliczone zależności  $\varphi(r)$  przedstawione są też, poglądowo, na wykresie.



*Rys. z9.3.6. Znaleziona zależność potencjału pola od odległości od środka kuli.*

### Zadanie 9.4 kondensator płaski

Dwa jednakowe, płaskie kondensatory o polu powierzchni okładek  $S$  i odległości między nimi  $d$  zostały wypełnione dwoma dielektrykami o względnych przenikalnościach  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$ , na dwa sposoby (Rys. 3.3.1.). W obu przypadkach każda substancja wypełnia przestrzeń między okładkami do połowy.

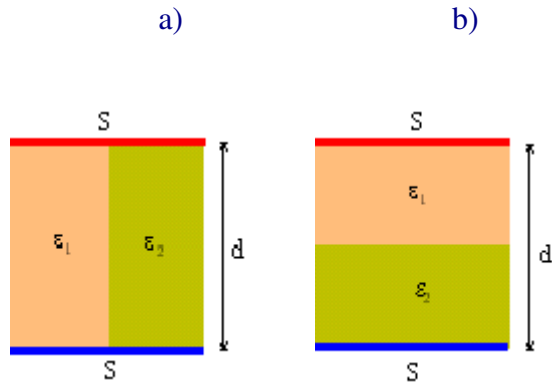
Proszę obliczyć i porównać pojemności dla tych kondensatorów.





Rys. z9.4.1. Dwa sposoby wypełnienia kondensatora.

### Zadanie 9.4 wskazówka



W przypadku a), pojemność kondensatora C będzie pojemnością układu dwóch kondensatorów połączonych równolegle

$$C = C_1 + C_2 .$$

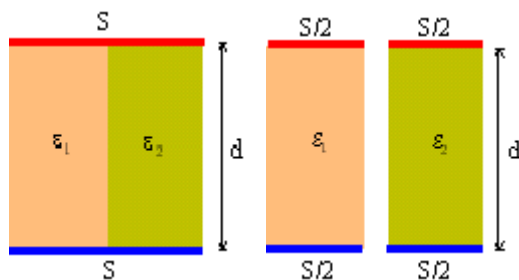
W przypadku b), pojemność kondensatora C będzie pojemnością układu dwóch kondensatorów połączonych szeregowo.

Rys. z9.4.2. Dwa sposoby wypełnienia kondensatora.

### Zadanie 9.4 rozwiązanie

#### kondensatory połączone równolegle

W przypadku a), pojemność kondensatora  $C_a$  będzie pojemnością układu dwóch kondensatorów połączonych równolegle (napięcie na tych kondensatorach byłoby takie samo).



Ponieważ

$$C_a = C_{a1} + C_{a2} ,$$

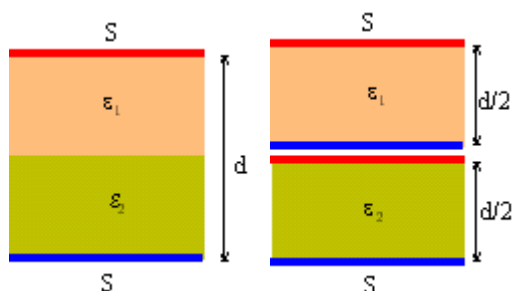
gdzie  $C_{a1} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \cdot S}{d \cdot 2}$  oraz  $C_{a2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 \cdot S}{d \cdot 2}$

to  $C_a = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$

Rys. z9.4.3. Połączenie równoległe.

#### kondensatory połączone szeregowo

W przypadku b), pojemność kondensatora  $C_b$  będzie pojemnością układu dwóch kondensatorów połączonych szeregowo (ładunek na okładkach tych kondensatorów byłby tej samej wielkości).



Rys. z9.4.4. Połączenie szeregowe.

Ponieważ

$$\frac{1}{C_b} = \frac{1}{C_{b1}} + \frac{1}{C_{b2}},$$

gdzie  $C_{b1} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 S \cdot \frac{2}{d}$  oraz  $C_{b2} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 S \cdot \frac{2}{d}$

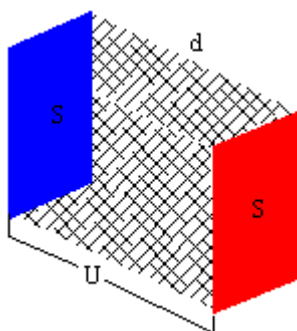
to  $C_b = \frac{2\varepsilon_0 S \varepsilon_1 \varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ .

## Zadanie 9.5 energia pola elektrycznego

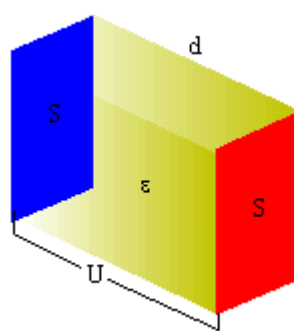
Płaski kondensator naładowany został do napięcia  $U$ . Odległość między okładkami wynosi  $d$ , a ich pole powierzchni  $S$ .

Proszę obliczyć i porównać gęstości energii pola elektrycznego w obszarze między okładkami tego kondensatora, jeśli :

- przestrzeń między okładkami wypełniała próżnia (powietrze),
- przestrzeń między okładkami wypełniał dielektryk o względnej przenikalności  $\varepsilon$ .



Rys. z9.5.1a. Kondensator próżniowy



Rys. z9.5.1b. Kondensator z dielektrykiem

## Zadanie 9.5 wskazówka

Energia zgromadzona w polu elektrycznym naładowanego kondensatora równa jest pracy wykonanej w celu naładowania.

Gdy :

- przestrzeń między okładkami wypełniała próżnia,  $W_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d}$
- przestrzeń między okładkami wypełniał dielektryk o przenikalności  $\varepsilon \in$   $W_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{d}$ .

Gęstość energii pola elektrycznego to energia na jednostkę objętości obszaru między okładkami kondensatora. Dla pola jednorodnego i prostopadłościanu - objętość  $V = Sd$ .

### Zadanie 9.5 rozwiązanie

Przy ładowaniu kondensatora wykonywana jest praca

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C^2 U^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2,$$

gdzie wiadomo, że  $Q = CU$ . Energia ta zgromadzona jest w polu elektrycznym panującym między okładkami kondensatora.

#### kondensator próżniowy

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U^2}{d}, \quad \text{gdzie pojemność kondensatora próżniowego } C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

#### kondensator z dielektrykiem

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{d}, \quad \text{gdzie pojemność kondensatora z dielektrykiem } C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

#### porównanie

Energia naładowanego kondensatora jest zgromadzona w polu elektrycznym między jego okładkami. Oznaczyliśmy te energie:  $W_1$  - gdy między okładkami próżnia,  $W_2$  - gdy między okładkami dielektryk, tj. materiał o zdolności do polaryzacji w polu elektrycznym. Zachodzi,

że  $\frac{W_2}{W_1} = \epsilon$ . Znaczy to, że energia zgromadzona w kondensatorze z dielektrykiem jest  $\epsilon$  razy większa.

Podobnie, gęstość energii pola elektrycznego, bo  $w = \frac{W}{V}$ , gdzie objętość  $V = Sd$ .

### Nowe pojęcia, definicje i wyrażenia

<b>zasada zachowania ładunku</b>	Całkowity ładunek układu izolowanego jest stały.
----------------------------------	--

<b>prawo Coulomba</b>	Siła wzajemnego oddziaływania dwóch nie poruszających się ładunków punktowych jest wprost proporcjonalna do iloczynu wartości tych ładunków oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.
<b>ładunek elementarny</b>	ładunek elektronu, $1e=1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$
<b>ładunek próbny</b>	ładunek punktowy o znaku dodatnim pozwalający wykryć istnienie pola elektrycznego
<b>natężenie pola elektrycznego</b>	wektor o kierunku siły działającej na ładunek próbny i wartości będącej stosunkiem tej siły do wartości ładunku próbnego
<b>zasada superpozycji pól</b>	natężenie pola od układu ładunków jest sumą wektorową natężeń pól pochodzących od poszczególnych ładunków
<b>linie sił pola</b>	linie prowadzone tak, że w każdym punkcie styczna do linii sił pokrywa się z kierunkiem natężenia pola
<b>potencjał pola</b>	energia potencjalna jednostkowego, punktowego ładunku dodatniego znajdującego się w danym punkcie pola
<b>powierzchnia ekwipotencjalna</b>	powierzchnia, na której potencjał wszystkich punktów jest taki sam
<b>dipol elektryczny</b>	układ dwóch położonych blisko siebie ładunków o takich samych wartościach ale różnych znakach
<b>elektryczny moment dipolowy</b>	iloczyn ładunku dodatniego bieguna przez odległość między biegunami dipola
<b>prawo Gaussa</b>	Strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą równy jest algebraicznej sumie ładunków obejmowanych przez tę powierzchnię, podzielonej przez wartość przenikalności elektrycznej próżni.
<b>przewodniki</b>	materiały, w których ładunki elektryczne mogą swobodnie się przemieszczać
<b>przewodniki</b>	materiały, w których ładunki elektryczne mogą swobodnie się

	przemieszczać
<b>kondensator</b>	układ dwóch przewodników o stosunkowo dużych powierzchniach położonych blisko siebie, posiadających równe różnoimienne ładunki i wytwarzający pole elektryczne skupione w ograniczonej przestrzeni (między tymi przewodnikami)
<b>dielektryki</b>	materiały, w których ładunki elektryczne nie mogą swobodnie się przemieszczać
<b>względna przenikalność elektryczna</b>	wielkość charakteryzująca własności elektryczne materiałów (zwana dawniej stałą dielektryczną)
<b>dielektryki niepolarne</b>	dielektryki, w cząsteczkach których środki ciężkości ładunków dodatnich i ujemnych pokrywają się w nieobecności pola elektrycznego, tzn. ich moment dipolowy w nieobecności pola równy jest zeru
<b>dipol sprężysty</b>	indukowany polem elektrycznym dipol w cząsteczce niepolarnego dielektryka
<b>polaryzowalność dielektryka</b>	współczynnik wyrażający proporcjonalność indukowanego momentu dipolowego atomu (cząsteczki) do natężenia pola elektrycznego
<b>dielektryki polarne</b>	dielektryki, w cząsteczkach których środki ciężkości ładunków dodatnich i ujemnych nie pokrywają się w nieobecności pola elektrycznego tzn. ich moment dipolowy jest w nieobecności pola różny od zera
<b>dipol sztywny</b>	istniejący w nieobecności pola elektrycznego dipol cząsteczki polarnego dielektryka
<b>wektor polaryzacji dielektryka</b>	suma wektorowa momentów dipolowych cząsteczek zawartych w jednostce objętości dielektryka
<b>ferroelektryki</b>	materiały, w których występuje samoistna polaryzacja bez zewnętrznego pola elektrycznego, zaś w zewnętrznym polu elektrycznym polaryzacja wykazuje pętlę histerezy

# Prąd elektryczny

## Wstęp

### Różnica poziomów wody i różnica potencjałów



*Fot. 10.0.1. Zapora wodna na Dunajcu w Rożnowie.*

Fotografia obok przedstawia zapórę wodną na Dunajcu w Rożnowie. Po lewej stronie rozciąga się piękne Jezioro Rożnowskie (niestety na zdjęciu niewidoczne) z dobrze znaną odwiedzającym - "Małą Wyspą". Ania spogląda jednak na drugą stronę, gdzie daleko w dole wije się stosunkowo wąska struga Dunajca. Te dwa "światy" rozdziela zapora, której celem jest wytworzenie w określonym miejscu znacznej różnicy poziomów wody.

Wiemy od dziecka, że zapora zbudowana została by zasilać w energię elektryczną nasze domy, szkoły itd. Zobaczymy, że ilustruje również bardzo dobrze temat naszej lekcji.

W poprzedniej lekcji powiedzieliśmy, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną. Zauważmy, że powierzchnią ekwipotencjalną jest także powierzchnia wody w jeziorze Rożnowskim (i każdym innym), a wartość tego potencjału zależy od wysokości poziomu wody. Potencjał jest tu jednak wytworzony przez pole grawitacyjne, a nie elektryczne. Spoglądając razem z Anią na drugą stronę zapory widzimy jednak, że kiedy pojawia się różnica potencjałów pola grawitacyjnego (czyli poziomów wody po dwóch stronach zapory), a woda ma możliwość przepływu, to następuje przepływ wody ze zbiornika o poziomie/potencjale wyższym do tego, który ma niższy poziom/potencjał. Intensywność przepływu może być różna i zależy od tego, jakim kanałem pozwalamy wodzie przepłynąć.

To właśnie jest tematem lekcji, którą rozpoczynamy wykorzystując daleko idące analogie. Przyporządkowujemy masie wody - ładunek elektryczny, różnicy poziomów wody - różnicę potencjałów elektrycznych, a kanałowi wodnemu - przewodnik, przez który popłynie prąd.

## 1. Natężenie i gęstość prądu

Odwróćmy kierunek naszej analogii omówionej we Wstępie. Kiedy pomiędzy dwoma naładowanymi przewodnikami (zbiornikami wody) występuje różnica potencjałów elektrycznych (poziomów wody), to następuje przepływ ładunków elektrycznych (masy wody) od przewodnika (zbiornika) o wyższym potencjale (poziomie wody) - do tego, który ma niższy potencjał (poziom wody).

**Prąd elektryczny** - to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych, którego przyczyną jest istnienie różnicy potencjałów.

Intensywność przepływu ładunku elektrycznego opisujemy ilościowo przez określenie wielkości ładunku przepływającego przez daną powierzchnię w jednostce czasu lub inaczej, przez stosunek ładunku  $dq$  do czasu  $dt$ , w którym ten ładunek przez daną powierzchnię przepłynął

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (10.1.1)$$

gdzie przez  $I$  oznaczyliśmy wielkość zwaną **natężeniem prądu**. Zauważmy tu, że ładunek elektryczny może mieć dodatni bądź ujemny znak, zaś przepływ ładunku dodatniego w jedną stronę można uważać za równoważny przepływowi ładunku ujemnego w stronę przeciwną.

Nośnikami ładunku w metalach są elektrony, w zjonizowanych gazach oraz elektrolitach są to także dodatnio lub ujemnie naładowane jony. W niektórych przypadkach mogą to być również naładowane cząstki makroskopowe. Jest jedynie kwestią umowy, że **za kierunek prądu przyjmujemy kierunek poruszania się nośników dodatnich**.

Kiedy natężenie prądu jest stałe w czasie czyli w jednakowych odcinkach czasu przez daną powierzchnię przepływa ten sam ładunek mówimy, że mamy do czynienia z przepływem **prądu stałego**. Wówczas wzór (10.1.1) możemy zapisać w postaci

$$I = \frac{q}{t} \quad (10.1.1a)$$

W różnych miejscach powierzchni, przez którą przepływa prąd jego natężenie może być różne. Wprowadzamy więc pojęcie **wektora gęstości prądu**  $\vec{j}$ . Kierunek tego wektora określa kierunek ruchu nośników dodatnich, a wartość odpowiada natężeniu prądu płynącego przez prostokąt do tego kierunku powierzchnię jednostkową wokół danego punktu w przewodniku.

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \cdot \hat{n} \quad (10.1.2)$$

gdzie  $\hat{n}$  jest wektorem wskazującym kierunek ruchu nośników dodatnich przez powierzchnię  $dS_{\perp}$ . Korzystając z pojęcia wektora gęstości prądu możemy wyrazić natężenie prądu w postaci

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (10.1.3)$$

gdzie przez  $d\vec{S}$  oznaczyliśmy wektor o wartości równej  $dS$  i skierowany prostopadłe do tej powierzchni w stronę przepływu ładunków dodatnich.

Jaka jest prędkość przemieszczania się ładunków w przewodniku; bliska prędkości światła czy mniejsza? Nazwijmy tę prędkość **prędkością unoszenia**  $v_u$ . Dla jej wyznaczenia przyjmijmy, że w odcinku przewodnika o długości  $l$  i powierzchni przekroju poprzecznego  $S$  porusza się  $n \cdot V = n \cdot S \cdot l$  elektronów przewodnictwa, gdzie przez  $n$  oznaczyliśmy liczbę elektronów przewodnictwa w jednostce objętości. Ładunek w objętości  $V$  równy jest więc

$$q = e \cdot n \cdot \overbrace{(S \cdot l)}^V \quad (10.1.4)$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym. Zakładając, że mamy do czynienia z przepływem prądu stałego określamy czas, w którym ładunek ten przepłynie przez powierzchnię  $S$  wzorem

$$t = \frac{l}{v_u} \quad (10.1.5)$$

Natężenie płynącego prądu będzie wtedy wynosić

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e \cdot n \cdot S \cdot l}{(l/v_u)} = e \cdot n \cdot S \cdot v_u = j \cdot S \quad (10.1.6)$$

gdzie ostatnia równość wynika po prostu z definicji wektora gęstości prądu. Zależność wektorowa

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{v}_u \quad (10.1.7)$$

określona dla danego punktu materiału, przez który przepływa prąd stanowi inną (mikroskopową) postać definicji wektora  $\vec{j}$ .

Wyznaczona ze wzoru (10.1.6) prędkość unoszenia wynosi

$$v_u = \frac{I}{e \cdot n \cdot S} = \frac{j}{e \cdot n} \quad (10.1.8)$$

Poruszając się w kierunku wymuszonym przez pole elektryczne, elektrony jednocześnie uczestniczą w beładnym ruchu cieplnym. Według prostego modelu klasycznego gaz elektronowy opisujemy podobnie jak gaz doskonały. Oznaczmy przez  $v$  średnią prędkość ruchu cieplnego elektronów w przewodniku, a przez  $u$  średnią prędkość unoszenia elektronów w tym przewodniku, gdy płynie w nim prąd stały. Przewodnik znajduje się w temperaturze pokojowej.

Wartość prędkości średniej ruchu cieplnego można oszacować, wykorzystując wzory:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \Rightarrow (v)_{\text{sr.kw}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 10^5 \text{ m/s} \quad (10.1.9)$$

wartość prędkości unoszenia elektronów można oszacować wykorzystując wzór (10.1.8):



dla typowych wartości  $I$ ,  $n$ ,  $S$ :

$$u = \frac{I}{n \cdot e \cdot S} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (10.1.10)$$

gdzie  $I = 1 \text{ A}$ , grubość miedzianego przewodu  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $n = 8,5 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$  (każdy atom miedzi daje jeden elektron swobodny, zatem znając masę molową miedzi  $\mu = 63,5 \text{ g/mol}$ , gęstość miedzi  $\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$  i liczbę Avogadro (liczbę atomów w 1 molu)  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} / \text{mol}$ , można obliczyć koncentrację elektronów  $n$ ).

Widzimy, że prędkość elektronów będących nośnikami prądu jest niezwykle mała w porównaniu z prędkością ruchu cieplnego ( $10^{10}$  razy mniejsza). Można powiedzieć, że prąd płynie bardzo wolno. Oczywiście sygnał, który nakazuje elektronom przewodnictwa płynąć w określonym kierunku rozchodzi się niezwykle szybko. Sygnałem tym jest pole elektryczne, które rozchodzi się z prędkością równą prędkości światła.

Ruch elektronów i prędkość przemieszczania się sygnału elektrycznego to zupełnie nie to samo! Podobnie i woda z kranu popłynie natychmiast po odkręceniu kurka, ale woda, która w momencie tego odkręcania była jeszcze w studni - dotrze do nas o wiele później.

## 2. Prawo Ohma

Jaki prąd popłynie w próbce materiału, na końcach której wytworzymy różnicę potencjałów  $U$ ?

Dla większości metali w obszarze umiarkowanych temperatur (bliskich temperaturze pokojowej) zależność natężenia prądu od wytworzonej różnicy potencjałów (przyłożonego napięcia) jest prostą proporcjonalnością, tzn. stosunek napięcia i natężenia prądu jest stały.

$$\frac{U}{I} = R \quad (10.2.1)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $R$  nazywamy **opornością** przewodnika. To empiryczne prawo sformułowane dla metali nosi nazwę **prawa Ohma**. Wnioskiem z prawa Ohma jest to, że oporność metali, w pewnym zakresie temperatur, jest stała. Wartość oporności przewodnika zależy zarówno od rodzaju samego materiału jak i jego kształtu i rozmiarów. Dla scharakteryzowania własności materiału wprowadza się pojęcie **oporności właściwej**  $\rho$ . Związek pomiędzy opornością a opornością właściwą określa wzór

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (10.2.2)$$

gdzie  $l$  jest długością przewodnika, a  $S$  jego przekrojem poprzecznym, przez który przepływa prąd. Zatem oporność właściwa jest opornością próbki danego materiału o długości  $l = 1 \text{ m}$  i przekroju  $S = 1 \text{ m}^2$ .

przewodniki	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	izolatory	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	ciecze i gazy	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]
srebro	$1,6 \cdot 10^{-8}$	szkło	$10^9 - 10^{13}$	woda destylowana	$10^3 - 10^4$
miedź	$1,7 \cdot 10^{-8}$	ebonit	$10^{12} - 10^{14}$	woda rzeczna	10 - 100
aluminium	$2,8 \cdot 10^{-8}$	polietylen	$10^{13} - 10^{15}$	woda morska	0,3
żelazo	$9,8 \cdot 10^{-8}$	guma	$\sim 10^{13}$	spirytus etylowy	$1,5 \cdot 10^5$
złoto	$2,4 \cdot 10^{-8}$	siarka	$10^{15}$	powietrze	$10^{15} - 10^{18}$

*Przykładowe wartości oporności właściwych niektórych materiałów.*

Zależność oporności od zmiany temperatury  $\Delta t$  w zakresie umiarkowanych temperatur także w przybliżeniu można opisać funkcją liniową

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t), \quad \Delta t = T - T_0 \quad (10.2.3)$$

gdzie  $R_0$  jest opornością w temperaturze  $T_0$ , za którą zazwyczaj przyjmuje się temperaturę  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , a  $\alpha$  jest temperaturowym współczynnikiem oporności.

Zapisując prawo Ohma w postaci

$$U = I \cdot R \quad (10.2.4)$$

zauważamy, że jeżeli znamy natężenie prądu i oporność pomiędzy dwoma punktami danego materiału, to możemy wyznaczyć także różnicę potencjałów pomiędzy nimi. Na tej właśnie zasadzie działają tzw. potencjometry - układy pozwalające ustalać i zmieniać różnicę potencjałów.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że zależność (10.2.4) między napięciem i natężeniem prądu w przewodniku jest zawsze słuszna ( $R$  jest w ogólności tzw. opornością statyczną przy danym napięciu  $U$ ), natomiast będzie ona wyrażała prawo Ohma tylko wtedy, gdy  $R = \text{const}$  dla różnych  $U$  lub  $I$ .

Należy także zwrócić wagę, że wiele materiałów i elementów przewodzących prąd elektryczny nie stosuje się do prawa Ohma. Zależność natężenia prądu od różnicy potencjałów nie jest w tych materiałach liniowa, czyli oporność przy różnych napięciach jest różna. Materiały takie odgrywają ważną rolę w układach elektronicznych, gdzie właśnie wykorzystywana jest nieliniowa zależność ich oporności od przyłożonego napięcia bądź temperatury.

Prawo Ohma możemy też sformułować w postaci różniczkowej, korzystając z definicji wektora gęstości prądu, wzór (10.1.2). W tym celu zróżniczkujemy wyrażenie na natężenie prądu  $I$  wynikające bezpośrednio ze wzoru (10.2.1):

$$I = \frac{U}{R} \quad (10.2.5)$$

Zakładając, że oporność zachowuje wartość stałą, zastosujmy wzór (10.2.2) do elementu przewodnika o długości  $d\mathbf{l}$  i powierzchni  $d\mathbf{S}$  oraz wykorzystajmy związek pomiędzy różnicą potencjałów i natężeniem pola elektrycznego (9.3.20). Otrzymujemy wtedy

$$dI = \frac{1}{R} \cdot dU = \frac{\overbrace{1/R}^{1/R}}{d\mathbf{S}} \cdot \frac{dU}{d\mathbf{l}} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.2.6)$$

Założyliśmy tu, że wektory natężenia pola i gęstości prądu są równoległe, co jest słuszne w ciałach izotropowych. (W ciałach anizotropowych wprowadza się pojęcie tensora przewodnictwa, czego nie będziemy tu omawiać.) Dla omawianego tu przypadku możemy zapisać wektorową zależność między gęstością prądu i natężeniem pola elektrycznego wynikająca z ostatniej równości po prawej stronie we wzorze (10.2.6)

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (10.2.7)$$

Wzór ten wyraża **prawo Ohma w postaci różniczkowej**. Zwróćmy uwagę, że i w tej postaci prawo to, stwierdzając zależność liniową pomiędzy wektorami  $\vec{j}$  i  $\vec{E}$ , wymaga aby  $\rho = const$ .

Jaki jest sens fizyczny wyprowadzonych przez nas zależności? Ze wzoru (10.1.7) widzimy, że gęstość prądu jest proporcjonalna do prędkości unoszenia ładunków w przewodniku; ze wzoru (10.2.7), że jest również proporcjonalna do natężenia pola, które jest przyczyną uporządkowanego ich ruchu. Z porównania tych wzorów wynika, że prędkość nośników związana z przepływem prądu jest proporcjonalna do natężenia pola. Zauważmy przy tym, że równanie (10.2.7) jest konsekwencją prawa Ohma. W metalach występują wprawdzie swobodne elektrony, ale znajdują się one w ciągłym chaotycznym ruchu, którego średnia prędkość przekracza o wiele rzędów wielkości typowe prędkości unoszenia określone wzorem (10.1.8). Uporządkowany ruch nośników nakłada się więc na chaotyczny ruch cieplny, zaś określona wartość prędkości unoszenia, mimo działania na nośniki stałej siły ze strony stałego pola elektrycznego, jest rezultatem ustalenia się równowagi pomiędzy siłą wynikającą z istnienia pola elektrycznego i siły hamującej wynikającej z chaotycznego ruchu nośników, w czasie którego zderzają się z rdzeniami atomowymi (jonami) metalu. Sytuacja podobna jest do ruchu spadochroniarza, którego stała prędkość opadania wynika z równowagi pomiędzy siłą przyciągania grawitacyjnego, a siłą oporu powietrza. Pamiętając, że temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej chaotycznych ruchów cieplnych, zrozumiały stałe się wzrost oporności przewodników ze wzrostem temperatury.

