

GALILEO GALILEI

ROZMOWY
i
DOWODZENIA MATEMATYCZNE

W ZAKRESIE

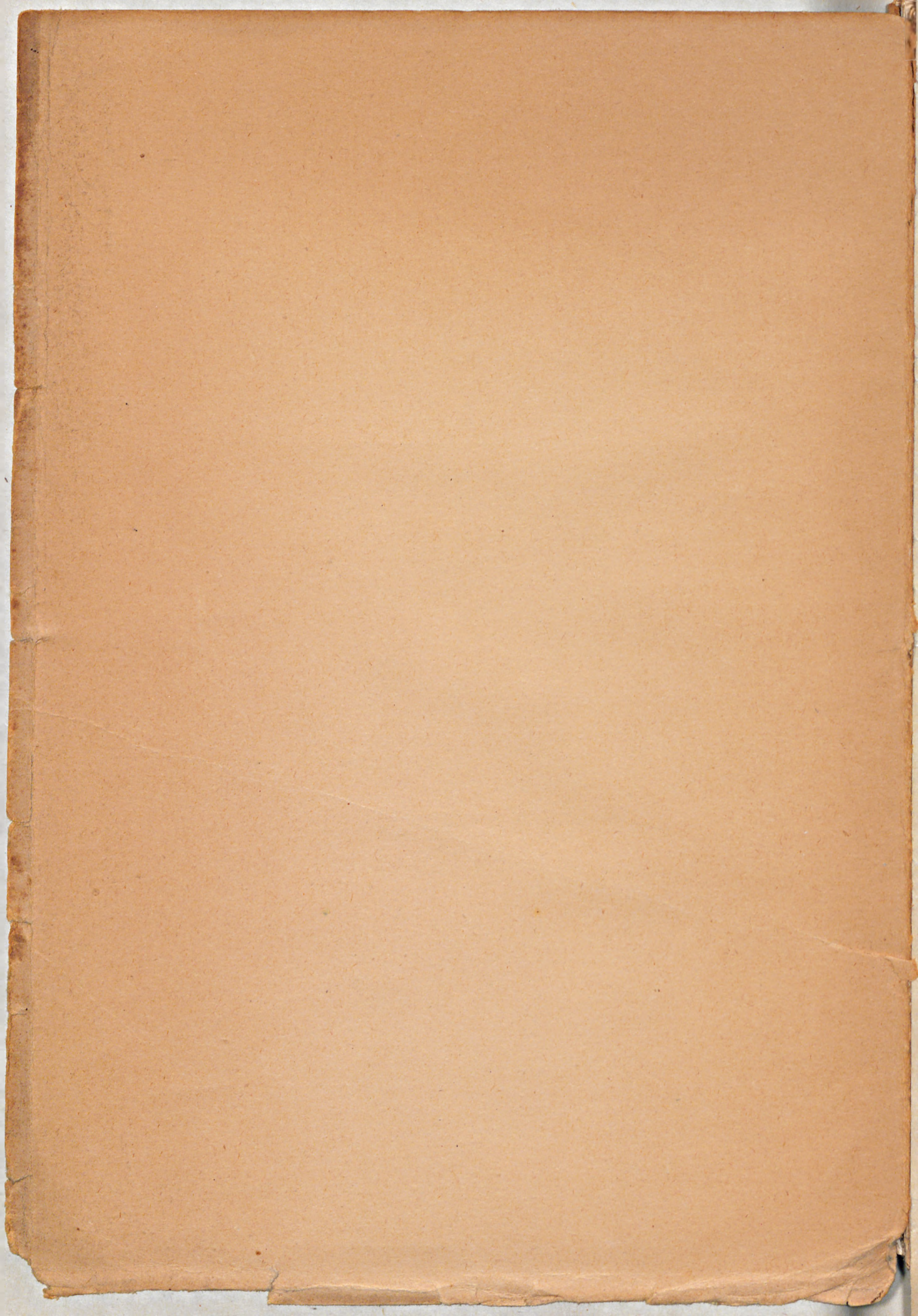
DWÓCH NOWYCH UMIEJĘTNOŚCI
DOTYCZĄCYCH MECHANIKI I RUCHÓW MIEJSCOWYCH
(R. 1638)

Z 5-ma TABLICAMI

PRZEŁOŻYŁ
F. K.

WYDAWNICTWO
KASY IM. MIANOWSKIEGO, INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA, PAŁAC STASZICA.

1930.



ROZMOWY

I DOWODZENIA MATEMATYCZNE.

531:514

THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

BZ08DK/001-49

GALILEO GALILEI

ROZMOWY
i
DOWODZENIA MATEMATYCZNE

W ZAKRESIE

DWÓCH NOWYCH UMIEJĘTNOŚCI
DOTYCZĄCYCH MECHANIKI I RUCHÓW MIEJSCOWYCH
(R. 1638)

Z 5-ma TABLICAMI

PRZEŁOŻYŁ
F. K.

WYDAWNICTWO
KASY IM. MIANOWSKIEGO, INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA, PAŁAC STASZICA.
1930.

ROZMOWY

POWODZENIA MATEMATYCZNE

W ZAKRESIE

WYKONANO W DOKŁADZIE

WYKONANO W DOKŁADZIE



nr. 2813

W ZAKRESIE

WYKONANO W DOKŁADZIE

F. K.

WYKONANO W DOKŁADZIE

WYKONANO W DOKŁADZIE

WYKONANO W DOKŁADZIE

WYKONANO W DOKŁADZIE KASY IM. MIANOWSKIEGO W WARSZAWIE, PAŁAC STASZICA

OD TŁUMACZA

»Dynamika jest nauką o siłach przyspieszających i opóźniających i o wytwarzanych przez nie ruchach zmiennych. Naukę tę zawdzięczamy w całości nowożytnym a pierwsze jej podstawy założył Galileusz. Przed nim siły działające na ciała rozważano tylko w stanie równowagi, a choć nie można było przypisywać czemu innemu, jak stałemu działaniu ciężkości, przyspieszania ciał ważkich i ruchu krzywoliniowego pocisków, nikomu jednak nie udało się ustalić praw tych codziennych zjawisk na podstawie tak prostej przyczyny. Galileusz pierwszy postawił ten krok, tak wielkiego znaczenia, otwierając tym sposobem nowe i olbrzymie pole rozwojowi mechaniki. Odkrycia te wyłożone są i rozwinięte w dziele, zatytułowanem: *Dialoghi delle scienze nuove etc.*, które ukazało się po raz pierwszy w Leydzie w r. 1637; nie przysporzyły one Galileuszowi za życia takiego rozgłosu, jak te, które zrobił nad systemem świata, lecz stanowią dziś najtrwalszą i najistotniejszą część sławy wielkiego męża. Odkrycia księżyców Jowisza, odmian Wener, plam słonecznych, wymagały tylko teleskopów i pilności; lecz trzeba było nadzwyczajnego genjuszu, by odkryć prawa natury w zjawiskach, które się miało codziennie przed oczyma, a których objaśnienie jednak wymykało się zawsze z pod badań filozofów». (Lagrange: *Mécanique analytique*. 1788, str. 158)

Powyższe słowa wielkiego twórcy mechaniki analitycznej określają najlepiej naukowe znaczenie dzieła Galileusza i usprawiedliwiają podjęcie i wydanie jego polskiego przekładu. Nadmienić trzeba jeszcze, że nie tylko dynamika wzięła w tem dziele swój początek; znajdują się w niem także pierwsze związki nauki o wytrzymałości materiałów. Sprostować wszakże należy tytuł i rok pierwszego wydania, *Rozmowy* bowiem ukazały się w Leydzie w r. 1638 p. t.:

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica i Movimenti Locali del Signor Galileo Galilei. Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni solidi.

Znane są powszechnie szczegóły życia Galileusza, urodzonego w Pizie w r. 1564 a zmarłego w Arcetri pod Florencją w r. 1642. W miejscowości tej pozostawał pod dozorem Inkwizycji, podczas druku *Rozmów*. Pewną część opisanych w tem dziele odkryć komunikował swym uczniom już od r. 1602.

Wydane w r. 1638 w Leydzie *Rozmowy*, poprzedzone dedykacją hrabiemu de Noailles, składały się z czterech rozdziałów, nazwanych *dniami* i z dodatku o środku ciężkości niektórych brył. Dzień piąty, ogłoszony przez Viviani'ego, w jego *Scienza Universale delle proporzioni* z r. 1674, nie dotyczy

mechaniki, lecz, podawany we wszystkich następnych wydaniach dzieł Galileusza, nie mógł być pominięty w przekładzie. Dzień szósty, niedokończony przez Galileusza, podany został razem z dniem piątym w wydaniu florenckim dzieł z r. 1718 i we wszystkich następnych wydaniach. Treść poszczególnych dni i dodatku podana jest w spisie rzeczy na końcu przekładu.

Rozmowy prowadzone są przez trzy osoby, którym autor dał nazwiska: Salviati, Sagredo i Simplicio. Salviati z Florencji i Sagredo z Wenecji byli ulubionymi uczniami Galileusza w Padwie. W *Rozmowach* Salviati wygłasza poglądy Galileusza a Sagredo pobudza go do wyjaśnień i wykładu dostępniejszego. Simplicio przedstawia filozofa zagrzeszłego w szkole perypatetyków.

Przekład dokonany został z wydania dzieł Galileusza z r. 1832, stanowiącego tomy XX i XXI Biblioteki Encyklopedycznej Włoskiej (*Biblioteca Enciclopedica Italiana*). Tekst tego wydania porównywany był z przekładem niemieckim Oettingena (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*), dokonanym z wydania Bolońskiego z r. 1655. Wątpliwości przy niektórych drobnych różnicach rozstrzygał przekład łaciński *Rozmów* (Lugduni 1699), znajdujący się w Bibliotece Uniwersytetu Warszawskiego.

Nie idąc śladami Oettingena, podającego w końcu przekładu całkowite przeróbki analityczne niektórych dowodzeń Galileusza, poprzestano na najkonieczniejszych objaśnieniach w krótkich przypiskach pod tekstem. Przekład łacińskich części tekstu wydrukowano odmiennymi czcionkami.

GALILEO GALILEI

ROZMOWY i DOWODZENIA MATEMATYCZNE

*w zakresie dwóch nowych umiejętności, dotyczących mechaniki
i ruchów miejscowych z dodatkiem o środku ciężkości
niektórych brył.*

Do Prześwietnego Imci Pana

Hrabiego de Noailles

Radcy Jego Królewskiej i Arcychrześcijańskiej Mości, Kawalera
Orderu Ś-go Ducha, Marszałka, Seneszała, Zarządcy Roussillonu
oraz Namiestnika J. K. Mości w Owernji, Pana mego i Protektora
najszanowniejszego.

Prześwietny Panie.

Widzę w tem objaw Waszej wspaniałomyślności, Prześwietny Panie, że raczyliście zaopiekować się tą pracą moją, nie bacząc na to, iż, jak Wam wiadomo, przerażony i znękany niepowodzeniem innych moich pism, postanowiłem nie ogłaszać ich więcej, a tylko, by nie zostały całkowicie pogrzebane, zostawić je w rękopisie, w miejscu dostępnem dla specjalistów w rzeczach, któremi się zajmuję: wybrawszy zaś pierwsze i najwspanialsze dla nich schronienie, złożyłem je w pewne ręce Prześwietnego Pana, który przez swe szczególne przywiązanie do mnie, miałby na sercu przechowanie moich studjów i prac. Podczas przejazdu Jego, przy powrocie z ambasady w Rzymie, osobiście się z Nim widziałem, jakoteż wielokrotnie listownie Mu donosiłem, a przy spotkaniu przedstawiłem Prześwietnemu Panu rękopisy tych dwóch prac, które miałem gotowe, a które zostały łaskawie ocenione i przyjęte do bezpiecznego przechowania; gdy zaś zwłaszcza we Francji komunikowane były przez Niego przyjaciółom, biegłym w tych umiejętnościach, pokazało się, że, jakkolwiek w cichości, nie pędzę jednak życia beczynnje. Chciałem też niektóre odpisy przesłać do Nie-

miec, Flandrii, Anglii, Hiszpanji i kilku miejsc we Włoszech, gdy niespodzianie zawiadomiony zostałem przez firmę Elzewirów, że te pisma moje są już przed prasą i że należy mi wziąć postanowienie co do dedykacji i niezwłocznie nadesłać jej rękopis. Wzruszony tą niespodziewaną i nieoczekiwaną wiadomością, doszedłem do przekonania, że dążeniem Prześwieconego Pana było podniesienie i rozpowszechnienie mego nazwiska, a zaopiekowanie się memi pracami sprawiło, że one doszły do rąk wymienionych drukarzy, którzy zajmowali się już ogłaszaniem innych moich dzieł, puszczać je w świat w pięknej i ozdobnej szacie. I tak te prace moje mają się znów ukazać, dzięki szczęśliwemu losowi, który je poddał ocenie tak wysokiego sędziego, jednoczącego w sobie cudowny zespół tych cnót, sprawiających, że wszyscy wielbią, Przeświecony Panie, Twoją niezrównaną wspaniałomyślność i zapał do sprawy dobra publicznego; a gdy wydało Ci się, że do tego dobrze przyczynić się może ta praca moja, to zapragnąłeś powiększyć i rozszerzyć moją sławę. W tem położeniu rzeczy, słusznem będzie, abym widomym znakiem okazał się wdzięcznym za wspaniałomyślną przychyłność Prześwieconego Pana, pozwalającą mej sławie swobodnie rozpostrześć skrzydła pod otwartem niebem, podczas gdy mnie się wydawało największem szczęściem, że pozostanie ona zamknięta w ukryciu. Wam też, Przeświecony Panie, niech będzie poświęcone to moje dzieło, a skłania mnie do tego nie tylko świadomość całego ogromu zobowiązań, jakie mam dla Was, lecz także (jeśli mi wolno tak się wyrazić) przejmowane przez Was, Przeświecony Panie, zobowiązanie bronięcia mej sławy wobec przeciwników; bo Wy to stawiacie mnie znów na polu walki. Idąc więc naprzód pod Waszą chorągwią i ochroną, pokornie chylę się przed niemi, łącząc wyrazy głębokiej wdzięczności i w nagrodę tych łask Waszych życząc Wam pełni wszelkiego szczęścia i pomyślności.

Arcetri, 6 marca 1638.

Pozostaję Prześwieconego Pana uniżonym sługą

Galileo Galilei.

