MATEMATYKA 2

OKNO - Ośrodek Kształcenia na Odległość
Politechnika Warszawska

Krystyna Lipińska　　Dominik Jagiełło　　Rafał Maj

2010

Spis treści

Słowo wstępne

Celem przedmiotu Matematyka jest dostarczenie studentom aparatu pojęciowego niezbędnego w toku studiowania przedmiotów kierunkowych.

Materiał wykładów i ćwiczeń zawartych w podręczniku OKNA zawiera podstawowe elementy tych działów Matematyki Wyższej, które mogą być użyteczne w przedmiotach specjalistycznych, oraz Dodatki zawierające, na życzenie wykładowców innych przedmiotów, te działy matematyki, które nie obowiązują na egzaminie z Matematyki, ale mogą ułatwić rozwiązywanie problemów występujących w innych przedmiotach obowiazujacych na studiach.

Student powinien opanować umiejętność odnajdywania w podręczniku odpowiednich metod i wzorów ułatwiających rozwiązanie problemów opisanych modelem matematycznym. Przystępując do samodzielnego opanowania materiału należy starać się zrozumieć rolę podanych definicji i wzorów ułatwiających rozwiązywanie zadań i ustalić relacje między nimi. Jest to bardzo przyjemny proces w wyniku którego można samodzielnie rozwiązać umieszczone na końcu rozdziału zadania uzyskując wynik zgodny z podaną odpowiedzią.

Egzamin z Matematyki polega na sprawdzeniu czy student potrafi rozwiązać dosyć trudne zadania korzystając z wydruku podręcznika umieszczonego na stronie przedmiotu oraz z tabeli wzorów odpowiednich działów objętych egzaminem.

Studiując samodzielnie można korzystać z literatury uzupełniającej, pamiętając jednak że mogą występować różne metody i oznaczenia rozwiązywania zadań.

Pomocą w opanowaniu systematycznym obowiązującego do egzaminu materiału są zajęcia stacjonarne na których wykładowca omawia trudniejsze zadania i wyjaśnia wątpliwości w postaci indywidualnych konsultacji.

Przedmiot Matematyka jest realizowany w dwóch półsemestrach. Egzamin można zdawać w dwóch częściach, po każdym półsemestrze, lub z całości materiału po całym semestrze.

Szczegóły dotyczące zawartości materiału po każdym półsemestrze terminy zajęć stacjonarnych oraz zasady zaliczenia zostaną podane w pliku na stronie Matematyka pod nazwą Zaliczenie przedmiotu.

Życzymy wytrwałości i satysfakcji z trudnych ale ciekawych studiów.

Zespół prowadzących przedmiot Matematyka

Wykład 1

Całka krzywoliniowa nieskierowana

Całki krzywoliniowe niekierowane odgrywają istotną rolę w rachunku całkowym. Zdefiniowane są one na odcinku łuku. Funkcja podcałkową jest funkcja $f(M)$, gdzie M jest punktem leżącym od łuku. Całkę krzywoliniową oblicza się poprzez zamianę na całkę oznaczoną. W przypadku gdy funkcja podcałkowa jest równa jedności, całka krzywoliniowa niekierowana wyznacza długość odcinka łuku. Za pomocą całki krzywoliniowej niekierowanej można obliczać momenty statyczne i bezwładności odcinka łuku.

1.1 Całka krzywoliniowa nieskierowana

Definicja całki

Rozważmy otwarty łuk l gładki o równaniach parametrycznych

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{1.1}$$

Łuk ten ma określoną długość równą

$$|l| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{1.2}$$

Łukowi nie nadajemy żadnego kierunku, jest to łuk nieskierowany.

Przedział (α, β) dzielimy na n części ciągiem podprzedziałów normalnych. Podziałowi temu odpowiadają podziały łuku na n części punktami A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ ograniczającymi cięciwy $\Delta I_k = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]$.

Niech w punktach krzywej l będzie określona funkcja ciągła $f(M)$, gdzie $M = (x, y, z)$. W każdym podprzedziale (t_{k-1}, t_k) wybieramy punkt M_k i tworzymy sumę

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \Delta I_k. \tag{1.3}$$

Jeżeli dla każdego ciągu normalnych podziałów przedziału (α, β) ciąg sum częściowych jest zbieżny do granicy właściwej niezależnie od doboru punktów M_k to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową nieskierowaną* z funkcji skalarnej i oznaczamy symbolem

$$\int_{l} f(M)\, dl, \tag{1.4}$$

Obliczanie całki krzywoliniowej

Można wykazać, że jeżeli

1. krzywa jest zadana parametrycznie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ dla $t \in (\alpha, \beta)$, to $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$ oraz

$$\int_{l} f(M)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \tag{1.5}$$

2. krzywa l jest krzywą płaską zadaną parametrycznie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, to $M = (x, y)$, $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$ oraz

$$\int_{l} f(M)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{1.6}$$

3. krzywa płaska l zadana jest jawnie, tzn. $y = y(x)$ dla $x \in (a, b)$, to $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ oraz

$$\int\limits_l f(M)\, dl = \int\limits_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \tag{1.7}$$

Uwaga 1.1. Jeżeli krzywa l jest częściami gładka, np. jest krzywą łamaną, to dzielimy drogę całkowania na części, obliczamy całki krzywoliniowe odpowiadające tym częściom i dodajemy je.

1.2 Zastosowanie całki krzywoliniowej nieskierowanej

Rozpatrzmy łuk $\widehat{AB}$ o gęstości liniowej masy $\rho(x, y)$.

1. Jeżeli funkcja $f(M) = 1$ łuku $\widehat{AB}$, to całka krzywoliniowa wyznacza *długość tej krzywej.*

2. *Masa* M tego *łuku* dana jest wzorem
$$M = \int\limits_{\widehat{AB}} \rho \, dl. \tag{1.8}$$

3. *Momenty statyczne* M_x (względem osi Ox), M_y (względem osi Oy)
$$M_x = \int\limits_{\widehat{AB}} y\rho \, dl, \qquad M_y = \int\limits_{\widehat{AB}} x\rho \, dl. \tag{1.9}$$

4. *Środek mas*
$$x_0 = \frac{M_y}{M}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{M}. \tag{1.10}$$

5. *Momenty bezwładności* B_x, B_y odpowiednio względem osi Ox, Oy
$$B_x = \int\limits_{\widehat{AB}} y^2\rho \, dl, \qquad B_y = \int\limits_{\widehat{AB}} x^2\rho \, dl. \tag{1.11}$$

6. Jeżeli $\delta(x, y)$ jest gęstością ładunku elektrycznego łuku $\widehat{AB}$, to *całkowity ładunek elektryczny* wyraża się wzorem
$$\int\limits_{\widehat{AB}} \delta(x, y) \, dl. \tag{1.12}$$

Przykład 1.2. Na płaszczyźnie dany jest okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ a na nim punkt $A(-r, 0)$. Obliczyć masę tego okręgu zakładając, że jego gęstość $\delta(x, y)$ jest równa kwadratowi odległości punktu P od punktu A.

Rozwiązanie. Odległość punktu P od A wynosi $|\overline{AP}| = \sqrt{(x + r)^2 + y^2}$, czyli $|\overline{AP}|^2 = (x + r)^2 + y^2$. Korzystając z parametrycznego zapisu okręgu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ otrzymujemy $|\overline{AP}|^2 = 2r^2(1 + \cos t)$, $dl = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \, dt = r \, dt$. Masa okręgu
$$M = \int\limits_0^{2\pi} 2r^3(1 + \cos t) \, dt = 4\pi r^3.$$

□

Przykład 1.3. Obliczyć długość łuku linii zadanej w postaci parametrycznej

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = 4t, \quad \text{od } t = 0 \text{ do } t = 4.$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}\, dt = \\ &= \int_0^4 \sqrt{9+16}\, dt = 5\int_0^4 dt = 5\cdot 4 = 20. \end{aligned}$$

□

Przykład 1.4. Obliczyć poniższą całkę krzywoliniową po krzywej określonej na płaszczyźnie Oxy równaniem jawnym $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 1$

$$\int_l \frac{6y}{x}\, dl.$$

Rozwiązanie. Korzystając z zależności $dl = \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{6x^2}{2x}\sqrt{1+x^2}\, dx &= 3\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \\ &= 3\cdot \left[\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]\Bigg|_0^1 = 2\sqrt{2}-1, \end{aligned}$$

bowiem całka nieoznaczona

$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \begin{vmatrix} 1+x^2 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}.$$

□

1.3 Pytania do Wykładu

1. Jak się wyraża całka krzywoliniowa nieskierowana z zależności od rodzaju krzywej?
2. Co wyraża termin nieskierowana?
3. Jakie są zastosowania całki nieskierowanej w fizyce?

1.4 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 1.1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane.

1. $\int\limits_l 3ye^x\, dl, \qquad l : y = e^x,\ x \in \langle 0, \ln 3\rangle,$ Odp. $10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}$.

2. $\int\limits_l |x + y|\, dl, \qquad l : y = x,\ x \in \langle -1, 1\rangle,$ Odp. $2\sqrt{2}$.

3. $\int\limits_l \exp\sqrt{x^2 + y^2}\, dl, \qquad l : y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle,$ Odp. $1/2e\pi$.

4. $\int\limits_l |y|\, dl, \qquad l : x = \cos t, y = \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$ Odp. 4.

5. $\int\limits_l z\, dl, \qquad l : x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$ Odp. $40\pi^2$.

Ćwiczenie 1.2. Obliczyć masę okręgu $x^2+y^2 = r^2$ zakładając, że gęstość $f(P)$ jest równa odległości punktu $P(x, y)$ leżącego na okręgu od osi Oy.

Odp. $4r^2$.

Ćwiczenie 1.3. Na łuku cykloidy o równaniu

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \quad a > 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

jest rozłożony ładunek elektryczny o gęstości $f(P) = \sqrt{y}$. Obliczyć całkowity ładunek elektryczny na tym łuku.

Odp. $\pi(2a)^{3/2}$.

Wykład 2

Całka krzywoliniowa skierowana

Całki krzywoliniowe skierowane zdefiniowane są na skierowanym odcinku $\overset{\frown}{AB}$ łuku. Funkcją podcałkową jest zmienny wektor $\vec{W}(M)$ styczny w każdym punkcie do odcinka łuku $\overset{\frown}{AB}$. Całkę oblicza się poprzez zamianę na całkę oznaczoną. Całka krzywoliniowa skierowana nie zależy od odcinka łuku łączącego punkty A i B, jeżeli pole wektorowe $\vec{W}(M)$ w obszarze w którym leży odcinek łuku jest potencjalne tzn. $\operatorname{rot} W(M) = 0$. Całka krzywoliniowa skierowana wyznacza pracę siły $\vec{W}(M)$ wzdłuż odcinka łuku $\overset{\frown}{AB}$.

2.1 Całka krzywoliniowa skierowana

Rozpatrzmy łuk l gładki o równaniu parametrycznym

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{2.1}$$

Wartości $t = \alpha$ odpowiada punkt A na łuku, zaś wartości $t = \beta$ odpowiada punkt B na łuku l. Łukowi temu można nadać kierunek przyjmując A jako początek łuku i B jako koniec łuku. Wówczas kierunek łuku jest zgodny z kierunkiem wzrostu parametru t. Łuk któremu jest dany kierunek nazywamy *łukiem skierowanym* $\overset{\frown}{AB}$. Przyporządkujmy każdemu punktowi M łuku $\overset{\frown}{AB}$ jednoznacznie wektor

$$\overrightarrow{W}(M) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)], \tag{2.2}$$

gdzie funkcje P, Q, R są klasy C^1.

Całkę krzywoliniową z wektora $\overrightarrow{W}$ wzdłuż łuku $\overset{\frown}{AB}$ oznaczamy symbolem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{W}(M)\, dl = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, x)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz. \tag{2.3}$$

Jeżeli zmienimy kierunek drogi całkowania na przeciwny, to wartość całki zmienia znak na przeciwny

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{W}(M)\, dl = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \overrightarrow{W}(M)\, dl. \tag{2.4}$$

Całkę krzywoliniową skierowaną po krzywej $\overset{\frown}{AB}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t, można obliczyć sprowadzając do całki oznaczonej, przy czym funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ opisujące łuk $\overset{\frown}{AB}$ są różniczkowalne (krzywa gładka), funkcje $P[x, y, z]$, $Q[x, y, z]$, $R[x, y, z]$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym Ω. Postać całki zależy od postaci krzywej $\overset{\frown}{AB}$.

1. Krzywa $\overset{\frown}{AB}$ na płaszczyźnie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $dx = \dot{x}(t)\, dt$, $dy = \dot{y}(t)\, dt$.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)\big]\, dt \tag{2.5}$$

2. Krzywa $\overset{\frown}{AB}$ w przestrzeni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $dx = \dot{x}(t)\, dt$,

$dy = \dot{y}(t)\, dt$, $dz = \dot{z}(t)\, dt$.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\big]\, dt. \tag{2.6}$$

Całka krzywoliniowa skierowana nie zależy od drogi całkowania, jeżeli spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

1° Wyrażenie $P\, dx + Q\, dy + R\, dz = du$, czyli jest różniczką zupełną funkcji różniczkowalnej $u(x,y,z)$ w obszarze Ω, tzn. istnieje taka funkcja $u = u(x,y,z)$, że

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{2.7}$$

2° Pole wektorowe $\vec{W} = [P,Q,R]$ jest potencjalne w obszarze Ω, czyli $\vec{W} = \operatorname{grad} u$. Warunkiem koniecznym potencjalności pola wektorowego jest $\operatorname{rot} \vec{W} = 0$ w Ω, czyli pole jest bezwirowe.

Jeżeli całka krzywoliniowa po łuku $\overset{\frown}{AB}$ nie zależy od drogi całkowania wówczas całka równa się różnicy $u(B) - u(A)$ potencjałów na końcach krzywej $\overset{\frown}{AB}$. Potencjał tem można wyznaczyć korzystając z tego, że całka po krzywej l

$$\int\limits_{l} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \tag{2.8}$$

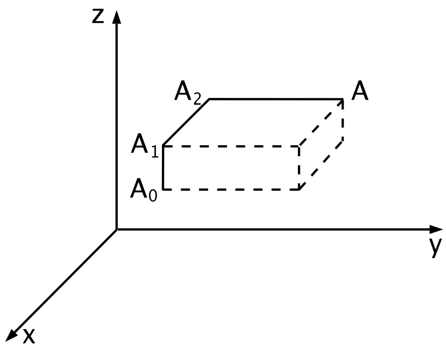
nie zależy od drogi całkowania. Rozpatrzmy dwa punkty $A_0(x_0,y_0,z_0)$ i $A(x,y,z)$ oraz połączmy je odcinkiem łamanej począwszy od punktu A_0: $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A}$, gdzie $A_0(x_0,y_0,z_0)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A(x,y,z)$. Całkując wzdłuż tej łamanej otrzymujemy wzór na potencjał skalarny $u(x,y,z)$

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\, dz + C, \tag{2.9}$$

gdzie C jest stałą.

Przykład 2.1. Sprawdzić, czy pole wektorowe $\overrightarrow{W} = [P,Q,R]$ klasy C^2 spełnia warunek wystarczający istnienia potencjału i wyznaczyć ten potencjał, jeżeli

$$\overrightarrow{W} = [2x + y + 3, 4y + x + 2, 6z - 6].$$



Rysunek 2.1: Krzywa łamana w $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \overrightarrow{W} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y+3 & 4y+x+2 & 6z-6 \end{vmatrix} = \\
&= \bar{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(6z-6) - \frac{\partial}{\partial z}(4y+x+2)\right] + \\
&+ \bar{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2x+y+3) - \frac{\partial}{\partial x}(6z-6)\right] + \\
&+ \bar{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(4y+x+2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+y+3)\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Pole jest więc bezwirowe. Potencjał liczymy ze wzoru

$$
\begin{aligned}
& u(x,y,z) = \\
& = \int\limits_{x_0}^{x} (2x+y+3)\;dx + \int\limits_{y_0}^{y} (4y+x_0+2)\;dy + \int\limits_{z_0}^{z} (6z-6)\;dz + C = \\
& = x^2 + xy + 3x + 2y^2 + 2y + 3z^2 - 6z + C,
\end{aligned}
$$

gdzie C jest stałą.

2.2 Zastosowania całki krzywoliniowej skierowanej

1. Jeżeli wektor $\vec{W} = [P, Q, R]$ jest wektorem siły działającej wzdłuż krzywej $\overset{\frown}{AB}$, to całka
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{2.10}$$
wyznacza *pracę siły* $\vec{W}$ wzdłuż krzywej $\overset{\frown}{AB}$.

2. Jeżeli całka krzywoliniowa jest określona na krzywej zamkniętej K w obszarze Ω, dodatnio skierowanej , wówczas
$$\oint\limits_{K} P\,dx + Q\,dy \tag{2.11}$$
wyznacza *cyrkulację wektora* $\vec{W}$ wzdłuż krzywej.

Jeżeli pole wektorowe jest potencjalne, tzn. $\vec{W} = \operatorname{grad} u$, to całka po krzywej zamkniętej równa się zeru. Krzywą zamkniętą w obszarze płaskim Oxy nazywamy zorientowaną dodatnio względem jej wnętrza, jeżeli idący wzdłuż tej krzywej w przyjętym kierunku ma obszar Ω po lewej ręce.

Przykład 2.2. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną po krzywej $\overset{\frown}{AB}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

(a) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dx + y\,dy + z\,dz, \quad \overset{\frown}{AB} : x = 2t,\ y = t^2,\ z = 1 - t,\ t \in \langle 0, 1\rangle.$

(b) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz, \quad \overset{\frown}{AB} : x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle.$

Rozwiązanie. (a) Mamy $dx = 2\,dt,\ dy = 2t\,dt,\ dz = -\,dt$. Zatem
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dx + y\,dy + z\,dz = \int\limits_0^1 [(2t)\cdot 2 + t^2 2t + (1-t)(-1)]\,dt =$$
$$= \int\limits_0^1 (5t + 2t^3 - 1)\,dt = \left[\frac{5t^2}{2} + \frac{2t^4}{4} - t\right]\Bigg|_0^1 = 2.$$

(b) Mamy $dx = -\sin t\,dt,\ dy = \cos t\,dt,\ dz = dt$. Zatem
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = \int\limits_0^{\pi} \left[t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] dt = 0.$$

Wskazówka Skorzystać ze wzorów $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \cdot \sin 2t$, $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$.