### 3. Siła elektromotoryczna

Kiedy dwa przewodniki naładowane do różnych potencjałów połączymy za pomocą innego przewodnika, to spowodujemy przepływ w nim prądu elektrycznego, aż do momentu wyrównania się potencjału na powierzchniach przewodników, po czym przepływ prądu ustanie. Tu znów nasuwa się analogia. Kiedy połączymy ze sobą dwa zbiorniki wodne umieszczone na różnych wysokościach, to spowodujemy przepływ wody ze zbiornika górnego do dolnego aż do momentu kiedy poziomy wody w nich się wyrównają bądź cała woda z jednego znajdzie się w drugim zbiorniku. Kiedy to nastąpi, ruch wody ustanie. Dla podtrzymania przepływu potrzebna jest pompa, która napełniać będzie zbiornik górny wodą ze zbiornika dolnego. Co jest taką pompą w przypadku przepływu ładunków elektrycznych?

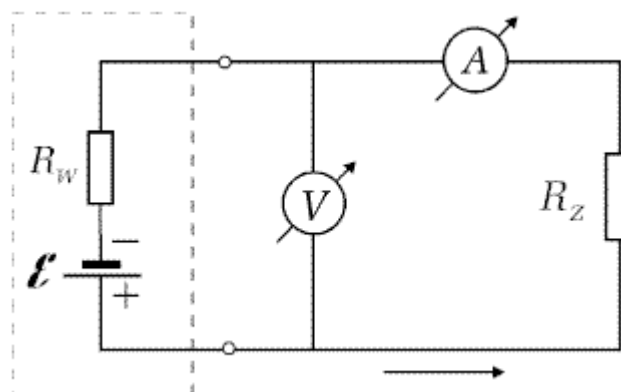
Istnieje wiele typów urządzeń umożliwiających wytwarzanie różnicy potencjałów elektrycznych. Ich działanie polega na przemieszczaniu ładunków elektrycznych kosztem innych rodzajów energii. W popularnych baterijkach jest to energia chemiczna. Może to być jednak energia potencjalna spiętrzona za zaporą wody, która przekształca się w energię kinetyczną ruchu łopatek turbiny napędzającej generator. Turbina może też być napędzana parą wodną pod wysokim ciśnieniem, ta zaś produkowana jest wskutek spalania węgla, paliwa ciekłego, gazowego czy jądrowego.

**Siła elektromotoryczna** (w skrócie SEM) jest różnicą potencjałów wytwarzaną przez źródło prądu, czyli urządzenie przetwarzające energię (chemiczną, mechaniczną, ...) na energię elektryczną. Jej wartość jest określona przez wydatek energetyczny źródła na wymuszenie przepływu ładunku  $q$ , przypadający na jednostkę ładunku. Należy więc podzielić pracę wykonaną przez siły zewnętrzne  $W_z$  na przeniesienie ładunku  $q$  przez wartość tego ładunku.

$$\mathcal{E} = \frac{W_z}{q} \quad (10.3.1)$$

Kierunek przepływu prądu w danym odcinku obwodu zależy od wartości i znaku różnicy potencjałów oraz SEM działającej na tym odcinku. **Przyjmuje się, że SEM ma znak dodatni jeśli jej działanie sprzyja ruchowi ładunków dodatnich w wybranym kierunku.**

Rysunek 10.3.1 przedstawia podstawowe elementy obwodu elektrycznego. Ważnym parametrem źródła siły elektromotorycznej jest jego opór wewnętrzny  $R_w$ , który przedstawiony został w postaci oddzielnego elementu, chociaż nie jest on dostępny z zewnątrz.



Linia przerywaną zaznaczono źródło SEM, a jego końcówki przedstawiono symbolicznie w postaci małych kółek. Zewnętrzną oporność oznaczono symbolem  $R_z$ . Symbolami:  $V$  oraz  $A$  zaznaczono woltomierz i amperomierz, czyli mierniki wskazujące różnicę potencjałów (napięcie) na zaciskach źródła oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie. Strzałka wskazuje umowny kierunek przepływu prądu. Przyjmujemy

**Rys. 10.3.1.** Podstawowe elementy obwodu elektrycznego

tu, że wewnętrzna oporność amperomierza jest zanedbywanie mała, zaś woltomierza dużo większa od  $R_z$ .

Rolę oporu wewnętrznego poznać można łatwo wykonując pomiary napięcia w obwodzie pokazanym na rysunku 10.3.1 dla różnych wartości oporności zewnętrznej. Im mniejsza będzie wartość tej oporności, tym mniejsze napięcie wskaże woltomierz. Jest to rezultatem rozkładu różnicy potencjałów wytwarzanej przez źródło pomiędzy napięcia na obu opornościach występujących w obwodzie.

$$U_z = \mathcal{E} - I \cdot R_w \quad (10.3.2)$$

Kiedy wartość oporu zewnętrznego będzie nieskończenie wielka wówczas napięcie  $U_z$  będzie największe i równe będzie wartości siły elektromotorycznej źródła. Odpowiada to sytuacji, kiedy obwód źródła prądu jest otwarty. Pozwala to określić siłę elektromotoryczną źródła w następujący sposób. **Siła elektromotoryczna równa jest różnicy potencjałów na biegunach źródła otwartego.**

Wykorzystując wzór (10.3.2) możemy siłę elektromotoryczną powiązać ze zmierzonym napięciem zewnętrznym zależnością

$$\mathcal{E} = U_z + I \cdot R_w \quad (10.3.3)$$

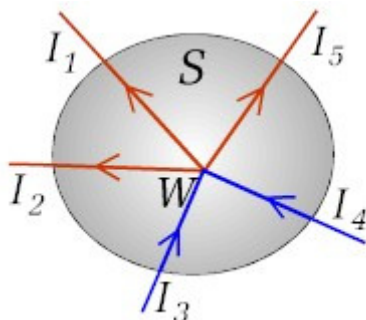
Korzystając zaś ze związku między natężeniem prądu płynącego przez przewodnik i napięciem na końcach przewodnika, możemy wyrazić  $U_z$  przez iloczyn natężenia prądu w obwodzie i oporności zewnętrznej otrzymując

$$\mathcal{E} = I \cdot (R_z + R_w) \quad (10.3.4)$$

Oznacza to, że siła elektromotoryczna w obwodzie równa jest sumie napięć w tym obwodzie (na oporze zewnętrznym i wewnętrznym).

#### 4. Prawa Kirchhoffa

Obliczanie rozkładu napięć i prądów w rozgałęzionych obwodach elektrycznych ułatwiają znacznie dwa prawa sformułowane przez Kirchhoffa. Prawa te wyróżniają dwa elementy układów elektrycznych: **węzły**, tzn. takie punkty w których zbiega się wiele przewodników oraz **oczka**, czyli zamknięte elementy obwodu.



Na rysunku 10.4.1 pokazany jest przykładowy węzeł  $W$  gdzie zbiega się pięć przewodników. W dwóch z nich (zaznaczonych kolorem niebieskim) prądy płyną w kierunku do węzła, w trzech pozostałych kierunek prądu jest przeciwny. W węźle nie ma żadnego źródła więc z zasady zachowania ładunku wynika, że suma prądów wpływających do węzła musi być równa sumie prądów wypływających. Można też powiedzieć, że suma algebraiczna prądów wpływających do węzła równa jest zeru. Jest to właśnie treść

**pierwszego prawa Kirchhoffa**, które zapisujemy i wyrażamy w postaci:

*Rys. 10.4.1. Ilustracja pierwszego prawa Kirchhoffa*

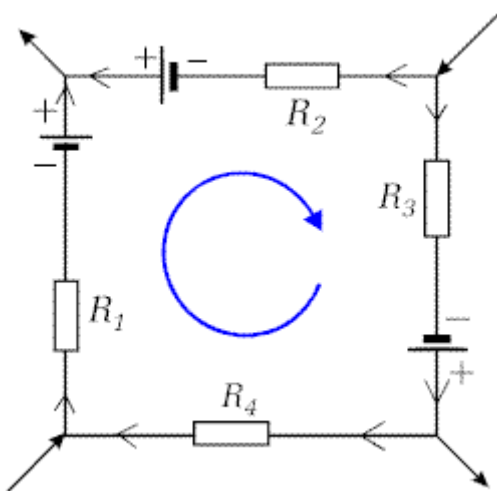
$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (10.4.1)$$

**Suma prądów w węźle sieci równa jest zeru.**

Przy sumowaniu, wartości prądów wpływających do węzła oznaczamy dodatnio, zaś wypływających ujemnie. Dla węzła przedstawionego na Rys. 10.4.1. prawo to wyraża równanie

$$I_3 + I_4 = I_1 + I_2 + I_5 \quad \text{lub} \quad I_3 + I_4 - I_1 - I_2 - I_5 = 0 \quad (10.4.1a)$$

Drugie prawo dotyczy oczka sieci. Przykładowe oczko pokazuje rysunek 10.4.2.



Elementami oczka są zarówno źródła siły elektromotorycznej jak i oporności. Ich liczba i układ może być całkowicie dowolny. Jeśli wybierzemy jakiś kierunek obiegu wokół konturu oczka, a następnie przypiszemy wszystkim prądom, których kierunek jest zgodny z obranym kierunkiem znak plus i odpowiednio prądom w kierunku przeciwnym - znak minus oraz wszystkim siłom elektromotorycznym występującym w oczku przypiszemy znak plus, jeśli powodują one przepływ prądu wzdłuż obranego kierunku i znak minus - jeśli w kierunku przeciwnym, to związek pomiędzy sumą algebraiczną sił elektromotorycznych w oczku oraz sumą napięć na występujących w oczku opornościach wyraża wzór stanowiący treść **drugiego prawa Kirchhoffa:**

*Rys. 10.4.2. Ilustracja drugiego prawa Kirchhoffa*

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^N I_k \cdot R_k \quad (10.4.2)$$

gdzie  $N$  jest liczbą odcinków na które kontur podzielony jest węzłami.

Prawo to sformułować można następująco.

**Suma wszystkich sił elektromotorycznych w oczku sieci równa jest sumie napięć występujących w tym oczku .**

Dla oczka przedstawionego na Rys. 10.4.2. drugie prawo Kirchhoffa wyraża równanie:

$$E_1 - E_2 + E_3 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 \quad (10.4.2a)$$

Przyjeliśmy tu, że natężenia prądów płynących przez oporniki  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$  to odpowiednio  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ , a siła elektromotoryczna sąsiadująca z opornikiem  $R_1$  to  $E_1$ , z opornikiem  $R_2$  - to  $E_2$ , a z opornikiem  $R_3$  - to  $E_3$ .

## 5. Praca i moc prądu

Obliczmy pracę jaka związana jest z przepływem prądu. Pamiętamy, że praca związana z przemieszczaniem ładunku elektrycznego pomiędzy punktami pola o różnych potencjałach jest iloczynem wartości ładunku i różnicy potencjałów pomiędzy tymi punktami, wzór (9.3.11). Zapiszmy ten wzór w postaci różniczkowej

$$dW = dq \cdot U = I \cdot dt \cdot U \quad (10.5.1)$$

Przez  $U$  oznaczyliśmy tu napięcie elektryczne czyli różnicę potencjałów pomiędzy punktami między którymi następuje przepływ prądu. Następnie skorzystaliśmy ze wzoru (10.1.1).

Pracę wykonaną przez prąd w skończonym czasie  $t$  wyznaczymy obliczając wartość całki:

$$W = \int_0^t U \cdot I \cdot dt \quad (10.5.2)$$

Jeśli napięcie i natężenie prądu nie zmieniają się w czasie tj. mamy do czynienia z przepływem prądu stałego, wówczas można wykonać całkowanie we wzorze (10.5.2) otrzymując:

$$W = I \cdot U \cdot t \quad (10.5.3)$$

Korzystając z zależności  $U = I \cdot R$ , możemy wzór (10.5.3) zapisać w postaci:

$$W = I^2 \cdot R \cdot t \quad (10.5.3a)$$

Praca ta spowoduje wzrost energii wewnętrznej przewodnika, a więc i wzrost temperatury. Jeżeli przewodnik będzie mieć kontakt z ośrodkiem (termostatem) o niższej temperaturze, to nastąpi przepływ ciepła z przewodnika do ośrodka. Ciepło to zwane jest **ciepłem Joule'a**.

**Moc prądu** możemy wyznaczyć ze wzoru (10.5.1) pamiętając, że jest to praca wykonana w jednostce czasu, czyli stosunek pracy do czasu, w którym została ona wykonana.

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot I \quad (10.5.4)$$

Korzystając z zależności (10.5.3.a), można moc prądu określić także wzorem:

$$P = I^2 \cdot R$$

(10.5.4a)



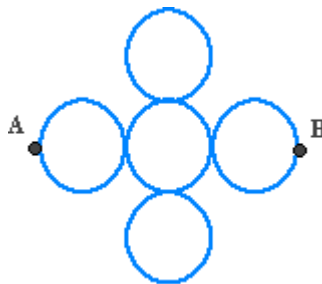
*Rys. 10.5.1. Linie wysokiego napięcia*

Wzór (10.5.3a) pokazuje, że ciepło wydzielane podczas przepływu prądu (ciepło Joule'a) szybko rośnie wraz ze wzrostem natężenia prądu - jest proporcjonalne do kwadratu natężenia. Gdy chcemy przesłać energię elektryczną na duże odległości, wydzielanie się ciepła jest zjawiskiem niepożądanym, bo oznacza straty przesyłanej energii. Dąży się więc do tego, aby natężenie prądu w liniach przesyłowych było niewielkie. Aby jednak przesłać daną moc  $P$  potrzebne jest odpowiednio wysokie napięcie, wzór (10.5.4). Z tego powodu energię elektryczną przesyła się pod napięciem 110 kV lub większym.

## Zadania

### Zadanie 10.1 opór zastępczy

Każdy z okręgów, które są elementami układu przedstawionego na *Rys. z10.1.1.*, ma opór  $R$ . Obliczyć opór zastępczy  $R_z$  dla układu przewodników, między punktami A i B.

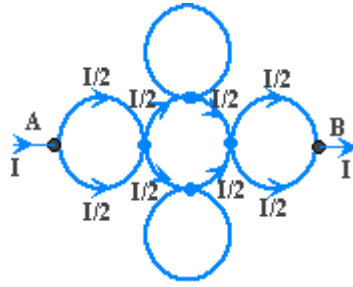


*Rys. z10.1.1. Układ przewodników.*

### Zadanie 10.1 wskazówka



Spadek napięcia między punktami A i B będzie:


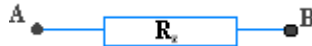




$$U_{AB} = I \cdot R_z \quad \text{oraz} \quad I \cdot R_z = \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R$$

### Zadanie 10.1 rozwiązanie

Dla pojedynczego okręgu  - opór jest  $R$ , a dla odpowiadającego mu półokręgu  opór jest  $R/2$ .

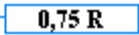
Spadek napięcia między punktami A i B  będzie równy spadkowi napięcia na oporze  $R_z$  , co zapisujemy:

$$U_{AB} = I \cdot R_z \quad \text{oraz} \quad I \cdot R_z = \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I \cdot \frac{1}{2}R$$

ponieważ do kolejnych węzłów wpływają i wypływają z nich prądy  $I/2$ .

Zatem z pierwszego i drugiego prawa Kirchoffa:

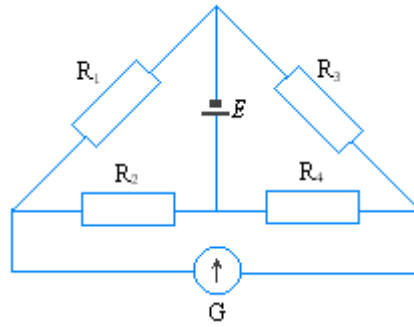
$$R_z = \frac{3}{4}R$$

czyli  .

### Zadanie 10.2 mostek Wheatstone'a

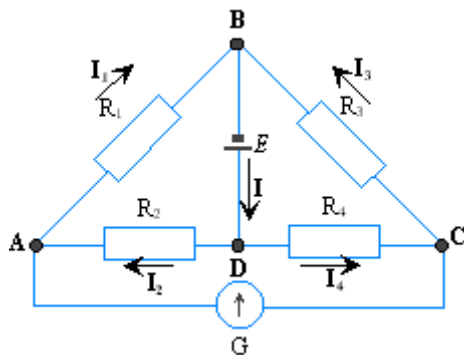
W układzie elektrycznym przedstawionym na *Rys. z10.2.1.* przez galwanometr  $G$  nie płynie prąd.

Znane są wielkości oporów  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  oraz siła elektromotoryczna  $E$ . Należy obliczyć opór  $R_1$ .



Rys. z10.2.1. Mostek Wheatstone'a stosowany do pomiaru oporów.

### Zadanie 10.2 rozwiązanie



Wprowadzamy dodatkowe oznaczenia tak jak to zostało przedstawione na rysunku z10.2.2. Przez oporniki  $R_1, R_2, R_3, R_4$  płyną prądy  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , odpowiednio.

Z pierwszego prawa Kirchhoffa, dla węzłów **A**, **B** i **C**, mamy:

$$I_2 = I_1, \quad I_1 + I_3 = I, \quad I_4 = I_3.$$

Rys. z10.2.2. Dodatkowe oznaczenia.

Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa (przyjmując za dodatni kierunek obiegu przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara) mamy:

dla oczka **ABCGA**  $-I_1R_1 + I_3R_3 = 0, (*)$

dla oczka **ADCGA**  $I_2R_2 - I_4R_4 = 0, (**)$

dla oczka **BCDB**  $I_3R_3 + I_4R_4 = E. (***)$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa i z równania  $(**)$  mamy, że

$$I_1 = I_2 = I_4 \frac{R_4}{R_2}.$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa i z równania  $(*)$  mamy, że

$$I_3 = I_4 = I_1 \frac{R_1}{R_3}.$$

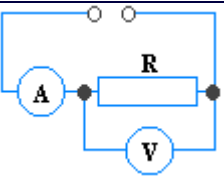
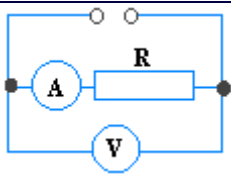
Podstawiając obliczone  $I_4$  do poprzedniego równania otrzymujemy:

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4}$$

Wynik nie zależy od  $E$ .

### Zadanie 10.3 woltomierz i amperomierz w obwodzie

Opór  $R = 200 \Omega$  umieszczono w obwodach elektrycznych przedstawionych poniżej na schematach 1) i 2). W celu wyznaczenia oporu  $R$  obliczono stosunek napięcia wskazywanego przez woltomierz do natężenia prądu wskazywanego przez amperomierz. Uzyskano sprzeczne rezultaty.

<i>Rys. z10.3.1. Schemat 1).</i>	<i>Rys. z10.3.2. Schemat 2).</i>
	
Otrzymano wynik $R_1 = 160 \Omega$	Otrzymano wynik $R_2 = 210 \Omega$

Jakie były opory wewnętrzne: amperomierza  $r_a$  i woltomierza  $r_v$ ?

### Zadanie 10.3 rozwiązanie

Dla amperomierza  $r_a = R_2 - R$ , a dla woltomierza  $r_v = \frac{R \cdot R_1}{R - R_1}$ .

Opór wewnętrzny amperomierza  $r_a = 10 \Omega$ , a woltomierza  $r_v = 800 \Omega$ .

Opór amperomierza powinien być mały w porównaniu z oporem mierzonym, aby można było pominąć spadek napięcia na tym mierniku. Opór woltomierza powinien być znacznie większy od oporu mierzonego aby można było pominąć składową natężenia prądu, która płynie przez woltomierz.

## Nowe pojęcia, definicje i wyrażenia

<b>prąd elektryczny</b>	uporządkowany ruch ładunków elektrycznych
<b>natężenie prądu</b>	ładunek przepływający przez dowolny przekrój przewodnika w jednostce czasu
<b>prąd stały</b>	prąd, którego natężenie nie zmienia się w czasie
<b>wektor gęstości prądu</b>	wektor którego kierunek określony jest przez kierunek ruchu nośników dodatnich, a wartość odpowiada natężeniu prądu płynącego przez prostopadłą do tego kierunku powierzchnię jednostkową wokół danego punktu w przewodniku
<b>prędkość unoszenia</b>	prędkość przemieszczania się ładunków w przewodniku pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego
<b>prawo Ohma</b>	Natężenie prądu w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia czyli wartość oporności przewodnika jest stała
<b>oporność właściwa</b>	wielkość charakteryzująca własności przewodzące danego materiału, równa liczbowo oporności materiału o jednostkowym przekroju i jednostkowej długości
<b>siła elektromotoryczna</b>	różnica potencjałów na biegunach źródła otwartego
<b>pierwsze prawo Kirchhoffa</b>	Algebraiczna suma prądów w węźle sieci równa jest zeru.
<b>drugie prawo Kirchhoffa</b>	Suma algebraiczna wszystkich sił elektromotorycznych w oczku sieci równa jest sumie występujących w tym oczku napięć
<b>ciepło Joule'a</b>	ciepło wydzielone wskutek przepływu prądu elektrycznego

# Pole magnetyczne

## Wstęp

### Zjawiska magnetyczne

Zacznijmy od "pocztówki" z odległego kontynentu. Można pomyśleć, że przedstawia ona tor wyścigowy. Ale kto (lub co) biega po okręgu, którego długość ma "na oko" kilka kilometrów?



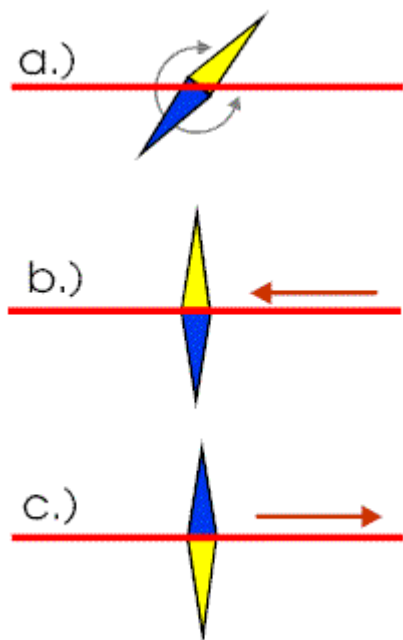
*Fot. 11.0.1. Widok zderzacza RHIC w Brookhaven National Laboratory*

Chociaż położony wśród zieleni, nie jest to jednak ośrodek wypoczynkowy, ale amerykańskie laboratorium fizyki jądrowej **Brookhaven National Laboratory** na wyspie Long Island, ok. 100 km od Nowego Yorku. Zawodnikami w "wyścigach" po widocznym na fotografii okręgu są zaś jądra atomowe rozpędzone do prędkości bliskich prędkości światła.

Konstrukcja tego gigantycznego urządzenia to przede wszystkim zastosowanie wiadomości o ładunkach elektrycznych poruszających się w polu magnetycznym, co jest przedmiotem lekcji, którą właśnie rozpoczynamy. Pod koniec lekcji powrócimy do Brookhaven, ale wtedy mechanizm działania tego skomplikowanego kompleksu akceleracyjnego będzie dla Ciebie o wiele bardziej zrozumiały.

Z ruchem ładunków elektrycznych, czyli z przepływem prądu elektrycznego związane jest oddziaływanie inne od omawianego dotychczas oddziaływania statycznych ładunków oraz od zjawisk zachodzących w przewodniku. Oddziaływanie to może być łatwo wykryte za pomocą igły magnetycznej umieszczonej w pobliżu przewodnika z prądem. Nazywamy je oddziaływaniem magnetycznym.

Zjawiska magnetyczne znane są od dawna. Już w starożytności obserwowano występowanie sił pomiędzy kawałkami rud żelaza znajduwanymi w Azji Mniejszej (Magnezji) oraz ich oddziaływania na przedmioty żelazne. Kolejne obserwacje doprowadziły do skonstruowania busoli magnetycznej, która odegrała ważną rolę w morskich eksploracjach świata.



**Rys. 11.0.1.**  
*Schemat doświadczenia Oersteda; widok z góry. Czerwonym kolorem pokazany jest przewodnik pod którym umieszczona jest igła magnetyczna:*  
*a.) w przewodniku nie płynie prąd: ustawienie igły określa kierunek pola magnetycznego Ziemi (dokładniej, składowej tego pola w płaszczyźnie, w której obraca się igła),*  
*b.), c.) w przewodniku płynie prąd w kierunku wskazanym strzałką: igła ustawiona jest prostopadle do kierunku przepływu prądu.*

Za przełom w badaniu zjawisk magnetycznych można uznać **doświadczenia Oersteda wykonane w 1820 roku**. Duński fizyk Hans Christian Oersted zaobserwował, że igła magnetyczna umieszczona pod przewodnikiem przez który płynie prąd ustawia się do tego przewodnika prostopadle. Po zmianie kierunku prądu igła obraca się o 180 stopni.

Zakładając, że wiedza nasza ogranicza się do czterech pierwszych lekcji kursu Fizyka 2, wynik doświadczenia Oersteda powinien wywołać w nas spore zdziwienie!

- Po pierwsze - pamiętamy, że przewodnik w którym płynie prąd pozostaje elektrycznie obojętny. Rzeczywiście, równanie ciągłości wymaga, by taka sama wartość ładunku wpływała z jednej co i wypływała z drugiej strony przewodnika. Wynika z tego, że **igła reaguje nie na obecność ładunków elektrycznych, ale na ich ruch**.
- Po drugie - gdybyśmy w naszych staraniach zrozumienia obserwacji Oersteda potraktowali igłę magnetyczną jak dipol elektryczny to zgodnie z rozważaniami w lekcjach poprzednich powinniśmy raczej oczekiwać przyciągania któregoś jej końca do przewodnika lub ustawienia się igły wzdłuż kierunku ruchu ładunków. Dlaczego więc **igła ustawia się prostopadle do kierunku przepływu prądu (?)**

Rzeczywiście - chodzi tu wyraźnie o inne zjawisko, które kieruje się innymi prawami niż poznane dotychczas. Wiemy, że igła posiada bieguny: północny *N* i południowy *S*. Jest więc sens traktować ją jako dipol i założyć że **igła ustawia się wzdłuż kierunku pola, ale innego niż pole elektryczne**.

Zapiszmy konkluzje wynikające z doświadczenia Oersteda nazywając to pole na które reaguje igła magnetyczna - **polem magnetycznym**.