DZIEŃ PIERWSZY

Rozmawiający: Salviati, Sagredo i Simplicio.

Salviati: Rozległe pola rozważań dla ludzi myślących dostarcza, jak sędzę, częste zwiedzanie naszego słynnego arsenału, Mości Panowie Wenecjanie, szczególnie zaś jego części mechanicznej: tam bowiem wszelkie rodzaje narzędzi i maszyn wciąż są opracowywane przez wielką liczbę mistrzów, wśród których wielu, wskutek spostrzeżeń, jakie robili ich poprzednicy lub też jakie wykonali sami, stało się bardzo biegłymi i subtelnie rozumującymi.

Sagredo: Waszmość zupełnie się nie myli; ja też, z natury będąc ciekawym, zachodzę tam często dla rozrywki i zetknięcia się z tymi, którzy dla swego mistrzostwa zwani tam są przodownikami (proti); porozumiewanie się z nimi pozwoliło mi wiele razy odnajdywać związek przyczynowy zjawisk, nie tylko cudownych, lecz dotąd tajemniczych i jakby nieprawdopodobnych: i rzeczywiście nieraz bywałem zakłopotany i zrozpaczony, starając się przeniknąć, jak może następować to, co się usuwa od wszelkiego mego pojęcia, a jednak rozum wskazuje, że jest prawdziwe; a zaś to, o czym co dopiero mówił jakiś pocziwiec, jest wymysłem i podaniem dziś pospolitym, które w końcu poczytałem za zupełnie błędne, jak i wiele innych słyszanych od ludzi nieświadomych, którzy je wygłaszają, jak sędzę, dla pokazania, że umieją powiedzieć coś o tem, czego nie rozumieją.

Salviati: Może Waszmość ma na myśli kwestję, którą mu niedawno przedstawiałem, gdy szukaliśmy przyczyny, dlaczego stawiane jest tak znacznie większe rusztowanie dla spuszczenia na wodę wielkiej galery, podczas gdy dla statków mniejszych używane jest nie w tym stosunku mniejsze, przyczem Waszmość zauważyła, że robi się to, aby uniknąć niebezpieczeństwa zawalenia się rusztowania pod parciem nadzwyczajnego ciężaru, któremu nie są poddawane wiązania mniejszych wymiarów.

Sagredo: Dlatego też i zwłaszcza z powodu ostatnio przytoczonego względu, fałszywie pojmowanego przez pospółstwo, są-

dzę, że tak w tym przypadku, jak i przy innych podobnych maszynach, nie można większych wymiarów wywodzić z mniejszych w stosunku ponoszonego ciężaru; bywają bowiem maszyny dobrze działające przy małych wymiarach a niemożliwe przy większych. Ale ponieważ cała mechanika opiera się na geometrii, a tam wywiedzione są twierdzenia o proporcjonalności wszystkich figur i brył; więc jeżeli wielka maszyna we wszystkich swych częściach będzie podobna do małej, o której przekonano się, że jest mocna i wytrzymała, to nie widzę powodu obawy niebezpieczeństwa.

Salviati: Pogląd pospółstwa jest zupełnie błędny i to tak dalece, że nawet wyrazić można z równą prawdą pogląd wprost przeciwny, mówiąc że niektóre maszyny dokładniej wykonane być mogą w większych wymiarach, jak na przykład zegarek, pokazujący i bijący godziny, dokładniej zrobić można większy. Mniej słuszną jest w tej sprawie opinia ludzi inteligentnych, których łatwiejszy wyrób maszyn większych wymiarów doprowadza do pomijania teoretycznych twierdzeń geometrii i do szukania istotnych przyczyn nienormalnego zachowania się materiału w jego niejednolitości i niedostatkach. Tymczasem mogę bez zarozumiałości utrzymywać, że niedostatki materiałów, które w istocie mogą wniwecz obrócić najściślejsze wywody matematyczne, nie wystarczają dla objaśnienia różnic między maszynami rzeczywistymi a abstrakcyjnymi i idealnymi. Gdyż, abstrahując niedostatki materiału i przyjmując, że jest doskonały i niezmienny, zamierzam wykazać, że dlatego tylko, iż sama jest materialem, maszyna większa, zbudowana z tegoż samego materiału co mniejsza i w jednakich proporcjach wszystkich swych części, we wszystkim odpowiadać będzie mniejszej, wyjąwszy wzgląd na moc i gwałtowne uderzenia. Im większa, tem będzie słabsza. A ponieważ przypuszczam niezmiennność materji, więc można na tem opierać zupełnie jasne matematyczne rozważanie. Odstap więc Waszmość, Panie Sagredo, od zdania, które podziela wielu innych mechaników, jakoby maszyny z jednakiego materiału, w najściślejszych proporcjach wykonane, przedstawiały jednaki opór. Można bowiem dowieść geometrycznie, że maszyny większe stawiać będą opór mniejszy: tak że w końcu nietylko dla maszyn, ale dla wszystkich tworów sztuki i natury, istnieje konieczna granica, której ani sztuka ani natura nie mogą przekraczać: wszystko to przy założeniu, że materiał jest ten sam i proporcjonalność wymiarów zupełna.

Sagredo: Czuję, że mój pogląd się zmienia i jak obłok oświecony

zostaje błyskawicą, tak przeczuwam nagle światło, oświecające mnie z oddali i znów znikające a budzące nieznane i nieprzemysłane wyobrażenia. Z tego, co Waszmość powiedział, wynika, jak mi się zdaje, że niemożliwe jest zbudowanie dwóch maszyn z tegoż samego materiału, niejednakiej wielkości a jednakiej mocy i następnie, że nie można znaleźć dwóch belek, z tegoż samego drzewa, jednakiej wytrzymałości a niejednakiej wielkości.

Salviati: Tak się rzecz ma, mości Sagredo, i, biorąc pod uwagę ostatni przykład, dodam, że jeżeli wpuszczymy belkę drewnianą poziomą jednym końcem w mur pionowy i damy jej taką długość i wysokość, że może się utrzymać w całości, a na włos przedłużona łamie się pod działaniem własnego ciężaru — co było by *unicum* na świecie — i gdyby jej długość była 100 razy większa od wysokości, to nie znajdzie się innej belki, z tegoż samego materiału, któraby mając długość 100 razy większą od wysokości unosić mogła tylko samą siebie i nic więcej: ale wszystkie większych wymiarów będą się łamać a mniejsze będą mogły być jeszcze więcej obciążane. To, co mówię o zdolności unoszenia własnego ciężaru, stosuje się i do każdego innego ustroju, i tak gdy jedna łata unieść może dziesięć lat, to podobna do niej belka nie uniesie dziesięciu równych jej belek. Zechciejcie zauważyć dalej, Waszmość i nasz pan Simplicio, jak prawdziwe są te podania, jakkolwiek zrazu wydają się nieprawdopodobnemi; ale po pewnem zastanowieniu się odchyła się zakrywająca prawdę zasłona i spostrzegamy proste i nagie jej oblicze. Azaliż nie widzimy, że koń, spadający z wysokości trzech do czterech łokci, może połamać sobie nogi, podczas gdy pies nie ponosi przy takim spadku żadnej szkody, kot spadać może z wysokości 8 do 10 łokci, świerszcz z wysokiej wieży a mrówka choćby z księżycy. Małe dzieci przy upadku nie ponoszą szkody, a dorośli łamią sobie kości. A, jak małe zwierzęta są stosunkowo mocniejsze niż większe, tak samo trzymają się lepiej małe rośliny i sędzę, że pojmujecie Waszmościowie, że dąb wysokości 200 łokci nie może mieć gałęzi w ścisłym stosunku z małym dębem i że natura nie może wytworzyć konia równie wielkiego jak 20 koni, ani olbrzyma 10 razy większego od człowieka, chyba jakim cudem, albo przez zmianę proporcji wszystkich członków ciała a zwłaszcza kości, których moc zwiększonaby być musiała w znacznie większym stosunku niż wielkość. Pogląd ogólnie przyjęty, że wielkie i małe maszyny są jednakowo łatwe do zrobienia i jed-

nakowo trwałe, jest oczywiście błędny: i tak n. p. małe obeliski, kolumny i inne formy mogą być przestawiane, kładzione i podnoszone bez obawy rozbicia, podczas gdy bardzo wielkie przy każdym wypadku pójdą na kawałki i to tylko z przyczyny własnego wielkiego ciężaru. I mogę Waszmościom opowiedzieć jeden wypadek godzien uwagi, jak przy wszelkich nieoczekiwanych zdarzeniach przedsiębrane środki zaradcze wywołują większą jeszcze szkodę. Położono wielką kolumnę marmurową dwoma końcami na dwóch belkach; po pewnym czasie jeden mechanik doradził, aby dla uniknięcia pęknięcia kolumny w środku, podeprzeć ją tam trzecią belką. Rady posłuchano, ale skutek był wprost przeciwny: po paru miesiącach kolumna pękła i to właśnie na podporze środkowej.

Simplicio: A to istotnie ciekawe i całkiem nieoczekiwane (*praeter spem*), skoro dodano podporę w środku.

Salvati: Zapewne to właśnie było powodem i rozpoznany związek przyczynowy usuwa stąd wszelką cudowność, bo gdy położono na ziemi obie części pękniętej kolumny, zauważono że jedna z podpór końcowych nadgniła i opuściła się; że zaś środek kolumny został mocno podparty, to spowodowało, że jedna połowa kolumny zawisała w powietrzu i kolumna pękła pod działaniem własnego ciężaru, co nie nastąpiłoby przy samych dwóch podporach krańcowych, gdyż wtedy, po opuszczeniu się jednej, byłoby tylko nastąpiło pochylenie się całej kolumny. Niewątpliwie cały wypadek nie zdarzyłby się przy małej kolumnie, zrobionej z tego samego materiału, przy proporcjonalnej długości i grubości.

Sagredo: Przekonany jestem zupełnie o prawdziwości tego wniosku, ale nie widzę przyczyny, dlaczego przy wzroście wszystkich wymiarów, nie rośnie proporcjonalnie wytrzymałość i tem więcej mnie to dziwi, że widzę w wielu razach, jak wytrzymałość na rozerwanie wzrasta w większym stosunku niż powiększenia materiału; jak n. p. jeżeli w mur wbite są dwa gwoździe, jeden dwa razy tylko większy od drugiego, to wytrzymałość wzrasta trzy a nawet cztery razy.

Salvati: Powiedz, Waszmość, osiem razy, a będziesz bliższy rzeczywistości: ale to nie przeczy memu pogładowi, mimo wszelkie pozory.

Sagredo: A teraz, mości *Salvati*, objaśnij nam, jeśli możesz, swój pogląd, gdyż uważam przedmiot jako interesujący i pożytecz-

ny i gdyby mógł być dziś omówiony, byłibyśmy z p. Simpliciem bardzo wdzięczni.

Salviati: Jestem na usługi Waszmościów, jeżeli tylko zdołam sobie przypomnieć wszystko, czego się nauczyłem od naszego Akademika, który wiele rozmyślał o tych rzeczach i zawsze na podstawie swojej metody geometrycznej, tak że nie bez racji możnaby to nazwać nową umiejętnością. Więc, jakkolwiek niektóre zasady przez innych, a najprzód przez Arystotelesa były wywiedzione, to jednak tu są najpiękniejsze i najcenniejsze niewątpliwie podstawy ze wszystkimi dowodzeniami. Temi też mogę was przekonać i nie potrzebuję zajmować was rzeczami prawdopodobnymi, gdyż początki mechaniki są wam znane, o ile się na nich trzeba będzie opierać. Przedewszystkiem rozpatrzmy co się dzieje, gdy łamiemy kawałek drzewa, lub jakie inne ciało, którego cząstki mocno są ze sobą związane, gdyż tu znajdziemy pierwszą i najprostsza zasadę, na której wszystko polega. Dla lepszego zrozumienia bierzemy pod uwagę (tabl. I. rys. 1) walec lub graniastosłup AB, z drzewa lub innego materiału, mocnego i spójnego, umocowany swym górnym końcem w A, wiszący pionowo i obciążony u spodu ciężarem C. Jakakolwiek jest jego wytrzymałość i spójność międzycząsteczkowa, byleby tylko nie była nieskończona, to można ją zawsze pokonać ciężarem C, jeżeli przypuścimy, że ten ciężar można dowolnie powiększać, tak że walec zostanie rozerwany, jak powróż. A tak jak w powrozie przypuszczamy, że wytrzymałość pochodzi z włókien, z których lina się składa, to również drzewo składa się z włókien, mianowicie z długich słoików, które czynią drzewo wytrzymałym na rozerwanie w większym stopniu, niż włókna powrozu tej samej grubości. W walcu kamiennym lub metalowym wytrzymałość zależy od innego środka, wiążącego cząstki jedne z drugimi, ale i taki walec się rozrywa przy mocnem rozciąganiu.

Simplicio: Skoro tak się mają rzeczy, jak mówicie, to rozumiem, że słoje drzewa, równie długie jak samo drzewo, nadają mu wytrzymałość na rozerwanie; ale dlaczego lina, której pojedyncze włókna mogą mieć najwyżej 2 do 3 łokci długości, może mieć 100 łokci długości i wytrzymywać rozciąganie? Pragnąłbym także poznać wasz pogląd na spójność między cząstkami metalu lub kamienia lub innego materiału, nie złożonego z włókien, który jednak, jeżeli się nie mylę, może być jeszcze wytrzymalszy.

Salviati: Nowemi rozważaniami, więcej odległymi od nasze-

go przedmiotu, będziemy mogli się zająć, skoro rozwiążemy całkowicie napotkane dotąd trudności.

S a g r e d o: Jeżeli jednak zboczenie z drogi prowadzić nas może do poznania nowych prawd, co nam przeszkadza zboczyć, skoro nie jesteśmy zmuszeni postępować według ściśle ograniczonej metody i możemy nasze rozmowy prowadzić według upodobania — i dlaczego nie mamy się zatrzymywać nad spotkaniami kwestjami, które mogą się już drugi raz nie przedstawić? Następnie: kto wie, czy nie trafimy właśnie na takie rzeczy, które są więcej interesujące i piękniejsze od wniosków, do jakich doszliśmy na początku. To też proszę Waszmość o zastosowanie się do życzenia p. Simplicia a zarazem i mojego, gdyż pragnąłbym zaraz wiedzieć, jakie jest wiązadło, łączące tak mocno cząstki ciał stałych, że wydają się ostatecznie nierozzerwalnemi: wiadomość ta jest potrzebna dla objaśnienia spoistości między cząstkami włókien, z których składają się ciała.