□

Przykład 2.3. Obliczyć pracę siły $\vec{W} = [x + y, 2x]$ wzdłuż okręgu $x^2 + y^2 = R^2$.

Rozwiązanie. Mamy $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Stąd

$$\int\limits_l (x + y)\ dx + 2x\ dy = \int\limits_0^{2\pi} [(R \cos t + R \sin t)(-R \sin t) + 2R \cos t R \cos t]\ dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} (2 \cos^2 t - \sin^2 t - \sin t \cos t)\ dt = \pi R^2.$$

□

Przykład 2.4. Obliczyć cyrkulację w polu wektorowym $\vec{W} = [y, -x]$ po okręgu $x^2 + y^2 = R^2$.

Rozwiązanie. Mamy $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Stąd

$$\oint\limits_K y\ dx - x\ dy = R^2 \int\limits_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t]\ dt = -2R^2\pi.$$

□

2.3 Pytania do Wykładu

1. Jak można obliczyć całkę skierowaną?
2. Co oznacza termin skierowana?
3. Kiedy całka skierowana nie zależy od drogi całkowania?
4. Jakie są zastosowania całki skierowanej w fizyce?

2.4 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 2.1. Obliczyć całkę po krzywej $\overset{\frown}{AB}$ skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru t.

(a) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (2a-y)\,dx - (a-y)\,dy, \quad \overset{\frown}{AB}$: łuk cykloidy $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Odp. πa^2.

(b) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz, \quad \overset{\frown}{AB}$: odcinek od punktu $A(1,1,1)$ do $B(2,3,4)$.

Wskazówka Równanie prostej w przestrzeni w postaci kierunkowej przechodzącej przez punkty $A(x_0,y_0,z_0),\ B(x_1,y_1,z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} = t$.

Odp. 13.

Ćwiczenie 2.2. Obliczyć pracę siły $\vec{W}$ wzdłuż łuku $\overset{\frown}{AB}$.

(a) $\vec{W} = [-x^2, -y^2, \cos z]$, $\overset{\frown}{AB}$: linia śrubowa $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 2t$, $t \in \langle 0, \frac{3}{2}\pi\rangle$.

Odp. $\frac{2}{3}a^3$.

(b) $\vec{W} = \left[\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}\right]$, $\overset{\frown}{AB}$: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Odp. $\frac{17}{10}$.

(c) $\vec{W} = [y, -x]$, $\overset{\frown}{AB}$: łuk elipsy $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Odp. $-\pi$.

Ćwiczenie 2.3. Obliczyć cyrkulację w polu wektorowym $\vec{W}$ po zamkniętej krzywej K dodatnio skierowanej.

(a) $\vec{W} = [y, -x]$, K : elipsa $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Odp. $-2\pi ab$.

(b) $\vec{W} = [z, x, y]$, K : okrąg $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Odp. π.

Wykład 3

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Właściwości funkcji zespolonej wynikają z definicji i właściwości liczb zespolonych. Liczby zespolone zdefiniowane są jako para liczb rzeczywistych $z = (x, y)$, gdzie x jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej zaś y jest częścią urojoną liczby zespolonej. Liczby zespolone zapisywane są w postaci: algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej. W każdym z tych zapisów występuje liczba $j = \sqrt{-1}$ (oznaczana także $i = \sqrt{-1}$, w zależności o przyjętej konwencji). W wykładzie podane są działania na liczbach zespolonych i ich interpretacja geometryczna. Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej ma postać $f(t) = x(t) + jy(t)$. Funkcja ta pozwala na proste zapisanie różnych krzywych w płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykorzystując ich parametryczny zapis w płaszczyźnie OXY.

3.1 Definicje i działania podstawowe

Liczby zespolone są rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych poprzez wprowadzenie pierwiastka kwadratowego z liczby -1. Pozwala to na wyznaczenie miejsc zerowych równania $x^2+1=0$, które to równanie nie posiada rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych. Liczby będące rozwiązaniem tego równania oznaczono przez

$$\pm j = \sqrt{-1}.$$

Liczbę j nazwano *liczbą urojoną* lub też *jednostką urojoną* (w niektórych podręcznikach używa się zapisu $i = \sqrt{-1}$). Dzięki wprowadzeniu liczby urojonej można wyznaczyć pierwiastki równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ w przypadku gdy $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Zbiór liczb zespolonych można zdefiniować jako parę uporządkowaną liczb rzeczywistych w postaci $z = (x, y)$. Stąd

$$j = (0,1), \qquad 1 = (1,0)$$

Korzystając z tej definicji wprowadzono działania na liczbach zespolonych. Wygodnie jest stosować różne postacie liczby zespolonej: algebraiczną $x+jy$, trygonometryczną i wykładniczą, ułatwiające wykonywanie takich działań jak mnożenie i dzielenie liczb zespolonych.

Algebraiczna postać liczby zespolonej

$$z = x + jy \tag{3.1}$$

gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi natomiast j jest jednostką urojoną spełniającą warunek

$$j^2 = -1 \tag{3.2}$$

Liczbę x nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z oraz oznaczamy $\mathrm{Re}(z) = x$. Liczbę y nazywamy *częścią urojoną* oraz oznaczamy $\mathrm{Im}(z) = y$. Liczby zespolone czasami zapisujemy jako pary (x, y).

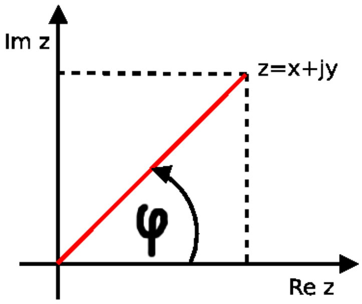
Dwie liczby zespolone $z_1 = x_1 + jy_1, z_2 = x_2 + jy_2$ są równe jeśli posiadają takie same części rzeczywiste i urojone tzn.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2) \tag{3.3}$$

Liczba rzeczywista jest liczbą zespoloną postaci $x + j \cdot 0$. Jest to zatem liczba zespolona, która posiada zerową część urojoną. Liczby zespolone przedstawiamy graficznie jako punkty na płaszczyźnie. Liczbę zespoloną postaci bj nazywamy *liczbą urojoną*. Liczby urojone są to zatem takie liczby zespolone które posiadają zerową część rzeczywistą. Liczby rzeczywiste są położone na osi rzeczywistej $\mathrm{Re}\, z$ natomiast liczby urojone na osi urojonej $\mathrm{Im}\, z$. Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy jak na wielomianach pamiętając, że $j^2 = -1$.

Dla liczby zespolonej $z = x + jy$ liczbę postaci

$$\bar{z} = x - jy \tag{3.4}$$



Rysunek 3.1: Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

nazywamy *sprzężoną* (dokładniej: liczbą sprzężoną) do z. *Modułem* liczby zespolonej wyrażenie $z = x + jy$ nazywamy

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.5}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2. \tag{3.6}$$

Niech $z_1 = x_1 + jy_1, z_2 = x_2 + jy_2$ wówczas mamy następujące operacje dla liczb zespolonych

dodawanie

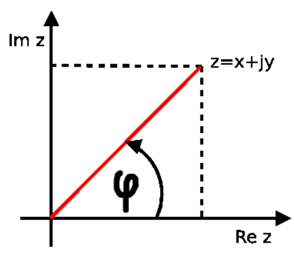
$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2). \tag{3.7}$$

mnożenie

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) &= x_1 \cdot x_2 + j^2 y_1 \cdot y_2 + jy_1 \cdot x_2 + jx_1 \cdot y_2 = \\ &= x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + j(y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

dzielenie

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \\ &= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + j(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$



Rysunek 3.2: Interpretacja liczby zespolonej

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Rozpatrzmy liczbę zespoloną $z = x + jy$ Kąt φ nazywamy *argumentem* liczby zespolonej, który wyliczamy ze wzorów

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \tag{3.10}$$

Liczbę zespoloną $z = x + yj$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej w następujący sposób

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}j\right) = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) \tag{3.11}$$

Argument liczby zespolonej nie jest określony jednoznacznie, $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ również jest argumentem, argument dla $k = 0$ i $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ nazywamy *argumentem głównym.* Liczba zespolona $0 = 0 + 0j$ nie posiada postaci trygonometrycznej, ponieważ nie ma zdefiniowanego argumentu. Postać trygonometryczna liczb zespolonych jest szczególnie korzystna przy mnożeniu, dzieleniu i potęgowaniu liczb zespolonych. Dla liczb zespolonych z_1, z_2 w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \tag{3.12}$$

zachodzą następujące wzory

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{3.13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{3.14}$$

Przy mnożeniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły natomiast argumenty dodajemy. Przy dzieleniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej dzielimy moduły natomiast argumenty odejmujemy.

Postać wykładnicza

Wyrażenie $e^{j\varphi}$ zdefiniowane jest wzorem

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi, \tag{3.15}$$

który nazywamy *wzorem Eulera*. Zauważmy, że $e^{j\pi} = -1$.

Jeśli $z = |z|(cos\varphi + j\sin\varphi)$ to

$$z = |z|e^{j\varphi} \tag{3.16}$$

nazywamy *postacią wykładniczą* liczby zespolonej. Używając postaci wykładniczej szczególnie łatwo mnożymy, dzielimy i potęgujemy liczby zespolone. Mamy następujące wzory

$$e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{3.17}$$

Ze wzoru Eulera wynikają następujące zależności

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \tag{3.18}$$

Potęgowanie, pierwiastkowanie

Dla danej liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ potęga stopnia n takiej liczby wyraża się wzorem de Moivre'a

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)) \tag{3.19}$$

Przy potęgowaniu liczby zespolonej potęgujemy moduł (jest to zwykła potęga liczby rzeczywistej) natomiast argument mnożymy przez wykładnik potęgi tzn. n.

Przykład 3.1. Niech $z = 1 + j = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + j\sin\pi/4)$. Obliczyć z^8

Rozwiązanie.

$$z^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\pi/4 + j\sin\pi/4)^8 = 2^4(\cos 2\pi + j\sin 2\pi) = 2^4(1) = 16.$$

□

W przypadku liczby danej w postaci wykładniczej $z = |z|e^{j\varphi}$ mamy następujący wzór na n-tą potęgę

$$z^n = |z|^n e^{jn\varphi}. \tag{3.20}$$

Jeśli liczba zespolona jest dana w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, to pierwiastki stopnia n z takiej liczby (jest ich dokładnie n jeśli $z \neq 0$) otrzymujemy korzystając ze wzoru

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, \ldots, (n-1) \tag{3.21}$$

co bardziej szczegółowo można zapisać

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}\right)\\
z_1 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\\
z_2 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)\\
&\vdots\\
z_{n-1} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Przykład 3.2. Niech $z = 8j$. Obliczyć pierwiastki zespolone stopnia 3 tej liczby.

Rozwiązanie. Przedstawiamy liczbę $8j$ w postaci trygonometrycznej. Mamy $8j = 8(\cos\pi/2 + j\sin\pi/2)$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi/2}{3} + j(\sin\frac{\pi/2}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
z_1 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{3} + j\sin\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
z_2 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi/2+4\pi}{3} + j\sin\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + j\sin\frac{9\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

□

Uwaga 3.3. Liczba zespolona $z = 0$ posiada pierwiastek stopnia n równy 0.

3.2 Ciągi i szeregi liczbowe zespolone

Ciągi liczbowe zespolone

Tak jak w przypadku ciągów liczbowych rzeczywistych definiujemy ciąg zespolony jako funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, zaś przeciwdziedziną pewien zbiór liczb zespolonych

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

który oznaczać będziemy $\{z_n\}$.

Można liczby tworzące ciąg zespolony zapisać w postaci algebraicznej

$$\{x_n + jy_n\}$$

Granicę $g = a + jb$ ciągu zespolonego definiujemy analogicznie jak w przypadku ciągu rzeczywistego $\lim_{z\to\infty} z_n = g$.

Ciąg zespolony o wyrazie ogólnym $z = x + jy$ ma granicę $g = a + jb$ wtedy i tylko wtedy, gdy część rzeczywista $x_n \to a$ i część urojona $y_n \to b$.

Ciąg mający granicą właściwą nazywamy zbieżnym.

Zachowują się twierdzenia o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu ciągów znane z ciągów liczbowych rzeczywistych.

Natomiast nie ma sensu pojęcie ciągu monotonicznego, gdyż liczb zespolonych nie można porównywać co do wielkości.

Szeregi liczbowe zespolone

Niech będzie dany ciąg liczbowy o wyrazach zespolonych

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Z wyrazów tego ciągu tworzymy nowy ciąg zwany ciągiem sum częściowych o wyrazach

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_n, \tag{3.23}$$

czyli $\{S_n\}$, ciąg ten nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazach zespolonych i oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{3.24}$$

Jeżeli ciąg ten ma granicę właściwą S to mówimy, że szereg jest zbieżny i ma sumę równą S. Szereg $\sum_{z=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + jy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + j\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Szereg jest *bezwzględnie zbieżny* jeśli jest zbieżny szereg utworzony z modułów wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Można wykazać, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Ponadto szereg bezwzględnie zbieżny jest szeregiem o wyrazach rzeczywistych i nieujemnych i do badania jego zbieżności można użyć kryteriów stosowanych do badania zbieżności szeregów o wyrazach rzeczywistych.

Przykładem szeregu liczbowego o wyrazach zespolonych jest szereg geometryczny o ilorazie $q = z$ postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{3.25}$$

który jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < 1$, (wynika to z kryterium Cauchy'ego) tym samym jest zbieżny i posiada sumę. Mamy więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{dla } |z| < 1. \tag{3.26}$$

3.3 Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Funkcję, której dziedziną jest pewien przedział T liczb rzeczywistych a przeciwdziedziną pewien zbiór liczb zespolonych, nazywamy funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej i zapisujemy w postaci

$$z = z(t) \quad \text{dla } t \subseteq T \quad \text{lub} \quad z(t) = x(t) + jy(t). \tag{3.27}$$

Jeżeli równania $x = x(t)$ i $y = y(t)$ dla $t \in T$ są równaniami pewnej linii na płaszczyźnie, to $z = z(t)$ dla $t \in T$ jest równaniem tej linii zapisanej w postaci zespolonej.

Wszystkie twierdzenia o granicy i ciągłości funkcji rzeczywistych zachowują swoją moc w dziedzinie zespolonej.

Pochodną funkcji $z(t)$ w punkcie t_0 określamy jako granicę właściwą ilorazu różnicowego

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} + j \frac{\Delta y}{\Delta t} \right]. \tag{3.28}$$

Istnienie pochodnej $z'(t)$ jest równoważne istnieniu pochodnych $x'(t)$ i $y'(t)$, przy czym $z'(t_0) = x'(t_0) + jy'(t_0)$.

Jeżeli funkcja $z = z(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ przedstawia parametrycznie łuk zwykły i gładki to wektor $\vec{s} = [x'(t_0), y'(t_0)]$ jest wektorem stycznym do łuku w punkcie $z(t_0)$, zaś moduł $|z'(t_0)|$ jest długością wektora $\vec{s}$.

Krzywe i obszary w płaszczyźnie zmiennej zespolonej

Krzywą na płaszczyźnie $x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta)$ możemy zapisać za pomocą funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej danej wzorem

$$z(t) = x(t) + jy(t). \tag{3.29}$$

Przykład 3.4. Jaką krzywą przedstawia funkcja $z(t) = t + 1 + j3t$?

Rozwiązanie. Mamy

$$x(t) = t + 1, \qquad y(t) = 3t.$$

Stąd $x - 1 = t$ wstawiając to do równania drugiego otrzymujemy

$$y = 3(x - 1) = 3x - 3.$$

Zatem jest to równanie prostej $y = 3x - 3$. □

Przykład 3.5. Jaką krzywą przedstawia funkcja $z(t) = e^t + je^{2t}$?

Rozwiązanie. Mamy

$$x = e^t, \qquad y = e^{2t}.$$

Stąd $x^2 = (e^t)^2 = e^{2t}$, więc

$$y = x^2.$$

Zatem jest to równanie paraboli $y = x^2$. □

Przy pomocy liczb zespolonych można opisać proste obszary na płaszczyźnie:

- $|z - z_0| \leq R$ – jest zbiorem punktów należących do koła domkniętego o środku z_0 i promieniu R.
- $|z - z_0| < R$ – jest zbiorem punktów należących do koła otwartego o środku z_0 i promieniu R.
- $|z - z_0| > R$ – zewnętrze okręgu o środku w z_0 i promieniu R.
- $r < |z| < R$ – pierścień o środku w $z = 0$ i ograniczony okręgami o promieniach r i R.
- $0 < z < \frac{\pi}{4}$ – wnętrze kąta między prostą $y = 0$ i prostą $y = x$.

3.4 Pytania do Wykładu

1. Jakie są postacie liczby zespolonej?
2. Jaka jest interpretacja geometryczna działań na liczbach zespolonych?
3. W jakim działaniu wykorzystuje się moduł liczby zespolonej?
4. Jaka jest interpretacja geometryczna pierwiastków liczby zespolonej?
5. Jak można krzywą na płaszczyźnie i obszar płaski zapisać za pomocą funkcji zespolonej?

3.5 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 3.1. Obliczyć

a) $\frac{j}{(1+j)^2}$ Odp. $\frac{1}{2}$

b) $(1-j)^8$ Odp. 16

c) $(-\sqrt{3}+j)^6$ Odp. 64

d) $\frac{(1+j\sqrt{3})^{15}}{(1+j)^{10}}$ Odp. $2^{10}j$

Ćwiczenie 3.2. Rozwiązać równanie

a) $z^4-16=0$ Odp. $\pm 2, \pm 2j$

b) $z^3+8=0$ Odp. $1 \pm j\sqrt{3}, -2$

c) $(z-4)^2=2j$ Odp. $(5+j), (3-j)$

Ćwiczenie 3.3. Wyznaczyć

a) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}$ Odp. $\frac{x}{x^2+y^2}$

b) $\operatorname{Re}\frac{z}{z-j}$ Odp. $\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

c) $\operatorname{Im}\frac{1}{z^2}$ Odp. $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

d) $\operatorname{Im}\frac{\overline{z}}{z}$ Odp. $\frac{-2xy}{x^2+y^2}$

Ćwiczenie 3.4. Jaką linię przedstawia równanie

a) $z=t+(1-t)j \quad t \in (-\infty, \infty)$ Odp. prosta $x+y=1$.

b) $z=2\cos t - j\sin t \quad t \in [0, 2\pi]$ Odp. elipsa $x^2/4+y^2=1$.

c) $z=-t+j2t^2 \quad t \in [0, \infty)$ Odp. część paraboli $y=2x^2,\ x \leq 0$.