1. **Uporządkowany ruch ładunków elektrycznych wywołuje w otaczającej przestrzeni powstawanie pola magnetycznego.**
2. **Pole to ma charakter pola wektorowego (posiada własności kierunkowe).**
3. **Linie tego pola są prostopadłe do kierunku ruchu ładunków elektrycznych.**

Pojawia się jednak szereg pytań. Jak zmienia się pole magnetyczne w funkcji odległości od przewodnika lub poruszającego się ładunku? Jaki jest jego kierunek w zależności od kierunku ruchu ładunku lub prądu płynącego w przewodniku? Jak wyznaczyć pole dla przewodnika, który nie jest prostoliniowy? Jak będzie pole kiedy w przestrzeni pojawi się wiele przewodników, a w każdym z nich prąd będzie inny? Czy przewodniki te będą na siebie wzajemnie oddziaływać?

Dalsze nasze rozważania poświęcone będą znalezieniu odpowiedzi na te i wiele innych pytań dotyczących niezwykle ciekawych własności pola magnetycznego.

## 11.1. Własności pola magnetycznego

### Pole magnetyczne może być wytworzone przez:

- poruszające się ładunki elektryczne
- prąd płynący w przewodniku
- dipol magnetyczny
- ciała namagnesowane

### Pole magnetyczne może działać siłą na:

- poruszające się ciała naładowane elektrycznie
- przewodnik z prądem
- dipol magnetyczny
- ciała namagnesowane

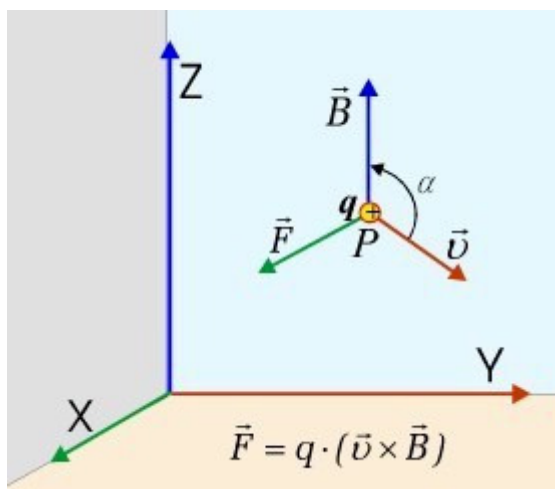
*Zwróćmy uwagę, że przepływ prądu to uporządkowany ruch ładunków, dipol magnetyczny to pętla, w której płynie prąd, a własności magnetyczne magnesów, jak zobaczymy w dalszej części tej lekcji, wynikają z tego, że ich atomy to mikroskopijne dipole magnetyczne.*

W danym punkcie przestrzeni istnieje pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , jeśli na ładunek punktowy  $q$ , poruszający się z prędkością  $\vec{v}$  działa w tym punkcie siła  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

(11.1.1)

Dynamiczne własności pola magnetycznego opisuje wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . Jeżeli w danym punkcie przestrzeni jest określony wektor  $\vec{B}$  to wektor siły może mieć w tym punkcie różny kierunek i zwrot, gdyż jest on zależny od orientacji wektora prędkości względem wektora  $\vec{B}$ . Wynika stąd, że w przypadku pola magnetycznego nie należy używać określenia „linie sił pola”. Linie pola magnetycznego to w ogólności krzywe, do których w każdym punkcie jest styczny wektor  $\vec{B}$ . Specyficzne działanie pola magnetycznego na ładunek elektryczny można wytłumaczyć w następujący sposób. Poruszający się ładunek wytwarza własne pole magnetyczne. Siła Lorentza to oddziaływanie tego pola z zewnętrznym polem magnetycznym, zależne od wzajemnej konfiguracji tych pól.



Rys.11.1.1. Siła Lorentza

Siłą działającą w polu magnetycznym na poruszający się ładunek nazywamy **siłą Lorentza**. Widzimy, że siła działająca na ładunek poruszający się w polu magnetycznym jest zawsze prostopadła zarówno do kierunku wektora jego prędkości, jak i do kierunku wektora indukcji magnetycznej. Zwrot tej siły zależy od znaku poruszającego się ładunku. Zwróćmy uwagę, że siła Lorentza nie może wykonać pracy, ponieważ w każdej chwili jest prostopadła do wektora przesunięcia. Oznacza to, że siła Lorentza nie może zmienić energii kinetycznej poruszającego się ciała, a powoduje jedynie zmianę kierunku ruchu.

Wartość siły Lorentza zależy, zgodnie z własnością iloczynu wektorowego, od kąta między wektorem prędkości ładunku i wektorem indukcji magnetycznej

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (11.1.2)$$

Jeśli cząstka naładowana porusza się prostopadle do kierunku wektora  $\vec{B}$ , to siła ta ma maksymalną wartość równą:

$$F_{\max} = q \cdot v \cdot B, \quad (11.1.3)$$

skąd :

$$B = \frac{F_{\max}}{q \cdot v} \quad (11.1.4)$$

Możemy więc powiedzieć, że wartość indukcji magnetycznej jest równa sile jaka działa na jednostkowy ładunek dodatni (próbny) poruszający się w polu magnetycznym z jednostkową prędkością w kierunku, w którym siła magnetyczna ma maksymalną wartość.

Jednostką indukcji magnetycznej jest **tesla (T)** określona zgodnie ze wzorem (11.1.1) w postaci

$$1T = 1 \frac{N}{C \cdot (m/s)} = 1 \frac{N}{A \cdot m} \quad (11.1.5)$$

Jeśli ładunek  $q$  znajduje się równocześnie w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to niezależnie od pola magnetycznego działa na niego siła  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ , patrz wzór (9.2.1) pochodząca o pola elektrycznego. Uwzględniając to zapiszemy siłę Lorentza dla ładunku w polach: elektrycznym i magnetycznym:



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (11.1.6)$$

**Siła elektrodynamiczna** to siła działająca na przewodnik z prądem znajdujący się w polu magnetycznym.

Jak wiemy, prąd elektryczny stanowi uporządkowany ruch ładunków w przewodniku. Prąd ten charakteryzujemy natężeniem prądu  $I$ , które określone jest wzorem (10.1.1).

Wykorzystajmy to dla zapisania siły Lorentza działającej na ładunek  $dq$  poruszający się z prędkością  $\vec{v}$  w przewodniku znajdującym się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$

$$d\vec{F} = \overbrace{dq}^{I \cdot dt} \cdot \left( \overbrace{\vec{v}}^{d\vec{l}/dt} \times \vec{B} \right) = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (11.1.7)$$

Wektor prędkości zapisaliśmy jako stosunek przemieszczenia  $d\vec{l}$  ładunku wzdłuż osi przewodnika do czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło. Otrzymaliśmy w ten sposób wyrażenie określające siłę działającą na element przewodnika o długości  $d\vec{l}$  przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ .

Pamiętając o własnościach iloczynu wektorowego widzimy, że kiedy przewodnik ustawiony jest wzdłuż kierunku pola to nie działa na niego żadna siła, kiedy ustawiony jest prostopadle do kierunku pola - siła jest największa. Wartość tej siły jest proporcjonalna do natężenia prądu w przewodniku.

W polu magnetycznym tak, jak w każdym polu wektorowym, można wprowadzić strumień wektora  $\vec{B}$ , jako skalarny iloczyn wektora  $\vec{B}$  i wektora  $d\vec{S}$ , prostopadłego do elementu powierzchni  $dS$  (porównaj wykład 9.6).

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (11.1.8)$$

### **Prawo Gaussa**

Strumień wektora indukcji pola magnetycznego przez dowolną, zamkniętą powierzchnię jest równy zero - tyle samo linii pola wchodzi do powierzchni, co z niej wychodzi.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.1.9)$$

Taka postać prawa Gaussa dla pola magnetycznego jest matematycznym zapisem ważnej własności: **pole magnetyczne jest polem bezźródłowym**. Porównajmy wzór (11.1.9) z prawem Gaussa dla pola elektrostatycznego, wzór (9.6.7). W tym przypadku analogiczna wielkość - strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą,

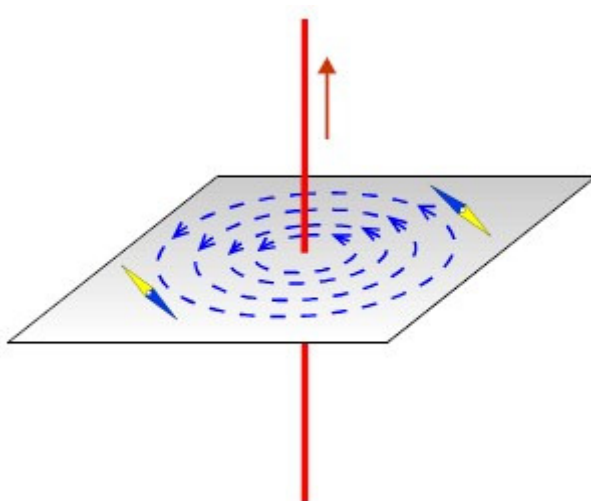
$\Phi_E$ , równa jest sumie ładunków zawartych wewnątrz tej powierzchni. Ładunki te stanowią źródła pola elektrostatycznego - pole elektrostatyczne jest więc polem źródłowym.

### Prawo Ampere'a

Suma skalarnych iloczynów  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  po krzywej zamkniętej otaczającej przewody z prądem (czyli tzw. cyrkulacja wektora  $\vec{B}$ ) jest wprost proporcjonalna do sumy natężeń prądów przepływających przez powierzchnię  $S$ , której brzegiem jest ta krzywa.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad (11.1.10)$$

Współczynnik  $\mu_0$  to przenikalność magnetyczna próżni. Taka postać prawa Ampere'a jest matematycznym zapisem ważnej własności: **pole magnetyczne jest polem wirowym**.



Prawo Ampère'a umożliwia łatwe wyznaczenie wartości wektora indukcji magnetycznej w zadanej odległości od nieskończenie długiego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu  $I$ .

Na Rys. 11.1.2 pokazane są linie indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd płynący w przewodniku prostoliniowym. Igła magnetyczna umieszczona w dowolnym punkcie ustawia się w kierunku stycznym do linii pola. Z powodu symetrii osiowej takiego układu linie pola są okręgami o środkach leżących na przewodniku z prądem. Zauważamy istotną różnicę pomiędzy liniami indukcji pola magnetycznego, a liniami sił pola elektrycznego, które skierowane były do lub od ładunków elektrycznych, zaczynając lub kończąc się na nich. Linie indukcji magnetycznej nie mają początku ani końca, ale są zamknięte i otaczają przewód z prądem.

**Rys. 11.1.2.** Pole magnetyczne prostoliniowego przewodnika z prądem

W celu wyznaczenia wartości wektora indukcji magnetycznej w odległości  $r$  od przewodnika obliczamy całkę po okręgu o promieniu  $r$  współśrodkowym z przewodnikiem oraz do niego prostopadłym. Otrzymamy z prawa Ampere'a:

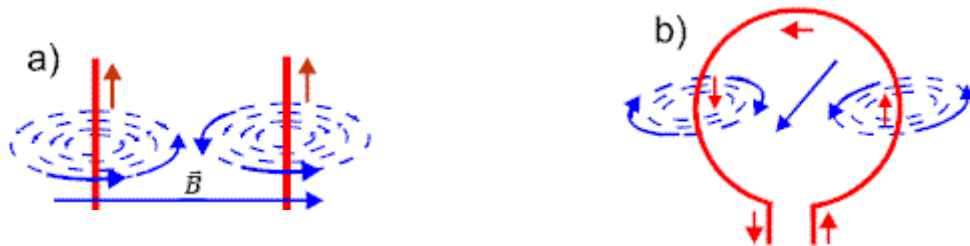
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint dl = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot I \quad (11.1.11)$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że wektory  $\vec{B}$  i  $d\vec{l}$  są w tym przypadku zawsze do siebie równoległe, bo linie wektora indukcji są okręgami współśrodkowymi z przewodnikiem tak samo jak kontur, po którym wykonujemy całkowanie i wartości wektora  $\vec{B}$  są takie same w tej samej odległości od przewodnika. Wartość wektora indukcji w odległości  $r$  od prostoliniowego przewodnika, przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ , wynosi więc

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (11.1.12)$$

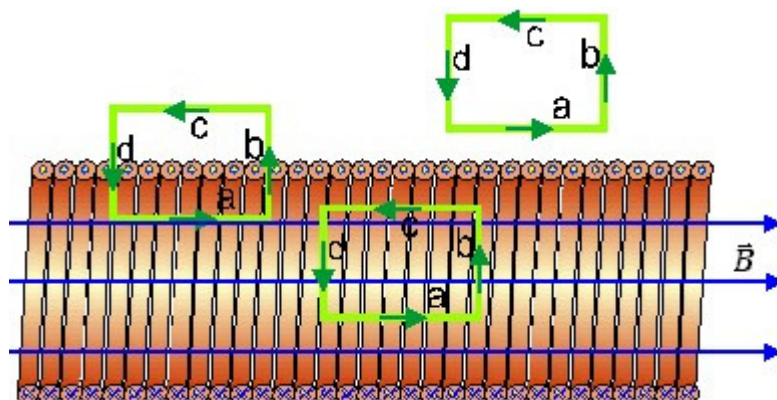
Wektor ten jest styczny w danym punkcie do okręgu, po którym wykonane zostało całkowanie.

Ważnym zastosowaniem prawa Ampère'a jest wyznaczenie pola magnetycznego wewnątrz **solenoidu**, który stanowi wiele zwojów przewodnika nawiniętych jeden obok drugiego (tzw. **zwojnica**) i w takiej liczbie, że jego długość jest znacznie większa od średnicy. Na rysunku 11.1.3.a) pokazane są elementy dwóch sąsiednich zwojów oddalone od siebie, by zademonstrować konfigurację pola magnetycznego wokół nich. Rysunek 11.1.3.b) pokazuje pole jednego zwoju solenoidu.



**Rys. 11.1.3.** Pole: a) fragmentu dwóch sąsiednich zwojów, b) jednego zwoju solenoidu

Widzimy, że pola pomiędzy sąsiednimi zwojami kompensują się, natomiast pola od strony wewnętrznej i na zewnątrz solenoidu dodają się. Pole wewnątrz i na zewnątrz jest symetryczne względem osi solenoidu. Kierunek wektora indukcji magnetycznej pokrywa się z kierunkiem tej osi.



**Rys. 11.1.4.** Pole magnetyczne solenoidu; strzałki niebieskie pokazują kierunek pola magnetycznego; ramki i strzałki zielone - obwody po których liczymy cyrkulację

Rysunek 11.1.4. przedstawia w przekroju fragment solenoidu który będziemy traktować jako nieskończenie długi. Dla wyznaczenia wartości wektora indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez prąd płynący w solenoidzie skorzystamy z prawa Ampere'a obliczając cyrkulację wektora  $\vec{B}$  wzdłuż zamkniętego konturu zgodnie ze wzorem (11.1.10). Dla uproszczenia naszych rozważań nadamy konturowi postać prostokątnej ramki, której boki  $a$  i  $c$  ułożone są równoległe do osi solenoidu, a boki  $b$  i  $d$  są do tej osi prostopadłe. Zauważamy natychmiast, że cyrkulacja liczona zarówno dla ramki znajdującej się całkowicie wewnątrz solenoidu jak i dla tej na zewnątrz równa jest zero, bowiem w obu przypadkach ramki nie obejmują przewodników z prądem. (Co nie znaczy bynajmniej, że nie ma tam pola magnetycznego.) Zauważamy też, że wkład do cyrkulacji od boków  $b$  i  $d$  jest we wszystkich przypadkach równy zero, bowiem wektor  $\vec{B}$  jest prostopadły do tych boków i iloczyn skalarny we wzorze (11.1.10) równy jest zero. Wynika z tego bardzo ważny wniosek. Wkłady do cyrkulacji od boków  $a$  i  $c$  kompensują się wewnątrz i na zewnątrz solenoidu co oznacza, że panuje tam jednorodne pola magnetyczne.

Wniosek ten zawiera faktycznie dwa stwierdzenia. Pierwsze, że **pole magnetyczne w całej przestrzeni wewnątrz solenoidu jest jednorodne, czyli takie samo co do wartości i kierunku**. Drugie, że pole w całej przestrzeni zewnętrznej też jest jednorodne. Brzmi to paradoksalnie, bowiem przestrzeń ta rozciąga się do nieskończoności. Oczekiwalibyśmy raczej, że pole zmniejsza się ze wzrostem odległości od solenoidu. Co więcej - pamiętamy, że linie wektora indukcji magnetycznej są zamknięte i ten sam skończony strumień przenika przez ograniczoną powierzchnię przekroju poprzecznego wewnątrz solenoidu, co i przez nieskończoną powierzchnię wokół solenoidu na zewnątrz. Oba te warunki mogą być spełnione równocześnie tylko wtedy, kiedy **pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu równe jest zero**.

Pamiętajmy jednak, że rozważamy tu solenoid o nieskończonej długości. W rzeczywistych solenoidach o długościach skończonych występują też składowe pola wzdłuż boków  $b$  i  $d$ . Pole na zewnątrz rzeczywistego solenoidu nie jest więc dokładnie równe zero, choć znacznie mniejsze niż wewnątrz. Wartość tego pola zależna jest od położenia punktu względem osi i środka solenoidu.

Powróćmy do wyznaczenia wartości indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu o nieskończonej długości. W tym celu umieścimy ramkę tak by jej bok  $a$  znajdował się

wewnątrz solenoidu, a bok  $c$  na zewnątrz. Wiemy już teraz, że niezerowy wkład do cyrkulacji wnosi wyłącznie bok  $a$ . Przyjmijmy też, że na jednostkę długości solenoidu przypada  $n$  zwojów, czyli wewnątrz ramki przepływa prąd równy  $I \cdot n \cdot a$ . W takim przypadku wzór (11.1.10) sprowadza się do całkowania wzdłuż tego tylko boku w rezultacie czego otrzymujemy.

$$B \cdot a = \mu_0 \cdot I \cdot n \cdot a \quad \text{czyli} \quad B = \mu_0 \cdot I \cdot n \quad (11.1.13)$$

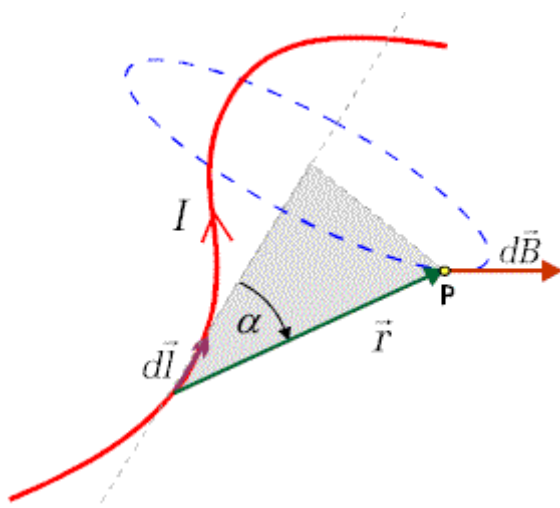
Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu proporcjonalne jest do natężenia prądu i gęstości zwojów solenoidu. Ten prosty wzór obowiązuje ściśle dla solenoidu o nieskończonej długości. W praktyce, przybliża on nieźle wartość indukcji pola magnetycznego w punktach znajdujących się w środkowej części solenoidów o długościach skończonych.



Solenoidy jako urządzenia służące do wytwarzania pola magnetycznego znajdują zastosowanie w wielu różnorodnych instrumentach pomiarowych oraz w eksperymentach fizycznych. O skali wielkości stosowanych solenoidów świadczy zamieszczona obok fotografia.

*Fot. 11.1.5. Jeden z większych solenoidów na świecie - służy do wytwarzania pola magnetycznego w eksperymencie STAR w Brookhaven National Laboratory (USA). "STAR" - to pierwsze litery słów "Solenoidal Tracker At RHIC" - co można przetłumaczyć jako "Solenoidalny tropiciel w RHIC" i służy do "tropienia" cząstek elementarnych.*

Zwykle mamy do czynienia z bardziej złożonym rozkładem prądów elektrycznych. Wyznaczenie wektora indukcji magnetycznej w dowolnym punkcie umożliwia w takim przypadku **prawo Biota-Savarta**.



Rozważmy krzywoliniowy przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu  $I$ , Rys. 11.1.6. Przewodnik ten możemy rozłożyć na sumę bardzo dużej liczby elementów z których każdy możemy uznać za prostoliniowy. Elementowi takiemu przypisujemy wektor jego długości  $d\vec{l}$  skierowany zgodnie z kierunkiem przepływu prądu. Interesuje nas wektor indukcji pola magnetycznego w punkcie  $P$ , którego położenie wyznacza promień wodzący  $\vec{r}$  określony względem danego elementu przewodnika.

### Rys. 11.1.6. Prawo Biota-Savarta

Zgodnie z prawem Biota-Savarta indukcję pola magnetycznego w tym punkcie pochodzącą od elementu  $d\vec{l}$  określa wzór

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (11.1.13)$$

W formie skalarnej możemy wzór ten zapisać w postaci

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (11.1.14)$$

gdzie kąt  $\alpha$  zawarty jest pomiędzy elementem  $d\vec{l}$  i promieniem  $\vec{r}$ . Ważnym wnioskiem z prawa Biota-Savarta jest to, że pole magnetyczne od przewodnika o dowolnym kształcie, jest wprost proporcjonalne do natężenia prądu płynącego w tym przewodniku. Z zależności tej będziemy korzystać w dalszej części naszego kursu.

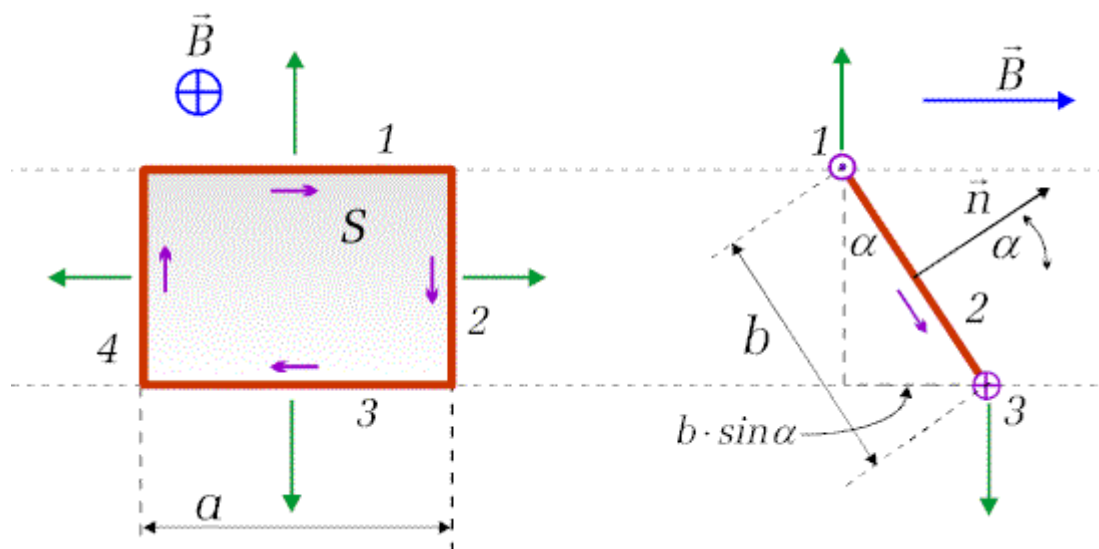
Dla wyznaczenia wypadkowego wektora indukcji magnetycznej pochodzącego od całego przewodnika należy obliczyć całkę z wyrażenia (11.1.14) po całkowitej długości przewodnika.

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \quad (11.1.15)$$

## 11.2. Dipol magnetyczny

Obliczmy siłę działającą na sztywną ramkę prostokątną przez którą płynie prąd, umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , Rys. 11.2.1. (Symbol kółka z krzyżem na rysunku oznacza kierunek prostopadły do płaszczyzny ekranu "od patrzącego". symbol kółka z kropką, "do patrzącego".) Kolorem jasno-brązowym pokazana jest ramka, a fioletowe strzałki wskazują kierunek prądu. Obie części rysunku, lewa i prawa, przedstawiają tę samą ramkę, przy czym lewa część pokazuje rzut odpowiadający patrzeniu prostopadle na ekran, prawa pokazuje rzut oglądany przy patrzeniu wzdłuż ekranu z prawej strony. Zwróćmy uwagę, że ramka nie leży w płaszczyźnie ekranu, ale jest od niej odchylona tak, że bok  $I$  jest bliżej patrzącego niż bok 3. Boki te są prostopadłe do kierunku pola magnetycznego, które skierowane jest za ekran. Boki 2 i 4 są nachylone względem ekranu. Uwaga: zanedbujemy tu szczegóły związane z doprowadzeniem prądu do ramki jako element techniczny nie mający wpływu na nasze rozważania. (Jeśli przewody doprowadzające przebiegałyby obok siebie, to kierunki prądu w nich byłyby

przeciwnie i efekty magnetyczne znosiłyby się. Dla naszych rozważań ważne jest jedynie to, że w ramce przepływa prąd.)



Rys. 11.2.1. Ramka z prądem w polu magnetycznym

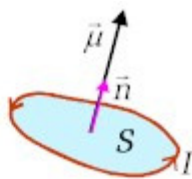
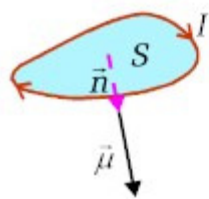
Stosując wzór (11.1.6) do każdego z boków ramki i pamiętając, że kierunek wektora  $d\vec{l}$  odpowiadający danemu bokowi pokrywa się z kierunkiem prądu, zauważamy że siły działające na poszczególne odcinki ramki skierowane będą tak, jak pokazują zielone strzałki na rysunku. Siły działające na odcinki 2 i 4 skierowane są w przeciwne strony i znoszą się wzajemnie. Siły działające na odcinki 1 i 3 też skierowane są w przeciwne strony, ale kiedy płaszczyzna ramki jest nachylona względem ekranu to powstaje moment obrotowy równy

$$M = 2 \cdot I \cdot a \cdot B \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha = I \cdot \overbrace{a \cdot b}^S \cdot B \cdot \sin \alpha = I \cdot S \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (11.2.1)$$

gdzie przez  $S$  oznaczyliśmy powierzchnię ramki. Zauważmy, że wyrażenie to jest bardzo podobne do wyrażenia (9.4.8) na moment obrotowy jakiego doznaje dipol elektryczny w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Rolę wektora  $\vec{E}$  pełni tu wektor  $\vec{B}$ , zaś dipolowemu momentowi elektrycznemu  $p = q \cdot l$  odpowiada tu wyraz  $I \cdot S$ . Przez analogię możemy więc obwodowi w kształcie ramki o powierzchni  $S$  z prądem o natężeniu  $I$  przypisać dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  zdefiniowany wzorem

$$\vec{\mu} = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (11.2.2)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem prostopadłym do powierzchni ramki skierowanym zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej, której obrót pokrywa się z kierunkiem przepływu prądu po konturze ramki.



