

*Tab. 8. §. 81. Niech będzie dany trójkąt AfB, Fig. 80. do rozdzielenia na 4 równe części, przez linie równoległe ścianie AB.*

1. Z boku Af, który np. jest długi sznurów 52, zrób kwadrat 2704: a ponieważ chcesz mieć podzielony trójkąt na 4 równe części, weź zatem onego kwadratu część czwartą 676, i z części wziętej wyciągnij kwadratowy pierwiastek, który tu będzie 26. Naoftatek wzięwszy z podziałki części równych 26, wyznacz ie na boku Af, od f, np. do C, i przez koniec podziału wyciągnij linią CD, równoległą do podstawy AB, tak będziesz miał wydzielony trójkąt Cfd, równy czwartey części danego trójkąta AfB.

2. Abyś wydzielił drugą część żadaną w tymże trójkącie AfB, weź kwadratu 2704. dwie czwarte części, to jest 1352, z tych wyciągnij kwadratowy pierwiastek około  $36^{\circ}7'6''$ . okaże, ile masz z podziałki przenieść na bok Af, od f. np. do G a gdy przez punkt G, wyciągniesz do AB, równoległą GK; będziesz miał czworokąt CDGK, równy drugiey czwartey części trójkąta AfB.

Podobnież dla wydzielenia części trzeciej, weźmiesz z kwadratu 2704, trzy czwarte części, to jest 2028: tych kwadratowy pierwiastek około  $45^{\circ}3''$ , przeniesiony z podziałki na bok fA, od f, do M,

wyznaczy ci punkt M, przez który poprowadzona linia MN, równoległa do AB, oddzieli nowy czworokąt GKMN, równy 3ciey, 4tey części trójkąta AfB: a tém samem reszta pozostała MNAB, równa będzie czwartey szukaney części tegoż danego trójkąta AfB.

Działanie to zasada się na tey własności figur, a w szczególności trójkątów podobnych, iż te mają się do siebie jak kwadraty wystawione na ich bokach odpowiadających.

§. 82 *Grunt czworościenny podzielić na kilka lub kilkanaście części równych, Tab. 8. z tym warunkiem, aby wszystkie wydzielone części, przypierały do iednego punktu wyznaczonego na obwodzie, lub wewnątrz tegoż gruntu. Fig. 79.*

*Sposób pierwszy.* Niech będzie równoległobok MNLK, dany do podzielenia na 6 równych części.

1. Podziel grunt dany na dwie równe części przez linią OP, robiąc MP równe KO: natenczas jeżeli liczba części, na które grunt dany ma być wydzielony jest parzysta; tyle ich zamykać się będzie w jedney co i drugiey połowie, to jest linią OP, będzie ich granicą. Jeżeli zaś liczba części mających się wyznaczyć jest nieparzysta, w tym razie linia OP podzieli na



połowę część średnią między owemi częściami nieparzystymi.

2. Podług §. 74, powierzchnia równoległoboku MK, równa się liczbie wynikającej z rozmnożenia podstawy MN, czyli KL, przez wysokość MJ; więc aby mieć część szóstą téżże powierzchni, trzeba wysokość MY, pomnożyć przez część szóstą podstawy MN; zatem część szóstą podstawy MN, jest połową podstawy trójkąta POQ, który my tu kładziemy byź równym szóstey części równoległoboku KM.

Stąd wynika, iż aby mieć punkta podziałów przypadających na podstawę NM  $= 81$ , trzeba ją *naprzód* podzielić na tyle części równych, ile ich grunt dany do podziału zamykać powinien. *Powtóre*: jeżeli liczba części mających byź wydzielonemi jest <sup>nie</sup>parzysta; potrzeba wziąć na podziałce tyle części równych, ile ich zamyka część szóstą podstawy MN, a wyznaczwszy je na téż podstawie, raz od P, do *u*, drugi od P, do *x*, poprowadzić linie Ou, Ox: tak robi się trójkąt uOx, wyrównywający części średniej między owemi częściami nieparzystymi. Teraz abyś wyznaczył inne punkta podziałów przypadających na téż podstawę MN, obeymiy cyrklem całkowitą podstawę *xu*, i przenieś ją po obu stronach wzdłuż podstawy MN, od *u*, ku M, i od *x*, ku M, tyle razy ile to będzie można uczynić.