Ćwiczenie 3.5. Jaką linię na płaszczyźnie przedstawia funkcja

(a) $z=2+t+j(1+t)$, $t \in \langle 1, 2, \rangle$.

Odp. Prosta $y=x-1$ od $A(3,2)$ do $B(4,3)$.

(b) $z=t^2+j(t^2+3)$, $t \in \langle 0, \infty)$.

Odp. Półprosta $y=x+3$ od $A(0,3)$ w pierwszej ćwiartce.

(c) $z=t+j\sqrt{1-t^2}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Odp. Ćwiartka łuku okręgu $x^2 + y^2 = 1$ między punktami $A(0, 1), B(1, 0)$.

Ćwiczenie 3.6. Jakie obszary wyznaczają nierówności

(a) $|z - 0| < 1$.

Odp. Wnętrze okręgu o środku w $z = 0$ i $R = 1$.

(b) $|z - 1 - j| = 2$.

Odp. Okrąg o środku w $z = 1 + j$ i $R = 2$.

(c) $2 < |z| < 3$, $\pi/4 < z < \pi/2$.

Odp. Wycinek pierścienia o promieniach $r = 2$, $R = 3$ ograniczony prostymi $y = x$ i $x = 0$.

Wykład 4

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

W wykładzie znajdują się definicje związane z funkcją zmiennej zespolonej $f(z)$ analogiczne do definicji wprowadzonych dla funkcji zmiennej rzeczywistej $f(x)$. Są to: pochodna funkcji $f(z)$ i związane z tym pojęcie holomorficzności, całka $f(z)$. Ciągi i szeregi funkcyjne, w szczególności szereg Taylora i Laurenta.

4.1 Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

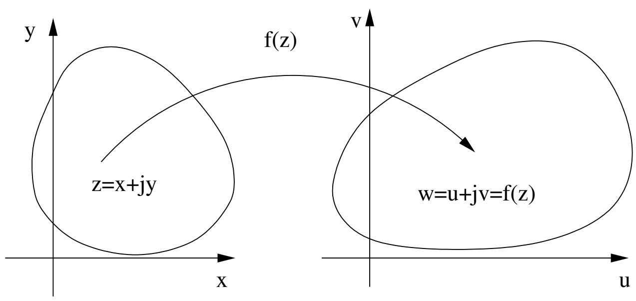
Niech będzie dany niepusty zbiór D liczb zespolonych. Jeżeli każdemu elementowi tego zbioru jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba zespolona w, to mówimy, że w zbiorze D została określona funkcja zmiennej zespolonej.

Zbiór D nazywamy dziedziną funkcji, zaś zbiór D' złożony z elementów, będących wartościami funkcji nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Funkcję zapisujemy w postaci

$$w = f(z). \tag{4.1}$$

Jeżeli $z = x + jy$ to funkcja przyjmuje postać $w = u(x, y) + jv(x, y)$, gdzie $u = \operatorname{Re} w$, zaś $v = \operatorname{Im} w$.

Funkcja $w = f(z)$ odwzorowuje obszar D w obszar D'. Można to graficznie przedstawić na dwóch płaszczyznach zmiennej zespolonej.



Rysunek 4.1: Interpretacja odwzorowania zespolonego

Odwzorowanie jest jednoznaczne, natomiast może nie być wzajemnie jednoznaczne.

Podamy teraz kilka ważnych definicji.

Definicja 4.1. Mówimy, że funkcja $w = f(z)$ ma w z_0 granicę równą g, jeżeli dla dowolnego dodatniego ε można dobrać taką dodatnią liczbę $\eta(\varepsilon)$, że gdy punkt z znajduje się w sąsiedztwie punktu z_0 o promieniu $\eta(\varepsilon)$, to jego obraz na drugiej płaszczyźnie znajduje się w otoczeniu g o promieniu ε. Zapisujemy to krótko

$$|f(z) - g| < \varepsilon \quad \text{gdy } 0 < |z - z_0| < \eta(\varepsilon). \tag{4.2}$$

Podana wyżej definicja granicy pociąga za sobą istnienie granic podwójnych obu części funkcji $f(z)$ tzn. części rzeczywistej oraz części urojonej i odwrotnie. Wobec tego gdy granica funkcji w punkcie z_0 istnieje, to zachodzi następująca równość:

$$\lim_{z \to z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + j \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y). \tag{4.3}$$

Definicja 4.2. Funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie z_0, jeżeli

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Definicja 4.3. Pochodną funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego tej funkcji w punkcie z_0. Oznaczmy przez $\Delta z = z - z_0$ i $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, wówczas

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta z} + j \frac{\Delta v}{\Delta z} \right]. \tag{4.4}$$

Z definicji pochodnej wynika, że dążenie z do z_0 jest dowolne.

Jeżeli istnieje pochodna $f'(z_0)$, to pochodna w punkcie z_0 nie zależy do sposobu dążenia z do z_0.

Jeżeli przyjmiemy, że $\Delta z = \Delta x$, czyli ustalamy drogę poziomą równoległą do osi $\operatorname{Re} z$, to otrzymujemy

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.5}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\Delta z = j\Delta y$, czyli ustalamy drogę pionową równoległą do osi $\operatorname{Im} z$, to otrzymujemy

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{j\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - j \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.6}$$

Lewe strony równań istnieją z założenia i są sobie równe, stąd otrzymujemy warunek istnienia pochodnej funkcji $f(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.7}$$

Twierdzenie 4.4. *Warunkiem koniecznym istnienia pochodnej funkcji zespolonej $w = f(z) = u + jv$ jest by część rzeczywista $u(x, y)$ i część urojona $v(x, y)$ tej funkcji spełniała warunki (4.7). Warunki te noszą nazwę warunków Cauchy'ego-Riemanna w skrócie C-R. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła to warunki C-R są warunkami wystarczającymi istnienia pochodnej $f'(z)$.*

Definicja 4.5. Funkcję mającą pochodną w otoczeniu punktu nazywamy funkcją *holomorficzną* w tym punkcie, jeżeli natomiast jest holomorficzna w każdym punkcie pewnego obszaru, to nazywamy ją funkcją holomorficzną w tym obszarze.

Wzory na różniczkowanie poznane w rachunku różniczkowym zmiennej rzeczywistej są słuszne także w dziedzinie zespolonej.

Definicja 4.6. Funkcjami *harmonicznymi* ze sobą sprzężonymi nazywamy takie dwie funkcje dwóch zmiennych $u(x, y)$ i $v(x, y)$ klasy C^2, które spełniają warunki C-R.

Można wykazać, że wówczas funkcje te spełniają równania

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 v(x, y) = 0. \tag{4.8}$$

Powyższe równania są nazywane równaniami Laplace'a; patrz: Dodatek B.

4.2 Całka funkcji zmiennej zespolonej

Całkę z funkcji zmiennej zespolonej $f(z)$ na łuku skierowanym $\overset{\frown}{AB}$ oznaczamy symbolem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_C f(z)\,dz, \tag{4.9}$$

gdzie C jest krzywą łuku $\overset{\frown}{AB}$.

Jeżeli funkcja $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ jest ciągła na krzywej regularnej C to można ją przedstawić w postaci sumy dwóch całek rzeczywistych krzywoliniowych, skierowanych

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + j\int\limits_C v\,dx + u\,dy. \tag{4.10}$$

Całka z funkcji holomorficznej $f(z)$ w obszarze jednospójnym nie zależy od drogi całkowania, zależy tylko o początku łuku w punkcie A i końca łuku w punkcie B. Stąd wniosek, że całka z funkcji holomorficznej w obszarze jednospójnym wzdłuż krzywej zamkniętej jest równa zeru.

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 0. \tag{4.11}$$

Jeżeli krzywa C jest opisana wzorem $z = z(t)$ dla $a \le t \le b$, to przy obliczaniu całki korzystamy ze wzoru

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{4.12}$$

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D z wyjątkiem skończonej liczby punktów z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, to całka z funkcji $f(z)$ wzdłuż krzywej dodatnio skierowanej C zamkniętej wewnątrz której znajdują się punkty nieholomorficzności z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ wyraża się wzorem

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k} f(z)\,dz, \tag{4.13}$$

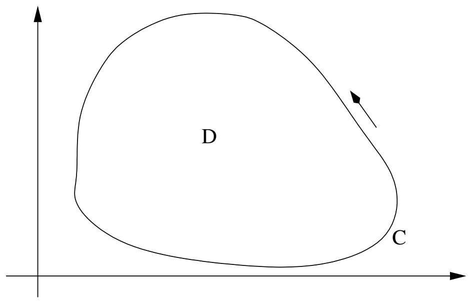
gdzie krzywe zamknięte C_k zawierają odpowiednio w swym wnętrzu punkty z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ nieholomorficzności funkcji $f(z)$.

Przypomnijmy, że całki z funkcji zmiennej zespolonej są całkami krzywoliniowymi skierowanymi i ich wartość zależy od kierunku całkowania.

Mamy więc zależność: zmiana kierunku całkowania zmienia znak całki na przeciwny, czyli

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)\, dz. \tag{4.14}$$

Ponadto przypomnijmy, że krzywa C zamknięta jest dodatnio skierowana względem wnętrza, gdy biorąc kierunek przebiegu krzywej obejmującej obszar D, punkty tego obszaru znajdują się po „lewej stronie" (patrz rysunek).



Rysunek 4.2: Krzywa zamknięta, zorientowana dodatnio

W praktyce wykorzystuje się wzór całkowy Cauchy'ego.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D ograniczonym krzywą regularną zamkniętą C dodatnio skierowaną względem wnętrza, to dla każdego punktu z_0 leżącego wewnątrz obszaru D prawdziwy jest wzór

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{4.15}$$

Można wykazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest w obszarze jednospójnym D funkcją holomorficzną, to posiada w tym obszarze wszystkie pochodne. Co więcej pochodne te wyrażone są wzorem

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{4.16}$$

4.3 Szeregi

Szereg Taylora

Funkcję $f(z)$ holomorficzną w sąsiedztwie dowolnego punktu z_0 można rozwinąć w *szereg potęgowy Taylora* postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.17}$$

gdzie $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Gdy $z_0 = 0$ otrzymujemy *szereg Maclaurina* postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{4.18}$$

gdzie $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Przykład 4.7. Szeregi Taylora funkcji elementarnych

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^2}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots
\end{aligned}$$

dla $z = x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy znany z liczb zespolonych wzór Eulera

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x. \tag{4.19}$$

Szereg Laurenta

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu $r < |z - z_0| < R$, $r \geq 0$, $R \leq \infty$, to można ją w tym pierścieniu rozwinąć w *szereg Laurenta* postaci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.20}$$

gdzie $a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ a C jest dowolną krzywą regularną zamkniętą o obiegu dodatnim obejmującą punkt z_0.

Szereg ten można przedstawić w postaci sumy

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{część regularna}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{część osobliwa}}, \tag{4.21}$$

gdzie $a_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_C (z - z_0)^{n-1} f(z)\, dz$.

Pierwszy szereg po prawej stronie nazywa się *częścią regularną*, natomiast drugi – *częścią osobliwą* rozwinięcia funkcji $f(z)$ w sąsiedztwie punktu z_0.

4.4 Pytania do Wykładu

1. Jak się wyznacza część rzeczywistą i urojoną funkcji zmiennej zespolonej?
2. Kiedy funkcja jest holomorficzna?
3. Kiedy część osobliwa szeregu Laurenta jest zerowa?
4. Jaki jest związek między całką z funkcji $f(z)$ a całkami krzywoliniowymi?
5. Jak się oblicza n-tą pochodną funkcji homomorficznej w punkcie?
6. Czym różni się szereg Laureata funkcji $f(z)$ od szeregu Taylora?

4.5 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 4.1. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji

a) $f(z) = \frac{z+1}{|z|}$ Odp. $u = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $f(z) = z \cdot e^{2z}$ Odp. $u = e^{2x}(x \cos 2y - y \sin 2y)$,
$v = e^{2x}(x \sin 2y + y \cos 2y)$.

Ćwiczenie 4.2. Zbadać istnienie pochodnej funkcji (Wskazówka: Sprawdzić warunki Cauchy'ego-Riemanna (C-R)), gdzie $z = x + jy$.

a) $f(z) = (x^3 - 3xy^2 + x) + j(y - y^3 + 3x^2y)$

b) $f(z) = (x + e^x \sin y) + j(y - e^x \cos y)$

Wykład 5

Punkty osobliwe funkcji zespolonej. Residuum funkcji zespolonej

Korzystając z rozwinięcia funkcji na szereg Laurenta została podana definicja i klasyfikacja punktów osobliwych funkcji zmiennej zespolonej i residuum wraz z metodami ich obliczania. Metoda obliczania residuum w biegunach funkcji wykorzystywana jest w przekształceniu Laplace'a.

5.1 Punkty osobliwe odosobnione

Definicja 5.1. Jeżeli funkcja $f(z)$ nie jest holomorficzna w punkcie z_0 jest natomiast holomorficzna w pewnym jego sąsiedztwie, to z_0 nazywamy punktem *osobliwym odosobnionym.*

Zachodzi jeden z następujących przypadków.

1. Część osobliwa rozwinięcia w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0 jest równa zeru wówczas punkt z_0 nazywa się punktem *pozornie osobliwym* funkcji $f(z)$. Istnieje ponadto skończona granica funkcji $f(z)$ gdy $z \to z_0$. Tego rodzaju osobliwość nazywamy *osobliwością usuwalną.*

2. Cześć osobliwa rozwinięcia w szereg Laurenta zawiera skończoną liczbę k-wyrazów, czyli dla $n > k$ współczynniki $a_{-n} = 0$ oraz $a_{-k} \neq 0$. Punkt z_0 w tym przypadku nazywamy *biegunem rzędu k* funkcji $f(z)$, czyli

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k f(z)] \neq 0, \quad \text{i} \quad \lim_{z\to z_0}[z-z_0)^{k+1} f(z)] = 0. \tag{5.1}$$

3. Część osobliwa rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta zawiera nieskończenie wiele wyrazów. Punkt z_0 nazywamy w tym przypadku *punktem istotnie osobliwym.*

5.2 Residuum funkcji

Definicja 5.2. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 **residuum** funkcji w tym punkcie nazywamy następującą całkę

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_C f(z)\, dz, \tag{5.2}$$

gdzie C jest gładką linią zamkniętą dodatnio skierowaną obejmującą punkt z_0.

Korzystając z rozwinięcia w szereg Laurenta funkcji $f(z)$ w sąsiedztwie punktu z_0 można wykazać, że

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \tag{5.3}$$

Aby więc obliczyć residuum funkcji $f(z)$ w punkcie osobliwym odosobnionym, wystarczy wyznaczyć a_{-1} współczynnik rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta w sąsiedztwie tego punktu.

W szczególnym przypadku, gdy punkt z_0 jest biegunem k-krotnym funkcji $f(z)$ to residuum w tym punkcie można wyliczyć ze wzoru

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)], \tag{5.4}$$

dla $k = 1$ otrzymujemy prosty wzór

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]. \tag{5.5}$$

Twierdzenie 5.3 (Całkowe o residuach)**.** *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem skończonej liczby punktów $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$ zaś krzywa C jest krzywą regularną zamkniętą leżącą w tym obszarze, dodatnio skierowaną i zawierającą punkty z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ w swoim wnętrzu, to*

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z). \tag{5.6}$$

Przykład 5.4. Obliczyć residua funkcji w biegunach

a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-9}$,

b) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$,

c) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$.

Rozwiązanie. a) Funkcja posiada dwa bieguny jednokrotne $z_1 = 3, z_2 = -3$.

$$\operatorname*{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{(z+1)(z-3)}{(z-3)(z+3)} = \lim_{z\to 3} \frac{z+1}{z+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to -3} \frac{(z+1)(z+3)}{(z-3)(z+3)} = \lim_{z\to -3} \frac{z+1}{z-3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

b) Funkcja posiada dwa bieguny jednokrotne zespolone sprzężone $z_1 = j$, $z_2 = -j$.

$$\operatorname*{res}_{z=j} f(z) = \lim_{z\to j} \left[\frac{z}{(z-j)(z+j)} \cdot (z-j)\right] = \lim_{z\to j} \frac{z}{z+j} = \frac{j}{2j} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-j} f(z) = \lim_{z\to -j} \left[\frac{z}{(z-j)(z+j)} \cdot (z+j)\right] = \lim_{z\to -j} \frac{z}{z-j} = \frac{-j}{-2j} = \frac{1}{2}.$$

c) Funkcja posiada bieguny dwukrotne $z_1 = 1, z_2 = -1$.

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{-2}{(z+1)^3} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2(z+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to -1} \frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

□

Przykład 5.5. Obliczyć residuum funkcji $f(z)$ w biegunach.

1. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2+4)}$.

Rozwiązanie. 1. Punkt $z_0 = 1$ jest biegunem dwukrotnym.

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z-1)^2}(z-1)^2\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[z^2] = 2.$$

2. Mamy $z_0 = 0$ jest biegunem dwukrotnym, $z_1 = 2j$, $z_2 = -2j$ – bieguny jednokrotne.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{z^2(z^2+4)}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z^2+4}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{-2z}{(z^2+4)^2} = 0.$$

$$\operatorname*{res}_{z=2j} = \lim_{z\to 2j} \left[\frac{z-2j}{z^2(z-2j)(z+2j)}\right] = \lim_{z\to 2j} \frac{1}{z^2(z+2j)} = -\frac{1}{16j} = \frac{1}{16}j.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2j} = \lim_{z\to -2j} \left[\frac{z+2j}{z^2(z-2j)(z+2j)}\right] = \lim_{z\to -2j} \frac{1}{z^2(z-2j)} = \frac{1}{16j} = -\frac{1}{16}j.$$

□

5.3 Pytania do Wykładu

1. Co to jest residuum w punkcie?
2. Jakie są metody obliczania residuum w biegunach?
3. Jak się stosuje pojęcie residuum przy obliczaniu całek po krzywej zamkniętej?

5.4 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 5.1. Znaleźć punkty osobliwe odosobnione funkcji, oraz obliczyć residua funkcji $f(z)$ w tych punktach.

1. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -1$, $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 1$.
2. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1/2$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -1/2$.
3. $f(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 5$.
4. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=j} f(z) = -j/4$, $\operatorname*{res}_{z=-j} f(z) = j/4$.
5. $f(z) = \frac{1}{z^3-z^5}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -1/2$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 1/2$.
6. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Odp. $\operatorname*{res}_{z=j} f(z) = -3j/16$, $\operatorname*{res}_{z=-j} f(z) = 3j/16$.

Wykład 6

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

Istnieje wiele rodzajów równań różniczkowych zwyczajnych liniowych i nieliniowych pierwszego rzędu, których rozwiązanie sprawia duże trudności. Wykład koncentruje się na równaniach takiego typu które występują w zastosowaniach np. fizyce. Podany jest algorytm rozwiązania równania różniczkowego liniowego niejednorodnego metodą uzmiennienia stałej.

6.1 Równania różniczkowe

Równania różniczkowe opisują wiele zjawisk fizycznych. Równania takie zapisujemy w postaci

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{6.1}$$

gdzie F jest dowolną funkcją n-zmiennych, x zmienną niezależną, y niewiadomą funkcją. *Rząd równania* definiujemy jako liczbę równą stopniowi najwyższej pochodnej występującej w równaniu (6.1). Tak więc równanie różniczkowe pierwszego rzędu jest postaci $F(x, y, y') = 0$, natomiast drugiego rzędu $F(x, y, y', y'') = 0$. Jeśli funkcja F jest liniowa względem $y, y', \dots$ to równanie nazywamy równaniem liniowym.

Rozwiązaniem lub *całką równania* (6.1) nazywamy każdą funkcję $y = f(x)$, która spełnia to równanie. *Rozwiązanie ogólne* równania n-tego stopnia zależy od n stałych dowolnych $C_1, C_2, \dots, C_n$, czyli jest postaci $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Jeżeli stałym $C_1, C_2, \dots, C_n$ nadamy określone wartości to otrzymamy tak zwane *rozwiązanie szczególne* zwane także *całką szczególną*.

Zagadnieniem Cauchy'ego nazywamy problem polegający na znalezieniu całki szczególnej $y = f(x)$ równania (6.1) spełniającej *warunki początkowe*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n. \tag{6.2}$$

Zagadnieniem brzegowym dla równania (6.1) nazywamy problem znalezienia całki szczególnej $y = f(x)$ spełniającej warunki brzegowe postaci

$$f(a) = c \qquad \text{i} \qquad f(b) = d, \qquad \text{dla} \;\; a \le x \le b. \tag{6.3}$$

6.2 Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

W przypadku równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego wyróżnia się pewne typy równań dla których stosuje się odrębne metody rozwiązywania.

Równanie o zmiennych rozdzielonych

Równaniem *o zmiennych rozdzielonych* nazywamy równanie postaci

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{6.4}$$

zakładamy przy tym, że $g(y) \neq 0$. W celu rozwiązania zapisujemy równanie w następujący sposób

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{6.5}$$

Następnie grupujemy wyrażenia z x po jednej stronie równania natomiast wyrażenia z y po drugiej. Należy to wykonać w taki sposób aby dx oraz dy znajdowały się w liczniku. Dostajemy

$$g(y)dy = f(x)dx. \tag{6.6}$$

Następnie całkujemy takie równanie

$$\int g(y)\ dy = \int f(x)\ dx + C. \tag{6.7}$$

W wyniku otrzymamy zależność postaci $\Phi(x, y, C) = 0$ gdzie C jest pewną stałą. Stałą C możemy wyznaczyć jeśli do równania różniczkowego dodany jest warunek początkowy $y(x_0) = y_0$. Po wyznaczeniu stałej C otrzymujemy rozwiązanie szczególne.

Przykład 6.1. Rozwiązać równanie

$$y' + 4xy = 0$$

Rozwiązanie. Przekształcając otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = -4xy.$$

Następnie po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{dy}{y} = -4xdx.$$

Całkując mamy $\ln|y| = -2x^2 + C$. Stałą C możemy też zapisać jako $\ln|D|$ skąd mamy $\ln|y| = -2x^2 + \ln|D|$ oraz

$$y = De^{-2x^2}.$$

□

Równanie typu jednorodnego

Równaniem typu jednorodnego nazywamy równanie postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6.8}$$

zakładamy, że $x \neq 0$. Równanie takie sprowadzamy do równania o zmiennych rozdzielonych stosując podstawienie $u = y/x$ lub dokładniej $u(x) = y(x)/x$. Wyznaczamy stąd $y = xu$ oraz $y' = u + xu'$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$u + xu' = f(u) \qquad \text{czyli} \qquad x\frac{du}{dx} = f(u) - u. \tag{6.9}$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \tag{6.10}$$

całkując dostajemy

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}. \tag{6.11}$$

Zatem $F(u) = \ln|x| + C$. Gdzie $dF/du = 1/(f(u) - u)$. Ostatecznie rozwiązaniem równania jest funkcja

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C. \tag{6.12}$$

Przykład 6.2. Rozwiązać równanie

$$xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Rozwiązanie. Dzieląc obydwie strony przez x mamy

$$y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

stąd podstawiając $u = y/x$ mamy

$$u + xu' = u\ln u.$$

Rozdzielając zmienne dostajemy

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

skąd $\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C$ oraz $\ln u - 1 = Cx$. Oznacza to, że

$$\ln u = \ln(y/x) = Cx + 1 \quad \text{oraz} \quad y/x = e^{Cx+1}.$$

Rozwiązaniem jest więc $y = xe^{Cx+1}$. □

Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Rozpatrzmy równanie postaci

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.13}$$

które nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego.* Jeżeli $q(x) \not\equiv 0$ to mówimy, że równanie jest *niejednorodne.* Jeżeli $q(x) \equiv 0$ to mówimy, że równanie jest *jednorodne.* Równanie liniowe rozwiązujemy w dwóch etapach

1) Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' + p(x)y = 0. \tag{6.14}$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielnych, którego rozwiązaniem ogólnym jest

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx} \tag{6.15}$$

2) Rozwiązujmy równanie niejednorodne stosując metodę uzmiennienia stałej. Zakładamy, że rozwiązaniem równania niejednorodnego jest postaci

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{6.16}$$

gdzie $C(x)$ jest pewną nieznaną funkcją, którą musimy wyznaczyć. W tym celu wstawiamy $y(x)$ oraz $y'(x)$ do równania niejednorodnego. Następnie z tak otrzymanego równania wyznaczamy $C(x)$.

Przykład 6.3. Wyznaczymy rozwiązanie równania

$$y' - 5y = e^{5x}$$

spełniające warunek $y(0) = 1$.

Rozwiązanie. 1) Rozwiązujemy równanie jednorodne $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 0$ skąd $dy/y = 5dx$ oraz $\ln y = 5x + \ln C$. Tak więc $y = Ce^{5x}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego.
2) Rozwiązujemy równanie niejednorodne stosując metodę uzmiennienia stałej.
Mamy $y(x) = C(x)e^{5x}$ oraz $y'(x) = C'(x)e^{5x} + C(x)5e^{5x}$. Wstawiając y, y' do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$C'(x)e^{5x} + C(x)5e^{5x} - 5C(x)e^{5x} = e^{5x},$$

tzn. $C'(x)e^{5x} = e^{5x}$ czyli $C'(x) = 1$. Oznacza to, że $C(x) = x + A$, gdzie A jest dowolną stałą. Rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego jest zatem

$$y = (x + A)e^{5x}.$$

Uwzględniając warunek $y(0) = 1$ mamy $1 = A$. Stąd rozwiązaniem szczególnym równania jest $y = (x + 1)e^{5x}$.

Równanie Bernoullego

Równaniem Bernoullego nazywamy równanie postaci

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)y^r(x). \tag{6.17}$$

Równanie takie rozwiązujemy podstawiając $u(x) = y^{1-r}(x)$. Otrzymujemy wówczas równanie linowe dla funkcji $u(x)$.

Przykład 6.4. Rozwiązać równanie

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Rozwiązanie. Mamy $r = 2$. Czyli dla $y \not\equiv 0$ stosujemy podstawienie $u = y^{1-2} = 1/y$. Stąd

$$y = \frac{1}{u}, \qquad y' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie

$$-x\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u} = \frac{\ln x}{u^2}.$$

Mnożąc obustronnie przez u^2 otrzymujemy równanie

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x}\ln x,$$

które jest równaniem liniowym o stałych współczynnikach. Jego rozwiązaniem jest funkcja

$$u(x) = \ln x + 1 + Ax,$$

czyli

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + Ax}$$

gdzie A jest dowolną stałą. Dodatkowo $y \equiv 0$ też jest rozwiązaniem tego równania! $\square$

6.3 Pytania do Wykładu

1. Podać podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.
2. Na czym polega metoda uzmienniania stałej dla równania liniowego niejednorodnego?
3. Jaka rolę spełniają warunki początkowe lub brzegowe przy rozwiązywaniu równań różniczkowych?
4. Co jest cechą charakterystyczną równania Bernoullego i jak się takie równanie rozwiązuje?

6.4 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 6.1. Rozwiązać równania różniczkowe stosując podstawienie $\frac{y}{x} = u$.

a) $yy' = 2y - x$ Odp. $y = x + Ce^{\frac{x}{y-x}}$.

b) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ Odp. $x^2 - y^2 = Cx$.

c) $x^2y' = y^2 + xy$ Odp. $y = \frac{x}{C - \ln x}$.

Ćwiczenie 6.2. Rozwiązać równanie

$$y' + y \operatorname{tg} x = \cos x$$

spełniające warunek $y(0) = 1$.

Odp. Rozwiązaniem ogólnym jest $y(x) = (x + C)\cos x$, natomiast rozwiązaniem szczególnym $y(x) = (x + 1)\cos x$.

Ćwiczenie 6.3. Rozwiązać równanie metodą uzmienniania stałej.

a) $y' - \frac{1}{x}y = x$ Odp. $y = x^2 + Cx$.

b) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$ Odp. $y = 1 + \frac{1}{x}C$.

c) $y' - y = e^x$ Odp. $y = xe^x + Ce^x$.

Wykład 7

Równania różniczkowe rzędu drugiego

W wykładzie ograniczono się do metod rozwiązywania równań różniczkowych niejednorodnych drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Podano metodę uzmiennienia stałych oraz metodę przewidywania stosowana w szczególnych przypadkach.

7.1 Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

Równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{7.1}$$

gdzie $f(x), p(x), q(x)$ są to dane funkcje ciągłe w pewnym przedziale (a, b).

Jeżeli funkcja $f(x) = 0$ w rozważanym przedziale, to równanie to nazywa się jednorodnym

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{7.2}$$

Funkcje $y_1(x), y_2(x)$ będące rozwiązaniem równania jednorodnego nazywamy *rozwiązaniami szczególnymi.*

Rozwiązania te są liniowo niezależne w pewnym przedziale (a, b), jeżeli wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{w przedziale } (a, b). \tag{7.3}$$

Jeżeli rozwiązania szczególne $y_1(x), y_2(x)$ równania jednorodnego są liniowo niezależne w przedziale (a, b) $(W \neq 0)$, to funkcja

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \text{ - stałe dowolne} \tag{7.4}$$

jest *rozwiązaniem ogólnym* równania jednorodnego, zaś funkcje $y_1(x), y_2(x)$ nazywamy *układem podstawowym* tego równania.

W zastosowaniach często występują równania liniowe o stałych współczynnikach

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{7.5}$$

Istnieją dwie podstawowe metody rozwiązywania tego typu równań, metoda uzmienniania stałych oraz metoda przewidywań.

Metoda uzmiennienia stałych

Rozwiązanie wyznaczamy w dwóch etapach.

1) Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{7.6}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci $y = e^{rx}$ gdzie r jest pewnym parametrem który staramy się tak dobrać aby funkcja spełniała równanie jednorodne. Mamy

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}. \tag{7.7}$$

Podstawiając do równania jednorodnego, upraszczając oraz dzieląc przez e^{rx} dostajemy równanie

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{7.8}$$

zwane *równaniem charakterystycznym.* Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz rozpatrujemy trzy przypadki

- $\Delta > 0$ Istnieją dwa pierwiastki $r_1 \neq r_2$, skąd wynika istnienie dwóch rozwiązań $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$. Łatwo sprawdzić, że są to liniowo niezależne rozwiązania szczególne równania jednorodnego. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{7.9}$$
- $\Delta = 0$ Istnieje jeden podwójny pierwiastek r_1, skąd wynika istnienie rozwiązania szczególnego $y_1(x) = e^{r_1 x}$. Łatwo jednak sprawdzić, że $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ również jest rozwiązaniem szczególnym równania, liniowo niezależnym z $y_1(x)$. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}. \tag{7.10}$$
- $\Delta < 0$ Istnieją dwa pierwiastki zespolone sprzężone $r_1 = \alpha + j\beta, r_2 = \alpha - j\beta$, skąd wynika istnienie dwóch rozwiązań $y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $y(x) = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)]$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Jeżeli weźmiemy część rzeczywistą takiej funkcji $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ to również jest ona rozwiązaniem równania jednorodnego, podobnie jak część urojona $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Można sprawdzić, że $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ są liniowo niezależne. Otrzymujemy stąd, że rozwiązaniem ogólnym
$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{7.11}$$

2) Poszukujemy rozwiązania równania niejednorodnego. W każdym z przypadków $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \tag{7.12}$$
Stosując metodę uzmiennienia stałych przyjmujemy, że C_1, C_2 są pewnymi funkcjami zmiennej x
$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \tag{7.13}$$
Następnie staramy się tak dobrać $C_1(x), C_2(x)$ aby $y(x)$ było rozwiązaniem równania niejednorodnego. W wyniku obliczania pochodnych oraz podstawiania do równania niejednorodnego otrzymujemy następujący układ równań
$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \frac{f(x)}{a} \end{cases} \tag{7.14}$$
z którego wyznaczamy $C_1(x), C_2(x)$.

Przykład 7.1. Rozwiązać równanie różniczkowe
$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Rozwiązanie. Rozwiązujemy równanie jednorodne $y'' + 4y = 0$.

Równaniem charakterystycznym jest $r^2 + 4 = 0$. Stąd otrzymujemy pierwiastki $r_1 = 2j, r_2 = -2j$ tzn. $\alpha = 0$ oraz $\beta = 2$. Rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego są

$$y_1 = \cos 2x, \qquad y_2 = \sin 2x.$$

Natomiast rozwiązaniem ogólnym

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Stosujemy metodę uzmiennienia stałych.

$$y(x) = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Rozwiązujemy następnie układ

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(-2 \sin 2x) + C_2'(x) 2 \cos 2x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases}$$

Jest to układ równań algebraicznych z niewiadomymi funkcjami $C_1'(x), C_2'(x)$. Możemy wykorzystać wzory Cramera.

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\sin^2 x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = -2 \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} = -2 \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{1}{\sin^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 2$$

Stąd

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{\cos x}{\sin x}, \qquad C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{2 \sin^2 x} - 1.$$

Całkując otrzymujemy

$$C_1(x) = -\ln |\sin x| + A, \qquad C_2(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - x + B.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego jest więc

$$y(x) = (-\ln |\sin x| + A) \cos 2x + (-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - x + B) \sin 2x.$$

□

Metoda przewidywań

Metoda opiera się na następującym twierdzeniu

Twierdzenie 7.2. *Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego oraz dowolnego szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego.*

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego możemy więc zapisać

$$y(x) = Y(x) + y_0(x), \tag{7.15}$$

gdzie $y(x)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{7.16}$$

natomiast $y_0(x)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{7.17}$$

Metodę przewidywań możemy stosować w przypadku gdy funkcja $f(x)$ jest wielomianem, funkcją wykładniczą, funkcją $\alpha(\sin\omega_1 x) + \beta(\cos\omega_1 x)$. Może też być sumą lub iloczynem funkcji wymienionych typów. W naszych rozważaniach ograniczymy się tylko do przypadków gdy funkcje występujące w $f(x)$ nie są rozwiązaniami równania jednorodnego. W innych przypadkach również istnieją metody wyznaczania rozwiązania, są jednak one bardziej złożone.

Oto przykłady przewidywania rozwiązania szczególnego w zależności od postaci $f(x)$

$f(x)$	$y_0(x)$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	$Ax^2 + Bx + C$
$\alpha\cos\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$
$\alpha\sin\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$
$\alpha e^{\omega x}$	$Ae^{\omega x}$

Stałe A, B, C, chwilowo nieokreślone, dobieramy tak aby, $y_0(x)$ było rozwiązaniem równania niejednorodnego

Przykład 7.3. Rozwiązać równanie

$$y'' + 2y' + y = 4e^x.$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y'' + 2y' + y = 0$. Mamy następujące równanie charakterystyczne $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$. Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest

$$Y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Wyznaczamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Rozwiązanie takie przewidujemy w postaci $y_0 = Ae^x$. Stąd $y' = Ae^x, y'' = Ae^x$. Wstawiając tak otrzymane pochodne do równania niejednorodnego mamy

$$y_0'' + 2y_0' + y_0 = Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 4Ae^x = 4e^x.$$

Tak więc $4A = 4$ tzn. $A = 1$. Rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego jest $y_0 = e^x$ natomiast rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego

$$y(x) = Y(x) + y_0(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + e^x.$$

□

Przykład 7.4. Rozwiązać równanie

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$$

Dowód. Wyznaczamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y'' - 5y' + 6y = 0$. Mamy następujące równanie charakterystyczne $r^2 - 5r + 6 = 0$ którego pierwiastkami są $r_1 = 2, r_2 = 3$. Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest

$$Y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Wyznaczamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Rozwiązanie takie przewidujemy w postaci $y_0 = A\sin 3x + B\cos 3x$. Stąd

$$y' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x, \quad y'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x.$$

Wstawiając tak otrzymane pochodne do równania niejednorodnego mamy

$$\begin{aligned}
&y_0'' - 5y_0' + 6y_0 = \\
&\quad = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x - 5(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + 6(A\sin 3x + B\cos 3x) = \\
&\quad = (15B - 3A)\sin 3x + (-15A - 3B)\cos 3x = 13\sin 3x
\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy funkcjach trygonometrycznych mamy następujący układ równań

$$\begin{cases} 15B - 3A = 13 \\ -15A - 3B = 0 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $A = -1/6, B = 5/6$. Rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego jest $y_0 = 1/6(5\cos 3x - \sin 3x)$ natomiast rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 1/6(5\cos 3x - \sin 3x).$$

□

Przykład 7.5. Rozwiążemy równanie

$$y'' - 2y = xe^{-x}.$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y'' - 2y = 0$. Mamy następujące równanie charakterystyczne $r^2 - 2 = 0$. Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest

$$Y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Wyznaczamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Rozwiązanie takie przewidujemy w postaci $y_0 = (Ax + B)e^{-x}$. Stąd

$$y' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = -(Ax + B - A)e^{-x},$$

$$y'' = -Ae^{-x} + (Ax + B - A)e^{-x} = (Ax + B - 2A)e^{-x}.$$

Wstawiając tak otrzymane pochodne do równania niejednorodnego mamy

$$y_0'' + 2y_0' + y_0 = (Ax + B - 2A)e^{-x} - 2(Ax + B)e^{-x} = (-Ax - B - 2A)e^{-x} = xe^{-x},$$

tak więc $-A = 1, -B - 2A = 0$ tzn. $A = -1, B = 2$. Rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego jest $y_0 = (-x + 2)e^{-x}$ natomiast rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego

$$y(x) = Y(x) + y_0(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + (-x + 2)e^{-x}.$$

□

Równanie Eulera

Jednorodnym równaniem Eulera nazywamy równanie postaci

$$x^2 y''(x) + p(x)y'(x) + qy(x) = 0. \tag{7.18}$$

Jest to przykład równania liniowego w którym współczynniki są zmienne. Rozwiązania takiego równania poszukujemy w postaci $y = x^r$. Następnie dobieramy parametr r tak aby funkcja $y = x^r$ spełniała równanie.