Warto zauważyć, że zgodnie z wzorem (11.2.2) dipolowy moment magnetyczny obwodu z prądem zależy jedynie od powierzchni rozpiętej na konturze, a nie od kształtu konturu.

*Rys. 11.2.2. Dipolowe obwody magnetyczne obwodów z prądem elektrycznym o dowolnym kształcie (nie koniecznie w postaci ramki prostokątnej) w zależności od kierunku prądu*

Moment obrotowy jakim działa pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  na ramkę możemy teraz zapisać w postaci wektorowej

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (11.2.3)$$

Tak jak układ dwóch jednakowych o przeciwnym znaku ładunków nazwaliśmy dipolem elektrycznym, tak teraz przez analogię każdy zamknięty obwód z prądem elektrycznym będziemy nazywali **dipolem magnetycznym**.

Na podstawie naszych rozważań widzimy, że obwody z prądem w polu magnetycznym będą ustawiały się tak, aby wektor indukcji magnetycznej był prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na konturze obwodu. Wtedy znika moment obrotowy jakim pole magnetyczne działa na obwód, a jego moment dipolowy jest równoległy do linii indukcji. Maksymalnej wartości moment obrotowy będzie działał, gdy do pola magnetycznego wprowadzimy obwód, którego płaszczyzna będzie równoległa do linii indukcji magnetycznej, a więc dipolowy moment magnetyczny obwodu będzie prostopadły do linii indukcji.

Do dipoli magnetycznych będziemy jeszcze powracać, teraz natomiast warto zwrócić uwagę, że wyznaczając moment obrotowy działający na ramkę z prądem w polu magnetycznym, pokazaliśmy równocześnie zasadę działania silników elektrycznych oraz wskazówkowych przyrządów pomiarowych. W urządzeniach tych siły działające na ramkę z wielokrotnością są poprzez nawinięcie wielu zwojów przewodnika na wspólny szkielet.

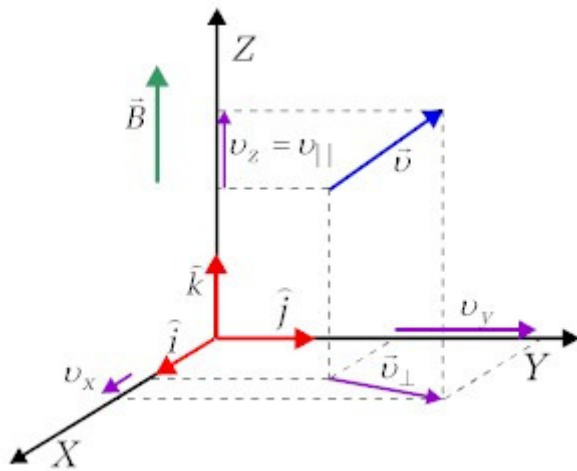
### 11.3. Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym

Jak będzie poruszać się cząstka naładowana w polu magnetycznym? Odpowiedź na to pytanie ukaże nam ogromne możliwości jakie stwarza nauce, technice, medycynie itd. zastosowanie pola magnetycznego do sterowania ruchem cząstek naładowanych. Jak zobaczymy potem, jeszcze większe możliwości wpływu na ruch cząstek naładowanych stwarza wykorzystanie kombinacji pól magnetycznych i elektrycznych.

Przypomnijmy jeszcze raz wzór określający siłę Lorentza, czyli siłę działającą na ładunek poruszający się w polu magnetycznym,



$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (11.3.1)$$



*Rys. 11.3.1. Wektor indukcji magnetycznej i składowe wektora prędkości cząstki w układzie współrzędnych prostokątnych.*

Ustawmy układ współrzędnych prostokątnych tak, by oś  $Z$  pokrywała się z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ; Rys. 11.3.1. pokazuje konfigurację geometryczną dla naszego przypadku. Kolorem czerwonym

zaznaczono wersory wyznaczające kierunki osi współrzędnych, kolorem niebieskim zaznaczono przykładowy wektor prędkości cząstki, a kolorem fioletowym jego rzuty na osie układu współrzędnych. Przez  $\vec{v}_\perp$  oznaczono składową prostopadłą do wektora  $\vec{B}$ ; składowa ta leży w płaszczyźnie  $XY$ .

Przez  $v_{||}$  oznaczono składową prędkości równoległą do kierunku wektora  $\vec{B}$ . Składowa ta równa jest składowej  $v_z$ .

Szczegółowe rozwiązanie układu równań Newtona dla ruchu cząstki w kierunkach  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  przedstawiamy oddzielnie bowiem wymaga wykonania bardziej złożonych obliczeń. Tutaj podajemy jedynie krótką metodę pozwalającą na wyznaczenie promienia krzywizny i skoku linii śrubowej, po jakiej porusza się cząstka w polu magnetycznym.

Ruch cząstki można opisać jako złożenie dwóch niezależnych ruchów: wzdłuż osi  $Z$  z prędkością  $v_z$  i w płaszczyźnie  $XY$  z prędkością  $\vec{v}_\perp$ .

**Ruch wzdłuż osi  $Z$ :** Kierunek siły Lorentza jest prostopadły do wektora  $\vec{B}$ , a więc składowa siły w kierunku osi  $Z$  wynosi zero. Ruch wzdłuż osi  $Z$  jest więc ruchem jednostajnym z prędkością  $v_z$ .

**Ruch w płaszczyźnie  $XY$ :** Wartość siły Lorentza można zapisać jako:

$$F = q \cdot v_\perp \cdot B \quad (11.3.2)$$

Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, siła ta skierowana jest zawsze prostopadle do prędkości  $\vec{v}_\perp$ , może więc zmieniać jedynie kierunek prędkości, a nie jej wartość. Siła o takiej własności jest siłą dośrodkową - pod jej wpływem cząstka porusza się po okręgu, którego promień można wyznaczyć z równania

$$q \cdot v_\perp \cdot B = \frac{mv^2}{r} \quad (11.3.3)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie, to znany wzór na siłę dośrodkową w ruchu po okręgu.

Z wyrażenia (11.3.3) wyznaczamy więc promień okręgu:

$$r = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} \quad (11.3.4)$$

gdzie iloczyn  $v_{\perp} \cdot m = p_{\perp}$  jest tzw. "składową poprzeczną" pędu cząstki. Okres ruchu wynosi

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{\perp}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B \cdot v_{\perp}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} \quad (11.3.5)$$

Częstość kołowa

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{q \cdot B}{m} \quad (11.3.6)$$

zwana jest **częstością cyklotronową**. Częstość ta nie zależy od prędkości cząstki, a jedynie od indukcji pola magnetycznego  $B$  oraz stosunku ładunku cząstki do jej masy  $q/m$ .

W kierunku osi  $Z$  tor jest linią prostą, zaś w płaszczyźnie  $XY$  okręgiem. Wobec tego **wypadkowy tor będzie linią śrubową zwaną też helisą**. Skok helisy równy będzie drodze, jaką w kierunku  $Z$  przebędzie cząstka w czasie jednego okresu

$$h = v_z \cdot T = v_z \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} \quad (11.3.7)$$

Opisane zależności możesz teraz sam sprawdzić korzystając z ilustracji interaktywnej demonstrującej ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym dla zadanych przez Ciebie wartości parametrów. Odpowiedz na zawarte tam pytania

Możesz także obejrzeć tor cząstki naładowanej poruszającej się w polu magnetycznym na [symulacji Zbigniewa Kąkola i Jana Żukrowskiego z Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie](#).

**MS-Excel**

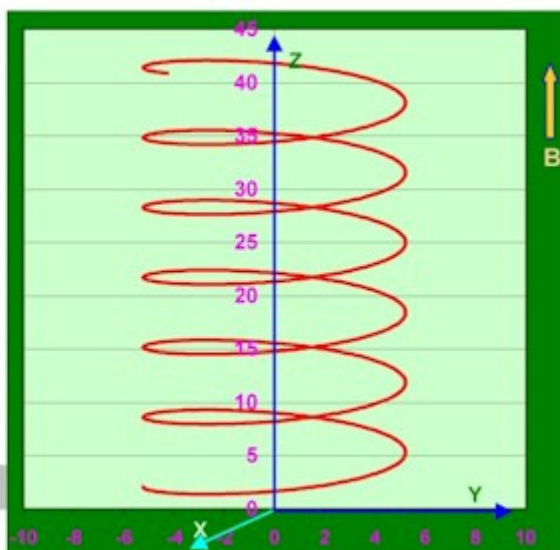
**Interaktywna ilustracja graficzna**

**Kliknij w polu rysunku.**

## Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym

Siła Lorentza  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

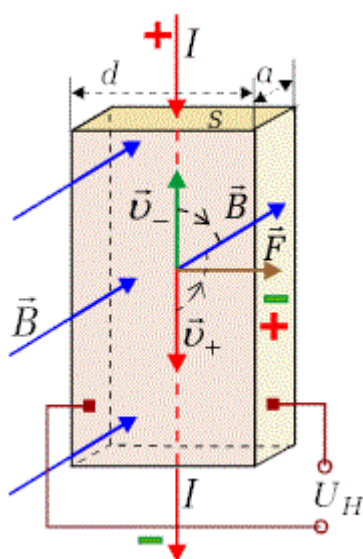
Masa (w jednostkach masy protonu)	$m =$	1	
Ladunek (w jednostkach ładunku elementarnego)	$q =$	1	
Wektor indukcji magnet.	$B =$	2	T
Składowa X prędkości	$v_{x0} =$	1	m/ns
Składowa Y prędkości	$v_{y0} =$	0	m/ns
Składowa Z prędkości	$v_{z0} =$	0,2	m/ns
Faza początkowa	$\phi =$	0	rad
czas obserwacji	$t_0 =$	200	ns
kąt obserwacji	$\alpha =$	0,4	rad
Częstość cyklotronowa	$\omega =$	0,1916	rad/ns
Prędkość poprzeczna	$v_t =$	1	m/ns



Rys.11.3.2. Przykład ruchu cząstki w polu magnetycznym.

## 11.4. Zjawisko Halla

Ciekawym zjawiskiem, zaobserwowanym przez E. H. Halla jeszcze przed odkryciem elektronu (w 1879 r.) jest powstawanie na ściankach przewodnika różnicy potencjałów poprzecznej w stosunku do kierunku przepływu prądu, kiedy przewodnik ten umieścimy w prostopadłym do kierunku prądu polu magnetycznym. Schemat obrazujący mechanizm zjawiska Halla pokazany jest na rysunku 11.4.1.



Rys. 11.4.1. Zjawisko Halla

Kierunek przepływu prądu  $I$  wskazują czerwone strzałki. Jeśli nośnikami prądu są ładunki dodatnie, to kierunek ich prędkości wskazuje wektor  $\vec{v}_+$ ; jeśli są to ładunki ujemne, kierunek ich prędkości  $\vec{v}_-$  (pokazany strzałką koloru zielonego) jest przeciwny. Kierunek wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  wskazują niebieskie strzałki. Zwróćmy uwagę, że kierunek działania siły Lorentza  $\vec{F}$  zarówno na dodatnie, jak i na ujemne nośniki będzie taki sam. Kierunek ten pokazuje brązowa strzałka. W rezultacie, po prawej stronie skupiają się ładunki dodatnie bądź ujemne, w zależności od tego jaki jest znak nośników prądu w danym materiale. Zgromadzone już nośniki wytwarzają poprzeczne pole elektryczne, które przeciwstawia się procesowi ich dalszego gromadzenia się. W rezultacie następuje stan równowagi, kiedy działająca na ładunki siła Lorentza będzie zrównoważona przez siłę skierowaną w przeciwną stronę i

pochodzącą od wytworzonego przez zgromadzone nośniki pola elektrycznego, które nazywamy **polem Halla**. Różnica potencjałów  $U_H$  odpowiadająca stanowi równowagi nosi nazwę **napięcia Halla**.

W celu wyznaczenia wartości napięcia Halla zapiszmy wzór wyrażający równowagę siły pola elektrycznego i siły Lorentza działających na ładunek  $q$ .

$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B \quad (11.4.1)$$

gdzie przez  $v$  oznaczyliśmy wartość prędkości ładunku niezależnie od znaku. Wzór ten zapisaliśmy w postaci skalarnej, bowiem kierunki obu sił się pokrywają, a zwroty są przeciwne. Zależność pomiędzy natężeniem pola Halla  $E_H$  i różnicą potencjałów (napięciem Halla) możemy wyrazić wzorem analogicznym do wzoru (9.8.8) dla kondensatora płaskiego

$$E_H = U_H / d \quad (11.4.2)$$

gdzie  $d$  oznacza odległość między bocznymi ściankami (lewą i prawą)

Podstawiając to do wzoru (11.4.1) otrzymujemy wzór na wartość napięcia Halla

$$U_H = v \cdot B \cdot d \quad (11.4.3)$$

Prędkość nośników nietrudno powiązać z wartością płynącego przez przewodnik prądu.

Wiedząc, że przekrój przewodnika wynosi  $S = a \cdot d$ , możemy wartość ładunku  $dq$  przepływającego z prędkością  $v$  przez ten przekrój w czasie  $dt$  zapisać wzorem

$$dq = \overbrace{v \cdot dt}^{dV} \cdot \underbrace{\sum_{a \cdot d}}_{a \cdot d} \cdot n \cdot e, \quad \text{czyli} \quad v = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{a \cdot d \cdot n \cdot e} = \frac{I}{a \cdot d \cdot n \cdot e} \quad (11.4.4)$$

gdzie  $e$  jest wartością ładunku elementarnego, a przez  $n$  oznaczyliśmy liczbę ładunków elementarnych w jednostce objętości (tak określoną liczbę nazywamy koncentracją nośników). Dla rozszyfrowania wzoru (11.4.4) zauważmy najpierw, że iloczyn  $(n \cdot e)$  jest ładunkiem zawartym w jednostce objętości przewodnika. Z kolei, element objętości  $dV$  zawiera te ładunki, które w czasie  $dt$  przepływają z prędkością  $v$  przez powierzchnię  $S$ . Jeśli więc ładunek w jednostce objętości równy jest  $(n \cdot e)$ , to ładunek w objętości  $dV$  jednostek wynosi  $(n \cdot e) \cdot dV$  czyli  $dq$ . Dla uzyskania ostatniej z równości skorzystaliśmy już tylko z definicji natężenia prądu,  $I = dq / dt$ .

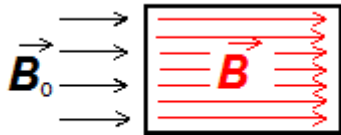
Wzór na napięcie Halla może więc być zapisany w postaci

$$U_H = \frac{I \cdot B \cdot d}{a \cdot d \cdot n \cdot e} = \left( \frac{1}{n \cdot e} \right) \cdot \frac{I \cdot B}{a} = R_H \cdot \frac{I \cdot B}{a} \quad (11.4.5)$$

Wielkość  $R_H = 1/(n \cdot e)$  nazywamy **stałą Halla**. Zauważmy, że mierząc napięcie Halla przy znanym natężeniu prądu, indukcji pola magnetycznego i grubości (mierzonej w kierunku wektora  $\vec{B}$ ) użytej próbki, możemy wyznaczyć wartość koncentracji nośników w materiale próbki oraz ich znak. Wartości te zawiera stała Halla dla danego materiału. Stała ta charakteryzuje materiał i nie zależy od rozmiarów próbki. Widzimy, że napięcie Halla jest odwrotnie proporcjonalne do koncentracji nośników. Dlatego napięcie to osiąga większe wartości w próbkach wykonanych z materiałów półprzewodnikowych, gdzie koncentracja nośników jest mniejsza. Jeśli w danym materiale występują nośniki obu znaków, to znak stałej Halla określa dla jakiego znaku koncentracja nośników jest większa.

Zjawisko Halla wykorzystywane jest szeroko przy pomiarach indukcji pola magnetycznego. Ze wzoru (11.4.5) widzimy, że napięcie Halla jest proporcjonalne do wartości wektora  $\vec{B}$ . (W silnych polach magnetycznych (duże  $B$ ), gdy próbka jest w bardzo niskiej temperaturze (poniżej  $1K$ ) i nośniki ładunku mogą się poruszać tylko w płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $\vec{B}$  (tzw. dwuwymiarowy gaz nośników ładunku) napięcie Halla przestaje zależeć liniowo od  $\vec{B}$  i zmienia się skokowo ze wzrostem indukcji magnetycznej. Jest to tzw. kwantowe zjawisko Halla.)

## 11.5. Pole magnetyczne w ośrodku materialnym



Pole magnetyczne wnikając do wnętrza substancji zmienia się. Jako miarę tej zmiany przyjęto stosunek wartości wektora indukcji magnetycznej we wnętrzu substancji  $\vec{B}$  do wartości wektora indukcji pola wnikającego  $\vec{B}_0$ , czyli **względna przenikalność magnetyczną** substancji  $\mu$  (inne oznaczenie  $\mu_r$  – przypis redakcji technicznej).

*Rys. 11.5.1. Pole magnetyczne wnikające do substancji*

$$\frac{B}{B_0} = \mu_r \quad (11.5.1)$$

Dla substancji naturalnych stwierdzono doświadczalnie trzy przypadki:

- wnikające pole magnetyczne ulega niewielkiemu wzmocnieniu, a więc  $\mu > 1$ . Takie substancje nazwano **paramagnetykami**,
- wnikające pole magnetyczne ulega niewielkiemu osłabieniu, a więc  $\mu < 1$ . Takie substancje nazwano **diamagnetykami**,
- wnikające pole magnetyczne ulega znacznemu wzmocnieniu, a więc  $\mu \gg 1$ . Takie substancje nazwano **ferromagnetykami**.

Magnetyczne własności materiałów określają głównie magnetyczne właściwości ich elektronów. Właściwości te wynikają z ruchów elektronów, które można traktować jako przepływ prądu w mikroobwodach elektrycznych. Elektrony związane w atomach posiadają

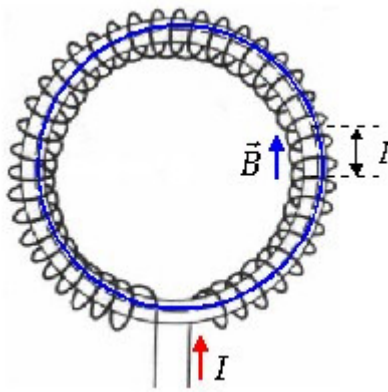
orbitalny moment pędu, z którym wiąże się orbitalny moment magnetyczny oraz rodzaj własnego momentu pędu zwanego spinem (wielkość tę wyjaśnia dokładnie mechanika kwantowa), z którym także wiąże się moment magnetyczny zwany spinowym. Oczywiście elektrony, które nie są związane na orbicie wokółjądrowej w atomie (i stają się praktycznie swobodne) mają tylko spinowy moment magnetyczny.

- Atomy **paramagnetyka** posiadają niewielki dipolowy moment magnetyczny. Ruch cieplny sprawia, że ustawienia dipoli są chaotyczne i wypadkowy moment dipolowy próbki jest równy zeru. Zewnętrzne pole magnetyczne wnikając do paramagnetyka stara się uporządkować dipole magnetyczne tak, żeby ich momenty dipolowe były ustawione zgodnie z wektorem indukcji. W wyniku konkurencji porządkującego działania zewnętrznego pola magnetycznego i dezorganizującego działania ruchu cieplnego pewna część (niewielka) dipoli magnetycznych jest uporządkowana. Miarą tego efektu może być **wektor namagnesowania**  $\vec{M}$ , którego wartość jest równa wartości momentu magnetycznego przypadającego na jednostkę objętości.

$$\vec{M} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\mu}}{V} \quad (11.5.2)$$

Pole magnetyczne uporządkowanych dipoli magnetycznych jest zgodne z polem wnikającym - pole magnetyczne ulega niewielkiemu wzmocnieniu.

- Wypadkowy moment magnetyczny atomów **diamagnetyka** jest równy zeru. Wnikające pole magnetyczne wpływa na ruch elektronów w atomach, powodując powstanie niewielkich momentów magnetycznych o zwrocie przeciwnym do zwrotu wektora indukcji pola zewnętrznego. Pole magnetyczne indukowanych dipoli magnetycznych jest przeciwne do pola wnikającego - pole magnetyczne ulega niewielkiemu osłabieniu. Wektor namagnesowania ma zwrot przeciwny do zwrotu wektora indukcji zewnętrznego pola magnetycznego. Podobnie jak w paramagnetykach istotne znaczenie ma dezorganizujący ustawienia dipoli magnetycznych ruch cieplny.
- Atomy **ferromagnetyka** posiadają znaczny dipolowy moment magnetyczny. Oddziaływanie wymienne prowadzi do lokalnego uporządkowania momentów magnetycznych atomów, mimo dezorganizującego działania ruchu cieplnego. Powstają tzw. domeny magnetyczne, których rozmiary są rzędu części milimetra i które zachowują się jak małe magnesy. Wnikające pole magnetyczne działa porządkująco na silne momenty magnetyczne domen, co prowadzi do znacznego wzmocnienia pola magnetycznego. Wektor namagnesowania ma zwrot zgodny ze zwrotem wektora indukcji zewnętrznego pola magnetycznego. Okazuje się, że po wyłączeniu zewnętrznego pola magnetycznego znaczna część domen pozostaje uporządkowana. Próbkę ferromagnetyczną można namagnesować. Powyżej pewnej temperatury  $T_C$  charakterystycznej dla danego ferromagnetyka (tzw. temperatury Curie) dezorganizujące działanie ruchu cieplnego prowadzi do rozbitcia domen magnetycznych i ferromagnetyk staje się paramagnetykiem.



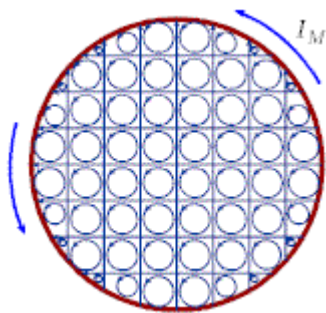
**Rys. 11.5.2.** Toroid wypełniony materiałem magnetycznym.

Dla ilościowego określenia własności magnetycznych materiałów rozważmy toroidalny rdzeń z materiału magnetycznego pokazany na Rys. 11.5.2 z nawiniętym na nim uzwojeniem przez które płynie prąd. Uzwojenie to stanowi solenoid o kształcie torusa i nazywa się toroidem.

Pole magnetyczne  $\vec{B}$  wewnątrz rdzenia jest sumą pola  $\vec{B}_0$  wytworzonego wskutek przepływu prądu w uzwojeniu i pola  $\vec{B}_M$  powstałego w materiale rdzenia toroidu, wskutek jego namagnesowania.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M \quad (11.5.3)$$

Pole  $\vec{B}_M$  pojawia się wskutek ustawienia się trwałych i indukowanych dipoli magnetycznych atomów materiału lub całych domen w przypadku ferromagnetyka, równoległe do osi toroidu w rezultacie przepływu prądu elektrycznego w jego uzwojeniu. W materiałach para- i diamagnetycznych  $\vec{B}_M$  jest stosunkowo niewielkie w porównaniu z  $\vec{B}_0$ , ale jest znacznie większe w materiałach ferromagnetycznych.



**Rys. 11.5.3.** Prąd magnetyzacji

Wektor  $\vec{B}_M$  możemy przez analogię traktować jako rezultat pewnego "prądu magnetyzacji"  $I_M$ , wokół zewnętrznej powierzchni rdzenia. (Dlatego tylko wokół zewnętrznej powierzchni, bo prądy dipoli magnetycznych cząsteczek, których kierunek jest prostopadły do osi cylindra, kompensują się wewnątrz rdzenia, jak to pokazano na rysunku 11.5.3.) Chociaż nie jest to prąd rzeczywisty, wprowadzenie go będzie użyteczne by wyróżnić składową pola pochodzącą od prądu rzeczywistego i hipotetycznego prądu związanego z magnetyzacją materiału.

Można wykazać, że indukcja magnetyczna pola  $\vec{B}_M$  powstałego w materiale rdzenia jest wprost proporcjonalna do wektora namagnesowania  $\vec{M}$ :

$$\vec{B}_M = \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (11.5.4)$$

Całkowite pole  $\vec{B}$ , zgodnie ze wzorem (11.5.3) jest więc:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (11.5.5)$$

Zapiszemy teraz prawo Ampère'a, wzór (11.1.9), dla naszego przypadku, co będzie stanowić uogólnienie prawa Ampère'a sformułowanego dla prądów rzeczywistych w próżni na przypadek prądów rzeczywistych i ośrodków magnetycznych, obierając jako kontur całkowania okrąg pokrywający się z osią toroidu.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{M}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot (I + I_M), \quad (11.5.6)$$

gdzie  $I$  i  $I_M$  oznaczają teraz całkowity prąd rzeczywisty i magnesujący przebijające powierzchnię kołową rozpiętą na konturze całkowania, tzn. sumę prądów płynących przez wszystkie zwoje toroidu.

Wzór ten możemy przedstawić w postaci dwóch wzorów wyrażających prawo Ampera dla prądu rzeczywistego i prądu magnetyzacji. (Całka sumy to suma całek).

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I, \quad \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = I_M \quad (11.5.7)$$

Drugi z wzorów (11.5.7) można traktować jako definicję prądu magnetyzacji. Pierwszy wzór można zapisać wykorzystując relację (11.5.5) w postaci

$$\oint \left[ \frac{\vec{B} - \mu_0 \cdot \vec{M}}{\mu_0} \right] \cdot d\vec{l} = I \quad (11.5.8)$$

Wielkość wektorowa zapisana w nawiasie kwadratowym odgrywa ważną rolę w opisie zjawisk magnetycznych dla ośrodków materialnych; oznaczona jest symbolem  $\vec{H}$  i nosi nazwę **natężenia pola magnetycznego**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \cdot \vec{M}}{\mu_0} \quad (11.5.9)$$

Definicję tę możemy przepisać w postaci

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (11.5.10)$$

a korzystając ze wzoru (11.5.5) otrzymać związek dla próżni

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (11.5.11)$$

Prawo Ampère'a z użyciem wektora natężenia pola magnetycznego (11.5.9) zapisujemy więc w formie

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (11.5.12)$$

Tak zapisane prawo Ampera słuszne jest zarówno dla próżni jak i dla ośrodków materialnych. Zwróćmy uwagę, że po prawej stronie równości występują zawsze tylko prądy rzeczywiste,



nawet wtedy gdy w przestrzeni objętej konturem całkowania "płyną" także prądy magnetyzacji.