S a l v i a t i: Rozważajmy więc dalej, skoro tak chcecie. Pierwsza trudność była: jak mogą włókna liny o długości stu łokci (gdy same nie mają więcej jak 2 do 3 łokci), przylegać tak mocno do siebie, że tylko wielką siłą mogą być rozerwane. Ale powiedz mi, Waszmość p. Simplicio, czy nie potrafisz trzymać tak mocno palcami pojedynczego włókna konopnego za jeden koniec, że, ciągnąc je za drugi koniec, prędzej je rozerwę, aniżeli je wam z ręki wyciągnę. Jeżeli więc włókno konopne ściskane jest tak mocno przez swe otoczenie, nie tylko na końcach, ale na całej swej długości, czyż to nie jest przyczyną, że oderwanie włókna od tego otoczenia staje się trudniejszym od przerwania samego włókna. Skręcanie liny tak przyciska włókna jedne do drugich, że przy jaknajmocniejszym wyciąganiu liny raczej się łamią, aniżeli oddzielają od siebie: jak przekonać się można, otrzymując w miejscu rozerwania liny krótkie końce włókien nie mające ani łokcia długości, jakby to miało miejsce, gdyby lina rozrywała się nie wskutek rozdarcia włókien, ale ich oddzielenia się od włókien otaczających.

S a g r e d o: Na potwierdzenie tego mogę dodać, że nieraz lina się przerywa nie wskutek rozciągania wzdłuż, ale nadzwyczaj mocnego skręcania; dowodzi to, że włókna są w linie wzajemnie tak ściskane, że naciskające nie pozwalają naciskanym na jak najmniejsze wyslizgnięcie, konieczne do wydłużenia skrętów, aby mogły linę wkoło otoczyć; gdyż przy skręcaniu lina się skracca i wskutek tego nieco grubieje.

Salviati: Macie zupełną słuszość, ale zauważcie przytem, jak jedna prawda pociąga za sobą drugą. Owo włókno, ściskane między palcami, którego nie można było wyrwać żadną siłą, stawia opór wskutek podwójnego nacisku: gdyż palec górny ciśnie na dolny i odwrotnie. I bezwątpienia, gdyby można było z tych dwóch nacisków zostawić tylko jeden, to pozostałaby tylko połowa tego oporu, jaki wytrzymują oba razem. Ale ponieważ nie można usunąć jednego ciśnienia, nie znosząc jednocześnie drugiego, to należy obmyślić sztuczne utrzymanie jednego z nich i znaleźć sposób, aby włókno naciskało samo na palec albo na jakie inne ciało stałe na którym leży, dlatego, aby ciągnąca je siła tem więcej je naciskała, im więcej ciągnie. Osiągnąć to można, okręcając ciało całe spiralnie włóknem. Lepsze zrozumienie tego urządzenia ułatwi rysunek. (tabl. I. rys. 2) Niech będą dwa walce AB, CD, a między nimi włókno EF, które dla większej jasności przedstawiamy jako sznur: to nie ulega wątpliwości, że gdy walce są przyciskane mocno jeden do drugiego, to sznur, pociągany za koniec F, może się opierać znacznej sile, zanim się go wyciągnie z pomiędzy walców: lecz jeżeli odsuniemy jeden z walców, to sznur, chociaż pozostanie w zetknięciu z walcem pozostałym, nie będzie się już mógł przez samo to zetknięcie opierać ciągnieniu. Ale jeżeli, trzymając sznur choćby lekko przy wierzchołku walca A, nawiniemy go na ten walec według linii AFLOTR i ciągnąć będziemy za koniec R, to oczywiście sznur przyciskany będzie do walca a nacisk będzie tem większy, im więcej będzie kręgów i im mocniej ciągniony będzie sznur: a robiąc przez powiększenie liczby kręgów zetknięcie coraz dłuższe i trudniejsze do pokonania, utrudnia się ślizganie sznura i zwiększa jego opór przy ciągnieniu. Zresztą czyż nie widzimy, że taka właśnie jest wytrzymałość włókien, które po tysiącokrotnem lub większem jeszcze skręceniu tworzą wielką linę. Ścisnienie wielu kręgów zbija tak mocno włókna, że z niewielu niezbyt długich włókien, nawet przy małej liczbie kręgów splecionych razem, otrzymać można najmocniejsze liny, jakieby mogły być żądane.

Sagredo: Wywody wasze usuwają z mego umysłu całą cudowność dwóch zjawisk, których przyczyny poprzednio nie pojmowałem. Widziałem najprzód jak 2 lub 3 nawinięcia liny na wał windy, nie tylko mogą na niej utrzymać nawet wielki ciężar, bez oślizgnięcia lub opuszczenia, a także jak winda w ruchu, przez samo zetknięcie ze sznurem kilkakrotnie naciągniętym, może podnosić olbrzymie ciężary, choćby zaledwie mały chłopiec przytrzy-

mywał drugi koniec liny. Drugiem jest proste a cenne narzędzie, wynalezione przez jednego młodzieńca z moich krewnych, pozwalające spuszczać się z okna za pomocą tylko sznura, nie zdzierając sobie rąk, jak się to zdarzyło wynalazcy w okropny sposób. Dla łatwiejszego zrozumienia podaję mały szkic (tabl. I, rys. 3). Na walcu drewnianym AB, tak grubym jak zwykła laska, jak piędz długim, wydrążono kanalik spiralny na półtora obrotu walca, tak głęboki, aby sznur się w nim mieścił. Sznur wchodził w kanalik w A a wychodził w B. Następnie walec ze sznurem otaczała rura drewniana lub blaszana, złożona z dwóch połów połączonych zawiasami, tak że łatwo mogła być otwierana i zamykana. Po wprowadzeniu sznura pod rurę, chwytając ją i ściskając obiema rękami, można się było zawieszać na linie, przyczem wynikało takie ściśnięcie sznura między walcem a rurą, że można było, dowoli powiększając lub zmniejszając nacisk, zatrzymywać się przy opuszczaniu lub opuszczać się dalej.

Salviati: Wynalazek to istotnie cenny, lecz dla zupełnego wyjaśnienia jego zasady, spostrzegam, zdaje mi się jak przez cień, że należałoby dodać jeszcze dalsze rozważanie; tym razem nie będę wchodził w te szczegóły, ponieważ pragniecie poznać mój pogląd na wytrzymałość innych ciał na rozciąganie, nie złożonych z włókien, jak sznur i większość drzew; spójność między częściami tych ciał zależy od różnych okoliczności, które zdaniem mojem sprowadzają się do dwóch, jedną jest tak sławiony wstręt natury do tworzenia próżni, a drugą stanowi (gdy pierwsza nie wystarcza) środek wiążący, lepki i kleisty, który cząstki ciała mocno ze sobą wiąże. Najprzód zajmijmy się próżnią i wykażmy jasnymi doświadczeniami, jaka i jak wielka jest jej własność. Weźcie, proszę, dwie tafle z marmuru, metalu lub szkła, ściśle płaskie, gładkie i mogące się przesuwąć jedna po drugiej. Jeżeli jedną na drugą położymy, to łatwo je można przesuwąć (oczywiście gdy ich żaden klej nie wiąże), przy odejmowaniu wszakże jednej od drugiej ujawnia się taki opór, że podnoszona tafla górna zatrzymuje przy sobie dolną, choćby wielką i ciężką. Dowodzi to widocznie wstrętu natury do tworzenia próżni, choćby na krótki czas, któraby powstała, zanim ją wypełni powietrze otaczające. Widzimy także, że, gdy tafle nie są gładko wypolerowane, tak że zetknięcie ich nie jest zupełne, to przy powolnem ich rozłączaniu nie można zauważyć żadnego oporu, jak tylko wywołany ciężarem zdejmowanej tafli, ale przy szybkim zdejmowaniu wierzchniej tafli, zrazu przylega do niej

jeszcze tafla dolna, by opaść po chwili; trzyma się bowiem tylko tyle czasu, ile potrzeba na wyjście małej ilości powietrza znajdującego się między taflami, niezupełnie ściśle przylegającymi i umożliwienie wejścia nowej ilości powietrza. Opór ten, ujawniający się tak dotykalnie między taflami, ma miejsce także między cząstkami ciała stałego i przynajmniej w części stanowi przyczynę ich spójności.

Sa gredo: Proszę, zatrzymajcie się i pozwólcie mi zauważyć jedną okoliczność, która właśnie przychodzi mi na myśl: mianowicie, skoro dolna tafla podniesiona zostaje przez górną, zwłaszcza przy bardzo szybkim zdejmowaniu ostatniej, to wydaje mi się jasnym, że wbrew mniemaniu filozofów a zwłaszcza Arystotelesa, ruch w próżni nie mógłby natychmiast nastąpić; bo gdyby tak było, to musiałyby obie tafle bez żadnego oporu się rozłączyć, gdyż ten sam czas winien wystarczać, aby się od siebie oderwały i aby próżnia, między nimi wytworzona, wypełniona została przez powietrze otaczające. Zatem z tego, że dolna tafla nie oddzieliła się, wnioskować należy: że w próżni ruch nie może powstać w jednej chwili i że między taflami tworzy się próżnia, krótki czas przynajmniej, ten właśnie, który upływa podczas ruchu pomiędzy wejściem a wyjściem otaczającego powietrza — i dalej, że gdy żadna próżnia nie powstaje, to nie może być mowy o ruchu powietrza otaczającego. Należy przeto powiedzieć, że właśnie przez gwałtowność ruchu a przeciw prawu natury powstaje czasem próżnia (jakkolwiek sędzę, że nic nie może się dziać przeciw naturze, chyba to co jest niemożliwe, a to też nigdy się nie dzieje). Tu wszakże spotykam inną trudność, mianowicie tę, że jakkolwiek badanie przekonywa mnie o prawdziwości wniosku, umysł wszakże nie jest całkowicie zadowolony z przyczyny, które należy przypisać ten skutek. Bo rozdzielenie obu tafli następuje przed powstaniem próżni, która jako skutek wytwarza się po niem; a ponieważ, jak mi się zdaje, przyczyna, jeżeli nie następuje równocześnie z działaniem, winna je poprzedzać i pozytywny skutek winien odpowiadać pozytywnej przyczynie, — to nie pojmuję, jak przyczyną przylegania obu tafli i oporu, jaki one stawiają rozdzielaniu, więc działaniu, które już są aktualne, może być próżnia, której jeszcze niema i która dopiero ma powstać. Rzeczy zaś, których niema, nie mogą wywierać żadnego działania, zgodnie z niezachwianem orzeczeniem Filozofa.

Simplicio: Jeżeli przyjmujecie tę zasadę Arystotelesa, to



MP. 2813

spodziewam się, że nie będziecie przeczyli innej pięknej jego zasadzie, a mianowicie następującej: natura nie bierze się do tworzenia tego, co się opiera swemu powstaniu: i w tej zasadzie tkwi rozwiązanie naszej zagadki, gdyż próżnia sama przez się opiera się swemu powstaniu, a jednocześnie natura wzbrania się uczynić to, co mogłoby wytworzyć próżnię: to właśnie ma miejsce przy rozłączaniu tafli.

Sagredo: Kwestja, jaką podniosłem, rozwiązana zostaje przez uwagę p. Simplicia, a wracając do zawiazku naszej rozmowy, wy-daje mi się, że opór stawiany wytworzeniu próżni stanowi wystarczającą podstawę spoistości między cząstkami ciała stałego, czy to będzie kamień, metal, albo inny materiał jeszcze mocniejszy. Bo jeżeli każde działanie ma zawsze swoją przyczynę, jak to zawsze myślałem, albo też skoro można wykryć kilka przyczyn, to te wszystkie sprowadzić się dają do jednej: więc dlaczegożby tu próżnia, która na pewno się wytwarza, nie miałaaby stanowić podstawy wystarczającej wszystkich objawów wytrzymałości.

Salviati: Nie będę się obecnie zajmował kwestją, czy sama próżnia, bez innej pomocy, wystarcza do spojenia cząstek ciała stałego; ale twierdzić mogę, że ta przyczyna, która wprowadzie istnieje i wystarcza do objaśnienia przylegania tafli, nie tłumaczy dostatecznie wytrzymałości walca marmurowego albo metalowego, który, silnie rozciągany, w końcu ustępuje i pęka. A jeżeli znajdę sposób rozróżnienia rozpoznanego już oporu, pochodzącego z próżni, od wszelkich innych, jakiegokolwiek one są, razem z nim tworzących spójność ciał i jeżeli będę wam mógł wykazać, że żadna główna przyczyna, sama jedna nie wystarcza do wytworzenia tego skutku, to przyznacie, że trzeba tu wprowadzić inną. Pomóżcie mu, p. Simplicio, bo p. Sagredo jest w niepewności co do odpowiedzi.

Simplicio: Pewno wstrzymanie się p. Sagredo ma inną przyczynę, bo nie można mieć wątpliwości co do tak jasnego i koniecznego wniosku.

Sagredo: Odgadłeś, panie Simplicio. Myślałem o tem, czy, jeżeli milion złota rocznie, jaki przychodzi z Hiszpanji na opłacenie żołnierzy, nie wystarcza, to potrzeba zrobić inny zapas pieniędzy dla utrzymania armji. Ale mów pan dalej, p. Salviati, przyjmując, że zgadzam się na wniosek, do jakiego dochodzisz i pokaż nam sposób oddzielenia działania próżni od innych działań, a mie-

rzając próżnię, pokaż, jak ona się zmniejsza przez działanie, o których mowa.