Cechą charakterystyczną równania Eulera jest to, że współczynnik przy y'' jest równy x^2, współczynnik przy y' jest równy px, zaś przy y jest równy q, gdzie p i q są to dowolne liczy rzeczywiste.

Przykład 7.6. Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^2 y'' - 2y = 0.$$

Rozwiązanie. Podstawiamy $y = x^y$, $y' = r \cdot x^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ do równania i otrzymujemy

$$r(r-1)x^r - 2x^4 = 0,$$

dzieląc prze x^r otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$r^2 - r - 2 = 0$$

o pierwiastkach $r_1 = -1$, $r_2 = 2$.

Stąd rozwiązaniem ogólnym równania jest

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2.$$

□

Jeżeli pierwiastek $r = a$ równania charakterystycznego jest podwójny ($\Delta = 0$), to równanie ogólne ma postać

$$y = C_1 x^a + C_2 x^a \ln x. \tag{7.19}$$

Przykład 7.7. Rozwiązać równanie

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne $r^2+2r+1 = (r+1)^2 = 0$, $r_1 = -1$. Rozwiązanie ogólne

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-1} \ln x.$$

□

Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone $z = a \pm jb$, to rozwiązanie ogólne ma postać

$$y = C_1 x^a \cos(b \ln x) + C_2 x^a \sin(b \ln x). \tag{7.20}$$

Przykład 7.8. Rozwiązać równanie

$$x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne $r^2 + 1 = 0$. Pierwiastki $r_1 = j$, $r_2 = -j$, czyli $a = 0, b = 1$.

Rozwiązanie ogólne

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x).$$

□

Uwaga 7.9. Równanie niejednorodne Eulera rozwiązujemy metodą uzmienniania stałych.

7.2 Pytania do Wykładu

1. Kiedy można równanie różniczkowe rozwiązać metodą przewidywania na czym polega przypadek szczególny?

2. Omówić sposób rozwiązywania równania różniczkowego rzędu drugiego niejednorodnego metodą uzmiennienia stałych.

3. Co jest cechą charakterystyczną równania Eulera i jak można uzyskać rozwiązanie takie równania?

7.3 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 7.1. Rozwiązać równanie metodą przewidywań

a) $y'' + 5y' + 6y = 6x - 1$ Odp. $y = x - 1 + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

b) $y'' + y' - 2y = 3e^x$ Odp. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

c) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$ Odp. $y = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x$.

d) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. Odp. $y = (C_1x + C_2)e^x + e^{2x}$.

e) $y'' - 4y = 8x^3$. Odp. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$.

f) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$. Odp. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$.

Ćwiczenie 7.2. Rozwiązać równanie metodą uzmienniania stałych

$$y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$$

spełniające warunki $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 1$.

Odp. $y = xe^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x$.

Wykład 8

Szeregi funkcyjne

Ważnym przypadkiem szeregów funkcyjnych jest szereg potęgowy. Dla ustalonego x szereg potęgowy jest szeregiem liczbowym, co pozwala na wyznaczenie promienia zbieżności i przedziału zbieżności szeregu potęgowego, korzystając z znanego z Matematyki 1 kryterium ilorazowego zbieżności. Ważną postacią szeregu potęgowego są szeregi Taylora i Maclaurina wykorzystywane w Metodach numerycznych.

8.1 Szeregi potęgowe

Definicja 8.1. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{8.1}$$

gdzie $a_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \ldots$. Liczby a_n nazywamy współczynnikami szeregu natomiast x_0 środkiem przedziału zbieżności szeregu.

Jeżeli $x_0 = 0$ to szereg jest postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{8.2}$$

Dla ustalonego x szereg potęgowy staje się szeregiem liczbowym. Badanie zbieżności szeregu potęgowego polega na badaniu zbieżności szeregu liczbowego dla ustalonego x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{8.3}$$

Definicja 8.2. *Promieniem zbieżności szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geq 0$, że dla każdego x spełniającego warunek $|x-x_0| < R$ szereg jest zbieżny, natomiast dla każdego x spełniającego warunek $|x-x_0| > R$ szereg jest rozbieżny.

Definicja 8.3. *Przedziałem zbieżności* nazywamy przedział otwarty $(x_0 - R, x_0 + R)$. Dla $x = x_0 - R$ oraz dla $x = x_0 + R$ szereg może być zbieżny lub rozbieżny. Jeżeli $R = 0$ to jedyną wartością dla której szereg jest zbieżny jest $x = x_0$. Jeżeli $R = \infty$ to szereg jest zbieżny na całej osi OX. Promień zbieżności szeregu możemy wyznaczyć korzystając z kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu liczbowego oraz z bezwzględnej zbieżności szeregu. (Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny, patrz Matematyka 1).

Przykład 8.4. Rozpatrzmy szereg wartości bezwzględnych

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|.$$

Zbadamy dla jakich wartości x szereg taki jest zbieżny. Z kryterium d'Alemberta dla szeregów liczbowych mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left|\frac{x^{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = g|x|.$$

Mamy następujące przypadki

a) Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$$

oraz g jest różne od zera i nieskończoności to szereg jest zbieżny, gdy $g \cdot |x| < 1$, czyli dla $|x| < 1/g$. Liczba $R = 1/g$ jest promieniem bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, czyli także szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

b) Jeżeli $g = 0$ wówczas $R = \infty$ i szereg jest zbieżny dla każdego x.

c) Jeżeli $g = \infty$ wówczas $R = 0$ i szereg jest zbieżny tylko dla $x = 0$ tzn. w środku przedziału zbieżności.

W przypadku gdy $x_0 \neq 0$ to promień zbieżności szeregu $\sum a_n(x - x_0)^n$ wyliczamy analogicznie z tym, że rozpatrujemy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| = g|x-x_0|.$$

Przykład 8.5. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n}x^n.$$

Rozwiązanie. Mamy $a_n = \frac{5^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n+1}$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{n+1}\frac{5^n}{n}|x| = \lim_{n\to\infty} 5\frac{n}{n+1}|x| = 5|x|.$$

Oznacza to, że szereg jest zbieżny dla $5|x| < 1$ tzn. dla $|x| < \frac{1}{5}$. Promieniem zbieżności jest $R = 1/5$ natomiast przedziałem zbieżności $(-1/5, 1/5)$. Sprawdzamy zbieżność na krańcach przedziału zbieżności tzn. dla $x = 1/5$ oraz $x = -1/5$. Załóżmy, że $x = 1/5$ wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n},$$

tzn. szereg jest rozbieżny, jest to szereg harmoniczny. Dla $x = -1/5$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

tzn. szereg jest zbieżny co wynika z kryterium Leibniza. Ostatecznie otrzymujemy, że obszarem zbieżności jest $\langle -1/5, 1/5)$. □

Przykład 8.6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-6)^n}{n4^n}.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x-6| = \lim_{n\to\infty} \frac{n4^n}{(n+1)4^{n+1}}|x-6| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)}|x-6| = \frac{1}{4}|x-6| < 1.$$

Otrzymujemy stąd, że szereg jest zbieżny dla $|x-6| < 4$ tzn. $-4 < x-6 < 4$, $2 < x < 10$. Promieniem zbieżności jest więc 4 natomiast przedziałem zbieżności $(2, 10)$. Dla $x = 2$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2-6)^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-4)^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

i szereg jest rozbieżny. Dla $x = 10$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(10-6)^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

i szereg jest zbieżny co wynika z kryterium Leibniza. Ostatecznie obszarem zbieżności jest $(2, 10\rangle$. $\square$

8.2 Szereg Taylora, szereg Maclaurina

Twierdzenie 8.7 (Taylor). *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale domkniętym o końcach x_0 i x pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie, to istnieje punkt c leżący między x_0 i x_1 taki, że*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n, \tag{8.4}$$

gdzie

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \tag{8.5}$$

jest resztą wzoru (8.4) zwanego wzorem Taylora.

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w tym przedziale domkniętym wszystkie pochodne, czyli jest klasy C^∞ i ponadto reszta R_n dąży do zera, gdy $n \to \infty$, to funkcja $f(x)$ jest sumą szeregu potęgowego *postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \textit{gdzie} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{8.6}$$

Szereg taki nazywamy szeregiem Taylora *lub* rozwinięciem Taylora *funkcji f w szereg.*

W szczególnym przypadku gdy $x_0 = 0$ funkcja f jest w otoczeniu 0 sumą szeregu potęgowego postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{gdzie} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{8.7}$$

Szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina* lub rozwinięciem funkcji f w szereg Maclaurina. Sprawdzanie czy reszty $R_n(x)$ występujące we wzorze Taylora lub Maclaurina dążą do 0 przy $n \to \infty$ nie zawsze jest łatwe. Ograniczymy się więc do podania wzorów rozwinięcia w szereg Maclaurina kilku podstawowych funkcji elementarnych.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.8}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.10}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{gdzie} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \tag{8.11}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \qquad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R}, \alpha = 1, 2, \dots \tag{8.12}$$

Rozwijając niektóre funkcje w szeregi można korzystać z podstawień oraz podstawowych wzorów.

Przykład 8.8. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \sin(2x)$. Możemy wykorzystać rozwinięcie funkcji $\sin x$ oraz podstawić zamiast x zmienną $2x$, otrzymujemy

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Przykład 8.9. Rozwinąć funkcję $f(x) = x^2 \cos x$ w szereg Maclaurina. Mamy

$$x^2 \cos x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}$$

Czasami możemy wykorzystać wzór na sumę szeregu geometrycznego.

Przykład 8.10. Rozwinąć funkcję $f(x) = \frac{x}{x-3}$ w szereg Maclaurina. Dokonamy przekształceń sprowadzających funkcję $f(x)$ do postaci sumy szeregu geometrycznego. Mamy

$$\frac{x}{x-3} = -\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-(x/3)} = -\frac{x}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1} = -\left[\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \dots\right]$$

szereg ten jest zbieżny dla $|x/3| < 1$ tzn. dla $|x| < 3$.

8.3 Szereg Fouriera

Każdej funkcji $f(x)$ całkowalnej w przedziale $\langle -l, l\rangle$ możemy przyporządkować szereg trygonometryczny Fouriera, co zapisujemy

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{8.13}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{8.14}$$

W niektórych przypadkach znak przyporządkowania $\sim$ możemy zastąpić znakiem równości $=$ co oznacza, że w przedziale $\langle -l, l\rangle$ funkcja $f(x)$ jest sumą swojego szeregu trygonometrycznego Fouriera. W zastosowaniach powszechnie wykorzystuje się warunki Dirichleta, gwarantujące zbieżność szeregu Fouriera w przedziale $\langle -l, l\rangle$ do funkcji $f(x)$. W takich przypadkach mówimy, że funkcja jest rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera.

Definicja 8.11. Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $\langle -l, l\rangle$ *warunki Dirichleta* jeżeli:

1. $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna.
2. $f(x)$ jest ciągła z wyjątkiem skończonej ilości punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. W każdym takim punkcie spełniony jest warunek
$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]. \tag{8.15}$$
3. Na końcach przedziału $\langle -l, l\rangle$ spełnione są warunki
$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}[f(-l^+) + f(l^-)]. \tag{8.16}$$

W przypadku szczególnym, gdy funkcja f jest całkowalna w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ oraz spełnia w tym przedziale warunki Dirichleta to szereg Fouriera przyjmuje postać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{8.17}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{8.18}$$

Często w zastosowaniach funkcja f jest określona w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$. Wówczas rozwijając funkcję w szereg Fouriera dokonujemy przedłużenia f na przedział $\langle -\pi, \pi\rangle$. Przedłużenia można dokonać w sposób parzysty (przyjmując $f(-x) = f(x)$) lub nieparzysty (przyjmując $f(-x) = -f(x)$). Otrzymujemy w ten sposób dwie różne postacie rozwinięcia w szereg trygonometryczny Fouriera. W przypadku przedłużenia parzystego mamy $b_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ natomiast

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx, \tag{8.19}$$

zaś rozwinięcie jest następujące

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx \tag{8.20}$$

rozwinięcie to nazywamy *rozwinięciem funkcji f względem cosinusów.* W przypadku przedłużenia nieparzystego mamy $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ natomiast

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \tag{8.21}$$

rozwinięcie jest natomiast postaci

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx \tag{8.22}$$

rozwinięcie to nazywamy *rozwinięciem funkcji f względem sinusów.*

Przykład 8.12. Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, x = \pi \end{cases}$$

Funkcja jest nieparzysta więc $a_n = 0$, zaś

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x \sin nx\,dx$$

Całkujemy przez części

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = 2x & v' = \sin nx \\ u' = 2 & v = -1/n\cos nx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2}\sin n\pi\Big|_0^\pi\right] = -\frac{4}{n}\cos n\pi = \frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$

zatem

$$f(x) = 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

Przykład 8.13. Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera funkcję $f(x) = x^2$ dla $-\pi \leq x \leq \pi$. Funkcja jest parzysta zatem $b_n = 0$ oraz

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy

$$\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = \cos nx \\ u' = 2x & v = 1/n\sin nx \end{vmatrix} = \frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -1/n\cos nx \end{vmatrix} = \frac{-2}{n}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right] = \frac{\pi}{n^2}(-1)^n$$

Stąd $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$ oraz

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Korzystając ze wzorów Eulera szereg trygonometryczny Fouriera można zapisać w postaci zespolonej, zwanej zespolonym szeregiem Fouriera.

Jeżeli funkcja f spełnia w przedziale $\langle -l, l\rangle$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w zespolony szereg Fouriera

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{jnx}{l}} c_n, \tag{8.23}$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{jnx}{l}}\,dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8.24}$$

Z szeregim zesplonym Fouriera związane są dwa ważne w zastosowaniach pojęcia: *widmo amplitudowe* i *widmo fazowe*.

8.4 Pytania do Wykładu

1. Co oznacza, że szereg jest bezwzględnie zbieżny?
2. Podać definicję promienia i przedziału zbieżności szeregu potęgowego.
3. Co nazywamy środkiem szeregu potęgowego i dlaczego każdy szereg jest w swoim środku zbieżny?
4. Jaką rolę w obliczeniach przybliżonych spełniają szeregi potęgowe Taylora i Maclaurina?
5. Podać warunki Dirichleta gwarantujące zbieżność szeregu trygonometrycznego Fouriera.
6. Omówić sposób wyznaczania współczynników a_n i b_n szeregu Fouriera.
7. Jak się otrzymuje rozwinięcie funkcji $f(x)$ względem sinusów lub cosinusów w szereg Fouriera w przedziale $\langle 0, 1\rangle$?
8. Jak się otrzymuje postać zespoloną szeregu Fouriera?

8.5 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 8.1. Wyznaczyć promień oraz obszar zbieżności szeregów

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ Odp. $\langle -2, 2)$, $R = 2$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ Odp. $\langle -1, 1)$, $R = 1$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Odp. $(-\infty, \infty)$, $R = \infty$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$ Odp. $x = 0$, $R = 0$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2n}$ Odp. $\langle 4, 6)$, $R = 1$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$ Odp. $(-\infty, \infty)$, $R = \infty$

Ćwiczenie 8.2. Znając rozwinięcie funkcji e^x w szereg Maclaurina znaleźć rozwinięcie funkcji $x^3 e^{x+1}$.

Odp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} x^{n+3}$

Ćwiczenie 8.3. Znając rozwinięcie funkcji $\cos x$ w szereg Maclaurina znaleźć rozwinięcie funkcji $\cos^2 x$. (Wskazówka: zauważyć, że $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$).

Odp. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}$

Ćwiczenie 8.4. Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi < x < 0 \\ x & \text{dla } 0 < x <\leq \pi \end{cases}$$

Odp. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right]$

Ćwiczenie 8.5. Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera sinusów funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Wykład 9

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie to zwane także transformatą jest często wykorzystywane do obliczeń w przedmiotach specjalistycznych. W wykładzie podano warunki przy których istnieje przekształcenie funkcji zmiennej rzeczywistej $f(t)$ na funkcje zmiennej zespolonej $\overline{f}(s)$ zwanej transformatą funkcji. Omówiono także wzory i twierdzenia ułatwiające wyznaczenie transformat Laplace'a tych funkcji.

9.1 Podstawowe definicje i własności

Przekształcenie Laplace'a jest jednym z przekształceń całkowych umożliwiających efektywne rozwiązywanie wielu zagadnień opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi a także niektórych zagadnień opisanych równaniami całkowymi. Przekształcenie Laplace'a jest ściśle związane ze wzorem całkowym i przekształceniem Fouriera. Metoda przekształcenia Laplace'a jest obecnie podstawową metodą operatorową o najszerszym i wszechstronnym zakresie zastosowań w teorii sterowania i teorii obwodów elektrycznych liniowych o parametrach skupionych.

W rozdziale zostaną omówione wybrane użyteczne w praktyce problemy z podstaw matematycznych przekształcenia Lalpace'a.

Definicja 9.1. Przekształceniem Laplace'a funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej nazywamy funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = x + jy$ określonej wzorem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{9.1}$$

gdzie s jest zespolonym parametrem całkowania.