Zauważmy związek pomiędzy wielkościami opisującymi pole magnetyczne (11.5.10) i analogicznymi wielkościami zdefiniowanymi dla pola elektrycznego, wzór (9.9.14). Wektor natężenia pola magnetycznego  $\vec{H}$ , związany tylko z prądami rzeczywistymi, odpowiada wektorowi indukcji elektrycznej  $\vec{D}$ , który opisuje pole elektryczne w materiałach i jest związany tylko z ładunkami swobodnymi. Wektor  $\vec{M}$  związany z polaryzacją magnetyczną odpowiada wektorowi polaryzacji  $\vec{P}$ , który jest związany z elektrycznymi ładunkami polaryzacyjnymi, a wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  określony przez całkowity prąd (rzeczywisty i "magnesujący") odpowiada wektorowi natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  określonemu przez całkowity ładunek (swobodny i polaryzacyjny).

## 11.6. Indukcja elektromagnetyczna

Wiemy już, że z przepływem ładunków elektrycznych wiąże się powstawanie pola magnetycznego. W związku z tym nasuwa się naturalne pytanie.

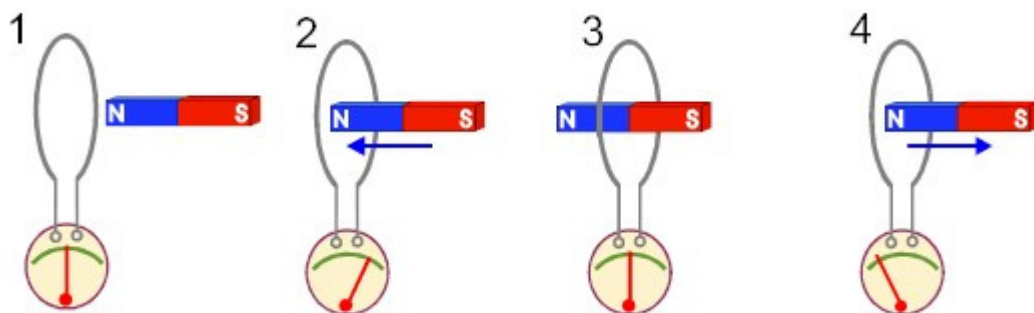
### Czy powstawanie, istnienie lub zanikanie pola magnetycznego w pobliżu przewodnika powoduje przepływ w nim ładunków elektrycznych?



Odpowiedź na to pytanie znalazł w 1831 roku **Michael Faraday** w rezultacie szeregu wykonanych doświadczeń. Załączone tu schematyczne rysunki demonstrują ich myśl przewodnią. Na każdym rysunku pokazane są cztery różne przypadki oznaczone numerami: **1, 2, 3, 4**. Elementem wspólnym na wszystkich rysunkach i we wszystkich przypadkach jest zwoj przewodnika połączony z galwanometrem (Rys. 11.6.1) umożliwiający stwierdzenie czy w przewodniku tym płynie prąd elektryczny; jeśli zaś płynie, to w jakim kierunku. Drugim elementem wspólnym są strzałki koloru niebieskiego, które pokazują rodzaj wykonywanej czynności i kierunek zmian.

**Rys. 11.6.1.** Zwoj przewodnika połączony z galwanometrem.

**Przykład pierwszy** (Rys. 11.6.2): Do przewodnika zbliżamy magnes stały, po czym oddalamy go.

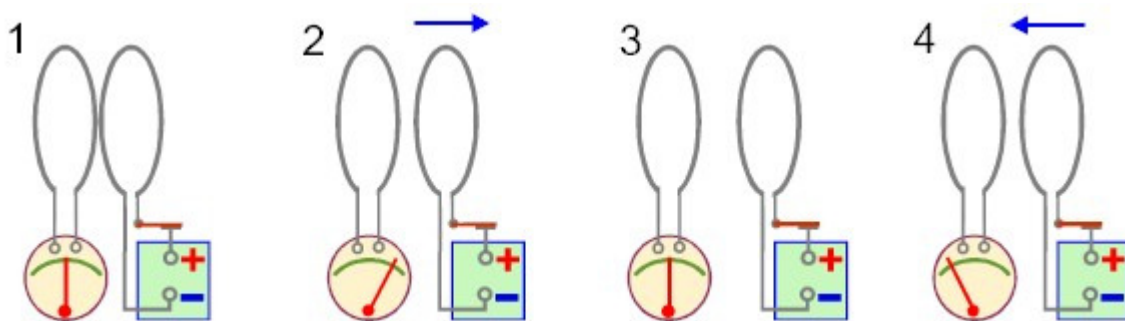


**Rys. 11.6.2.** Przewodnik nieruchomy; zmieniamy położenie magnesu względem przewodnika

1. Magnes znajduje się na zewnątrz zwoju i nie porusza się; **prąd nie płynie**.
2. Wsuwamy magnes do wnętrza zwoju; **prąd płynie**, a kierunek wychylenia wskazówki galwanometru umożliwia określenie kierunku przepływu prądu.
3. Magnes znajduje się nieruchomo wewnątrz zwoju; **prąd nie płynie**.
4. Wysuwamy magnes; **prąd płynie w przeciwnym kierunku**.

Czy potrafisz przewidzieć co będzie gdy powtórzmy ten eksperyment odwracając magnes (wsuwamy w kierunku bieguna S wysuwamy w kierunku bieguna N). Wykorzystaj swoją intuicję!

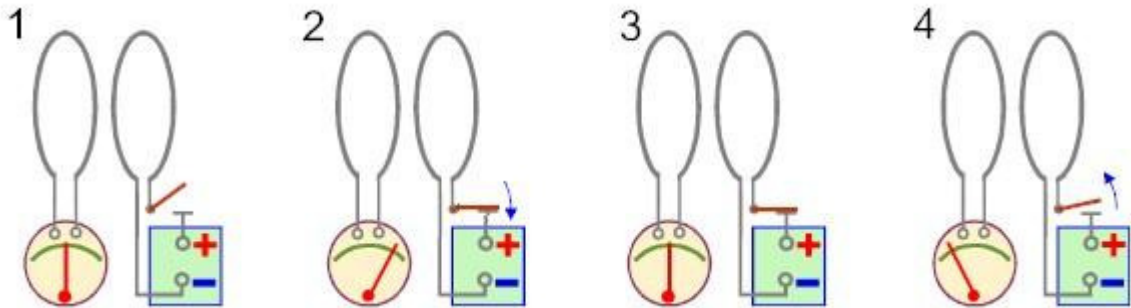
**Przykład drugi** (Rys. 11.6.3): Magnes zastępujemy zwojem, przez który płynie prąd stały.



**Rys. 11.6.3.** Zwój, przez który płynie prąd stały, oddalamy i zbliżamy do zwoju z galwanometrem.

Zwój ten przybliżamy i oddalamy od pierwszego. Prąd w pierwszym zwoju pojawia się tylko w chwili oddalania (2) bądź przybliżania (4) drugiego zwoju, przy czym w drugim przypadku kierunek przepływu prądu jest przeciwny niż w pierwszym.

**Przykład trzeci** (Rys. 11.6.4): Obydwa zwoje pozostają nieruchome. Włączamy i wyłączamy prąd w drugim zwoju.



**Rys. 11.6.4.** Obydwa zwoje nieruchome. Włączamy i wyłączamy prąd w drugim zwoju.

W pierwszym zwoju prąd pojawia się tylko w momencie włączania i wyłączania. Nie płynie natomiast pomimo, że w drugim zwoju przepływa prąd; przypadek (3).

**A teraz pytanie.** Co jest wspólną cechą tych wszystkich zmian, które powodowały przepływ prądu w pierwszym zwoju?

Wszystkie rozważane przypadki łączy jedna wspólna cecha. Prąd w zwoju przewodnika połączony z galwanometrem pojawia się wówczas, gdy zmienia się strumień  $\Phi_B$  wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , przechodzący przez powierzchnię ograniczoną tym zwojem. Fakt, że prąd nie płynął, kiedy magnes wsunięty był do środka zwoju oraz kiedy drugi zwoj z prądem był w pobliżu świadczy o tym, że nie chodzi tu o samą obecność pola magnetycznego, ale o zmianę tego pola, która powoduje zmianę strumienia wektora indukcji. Fakt, że prąd pojawiał się także, kiedy zwoje pozostawały względem siebie nieruchome, a tylko włączany i wyłączany był prąd w zwoju obok, świadczy o tym, że chodzi tu o zmianę strumienia w czasie, a nie w przestrzeni. Z kolei, aby galwanometr mógł wykazać przepływ prądu, musiała być wytworzona różnica potencjałów, czyli musiała pojawić się siła elektromotoryczna  $\mathcal{E}$  na końcach przewodnika połączony z galwanometrem. Związek pomiędzy zmianą w czasie strumienia  $\Phi_B$  i wytworzoną siłą elektromotoryczną  $\mathcal{E}$  zapisujemy w postaci równania

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (11.6.1)$$

Zjawisko generowania siły elektromotorycznej na obwodzie jakiejś powierzchni za pomocą zmian strumienia indukcji magnetycznej przez tą powierzchnię nazywamy indukcją elektromagnetyczną.

Znak minus skomentujemy nieco później. Wzór (11.6.1) wyraża **prawo Faradaya indukcji elektromagnetycznej** - fundament wiedzy o elektryczności oraz podstawę elektroenergetyki. Bez świadomości istnienia tego prawa żylibyśmy wciąż w epoce świecy i lampy naftowej...

Oczywiście, chcielibyśmy, by  $\mathcal{E}$  było jak największe. Możemy to osiągnąć stosunkowo łatwo powiększając liczbę zwojów przewodnika uzyskując wartość siły elektromotorycznej proporcjonalnej do liczby zwojów  $N$ ,

$$\mathcal{E} = -N \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (11.6.1a)$$

Pamiętać należy jednak, że w ten sposób powiększamy też opór obwodu i należy znaleźć optimum pomiędzy liczbą zwojów, a opornością całkowitą obwodu. Innym sposobem powiększenia siły elektromotorycznej jest zwiększenie szybkości zmiany strumienia indukcji. Efekt taki osiągnąć można poprzez zwiększenie zmiany strumienia w przedziale czasu w którym ta zmiana zachodzi. Wynika to bezpośrednio z wzoru (11.6.1), który mówi, że **wartość siły elektromotorycznej indukcji elektromagnetycznej jest określona przez szybkość zmian strumienia indukcji magnetycznej** (pochodną  $\Phi_B$  względem czasu). W ten sposób często formułujemy prawo Faradaya indukcji elektromagnetycznej.

Nadszedł czas na skomentowanie znaku minus w podanych wyżej wzorach. Przepływ prądu w obwodzie z galwanometrem spowoduje powstanie pola magnetycznego wokół tego obwodu. Pole to będzie z kolei powodować powstawanie siły elektromotorycznej w obwodzie pierwotnym. Powstanie rodzaj wielokrotnego sprzężenia zwrotnego, bowiem rozpatrywanie wzajemnego oddziaływania można kontynuować dalej. Są dwie możliwości: 1) wytworzone w obwodzie wtórnym pole magnetyczne będzie zwiększać zmianę strumienia pola magnetycznego, 2) będzie ją zmniejszać. Który z tych wariantów realizuje się w rzeczywistości?

Wniosek nasuwa się sam. W pierwszym przypadku otrzymalibyśmy zwiększanie zmian strumienia, a w konsekwencji, wzrost prądu płynącego przez galwanometr, bez wkładania w proces ten dodatkowej pracy. Przeczy to zasadzie zachowania energii i przypomina znane z mechaniki "*Perpetuum mobile*". Zachowanie się obwodu w drugim przypadku przypomina zaś trzecią zasadę dynamiki Newtona i ten właśnie przypadek realizuje się w rzeczywistości..

Znak minus reprezentuje właśnie ten drugi przypadek i wyraża regułę sformułowaną przez H. F. Lenza w 1834 roku, która nosi nazwę **reguły Lenza**.

**Kierunek indukowanego prądu elektrycznego jest taki, że strumień pola magnetycznego wytworzonego przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która go wywołuje.**

Siła elektromotoryczna indukcji powstanie również w metalowym pręcie, który będzie przesuwał się w jednorodnym polu magnetycznym w kierunku prostopadłym do linii pola. Można wykazać, że i w tym przypadku spełnione jest prawo Faradaya. Szczegółowe rachunki [przedstawiono osobno](#).

### ***Samoindukcja***

Jeśli w obwodzie płynie prąd o zmieniającym się w czasie natężeniu, to zmienia się także pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd. Zatem obwód znajduje się w zmiennym polu magnetycznym, a w szczególności zmienia się strumień indukcji obejmowany przez obwód. Skutkiem tego jest powstanie siły elektromotorycznej indukcji w tym samym obwodzie, w którym płynie zmieniający się prąd pierwotny.

Zjawisko to nosi nazwę **samoindukcji**. Strumień indukcji magnetycznej obejmowany przez obwód jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu wytwarzającego pole magnetyczne.

Siła elektromotoryczna samoindukcji wyraża się więc wzorem:

$$\mathcal{E} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (11.6.2)$$

gdzie  $L$  jest indukcyjnością obwodu elektrycznego, zwaną też współczynnikiem samoindukcji albo indukcji własnej.

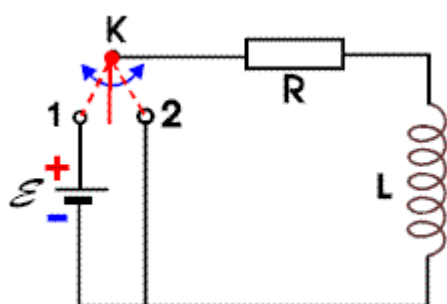
Regułę Lenza dla zjawiska samoindukcji można wyrazić prosto: kierunek prądu samoindukcji jest taki, że prąd ten przeciwdziała zmianie prądu pierwotnego. Czyli, kiedy prąd pierwotny narasta, prąd samoindukcji ma kierunek przeciwny, a kiedy prąd pierwotny maleje (np. podczas przerywania obwodu) prąd samoindukcji ma kierunek taki, jak prąd pierwotny, przedłużając niejako zanikający w obwodzie prąd.

Jednostką indukcyjności jest *henr*. Nazwa ta pochodzi od nazwiska amerykańskiego fizyka J. Henry'ego, który równoległe z Faradayem prowadził badania nad zjawiskami elektromagnetyzmu. Zgodnie ze wzorem (11.6.2)

$$1 \text{ henr} [H] = 1 \frac{V \cdot s}{A} \quad (11.6.3)$$

## 11.7. Obwód RL

Konsekwencją zjawiska samoindukcji i reguły Lenza są prądy pojawiające się przy zamykaniu i otwieraniu obwodu zawierającego element charakteryzujący się indukcyjnością  $L$ . Przykładowy schemat takiego obwodu pokazany jest na rysunku 11.7.1.



Obwód składa się ze źródła siły elektromotorycznej  $\mathcal{E}$  o zaniedbywanym oporze wewnętrznym, opornika o oporności  $R$  oraz solenoidu (zwojnicy) o indukcyjności  $L$ . Czerwonym kolorem pokazany jest przełącznik  $K$ , który może zajmować dwa położenia oznaczone cyframi 1 i 2. Kiedy przełącznik jest w położeniu 1, zamknięty jest obwód zawierający źródło SEM. W obwodzie płynie prąd o natężeniu

$$I_0 = \mathcal{E} / R \quad (11.7.1)$$

Rys. 11.7.1. Schemat obwodu RL

Zakładamy, że oporność (omowa) solenoidu jest zaniedbywanie mała. W chwili  $t=0$  zmieniamy położenie przełącznika do pozycji 2. Odłączenie źródła SEM spowoduje zanik prądu w obwodzie i zmianę strumienia indukcji magnetycznej obejmowanej przez obwód, a w konsekwencji pojawienie się siły elektromotorycznej samoindukcji, która zgodnie z regułą Lenza będzie przeciwstawiać się zanikowi prądu w obwodzie. Przez opornik  $R$  popłynie prąd  $I$  spełniający równanie, które możemy zapisać w postaci

$$I \cdot R = \mathcal{E}_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad \text{lub} \quad \frac{dI}{dt} = -I \cdot \frac{R}{L} \quad (11.7.2)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.7.3)$$

Uzyskany rezultat pokazuje, że prąd w obwodzie będzie zanikał zgodnie z zależnością wykładniczą, zaś szybkość zanikania określona jest przez stosunek oporności do indukcyjności obwodu. Odwrotność tego stosunku, to **stała czasowa** obwodu  $RL$ , którą oznaczyliśmy symbolem  $\tau$ ,

$$\tau = L/R \quad (11.7.4)$$

Im większa stała czasowa, tym wolniej zanika prąd w obwodzie. Kiedy jednak po rozwarciu obwodu pozostawiamy go otwartym, a indukcyjność obwodu jest duża, to wysokie indukowane napięcie powoduje powstawanie iskry lub łuku elektrycznego.

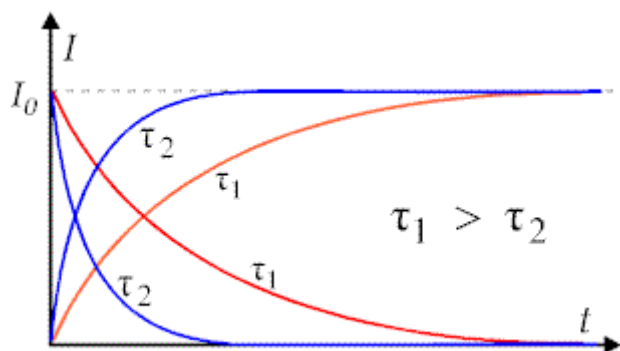
Kiedy z kolei przełącznik przestawiamy z pozycji **2** do pozycji **1** mamy sytuację odwrotną. Zgodnie z reguła Lenza efekt pojawienia się SEM samoindukcji sprawi, że prąd będzie narastał powoli, a czas narastania określony będzie znów przez stałą czasową obwodu. Drugie prawo Kirchhoffa dla takiego obwodu zapiszemy w postaci

$$I \cdot R = \mathcal{E} - L \cdot \frac{dI}{dt} \quad \text{lub} \quad I \cdot \frac{R}{L} + \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (11.7.5)$$

Rozwiązanie tego równania niejednorodnego (podane tu bez szczegółów rozwiązywania) ma postać

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad (11.7.6)$$

Równanie to opisuje narastanie prądu w obwodzie z indukcyjnością  $L$ .



Zależność zanikania i narastania prądu w obwodzie z indukcyjnością przedstawia Rys. 11.7.2. dla dwóch różnych stałych czasowych.

**Rys. 11.7.2.** Zależności czasowe natężenia prądu w obwodzie  $RL$ .

## 11.8. Energia pola magnetycznego

Wiemy, że z przepływem prądu w obwodzie zawierającym oporność wiąże się wykonanie pracy, której wartość określona jest wzorem (10.5.3). Jeśli w obwodzie jest indukcyjność, to wzór ten musi być zmodyfikowany, bo prąd płynący w obwodzie zmienia się w tym przypadku zgodnie ze wzorami (11.8.3) i (11.8.6). Znajdźmy wzór na pracę (zobacz np. wzór (10.5.1)) dla obwodu pokazanego na Rys.11.8.1. w przypadku włączania prądu, czyli po ustawieniu przełącznika w pozycji  $I$ .

$$dW = \mathcal{E} \cdot dq = \mathcal{E} \cdot I \cdot dt \quad (11.8.1)$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa

$$\mathcal{E} = I \cdot R + L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (11.8.2)$$

można wyznaczyć siłę elektromotoryczną źródła. Po podstawieniu otrzymujemy wzór na pracę wykonaną w obwodzie w przedziale czasu  $dt$

$$dW = \mathcal{E} \cdot I \cdot dt = (I^2 \cdot R \cdot dt) + (L \cdot I \cdot dI) \quad (11.8.3)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie wzoru to znana nam już praca powodująca wzrost energii wewnętrznej opornika  $R$  i wydzielenie się ciepła. Składnik drugi, to praca związana ze zmianami pola magnetycznego w obwodzie. Jeśli natężenie prądu zmieniało się od zera do wartości  $I$ , to praca ta wyniesie

$$W_B = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2} \quad (11.8.4)$$

Co dało w rezultacie wykonanie tej pracy? Na co została zamieniona? Czy gdzieś jest zmagazynowana?... Właściwie, to znamy już odpowiedź na podstawie rozważań o zamykaniu i otwieraniu obwodu z indukcyjnością. Praca ta została zmagazynowana w postaci energii wytworzonego pola magnetycznego. Rzeczywiście, pokazaliśmy nawet, że energię tę potrafimy zamienić na energię cieplną, kiedy przełącznik ustawimy w położenie 2. Płynący wówczas prąd dany wzorem (11.8.3) i związane z tym wykonanie pracy na ogrzanie opornika pomimo braku w obwodzie siły elektromotorycznej, to właśnie wykorzystanie energii pola magnetycznego i zamiana tej energii na energię cieplną.

Gęstość energii pola magnetycznego o indukcji  $B$ , czyli energia pola przypadająca na jednostkę objętości wyraża się wzorem:

$$w_B = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \quad (11.8.5)$$

Jak pamiętamy, w przypadku próżni  $B = \mu_0 \cdot H$  i wzór (11.8.5) można zapisać

$$w_B = \frac{B \cdot H}{2} \quad (11.8.5a)$$

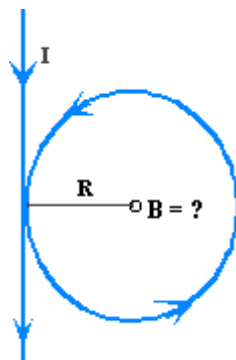
Rozważając postać wyprowadzonych tu wzorów nie sposób powstrzymać się od analogii z polem elektrycznym. Wzór (11.8.4) określający energię zgromadzoną w indukcyjności jest analogiczny do wzoru (9.10.2) określającego energię zmagazynowaną w pojemności, jeżeli  $L$  zastąpimy przez  $C$  oraz  $I$  przez  $U$ . Wzór (11.9.5a) określający gęstość energii pola magnetycznego jest analogiczny do wzoru (9.10.6) określającego gęstość energii pola elektrycznego, jeśli wektor  $B$  zastąpimy przez  $E$  i  $H$  przez  $D$ . Solenoid w odniesieniu do pola magnetycznego spełnia podobną rolę jak kondensator w odniesieniu do pola elektrycznego.

W dalszej części kursu zobaczymy, że związki pomiędzy polami: elektrycznym i magnetycznym są o wiele głębsze.

Zadania

### Zadanie 11.1 pole magnetyczne przewodnika z prądem

Prąd o natężeniu  $I$  przepływa przez nieskończenie długi przewodnik z fragmentem wygiętym w kształcie okręgu o promieniu  $R$  (Rys. z11.1.1). Jaka jest indukcja pola magnetycznego w środku tego okręgu?



*Rys. z11.1.1. Przewodnik z fragmentem wygiętym w kształcie okręgu.*



### Zadanie 11.1 wskazówka

Indukcja pola magnetycznego w środku okręgu będzie sumą indukcji od przewodnika

$$\text{prostoliniowego } B_1(R) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \text{ i od okręgu } B_2(R) = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} .$$

### Zadanie 11.1 rozwiązanie

Indukcja wytworzonego pola magnetycznego będzie sumą wektorową indukcji pola magnetycznego od przewodnika prostoliniowego i od okręgu.

#### przewodnik prostoliniowy

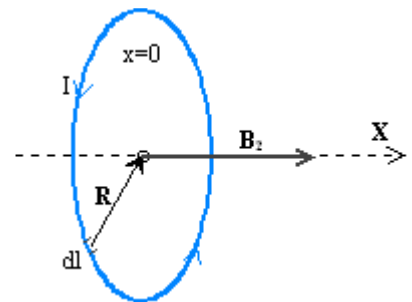
Wektor indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}_1$  prostoliniowego przewodnika z prądem  $I$ , jest w

miejscach odległych od przewodnika o  $R$ , co do wartości równy  $B_1(R) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$ , posiada kierunek prostopadły do płaszczyzny okręgu i zwrot - do patrzącego na rysunek (Rys. z11.1.1).

#### zwój kołowy

Wektor indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}_2$  zwoju kołowego z prądem  $I$ , jest co do wartości równy

$B_2(R) = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$ , posiada kierunek prostopadły do płaszczyzny okręgu i zwrot - do patrzącego na rysunek (Rys. z11.1.1). Mówiąc inaczej, jeśli przewodnik z prądem znajduje się w płaszczyźnie  $x = 0$  to kierunek wektora indukcji określa oś  $OX$  (Rys. z11.1.2).



Rys. z11.1.2. Zwój kołowy z prądem  $I$ .

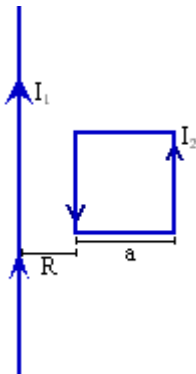
#### wypadkowa indukcja pola magnetycznego

Wypadkowa indukcja pola magnetycznego  $\vec{B}$  od układu przewodników z prądem równa jest sumie wektorowej

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \text{ gdzie mamy } \vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2 .$$

Zatem jej wielkość wynosi  $B(R) = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} (1 + \pi)$ , a kierunek prostopadły do okręgu i zwrot do patrzącego.

## Zadanie 11.2 siła Ampere'a



Prostoliniowy przewódnik znajduje się w płaszczyźnie sztywnej, kwadratowej ramki i jest równoległy do jej odpowiednich boków (Rys. z11.2.1. ). Długości boków ramki wynoszą  $a$ , odległość bliższego boku ramki od przewodnika  $R$ .

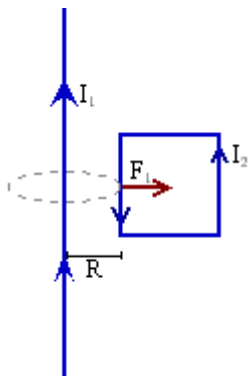
Jaką siłą oddziałuje prostoliniowy przewódnik z prądem  $I_1$  na kwadratową ramkę z prądem  $I_2$ ?