Gdy zaś liczba podziałów, iak w tém zadaniu, iest parzysta, natenczas część szóstą podstawy MN, to iest  $\frac{81}{6} = 13\frac{1}{2}$  podwoiwszy; weź z podziałki tyle części, ile ich owa część szóstą podwoiona zamyka, iak tu 27, i części tak wzięte naznacz od P. do Q, i od Q do R: potém wyciągnąwszy linie OR, OQ, będziesz miał jedną połowę równoległoboku KM, wydzieloną na 3 części równe. QOP, QOR i NRKO.

3. Aby mieć dalsze punkta podziałów przypadających na bok LM, przyległy temu bokowi, na który przypadły punkta podziałów pierwszych; pomnóż MN, przez ML, to iest 81 przez 48 wieloczyn  $MN \times LM = 3888$ , z tego rozmnożenia wypadający, lubo iest większy od prawdziwey powierzchni równoległoboku MK, (gdyż bok ML, czyli NK, iest dłuższy od prostopadłej wysokości MY); mimo tego weźmiemy ią za prawdziwą powierzchnią tegoż równoległoboku MK: w tém więc założeniu szóstą część téy powierzchni równać się

$$MN \times ML = 81 \times 48 = 3888$$

$$\text{będzie} \frac{\quad}{6} \frac{\quad}{6} \frac{\quad}{6} = 648.$$

Pomnóż teraz LM, przez LO, i połowę wieloczynu stąd wypadającego, to iest

$$LM \times LO \quad 48 \times 56$$

$$\frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2} = 1344, \text{ weź za po-}$$

wierzchnią trójkątą MOL. Powierzchnia



ta większa wprawdzie będzie od prawdziwej tegoż trójkąta powierzchni; ale też i tamte obiedwie, z których jedną wzięliśmy za powierzchnią równoległoboku, a drugą za szóstą część jego. są także większe od prawdziwych powierzchni: a że wszystkie tetrzy fałszywe powierzchnie są proporcjonalnie większe (bo czynniki ich jednakowe mają nachylenie), więc tak się mają do siebie, iak powierzchnie prawdziwe.

To założywszy; trójkąt MOL, i drugi SOL, którego szukamy podstawy, mając jednakową wysokość, są do siebie iak ich podstawy, to jest:

$$\frac{LM \times LO}{2} : \frac{ML \times MN}{6} = ML : LS$$

Albo oba wyrazy pierwszego stosunku podzieliwszy przez LM; i pomnożywszy między sobą skrajne i średnie wyrazy; będzie -

$$\frac{LO \times LS}{2} = \frac{MN \times ML}{6}$$

Obie

Obie te ilości  
pomnożywszy  
przez 2; wy-  
padnie -

$$LO \times LS = \frac{MN \times ML}{3}$$

A tak pomnożo-  
ne podzieli-  
wszy przez  
LO, będzie

$$LS = \frac{MN \times ML}{3 \times LO}$$

Stąd oczywiście się pokazuje, iż aby mieć podstawę LS; trzeba wieloczyn wypadaający z rozmnożenia dwóch przyległych sobie boków MN, ML, równoległoboku KM, podzielić przez odcinek LO, pomnożony przez 3, to jest przez połowę sześciu części, na które cały równoległobok ma być podzielony. I tak wieloczyn z dwóch boków równoległoboku, równa się  $81 \times 48 = 3888$ , mnogość z odcinka  $LO = 56$  rozmnożonego przez 3, czyli  $56 \times 3 = 168$ : Podzieliwszy mnogość większą przez mniejszą, to jest  $\frac{3888}{168}$ , wieloraz  $23^{\circ} 1' 4''$  pokaże wielkość podstawy LS. Wziąwszy więc z podziałki części równych  $23^{\circ} 14''$ , i wyznaczywszy je na boku LM, raz od L. do S, drugi od S. do T, gdy zrysujesz linie OS, OT; będziesz miał i drugą połowę równoległoboku, podzieloną na 3 równe części, a tém samém przedsięwziętego podziału dokonasz.

T



§ Sposób dopiero wyłożony służy do podzielenia na iakiekolwiek części upodobane, samych tylko równoległoboków, to jest: Czworokątów mających boki przeciwne równoległe: następujący sposób ieometryczny jest ogólniejszy, iako służyący do podzielenia na części żądane, tak równoległobocznych, iako też nierównoległobocznych czworokątów.

*Tab. 8.*      *Sposób drugi.* Dany jest czworokąt JKLM.  
*Fig. 82.* do podzielenia na trzy równe części, któreby do iednego punktu *N*, przypierały.