Salviati: Bądźcie więc dobrej myśli. Zakomunikować Wam pragnę, w jaki sposób potęga próżni może być oddzielona od innych sił i jak ją można zmierzyć. Dla jej wyosobnienia weźmy pod uwagę ciało, które siłą dążącej do rozerwania jego cząstek nie stawia innego oporu jak tylko próżnię, a nasz akademik dowiódł w swoim traktacie, że takim ciałem właśnie jest woda. Jeżeli więc tak umieścimy walec z wody, aby można było wykazać jego wytrzymałość na rozerwanie, to ta wytrzymałość nie będzie miała innej przyczyny, jak tylko opór stawiany przez próżnię. Dla wykonania takiego doświadczenia obmyśliłem przyrząd, który rysunkiem łatwiej niż słowami mogę wam przedstawić. Niech będzie CABD (tabl. I, rys. 4) przekrój cylindra metalowego lub szklanego, którego wnętrze byłoby jak najregularniej obtoczone i do tego wnętrza przylegał ściśle wałek pełny z drzewa EFGH, mogący się posuwać w cylindrze i mający we środku otwór, przez który przechodzi zatyczka żelazna, zakrzywiona u spodu K, a mająca na wierzchu zgrubienie ostrokątne I, zamykające ściśle lejkowaty wierzch otworu w wałku pełnym, gdy zatyczka pociągnięta zostanie do dołu. W cylindrze próżnym AD jest więc tłok drewniany EH nie dochodzący na 2 do 3 palców do wierzchu cylindra. Cylinder, postawiony spodem do góry, wypełniony zostaje wodą, która wchodzi przez otwór wokół zatyczki I, gdy ta jest trochę wepchnięta do środka a przez tenże otwór wychodzi powietrze. Po wyjściu wszystkiego powietrza, przez pociągnięcie zatyczki zamykamy szczelnie otwór i wtedy odwracamy cylinder i zawieszamy na haczyku naczynie, do którego możemy sypać tyle piasku lub innego ciężaru aż się w końcu powierzchnia tłoka EF oderwie od wody. Ponieważ trzymały się one tylko siłą oporu próżni, przeto po zważeniu tłoka, drutu i naczynia otrzymamy wielkość tego oporu. Jeżeli na walcu marmurowym lub szklanym, zawiesimy tyle ciężaru ile waży takiż walec wody i dodamy jeszcze tyle, że razem z ciężarem marmuru mieć będziemy ciężar wszystkich wymienionych obciążeń, to, gdyby wtedy nastąpiło rozerwanie, moglibyśmy przyjąć za rzecz niewątpliwą, że próżnia stanowi jedyną przyczynę wytrzymałości marmuru. Skoro wszakże, pod tym ciężarem ani pod cztery razy większym, nie można rozerwać marmuru, to należy wnioskować że opór próżni wynosi tylko piątą część ogólnej wytrzymałości, a jej reszta jest cztery razy większa od oporu próżni.

Simplicio: Nie można przeczyć, że wynalazek jest dowcipny, zauważyłem wszakże wiele trudności, które mi przedstawiają rzecz całą, jako wątpliwą; któż bowiem zapewni, że powietrze nie przechodzi przez szkło lub tłok, jakkolwiek są one uszczelnione pakułami lub inną materją ściślejszą; a następnie, choćby koniec I zatyczki, zamykał ściśle rozszerzenie ostrokątowego otworu, wypadłoby je może wysmarować woskiem, lub terpentyną. Dlaczegożby zresztą cząstki wody nie miały się rozchodzić i rozrzedzać; dlaczegożby nie wchodziło powietrze albo inne pary lub substancje, subtelniejsze od porów drzewa a nawet szkła?

Salviati: Nader zručnie przedstawia nam p. Simplicio trudności, poczęści dając nam sposoby ich usunięcia, zwłaszcza co się tyczy przechodzenia powietrza przez drzewo i szkło. Zaznaczę wszakże, że możemy jednocześnie uważać, jako nabyte, nowe wiadomości, jeżeli powyższe trudności istotnie mają miejsce. Bo gdyby woda, choćby przy użyciu siły, była z natury swej rozciągliwa, jak się to dzieje z powietrzem, to ujrzelibyśmy, że tłok się opuszcza; a gdybyśmy w górnej części cylindru szklanego urządzili w środku zagłębienie, jak w V, to zbierać się tam będzie wszelka materja subtelna, przechodząca przez pory drzewa lub szkła, albo też powietrze przechodzące przez tłok. Gdy wszakże nie widzimy tego, to musimy uważać doświadczenie jako wykonane z całą ściślnością i uznać, że woda nie jest rozciągliwa, a szkło jest nieprzenikliwe nawet dla najsubtelniejszych substancyj.

Sagredo: Ja zaś cieszę się, że z tej rozprawy wyłoniła się przyczyna zjawiska, które mi się przez długi czas wydawało cudownem i niepojętem. Obserwowałem studnię, na której dla czerpania wody ustawił ktoś pompę, w nadziei otrzymania wody z mniejszym trudem a w większej ilości niż przy użyciu zwykłych wiadler. Pompa ta miała tłok i wentyl tak wysoko umieszczone, że podawała wodę przez ssanie a nie przez tłoczenie, jak pompy mające takie urządzenie u spodu. Pompa dostarczała wody obficie, gdy poziom w studni dochodził do pewnej wysokości, skoro wszakże poziom się obniżał, pompa przestawała działać. Sądziłem zrazu, zaobserwowawszy taki przypadek, że pompa zepsuta i uprzedziłem majstra dla naprawy, ten wszakże zapewnił mnie, że nie ma żadnego braku a tylko woda zbyt nisko stojąca w studni nie może być podawana na taką wysokość; nadmieniał, że ani pompy ani inne maszyny, podnoszące wodę przez ssanie, nie mogą jej podnosić ani na włos wyżej niż 18 łokci i czy pompa będzie sze-

roka czy wąska, to taka będzie zawsze najwyższa granica podnoszenia. A ja dotychczas nie wiedziałem, że podobnie jak sznur, drzewo lub szkło, łatwiej jeszcze słup wody się rozrywa, gdy jest rozciągany działaniem własnego ciężaru. Cóż bowiem innego rozciągamy w pompie jeżeli nie walec pełen wody u góry umocowany i wciąż wydłużany, aż dopóki nie dojdziemy do granicy, przy której dalsze wydłużenie rozrywa walec wodny jak sznur.

Salviati: Rzecz się ma tu w ten sam sposób i ponieważ właśnie 18 łokci stanowi tę granicę, przy której każda ilość wody, w rurze szerokiej czy wąskiej lub jaknajwęższej, tak wąskiej jak słomka, może być podnoszona, to będziemy zawsze, bez względu na to czy przekrój będzie większy lub mniejszy, mieli wartość oporu jaki stawia próżnia w słupie utworzonym z jakiegokolwiek materji, gdy tylko grubość słupa jest taka jak wewnętrzne światło rury. I jakkolwiek wiele już mówiliśmy o tem, to jeszcze zaznaczę jak łatwo znaleźć można, do jakiej długości ma dochodzić słup, czy to drut czy sztaba dowolnej grubości, aby się rozrywała pod działaniem własnego ciężaru. Weźmy np. drut miedziany, jakiegokolwiek długości, przytwierdźmy jego górny koniec gdziekolwiek i obciążajmy coraz więcej koniec dolny, aż dopóki drut się nie przerwie. Jeżeli się przerwie przy pięćdziesięciu funtach obciążenia, to jasne jest, że pięćdziesiąt funtów miedzi, dodane do własnego ciężaru drutu, wynoszącego zaledwie $\frac{1}{8}$ uncji, i wyciągnięte w takiż sam drut, dadzą długość maximalną drutu miedzianego, mogącego wytrzymać własny ciężar. Zmierzmy więc, jaka jest długość tego drutu, który się przerywa. Jeżeli ma jeden łokieć długości, to ponieważ waży $\frac{1}{8}$ uncji i unosi nadto 50 funtów miedzi, które stanowią 4800 ósmych części uncji, to wynika stąd, że drut miedziany, jakiegokolwiek grubości może utrzymać swój ciężar własny, o ile jego długość nie przenosi 4800 łokci i dalej że pręt miedziany, aby mógł utrzymać swój ciężar do tej długości, winien mieć wytrzymałość tyle razy większą od oporu próżni, ile razy jego ciężar jest większy od ciężaru pręta wodnego tej samej grubości, a długości 18 łokci. A ponieważ miedź jest 19 razy cięższa od wody, przeto część wytrzymałości pochodząca od oporu próżni wynosi tyle ile ciężar 2 łokci pręta tejże grubości. Tak samo obliczyć można długość każdego sznura, liny lub innego materiału, mogąca utrzymać własny ciężar oraz część wytrzymałości, jaka w tem przypada na próżnię.

S a g r e d o: Pozostaje jeszcze abyście wyjaśnili, z czego się skła-

da pozostała część wytrzymałości, albo, co to jest za środek wiążący czy zlepiający, który utrzymuje w zetknięciu cząstki ciała stałego, oprócz tego który polega na próżni. Nie mogę bowiem wyobrazić sobie takiego kleju, któryby w wielkim ogniu nie spalił się lub nie zniszczył w ciągu 2, 3 i 4 miesięcy a nawet 10 lub 100. Gdyż srebro, złoto lub szkło, pozostawszy tak długo roztopione, po oziębieniu wracają do stanu stałego i do poprzedniej spoistości cząstek. Nadto też samą trudność, którą mam w spoistości cząstek szkła, będę znów miał przy rozważaniu spoistości cząstek kleju, lub innego środka wiążącego.

Salvati: Powiedziałem przed chwilą: bądźcie dobrej myśli i jeszcze o to się troszczę, i jeszcze odczuwam ręką, że to niewątpliwie opór próżni nie pozwala rozdzielić dwóch tafli, jak tylko z wielkim wysiłkiem i że dwie duże połowy słupa z marmuru lub bronzu trzymają się razem jeszcze mocniej. Nie sądzę też, aby to mogło polegać na spójności najmniejszych cząstek, aż do najdrobniejszych tej materji. Każde zaś działanie musi mieć pewną istotną i główną przyczynę a ja, nie znajdując innego środka wiążącego, dlaczegożby nie miał się starać o zbadanie, czy może jednak sama próżnia będzie tu wystarczająca dla objaśnienia?

Simplicio: Ponieważ dowiedliście, że opór wielkiej próżni, przy rozrywaniu wielkich części ciała stałego, jest bardzo mały w porównaniu ze spoistością małych cząsteczek, dlaczegoż nie chcecie przyjąć za niemniej pewne, że ten opór jest czemś różnem od próżni?

Salvati: Na to odpowie p. Sagredo, że jednak wszystkich pojedynczych żołnierzy płaci się pieniędzmi, które zbiera się przez ogólne podatki w soldach i denarach podczas gdy miljona złota potrzeba na opłacenie całej armji. I kto wie, czy inne maleńkie próżnie nie działają właśnie przy najmniejszych cząsteczkach, tak że wszędzie też sama moneta trzyma wszystkie części złączone. Powiadam wam to, co mi w tej chwili przychodzi na myśl i nie podaję tego, jako prawdę absolutną, lecz jako pomysł jeszcze nie przetrawiony, pozostawiając go głębszej rozwadze. Weźcie z niego, co się wam podoba, a resztę osądźcie jak chcecie. Gdy widziałem wielokrotnie, jak ogień przebiega wężykiem między najmniejszymi cząstkami metalu, które mocno się ze sobą trzymały a w końcu się rozpadały i jak potem, wyjęte z ognia wracały do pierwotnej spoistości, przyczem ilość złota zupełnie się nie zmniejszyła, a bardzo mało przy innych metalach i to po długim czasie pozostawiania w roztopie; myślałem wtedy, że się to dzieje w ten sposób, że najmniejsze cząstki ognia

wchodzą w ciasne pory metalu (do których, z powodu ich szczupłości, ani powietrze ani żaden inny płyn wejść nie może); tym sposobem mogłyby być wypełnione najmniejsze próżnie między cząstkami, co by zwolniło najmniejsze cząstki siły, z którą się te próżnie wzajemnie przyciągają i sprzeciwiają rozsuwaniu; gdy przez to cząstki mogą się swobodnie poruszać, masa staje się płynną i pozostaje taką dopóty, dopóki ogień ją przenika; gdy zaś ten ustaje, pozostają pierwsze próżnie i wraca przyciąganie wiążące ze sobą cząstki. Na zarzut zaś p. Simplicia można odpowiedzieć, że jakkolwiek te próżnie są bardzo małe a więc opór każdej z nich z łatwością może być przewyciężony, to jednak niezliczona ich liczba, mnoży niezliczenie (że się tak wyrażę) wytrzymałość; jaka zaś i jak wielka siła powstać może z olbrzymiej liczby, bardzo słabych, razem złączonych momentów, o tem sądzić można przez analogję, widząc jak ciężar miljona funtów, wiszący na bardzo grubej linie konopnej, obniża się, ale w końcu zostaje przewyciężony, gdy w konopie wchodzą niezliczone cząstki wody, które albo wiatr południowy przynosi, albo też, które jak delikatne chmurki unoszone są przez powietrze. Przeciskają się one od jednego włókna do drugiego w najściślejszej linie, i nawet zawieszony olbrzymi ciężar nie może im wzbronąć dostępu: tak się przeciskają przez cienkie szpary i zgrubiają linę, skręcając ją, przez co podniesiony być może największy ciężar.

S a g r e d o: Niema zatem wątpliwości, że skoro pewien opór nie jest nieskończenie wielki, to może być zawsze pokonany przez wielką liczbę bardzo małych sił; tak że nawet pewna liczba mrówek może wciągnąć na ląd okręt naładowany zbożem; możemy bowiem obserwować codziennie, jak jedna mrówka niesie ziarno; na okręcie zaś niema nieskończonej liczby ziarn, a tylko znajduje się ich tam pewna liczba, którą pomyśleć nawet można cztery lub sześć razy większą; może więc pewna liczba mrówek wciągnąć okręt ze zbożem na ląd. To prawda, że trzeba, aby ta liczba była bardzo wielką ale też sędzę że i pory w metalach są również bardzo liczne.

S a l v i a t i: Uważaliście jednak za niemożliwe, żeby ich liczba była nieskończoną.

S a g r e d o: Nie, skoro tylko metal jest masą skończoną, inaczej...