*Rys. z11.2.1. Prostoliniowy przewódnik i ramka.*

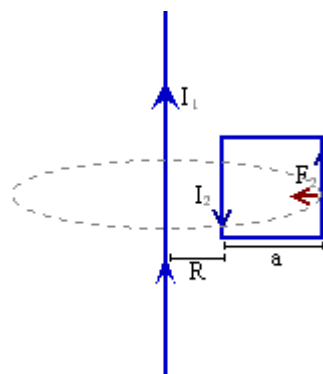
## Zadanie 11.2 rozwiązanie

Sztwna, kwadratowa ramka z prądem znajduje się w polu indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  wytworzonym przez przewódnik prostoliniowy. Wektory  $\vec{B}$  skierowane są prostopadle do płaszczyzny ramki i zwrócone - za rysunek (przy podanym w zadaniu kierunku prądu  $I_1$  i wzajemnym położeniu przewodnika i ramki ). Na 4 boki kwadratowej ramki z prądem  $I_2$  działają siły Ampere'a.

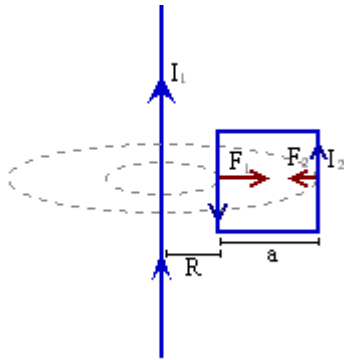
W dwóch bokach ramki prostopadłych do prostoliniowego przewodnika prąd płynie w przeciwnych kierunkach, a oba te elementy rozmieszczone są jednakowo w polu  $\vec{B}$ . Stąd wypadkowa siła działająca na te boki wynosi zero jako suma wektorów przeciwnych. W dwóch bokach ramki równoległych do prostoliniowego przewodnika prąd płynie w przeciwnych kierunkach, a oba te elementy znajdują się w różnych odległościach od prostoliniowego przewodnika z prądem  $I_1$  ( Rys.11.2.2 i Rys.11.2.3 ).



*Rys. z11.2.2. Siła  $F_1$  działa na bok odległy o  $R$  od przewodnika.*



*Rys. z11.2.3. Siła  $F_2$  działa na bok odległy o  $(R+a)$  od przewodnika.*



**Rys. z11.2.4.**  
*Niezerównoważone siły działające na boki ramki.*

W odległości R od prostoliniowego przewodnika z prądem istnieje

$$B(R) = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

pole magnetyczne o indukcji  $B(R)$ , a siła Ampere'a działająca tam na bok

$$F_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi R}$$

ramki  $F_1$ , bo  $\vec{F}_1 \perp \vec{I}_2 \perp \vec{B}(R)$ .

W odległości R+a od prostoliniowego przewodnika z prądem istnieje pole magnetyczne o indukcji

$$B(R+a) = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi(R+a)}$$

a siła Ampere'a działająca

$$F_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi(R+a)}$$

tam na bok ramki  $F_2$ , bo

$$\vec{F}_2 \perp \vec{I}_2 \perp \vec{B}(R+a)$$

Wypadkowa siła F działająca na ramkę z prądem będzie  $F = F_1 - F_2$  oraz po podstawieniu znalezionych wcześniej zależności

$$F_1 - F_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi R} - \frac{\mu\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi(R+a)}$$

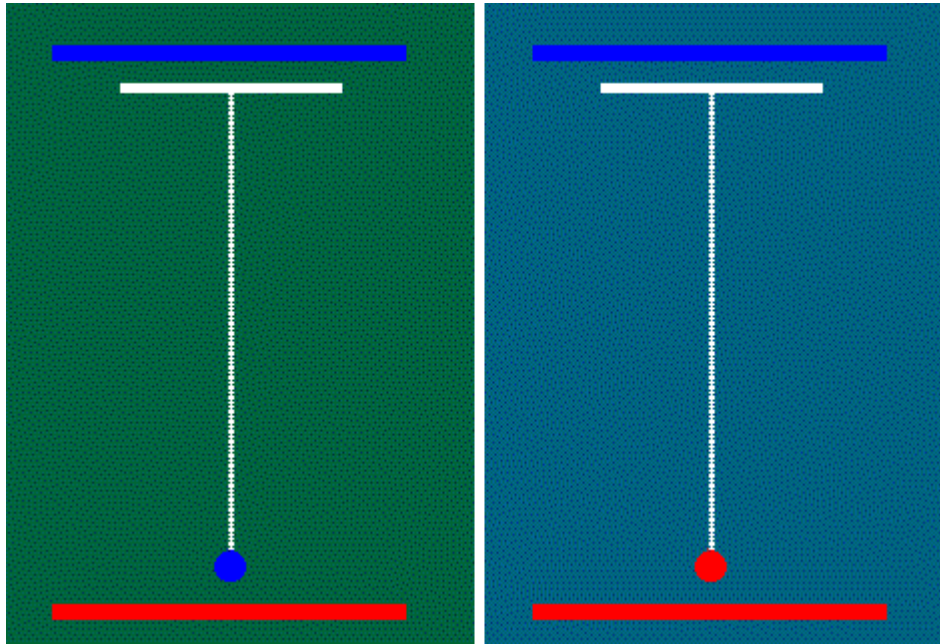
Siła wypadkowa F zwrócona jest w kierunku "od prostoliniowego przewodnika" i wynosi

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot a^2}{2\pi R(R+a)}$$

### Zadanie 11.3 ruch ładunku w polu elektrycznym

Kulka o masie m, obdarzona ładunkiem elektrycznym Q, zawieszona na nici o długości L, waha się w jednorodnym polu elektrostatycznym wytworzonym w kondensatorze płaskim w którym okładki odległe są o d. Wahania odbywają w polu grawitacyjnym ziemskim o natężeniu g. Gdy napięcie między okładkami kondensatora jest  $U_0 = 0$  to okres wahań kulki wynosi  $T_0$ , gdy napięcie między okładkami kondensatora jest różne od zera to okresy wahań są  $T_1$  i  $T_2$ , odpowiednio dla napięć  $U_1$  i  $U_2$ , przy czym zachodzi relacja  $T_1 < T_0 < T_2$ .

- Jakie będzie napięcie  $U_1$  jeśli okres wahań kulki będzie  $T_1$ ?
- Jakie będzie napięcie  $U_2$  jeśli okres wahań kulki będzie  $T_2$ ?
- Jaki wpływ na okres wahań kulki ma:
  - znak ładunku Q,
  - zwrot wektora natężenia pola elektrostatycznego?



*Rys. z11.3.1. Naładowana kulka wahadła w kondensatorze. Okresy wahań  $T_1$  i  $T_2$*

### **Zadanie 11.3 wskazówka**

Na kulkę działa Ziemia siłą grawitacji oraz siła oddziaływania elektrostatycznego. Okres wahań kulki zależy od wypadkowej tych sił. Należy zastosować, odpowiednio, wzór na okres wahań wahadła matematycznego w przybliżeniu małych drgań.

### **Zadanie 11.3 rozwiązanie**

#### **wahadło matematyczne**

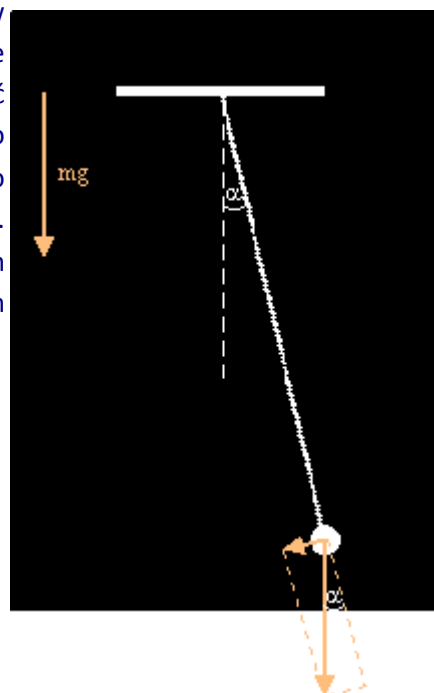
Przypomnijmy sobie wiadomości o ruchu wahadła.

Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici w polu grawitacyjnym. Jeśli wahadło takie wychylimy z położenia równowagi, tak aby nie tworzyła z kierunkiem pionowym (jest to kierunek działania siły grawitacji) kąt  $\alpha$ , to zacznie się ono wahać w płaszczyźnie pionowej. Dla małych kątów  $\alpha$  będzie to ruch harmoniczny. Równanie charakteryzujące ten ruch ma postać:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \alpha = 0,$$

gdzie:  $g$  to przyspieszenie grawitacyjne,  $L$  to długość nitki wahadła,  $\alpha$  to kąt wychylenia od położenia równowagi. Okres wahań  $T_0$  dla takiego wahadła jest :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$



*Rys. z11.3.2. Wahadło matematyczne.*

W naszym zadaniu, gdy nie ma oddziaływania elektrycznego tj.

- przy braku napięcia na kondensatorze  $U_0 = 0$  (wtedy też natężenie pola elektrycznego  $E = 0$

ponieważ  $E = \frac{U}{d}$ ), niezależnie od ładunku kulki,

- gdy kulka nie jest naładowana, a przyłożone jest napięcie do okładek kondensatora

to **okres wahań kulki równy jest  $T_0$**  (to okres wahań wahadła matematycznego o długości  $L$ ).

### wahadło matematyczne w kondensatorze

**Naładowana kulka znajduje się w polu grawitacyjnym i w polu elektrycznym** wytworzonym w kondensatorze. Na kulkę oddziałuje Ziemia siłą grawitacji oraz siłą oddziaływania elektrostatycznego. Okres wahań kulki zależy od wypadkowej  $F_w$  tych siły:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_g + \vec{F}_e,$$

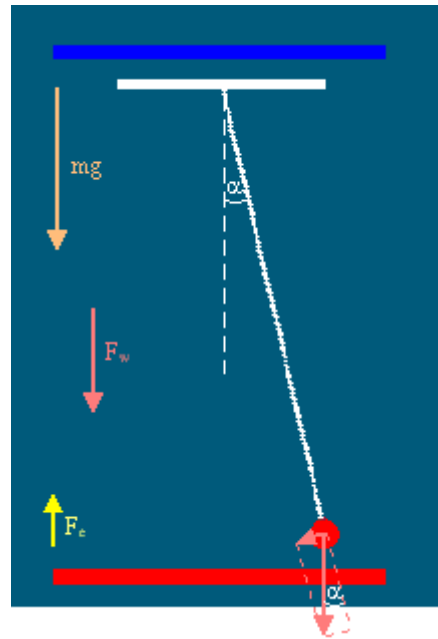
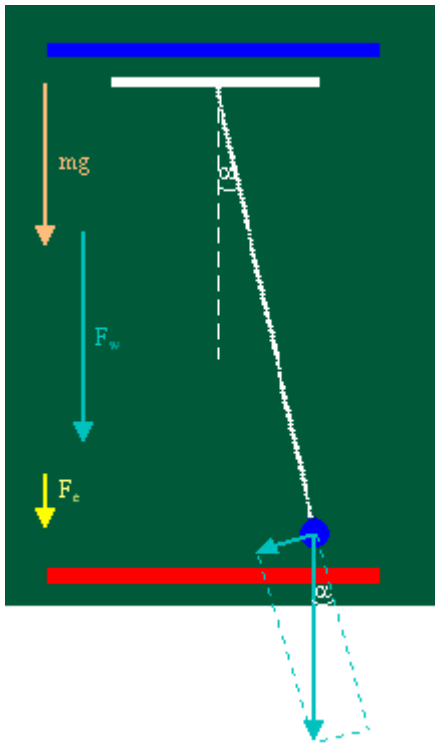
gdzie  $F_g = m \cdot g$ ,  $F_e = Q \cdot E$ .

Gdy zwrot wektora  $E$  zgodny ze zwrotem

Gdy zwrot wektora  $E$  przeciwny do zwrotu

wektora  $g$  to:

wektora  $g$  to:



Wypadkowa siła  $F_w$  będzie miała wielkość

$$F_1 = mg + Q \frac{U_1}{d},$$

a przyspieszenie masy kulki odpowiednio

$$a_1 = g + \frac{Q \cdot U_1}{m \cdot d}.$$

Dlatego okres wahań  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{a_1}}.$

Wypadkowa siła  $F_w$  będzie miała

$$\text{wielkość } F_2 = mg - Q \frac{U_2}{d},$$

a przyspieszenie masy kulki odpowiednio

$$a_2 = g - \frac{Q \cdot U_2}{m \cdot d}.$$

Dlatego okres wahań  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{a_2}}.$

Jeśli uwzględnimy, że dla wahadła matematycznego  $L = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T_0^2,$  to:

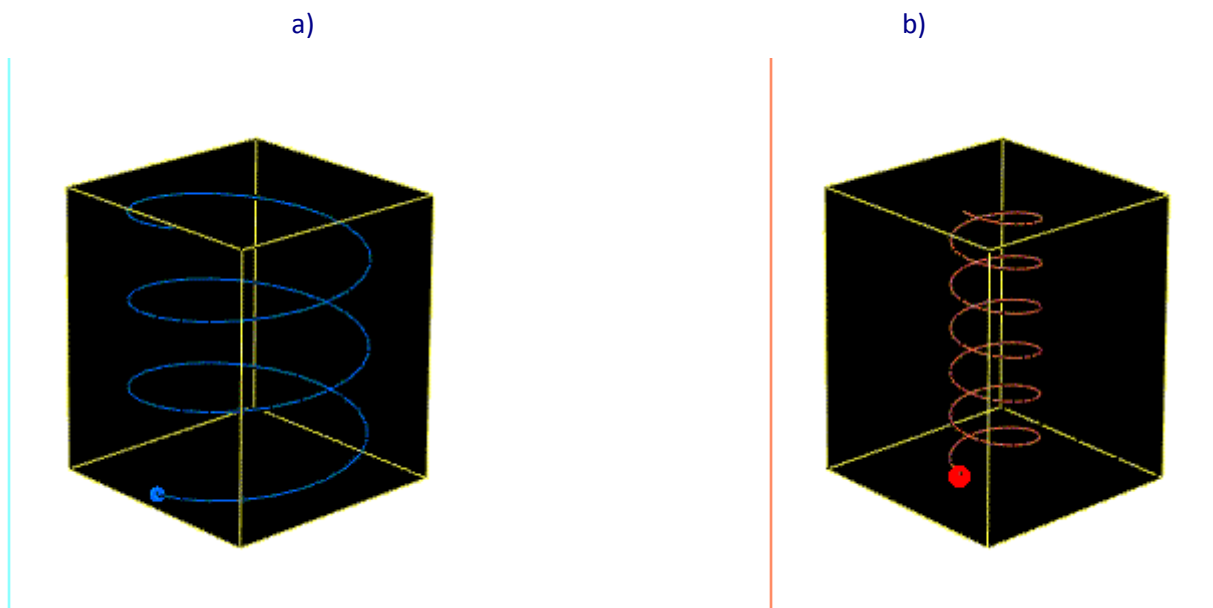
$$U_1 = \frac{mdg}{Q} \left( \frac{T_0^2}{T_1^2} - 1 \right).$$

$$U_2 = \frac{mdg}{Q} \left( 1 - \frac{T_0^2}{T_2^2} \right).$$

Poprzez zmianę polaryzacji okładek kondensatora uzyskujemy zmianę zwrotu wektora natężenia pola elektrostatycznego. Okres wahań kulki zależy od wypadkowej siły oddziaływania: siły grawitacji i siły elektrostatycznej.

#### Zadanie 11.4 ruch ładunku w polu magnetycznym

Dwie cząstki, pierwsza o ładunku  $-Q_1$  oraz druga o ładunku  $+Q_2$ , posiadające ten sam pęd, wpadają pod tym samym kątem w jednorodne, stałe pole magnetyczne. Proszę obliczyć stosunek promieni i skoków linii śrubowych po których poruszają się cząstki.

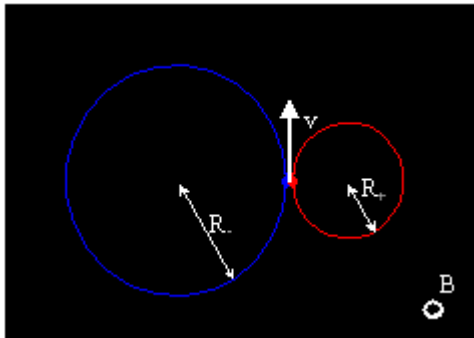


*Rys. z11.4.1. Tor ruchu cząstki: a) o ładunku  $-Q_1$ , b) o ładunku  $+Q_2$ .*

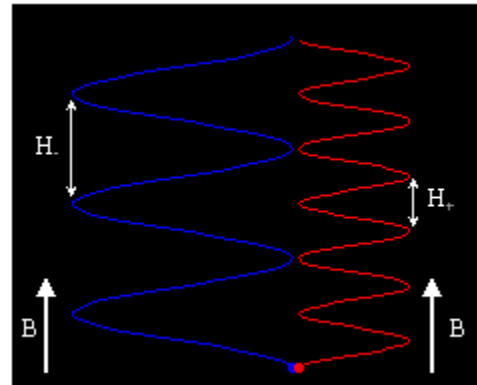
#### Zadanie 11.4 rozwiązanie

Ruch cząstki naładowanej po linii śrubowej (wykład + ilustracja interaktywna) można przedstawić jako superpozycję ruchu jednostajnego po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do wektora indukcji  $B$  (w płaszczyźnie  $XY$  tj. dla  $z = 0$ ) oraz ruchu jednostajnego w kierunku wektora  $B$  (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $XY$  tj dla  $x = 0$ ).

a)



b)



**Rys. z11.4.2. Tory cząstek:**

a) w płaszczyźnie  $z = 0$ , okręgi o promieniach  $R_1$ ,  $R_2$ ,

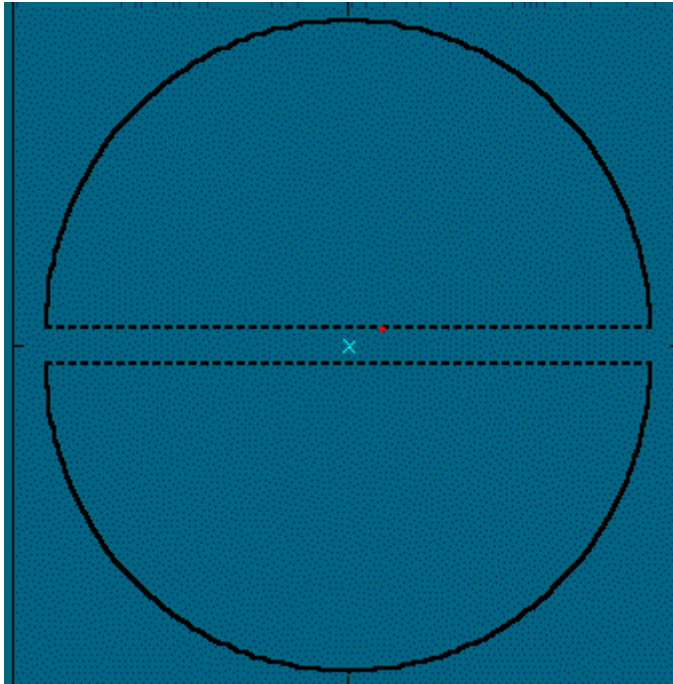
b) w płaszczyźnie  $x = 0$ , skoki linii śrubowych  $h_1$ ,  $h_2$ .

Obie cząstki posiadają ten sam pęd - dla pierwszej  $p = M_1 v_1$  i dla drugiej  $p = M_2 v_2$ .  
 Obie cząstki poruszają się w płaszczyźnie prostopadłej do pola indukcji magnetycznej  $B$  po okręgach o promieniach:

pierwsza cząstka,	druga cząstka
$R_1 = \frac{M_1 v_1 \sin \alpha}{Q_1 B}$ ,	$R_2 = \frac{M_2 v_2 \sin \alpha}{Q_2 B}$ .
Dzielimy powyższe równania stronami, co daje zależność:	
$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$ .	
Obie cząstki poruszają się w polu indukcji magnetycznej $B$ po liniach śrubowych o skokach :	
pierwsza cząstka,	druga cząstka
$h_1 = \frac{2\pi M_1 v_1 \cos \alpha}{Q_1 B}$ ,	$h_2 = \frac{2\pi M_2 v_2 \cos \alpha}{Q_2 B}$ .
Dzielimy powyższe równania stronami, co prowadzi do proporcji:	
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$ .	



## Zadanie 11.5 zasada pracy cyklotronu



W akceleratorze cząstek - cyklotronie, przyspieszane są protony. Indukcja pola magnetycznego  $B$ , amplituda napięcia przyspieszającego  $U$ . Proszę ocenić, jaki powinien być promień duantów  $R$  oraz ile czasu potrzeba na rozpędzenie protonu do energii 5 MeV, jeśli początkowa energia kinetyczna protonów jest pomijalnie mała.

Można wykonać obliczenia dla danych:

$$m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}, q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, E_k = 5 \text{ MeV}, |U| = 20 \text{ kV}, B = 1 \text{ T}.$$

*Rys. z11.5.1. Proton w cyklotronie. Zaprezentowana animacja ilustruje ruch protonu – poglądowo*

## Zadanie 11.5 rozwiązanie

W cyklotronie, w obszarze duantów, proton porusza się po półokręgach o wzrastających promieniach

$$r = \frac{m}{qB} \cdot v$$

gdzie:  $m$  to masa protonu,  $q$  to ładunek protonu,  $B$  to indukcja pola magnetycznego, a  $v$  to jego prędkość.

Gdy proton osiągnie energię kinetyczną  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  to będzie posiadał prędkość  $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$ .

Wtedy będzie poruszał się po półokręgu o promieniu

$$r = \frac{m}{qB} \cdot \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \frac{\sqrt{2m}}{qB} \cdot \sqrt{E_k}$$

Proton nie opuści duantów dopóki promień jego orbity  $r$  będzie mniejszy od promienia duantów  $R$ . Aby proton mógł uzyskać w cyklotronie energię  $E_k$ , promień duantów powinien spełniać warunek:

$$R > \frac{\sqrt{2m}}{qB} \cdot \sqrt{E_k}$$

$$T = \frac{2\pi m}{Bq}$$

Okres  $T$  obiegu protonu po orbicie kołowej wynosi

W czasie  $T$  proton dwa razy jest przyspieszany w szczeliny między duantami polem elektrycznym (bo zmienia się zwrot wektora pola elektrycznego). Jego energia kinetyczna wzrasta wtedy o  $\Delta E = 2q|U|$ . Czas trwania jednego cyklu przyspieszania protonów do energii

$$E_k \text{ wynosi } t = \frac{E_k}{\Delta E} \cdot T, \text{ czyli } t = \frac{\pi m E_k}{q^2 B |U|}$$

### Zadanie 11.6 prawo indukcji Faradaya

Proszę wyprowadzić z prawa Faradaya wzór na siłę elektromotoryczną indukowaną w pręcie o długości  $l$  poruszającym się ze stałą prędkością  $v$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$ .



*Rys. z11.6.1. Pręt w polu indukcji  $B$ .*

### Zadanie 11.6 wskazówka

Jak to pokazane jest w wykładzie, na podstawie prawa indukcji Faradaya, siłę

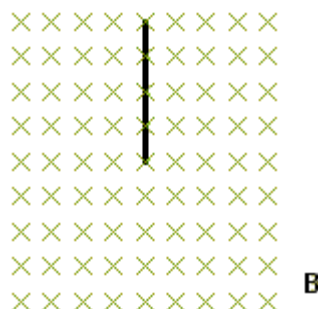
elektromotoryczną indukcji  $E = -\frac{d\Phi}{dt}$ , gdzie  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ,  $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{l} \times \vec{v}$ , można podać w notacji wektorowej:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = \vec{B} \cdot (\vec{l} \times \vec{v})$$

W przypadku przedstawionym na rysunku 11.6.1., ze względu na wzajemną orientację wektorów,  $\vec{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}$ .

### Zadanie 11.7 siła elektromotoryczna indukcji

Pręt o długości  $l$ , wykonany z przewodnika wiruje ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół nieruchomej osi przechodzącej przez jeden z jego końców w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ . Proszę obliczyć wielkość SEM która indukuje się między końcami pręta.



*Rys. z11.7.1. Przewodnik w polu o indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ .*

### Zadanie 11.7 rozwiązanie

W czasie  $dt$  wirujący pręt zakreśla kąt  $d\alpha$  i przecina strumień pola  $d\Phi = \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ , gdzie wektor

$d\mathbf{S}$  ma kierunek osi obrotu i wielkość  $dS = \frac{1}{2}l^2 \cdot d\alpha$ . Siła elektromotoryczna indukcji

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{B} \cdot \frac{1}{2}l^2\omega,$$

ponieważ  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ .

### Zadanie 11.7 odpowiedź

Siła elektromotoryczna jest równa  $\mathcal{E} = \mathbf{B} \cdot \frac{1}{2}l^2\omega$ .

Warto zauważyć, że siła elektromotoryczna jest równa zero gdy pręt wiruje w płaszczyźnie równoległej do wektora  $\mathbf{B}$ . Kierunek siły elektromotorycznej indukcji wynika z reguły Lenza.