Nim do samego podziału przystąpimy, wyłożemy wprzód sposób zamienienia iakiegokolwiek czworokąta na trójkąt téż samey powierzchni. Abyś czworokąt dany zamienił na trójkąt, poprowadź przekątną *JL*. i do niey równoległą *KO*, przez wierzchołek *K*, kąta *JKL*: gdy bok *ML*. przedłużysz aż do przecięcia się z linią równoległą, iak tu w punkcie *O*, a potem wyciągniesz linią *JO*; będziesz miał trójkąt *MJO*, równy co do powierzchni danemu czworokątowi *MJKL*.

1- Wyłożonym dopiero sposobem zamień czworokąt dany JKLM, na trójkąt *MJO*, równej powierzchni, i podstawę iego *MO*, podziel na tyle części równych, na ile czworokąt *JL*. ma być podzielony, iak tu na 3, punkta podziałów, znacząc liczbami 1, 2, 3. Potem punkt dany *N*, z punktem oznaczonym liczbą 2.

złącz linią  $N_2$ , i do niej przez punkt  $J$ . wyciągnij równoległą  $JP$ , przecinając podstawę  $MO$ , w punkcie  $P$ . Naostatek od  $P$ . do  $N$ . zrysuj linią  $NP$ , ta odetnie czworokąt  $KLPN$ . równy iedney trzeciej części danego czworokąta  $JL$ .

2. Abyś wydzielił dwie inne części równe, przedłuż podstawę  $LM$ , ku lewey stronie nieokreślenie: potém od punktu  $N$  poprowadziwszy linią  $N_1$ ; zrysuj do niej przez punkt  $J$ , równoległą  $JQ$ , przeciągając ją póki się nie zniydzie z podstawą przedłużoną, iak tu w punkcie  $Q$ : skąd gdy do punktu danego  $N$ , wyciągniesz linią  $QN$ , będziesz miał trójkąt  $QNP$ . wyrównywaiący drugiey części trzeciej czworokąta  $KJLM$ .

Ponieważ zaś trójkąt  $QNM$ , częścią swoją  $QCM$ , wychodzi zewnątrz placu czworokąta  $MK$ ; abyś więc część pomienioną wewnątrz placu umieścić; pociągnij linią  $MN$ , a do niej przez punkt  $Q$ , równoległą  $Qr$ , przecinając bok  $MJ$ , w punkcie  $r$ , od którego wyprowadzona linia  $rN$ , zrobi czworokąt  $rNPM$ , równy trójkątowi  $QNP$ , to iest drugiey części trzeciej czworokąta  $MK$ , a tém samém reszta pozostała, czyli trójkąt  $rJN$ , równać się będzie trzeciej części danego czworokąta  $MK$ . Tak więc mieć będziesz czworokąt  $MK$ , wydzielony na trzy równe części  $PNKL$ ,  $rNPM$ ,  $rJN$ , przy-



pieraiące do iednegoż naznaczonego punktu N.

Przyczyna całego działania tego zasadza się na twierdzeniu: Dwa trójkąty są równe, powierzchni, gdy stoją na iedneyże podstawie i między temiż liniami równoległemi.

§. 83. *Sposób podzielenia placu czworosciennego na części żądane, liniami równoległemi do któreykolwiek ściany obwód placu składaiącey.*

*Tab. 8. Sposób pierwszy. Jest dany różnóbok Fig. 80. (Trapezium) ACDB, do podzielenia na trzy równe części.*

1. Wyrachuy naprzód sposobem §. 74. powierzchnią danego czworokąta AD, która podług liczb znayduiących się na Fig. 80, wynosi 1188 miar kwadratowych: potem przedłużywszy boki AC, BD, aż do spotkania się z sobą w punkcie jakim f; przyśtań do obrachunku ważności linii fg, a to w sposób następuiący:

Trójkąty CfD, AfB, będąc równokątne, daią takową proporcją:  $AB: CD = fE: fg$ , a odcigaiąc, będzie:  $AB - CD: CD = fE - fg: fg$ ; czyli, (ponieważ  $fE - fg = gE$ ), będzie,  $AB - CD: CD = gE: fg$ :

$$\text{zatém} \frac{gE \times CD}{AB - CD} = fg.$$

Stąd oczywiście się pokazuje, iż aby mieć ważność linii fg, trzeba bok CD, mniejszy między dwoma bokami równoległemi, pomnożyć przez gE wysokość czworokąta AD. a wieloczyn stąd wypadający podzielić przez AB—CD, to jest przez różnicę dwóch boków równoległych AB i CD. Dokonawszy téj proporcji na liczbach, znajdujących się na figurze, znajdziesz  $fg = 48$ .