S a l v i a t i: Inaczej co? Ale skoro już doszliśmy do paradoksów, zobaczmy, czy nie możnaby dowieść jakim sposobem, że na pewnej skończonej długości ciągłej, może się znajdować nieskończenie wiele próżni. Zobaczymy jednocześnie, czy się nie znajdzie, jeśli już nie co innego, to przynajmniej przybliżone rozwiązanie najwięcej zadzi-

wiającego zadania, zaliczonego przez Arystotelesa do godnych podziwu, a dodam, należących do mechaniki; rozwiązanie to mogłoby być niemniej zadowalające, jak jego własne a jednocześnie odmienne od rozwiązania uczonego monsignora di Guevara. Wprzód wszakże trzeba podać twierdzenie, nie tknięte przez innych, od którego zależne jest rozwiązanie zadania i z którego, jeśli się nie mylę, dadzą się wyciągnąć inne wiadomości nowe i godne podziwu. Dla ściślejszego zrozumienia narysujmy figurę. (Tabl. I, rys. 5) Niech będzie równoboczny i równokątny wielobok, o jakiegokolwiek liczbie boków, ze środkiem w G. Mamy więc sześciokąt ABCDEF, w który wpisujemy drugi spółśrodkowy HIJKLMN. Przedłużmy bok AB większego wieloboku do S i odpowiednio bok HI mniejszego w tym samym kierunku, tak że HT będzie równoległe do AS, wreszcie przez środek G poprowadźmy równoległą GV. Gdy to jest zrobione, toczmy wielobok większy, razem z małym, po linii AS. Jasne jest, że w początku toczenia, B stoi w miejscu, A się podnosi, a C obniża zakreślając łuk CQ, dopóki się bok BC nie położy na linii AS, jako $BQ = BC$. Przy tym obrocie wszakże, wierzchołek I małego wieloboku wzniesie się ponad linię IT, bo IB jest nachylone względem AS a I nie wcześniej dojdzie do równoległej IT, aż gdy C dojdzie do Q: wtedy I padnie na O, po opisaniu łuku IO, ponad HT a IK zajmie położenie OP. Ale środek G będzie tymczasem w ruchu po nad linią GV i nie wprzód do niej wróci, jak po przebieżeniu łuku GC. Po zrobieniu tego pierwszego kroku, będzie większy wielobok leżał bokiem BC na BQ, bok małego wieloboku IK na OS, podczas gdy cała droga IO zostanie przeskoczona bez dotknięcia a środek G przejdzie do C, przebywając drogę po za równoległą GV. W końcu cała figura zajmie położenie podobne do pierwszego, tak że przy dalszym obrocie i drugim kroku, bok większego wieloboku DC położy się na QX, bok małego wieloboku KI, po przekroczeniu PX na YZ a środek G, poruszający się wciąż ponad GV, zejdzie tam dopiero w R, po wielkim skoku CR. W rezultacie, większy wielobok, tocząc się po AS, odetnie sześć linii, równych jego obwodowi, bez żadnych przerw; wielobok mniejszy pokryje również sześć jednakich odcinków, równych jego obwodowi, ale poprzegradzanych pięcioma łukami, których cięciwy nie będą dotknięte, stanowiąc części linii HT; wreszcie środek G w sześciu punktach tylko schodzić się będzie z równoległą GV. Pojmujecie więc że przestrzeń HT, przebyta przez mały wielobok, jest prawie równą AS, przebytej przez wielobok większy, od której jest mniejsza tylko o jedną cięciwę małego

go łuku, uważając linię HT razem z pięcioma łukami. Pragnąłbym teraz aby to, co wam przedstawiłem na przykładzie tych sześcioboków, okazało się wam również jasne przy innych wielobokach, z dowolną liczbą boków, a tylko do siebie podobnych, spółśrodkowych i razem ze sobą związanych, tak że przy toczeniu się większych rozważać można toczenie się mniejszych i że drogi przebieżone są prawie równe, o ile się dolicza przestrzenie pod łukami, nie dotknięte bokami mniejszego wieloboku. Niech więc będzie większy wielobok o 1000 boków, które odcinamy na przebytej przezeń drodze. Równocześnie mały wielobok przebiega prawie też samą drogę, dotknawszy się 1000 małych odcinków, przegrodzonych 1000 próżni, gdyż tak je możemy nazwać w przeciwieństwie do 1000 odcinków dotkniętych. To co powiedziałem nie przedstawia żadnej trudności ani wątpliwości. Ale powiedzcie mi, jeżeli około jakiego środka np. A, zakreslimy dwa koła spółśrodkowe, związane razem i jeżeli z końców ich średnic C i B, poprowadzimy dwie styczne CE, BF, a przez środek A równoległą AD i jeżeli toczyć będziemy koło większe po BF (i uczynimy BF równe obwodowi koła równie jak i linie CE i AD), to po jednym obrocie cóż się stanie z małym kołem i ze środkiem? Ten ostatni przebiegnie niewątpliwie całą długość AD a obwód małego koła dotknie się swemi punktami całej linii CE, w ten sam sposób jak to było poprzednio z wielobokiem; z tą jedyną różnicą, że tam linia HT nie we wszystkich punktach była dotykana przez mały wielobok, bo wiele małych odcinków było przeskoczonych, tu zaś przy kole nie może jego obwód opuszczać ani na chwilę linii CE i każdy jego punkt musi się na niej znajdować. W jaki więc sposób może mniejsze koło, bez przeskakiwania, przebiec drogę tak znacznie dłuższą od swego okręgu?

Sagredo: Sądzę, że możnaby powiedzieć, że równie jak środek koła, ciągniony po AD, dotyka się jej całej, jakkolwiek jest tylko jednym punktem, tak samo punkty małego koła, pociągane ruchem koła większego, mogą się przeslizgiwać po cząstkach linii CE.

Salviati: Nie może to mieć miejsca z dwóch przyczyn. Po pierwsze dla tego, że niema większego powodu utrzymywać, że dotykane, podobne do ślizgania się C, następuje na pewnej części linii CE a na innej jej części nie; gdyby zaś tak było, to musiałoby być nieskończenie wiele takich zetknięć (bo punktów jest nieskończoność) i ślizgań byłoby także nieskończenie wiele; a że każde ma pewną długość, to dałyby razem długość nieskończoną, podczas gdy linia CE jest skończoną. Powtóre dla tego, że wielkie koło, to-

cząc się, wciąż zmienia swój punkt zetknięcia, a więc nie może go nie zmieniać i koło małe, bo nie można jak tylko z B poprowadzić linii prostej do środka A, któraby równocześnie przechodziła przez C, tak że gdy wielkie koło zmienia swój punkt zetknięcia, to małe czyni toż samo, a żaden punkt małego koła nie dotknie więcej jak jednego punktu prostej CE. Nadto, przy toczeniu się wieloboków, każdy punkt małego obwodu przykładają się tylko do jednego punktu linii, która z tego obwodu została wyprowadzona, jak się to widzi łatwo, zważywszy, że IK jest równoległe do BC, a więc dopóki BC nie położy się na BQ, to linia IK pozostaje wzniesiona ponad IP i nie prędzej na niej się kładzie aż gdy BC padnie na BQ, a wtedy IK schodzi się z OP, ażeby się znów zaraz podnieść.

Sagredo: Przebieg jest istotnie bardzo ciekawy i nie widzę żadnego rozwiązania, mówcie przeto, co uważacie za odpowiednie.

Salvati: Wracając do powyżej rozważanych wieloboków, których ruch był zrozumiały i został pojęty, powiedziałbym, że jak przy wielobokach o 100000 boków droga przebieżona jest równa obwodowi większego wieloboku, t. j. owym 100000 boków ułożonym bez przerwy jeden za drugim a także równa 100000 boków mniejszego, poprzegradzanych 100000 miejsc pustych, — to tak samo przy kołach (które są wielobokami o nieskończonej liczbie boków) linia opisana jest równa nieskończenie wielu bokom wielkiego koła, w ciągłym następstwie i równa także nieskończenie wielu bokom małego koła, poprzegradzanym takąż liczbą miejsc pustych. A ponieważ liczba boków jest niezliczona więc nieskończoną także jest liczba przegradzających je miejsc pustych. Tam więc mamy nieskończenie wiele punktów pełnych, a tu nieskończenie wiele punktów, częścią pełnych a częścią pustych. I tutaj proszę zauważyć, że nie można, podzieliwszy linię na skończone i dające się przeliczyć części, zebrać następnie tych części w linię dłuższą od tej, jaką stanowiły przed podzieleniem, nie poprzegradzawszy ich pustymi miejscami; ale, wyobraziwszy sobie linię, podzieloną na nieskończenie wiele części nieskończenie małych, możemy z nich złożyć linię nieskończenie długą, bez ich przegradzania skończonymi miejscami pustymi a tylko nieskończenie małymi. I to, co mówię o liniach, odnosi się także do powierzchni ciał stałych, jeżeli te uważać będziemy jako złożone z nieskończonej liczby atomów; dzieląc bowiem ciała na części skończone, niewątpliwie nie możemy złożyć z tych części takich ciał, któreby zajmowały większe przestrzenie niż ciała pierwotne, bez przegradzania ich

miejscami pustymi, t. j. takimi, w których się żadna część ciała stałego nie znajduje; ale, jeżeli wyobrazimy sobie największe i ostateczne podzielenie ciała na pierwotne części składowe, t. j. na nieskończenie wiele nieskończenie małych cząstek, to możnaby z nich tworzyć bardzo wielkie ciała, bez przegradzania skończonymi pustymi przestrzeniami, a tylko wstawiając nieskończenie wiele nieskończenie małych miejsc pustych; w ten sposób np. można małą kulkę złota rozciągnąć na bardzo wielką przestrzeń bez przyjmowania skończonych miejsc pustych, jeżeli przyjmujemy, że złoto składa się z nieskończoności niepodzielnych.

Simplicio: Zdaje mi się że jesteście na śladzie owych próżni rozproszonych, pewnego starożytnego filozofa.

Salviati: Lecz nie dodajecie: tego filozofa, który przeczył boskiej opatrności, jak w podobnym przypadku zauważył w sposób mniej stosowny, przeciwnik naszego akademika.

Simplicio: Zauważyłem też i nie bez oburzenia, niechęć złe usposobionego przeciwnika, lecz nietylko przez delikatność unikam dotykania tych kwestji, a także dla tego, że wiem, jak mało one odpowiadają waszemu umiarkowaniu i wysokiemu wykształceniu, gdyż jesteście nie tylko religijni i pobożni, lecz także katolicy i bogobojni. Ale, wracając do naszego zadania, znajduję jeszcze wiele trudnych punktów w naszej rozmowie, z których prawdopodobnie nie będę mógł wybrnąć. Przedewszystkiem, jeżeli oba obwody kół są równe obu prostym CE, BF, tej ostatniej pełnej a tamtej ze wstawieniem nieskończenie wielu pustych punktów, to w jaki sposób może być linja AB, opisana przez środek a więc przez jeden punkt, uważaną jako równa zawierającym nieskończoności punktów? A przytem, to tworzenie linji z punktów, podzielnej z niepodzielnymi, skończonej z nieskończonością, wydaje mi się twardym orzechem do zgryzienia; przyjęcie zaś próżni, którą tak trafnie zbijał Arystoteles, prowadzi do tych samych trudności.

Salviati: Są one niewątpliwie a przytem inne jeszcze, ale zwróćmy uwagę na to, że znajdujemy się w dziedzinie nieskończenia wielkich i najmniejszych niepodzielnych, jednych niedościgłych dla swej wielkości a drugich dla małości; widzimy stąd, że mowa ludzka nie wystarcza do odpowiedniego ich wyrażenia; pozwolę sobie wszakże podać niektóre myśli, które jeżeli nie wyczerpią całkowicie kwestji, to jednak zasłużą na uwagę swą nowością: obawiam się jednak aby częste zbaczania z drogi nie wydały się wam niepotrzebnymi a przeto nie zbyt przyjemnymi.

Sagredo: Prosimy, pozwólcie nam korzystać z dobrodziejstwa i przywileju rozmowy z żywymi i przyjaciółmi, o rzeczach dowolnych a nie koniecznych, odmiennych od tych, które są traktowane w martwych księgach, budzących tysiące wątpliwości, z których żadna nie może być rozwiązana. Pozwólcie więc nam brać udział w rozważaniach, które się wam nasuną w ciągu rozmowy; a nie zbraknie nam czasu, gdyż żadne zajęcia obowiązkowe nie oderwą nas od rozpraw i rozwiązywania poruszanych kwestyj; zwłaszcza też należy rozwiązać wątpliwości jakie się nasuwały panu Simplicio.

Salviati: Niech więc tak będzie, skoro to wam przypada do gustu. A najprzód spytajmy, w jaki sposób pojedynczy punkt może się stać równym jednej linii. Nie widzę tu innego wyjścia, jak nieprawdopodobieństwo złagodzić drugim, podobnem albo większem, tak jak często rzecz cudowna zaćmiewa cud. Wyobraźcie sobie, że dwie równe powierzchnie, służące za podstawy dwom równym bryłom, zaczynają się jedna i druga powoli i równomiernie zmniejszać, w ten sposób wszakże, że nie przestają być sobie równymi w każdej chwili, aż w końcu jedna powierzchnia razem ze swoją bryłą zejdzie do jednej bardzo długiej linii, a druga z bryłą także zamieni się na jeden punkt, czyli, innemi słowy, z jednej mamy punkt a z drugiej nieskończenie wiele punktów.

Sagredo: Rzecz ta wydaje się istotnie zadziwiająca, to też prosimy o objaśnienie i dowód.