## Nowe pojęcia, definicje i wyrażenia

<b>wektor indukcji magnetycznej</b>	wektor charakteryzujący siłę z jaką pole magnetyczne działa na poruszające się w nim cząstki naładowane i przewodniki z prądem elektrycznym
<b>linie indukcji magnetycznej</b>	linie, do których w każdym punkcie styczny jest wektor indukcji magnetycznej
<b>prawo Ampère'a</b>	Cyrkulacja wektora indukcji magnetycznej po konturze zamkniętym jest proporcjonalna do natężenia prądu obejmowanego przez ten kontur.
<b>prawo Biota-Savarta</b>	określa indukcję magnetyczną pola pochodzącego od elementu przewodnika z prądem o dowolnym kształcie
<b>prawo Gaussa dla pola magnetycznego</b>	Strumień wektora indukcji magnetycznej przez zamkniętą powierzchnię równy jest zeru (z czego wynika, że pole magnetyczne jest polem bezźródłowym).
<b>siła Lorentza</b>	siła działająca na ładunek poruszający się w polu magnetycznym
<b>siła elektrodynamiczna</b>	siła działająca na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym (zwana też siłą Ampère'a)
<b>definicja jednostki natężenia prądu, 1A</b>	Jeden amper (1A) to natężenie takiego stałego prądu elektrycznego, który płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym okrągłym przekroju, znajdujących się w próżni w odległości wzajemnej 1m powoduje powstawanie między nimi siły równej $2 \cdot 10^{-7} N$ na każdy metr ich długości.
<b>dipol magnetyczny</b>	zamknięty obwód z prądem, dowolny kawałek magnesu, cząstka posiadająca moment pędu
<b>częstość cyklotronowa</b>	częstość z jaką cząstka naładowana krąży w polu magnetycznym wokół linii indukcji magnetycznej w płaszczyźnie prostopadłej do tych linii
<b>zjawisko Halla</b>	powstawanie na ściankach przewodnika różnicy potencjałów poprzecznej w stosunku do kierunku przepływu prądu, kiedy przewodnik ten umieścimy w prostopadłym do kierunku prądu polu magnetycznym
<b>pole Halla</b>	pole elektryczne wytworzone przez nośniki zgromadzone wskutek przepływu prądu elektrycznego w poprzecznym polu magnetycznym w zjawisku Halla
<b>napięcie Halla</b>	różnica potencjałów odpowiadająca stanowi równowagi pomiędzy działającą na ładunki w zjawisku Halla siłą Lorentza i siłą wynikającą z wytworzonego wskutek gromadzenia się nośników, pola Halla.
<b>koncentracja nośników</b>	liczba nośników ładunku w jednostce objętości
<b>stała Halla</b>	współczynnik proporcjonalności w zależności napięcia Halla od indukcji pola magnetycznego, natężenia prądu, i rozmiaru próbki w kierunku pola magnetycznego. Stała Halla charakteryzuje materiał

	próbki i jest odwrotnie proporcjonalna do koncentracji nośników.
<b>podatność magnetyczna</b>	wielkość charakteryzująca materiał magnetyczny, współczynnik proporcjonalności w związku pomiędzy namagnesowaniem a natężeniem pola magnetycznego
<b>paramagnetyki</b>	materiały, w których namagnesowanie własne ma taki sam kierunek jak zewnętrzne pole magnetyczne i w rezultacie dodaje się do tego pola (mające dodatnią podatność magnetyczną, ale niezbyt dużą)
<b>diamagnetyki</b>	materiały w których namagnesowanie własne odejmuje się od pola zewnętrznego (mające ujemną podatność magnetyczną)
<b>ferromagnetyki</b>	materiały o bardzo dużej, dodatniej podatności magnetycznej
<b>wektor namagnesowania</b>	magnetyczny moment dipolowy jednostki objętości
<b>domeny</b>	obszary samorzutnego namagnesowania w ferromagnetykach
<b>natężenie pola magnetycznego</b>	wielkość wektorowa charakteryzująca pole magnetyczne, której cyrkulacja po dowolnym konturze zamkniętym równa jest natężeniu prądów rzeczywistych obejmowanych tym konturem
<b>względna przenikalność magnetyczna</b>	wielkość charakteryzująca własności magnetyczne materiału

# Drgania i fale elektromagnetyczne

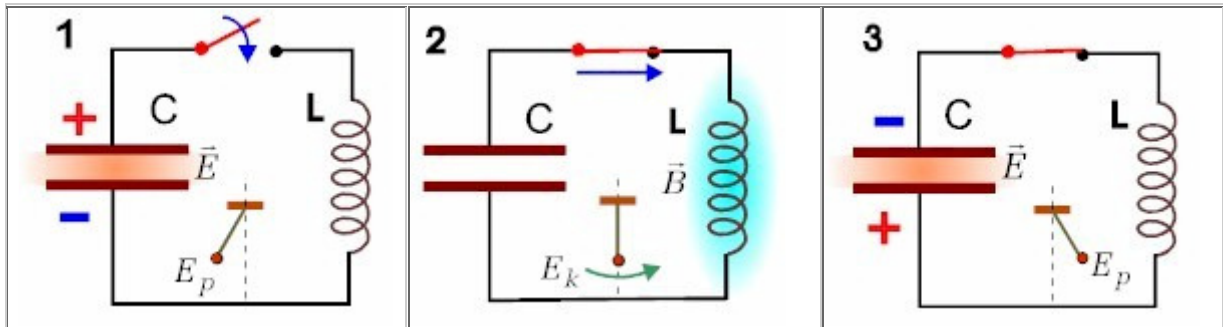
## Wstęp

### Uniwersalne drgania harmoniczne



Te symboliczne grające skrzypce mają nam przypominać, że zjawiska, którymi będziemy zajmować się w tej lekcji pozostają w ścisłym związku z poznanymi w Lekcji 3 drganiami harmonicznymi układów mechanicznych. Związek ten tkwi przede wszystkim w takiej samej postaci równań różniczkowych opisujących zarówno drgania w układach mechanicznych jak i w układach elektrycznych.

Rysunki poniżej obrazują zmiany zachodzące w obwodzie elektrycznym złożonym z pojemności i indukcyjności. Małe wahadełko w dolnej części rysunków pokazuje to samo, ale dla układu mechanicznego.



(1) W "chwili zero" kondensator jest naładowany i cała energia układu LC jest energią elektryczną skupioną pomiędzy jego okładkami. (Wahadełko jest odchylone w lewo i cała jego energia jest energią potencjalną.) Wyłącznik ustawiamy w pozycję "włączone". (Puszczamy wahadełko w ruch.) Prąd zaczyna płynąć w obwodzie.

(2) W rezultacie przepływu prądu rośnie pole magnetyczne w solenoidzie, ale kondensator rozładowuje się (Wahadełko uzyskuje energię kinetyczną i traci potencjalną.) Ładunek na okładkach kondensatora staje się równy zero. Znika energia elektryczna kondensatora, ale nie oznacza to zniknięcia prądu, który określony jest przez  $dq/dt$ . Prąd ten płynąc przez solenoid wytwarza w nim pole magnetyczne. Cała energia układu LC jest teraz energią magnetyczną skupioną w solenoidzie. (Wahadełko jest w dolnym położeniu i prędkość jego jest maksymalna. Cała energia wahadełka jest energią kinetyczną.)

(3) Przepływający prąd naładował kondensator, ale teraz polaryzacja elektrod jest przeciwna. (Wahadełko jest znów w górnym położeniu ale z przeciwnej strony.)

Oczywiście, cykl powtarza się i ruch trwa dalej, jeśli w obwodzie nie występują opory elektryczne (lub mechaniczne). W tej lekcji zobaczymy zarówno cechy wspólne drgań harmonicznych mechanicznych i elektrycznych, jak i ich specyfikę w układach elektrycznych. Podane tu podstawowe informacje stanowią jedynie wstęp do złożonej analizy zmiennych przebiegów elektrycznych stanowiących podstawę elektroenergetyki oraz elektroniki.

## 12.1. Obwód drgający

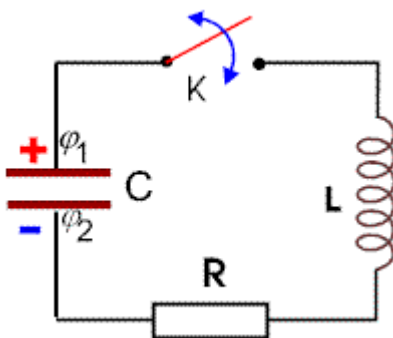
Kontynuujemy rozważania ze Wstępu. Rozpocznijmy od zapisania prawa Ohma dla obwodu elektrycznego składającego się z pojemności, indukcyjności i oporności, Rys. 12.1.1. Iloczyn natężenia prądu  $I$  płynącego przez opór  $R$  równy jest sumie różnicy potencjałów na okładkach kondensatora  $\varphi_1 - \varphi_2$ , oraz siły elektromotorycznej samoindukcji  $\mathcal{E}$  powstającej w zwojnicy:

$$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} \quad (12.1.1)$$

Gdzie stosujemy następujące, znane nam już, przyporządkowania:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U = \frac{q}{C}, \quad \mathcal{E} = -L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad I = \frac{dq}{dt} \quad (12.1.2)$$

**Uwaga wstępna:** Wykorzystując prawo Ohma do prądów zmiennych będziemy zakładać, że wartości prądu we wszystkich miejscach obwodu są w każdej chwili takie same. Prądy takie nazywamy **kwazistacjonarnymi**. Założenie takie jest słuszne dla częstotliwości drgań do ok.  $10^6$  Hz. Pamiętajmy też, że w dalszym ciągu tej lekcji różnicę potencjałów oznaczają będziemy symbolem  $U$ , a symbolem  $\varphi$  oznaczać będziemy fazę drgań obwodu. (Nie należy mylić z  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , które w powyższych wzorach oznaczają potencjały.)



Kondensator jest naładowany, ale klucz  $K$  jest otwarty. Odpowiada to rozciągnięciu sprężyny, struny w instrumencie muzycznym lub odchyleniu od pionu wahadła. (Zauważmy jednak, że energię moglibyśmy przekazać do obwodu także inaczej, np. umieszczając zwojnicę w zmiennym polu magnetycznym.)

Następnie zwierymy klucz, co powoduje rozładowanie kondensatora  $C$  poprzez oporność  $R$  i indukcyjność  $L$ .

Rys .12.1.1. Obwód RLC

Zapiszemy prawo Ohma wykorzystując podane wyżej przyporządkowania. Suma napięć (z uwzględnieniem znaku) na wszystkich elementach obwodu równa jest zero, co zapisujemy w postaci zależności

$$\frac{dq}{dt} \cdot R + \frac{q}{C} + L \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \quad (12.1.3)$$

Pamiętając, że  $I = dq/dt$  otrzymujemy równanie różniczkowe

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (12.1.4)$$

Jest to zasadnicze równanie drgań w obwodzie, składającym się z podstawowych elementów elektrycznych: opornika o oporności  $R$ , zwojnicy o indukcyjności  $L$  i kondensatora o pojemności  $C$ . Obwód taki zwany jest często obwodem  $RLC$ . Równanie to odpowiada równaniu drgań harmonicznym tłumionym, jeśli dokonamy przyporządkowania:

- odchylenie od położenia równowagi,  $x$  → ładunek elektryczny,  $q$
- masa,  $m$  → indukcyjność,  $L$
- współczynnik oporów ruchu,  $b$  → oporność,  $R$
- współczynnik sprężystości,  $k$  → odwrotność pojemności,  $1/C$ .

## 12.2. Drgania swobodne, obwód LC

Rozpatrzmy układ nie zawierający oporności. Zakładając, że  $R = 0$  i dzieląc przez  $L$ , mamy równanie

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{L \cdot C} = 0 \quad (12.2.1)$$

które jest równoważne równaniu (3.1.2) z Wykładu 3, jeśli wychylenie zastąpimy ładunkiem. Wprowadzając wielkość  $\omega_0$ , którą zwać będziemy częstością drgań własnych układu, określoną wzorem

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}, \quad (12.2.2)$$

otrzymujemy równanie postaci

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0, \quad (12.2.3)$$

którego rozwiązanie ma postać analogiczną do wzoru (3.1.4) z Wykładu 3.

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad (12.2.4)$$

Rozwiązanie to podaje zależność od czasu ładunku na okładkach kondensatora;  $q_0$  jest maksymalną wartością ładunku na kondensatorze,  $\omega_0$  jest częstością kołową drgań, a  $\varphi$  jest



fazą początkową, która przy założeniu, że  $t = 0$  w momencie zwarcia klucza  $K$  po naładowaniu kondensatora, równa jest zeru lub wielokrotności  $2\pi$ .

Zauważamy, że wzór (12.2.4) ma postać znanego nam z mechaniki wzoru opisującego drgania harmoniczne. Okres drgań wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (12.2.5)$$

Wykorzystując relację pomiędzy napięciem na kondensatorze, ładunkiem i pojemnością,  $U = q/C$  otrzymujemy zależność napięcia na kondensatorze od czasu

$$U = \frac{q_0}{C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad (12.2.6)$$

Zależność od czasu prądu w obwodzie uzyskujemy przez obliczenie pochodnej ładunku względem czasu

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 \cdot q_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi + \pi/2) \quad (12.2.7)$$

Patrząc na wzory (12.2.6) i (12.2.7) możemy powiedzieć, że natężenie prądu wyprzedza w fazie napięcie na kondensatorze o wielkość równą  $\pi/2$ .

Maksymalne wartości napięcia  $U_0$  i natężenia prądu  $I_0$  oraz związek między nimi jest następujący

$$U_0 = \frac{q_0}{C}, \quad I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{L \cdot C}}, \quad U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_0 \quad (12.2.8)$$

Dla zobrazowania relacji pomiędzy różnymi rodzajami energii w obwodzie mnożymy równanie (12.1.3) przez  $I = dq/dt$ , pamiętając, że rozpatrujemy przypadek dla  $R = 0$ . Otrzymujemy wtedy zależność

$$\frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \quad (12.2.9)$$

Wykorzystując fakt, że pochodna  $d(x^2)/dx = 2x$  możemy zależność tę zapisać inaczej

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2 \cdot C} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{L \cdot I^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2 \cdot C} + \frac{L \cdot I^2}{2} \right) = 0 \quad (12.2.10)$$

Uzyskaliśmy bardzo ważny ale nie zaskakujący nas rezultat. Dwa składniki po lewej stronie wzoru (12.2.10), to znane nam wyrażenia na energię pola elektrycznego w kondensatorze (9.10.2) oraz energię pola magnetycznego w zwojnicy (11.9.4). Fakt, że pochodna ich sumy

równa jest zero oznacza, że suma obu energii zachowuje wartość stałą, podobnie jak w swobodnych drganiach mechanicznych stałą wartość zachowuje suma energii potencjalnej i kinetycznej. Mamy więc przyporządkowanie:

energia potencjalna rozciągniętej sprężyny,	$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$	energia pola elektrycznego w kondensatorze,
energia kinetyczna poruszającej się masy,	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$	energia pola magnetycznego w solenoidzie,

Rozwiązanie dla układu zawierającego oporność  $R$  i źródło zmiennej w czasie siły elektromotorycznej  $U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  [przedstawiamy osobno](#).

## 12.3. Obwód prądu zmiennego

Rozważmy obwód prądu zmiennego zawierający opornik o oporności  $R$ , kondensator o pojemności  $C$  i zwojnicę o indukcyjności  $L$ .

Sinusoidalne napięcie zmienne zasilające obwód określa wzór postaci

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{12.3.1}$$

Podobne wyrażenie określa prąd płynący w obwodzie

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_R) \tag{12.3.2}$$

Zmiany prądu w czasie mają również charakter sinusoidalny, ale przesunięte są w fazie względem napięcia o  $\varphi_R$ , którego wartość określają parametry obwodu i częstość zewnętrznego napięcia zmiennego według wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \frac{\left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)}{R} \tag{12.3.3}$$

Maksymalna wartość prądu w obwodzie zależy też od maksymalnej wartości przyłożonego napięcia

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \quad (12.3.4)$$

Wyrażenie to przypomina znany dla prądu stałego wzór  $I=U/R$  jeśli zamiast  $R$  podstawimy  $Z$  określone wzorem:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad (12.3.5)$$

Symbolem  $Z$  oznaczyliśmy całkowity opór elektryczny dla prądu zmiennego obwodu składającego się z oporności, pojemności i indukcyjności, który nazywamy **impedancją**.

Wielkości

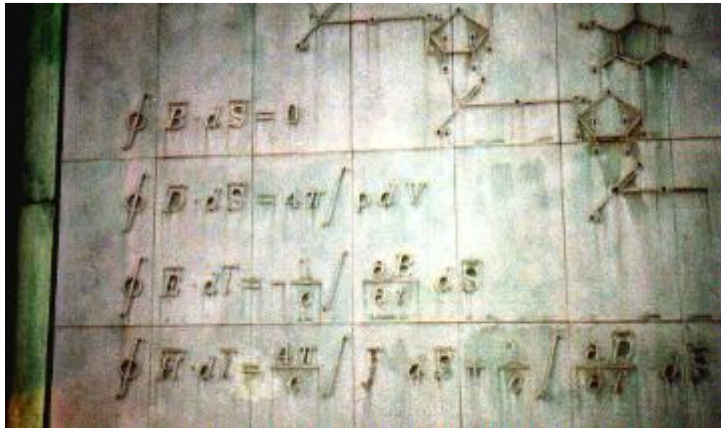
$$R, \quad (\omega \cdot L), \quad 1/(\omega \cdot C), \quad (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C)) \quad (12.3.6)$$

nazywamy odpowiednio **opornością: rzeczywistą, indukcyjną, pojemnościową oraz opornością bierną lub reaktancją**.

Wielkości te przedstawiono w tabeli poniżej:

$R$	oporność rzeczywista
$\omega \cdot L$	oporność indukcyjna
$\frac{1}{\omega \cdot C}$	oporność pojemnościowa
$\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$	oporność bierna (reaktancja)
$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$	oporność całkowita (impedancja)

## 12.4. Równania Maxwella



Wielkim ludziom stawia się pomniki, wielkie słowa wypisuje się złotymi zgłoskami, a równania Maxwella ... zdobią frontową ścianę nowego budynku biblioteki Uniwersytetu Warszawskiego.

Faktycznie, życie nasze na Ziemi wyglądałoby inaczej, gdybyśmy tych równań nie znali i gdybyśmy nie wykorzystali treści w nich zawartej.

Wiemy, że ruchy wszelkich obiektów materialnych, jeśli ich prędkości są małe w porównaniu z prędkością światła, można opisać opierając się na trzech prawach dynamiki Newtona. Zasadniczy związek łączący przyczynę ruchu (siłę) z jej skutkiem (zmianą pędu) określa prosty wzór  $\vec{F} = d\vec{p} / dt$ . Związkowi temu podporządkowana jest cała różnorodność ruchów obiektów makroskopowych. Podobnie trzy zasady termodynamiki opisują obszerną klasę przemian termodynamicznych.

Poznaliśmy już wielką różnorodność zjawisk natury elektrycznej i magnetycznej. Widzimy podobieństwa, ale i różnice obu typów zjawisk. Pojawia się więc naturalne pytanie. Czy można opisać wszystkie te zależności w jednolity sposób za pomocą równań ujmujących wspólnie wszelkie zjawiska elektryczne i magnetyczne?

**Można, są to właśnie równania Maxwella.**

W lekcji 9 poznaliśmy prawo Gaussa dla pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (12.4.1)$$

W równaniu tym  $\vec{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego a  $\Phi_E$  strumieniem tego pola przez wybraną powierzchnię zamkniętą  $S$ . Przez  $q$  oznaczyliśmy sumaryczny ładunek elektryczny obejmowany przez tę powierzchnię. Fakt, że strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez daną powierzchnię równy jest ładunkowi obejmowanemu przez tę powierzchnię oznacza, że **źródłem tego pola, które nazywamy polem elektrostatycznym są ładunki elektryczne**. Linie sił tego pola zaczynają się i kończą w miejscach, w których są ładunki elektryczne.

Kiedy mamy do czynienia z ładunkami o charakterze rozciągłym możemy prawą stronę wzoru zastąpić całką po objętości i zapisać równanie (12.4.1) w innej postaci

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho \cdot dV \quad (12.4.2)$$

gdzie  $V$  jest objętością obejmowaną przez powierzchnię  $S$ , natomiast  $\rho$  jest gęstością ładunku, wzór (9.6.8).

Równanie (12.4.1) oznacza, że **pole elektrostatyczne jest polem źródłowym**.

Przypomnijmy prawo Gaussa dla pola magnetycznego:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (12.4.3)$$

To proste równanie jest brzemienne w skutkach. Oznacza, że w przyrodzie nie ma ładunków magnetycznych, czy też odosobnionych biegunów magnetycznych. Poszukiwania takich ładunków stanowiły przedmiot wielu eksperymentów i nie przyniosły dotychczas pozytywnych rezultatów. Negatywne wyniki poszukiwań stanowią jedno z potwierdzeń słuszności teorii Maxwella. Z prawa tego wynika również, że **linie indukcji pola magnetycznego są liniami zamkniętymi**.

Równanie (12.4.3) oznacza, że **pole magnetyczne jest polem bezźródłowym**.

Omawiając zjawisko indukcji elektromagnetycznej w rozdziale 11.6 pokazaliśmy, że w nieruchomych obwodach zamkniętych znajdujących się w zmiennym polu magnetycznym pojawia się siła elektromotoryczna indukcji. Jak to się stało, że w przewodniku popłynął prąd? Wiemy, że ładunki mogą zostać wprawione w ruch tylko przez pole elektryczne. Powstająca siła elektromotoryczna i prąd wzbudzony w zamkniętym obwodzie są wskaźnikami tego, że pojawiło się pole elektryczne, którego linie sił, podobnie jak obwód z prądem, są okręgami.

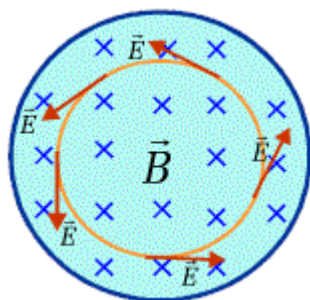
Maxwell założył, że zmienne pole magnetyczne wywołuje powstawanie w przestrzeni wirowego pola elektrycznego. Prawo Faradaya (11.6.1) określa siłę elektromotoryczną indukcji jako pochodną po czasie strumienia indukcji magnetycznej obejmowanego przez obwód wziętą ze znakiem minus. Można wykazać, że siła elektromotoryczna w obwodzie równa jest cyrkulacji wektora natężenia pola elektrycznego po konturze tego obwodu

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Równanie Maxwella ma więc postać:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (12.4.4)$$

Zmiana w czasie strumienia indukcji pola magnetycznego przechodzącego przez zamknięty kontur może następować z różnych powodów. Może to być zmiana położenia konturu lub jego kształtu, może być to również zmiana samego pola magnetycznego w czasie. To, że chodzi o zależność od czasu strumienia indukcji magnetycznej, zapisujemy w postaci pochodnej cząstkowej.

Wzór ten wyraża związek pomiędzy zmianami strumienia indukcji pola magnetycznego a powstającym wskutek tego polem elektrycznym.



*Rys. 12.4.1. Wirowe pole elektryczne kiedy  $(\partial \vec{B} / \partial t > 0)$*

Nieznikanie cyrkulacji natężenia pola elektrycznego oznacza, że pole to jest polem wirowym. Z drugiej strony pamiętamy, że pole elektrostatyczne jest polem potencjalnym, a więc bezwirowym. Oba pola różnią się więc od siebie zasadniczo. Linie sił **pola elektrostatycznego** zaczynają się i kończą na ładunkach elektrycznych, natomiast linie sił **indukowanego pola elektrycznego**, podobnie jak linie indukcji pola magnetycznego, nie mają początku ani końca; są liniami zamkniętymi, patrz Rys. 12.4.1., który pokazuje wektory natężenia pola elektrycznego w kilku punktach pola magnetycznego rosnącego w czasie  $(\partial \vec{B} / \partial t > 0)$ . Spoglądając na rysunek pamiętajmy właśnie o tym. Aby powstało wirowe pole elektryczne, strumień pola magnetycznego przez określoną powierzchnię nie może być stały; musi zmieniać się w czasie, czego nie można pokazać na statycznym rysunku.

Rozważania nasze prowadzą do wniosku, że efektem pierwotnym zmian pola magnetycznego jest powstawanie wirowego pola elektrycznego, zaś siła elektromotoryczna indukcji i przepływający wskutek jej istnienia prąd są efektami wtórnymi. Inaczej mówiąc, związek pomiędzy zmianą w czasie pola magnetycznego i cyrkulacją pola elektrycznego po zadanym konturze wcale nie implikuje wymagania, że ma to być kontur przewodzący prąd. Kolejne równania Maxwella można wyrazić następująco:

### Zmienne pole magnetyczne wywołuje w każdym punkcie pola powstawanie wirowego pola elektrycznego

Wiemy, że prąd płynący w przewodniku wytwarza wirowe pole magnetyczne, [Rys. 11.1.2.](#) Indukcja tego pola określona jest prawem Ampere'a, wzór (11.1.10). Przepływ prądu w przewodniku oznacza ruch ładunków, a więc istnienie zmiennego pola elektrycznego. Maxwell założył, że wirowe pole magnetyczne powstaje również wtedy, gdy nie ma przepływu prądu, ale zmienia się pole elektryczne. Uzupełnił prawo Ampere'a do następującej postaci:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \left( I + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \quad (12.4.5)$$

gdzie  $\Phi_E$  jest strumieniem natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię objętą konturem całkowania (całka po lewej stronie równania). Pochodna po czasie wielkości  $\Phi_E$  pokazuje jak szybko zmienia się w czasie strumień natężenia pola elektrycznego. Wynika z tego, że im szybsze są zmiany pola elektrycznego, tym większe powstaje pole magnetyczne  $\vec{B}$ .

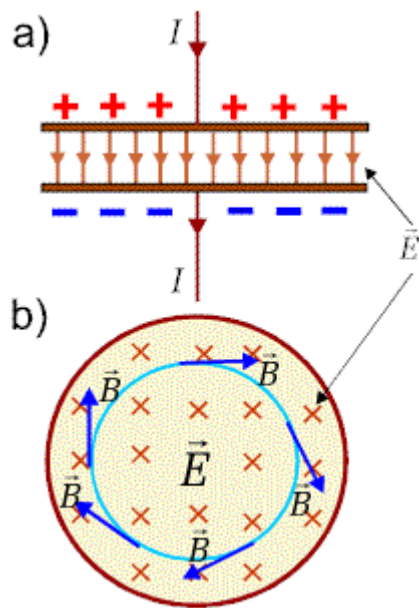
Równanie (12.4.5) stanowi czwarte z równań Maxwella. Stanowiąc uogólnienie prawa Ampère'a, równanie to łączy przepływ prądu elektrycznego oraz istnienie zmiennego pola

elektrycznego (drugi składnik po prawej stronie równania) z powstawaniem pola magnetycznego.

Uzasadnienie wzoru (12.4.5) dla dociekliwych [przedstawiamy osobno](#).

Czwarte równanie Maxwella można wyrazić słowami w następującej formie:

**Prąd elektryczny i/lub zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne**



Powstawanie wirowego pola magnetycznego na skutek zmian pola elektrycznego ilustruje Rys. 12.4.2. Pokazuje on w dwóch rzutach płaski kondensator próżniowy, którego okładki mają kształt koła. Kiedy ładujemy kondensator wzrasta pole elektryczne w przestrzeni pomiędzy okładkami; ładunek elektryczny do jednej okładki dopływa, z drugiej odpływa. W czasie rozładowania kondensatora cały proces powtarza się, ale przebiega w przeciwnym kierunku. Zmiana ładunku na okładkach kondensatora oznacza istnienie między okładkami zmiennego pola elektrycznego, co powoduje wytworzenie wirowego pola magnetycznego o indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ .

*Rys. 12.4.2. Indukowane pole magnetyczne w czasie ładowania kondensatora,  $\partial \vec{E} / \partial t > 0$*

Równanie (12.4.5) jest podobne do równania (12.4.4). Zasadniczą różnicą jest jednak różny znak po prawej stronie. Odzwierciedla on różne kierunki wirowych pól: elektrycznego i magnetycznego pokazanych na rysunkach: 12.4.1 i 12.4.2.

(Pragniemy zaznaczyć, że kolejność, czyli numeracja zapisanych tu równań w układzie równań Maxwella, jest sprawą całkowicie umowną.)

Analizując podobieństwa i różnice trzeciego i czwartego równania Maxwella, wzory (12.4.4) i (12.4.5), warto przypomnieć sobie pojęcie względności ruchu oraz faktu, że obiekt będący w spoczynku w jednym układzie odniesienia może być w ruchu w innym układzie. Nieruchomy przewodnik w którym płynie prąd stały, wytwarza również stałe pole magnetyczne. W poruszającym się względem tego przewodnika układzie odniesienia role się zmieniają i porusza się właśnie ten przewodnik. Poruszający się przewodnik wytwarza zmienne pole magnetyczne, które z kolei wytwarza wirowe pole elektryczne. Mamy wtedy do czynienia z istnieniem obu rodzajów pól. Zamiast więc mówić o istnieniu, lub nieistnieniu danego typu pola w danym układzie, lepiej jest określać je jako przejawy istnienia jednego pola elektromagnetycznego.

## 12.5. Równania Maxwella w ośrodku materialnym

Dotychczas, formułując równania Maxwella, nie rozpatrywaliśmy wpływu ośrodka na zależności pomiędzy zmianami obu pól w czasie i przestrzeni. Pamiętamy, że własności elektryczne i magnetyczne materiałów charakteryzujemy trzema wielkościami: względną przenikalnością elektryczną  $\epsilon$ , elektryczną przewodnością właściwą  $\sigma$ , i względną przenikalnością magnetyczną,  $\mu$ . Wprowadziliśmy też trzy wielkości charakteryzujące odpowiednio: pole elektryczne, prąd elektryczny, i pole magnetyczne w materiałach. Te trzy wektory: indukcji elektrycznej,  $\vec{D}$ , gęstości prądu elektrycznego,  $\vec{j}$ , i natężenia pola magnetycznego,  $\vec{H}$ , powiązaliśmy z wprowadzonymi wcześniej wielkościami charakteryzującymi pole elektryczne i magnetyczne, tj. natężeniem pola elektrycznego,  $\vec{E}$  i indukcją magnetyczną,  $\vec{B}$ . Związki pomiędzy tymi wielkościami, które przypominamy poniżej, stanowią uzupełnienie równań Maxwella.

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \text{wzór (9.9.16)}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{wzór (10.2.6)} \quad (12.5.1)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \text{wzór (11.5.11)}$$

Jeśli wstawimy powyższe wyrażenia do równań Maxwella dla próżni, otrzymamy układ czterech równań Maxwella dla dowolnego ośrodka:

	Równania Maxwella wyrażone wzorami	Równania Maxwella wyrażone słowami
<b>I</b>	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$	<b>Pole elektrostatyczne jest polem źródłowym</b> - strumień wektora indukcji elektrycznej przez powierzchnię zamkniętą równy jest całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz tej powierzchni.
<b>II</b>	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	<b>Pole magnetyczne jest polem bezźródłowym</b> - strumień wektora indukcji magnetycznej przez powierzchnię zamkniętą równy zeru.
<b>III</b>	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$	<b>Zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne</b> - cyrkulacja wektora elektrycznego po konturze zamkniętej równa jest szybkości zmian strumienia indukcji magnetycznej obejmowanego przez ten kontur.
<b>IV</b>	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left( I + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \right)$	<b>Prąd elektryczny i zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne</b> - cyrkulacja wektora natężenia pola magnetycznego po konturze zamkniętej równa jest całkowitemu



	natężeniu prądu uogólnionego przeływającego wewnątrz tego konturu.
--	---

Równania Maxwella opisują cały kompleks zjawisk elektromagnetycznych w skali makroskopowej ujmując w postaci jednolitej teorii wszelkie prawidłowości zaobserwowane wcześniej i wszelkie równania, którymi opisywano zjawiska elektryczne i magnetyczne. Na podstawie tych równań, jak zobaczymy dalej, można wykazać zarówno istnienie fal elektromagnetycznych o różnych długościach (a więc istnienie widma fal elektromagnetycznych), jak i określić ich prędkość, która w próżni okazuje się być równa prędkości światła. Istnienie fal elektromagnetycznych zostało eksperymentalnie stwierdzone przez H. Hertza w 1890 roku.

## 12.6. Równanie falowe dla pola elektromagnetycznego

Równania Maxwella nie tylko opisują w jednolity sposób wszystkie znane w czasach Maxwella zjawiska elektryczne i magnetyczne, ale można z nich wywnioskować o zupełnie nowych efektach. Zastanówmy się, co się stanie, jeśli w ładunek będzie poruszał się z przyspieszeniem lub w obwodzie popłynie zmienny prąd. Pojawi się wtedy wirowe pole magnetyczne, lecz o zmieniającej się indukcji. Wiemy z równań Maxwella, że wtedy musi powstać wirowe pole elektryczne, ono z kolei spowoduje powstanie wirowego pola magnetycznego itd. W rezultacie w przestrzeni będzie rozchodzić się fala elektromagnetyczna. Rzeczywiście, przekształcając równania Maxwella, możemy otrzymać równania:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (12.6.1)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (12.6.2)$$

Związki te to równania falowe, w których prędkość rozchodzenia się fali równa jest:

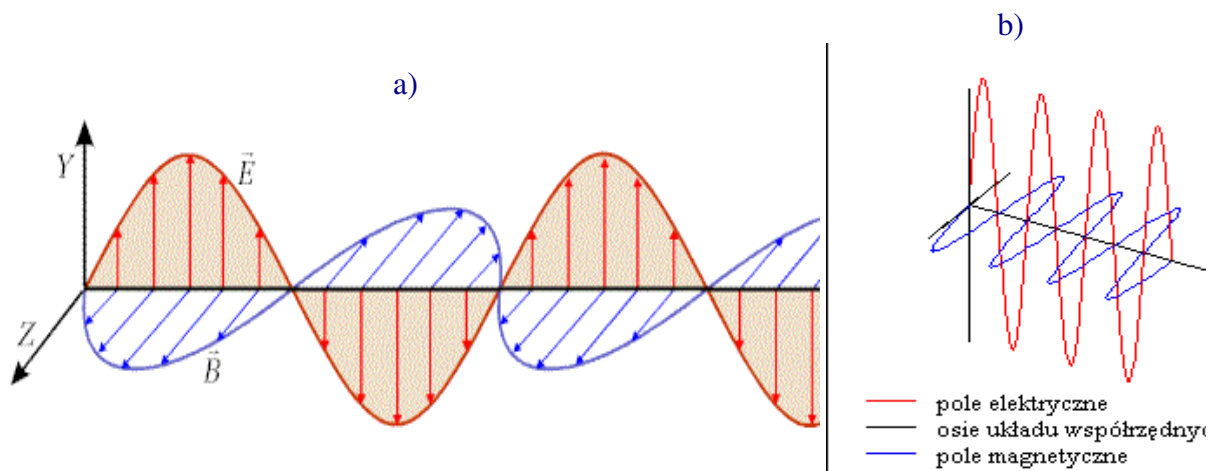
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad (12.6.3)$$

i podstawiając znane wartości  $\epsilon_0$  oraz  $\mu_0$  (patrz: **INDEX**, tablica stałych fizycznych) otrzymujemy

$$v \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)} = c \quad (12.6.3a)$$

Jest to prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni równa znanej nam prędkości światła (dokładna wartość podana jest w tablicy stałych fizycznych). Widzimy, że prędkość ta jest niezależna od częstości drgań czy długości fali. Jest to uniwersalna stała związana bezpośrednio z przenikalnością elektryczną i magnetyczną próżni - podstawowymi charakterystykami pól: elektrycznego i magnetycznego. Zależność (12.6.3) oznacza też, że spośród trzech fundamentalnych stałych fizycznych:  $c$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ , tylko dwie są niezależne. Możemy teraz lepiej zrozumieć postulat szczególnej teorii względności o stałości prędkości światła niezależnie od układu odniesienia - przenikalność elektryczna i magnetyczna to stałe uniwersalne, zawsze i wszędzie mające taką samą wartość.

Zmiany prostopadłych wzajemnie pól elektrycznego i magnetycznego mogą rozchodzić się w kierunku prostopadłym do kierunku obu tych pól i zmiany te rozchodzą się z prędkością światła. Taką kombinację pól elektrycznego i magnetycznego nazywamy **falą elektromagnetyczną**. Fale elektromagnetyczne są więc falami poprzecznymi. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej ilustruje rysunek 12.6.1.



*Rys. 12.6.1. a) Propagacja fali elektromagnetycznej w kierunku osi X, b) Animacja fali elektromagnetycznej*

**Równania (12.6.1) i (12.6.2) są równaniami falowymi dla pola elektromagnetycznego.**

Równania te otrzymane są bezpośrednio z równań Maxwella. Podstawowe wnioski z nich wynikające sformułować można następująco.

**1. Zmiany pola elektromagnetycznego mogą rozchodzić się w czasie i przestrzeni w postaci fal elektromagnetycznych.**

**2. Prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni jest uniwersalną stałą związaną z własnościami pól: elektrycznego i magnetycznego.**

**3. Prędkość ta równa jest prędkości rozchodzenia się światła w próżni.**

W ten sposób Maxwell pierwszy odkrył naturę fizyczną światła uświadamiając nam, że światło ma naturę fali elektromagnetycznej. Wniosek ten uznawany jest za **największe osiągnięcie teorii Maxwella (!)**

Propagacja pola elektrycznego i magnetycznego przebiega więc w ten sam sposób. Rozwiązania równań falowych, czyli funkcje spełniające te równania można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \sin[k \cdot (x - c \cdot t)] = E_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ B &= B_0 \cdot \sin[k \cdot (x - c \cdot t)] = B_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \end{aligned} \quad (12.6.4)$$

gdzie  $\omega = k \cdot c$ . Amplitudy  $E_0$  i  $B_0$  nie są jednak niezależne, zachodzi między nimi związek:

$$E_0 = c \cdot B_0 \quad (12.6.5)$$

Mając na uwadze, że zmiany obu pól przebiegają w ten sam sposób dany równaniami (12.6.4) możemy związek pomiędzy amplitudami przenieść na relacje pomiędzy wartościami pól

$$E = c \cdot B \quad \text{lub} \quad B = \frac{1}{c} \cdot E \quad (12.6.6)$$

Kiedy fala rozchodzi się w ośrodku materialnym o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$  i względnej przenikalności magnetycznej  $\mu$ , jej prędkość, jak wynika z rozwiązania równań Maxwella dla tego ośrodka, jest mniejsza i wyraża się wzorem, w którym zamiast bezwzględnych przenikalności próżni znajdują się bezwzględne przenikalności ośrodka tj.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \quad (12.6.7)$$

Widzimy, że ostatecznie prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej (a więc i światła) w ośrodku materialnym jest określona przez prędkość światła w próżni oraz przenikalności: elektryczną i magnetyczną ośrodka.

## 12.7. Energia fal elektromagnetycznych

Jeśli fala elektromagnetyczna jest w stanie pobudzić Twój telefon komórkowy do działania, to musi przenosić energię z jednego miejsca przestrzeni do drugiego. Wiemy już jak wiąże się gęstość energii pola elektrycznego z natężeniem tego pola, wzór (9.10.5) oraz gęstość energii pola magnetycznego z wartością wektora indukcji magnetycznej, wzór (11.8.5). Gęstość energii, to energia przypadająca na jednostkę objętości. Całkowita energia fali elektromagnetycznej zmagazynowana w jednostce objętości jest sumą energii pola elektrycznego i pola magnetycznego

$$w = w_E + w_B = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \quad (12.7.1)$$

gdzie  $E$  i  $B$  są wartościami natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego w danym punkcie przestrzeni w dowolnym momencie czasu. Pamiętając, że w próżni  $E = c \cdot B$  oraz  $\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} = 1/c$ , możemy wzór (12.7.1) przepisać w postaci

$$w = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot E^2}{\mu_0} = \epsilon_0 \cdot E^2 \quad (12.7.1a)$$

gdzie wyraziliśmy gęstość energii w funkcji natężenia pola elektrycznego. Jest to dokładnie dwukrotnie więcej niż wkład składowej pola elektrycznego, czyli oba pola mają jednakowy wkład do energii pola elektromagnetycznego. Możemy oczywiście wyrazić także gęstość energii w funkcji wartości wektora indukcji pola magnetycznego

$$w = \epsilon_0 \cdot E^2 = \epsilon_0 \cdot c^2 \cdot B^2 = \epsilon_0 \cdot B^2 / (\epsilon_0 \cdot \mu_0) = B^2 / \mu_0, \quad (12.7.1b)$$

lub jeszcze inaczej zapisać wyrażenie na gęstość energii w funkcji  $E$  i  $B$

$$w = \epsilon_0 \cdot E^2 = \epsilon_0 \cdot E \cdot c \cdot B = \epsilon_0 \cdot E \cdot B / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} = E \cdot B \cdot \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \quad (12.7.1c)$$

Określmy teraz energię transportowaną przez falę elektromagnetyczną w próżni w jednostce czasu. Kierunek transportu energii pokrywa się z kierunkiem rozchodzenia się fali i jest prostopadły do kierunków wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . W czasie  $dt$  fala przesuwa się o odcinek  $c \cdot dt$ . Przez powierzchnię  $S$  prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali przetransportowana jest energia zawarta w objętości  $dV = S \cdot c \cdot dt$ . Energia ta wynosi  $dW = w \cdot dV = \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot S \cdot c \cdot dt$ . Energia przenoszona przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu wynosi więc

$$P = \frac{1}{S} \frac{dW}{dt} = \epsilon_0 \cdot c \cdot E^2 \quad (12.7.2)$$

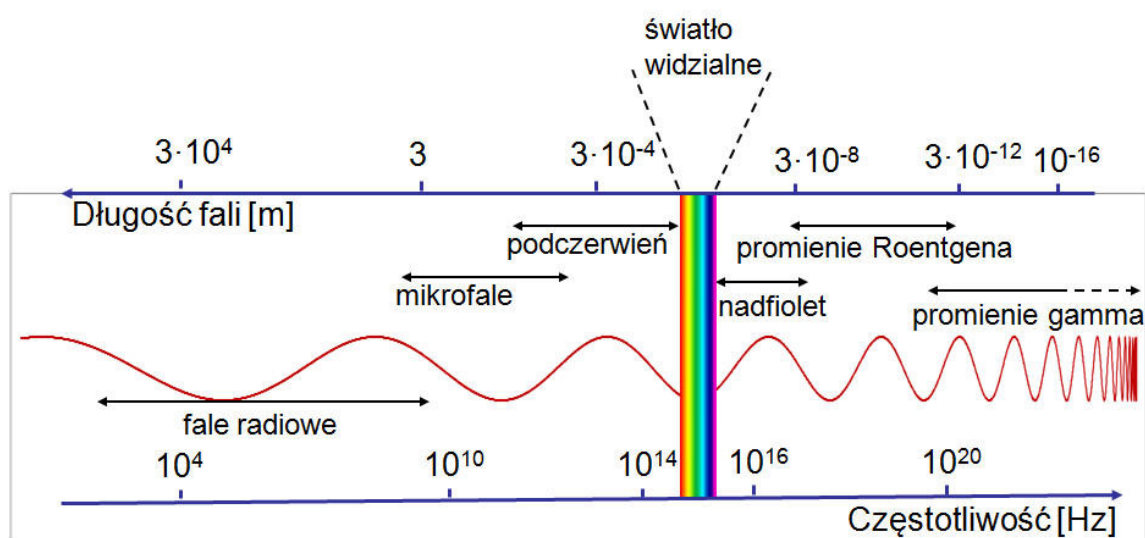
Wykorzystując znów związki:  $\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} = 1/c$  oraz  $E = c \cdot B$  możemy wzór (12.7.2) przepisać w postaci

$$P = \epsilon_0 \cdot c \cdot E^2 = c \cdot B^2 / \mu_0 = E \cdot B / \mu_0 \quad (12.7.2a)$$

## 12.8. Widmo fal elektromagnetycznych

Prędkość fal elektromagnetycznych w próżni jest stała, niezależna od częstotliwości promieniowania, a tym samym od długości fali. Falą elektromagnetyczną jest także światło widzialne. Odległe obiekty astronomiczne poznajemy jednak nie tylko dzięki sygnałom docierającym do nas w postaci światła widzialnego, ale także w postaci fal z bardzo szerokiego zakresu częstotliwości. Metody generacji (emisji), rejestracji i analizy promieniowania elektromagnetycznego zależą od częstotliwości promieniowania. Natura fal elektromagnetycznych i zjawisk falowych pozostaje jednak taka sama.

Na rysunku poniżej pokazane jest widmo fal elektromagnetycznych w funkcji częstotliwości i długości fali. Zakres fal widzialnych stanowi jedynie mały jego fragment.



*Rys. 12.8.1. Widmo fal elektromagnetycznych*

Widmo fal elektromagnetycznych obejmuje wielką różnorodność zjawisk: od fal radiowych aż po bardzo przenikliwe promieniowanie  $\gamma$ . Rodzaj fali zależy od sposobu jej generacji.

- **Fale radiowe** to fale o długości mierzonej w metrach, a nawet w kilometrach. Fale te generowane są w układach elektrycznych wytwarzających drgania elektromagnetyczne (obwody LC), i charakteryzują się określoną fazą generowanej fali.
- Ten sposób generacji dotyczy także **mikrofal**, których długość fali wynosi od  $10^{-4}$  m do 0,3 m (0,1 mm do 30 cm). Do ich wytwarzania używa się lamp mikrofalowych: elektrony krążąc w polu magnetycznym po spiralach, emitują mikrofały.
- **Promieniowanie podczerwone** w zakresie od  $7 \cdot 10^{-7}$  m do  $2 \cdot 10^{-3}$  m emitowane jest przez rozgrzane ciała w wyniku wzbudzeń cieplnych elektronów wewnątrz substancji. Im niższa temperatura ciała tym mniejsze natężenie promieniowania i większa długość fali. Ciała o temperaturze do około  $400^\circ\text{C}$  wysyłają praktycznie tylko promieniowanie podczerwone. Fale w obszarze podczerwieni, które emitowane są wskutek

chaotycznych wzbudzeń termicznych atomów i cząsteczek nie zachowują stałej fazy, to znaczy, że nie są spójne. Fale spójne w tym obszarze widmowym mogą być generowane przez lasery. Podobna sytuacja jest także w obszarze światła widzialnego i nadfioletu.

- **Światło widzialne** to bardzo wąski zakres długości fal od około  $4 \cdot 10^{-7}$  m do około  $7 \cdot 10^{-7}$  m. Światło o największej długości fali widzimy jako czerwone, a o najmniejszej – fioletowe. Naturalnymi źródłami są ciała ogrzane do temperatury ponad  $700^{\circ}\text{C}$ . Na skutek ruchów cieplnych następuje wtedy wzbudzenie elektronów wewnątrz substancji i przy powrocie do niższych stanów energetycznych następuje emisja światła.
- **Promieniowanie nadfioletowe** obejmuje zakres długości fal od  $4 \cdot 10^{-7}$  m do  $10^{-8}$  m (od 400 do 10 nm). Naturalnymi źródłami są ciała o dostatecznie wysokiej temperaturze. Znikome, ale zauważalne ilości tego promieniowania wysyłają już ciała o temperaturze 3000K i ze wzrostem temperatury natężenie wzrasta. Silnym źródłem jest Słońce, którego temperatura powierzchni wynosi 6000K. Promieniowanie nadfioletowe ma silne działanie fotochemiczne. Przy długości fali poniżej 300 nm wywołuje już jonizację i jest zabójcze dla organizmów żywych, wywołuje lub przyspiesza szereg reakcji chemicznych.
- **Promieniowanie rentgenowskie** emitowane jest, gdy przejścia elektronów w atomie dotyczą wewnętrznych powłok elektronowych. Jest to możliwe, gdy elektrony wybijane są przez przyspieszone silnym polem elektrycznym cząstki naładowane. Również podczas hamowania swobodnych elektronów przyspieszonych do dużych prędkości, emitowane jest promieniowanie z zakresu rentgenowskiego.
- Źródłem **promieniowania  $\gamma$**  o długości fali mniejszej od  $10^{-10}$  m są procesy zachodzące w jądrze atomowym (np. rozpad pierwiastków promieniotwórczych zawartych w skorupie ziemskiej lub reakcje jądrowe). Promieniowanie to powstaje również podczas procesów jądrowych zachodzących w gwiazdach i galaktykach. Do wielkich zagadek współczesnej nauki należą tak zwane błyski  $\gamma$ . To dochodzące z głębi Wszechświata impulsy promieniowania  $\gamma$ , o energii porównywalnej z energią, jaką wyemituje Słońce w ciągu całego swego istnienia (10 mld lat).

## Zadania

### Zadanie 12.1 drgania w obwodzie LC

Proszę podać analogie między wielkościami charakteryzującymi drgania masy zawieszonyj na sprężynie i drgania w obwodzie LC .

### Zadanie 12.1 rozwiązanie

W poniższym zestawieniu zastosowano standardowe oznaczenia: m - masa, x - wychylenie od położenia równowagi, k - współczynnik sprężystości, v - prędkość,  $E_{kin}$  - energia kinetyczna,  $E_p$  - energia potencjalna, L - indukcyjność, q - ładunek, C - pojemność, I - natężenie prądu,  $E_m$  - energia pola magnetycznego,  $E_{el}$  - energia pola elektrycznego.

masa na sprężynie	obwód LC
-------------------	----------

$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$	m	x	k	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$	L	q	1/C
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	m		k	$T = 2\pi\sqrt{LC}$	L		1/C
$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$	m		v	$E_m = \frac{LI^2}{2}$	L		I
$E_p = \frac{kx^2}{2}$		k	x	$E_e = \frac{q^2}{2C}$		1/C	q

### Zadanie 12.2 częstotliwość drgań własnych

Z solenoidu znajdującego się w obwodzie LC został usunięty rdzeń. Rdzeń ten wykonany był z materiału o względnej przenikalności magnetycznej  $\mu$ . Jak zmieniła się częstotliwość drgań własnych obwodu?

### Zadanie 12.2 rozwiązanie

Wyznamy indukcyjność długiego solenoidu (zwojnicy). Korzystając ze wzoru na indukcję pola magnetycznego solenoidu, wzór (11.1.13) zapiszemy całkowity strumień indukcji dla solenoidu złożonego z  $N$  zwojów nawiniętych tak, że na jednostkę długości przypada  $n$  zwojów. Otrzymamy wtedy:

$$\Phi_s = N \cdot \Phi = \overbrace{n \cdot l}^N \cdot B \cdot S = n \cdot l \cdot (\mu_0 \cdot I \cdot n) \cdot S = \mu_0 \cdot I \cdot n^2 \cdot l \cdot S$$

Strumień indukcji magnetycznej solenoidu jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu:

$$\Phi_s = L \cdot I,$$

gdzie  $L$  jest indukcyjnością solenoidu. Indukcyjność solenoidu będzie więc równa:

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot S = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l}$$

gdzie przez  $V = l \cdot S$  oznaczyliśmy objętość solenoidu.

Indukcyjność solenoidu z rdzeniem będzie  $\mu$  razy większa: 
$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N^2 \cdot S}{l}$$

Częstotliwość drgań własnych obwodu LC  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

Zatem  $L_1 = \mu \cdot L$  oraz  $\frac{\nu_0}{\nu_1} = \sqrt{\mu}$ .

Gdy  $\mu > 1$ , co ma miejsce dla rdzenia ferromagnetycznego lub paramagnetycznego, to po usunięciu rdzenia  $\nu_1 < \nu_0$ .

Gdy  $\mu < 1$ , co ma miejsce dla rdzenia diamagnetycznego, to usunięcie rdzenia spowoduje, że  $\nu_1 > \nu_0$ .

### Zadanie 12.3 przesunięcie fazowe

W obwodzie LC, na okładkach kondensatora, ładunek  $Q$  zmienia się harmonicznie w czasie z częstością drgań własnych obwodu  $\omega_0$ . Wyrażenie opisujące te zmiany ma postać:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

gdzie:  $Q_0$  - ładunek maksymalny,  $\varphi_0$  - faza początkowa.

Proszę znaleźć napięcie na okładkach kondensatora  $U(t)$  oraz natężenie prądu w obwodzie  $I(t)$ . Ponadto należy podać przesunięcie fazowe  $\Delta\varphi$  natężenia prądu  $I(t)$  i napięcia  $U(t)$ .

### Zadanie 12.3 rozwiązanie

Zależności w których występują funkcje trygonometryczne sinus lub/i cosinus nazywamy ogólnie zależnościami sinusoidalnymi. Wzory podane są na wykładzie, ale wykorzystać trzeba je rozsądnie.

$$U(t) = \frac{Q_0}{C} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ gdzie } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

### Zadanie 12.3 odpowiedź

Prąd  $I(t)$  i napięcie między okładkami kondensatora  $U(t)$  przesunięte są w fazie o  $\pi/2$ .



## Nowe pojęcia, definicje i wyrażenia

<b>prąd kwazistacjonarny</b>	kiedy wartości natężenia prądu we wszystkich miejscach obwodu są w każdej chwili takie same
<b>impedancja</b>	całkowity opór elektryczny obwodu składającego się z oporności, pojemności i indukcyjności
<b>równania Maxwella</b>	<p>równania wyrażające podstawowe własności pól: elektrycznego i magnetycznego oraz ich związki:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) Strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą równy jest ładunkowi obejmowanemu przez tę powierzchnię</li><li>2) Strumień wektora indukcji magnetycznej przez powierzchnię zamkniętą równy jest zeru.</li><li>3) Zmienne pole magnetyczne wywołuje w każdym punkcie pola powstawanie wirowego pola elektrycznego.</li><li>4) Prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarza wirowe pole magnetyczne.</li></ol> <p><b>Uwaga</b>, sformułowania słowne nie oddają całej treści równań.</p>
<b>równanie falowe</b>	równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem są funkcje opisujące ruch falowy
<b>Fala elektromagnetyczna</b>	Zmiany prostopadłych wzajemnie pól elektrycznego i magnetycznego rozchodzące się z prędkością światła w kierunku prostopadłym do kierunku obu tych pól .