

§. 64. Niech będą trzy różne miejsca A , B , C , których odległości wzajemne AB , AC , BC , z poprzedzających działań są wiadome; chciałibyśmy wiedzieć, jakie są tych miejsc odległości, względem iakiegokolwiek podług upodobania obranego na gruncie punktu X , od którego trzy owe wiadome miejsca widzieć, i kąty pod któremi też przedmioty widzimy, uważać można.

Tab. 4. PRZYPADEK I. Gdy punkt obrany x ,
Fig. 47. znajduje się na jednym boku wiadomego trójkąta ABC .

1. Z punktu obranego x , wymierzywszy kąt AxC , tém samém mieć będziemy wiadomy i drugi kąt BxC , iako spełniający pierwszy do 180° . Zatem w trójkącie AxC mając z założenia wiadomy bok AC z kątem Cx , kąt zaś AxC z poprzedzającego dopiero wymiaru; łatwo wyrachujemy boki Cx , Ax , podług przypadku 1. §. 52. będzie zatem $AB - Ax = xB$.

Tab. 4. PRZYPADEK II. Gdy punkt obrany x ,
Fig. 48. znajduje się na przedłużeniu jednego z boków wiadomego trójkąta ABC .

Naprzód wyznaczą wielkość kąta BxC , potem wiadomy kąt ABC odejmiemy od 180° , reszta pozostała będzie ważnością kąta CBx : tak więc w trójkącie CBx , mając wiadome wszystkie kąty i bok BC , będzie można wyznaczyć przez rachunek dwa in-

ne boki Bx , Cx , podług przypadku 1. §. 52. Wyznaczywszy tym sposobem przez rachunek odległości Bx , Cx , abyś nazna-
czył na mapie położenie punktu szuka-
nego x , względem przedmiotów A , B , C ;
z punktów B , C . iako od środków, pro-
mieniami wyrównyującami z podziałki
odległościom wyrachowanym Bx , Cx , na-
kręśł łuki; przecięcie się tych łuków na-
kręślonych oznaczy położenie punktu szu-
kanego x .

PRZYPADEK III. Gdy punkt obrany X , Tab. 6.
znayduje się zewnątrz wiadomego trójką- Fig. 61.
ta ABC , i jest przeciwległy albo kątowi 62.
iakiemu, iak na Fig: 61. kątowi A , albo
też któremu bokowi tegoż trójkąta, iak
Fig: 62. bokowi BC .

Zmyślmy sobie, iakoby przez punkt X ,
iako też przez dwa względem siebie nay-
odlegleysze trójkąta wierzchołki B i C ,
okrąg koła był nakręślony, potem przez
punkta A , X , przeciągniemy myślą linią
prosta AX , przedłużając ją aż do spotkania
się z okręgiem koła w jakim punkcie D .
Naoftatek wyciągnawszy cięciwy BD , CD ;
będzie kąt $DBC = DXC$, a kąt $DCB =$
 BXD ; podobnież będzie kąt $BDX = BCX$,
kąt zaś $XDC = XBC$, a to dlatego, iż ka-
żde dwa z pomienionych kątów, wierzchoł-
ki swe mają na okręgu, i ramionami swe-
mi na jednymże łuku się opierają. Stąd

wynika, iż zadanie to dwoma następującymi sposobami ułatwione być może.

Jeometrycznie. 1. Wykreśliwszy na papierze wiadomy trójkąt BAC , zrobmy przy C kąt BCD , równy kątowi BXA , uważanemu na X , zaś przy B , kąt CBD równy drugiemu kątowi AXC , także uważanemu na X . 2. Zrysujemy koło, któregooby okrąg przechodził przez trzy punkta B, D, C . 3. Przez punkta D, A , wyciągniemy linią DA , przeciągając ją za punkt A , aż do zniścia się z okręgiem koła: natenczas punkt ten, gdzie się przeciągnięta linia zniydzie z okręgiem, oznaczy położenie punktu szukanego X .