Przekształcenie opisane wzorem (9.1) będziemy oznaczać za pomocą operatora $\mathcal{L}$ czyli

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]. \tag{9.2}$$

Funkcja $F(s)$ nazywa się $\mathcal{L}$-transformatą funkcji $f(t)$, zaś $f(t)$ $\mathcal{L}$-oryginałem funkcji $F(s)$.

Przekształcenie $\mathcal{L}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa we wzorze (9.1) jest zbieżna.

W praktyce wykorzystuje się tzw. funkcje wygaszone tzn. spełniające warunek $f(t) = 0$ dla $t < 0$. Można pokazać, że jeśli funkcja $f(t)$ jest wygaszona i ciągła w przedziale $(0, \infty)$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, oraz istnieją takie liczby rzeczywiste $\rho > 0$ i $M > 0$, że dla $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq Me^{\rho t}, \quad \text{(czyli funkcja jest wzrostu wykładniczego)} \tag{9.3}$$

wówczas funkcja $f(t)$ jest $\mathcal{L}$-transformowalna i jest oryginałem przekształcenia $\mathcal{L}$.

Przedstawione warunki jakie może spełniać funkcja $f(t)$ są jedynie warunkami wystarczającymi istnienia transformaty $\mathcal{L}$, bowiem istnieją funkcje $\mathcal{L}$-transformowalne, które nie spełniają powyższych warunków.

Przekształcenie Laplace'a jest przekształceniem liniowym, tzn. jeżeli istnieją transformaty

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \quad \text{to} \quad \mathcal{L}[Af(t) + Bg(t)] = AF(s) + BG(s), \tag{9.4}$$

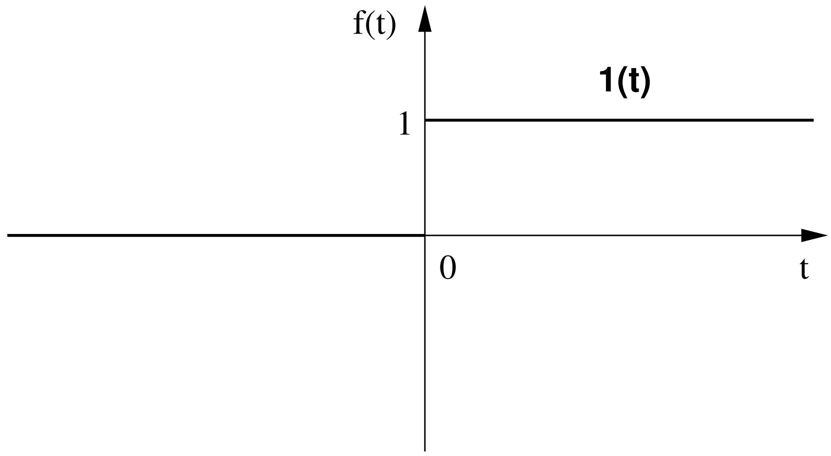
gdzie $A, B =$const.

Transformatę $\mathcal{L}$ wielu funkcji elementarnych można wyznaczyć obliczając bezpośrednio ze wzoru (9.1).

Przykład 9.2. Wyznaczyć transformatę $\mathcal{L}$ funkcji jednostkowej zdefiniowanej wzorem

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Mamy



Rysunek 9.1: Wykres funkcji Hevside'a.

$$F(s) = \int_0^\infty \mathbf{1}(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^b = \frac{1}{s}.$$

Czyli $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$ dla $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Analogicznie otrzymujemy transformatę funkcji $f(t) = e^{-at}$, czyli $\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s-a}$ dla $\mathrm{Re}(a+s) > 0$, gdzie a jest dowolną stałą.

Transformaty $\mathcal{L}$ innych funkcji są podane w tabeli (9.1).

Obliczanie transformat funkcji złożonych ułatwiają wzory uzyskane z następujących twierdzeń.

1. *Twierdzenie o $\mathcal{L}$-transformacie pochodnej funkcji $f(t)$.* Jeżeli funkcja $f(t)$ oraz jej pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie są $\mathcal{L}$-oryginałami oraz n-ta pochodna jest ciągła w przedziale $(0,\infty)$ wówczas istnieje $\mathcal{L}$-transformata tej pochodnej przy czym

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0), \tag{9.5}$$

czyli $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$, $\quad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, itd.

2. *Twierdzenie o pochodnej transformaty $F(s)$.*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \tag{9.6}$$

Tablica 9.1: Transformaty Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a		
1.	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
2.	$t^n \ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
4.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
6.	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
7.	$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
8.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
9.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
10.	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

w szczególności otrzymujemy wzory $\mathcal{L}[t\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}[t^2\mathbf{1}(t)] = \frac{2}{s^3}$,

$$\mathcal{L}[t^n\mathbf{1}(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{9.7}$$

3. *Twierdzenie o przesunięciu w argumencie oryginału $f(t)$.*
   Jeśli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \text{to } \mathcal{L}[\mathbf{1}(t-t_0)f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s) \text{ dla } t_0 > 0. \tag{9.8}$$

4. *Twierdzenie o przesunięciu w argumencie transformaty $F(s)$.*
   Jeśli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \text{ to } \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a), \tag{9.9}$$

   gdzie a jest dowolną stałą.

5. *$\mathcal{L}$-transformata całki z funkcji $f(t)$.*
   Jeżeli istnieje transformata $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s). \tag{9.10}$$

6. *Transformata funkcji okresowej.*
   Jeżeli funkcja $f(t)$ jest $\mathcal{L}$-oryginałem oraz jest funkcją okresową o okresie T, czyli $f(t+T) = f(t)$, wówczas

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}} \qquad \text{gdzie} \quad F_T(s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt. \tag{9.11}$$

Przykład 9.3. Wyznaczyć $\mathcal{L}$-transformaty następujących funkcji:

1. $f(t) = \mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-2a)$.
   Ponieważ $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$, więc otrzymujemy $F(s) = \frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-2as}$.

2. $f(t) = te^{2t}\sin 3t$.
   Mamy $F(s) = -\frac{d}{ds}\left\{\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t]\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{3}{(s-2)^2+9}\right] = \frac{6(s-2)}{[(s-2)^2+9]^2}$, ponieważ $\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9}$.

3. $f(t) = e^{-2t}\cos t$.
   Ponieważ $\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$, więc otrzymujemy $F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$.

4. $f(t) = \mathbf{1}(t)\sin t + \mathbf{1}(t-\pi)\sin(t-\pi)$.
   Mamy $F(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$.

5. Funkcji okresowej $f(t)$ o okresie T.

$$\begin{cases} A & \text{dla } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \text{dla } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru na transformatę funkcji okresowej wyliczamy najpierw

$$F_T(s) = A\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-st}dt - A\int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-st}dt = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)^2,$$

stąd

$$F(s) = \left(\frac{A}{s}\right) \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{sT}{2}}}{1 + e^{-\frac{sT}{2}}}\right).$$

Przykład 9.4. Wyznaczyć $\mathcal{L}$-transformaty funkcji.

1. $f(t) = t \sin t\mathbf{1}(t)$.
2. $f(t) = e^t \sin t\mathbf{1}(t)$.
3. $f(t) = \mathbf{1}(t-1)\sin 2(t-1)$.
4. $f(t) = \mathbf{1}(t-2)\cos 3(t-2)$.
5. $f(t) = \mathbf{1}(t) + 2 \cdot \mathbf{1}(t-3) - \mathbf{1}(t-4)$.

Rozwiązanie. 1. Korzystamy z Twierdzenia o pochodnej transformaty dla $n = 1$. Ponieważ

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

więc otrzymamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

2. Korzystamy ze wzoru 8 dla $a = -1$. Otrzymujemy

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1} = \frac{1}{s^2-2s+2}.$$

3. Korzystamy z Twierdzenia o przesunięciu w argumencie oryginału. Ponieważ

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}, \quad t_0 = 1,$$

więc

$$\overline{f}(s) = e^{-s}\frac{2}{s^2+4}.$$

4. Korzystamy z Twierdzenia o przesunięciu w argumencie oryginału. Ponieważ

$$\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9}, \quad t_0 = 2,$$

więc

$$\overline{f}(s) = e^{-2s}\frac{s}{s^2+9}.$$

5. Ponieważ $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$, więc

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} + 2e^{-3s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}[1 + 2e^{-3s} - e^{-4s}]$$

$\square$

9.2 Pytania do Wykładu

1. Jaka jest definicja przekształcenia (transformaty) Laplace?a?
2. Kiedy taka transformata funkcji $f(t)$ nie istnieje?
3. Jaka jest rola funkcji jednostkowej $1(t)$ i $1(t-a)$ przy zapisywaniu oryginału transformaty?
4. Podać podstawowe twierdzenia ułatwiające wyznaczanie transformaty i oryginału Laplace?a.

9.3 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 9.1. Wyznaczyć transformaty funkcji $f(t)$.

a) $f(t) = t^n e^{at}$ $\qquad F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

b) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$ $\qquad F(s) = \frac{6s}{(s^2-9)^2}$.

c) $f(t) = t \cos t$ $\qquad F(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.

d) $f(t) = e^{at} \cos \omega t$ $\qquad F(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$.

e) $f(t) = \sin 3(t-2)$ $\qquad F(s) = \frac{3}{s^2+9} e^{-2s}$.

f) $f(t) = \cos 4(t-3)$ $\qquad F(s) = \frac{s}{s^2+16} e^{-3s}$.

Ćwiczenie 9.2. Narysować funkcje $f(t)$ i wyznaczyć transformatę.

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \le t \le a \\ e^{-b(t-a)} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$ $\qquad F(s) = \frac{1}{s+b} e^{-as}$.

b) $f(t) = |\sin t|$ (funkcja okresowa) $\qquad F(s) = \frac{1}{s^2+1} \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$.

c) $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)$ $\qquad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2s}$.

d) $f(t) = \mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t)$ $\qquad F(s) = \frac{e^{-2s}-1}{s}$.

e) $f(t) = \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-3)$ $\qquad F(s) = \frac{1-2e^{-2s}+e^{-3s}}{s}$.

Wykład 10

Odwzorowanie odwrotne Laplace'a

Podano metody wyznaczania oryginału transformaty dla różnych występujących w praktyce postaci transformaty $\overline{f}(s)$. W przypadku biegunów funkcji $\overline{f}(s)$ oryginał wyznacza się korzystając z residuum pewnych wyrażeń zawierających transformatę. W wykładzie wprowadza się także definicję splotu i jego transformatę.

10.1 Przekształcenie odwrotne Laplace'a

Definicja 10.1. Jeżeli istnieje $\mathcal{L}$-transformata funkcji $f(t)$ równa $F(s)$, wówczas przekształcenie odwrotne jest określone wzorem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \tag{10.1}$$

przy czym całkowanie odbywa się w płaszczyźnie zmiennej zespolonej s po prostej $\operatorname{Re} s = c$. Przekształcenie odwrotne oznaczamy operatorem $\mathcal{L}^{-1}$.

Jeżeli transformata $F(s)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > c$ oraz posiada skończoną liczbę n biegunów w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < c$ wówczas korzystając z własności całki z funkcji zmiennej zespolonej oryginał $f(t)$ można wyliczyć ze wzoru

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{s=s_k} F(s) e^{st}. \tag{10.2}$$

Jeżeli biegun s_k jest k-krotny to

$$\operatorname*{res}_{s=s_k} F(s) e^{st} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[F(s) e^{st} (s - s_k)^k \right]. \tag{10.3}$$

W szczególności jeżeli s_0 jest biegunem jednokrotnym funkcji $F(s)$ wówczas

$$f(t) = \lim_{s \to s_0} \left[F(s) e^{st} (s - s_0) \right]. \tag{10.4}$$

W zastosowaniach często transformata funkcji $f(t)$ jest funkcją wymierną

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \tag{10.5}$$

gdzie $L(s)$ jest wielomianem stopnia m, zaś wielomian $M(s)$ jest wielomianem stopnia n oraz $m < n$. Jeżeli wielomian $M(s)$ posiada tylko jednokrotne pierwiastki s_k, $k = 1, 2, \dots, n$ wówczas funkcja $F(s)$ posiada także n biegunów jednokrotnych w s_k. Można wówczas wykazać (jest to *Twierdzenie o rozkładzie*), że

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t}. \tag{10.6}$$

Jeżeli transformata $F(s)$ posiada bieguny zespolone $s_1 = x_1 + jy_1$ i $s_2 = x_2 - jy_2$, wówczas suma residuum w tych biegunach jest równa 2 razy część rzeczywista residuum w biegunie $s_1 = x_1 + jy_1$, czyli

$$f(t) = res_{s_1} \left[F(s) e^{st} \right] + \operatorname*{res}_{s_2} \left[F(s) e^{st} \right] = 2 \operatorname{Re} \left\{ \operatorname*{res}_{s_1} \left[F(s) e^{st} \right] \right\}. \tag{10.7}$$

Przykład 10.2. Wyznaczyć oryginał transformaty

1. $F(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$.
   Transformata posiada bieguny jednokrotne dla $s_1 = 1$, $s_2 = j$ i $s_3 = -j$. Można skorzystać z twierdzenia o rozkładzie.
   Mamy $L(s) = s$, $L(1) = 1$, $L(j) = j$, $M(s) = (s-1)(s^2+1)$, czyli $M'(s) = (s^2+1) + (s-1)2s$, stąd $M'(1) = 2$, $M'(j) = (j-1)2j = -2(j+1)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}e^t\mathbf{1}(t) + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{j}{-2(j+1)}e^{jt}\right] = \\ &= \frac{1}{2}e^t\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[(j+1)(\cos t + j\sin t)\right] = \\ &= \frac{1}{2}e^t\mathbf{1}(t) - \frac{1}{2}\left[\cos t - \sin t\right]\mathbf{1}(t). \end{aligned}$$

2. $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$. Transformata posiada dla $s_0 = -2$ biegun jednokrotny, dla $s_1 = 1$ biegun dwukrotny. Stąd

$$f(t) = \lim_{s\to -2}\frac{e^{st}}{(s-1)^2} + \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{(s+2)}\right] = \frac{1}{9}\left[e^{-2t} + (3t-1)e^{-t}\right]\mathbf{1}(t).$$

3. $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}e^{-3s}$.
   Ponieważ w transformacie występuje funkcja wykładnicza e^{-3s}, to w oryginale $f(t)$ będzie występować przesunięcie w argumencie oryginału o wartości $t_0 = 3$. Obliczamy najpierw

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[e^{st}\right] = te^{-t}\mathbf{1}(t).$$

   Stąd

$$f(t) = (t-3)e^{-(t-3)}\mathbf{1}(t-3).$$

Przykład 10.3. Wyznaczyć oryginał.

1. $\overline{f}(s) = \frac{s^2-4}{s^2(s-1)(s^2+4)}$.
2. $\overline{f}(s) = \frac{s}{(s-1)(s+3)}$.
3. $\overline{f}(s) = \frac{se^{-2s}}{(s-1)(s+3)}$.
4. $\overline{f}(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)}$.
5. $\overline{f}(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)}$.

Rozwiązanie. 1. Rozkładamy funkcję $\overline{f}(s)$ na ułamki proste

$$\frac{s^2-4}{s^2(s-1)(s^2+2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} + \frac{Ds+E}{s^2+4}.$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika, uporządkowaniu i porównaniu współczynników przy odpowiednich potęgach otrzymujemy układ równań, którego rozwiązaniem są liczby

$$A = 1,\ B = 1,\ C = -\frac{3}{5},\ D = \frac{2}{5},\ E = \frac{2}{5},$$

czyli

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+4}.$$

Stąd

$$f(t) = t + \mathbf{1}(t) - \frac{3}{5}e^t + \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t.$$

2. Stosujemy twierdzenie o rozkładzie. Mamy

$$L(s) = s, \quad M(s) = (s-1)(s+3), \quad M'(s) = (s+3) + (s-1) = 2s+2 = 2(s+1).$$

$\overline{f}(s)$ ma bieguny jednokrotne $s_1 = 1, s_2 = -3$. Ponadto

$$L(s_1) = 1, \quad M'(s_1) = 4, \qquad L(s_2) = -3, \quad M'(s_2) = -4,$$

czyli

$$f(t) = \frac{L(s_1)}{M'(s_1)}e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{M'(s_2)}e^{s_2 t} = \left[\frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t}\right]\mathbf{1}(t).$$

3. Korzystamy z przykładu 2. oraz wzoru 13.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)(s+3)}\right] = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t}.$$

Stąd dla $t_0 = 2$ mamy

$$f(t) = \frac{1}{4}\mathbf{1}(t-2)e^{t-2} + \frac{3}{4}\mathbf{1}(t-2)e^{-3(t-2)}.$$

4. Wielomian $M(s)$ posiada pierwiastki $s_1 = -1, s_2 = j, s_3 = -j$, czyli $\overline{f}(s)$ posiada trzy bieguny jednokrotne, w tym dwa zespolone sprzężone. Stąd

$$f(t) = \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} e^{s_1 t} + 2\,\mathrm{Re}\, \frac{L(s_2)}{M'(s_2)} e^{s_2 t}.$$

Mamy

$$L(s) = 1, \quad M(s) = (s^2+1)(s+1), \quad M'(s) = 2s(s+1) + (s^2+1),$$
$$M'(s_1) = 2, \quad M'(s_2) = 2j(j+1) = 2j - 2.$$

Stąd

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t + 2\,\mathrm{Re}\, \frac{1}{2(j-1)} e^{jt} = \frac{1}{2}e^t + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{j-1}e^{jt}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}e^t + \mathrm{Re}\left[-\frac{1+j}{2}(\cos t + j\sin t)\right] = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}(\cos t - \sin t).$$

5. Wielomian $s(s^2-2s+5)$ posiada pierwiastki $s_1 = 1+2j, s_2 = 1-2j, s_3 = 0$.

$$L(s) = 1, \quad M(s) = s(s^2-2s+5), \quad M'(s) = (s^2-2s+5) + s(2s-2).$$
$$M'(0) = 5, \quad M'(s_1) = (1+2j)(2+4j-2) = (1+2j)4j = 4(-2+j).$$

Stąd

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re}\, \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_3)}{M'(s_3)} e^{s_3 t} = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4(-2+j)} e^{(1+2j)t}\right] + \frac{1}{5}e^{0t} =$$
$$= \frac{e^t}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{-2+j}e^{2jt}\right] + \frac{1}{5}\mathbf{1}(t) = \frac{1}{2}e^t\,\mathrm{Re}\left[\frac{-2-j}{5}(\cos 2t + j\sin 2t)\right] + \frac{1}{5}\mathbf{1}(t) =$$
$$= \frac{1}{10}e^t[-2\cos 2t + \sin 2t]\mathbf{1}(t) + \frac{1}{5}\mathbf{1}(t).$$

□

W przypadku kiedy transformata posiada *bieguny wielokrotne*, oryginał wyliczamy korzystając z residuum .