Salviati: Potrzeba do tego rysunku, gdyż dowód jest czysto geometryczny. Niech będzie półkole AFB, ze środkiem w C, (tabl. I, rys. 6) i otaczający je prostokąt ADEB; poprowadzimy linie proste z C do punktów D i E. Wyobraźmy sobie, że promień CF, prostopadły do AB i DE, stoi nieruchomo, a cała figura obraca się około niego, jako osi. Oczywiście prostokąt ADEB opisze walec, półkole AFB — półkulę a trójkąt CDE — ostrokrag. Przypuśćmy następnie, że półkula zostanie wyjęta, a pozostanie ostrokrag i reszta cylindra, którą dla kształtu podobnego do miski, nazwiemy poprostu miską; dowiedzimy najprzód, że miska i ostrokrag są równe; następnie, przeprowadziwszy płaszczyznę równoległą do koła, będącego podstawą miski, którego średnicą jest DE a środkiem F, dowiedzimy, że taka płaszczyzna, np. przechodząca przez GN, przecina miskę według GION a ostrokrag według HL w ten sposób, że reszta ostrokręgu CHL jest zawsze równa reszcie miski, której profil przedstawiają trójkąty GAI, BON; okaże się dalej, że podstawa te-

go ostrokągu, t. j. koło o średnicy HL, jest stale równe tej powierzchni kołowej, która stanowi podstawę reszty miski, a którą nazwiemy wstęgą o szerokości GI (zauważcie przytem jak są potrzebne określenia matematyków, nadające nazwy albo, że tak powiem, skrócone sposoby mówienia, zestawione i wprowadzone dla usunięcia kłopotliwego trudu, który musielibyśmy ponosić, nie umówiwszy się nazwać np. owej powierzchni — wstęgą kołową a ostrego wierzchu miski—okrągłą brzytwą). Jakkolwiek zresztą je nazwiecie, wystarczy przekonać się, że płaszczyzna, poprowadzona w jakiegokolwiek odległości ale równoległe do podstawy czyli do koła o średnicy DE, odetnie dwie bryły, zawsze równe sobie: wierzch ostrokągu CHL i wierzch brzytwy kołowej; a tak samo będą sobie równe obie powierzchnie podstaw tych brył, t. j. wspomniana wstęga i koło HL. Wynika stąd zadziwiające twierdzenie, że, gdy przypuścimy ciągle podnoszenie się płaszczyzny przecinającej i jej zbliżanie się do AB, to wciąż, tak bryły odcięte, jak i powierzchnie ich podstaw, będą sobie równe; aż w końcu tak obie bryły, jak i obie powierzchnie zamieniają się, jedno na koło a drugie na punkt, gdyż tem jest dla jednych ostry brzeg miski a dla drugich wierzchołek ostrokągu. Dalej, ponieważ przy ciąglem zmniejszaniu się obu brył, utrzymuje się stale wzajemna ich równość, przeto wnosić należy, że i ostatnie reszty pozostaną sobie równe i nie będzie jedna nieskończenie większą od drugiej: a więc obwód wielkiego koła może być przyrównany do jednego punktu. A toż samo co się dzieje z bryłami, odnosi się również do ich podstaw, które także, przy podnoszeniu się płaszczyzny przecinającej, utrzymują wzajemną równość, aż się w końcu zamieniają równocześnie, jedna na koło a druga na punkt. I dlaczegóż nie mielibyśmy ich uważać za równe, skoro są one ostatnimi resztami i śladami obu równych wielkości? Zauważcie jeszcze, że gdyby miska była tak wielka jak półkula nieba, to i wtedy jej reszta byłaby równa wierzchołkowi ostrokągu, chociaż stanowi ją koło, będące obwodem sklepienia niebios, a wierzchołek ostrokągu jest tylko punktem. Na podstawie takich rozumowań twierdzimy, że wszystkie okręgi kół, jakkolwiek są różne, mogą być nazwane równymi, a każdy z nich równy jednemu punktowi.

Sagredo: Rozumowanie wydaje mi się tak pięknem i cennem, że choćbym mógł, nie chcę mu nic przeciwstawiać, bo byłoby świętokradztwem naruszyć tę piękną budowę jakim pedantycznym napadem, to też dla zadowolenia nas dajcie tylko dowód geometryczny stałej równości obu brył i ich podstaw; nie jest on chyba

zbyt trudnym, a rozważanie filozoficzne było tak subtelne, że od tego zależy wniosek ostateczny.

Salviati: Dowód jest łatwy i krótki. Wróćmy do naszego rysunku (tabl. I, rys. 6), na którym kąt IPC jest prosty, kwadrat promienia IC równy kwadratowi dwóch boków IP, PC. Promień IC jest równy AC, a AC równe GP, CP równe PH; a więc kwadrat z GP jest równy obu kwadratowi z IP i PH i poczwórne poczwórnemu, czyli kwadrat z GN równy kwadratowi z IO i HL; że zaś powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty ze średnic, więc powierzchnia koła o średnicy GN jest równa dwóm powierzchniom kół o średnicach IO i HL; odejmując po obu stronach powierzchnię koła o średnicy IO, zostaje reszta powierzchni koła GN równa kołu o średnicy HL. Oto co się tyczy pierwszej części. Co do drugiej, to tymczasem pominiemy dowodzenie, bo dla naszego przypadku wystarcza, gdy dowiedzieliście się, że wzmiankowane powierzchnie są zawsze równe i że przy postępującym ich zmniejszaniu jedna zamienia się na punkt a druga na koło jakiegokolwiek wielkości, gdyż tylko ten wynik budził nasz podziw.

Sagredo: Piękny dowód odpowiada zadziwiającemu rozważaniu. Powiedzcie nam coś teraz o drugiej kwestji, jaką podniósł p. Simplicio, jeżeli macie co szczególnego do powiedzenia w tej sprawie, czego nie przypuszczam, gdyż spór ten wielokrotnie był już rozstrząsany.

Salviati: Mam pewną myśl, ale najprzód przypomnę, co powiedziałem, że nieskończoność sama przez się jest równie niezrozumiała jak i cząstki niepodzielne; bo próbujecie je zestawić: jeżeli chcemy złożyć linię z punktów niepodzielnych, to te ostatnie muszą być nieskończenie małe, musimy więc jednocześnie badać nieskończoność i niepodzielność. Przy podobnych zadaniach przedstawili mi się różne punkty widzenia, z których najważniejsze nie od razu przyszły mi na myśl, lecz dopiero nasuwają się w trakcie rozmowy, gdy dochodzę do zarzutów wyrażonych przez was a zwłaszcza przez pana Simplicia, gdyż bez tej pobudki pozostałyby we śnie mej fantazji. To też ze zwykłą swobodą pozwolę sobie je przedstawić, gdy się wynurzą nasze ludzkie chimery, tak bowiem należy je nazwać w porównaniu z wiedzą nadprzyrodzoną, jedyną prawdziwą, rozwiązującą nasze kwestje sporne i służącą za pewnego przewodnika w naszym ciemnym i niepewnym labiryncie myśli.

Główny zarzut czyniony tym, którzy tworzą ciągłość z niepodzielności jest ten, że jedna niepodzielnośćka, dodana do drugiej nie

daje wielkości podzielnej; gdyby bowiem tak było, wynikałoby stąd, że i niepodzielnostka jest podzielna, bo skoro dwie niepodzielnostki np. dwa punkty dają razem pewną ilość, stanowiącą linię podzielną, to jeszcze więcej podzielną byłaby linja złożona z trzech, pięciu, siedmiu lub innych wielkości nieparzystych; a podzielenie następnie każdej takiej linji na dwie połowy przecięłoby na dwoje niepodzielnostkę leżącą w środku. Tego, jak i innych podobnych zarzutów uniknąć można, mówiąc, że nie tylko dwie, ale dziesięć, sto i tysiąc niepodzielnostek, nie mogą utworzyć wielkości podzielnej, lecz tylko gdy ich jest nieskończenie wiele.

Simplicio: Tu nasuwa się wątpliwość, jak mi się zdaje nierozwiązalna i ponieważ właśnie możemy mieć linje nierównej długości, z których każda składa się z nieskończenie wielu punktów, to musimy wnosić, że wśród rzeczy jednego rodzaju znaleźć można jedną większą od nieskończoności, bo nieskończoność punktów większej linji jest przecie większą od nieskończoności punktów linji mniejszej. Będzie więc jedna nieskończoność większą od drugiej, co wydaje mi się zupełnie niezrozumiałem.

Salvati: Są to trudności, stąd powstające, że naszym skończonym umysłem nie możemy rozważać nieskończoności, bo przypisujemy jej te własności, które widzimy w rzeczach skończonych i ograniczonych a które tu się nie nadają, bo pojęcia większości, mniejszości i równości nie mogą być stosowane do nieskończoności i niepodobna mówić o większych, mniejszych lub równych nieskończonościach. Nasuwa się przykład, który przedstawię w zapytaniach do p. *Simplicia*, skoro on wzbudził dyskusję.

Przyjmuję najprzód, że wiadomo wam dobrze, które liczby są kwadratami, a które nie.

Simplicio: Wiem dobrze, że kwadratem jest iloczyn z pewnej liczby, pomnożonej przez siebie samą, i tak 4, 9 są kwadratami z 2 i 3.

Salvati: Wybornie. Pamiętajcie również, że tak samo, jak iloczyny noszą nazwę kwadratów, to czynniki, czyli liczby przez siebie mnożone nazywane są bokami albo pierwiastkami; inne znów, nie składające się z liczb przez siebie pomnożonych, nie są kwadratami. Jeżeli więc powiem, że wszystkie liczby, kwadraty i nie kwadraty, stanowią więcej niż same kwadraty, to wszak wyrażam ścisłą prawdę?

Simplicio: Nie mogę powiedzieć inaczej.

Salvati: Teraz jeżeli się zapytam, ile jest kwadratów, to można słusznie odpowiedzieć, że tyle ile pierwiastków, bo każdy kwa-

drat ma swój pierwiastek i każdy pierwiastek — swój kwadrat, żaden kwadrat nie ma więcej pierwiastków i żaden pierwiastek więcej kwadratów, jak tylko jeden.

Simplicio: Zupełna prawda.

Salvati: Ale jeżeli zapytam, ile jest pierwiastków, to nie można przeczyć, że są one równie liczne, jak cały szereg liczb, gdyż niema liczby, któraby nie była pierwiastkiem jakiego kwadratu. Skoro to jest ustalone, to powiedzieć należy, że tyle jest kwadratów ile liczb, gdyż tyle jest kwadratów ile pierwiastków, a pierwiastkami są wszystkie liczby; a że, jak powiedziałem na początku, więcej jest liczb niż kwadratów, to w większej swej części nie są one kwadratami. I rzeczywiście im większe liczby bierzemy pod uwagę tem bardziej zmniejsza się wśród nich liczba kwadratów, bo do 100 mamy 10 kwadratów czyli $\frac{1}{10}$, do 10000 — $\frac{1}{100}$ a do 1000000 — tylko $\frac{1}{1000}$, a do liczby nieskończonej, gdybyśmy mogli ją pomyśleć — musielibyśmy powiedzieć, że jest tyle kwadratów ile wszystkich liczb razem.

Sagredo: Cóż więc robić, aby kwestję rozwiązać?

Salvati: Nie widzę innego wyjścia, jak powiedzieć: nieskończenie wiele jest liczb, nieskończenie wiele kwadratów i nieskończenie wiele pierwiastków. Wielość kwadratów nie jest ani większą ani mniejszą od wielości liczb i w ostatecznym wniosku, pojęcia równości większości i mniejszości nie stosują się do nieskończoności a tylko do ilości skończonych. To też p. *Simplicio* przedstawia mi parę linii nierównych i pyta, jak to być może, aby w większej nie było więcej punktów jak w mniejszej, odpowiadam że niema tam ani więcej, ani mniej, ani tyleż, tylko w każdej jest nieskończenie wiele. I rzeczywiście, gdybym był mu odpowiedział, że jedna linja ma tyle punktów ile jest kwadratów, druga większa — ile liczb, a trzecia najmniejsza — ile sześciątów, nie byłbym mu dał więcej zadowalającej odpowiedzi, przyznając jednej linji więcej punktów niż innym, a jednak wszystkim nieskończenie wiele. Tyle, co się tyczy pierwszej trudności.

Sagredo: Proszę, zatrzymajcie się chwilę i pozwólcie mi dodać moje myśli, które mi przychodzą do głowy. Zdaje mi się, że z tego, co było powiedziane, wynika, że nie można twierdzić, ani aby jedna nieskończoność była większą od drugiej, ani też, aby nieskończoność była większa od wielkości skończonej; bo gdyby jaka liczba nieskończona była większą np. od miliona, to wynikałoby stąd, że przechodząc od miliona do liczb coraz większych, dojść

można do nieskończoności; tak zaś nie jest: przeciwnie, jeżeli przechodzimy do liczb coraz większych, tem więcej oddalamy się od nieskończenia; bo, im większe bierzemy liczby, tem rzadsze między niemi są kwadraty, a w liczbie nieskończonej nie może być mniej kwadratów, niż wszystkich liczb; gdy więc przechodzimy do coraz większych liczb, oddalamy się od liczby nieskończonej.

Salviati: Wnioskujemy więc z waszego dowcipnego rozważania, że właściwości: większość, mniejszość, równość, nie mają miejsca nie tylko między nieskończonościami, ale także między nieskończonością a skończonością.

Przechodzę teraz do innego rozważania. Ponieważ linja i wszelka ciągłość jest podzielna na części w dalszym ciągu podzielne, to nie można przeczyć wnioskowi, że linja składa się z nieskończenia wielu cząstek niepodzielnych, gdyż z jednego podziału i dalszych dzielen bez końca wynika, że cząstek jest nieskończenie wiele, bo inaczej dzielenie musiałoby mieć swój koniec; a skoro wielość cząstek jest nieskończona a nie skończona, więc nieskończenie wiele skończonych wielkości tworzy razem wielkość nieskończoną i tak dochodzimy do ciągłości, złożonej z nieskończenia wielu cząstek niepodzielnych.

Simplicio: Ale skoro możemy prowadzić dalej dzielenie na części skończone, to dlaczego wprowadzamy tam koniecznie nieskończoności.

Salviati: Właśnie ta możność dzielenia bez końca zmusza do tworzenia całości z nieskończoności. Bo, aby uniknąć sporu, powiedzcie mi, czy, według waszego mniemania, części ciągłości są skończone, czy nieskończone.

Simplicio: Utrzymuję że są nieskończone i skończone, potencjalnie nieskończone, aktualnie skończone. Pod »potencjalnie« rozumiem »przed wszelkiem dzieleniem«; »aktualnie« znaczy »po dokonanych podziale«; bo istotnie nie można sobie wyobrazić części wcześniej niż po podziale dokonany (lub naznaczony); przed tem zaś są one potencjalnemi.

Salviati: Więc linja długości 20 cali nie może aktualnie zawierać 20 linij jednocalowych, dopóki nie zostanie na 20 części podzielona a przedtem zawiera je tylko potencjalnie! A zresztą niech i tak będzie, ale powiedzcie mi też, czy wskutek aktualnego dokonania podziału wzrasta długość danej linji, czy się zmniejsza, czy też pozostaje nie zmieniona?

Simplicio: Ani się powiększa, ani zmniejsza.

Salviati: I ja tak myślę. A więc części pewnej ciągłości, potencjalne lub aktualne, nie czynią całości większą lub mniejszą; lecz jest rzeczą jasną, że części skończone zawarte są aktualnie w swej całości, a gdy ich jest nieskończenie wiele, to całość będzie nieskończenie wielką; a więc części skończone, choćby tylko potencjalnie było ich nieskończenie wiele, nie mogą utworzyć innej całości, jak tylko nieskończoną; wynika stąd że wielkość skończona nie może się składać, aktualnie czy też potencjalnie, z nieskończeniem wielu części.

Sagredo: Jakże więc może to być prawdziwem, że ciągłość może być nieustannie dzielona na części, które znów dają się dzielić.