Dla wynalezienia położenia punktu X , niekoniecznie potrzeba rzeczywiście opisywać koło, któregooby okrąg przechodził przez trzy punkta B, X, C . Położenie iego, na fundamencie wyżej wspomnionym, wyznaczona być może w sposób następujący: Zrobiwszy kąt $DBC = DXC$, tudzież kąt $DCB = DXB$, nadto przeciągnąwszy linią DA , aż ku X , gdy potem zrobisz kąt $BCX = BDX$, i drugi $CBX = CDX$: natenczas punkt X przecięcia się ramion BX, CX , z linią DA przedłużoną, będzie oznaczał położenie punktu obranego X .

Trygonometrycznie. 1. W trójkącie BCD mamy wiadomy bok BC z założenia, kąty zaś BCD, DBC przy tymże boku leżące są równe kątom uważanym na punkcie

kie X , więc dóydziemy boku BD , podług przypadku 1. §. 52.

2. W trójkącie DBA mając wiadomy bok BD z poprzedzającego rachunku, a bok BA z założenia; mając prócztego wiadomy kąt DBA , między temiż ramionami zawarty, któryto kąt na Fig: 61, równy iest kątowi $DBC + CBA$, a na Fig: 62. kątowi $DBC - ABC$; łatwo więc dóydziemy ważności kąta BDA , podług przypadku 3, §. 52.

3. Daley, w trójkącie BCX , bok BC , iest dany, kąt $BCX = BDX$ na fundamencie wyrażonym w przypadku 3^{cim}, do tego kąt BXC równy dwóm kątom uważanym na punkcie X ; zatém nie tylko dóydziemy ważności kąta CBX , ale też obrachować możemy dwa inne boki BX , CX , podług przypadku 1. §. 52.

4. Naostatek gdy na Figurze 61. odejmiesz kąt CBA od CBX , a na Figurze 62. dodasz kąt CBA , do CBX , będziesz miał w obudwóch razach ważność kąta ABX . Zatém w trójkącie ABX , mając wiadome dwa boki AB , BX , oraz dwa kąty ABX , i AXB , łatwo obrachować można bok AX , podług przypadku 1. §. 52.

PRZYPADEK IV. Gdy punkt obrany X . Tab. 7. znajduje się wewnątrz wiadomego tróy-Fig. 64. kąta ABC .

Na obraném stanowisku X , wyznaczwszy kąty AXB , AXC , wystawmy sobie jak w przypadku poprzedzającym, iakoby

przez punkta B , C , X , okrąg koła był opisany: potem wyciągniemy myślą linią AX , przeciągając ją do zniścia się z okręgiem koła, iak tu w punkcie D : naostatek poprowadźmy cięciwy BX , CX , BD , CD . To zrobiwszy, będzie kąt BXD , spełnieniem jednego wyznaczonego kąta AXB , kąt zaś CXD , spełnieniem drugiego wyznaczonego kąta CXA : że zaś kąt BXD , równy BCD , bo wierzchołki swe mają na okręgu, i ramionami swemi na iednymże opierają się łuku, a kąt CXD , równy CBD , dla téż samey przyczyny; zatem kąt BCD , iest także spełnieniem kąta AXB , kąt zaś CBD spełnieniem kąta AXC , a że kąty AXB , AXC , są wiadome z poprzedzającego wymiaru, przeto i kąty BCD , CBD , iako spełnienia tamtych będą także wiadome: stąd położenie punktu X , dwoma następującemi sposobami oznaczone bydz może.

Geometrycznie. 1. Po wykrésleniu na papierze trójkąta wiadomego ABC , zrób kąt BCD , równy spełnieniu kąta AXB , a drugi CBD , równy spełnieniu drugiego kąta CXA : przecięcie się ramion BD , CD , wykrészonych kątów, oznaczy ci położenie punktu D .

2. Opisawszy okrąg koła przez trzy punkta B , C , D , wyciągnij linią prostą AD , natenczas punkt X , w którym, wyciągnięta linią przetnie okrąg koła, będzie ozna-

echał położenie punktu obranego X . względem trzech wiadomych przedmiotów A, B, C .

Jeżeli byś i w tym przypadku chciał uniknąć opisywania okręgu koła przez trzy punkta B, C, D ; tedy wyznaczysz punkt D , iak się dopiero powiedziało, połączniy linią prostą AD , potem zrób kąt $XBC = ADC$, i drugi $XCB = ADB$; a tak punkt X , przecięcia się ramion wykreślonych kątów, oznaczy położenie punktu obranego.