Przykład 10.4. Wyznaczyć przekształcenie odwrotne $\mathcal{L}^{-1}[\overline{f}(s)]$.

1. $\overline{f}(s) = \frac{s+3}{(s-1)^2}$.
2. $\overline{f}(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$.

Rozwiązanie. 1. Punkt $s_1 = 1$ jest biegunem dwukrotnym.

$$f(t) = \operatorname*{res}_{s=1}\left[\frac{s+3}{(s-1)^2}e^{st}\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+3)e^{st}(s-1)^2}{(s-1)^2}\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[(s+3)e^{st}\right] =$$
$$= \lim_{s\to 1}[e^{st} + te^{st}(s+3)] = e^t\mathbf{1}(t) + 4te^t\mathbf{1}(t) = e^t(1+4t)\mathbf{1}(t).$$

2. Bieguny dwukrotne dla $s_1 = j, s_2 = -j$. Zatem

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2\operatorname{Re}\left[\operatorname*{res}_{s=j} \overline{f}(s)\right] = 2\operatorname{Re}\lim_{s\to j}\frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}(s-j)^2}{(s-j)^2(s+j)^2}\right] = 2\operatorname{Re}\lim_{x\to j}\frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}}{(s+j)^2}\right] = \\
&= 2\operatorname{Re}\lim_{s\to j}\frac{(e^{st}+ste^{st})(s+j)^2 - se^{st}2(s+j)}{(s+j)^4} = \\
&= 2\operatorname{Re}\lim_{s\to j}\frac{(e^{st}+ste^{st})(s+j) - 2se^{st}}{(s+j)^3} = 2\operatorname{Re}\frac{(e^{jt}+jte^{jt})2j - 2je^{jt}}{(2j)^3} = \\
&= 2\operatorname{Re}\frac{e^{jt}(1+jt-2j)}{-8j} = \frac{1}{4}\operatorname{Re}[e^{jt}(j-t+2)] = \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Re}[(\cos t + j\sin t)(j-t+2)] = \\
&= \frac{1}{4}[-\sin t - t\cos t + 2\cos t]\mathbf{1}(t).
\end{aligned}
$$

□

10.2 Transformata Laplace'a splotu

Definicja 10.5. Splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ całkowalnych dla $0 < t < \infty$, nazywamy funkcję

$$\varphi(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \tag{10.8}$$

Uwaga 10.6. Splot funkcji jest przemienny.

Twierdzenie 10.7 (Borela o splocie)**.** *Jeżeli istnieją transformaty* $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ *i* $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$, *to zachodzi równość*

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s). \tag{10.9}$$

Wyrażenie $\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ nazywa się *całką Duhamela.* Z twierdzenia Borela wynika

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t)\right] = sF_1(s)F_2(s). \tag{10.10}$$

Twierdzenie Borela o splocie dwóch funkcji ułatwia niejednokrotnie wyznaczenie oryginału transformaty.

10.3 Pytania do Wykładu

1. Podać metody wyznaczania oryginału transformaty.
2. Co to jest splot funkcji i jakie ma zastosowania?

10.4 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 10.1. Wyznaczyć oryginały transformat.

a) $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+5}$ $\qquad f(t) = (e^{-2t}\sin t)\mathbf{1}(t).$

b) $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$ $\qquad f(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)\mathbf{1}(t).$

c) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$ $\qquad f(t) = (t - \sin t)\mathbf{1}(t).$

d) $F(s)\frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$ $\qquad f(t) = \frac{1}{9}\left(e^{-2t} - e^{-t} + 3te^{t}\right)\mathbf{1}(t).$

e) $F(s) = \frac{1}{1+s^2}\left(e^{-2s} + 2e^{-3s} + 3e^{-4s}\right)$
$f(t) = \mathbf{1}(t-2)\sin(t-2) + 2\mathbf{1}(t-3)\sin(t-3) + 3\mathbf{1}(t-4)\sin(t-4).$

f) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1} + \frac{se^{-2s}}{s^2-4}$ $\qquad f(t) = \mathbf{1}(t-1)\,\mathrm{sh}(t-1) + \mathbf{1}(t-2)\,\mathrm{ch}\,2(t-2).$

Wykład 11

Metoda operatorowa

Jest to metoda pozwalająca na rozwiązywanie równań różniczkowych rzędu drugiego niejednorodnych o stałych współczynnikach przy zadanych warunkach początkowych. Metoda ta jest szczególnie użyteczna gdy funkcja występująca z prawej strony równania (wymuszenie) jest funkcją nieciągłą. Nazwa tej metody pochodzi od polskiego matematyka profesora Jana Milusińskiego (ur.1913 r) który jest twórca metod rachunku operatorowego.

11.1 Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych liniowych niejednorodnych

Metoda ta przekształca równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją $x(t)$ w równanie algebraiczne, którego niewiadomą jest funkcja $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Warunkiem koniecznym stosowania tej metody jest by współczynniki przy niewiadomej $x(t)$ i jej pochodnych były stałe.

Metoda ta pozwala na wyznaczenie rozwiązania $x(t)$ równania spełniającego dodatkowe warunki początkowe dla $t = 0$.

Metodę zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 11.1. Wyznaczyć funkcję $x(t)$ będącą rozwiązaniem równania różniczkowego

$$x''(t) + x(t) = 2\cos t$$

oraz spełniającą warunki początkowe

$$x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x'(0) = -1.$$

Stosujemy przekształcenie $\mathcal{L}$ do obu stron równania oznaczając $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Korzystając ze wzorów na transformaty pochodnych otrzymujemy

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{2s}{s^2+1}.$$

Korzystając z warunków początkowych po dokonaniu prostych rachunków otrzymujemy

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Korzystając z przekształcenia odwrotnego otrzymujemy

$$x(t) = (t-1)\sin t\,\mathbf{1}(t).$$

Przykład 11.2. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x''(t) + x(t) = f(t), \qquad x(0) = 0, x'(0) = 0,$$

gdzie

$$f(t) = \mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2).$$

Przy transformowaniu prawej strony równania skorzystamy z transformaty funkcji przesuniętej w argumencie oryginału. Mamy

$$X(s)(s^2+1) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s},$$

czyli

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right).$$

Ponieważ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t)\cos t$, więc korzystając z transformaty funkcji przesuniętej otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned} x(t) = & \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t)\cos t - 2\left[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-1)\cos(t-1)\right] + \\ & + \mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-2)\cos(t-2). \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy rozwiązanie w przypadku, gdy wymuszenie $f(t)$ jest funkcją nieciągłą.

Jak wiadomo prawa strona równania różniczkowego przedstawia wymuszenie działające na układ, które jest często nieznaną funkcją $f(t)$. Rozwiązanie takiego równania ułatwia wykorzystanie splotu dwóch funkcji.

Rozważmy równanie różniczkowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \tag{11.1}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = x'(0) = 0$. Oznaczmy przez $X(s) = \mathcal{L}[x(t)], F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Transformata lewej strony równania po wykorzystaniu warunków początkowych równa się transformacie prawej strony, czyli mamy równanie

$$Q(s)X(s) = F(s), \tag{11.2}$$

gdzie $Q(s) = as^2 + bs + c$. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie równania operatorowego w postaci

$$X(s) = \frac{1}{Q(s)}F(s). \tag{11.3}$$

Stąd rozwiązenie równania (11.1) można wyznaczyć za pomocą splotu

$$x(t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Q(s)}\right], \tag{11.4}$$

a następnie uzyskiwać rozwiązanie dla dowolnej funkcji $r(t)$ posiadającej transformatę Laplace'a.

Podobną metodą można otrzymać rozwiązanie równania przy niezerowych warunkach początkowych.

Przykład 11.3. Dla przykładu rozwiążemy równanie

$$x'(t) + x(t) = f(t)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 1$.

Załóżmy, że istnieje transformata $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Wówczas stosując obustronnie przekształcenie $\mathcal{L}$ otrzymujemy równanie algebraiczne

$$sX(s) - 1 + X(s) = F(s), \quad \text{czyli} \quad X(s) = F(s)\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}.$$

Ponieważ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$, to otrzymujemy z twierdzenia o transformacie splotu rozwiązanie

$$x(t) = f(t) * e^{-t} + e^{-t}.$$

W ten sposób można otrzymać łatwo rozwiązanie równania dla różnych funkcji $f(t)$.

11.2 Pytania do Wykładu

1. Jakiego typu równania różniczkowe można rozwiązywać metodą operatorowa, omówić tą metodę.

2. Jak można wykorzystać twierdzenie Borela o splocie przy rozwiązywaniu równania różniczkowego?

11.3 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 11.1. Rozwiązać równania różniczkowe.

a) $x''(t) + 2x'(t) = t \sin t \qquad x(0) = x'(0) = 0.$

b) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^t \qquad x(0) = 0, x'(0) = 1.$

c) $x''(t) + x(t) = \mathbf{1}(t) \qquad x(0) = -1, x'(0) = 0.$

d) $x''(t) + 4x(t) = \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t) \qquad x(0) = 0, x'(0) = 0.$

Dodatek A

Przekształcenie $\mathcal{Z}$ i jego własności

Przekształcenie $\mathcal{Z}$ ułatwia analizę układów w których wektory stanu, wymuszeń i odpowiedzi są funkcjami dyskretnymi. W wykładzie podane są podstawowe wzory wyznaczające przekształcenie $\mathcal{Z}$ oraz definicje i własności. Wiele z nich jest analogicznych do przekształcenia Laplace'a. Przekształcenie $\mathcal{Z}$ ułatwią wyznaczanie rozwiązań równań różnicowych.

A.1 Podstawowe definicje i własności

W zastosowaniach często w miejscu funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej występują funkcje dyskretne $f(n)$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Za pomocą tych funkcji opisane są układy dyskretne stacjonarne liniowe w których składowe wektora stanu, wymuszeń i odpowiedzi są funkcjami dyskretnymi.

Analizę tych układów ułatwia przekształcenie $\mathcal{Z}$ zwane także dyskretnym przekształceniem Laplace'a.

Korzystając z przekształcenia $\mathcal{Z}$ można uzyskać rozwiązania równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach oraz wyznaczyć transmitancje dyskretnych układów liniowych stacjonarnych o dyskretnym wymuszeniu i odpowiedzi.

Definicja A.1. Przekształceniem $\mathcal{Z}$ funkcji dyskretnej $f(n)$, $n = 1, 2, \dots$ nazywamy funkcję $F(z)$ zmiennej zespolonej z zdefiniowaną wzorem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \tag{A.1}$$

Przekształcenie $\mathcal{Z}$ będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{Z}$, czyli

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)].$$

Funkcję $F(z)$ nazywamy $\mathcal{Z}$-transformatą funkcji $f(n)$, zaś funkcję $f(n)$ dla której istnieje transformata $F(z)$ nazywamy $\mathcal{Z}$-oryginałem.

Oczywiście transformata $\mathcal{Z}$ funkcji $f(n)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szereg występujący we wzorze (A.1) jest zbieżny.

Można wykazać, że jeżeli dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ funkcja $f(n)$ spełnia nierówność $f(n) \leq e^{\alpha n}$, gdzie α jest stałą rzeczywistą, to funkcja $f(n)$ jest $\mathcal{Z}$-oryginałem. Mówimy wówczas, że funkcja ta jest wzrostu wykładniczego.

Wyznaczanie $\mathcal{Z}$-transformaty funkcji dyskretnej jest niejednokrotnie kłopotliwe.

Transformaty podstawowych funkcji podane są w tabeli ().

Przy obliczaniu $\mathcal{Z}$-transformat funkcji $f(n)$ wykorzystuje się zazwyczaj własności szeregu geometrycznego zbieżnego.

Przykład A.2. Wyznaczyć $\mathcal{Z}$-transformatę jednostkowej funkcji dyskretnej $\mathbf{1}(n)$.

Funkcja ta jest zdefiniowana wzorem $\mathbf{1}(n) = 1$ dla $n \geq 0$.

Mamy

$$\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{z}{z-1} \quad \text{dla } |z| > 1.$$

Czyli

$$\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \frac{z}{z-1}.$$

Analogicznie postępując otrzymujemy wzór $\mathcal{Z}[a^n] = \frac{z}{z-a}$ dla $|z| > |a|$.

Przekształcenie $\mathcal{Z}$ jest przekształceniem liniowym. Jeżeli istnieją $\mathcal{Z}$ transformaty dyskretnych $f(n)$ i $g(n)$ oraz A i B są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, wówczas

$$\mathcal{Z}[Af(n) + Bg(n)] = A\mathcal{Z}[f(n)] + B\mathcal{Z}[g(n)].$$

Definicja A.3. Odwrotne przekształcenie $\mathcal{Z}$ funkcji $f(n)$ jest określone wzorem

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r F(z) z^{n-1} dz,$$

gdzie całkowanie jest po okręgu o promieniu r takim, że wewnątrz tego okręgu znajdują się wszystkie bieguny funkcji $F(z)$.

Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia $\mathcal{Z}$ oznaczamy za pomocą operatora $\mathcal{Z}^{-1}$.

A.2 Transformaty $\mathcal{Z}$ funkcji przesuniętych

Jeżeli $f(n)$ jest $\mathcal{Z}$-oryginałem, k dowolną liczbą naturalną to transformata $\mathcal{Z}$ funkcji $f(n+k)$ przesuniętej w lewo o k względem $f(n)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{Z}[f(n+k)] = z^k F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(n) z^{k-n}. \tag{A.2}$$

W szczególnym przypadku, gdy $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$, to wzór upraszcza się do postaci

$$\mathcal{Z}[f(n+k)] = z^k F(z).$$

W przypadku przesunięcia funkcji dyskretnej $f(n)$ w prawo o k względem n czyli $f(n-k)$ wówczas

$$\mathcal{Z}[f(n-k)] = z^{-k} F(z),$$

przy założeniu, że $f(-1) = f(-2) = \ldots = f(-k) = 0$.

A.3 Transformaty $\mathcal{Z}$ sumy i różnicy

Definicja A.4. Różnicą pierwszego rzędu funkcji dyskretnej $f(n)$ nazywamy różnicę

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Analogicznie różnicą n-tego rzędu nazywamy różnicę pierwszego rzędu z różnicy $(n-1)$-rzędu, czyli

$$\Delta^n f(n) = \Delta\left[\Delta^{n-1} f(n)\right].$$

Korzystając z transformaty $\mathcal{Z}$ funkcji przesuniętych możemy obliczyć transformatę różnicy pierwszego rzędu.

Wykażemy, że jeżeli transformata $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$, to

$$\mathcal{Z}[\Delta f(n)] = (z-1)F(z) - zf(0).$$

Mianowicie ze wzoru (A.2) wynika, że

$$\mathcal{Z}[\Delta f(n)] = \mathcal{Z}[f(n+1)] - \mathcal{Z}[f(n)] = zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0).$$

Analogicznie przeliczając otrzymujemy wzory

$$\mathcal{Z}[\Delta^2 f(n)] = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - \Delta f(0),$$

Zaś dla różnicy k-tego rzędu otrzymujemy wzór

$$\mathcal{Z}[\Delta^k f(n)] = (z-1)^k F(z) - z\sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f(0),$$

oraz w przypadku zerowych warunków początkowych $\Delta^i f(0) = 0$, dla $i = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$ otrzymujemy wzór na transformatę $\mathcal{Z}$ k-tej różnicy

$$\mathcal{Z}[\Delta^k f(n)] = (z-1)^k F(z).$$

A.4 Transformata $\mathcal{Z}$ splotu funkcji dyskretnych

Definicja A.5. Splotem funkji dyskretnych $f_1(n)$ i $f_2(n)$ nazywamy funkcje dyskretną określoną wzorem

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f_1(n-i) f_2(i).$$

Splot jest przemienny, tzn. $f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n)$.

Można wykazać, że jeżeli $\mathcal{Z}[f_1(n)] = F_1(z)$ oraz $\mathcal{Z}[f_2(n)] = F_2(z)$, to transformata $\mathcal{Z}$ splotu równa się iloczynowi transformat, czyli

$$\mathcal{Z}[f_1(n) * f_2(n)] = F_1(z) F_2(z).$$

A.5 Twierdzenia o wartościach granicznych

Można wykazać, że wartość początkowa $f(0)$ funkcji dyskretnej $f(n)$ spełnia zależność

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

oraz, że wartość końcowa $f(\infty)$ funkcji dyskretnej $f(n)$ spełnia zależność

$$f(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to 1} (z-1) F(z).$$

A.6 Metody wyznaczania oryginału $f(n)$ dla danej transformaty $F(z)$

Najczęściej stosowane są metody

- metoda oparta na twierdzeniu o rozkładzie stosowana w szczególnym przypadku, gdy transformata $F(z)$ jest funkcją wymierną, spełniającą dodatkowe warunki,
- metoda odwrotnego przekształcenia $\mathcal{Z}$ wykorzystująca residua funkcji zmiennej zespolonej z.

Metoda oparta na twierdzeniu o rozkładzie

Rozpatrzmy transformatę funkcji dyskretnej $f(n)$ w postaci funkcji wymiernej

$$F(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

będącą iloczynem dwóch wielomianów. Zakładamy, że stopień wielomianu $L(z)$ równy m, jest nie wyższy od stopnia wielomianu $M(z)$ równego n, $(n \geq m)$ oraz że wielomian $M(z)$ ma pierwiastki z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tylko jednokrotne i różne do jedności.

Wówczas można wykazać, że oryginał $f(n)$ transformaty $F(z)$ wyraża się wzorem

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{L(z_i)}{M'(z_i)} z_i^{k-1}. \tag{A.3}$$

Natomiast w przypadku kiedy wielomian $M(z)$ posiada jeden pierwiastek równy jedności czyli $M(z) = (z-1)M_1(z)$, to

$$f(n) = \frac{L(1)}{M_1(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L(z_i)}{(z_i - 1)(M_1'(z_i)} z_i^{k-1}. \tag{A.4}$$

Przykład A.6. Wyznaczyć oryginał transformaty $Z(z) = \frac{z^2-2}{(z+3)(z-2)}$.