Salviati: Bo to rozróżnianie aktualności i potencjalności, czyni dla nas możebnem to, co dla innych wydaje się niemożliwem. Ale ja pragnę lepiej to rozwiązać, inaczej rozumując i na pytanie: czy części ograniczonej całości są skończone, czy nieskończone, dam odpowiedź wprost przeciwną tej, jaką dał p. Simplicio a mianowicie, że nie są ani skończone ani nieskończone.

Simplicio: Nie umiałbym tak odpowiedzieć, gdyż nie znam żadnego pojęcia pośredniego między »skończonem« a »nieskończonem« i utrzymywanie, że jakaś rzecz może być albo skończoną albo nieskończoną byłoby niesłusznem i wątpliwem.

Salviati: A mnie się zdaje, że tak jest. Jeżeli mowa o wielkościach niestałych, to zdaje mi się, że między skończonem a nieskończonem jest jeszcze coś trzeciego, pośredniego, a mianowicie to, co odpowiada każdej, danej liczbie; tak że w danym przypadku, na pytanie: czy części pewnej całości są skończone czy nieskończone, najlepsza byłaby odpowiedź, że nie są ani skończone ani nieskończone, lecz odpowiadające każdej danej liczbie; aby tak było, nie może się ich tam znajdować liczba ograniczona, bo w takim razie nie mogłyby odpowiadać liczbie większej; ale znów nie trzeba, aby ich było nieskończenie wiele, gdyż liczba ich jest dana i ta liczba nie może być nieskończenie wielką. I tak, możemy, stosownie do woli pytającego, przyznać danej linii 100, 1000, 10000 części skończonych, lecz nie można jej podzielić na nieskończenie wiele części. Godzę się więc z panami filozofami, że ciągłość zawiera tyle części, ile się im podoba i dodaję że zawiera je aktualnie lub potencjalnie, według ich gustu i upodobania; nadmieniam wszakże, że tak samo jak w linii dziesięciołokciowej mieści się dziesięć linii łokciowych, dwadzieścia półłokciowych a czterdzieści ćwierćłokciowych, to również mieści ona w sobie nieskończenie wiele

punktów; nazwijcie je aktualnemi lub potencjalnemi, jak chcecie, co do mnie, składam się w tym względzie panie Simplicio na wasz pogląd i sąd.

Simplicio: Nie mogę nie pochwalić waszego rozważania, lecz mam wielką obawę, że to równoczesne zawieranie punktów i części skończonych, nie jest zupełnie ścisłe; to też nie będzie wam tak łatwo podzielić danej linii na nieskończenie wiele punktów, jak owym filozofom na 10 łokci lub 40 ćwierćłokci; wreszcie wydaje mi się niemożliwem doprowadzenie do skutku takiego podziału, tak że to będzie czynność potencjalna a nie może się stać aktualną.

Salviati: Skoro rzecz jest tak trudna i tylko z zachodem i możem może być w ciągu długiego czasu przeprowadzona, to przez to jeszcze nie jest niemożliwą, gdyż sędzę, że nie możecie równie łatwo podzielić linii na 1000, na 937 albo na inną pierwszą liczbę części. Lecz jeżeli ten podział, uważany przez was za niemożliwy, sprowadzę do krótkiej czynności, tak prostej, jak podział na 40 części, czy wtedy go przyjmiecie?

Simplicio: Ten sposób postępowania przypadłby mi do gustu; a na pytanie wasze mogę tylko odpowiedzieć, że ułatwienie będzie już wielkie, jeżeli poprzestaniemy na podziale na 1000 części.

Salviati: Teraz powiem wam rzecz, która was zadziwi: jeżeli kto chce podzielić linię na nieskończenie wiele punktów i spodziewa się dokonać to w ten sposób, jak ów, który chciał otrzymać 10, 60 albo 100 części, t. j. jeżeliby dzielił najprzód na dwie części, potem na cztery itd., to się grubo pomyli, bo tak postępując musiałby wiecznie dzielić; tymczasem tą drogą nie można dojść do niepodzielnostek, gdyż się właśnie od nich oddala; ciągnąc dalej dzielenie i powiększając liczbę części w nadziei zbliżania się do nieskończoności, oddalamy się od niej, a to z tej przyczyny. Z rozmowy przed chwilą wywiedliśmy wniosek, że liczba nieskończona mieści w sobie tyle kwadratów i sześciątów, ile liczb, bo kwadratów i sześciątów jest tyle ile pierwiastków a pierwiastkami są wszystkie liczby. Widzieliśmy przytem, że im większe bierzemy liczby, tem mniej wśród nich jest kwadratów: jasnem więc jest, że im do większych liczb dochodzimy, tem więcej się oddalamy od nieskończoności, skąd wynika, że, jeżeli która liczba posiadać może właściwości (atrybuty) nieskończoności, to właśnie jednostka. I rzeczywiście, w jednostce znajdujemy warunki i konieczne atrybuty nieskoń-

czoności, a mianowicie zawiera ona tyle kwadratów i sześciątów, ile liczb.

Simplicio: Nie zdaję sobie sprawy, jak to należy rozumieć.

Salvati: Rzecz jest niewątpliwą, bo jedność jest kwadratem, sześcianiem, czwartą potęgą itd. a kwadraty i sześciany nie mają żadnej własności, jakiejby nie posiadała jedność, jak np. własność że dwa kwadraty mają zawsze między sobą liczbę średnioproporcjonalną. Weźcie jakikolwiek kwadrat i jedność, a znajdziecie między nimi zawsze średnią-proporcjonalną. Między 9 i 1 mamy 3, między 4 i 1 mamy 2, między 9 i 4 mamy 6. Sześciany mają między sobą dwie średnie proporcjonalne np. 8 i 27 mają 12 i 18, 1 i 8 mają 2 i 4, 1 i 27 mają 3 i 9. Wnioskujemy stąd, że niema innej liczby nieskończonej jak jednostka. Są to rzeczy godne podziwu i przekraczające pojętność naszego umysłu; uczą nas one jak bardzo się mylimy, przypisując nieskończoności też same własności co ilości skończonej, podczas gdy te własności nie mogą się odnosić równocześnie do obu. Dodam tu jeden zadziwiający przypadek, który przychodzi mi na myśl, wykazujący niezmierną różnicę między temi ilościami, oraz sprzeciw a niemal wstręt natury do przeprowadzenia wielkości skończonej w nieskończoną. Niech będzie jakakolwiek linja AB (tabl. I, rys. 7); punkt C dzieli ją na dwie części nierówne: jeżeli z końców A i B zataczać będziemy koła promieniami proporcjonalnemi do długości AC i CB, to te koła przecinać się będą ze sobą w punktach leżących na obwodzie jednego i tegoż samego koła, np. jeżeli $AL : LB = AC : CB$ i $AK : KB = AI : IB = AC : AB$ itd., to punkty przecięć CLKIHGF E leżą wszystkie na obwodzie tegoż samego koła, tak że można powiedzieć, iż skoro punkt C tak się porusza, że jego odległości od A i B pozostają do siebie zawsze w tym samym stosunku, to ruchem swym opisuje koło. Koło to będzie tem większe, im punkt C jest bliższy środka O linji AB, a tem mniejsze, im C leży bliżej B, tak że z pomiędzy nieskończenie wielu punktów, które można wybrać między O i B, otrzymać można koła różnej wielkości, w końcu tak małe, jak oko pchły, ale także tak wielkie, jak równik kuli niebieskiej (del primo Mobile). Każdy punkt między O i B da koło bardzo wielkie w pobliżu O, a zbliżając się w dalszym ciągu do O, tak że C zejdzie się z O, jaką linję otrzymamy przy zachowaniu pierwotnego stosunku odległości od A i B? Może okrag koła większy od wszelkich największych, koło nieskończonej wielkości. Ale jednocześnie będzie to linja prosta, prostopadła do AB, przez punkt O, nieskończenie dłu-

ga i nie zakrzywiająca się na końcach, tak żeby się złączyły, jak to miało miejsce z innymi linjami, bo półkole górne CHE łączyło się z dolnem EMC. Ale przez punkt O przechodzi koło największe ze wszystkich (gdyż wszystkie punkty z drugiej strony OA dają koła tem większe, im bliżej leżą O), a więc nieskończenie wielkie i to koło nie może się już zaginać i wracać do swego punktu wyjścia i stanowi linię prostą, jako okrąg nieskończenie wielki. Rozważcie teraz, jaka jest różnica między kołem skończonym a nieskończenie wielkiem, tak zmienia ono swą istotę, że przestaje być kołem; dodam jeszcze, że nie może istnieć żadne koło nieskończone a zatem i żadna kula nieskończona ani jakiegokolwiek nieskończone ciało lub powierzchnia. Cóż więc powiedzieć możemy o podobnych przemianach rzeczy skończonych na nieskończone? I dlaczego mielibyśmy się oburzać, gdyśmy przy szukaniu nieskończoności wśród liczb, znaleźli w końcu jedność? Jeżeli po rozbiciu ciała stałego na wiele części zamienimy je na jaknajdrobniejszy proszek, dochodząc do jego nieskończenia małych składników (*infiniti suoi atomi*), które są już niepodzielne, to dlaczego nie mamy powiedzieć że ciało wróciło do jednej ciągłości, może do stanu płynnego, jak woda, merkurjusz, lub ten sam metal stopiony? Czyż nie widzimy, że kamienie topią się na szkło a toż samo szkło w silnym ogniu staje się płynniejszym od wody.

Sagredo: Mamy więc uważać płyny za takie dlatego, że są rozłożone na nieskończenie małe niepodzielne swoje składniki?

Salviati: Nie umiem znaleźć lepszego sposobu objaśnienia niektórych zjawisk, między nimi następującego: jeśli wezmę ciało twarde jak kość, kamień, lub metal i młotkiem lub najdelikatniejszym pilnikiem podzielę je na jak można najdrobniejszy proszek, to jasną jest rzeczą, że najmniejsze cząsteczki, jakkolwiek każdej z nich oddzielnie nie możemy ująć ani wzrokiem, ani dotykiem, są jeszcze skończone, ukształtowane i zliczalne; gdy je skupimy, trzymają się razem, a gdy w tej kupce zrobimy otwór, to ten pozostaje niezapełniony przez cząstki otaczające; skoro zaś wszystko poruszmy i wstrząśniemy, otwór się zapełni, zaraz po usunięciu ruchadła. Toż samo zjawisko widzimy gromadząc większe ciała, wszelkiego kształtu, nawet kuliste jak proso, zboże, śrut ołowiany lub inne materiały. Gdy wszakże podobne zjawisko obserwujemy na wodzie, to widzimy, że ta, podniesiona, natychmiast wyrównywa swą powierzchnię, jeżeli na to pozwala naczynie lub ruchadło, zrobione wgłębienie zaraz się zapełnia, a dłużej poruszana waha się i sze-

roko rozpościera swe fale. Wnioskować stąd należy słusznie, jak mi się zdaje, że najmniejsze cząstki, z których woda jest złożona (gdyż są one mniejszej konsystencji od najdrobniejszego proszku, jeżeli nie bez żadnej konsystencji) są czemś inszem od cząstek najmniejszych, skończonych i podzielnych; i nie umiem znaleźć innej różnicy, jak tylko, że są niepodzielne. Zdaje mi się też, że wyborna przejrzystość wody, nie zbija tego nader pewnego przypuszczenia, bo jeżeli weźmiemy najprzezroczystszy kryształ i zaczniemy go tłuc, ubijać i proszkować, to straci swą przezroczystość i to tem więcej, im drobniej został sproszkowany: a woda, choćby najzupełniej sproszkowana, jest jeszcze zupełnie przezroczystą. Złoto i srebro, więcej rozdrobnione kwasami (acqua forte) niż jakimkolwiek pilnikiem, pozostają jednak proszkiem a nie stają się płynem; bo one topnieją dopiero wtedy, gdy cząstki niepodzielne ognia albo promieni słońca je rozpuszczają, jak sądzę, na ich ostateczne składniki niepodzielne.

Sagredo: To co Waszmość zauważył przed chwilą odnośnie do światła, obserwowałem z podziwem i widziałem często, jak z pomocą zwierciadła wklęsłego, trzycalowej średnicy, można w jednej chwili stopić ołów; doszedłem też do wniosku, że gdyby zwierciadło było bardzo wielkie, gładkie i parabolicznego kształtu, stopiłoby również każdy inny metal w jaknajkrótszym czasie, skoro niewielkie kuliste i niezbyt wygładzone, z taką siłą topiło ołów i zapalało wszelkie paliwo; uczyniło mi to wiarogodnymi cuda zwierciadeł Archimedesów.

Salviati: Co do zwierciadeł Archimedesów, to uważam że ich cudowność jest godna wiary, jak ją opisuje wielu autorów; pisma samego Archimedesów czytałem z niezmiernym podziwem i studjowałem, a gdybym miał jeszcze jaką wątpliwość, to usunąłby ją wykład o zwierciadle palącym (specchio ustorio) Bonaventury Cavaleri, który z lubością przeczytałem.

Sagredo: I ja to dzieło miałem w ręku i czytałem z przyjemnością i wielkim podziwem, a ponieważ znałem już autora, to umocniłem się w przekonaniu, jakie miałem o nim, że jest jednym z najznakomitszych matematyków naszego czasu. Lecz wracając do działania promieni słonecznych i topienia metali, czyż mamy sądzić, że te działania tak gwałtowne odbywają się bez ruchu, czy też z ruchem bardzo szybkim?

Salviati: Inne ognie i topienia widzieliśmy dokonywane z ruchem i to jaknajszybszym: Tu należą działania piorunów, prochu

w minach i petardach, a zwłaszcza ta szybkość, z jaką płomień węgla, rozdmuchany miechem, zmieszany z gęstymi gazami, zwiększa siłę topienia metali. To też nie mogę pojąć, aby działanie światła, choćby najczystsze, odbywać się mogło bez ruchu i to jak najszybszego.

Sagredo: Ale jaka jest prędkość światła i za jak wielką mamy ją poczytywać? Czy to jest zjawisko chwilowe, nagłe, czy jak inne ruchem w czasie? czy nie możnaby tego zbadać doświadczalnie?

Simplicio: Codzienne doświadczenie uczy, że rozchodzenie się światła jest momentalne. Gdy na znacznej odległości strzela artylerja, blask płomienia dochodzi do oka momentalnie, podczas gdy huk do ucha dopiero po pewnym czasie.