Trygonometrycznie. 1. W trójkącie BCD , są wiadome kąty CBD, BCD , z bokiem BC , zatem wyrachować można bok BD , podług przypadku 1. §. 52.

2. W trójkącie ABD , mając wiadome boki AB, BD , z kątem $ABC + CBD$, czyli z kątem ABC , między temiż ramionami zawartym; dóydziesz kątów BDA, BAD , podług przypadku 3. §. 52.

3. W trójkącie BCX masz teraz wiadomy kąt XCB , bo ten jest równy kątowi BDX : kąt zaś $BXC = 360^\circ - AXB - AXC$, prócztego masz wiadomy bok BC ; przeto wyrachować można boki BX, CX , podług przypadku 1. §. 52.

4. W trójkącie AXB , mając wiadome dwa boki AB, BX , z dwoma kątami AXB, BAX , łatwo dóydziesz ważności boku AX , podług przypadku 1. §. 51.

Tab. 6. PRZYPADEK V. Gdy wiadome trzy punkta B, A, C, w linii prostej znajdują się położone.
Fig. 63.

Przez odleglejsze punkta B, C, iako też przez punkt szukany X, zmyśliwszy sobie opisane okóło, i linią AX przedłużywszy aż ku D; gdy potem poprowadzimy linie BD, BX, CD, CX; będzie kąt $BXD = BCD$, a kąt $CXD = CBD$, dla teyże samey przyczyny co wyżej: zatem

Jeometrycznie. 1. Wykreśliwszy kąt BCD, równy kątowi wymierzonemu BXD, i drugi CBD, równy drugiemu kątowi także wymierzonemu CXD; przecięcie się ramion wykreślonych kątów, da położenie punktu D,

2. Przez trzy punkta B, D, C, opisz koło, potem zrysuy linią DA, przeciągając ją ku X. ten punkt będzie punktem szukanym.

Niechcąc opisywać okręgu koła przez trzy rzeczone punkta, można sobie postąpić sposobem wyrażonym w przypadku trzecim.

Trygonometrycznie. 1. W trójkącie BDC, mając wiadomy bok BC, z dwoma kątami temuz bokowi przyległemi, bo one są równe kątom uważanym na X; można dóysdź boków BD, CD, podług przypadku 1. §. 32.

2. W trójkącie BDA , z wiadomych boków BD , BA ; i kąta między temiż bokami zawartego, wyrachujesz kąt BDA , podług przypadku 3. §. 52.

3. Dotego w trójkącie DBX , mając wiadome wszystkie kąty, wraz z bokiem BD ; łatwo dóysdź można ważności boku BX , podług przypadku 1, §. 52.

4. Naostatek, w trójkącie BCX , z wiadomych dwóch boków BC , BX , tudzież z zawartego między temiż ramionami kąta CBD , który iest równy DBX — DBA , dóydzimy boku CX ; w trójkącie zaś BAX , wyrachuiemy bok AX .

§. 65. *Sposób przyprowadzenia kąta do swego prawdziwego wierzchołka, czyli sposób poprawienia kąta, który był mierzony nie na właściwém stanowisku.*

Przygotowanie. W działaniach Trygonometrycznych często przytrafiać się zwykło, iż chcąc wymierzyć kąt iaki, nie można ustawić narzędzia nad wierzchołkiem tegoż kąta, z przyczyny znaydującey się przy wierzchołku iego iakowey przeszkody. Tak np. mając z poprzedzających działań wyznaczoną odległość dwóch punktów P , R , z których ieden np. P iest słup, drzewo, kolumna, wieża, krzyż, wierzchołek dachu, budynku i t. d. gdybyśmy potem tę wiadomą odległość PR , wzięli za nową podstawę, aby z jey końców wyznaczyć położenie innego iakiego niewiadomego przedmiotu Q ; oczywista iest, iż dla wymierzenia kąta QPR

Tab. 6.
Fig. 66.

nie moglibyśmy ustawić narzędzia nad wierzchołkiem kąta szukanego, z przyczyny znajdującey się tam przeszkody, to jest, nie można by ustawić instrumentu na słupie, drzewie, kolumnie, i t. d.