Zastosujemy wzór (A.3). Transformata posiada dwa bieguny jednokrotne $z_1 = 2$ i $z_2 = -3$.

$$\begin{aligned} &L(z)z^{n-1} = (z^2-2)z^{n-1}, \quad &&L(2)2^{n-1} = 2^n, \quad &&L(-3)(-3)^{n-1} = 7(-3)^{n-1}, \\ &M'(z) = (z-2) + (z+3), \quad &&M'(2) = 5, &&M'(-3) = -5. \end{aligned}$$

Stąd

$$f(n) = \frac{2^n}{5} + \frac{7(-3)^{n-1}}{-5} = \frac{2^n}{5} - \frac{7(-1)^{n-1}3^{n-1}}{5},$$

czyli ciąg wartości $f(1) = -\frac{19}{5}$, $f(2) = \frac{31}{5}$, $f(3) = -11$, ...

Przykład A.7. Wyznaczyć oryginał transformaty $Z(z) = \frac{6z^2}{(z-1)(z-3)}$.

Zastosujemy wzór (A.4). Transformata posiada dwa bieguny $z_1 = 1$ i $z_2 = 3$.

$$\begin{array}{lll} L(z)z^{n-1} = 6z^2z^{n-1}, & L(2)2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n+1}, & L(1) = 6, \\ M(z) = (z-1)M_1(z), & M_1(z) = z-2, & M_1(1) = -1, \\ M_1'(z) = 1. & & \end{array}$$

Stąd

$$f(n) = -6 + 6 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-1} = -6 + 6 \cdot 2^{n+1},$$

ciąg wartości $f(1) = 18$, $f(2) = 42$, $f(3) = 90$, ...

Przykład A.8. Wyznaczyć funkcję dyskretną $X(n)$ będącą rozwiązaniem równania różnicowego

$$X(n+2) + X(n) = 0,$$

i spełniającą warunki $X(0) = 1$, $X(1) = 1$.

Oznaczmy przez $\mathcal{Z}[X(n)] = x(z)$ stosując przekształcenie $\mathcal{Z}$ do równania i wykorzystując warunki otrzymujemy

$$z^2x(z) - z^2X(0) - zX(1) + x(z) = 0,$$

stąd

$$x(z)(z^2+1) = z^2 + z,$$

czyli

$$x(z) = \frac{z^2}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1}.$$

Korzystając z tablicy transformat otrzymujemy funkcję dyskretną

$$X(n) = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{2}n.$$

Metoda odwrotnego przekształcenia $\mathcal{Z}$

Przypomnijmy, że oryginał transformaty $\mathcal{Z}$ można wyliczyć za pomocą całki

$$f(n) = \mathcal{Z}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{n-1}dz.$$

Całkę tę można obliczyć korzystając z własności całki funkcji zmiennej zespolonej w przypadku, gdy funkcja $F(z)$ posiada skończoną liczbę biegunów wewnątrz i na brzegu konturu C.

Jeżeli więc funkcja $F(z)$ posiada bieguny z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ w których ma odpowiednio residua, to

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_i}\left[F(z)z^{n-1}\right].$$

Przykład A.9. Wyznaczyć oryginał transformaty $F(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z-4)}$.

Funkcja ta posiada dla $z_1 = 2$ biegun dwukrotny oraz dal $z_2 = 4$ biegun jednokrotny. Stąd

$$\begin{aligned}
f(n) &= \operatorname*{res}_{z=2} \frac{z \cdot z^{n-1}}{(z-2)^2(z-4)} + \operatorname*{res}_{z=4} \frac{z \cdot z^{n-1}}{(z-2)^2(z-4)} = \\
&= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^n}{z-4}\right] + \lim_{z \to 4} \frac{z^n}{(z-2)^2} = \\
&= \lim_{z \to 2} \frac{n \cdot z^{n-1}(z-4) - z^n}{(z-4)^2} + \frac{4^n}{4} \\
&= \frac{n \cdot 2^{n-1}(-2) - 2^n}{4} + \frac{4^n}{4} = \\
&= -\frac{1}{4} n \cdot 2^n - \frac{1}{4} 2^n + 4^{n-1}.
\end{aligned}$$

$f(1) = 0$, $f(2) = 2$, ...

Tablica A.1: Przekształcenie $\mathcal{Z}$

Przekształcenie $\mathcal{Z}$		
1.	$\mathbf{1}(n)$	$\frac{z}{z-1}$
2.	$\mathbf{1}(n)\sin\beta n$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
3.	$\mathbf{1}(n)\cos\beta n$	$\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
4.	$\mathbf{1}(n)e^{an}$	$\frac{z}{z-e^a}$
5.	$\mathbf{1}(n)a^n$	$\frac{z}{z-a}$
6.	$\mathbf{1}(n-1)a^{n-1}$	$\frac{1}{z-1}$

Tablica A.2: Przekształcenie $\mathcal{Z}$ różnic

Przekształcenie $\mathcal{Z}$		
1.	$\Delta f(n)$	$(z-1)F(z)-zf(0)$
2.	$\Delta^2 f(n)$	$(z-1)^2F(z)-z(z-1)f(0)-z\Delta f(0)$
3.	$\Delta^m f(n)$	$(z-1)^mF(z)$ gdy $\Delta^i f(0)=0$ dla $i=1,2,\ldots,n-1$

A.7 Wzory podstawowe przekształcenia $\mathcal{Z}$

Wzory na różnice

1. $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$
2. $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$
3. $\Delta^3 f(n) = f(n+1) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$
4. $\Delta^m[f(n)] = \Delta[\Delta^{m-1} f(n)]$

Wzory na przesunięcia

1. $\mathcal{Z}[f(n+k)] = z^k F(z) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} f(n)z^{k-1}$ – przesunięcie w lewo
2. $\mathcal{Z}[f(n+1)] = zF(z) - zf(0)$

3. $\mathcal{Z}[f(n+2)] = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$
4. $\mathcal{Z}[f(n+k)] = z^kF(z)$ dla $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$
5. $\mathcal{Z}[f(n-k)] = z^{-k}F(z)$ – przesunięcie w prawo, $f(-1) = f(-2) = \ldots = f(-k) = 0$

Przekształcenie odwrotne

Jeżeli $F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$, to

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_i}[F(z)z^{n-1}] \qquad z_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \text{ bieguny } F(z).$$

Dodatek B

Całka powierzchniowa

B.1 Całka powierzchniowa niezorientowana funkcji skalarnej

Rozpatrzmy powierzchnię S gładką o równaniu $F(x, y, z) = 0$. Niech na powierzchni S będzie określona ciągła funkcja $f(M)$, $M(x, y, z)$. Całka powierzchniowa niezorientowana funkcji skalarnej f na powierzchni S jest liczbą określoną symbolem

$$\iint_S f(M)\, ds$$

której istnienie i wartości są wyznaczone przez funkcję f i powierzchnię S. Tradycyjnie można tę całkę zdefiniować jako granicę odpowiedniego ciągu sum całkowych ciągu normalnego podziałów powierzchni, gdy średnica podziału dąży do zera. Jeżeli płat powierzchni S jest określony równaniem $z = g(x, y)$, przy czym $g(x, y)$ jest funkcją ciągłą w jednospójnym obszarze domkniętym D płaszczyzny Oxy i jeżeli D jest jednoznacznym rzutem płata powierzchni S na płaszczyznę $z = 0$, to całkę powierzchniową niezorientowaną funkcji f obliczamy ze wzoru

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \iint_D f[x, y, g(x, y)]\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dxdy$$

często zapisujemy wygodną równość

$$ds = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dxdy.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa $f(x, y, z) = 1$ na płacie S to całka powierzchniowa niezorientowana wyznacza pole płata S, czyli

$$|S| = \iint_S ds.$$

Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ wyznacza gęstość powierzchniową materii rozłożonej na płacie S to całka powierzchniowa niezorientowana z funkcji f wyznacza masę całkowitą płata S.

Przykład B.1. Obliczyć całkę

$$\iint_S (x + y + 2z)\, ds,$$

gdzie S jest częścią płaszczyzny $x + y + z = 3$, dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Przypomnijmy, jeżeli powierzchnia jest o równaniu $z = g(x, y)$, to $ds = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}\, dxdy$ lub $ds = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy$.

Mamy

$$z = 3 - x - y, \quad z_x = -1, \quad z_y = -1,$$

stąd

$$ds = \sqrt{1+1+1}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy, \quad D: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3 - x \end{cases}$$

czyli

$$\iint\limits_S (x+y+2z)\, ds = \iint\limits_D [x+y+2(3-x-y)]\sqrt{3}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (6-x-y)\sqrt{3}\, dxdy = \sqrt{3}\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} (6-x-y)\, dy =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^3 \left[6(3-x) - x(3-x) - \frac{1}{2}(3-x)^2\right] dx = 18\sqrt{3}.$$

Przykład B.2. Obliczyć pole części płata o równaniu $z = \sqrt{x^2+y^2}$, dla $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

$$P = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{2}\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

B.2 Całka powierzchniowa zorientowana składowej normalnej wektora

Rozważmy gładki płat powierzchniowy S o równaniu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Płat ten możemy zorientować rozróżniając dwie jego strony: ujemną i dodatnią. Zorientowanie płata S dokonuje się poprzez ustalenie kierunku wektora prostopadłego do S. W ten sposób w każdym punkcie płata S jest określony wersor $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ o zwrocie zgodnym do wektora prostopadłego do S.

Rozpatrzmy w każdym punkcie płata S wektor

$$\overrightarrow{W}(M) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$$

i utwórzmy iloczyn skalarny

$$\overrightarrow{W} \circ \vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = W_n,$$

gdzie W_n jest rzutem wektora $\overrightarrow{W}$ na kierunek $\vec{n}$.

Całkę powierzchniową zorientowaną oznaczamy symbolem

$$\iint_S \overrightarrow{W} \circ \vec{n}\, ds = \iint_S W_n\, ds = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\, ds.$$

Całka ta wyznacza **strumień wektora** $\overrightarrow{W}$ przez powierzchnię płata S.

Całkę tę można także zapisać w postaci

$$\iint_S W_n\, ds = \iint_S P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy.$$

Całkę tę można obliczyć wyznaczając cosinusy kierunkowe płata o równaniu $z = f(x, y) = 0$ ze wzorów

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

B.3 Postać wektorowa twierdzeń całkowych

Twierdzenie Stokes'a

Niech w pewnym obszarze V jest dana dowolna krzywa K regularna zamknięta oraz wektor $\overrightarrow{W} = [P, Q, R]$, którego współrzędne są funkcjami trzech zmiennych klasy C^1. Wówczas cyrkulacja pola wektorowego po krzywej zamkniętej K jest równa strumieniowi składowej normalnej rotacji tego pola wektorowego $\overrightarrow{W}$ przez zorientowaną dowolną powierzchnię S której brzegiem jest krzywa zamknięta K. Mamy więc równość

$$\oint_K \overrightarrow{W}\, dl = \iint_S (\operatorname{rot}\overrightarrow{W}) \circ \vec{n}\, ds = \iint_S \operatorname{rot}_n \overrightarrow{W}\, ds,$$

gdzie $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ jest wektorem normalnym powierzchni S. Stąd wniosek, jeżeli pole wektorowe jest bezwirowe, czyli $\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = 0$, to cyrkulacja w tym polu po dowolnej krzywej zamkniętej równa się zeru.

Postać analityczna twierdzenia

$$\oint\limits_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_S [(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma]\,ds,$$

gdzie $R_y = \frac{\partial R}{\partial y}$ itd. odpowiednie pochodne cząstkowe.

Szczególnym przypadkiem twierdzenia Stokes'a jest twierdzenie Greena na płaszczyźnie. Dotyczy ono przypadku, gdy mamy krzywą płaską L zamkniętą, zorientowaną dodatnio i ograniczającą obszar jednospójny D przy czym w obszarze jest dany wektor $\overrightarrow{W} = [P, Q]$, którego współrzędne są funkcjami dwóch zmiennych klasy C^1 w obszarze D i na brzegu L. Wówczas zachodzi równość

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D [Q_x - P_y]\,dxdy.$$

Jeżeli wyrażenie $P\,dx + Q\,dy$ jest różniczką zupełną to $Q_x = P_y$, tym samym cyrkulacja w takim polu wektorowym jest równa zeru.

Przykład B.3. Obliczyć cyrkulację pola wektorowego $\overrightarrow{W} = [x, y, z]$ wzdłuż krzywej zamkniętej C będącej brzegiem trójkąta S o wierzchołkach

$$A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \quad C(0, 0, a)$$

zorientowanym zewnętrznie ($\cos\gamma > 0$).

Płat jest częścią płaszczyzny o równaniu

$$x + y + z - a = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a - x.$$

Twierdzenie Stokes'a

$$\oint\limits_C \overrightarrow{W}\,dl = \iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{W} \circ \vec{n}\,ds,$$

czyli

$$\oint\limits_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = \iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{W} \circ [\vec{n}]\,ds = 0,$$

ponieważ $\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = 0$, gdzie

$$\overrightarrow{N} = [1, 1, 1], \quad \vec{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradskiego

Niech będzie dany obszar V wypukły ograniczony zamkniętą gładką powierzchnią S zorientowaną zewnętrznie oraz wektor $\overrightarrow{W} = [P, Q, R]$, którego współrzędne są funkcjami trzech zmiennych klasy C^1 w obszarze V wraz z brzegiem S.

Wówczas strumień wektora pola $\overrightarrow{W} = [P, Q, R]$ przez zamkniętą powierzchnię S jest równy całce potrójnej z dywergencji wektora pola $\overrightarrow{W}$ rozciągniętej na obszar V.

$$\iint_S \overrightarrow{W} \circ \vec{n}\, ds = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{W}\, dV.$$

Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest, że jeżeli pole $\overrightarrow{W}$ jest w obszarze V bezźródłowe, czyli $\operatorname{div} \overrightarrow{W} = 0$, to strumień przez powierzchnię zamkniętą S ograniczającą obszar V jest równy zeru.

Przykład B.4. Korzystając z twierdzenia Ostrogradskiego obliczyć strumień wektora $\overrightarrow{W}$ przez powierzchnię zamkniętą S będącą brzegiem obszaru V zorientowaną zewnętrznie.

$$\overrightarrow{W} = [xz, x^2y, y^2z]$$

$$V: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le z \le x^2 + y^2.$$

Korzystamy ze wzoru

$$\iint_S V \cdot n\, ds = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{W}\, dxdydz.$$

$\operatorname{div} \overrightarrow{W} = z + x^2 + y^2$, stąd

$$I = \iiint_V (z + x^2 + y^2)\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} [z + (x^2 + y^2)]\, dz =$$
$$= \iint_D \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2\right] dxdy = \frac{3}{2} \iint_D (x^2 + y^2)^2\, dxdy,$$

wprowadzamy współrzędne biegunowe

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad dxdy = r\, dr, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 1.$$

Stąd

$$II = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \cdot r\, dr = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\pi.$$

Dodatek C

Wybrane problemy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

C.1 Równania różniczkowe cząstkowe

Liniowym niejednorodnym równaniem różniczkowym cząstkowym rzędu drugiego z niewiadomą funkcją $u(x,y)$ nazywamy równanie postaci

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + g(x,y) = f(x,y)$$

Jeżeli dla (x,y) w pewnym obszarze D, funkcja $f(x,y) = 0$, wówczas równanie jest równaniem jednorodnym.

Rozróżnia się trzy typy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego:

typ hiperboliczny jeżeli $B^2 - AC > 0$ dla $(x,y) \in D$

typ paraboliczny jeżeli $B^2 - AC = 0$ dla $(x,y) \in D$

typ eliptyczny jeżeli $B^2 - AC < 0$ dla $(x,y) \in D$

W zastosowaniach typy: hiperboliczny i paraboliczny opisują zazwyczaj zjawiska fizyczne zależne od czasu. Wówczas funkcję niewiadomą u zapisuje się w postaci $u(x,t)$, gdzie x – zmienna bieżąca, zaś t – zmienna czasu.

Zagadnieniem granicznym dla równania różniczkowego cząstkowego jest zagadnienie polegające na znalezieniu funkcji klasy C^2, będącej rozwiązaniem równania cząstkowego wewnątrz pewnego obszaru i spełniającą na brzegu tego obszaru dodatkowe warunki zwane warunkami granicznymi.

Warunki graniczne mogą być początkowe i brzegowe.

Zagadnienie graniczne, w którym występują jedynie warunki początkowe nazywa się zagadnieniem Cauchy'ego. Takie zagadnienie formułuje się następująco:

- dla równania typu parabolicznego z niewiadomą funkcją $u(x,t)$ w postaci:

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$$

- dla równania typu hiperbolicznego z niewiadomą funkcją $u(x,t)$ w postaci:

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$$

Jeżeli obszar D jest ograniczony, to na brzegu S tego obszaru można sformułować różne warunki brzegowe. Najczęściej są to warunki:

Dirichleta postaci $u(P) = g(P)$, gdzie $P \in S$

Neumanna postaci $\frac{du}{dn}(P) = g(P)$, gdzie $P \in S$, oraz $\frac{du}{dn}$ jest pochodną kierunkową w kierunku wektora normalnego zewnętrznie zorientowanego względem obszaru D.

Metoda rozwiązywania postawionego zagadnienia brzegowego dla równania cząstkowego zależy od typu równania.

W zastosowaniach najczęściej występują równania cząstkowe postaci:

1. Typ hiperboliczny z niewiadomą funkcją $u(x,t)$ (lub $u(x,y,t)$)

   równanie falowe $u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = f(x,t)$ (lub $\nabla^2 u - \frac{1}{a^2}u_{tt} = f(x,y,t)$)

2. Typ paraboliczny z niewiadomą funkcją $u(x,t)$ (lub $u(x,y,z,t)$)

   równanie przewodnictwa cieplnego $u_{xx} - u_t = f(x,t)$
   (lub $\nabla^2 u - u_t = f(x,y,t)$)

3. Typ eliptyczny z niewiadomą funkcją $u(x,y)$ (lub $u(x,y,z)$)

   równanie Laplace'a $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (lub $\nabla^2 u = 0$)

Bibliografia

[1] Krysicki, W., Włodarski, L. *Analiza Matematyczna w Zadaniach, cz. I, cz. II.* PWN, Warszawa 2002.

[2] Leitner, R., Matuszewski, W., Rojek, Z. *Zadania z Matematyki wyższej, cz. I, cz. II.* PWN, Warszawa, 1994, 1999.

[3] Łubowicz H., Wieprzkowicz B. *Matematyka : podstawowe wiadomości teoretyczne i ćwiczenia dla studentów studiów inżynierskich* OW PW, Warszawa, 2006.