2. Trójkąty podobne CfD, GfK, mając się tak do siebie, iak kwadraty wystawione na ich bokach odpowiadających, dają następującą proporcją: CfD: GfK = — 2 — 2 .

fg: fh; ponieważ zaś trzy pierwsze wyrazy tej proporcji masz w liczbach wiadome; bo *naprzód*, w trójkącie CfD, podstawa  $CD = 24$ , wysokość  $fg = 48$ , zaś  $24 \times 48$

tém powierzchnia iego =  $\frac{24 \times 48}{2} = 576$ :

*powtórę*, powierzchnia trójkąta GfK, równa się CfD  $\frac{ABCD}{2} = 972$ : *naostatek*,

kwadrat fg =  $48 \times 48 = 2304$ . Założywszy więc w liczbach trzy pierwsze wyrazy owej proporcji: będzie  $576: 972 = \frac{2304}{3} = 962 \times 2304$

$2304: fh = \frac{962 \times 2304}{576} = 3888$ ; wycią-



gnąwszy zaś kwadratowy pierwiastek z wieloczynu 3888, wypadnie  $fh = 62, 35''$ . A że  $fh = fg + gh$ , przeto jeżeli od  $fh = 62^\circ, 3', 5''$ , odejmiesz  $fg = 48^\circ$ , reszta pozostala  $14^\circ 35''$ , okaże ważność odcinka szukanego  $gh$ . Wziąwszy zatem z podziałki części  $14^\circ, 35''$ , gdy ie wyznaczysz na  $gE$ , od  $g$ , do  $h$ , a potem przez punkt  $h$ , wyciągniesz linią  $GK$ , równoległą do  $AB$ , ta odetnie czworokąt  $GD$ , równy trzeciej części danego czworokąta  $AD$ .

3. Dla wynalezienia punktu  $b$ , przez który ma przechodzić druga linia równoległa  $MN$ , ułóż następującą proporcją:

— 2 — 2

CfD: MfN = fg: fb, zakładając to sa-  
 $2X1188$   
 mo w liczbach będzie,  $576: 576 \frac{1}{2}$  —————

3

— 2

czyli  $1368 = 2504$ :  $fb = 5472$ , z tego wielorazu wyciągnąwszy kwadratowy pierwiastek; będzie  $fb = 73^\circ, 97''$ . Naostatek gdy od  $fb$ , odejmiesz  $fh = 62^\circ, 35''$ , reszta pozostala  $11^\circ, 62''$ , okaże długość drugiego szukanego odcinka  $hb$ : który wyznaczysz od  $h$ , do  $b$ , gdy przez punkt  $b$ , zrysujesz linią  $MN$ , równoległą do  $AB$ , będziesz miał wydzielone dwie inne części równe  $MK, AN$ , a tak czworokąt  $ABCD$ , na trzy równe części  $AN, MK, GD$ , wydzielony zostanie.

*Sposób drugi.* Niech będzie dany czworokąt  $abcd$ , do przedzielenia na trzy równe części liniami równoległymi do boku  $ad$ . Tab. 8. Fig. 81.

1. Czworokąt dany  $abcd$ , zamień na trójkąt  $aed$ . tejże samej powierzchni, i podstawę jego  $ed$ , podziel na tyle części na ile czworokąt ma być wydzielony, iak tu na trzy równe części w punktach  $f$ ,  $g$ ,  $d$ . 2. Przedłuż ściany  $de$ ,  $ab$ , ku iedney stronie aż do zniyscia się z sobą w punkcie iakim  $h$ , szukay między dwiema liniami  $hd$ ,  $hf$ ; średniey proporcjonalney  $il$ , którą gdy wyznaczysz na linii  $hd$ , od  $h$ , do  $m$ , i przez punkt podziału  $m$ , poprowadzisz linią  $mn$ , równoległą do  $ad$ ; będziesz miał oddzielony czworokąt  $mncb$ , równy trzeciej części danego czworokąta  $db$ . 3. Szukay znowu między liniami  $hd$ ,  $hg$ , średniey proporcjonalney  $op$ , a przeniosłszy ją na  $hd$ , od  $h$ , do  $z$ , gdy wyciągniesz linią  $zr$ , równoległą do  $ad$ , będziesz miał wydzielone dwie inne części  $zn$ ,  $dr$ , z których każda jest równa trzeciej części danego czworokąta. Tak czworokąt  $db$ , podzielony zostanie na trzy równe części liniami równoległymi do boku  $a d$ .