W takowym tedy razie pospolicie obierać się zwykł za stanowisko inny punkt iaki, np. C, iak można naybliższy wierzchołka kąta mającego się wymierzyć. Wszakże iawną rzeczą jest, iż na tém przybraném stanowisku wymierzony kąt, nie będzie oznaczał prawdziwey ważności kąta szukanego, ale tylko ważność kąta innego fałszywego; i różnica między temi dwoma kątami, tém większa zachodzić będzie, im przybrane stanowisko jest odlegleysze od wierzchołka kąta prawdziwego, tudzież im krótsze są ramiona jego. Szukano zatem sposobu, aby z wyznaczonego kąta fałszywego, dóysdź prawdziwey ważności kąta szukanego: Działanie takowe nazywać się zwykło: *Reductio anguli ad centrum*, to jest, przyprowadzenie kąta do środka, czyli do prawdziwego swego wierzchołka, dlatego, że środek narzędzia użytego do wymiaru kąta, nie nad wierzchołkiem wymierzonego, ale nad wierzchołkiem szukanego powinien był być ustawiony. Lubo zaś ustawienie narzędzia, czyli raczey obieranie punktu stanowiska, rozmaite mieć może położenie względem wierzchołka prawdziwego kąta; iednakże w sześciu następujących przypadkach zawarte być może.

Tab: 6.

Fyg: 96

Nro 1.

1. Gdy kątomierz ustawia się na iednym z ramion kąta, którego ważności szukamy, iak np. na punkcie C. ramienia PB, kąta APB. W tym razie kąt wyznaczony ACB. będąc zewnętrznym względem trójkąta APC,

jest równy dwóm kątom wewnętrznym na przeciwko niego położonym A i P , a tém samym większy od kąta prawdziwego P : zatem aby mieć ważność kąta szukanego P , trzeba od kąta wyznaczonego ACB , odciągnąć kąt A , to jest: $P = ACB - A$,

2. Jeżeli kątomierz ustawia się na przedłużeniu iednego z ramion kąta, np. na punkcie C , znajdującym się na przedłużeniu ramienia BP ; wtym razie kąt prawdziwy P iako zewnętrzny względem trójkąta ACP , będzie równy summie dwóch kątów wewnętrznych A , C , naprzeciwko niego położonych: Więc aby mieć ważność kąta APB , trzeba do kąta znalezionej ACB , dodać kąt A , czyli $APB = C + A$.

3. Jeżeli punkt stanowiska C , znajduje się wewnątrz ramion kąta APB , natenczas dwa kąty wewnętrzne A i o , równe są kątowi zewnętrznemu n , kąty zaś B i s , drugiemu kątowi zewnętrznemu m : więc $n + m$, czyli kąt cały ACB , równa się summie kątów $A + o + B + s$. Zatem $m + n - A - B = o + s = P$, to jest, żeby mieć ważność kąta prawdziwego APB , trzeba od kąta wyznaczonego ACB , odjąć summe kątów A i B .

4. Jeżeli punkt stanowiska C , znajduje się zewnątrz ramion prawdziwego kąta APB ; będzie $A + n = o$, zaś $B + m = s$. Zatem $A + n + B + m = o + s = P$, czyli: aby kąt

Tab. 6.

Fig. 65.

Nro 2.

Tab. 6.

Fig. 65.

Nro 3.

Tab. 6.

Fig. 65.

Nro 4

znaleziony ACB, wyrównywał kątowni szukanemu, trzeba do kąta ACB, przydadź sumnę kątów A i B.

Tab. 6. 5. Gdy kątomierz ustawia się na C, obok prawego ramienia PB. kąta APB; w tym razie $A + P = 0$, tudzież $B + C = 0$, więc $A + P = B + C$, zatem będzie $P = C + B - A$. To jest, aby mieć ważność kąta APB, trzeba do kąta wymierzonego C, przydadź kąt B, leżący na prawey stronie, potem dopiero od tey summy odciągnąć kąt A.

Tab. 6. 6. Naostatek, jeżeli kątomierz ustawia się na C, obok lewego ramienia kąta BPA; będzie tak iak pierwey, $A + C = 0$, tudzież $B + P = 0$, zatem $A + C = B + P$, więc $C + A - B = P$. Zatem do kąta uważanego C, przydawszy kąt A, i od tey summy odiawszy kąt B; reszta pozostała będzie ważnością kąta szukanego P.

W dwóch przypadkach ostatnich na to szczególniejszą baczność mieć należy, iż aby mieć kąt szukany, trzeba do kąta wymierzonego na stanowisku przybranem, przydadź ten kąt, który z tey samey strony leży co i stanowisko, a odciągnąć drugi, z przeciwney strony leżący.

Z tych wszystkich wyłożonych dopiero przypadków oczywiście się pokazuje, iż cała robota do tego się ściaga, aby wynaleźć ważność kątów CAP, CBP, Fig. 65. albo Fig. 66. kątów FQP; DRP, gdyż iakośmy widzieli, za

dołączeniem lub odjęciem ich od kąta na niewłaściwym stanowisku wymierzonego, dochodzi się ważności kąta szukanego. Należy więc wiedzieć jakim sposobem znaleźć można ważność pomienionych kątów.

PRZYKŁAD. *Daymy, że podług założenia wyższego, potrzeba wyznaczyć położenie punktu Q, względem końców wiadomey linii PR, (i niech na iednym końcu teyże wiadomey linii np. P. znadnie się przeszkoda, dla której nie można ustawić narzędzia nad wierzchołkiem kąta RPQ; natenczas:*

Tab. 6
fig. 66

1. Podług wyłożonych dopiero przypadków, iak tu podług przypadku 6go, obrawszy iakie miejsce C, po lewey stronie boku PR, wymierz kąt QCR. Potem od punktu prawdziwego P. spuść linie prostopadłe PD, PF, na ramiona kąta fałszywego QCR, albowi też na przedłużenia tychże ramion, ieśli tego będzie wymagała potrzeba. Naostatek wymierzwszy długości linii prostopadłych PD, PF, wyznacz ważność kąta QRP, sposobem pospolitym, gdyż nad wierzchołkiem iego R, żadney nie kładziemy przeszkody.

2. Zakończywszy takowe wymiary, w trójkącie PQR, masz wiadomy bok PR z założenia; tudzież dwa kąty temuż bokowi przyległe, ieden prawdziwy R, a drugi fałszywy, to jest: QCR, wymierzony zamiast kąta prawdziwego RPQ; za-

tém podług przypadku 1. § 52. dójdiesz dwóch innych boków PQ, RQ, ważności, lecz ważności nierzetelney, bośmy iey, iako się dopiero mówiło, dochodzili podług iednego kąta prawdziwego, to iest kąta PRQ, i podług drugiego fałszywego kąta RCP, wziętego za kąt prawdziwy a niewiadomy QPR. Maiąc tak, lubo niedokładną długość boków PQ, RQ, dalszą robotę odprawisz iednym, z dwóch następujących sposobów.

To iest: w trójkącie prostokątnym QFP, mając wiadome boki FP, PQ, dójdź ważności kąta FQP, a to podług przypadku 2go §. 50. Podobnież, podług tegoż samego przypadku, w drugim trójkącie prostokątnym RDP, mając wiadome boki PD, PR, dójdź ważności kąta DRP.

Albo też. Doszedłszy ważności dwóch boków PQ, RQ, iako się dopiero pod liczbą 2gą o tém powiedziało; zważ, iż. ponieważ odległości PQ, PR, są zawsze bardzo wielkie względem prostopadłych PF, PD, przeto te ostatnie długości, to iest: prostopadłe PF, PD, mogą bydz uważane, iako łuki kół, których promieniami byłyby odległości PQ, PR. Tym sposobem uważając pomienione długości iedne względem drugich, można bez pomocy tablic Logarytmowych dóysdz ważności kątów FQP, PRD, w trójkątach prostokątnych QFP, RDP.

Wiadomo z Jeometryi, że gdy promień koła ma 7 części, natenczas obwód tegoż koła zamykać będzie tychże części okóło 44; na tym więc fundamencie łatwo wyrachować można, ile razy promień zamyka w sobie długość stopnia, a to następującą układając proporcją: Jeżeli 44 części, które w sobie mieści obwód, są długością 360 stopni; ileż tychże stopniów zamykać się będzie w częściach 7, które się znajdują w promieniu? dokonawszy proporcyi znajdziesz wyraz czwarty okóło $57^{\circ} \frac{3}{11}$.

Daymy teraz, że długość PR, wiadoma z założenia, ma 600 miar, prostopadła $PD = \frac{3}{4}$, znajdziesz ważność kąta DRP; z następującey proporcyi: Jak się ma długość czyli promień $RP = 600$, do długości $57^{\circ} \frac{3}{11}$, czyli do promienia obróconego na stopnie; tak się ma $\frac{3}{4}$ długość prostopadłej czyli łuku PD, do ważności kąta DRP. Wyraz czwarty wyrachowany pokaże, iż kąt szukany DRP, zawiera okóło 4 minut pierwszych i 18 drugich. Podobnie gdyby długość boku PQ, wypadła była z obrachunku Nro 2 odprawionego, np. 800 miar, tudzież gdyby prostopadła odpowiadająca PF, zawierała w sobie $1\frac{1}{2}$, znalazłbyś podług tey samey proporcyi, że kąt FQP ma 6 minut pierwszych i 27 drugich.

3. Obrachowawszy już, iednym z dwóch wyłożonych dopiero sposobów, ważność

tów FQP, DRP, gdy podług przypadku 6go §. 65. do kąta PCR przydasz kąt FQP, a od tej summy odejmiesz kąt DRP, reszta pozostała, będzie okazywać ważność kąta szukanego RPQ. J tak założywszy, iż ważność kąta QCR okazała się z poprzedniego pomiaru 76° , a ważność kątów FQP, DRP, wzięwszy taką, iaka się okazała z rachunku. drugim sposobem odprawionego; gdy do 79° , przydasz ważność kąta FQP, to jest, $6' \ddagger 27''$; a od summy $79^{\circ}, 6' 27'$, odejmiesz kąt DRP, to jest, $4' \ddagger 18''$, reszta pozostała $79^{\circ} 2' 9''$, będzie ważnością kąta prawdziwego QPR.

Jeżeliby i przy wierzchołku kąta R, znajdowała się iakowa przeszkoda, natenczas wymierzyszy go z innego iakiego punktu; uczyniłbyś naprzód obrachunek trójkąta PRQ, podług boku wiadomego PR, i dwóch kątów fałszywych temuż bokowi przyległych; potem dochodziłbyś tak iak pierwey ważności kąta R.

4. Naostatek doszedłszy tym sposobem prawdziwey ważności kątów; uczynić potrzeba raz ieszcze obrachunek boków PQ, RQ. Trójkąta PQR, a to podług boku wiadomego PR, i znalezioney prawdziwey ważności kątów P i R. lubo i na pierwszym obrachunku częstokroć przedstawiać się zwykło.

Ściśle biorąc, oba wyłożone sposoby dochodzenia ważności kąta nie na właściwym stanowisku uważanego, nie dadzą nigdy dosko-

nale prawdziwéy tegoż kąta ważności; wszakże, -ponieważ pochodzące stąd większe lub mnieysze uchybienie (a które naywięcej do dwóch lub trzech minut pierwszych i kilkanaście drugich się rozciąga), zawisło od większey lub mnieyszey odległości kątomiaru od wierzchołka kąta prawdziwego; zatém w podobney robocie starając się zawsze o to, aby kątomiar iak naybliżej wierzchołka kąta prawdziwego był ustawiany; można bez wszelkiej obawy znakomitey iakowey omyłki, na obudwu owych sposobach przestać i w używaniach pospolitych mieć ie za dostarczająco doskonałe.

Do spuszczenia prostopadłych PD, PF. pospolicie używa się dużej węgielnicy od cieśli i mularzy używaney, albowi też laski długiey na stopę i cale wydzieloney. Czasem położenie prostopadłej samém okiem miarkować się zwykło. Aby zaś mieć iakową linią, iak np. CR, na którąby padała prostopadła spuszczona; dosyć jest, postawiwszy wprost punktów C, i R, kazać tak rozciągać sznur, aby ile możności znajdował się w kierunku CR. i dopiero do sznura rozciągniętego spuszczać linią prostopadłą. A lubo tym sposobem o jeden lub dwa cale nchybić można, wszelako gdy boki zawierające kąt szukany, są znaczney długości, uchybienie owo żadney w kącie znakomitey omyłki nie sprawi. Większa zatém lub mnieysza dokładność, w spuszczeniu linii prostopadłych, zawisła od mnieyszey lub większey długości ramion, między któremi zawiera się kąt przedsięwzięty do poprawy.