Sagredo: Ehl, panie Simplicio, z tego codziennego doświadczenia wynika tylko, że dźwięk potrzebuje więcej czasu niż światło, aby do nas doszedł, ale nie dowodzi ono, że światło dochodzi momentalnie, a nie bardzo szybko. I inna podobna obserwacja nie uczy więcej: gdy tylko słońce pojawia się nad poziomem, spostrzegamy jego promienie, ale kto nas zapewni, że te promienie nie były już nad poziomem, przedtem nim doszły do naszych oczu.

Salvati: Niedostatecznie przekonywający wynik tej i innych podobnych obserwacji, nasuwa na myśl, czy nie możnaby jakim sposobem, bez błędu, wykazać, czy iluminacja t. j. rozchodzenie się światła jest istotnie momentalne; bo już samo szybkie rozchodzenie się głosu pozwala przypuszczać, że prędkość światła musi być jeszcze większa. Próba, którą sobie przypominam, była następująca: dwie osoby trzymały każda zapaloną latarkę, lub inne światło, które każda mogła ręką zakrywać i odsłaniać, jedna dla oczu drugiej; umieszczone były naprzeciwko siebie w niewielkiej odległości i odsłaniały i zasłaniały światło, jedna dla oczu drugiej tak, że, gdy jedna zobaczyła odsłaniające się światło u drugiej, zaraz odsłaniała swoje; taka korespondencja wzajemna powtarzana była wielokrotnie tak, że wkrótce bez pomyłki, po odsłonięciu jednego światła następowało odsłonięcie drugiego. Wprawiając się na małej odległości, oddalali się od siebie eksperymentatorzy, ze swemi światłami na duże, do trzech mil jeden od drugiego; a przeprowadzając doświadczenie w nocy, zwracali baczną uwagę, czy powtarzanie się znaków odbywa się w tem samym tempie u obu, z czego można było wnioskować na pewno o momentalnym rozchodzeniu się światła; gdyby bowiem światło rozchodziło się w czasie, to na trzymilowej odległości, a więc na przestrze-

ni sześciu mil, tam i zpowrotem, winnyby się były wyraźnie uwi-
docznić opóźnienia. Gdyby zaś chciano obserwować na jeszcze
większej odległości, ośmiu lub dziesięciu mil, możnaby użyć tele-
skopów, umieszczając eksperymentatorów, w nocy, ze światłami,
w takich miejscach, w których światło, jedno drugiemu gołem
okiem niewidzialne, teleskopem może być dostrzeżone.

Sagredo: Doświadczenie wydaje mi się nie mniej pewnem,
jak dowcipnem, ale powiedzcie mi, jaki z jego wykonania wycią-
gnęliście wnioski.

Salviati: Co prawda, doświadczenie robiłem tylko w małej
odległości, mniejszej od mili, to też nie mogłem się przekonać czy
istotnie pojawienie się przeciwległego światła było momentalne;
lecz, jeżeli światło nie jest momentalne, to prędkość jego jest zna-
czna, tak że może być przyrównana do ruchu, jaki widzimy w ja-
sności błyskawicy, między chmurami odległymi na osiem do dzie-
sięciu mil; odróżniamy tam początek, nawet źródło, w pewnem
oznaczonem miejscu między chmurami; a choć bezpośrednio potem
następuje największe rozszerzenie jasności w okolicznych chmu-
rach, wydaje mi się jednak, że następuje w ciągu pewnego czasu,
bo gdyby rozjaśnienie następowało odrazu w całości a nie stopnio-
wo, trudnoby nam było odróżnić jego początek, powiedziałbym
środek, od brzegów i ostatecznego rozszerzenia. Lecz w jaką
otchłań niepewności zabrnęliśmy niebaczni, przez próżnię, nieskoń-
czonostki, niepodzielne, ruchy momentalne, aby po tysiącznych roz-
prawach, nie móc dopłynąć do brzegu.

Sagredo: Istotnie nie odpowiada to naszym zamiarom. Nie-
skończoność, poszukiwana między liczbami, zdawała się mieścić
w pojęciu jedności; z niepodzielności rodziła się zawsze podzieli-
ność; próżnia wiązała się niepodzielnie z pełnością; poglądy nasze
błąkały się tak dalece, że koło stawało się nieskończenie długą
linją prostą, co, jeśli dobrze pamiętam, miał nam p. Salviati stwier-
dzić matematycznem dowodzeniem. Przeto jeżeli łaska podajcie
nam je bez rozpraw.

Salviati: Jestem na usługi i gotów wam dowieść jak najzro-
zumialej następnego twierdzenia. Dana linja prosta podzielona zo-
stała w jakimkolwiek punkcie na dwie części nierówne; chodź
o nakreślenie takiego koła, aby odległości końców danej linji od
poszczególnych punktów okręgu pozostawały zawsze w stosunku
nierównych części danej linji; w ten sposób stosunek linji prowa-
dzonych z każdego końca danej linji będzie stały.

Niech będzie dana linja prosta AB (tab. I, rys. 8) podzielona w punkcie C na jakiegokolwiek dwie nierówne części. Chodzi o nakreślenie koła, któregoby każdy punkt można było połączyć linjami prostymi z punktami A i B tak, aby długości tych linji miały się do siebie w stosunku części AC i CB, tj. były do nich proporcjonalne. Ze środka C, promieniem równym mniejszej z tych dwóch części, nakreślimy koło, przez punkt A poprowadzmy do niego styczną AD i przedłużmy ją nieograniczenie ku E; punkt styczności D połączmy ze środkiem tego koła linją CD, prostopadłą do AB, która przetnie AE, bo kąt A jest ostry, EF prostopadłą do AE, która przetnie przedłużenie AB w F. Twierdząc, że linje FE i FC są równe; bo poprowadzmy EC a otrzymamy dwa trójkąty DEC i CEB, w których boki DE i EC są równe bokom EB i EC, gdyż dwie styczne DE i BE do koła DB i podstawy DC i CB są także sobie równe; a więc i kąty DEC i BEC są sobie równe. A ponieważ kąt BCE jest mniejszy od kąta prostego o kąt CEB a kąt CEF o kąt CED, więc ponieważ te różnice są równe, to i kąty FCE i FEC są równe a więc i boki $FE = FC$. Zataczając więc koło ze środka F promieniem FE, to koło to przejdzie przez punkt C. Nakreślimy koło CEG. Twierdząc, że jest to właśnie koło szukane i linje prowadzone z któregośkolwiek jego punktu do końców linji AB mają się do siebie w stosunku części AC i CB, które schodzą się w C. Jest to oczywiste dla linji prowadzonych z E mianowicie AE i BE, bo kąt E trójkąta AEB jest przepołowiony linją EC i tak się ma AC do CB, jak AE do EB. Tak samo mają się do siebie AG i BG schodzące się w G. Trójkąty bowiem AFE i EFB są podobne i tak się ma EF do FB, jak AF do FC, albo jak AF do FC, tak CF do FB, skąd przepoławiając poprzedniki w ostatniej proporcji: AC do CF (czyli do FG), jak CB do BF i cała AB do całej BG, jak CB do BF; a że, jak AG do GB, tak się ma CF do FB, czyli EF do FB, czyli AE do EB, i AC do CB, co było do dowodzenia.

Wziąwszy inny punkt na kole np. H, w którym się schodzą linje AH i BH, twierdząc, że również jak AC do CB tak się ma AH do HB: Przedłużmy HB do spotkania koła w I i poprowadzmy IF, to ponieważ mieliśmy AB do BG jak CB do BF, będzie więc prostokąt ABF równy prostokątowi CBG, a że kąty w B są równe, więc mamy AH do HB, jak IF czyli EF do FB i AE do EB. Twierdząc nadto, że linje wychodzące z końców AB i będące do siebie w tym stosunku nie mogą się schodzić ani na zewnątrz ani

na wewnątrz koła CEG. Gdyby bowiem przecinały się w L na zewnątrz koła i były AL i BL, to po przedłużeniu LB do przecięcia się z kołem w M i poprowadziwszy MF, mielibyśmy AL do BL, jak AC do BC albo jak MF do FB i dwa trójkąty ALB i MFB, które przy dwóch kątach ALB i MFB mają boki proporcjonalne, kąt w B równy, a dwa pozostałe FMB i LAB mniejsze od prostego (bo kąt prosty w M ma za podstawę całą średnicę CG a nie jej część BF, drugi zaś kąt A jest ostry, przeto AL homologiczna z AC jest większa od BL, homologicznej z BC). Trójkąty zatem ABL i MFB są podobne, a że $AB:BL = MB:BF$, więc prostokąt ABF jest równy prostokątowi MBL; ale dowiedziono, że prostokąt $ABF = CBG$ więc $MBL = CBG$, co jest niemożliwe i spotkanie nie może nastąpić po za kołem. Tym samym sposobem dowieść można, że nie może mieć miejsca wewnątrz koła, więc wszystkie spotkania następują na okręgu.

Ale czas zawrócić i uczynić zadość życzeniu pana Simplicio, wykazując, że rozłożenie linii na nieskończoną liczbę punktów jest nie tylko możliwe ale nawet łatwiejsze od dzielenia jej na części skończone, jeżeli tylko p. Simplicio zgodzi się na warunek, że nie będzie wymagał odróżnienia jednego punktu od drugiego i przedstawienia każdego po szczególe na tym papierze; poprzestanę bowiem na oddzieleniu czterech lub sześciu części linii, jeżeli mi wskażecie punkty rozdziału, albo zegnę linię tworząc z niej kwadrat lub sześciokąt i przekonany jestem, że rozumowanie będzie dostatecznie jasne i skuteczne.

Simplicio: Tak, istotnie.

Salviati: Jeżeli wygięcie linii w kwadrat lub wielokąt o 8, 40, 100 albo 1000 boków wystarcza do uczynienia aktualnemi 4-ch, 8-miu, 40-tu, 100-tu i 1000-ca części, które przedtem według waszego wyrażenia były tylko potencjalnemi, to czyż po utworzeniu w ten sam sposób wielokąta o nieskończenie wielu bokach, gdy linię wygnę w koło, nie będę mógł powiedzieć z równą swobodą, że uczyniłem aktualnemi te części nieskończone, które uważaliście jako zawarte potencjalnie w danej prostej. I nie mogę przeczyć że ten podział linii dokonany jest na nieskończenie wiele jej punktów, tak jak poprzednie cztery części utworzyły kwadrat a 1000 tysięcobok, gdyż tu i tam nie brak żadnego z warunków jakim odpowiadały wielokąty o 1000-cu i 100000-ach boków. Jeżeli ten wielokąt, postawiony na linii prostej, dotyka się jej jednym ze swych boków, t.j. swą tysięczną częścią, to koło, będące wielokątem

o niezliczonej liczbie boków, dotknie się tej prostej także jednym swym bokiem, to jest jednym swym punktem, różnym od tych, które z nim sąsiadują, niemniej jak różnym jest bok wielokąt od tych, które się z nim stykają. I jak wielokąt, tocząc się po prostej, dotyka się jej kolejno coraz innemi bokami, opisując linię równą swemu obwodowi, tak samo toczące się koło zostawia jako ślad swój okrąg. Nie wiem jednak, panie Simplicio, czy panowie Perypatetycy, z którymi razem przyznaję, że ciągłość rozkładać można na części wciąż podzielne, tak że takie dzielenie nie ma końca, czy ci panowie zgodzą się na to, że żadne z tych dzieleni nie może być ostatecznem i że podział ostatni da właśnie nieskończenie wiele niepodzielnych, skąd wnioskuję, że żaden podział następny nie mógłby już być przeprowadzony; ale posługując się proponowaną przeze mnie metodą, rozróżniania i rozkładania całej nieskończoności w jednym ciągu (sztuka, której nie można mi odmówić) sędzę, że mogą zgodzić się spokojnie na składanie skończonej całości z absolutnie niepodzielnych atomów. Metoda ta uwalnia nas od tych krętych błędów po labiryntach i pozwala mieć pojęcie o wspomnianej spójności cząstek w ciałach stałych, o rozrzedzaniu i zgęszczaniu, bez niespodzianek wywołanych koniecznością przyjmowanie miejsc pustych i przenikania wzajemnego ciał; wszystkich tych niedogodności unikniemy, przyjmując omawiane tworzenie całości z niepodzielności.

Simplicio: Nie wiem, co by nato powiedzieli Perypatetycy, bo wasze uwagi są w większej części nowemi i jako takie winny być jeszcze roztrząszone; przypuszczam, że otrzymacie odpowiedzi i sposoby rozwikłania trudności, czego dla krótkości czasu i braku zmysłu krytycznego nie mógłbym dostarczyć. Pozostawimy to więc a tymczasem pragnąłbym się dowiedzieć, w jaki sposób wprowadzenie niepodzielności może nam ułatwić zrozumienie zgęszczania i rozrzedzania, unikając jednocześnie próżni i przenikania się ciał.

Sagredo: Z mej strony słuchać będę z wielką ciekawością rozprawy o kwestji, która nie jest dla mnie jeszcze zupełnie jasną a także, zgodnie z tem co powiedział przed chwilą p. Simplicio, chętnie zbadam motywy, jakie skłaniały Arystotelesa do występowania przeciw próżni, podczas gdy będziemy się zaznajamiali z waszem rozwiązaniem, które jest równocześnie skierowane przeciw Arystotelesowi.

Salvati: Zrobimy jedno i drugie. Co do pierwszego, to sko-

ro, gdy chodziło o rozrzedzenie, posługiwaliśmy się linią opisywaną przez małe koło, która była większą od jego obwodu, jako wyznaczana przez toczenie się koła większego, obecnie dla objaśnienia zgęszczenia, wykażemy, że przy toczeniu się małego koła, koło wielkie opisuje linię krótszą od owego obwodu. Dla jasności układu, weźmy pod uwagę wielokąty. Niech będą, jak poprzednio, (tab. I, rys. 9) dwa sześciokąty ABG i IHK, mające wspólny środek w L, i dwie linie równoległe HOM i ABC, po których toczyć się będą te sześciokąty; mały wielokąt rozpoczyna ruch swój obrotem około nieruchomego wierzchołka I, dopóki bok IK nie położy się na prostej, przyczem K zakresła łuk KM, a IK zajmuje miejsce IM. Cóż się dzieje równocześnie z bokiem BG większego wielokąta? Linja IB w swym obrocie zakresła swym końcem B łuk bB pod równoległą AC, tak że gdy IK pada na IM, bok BG zajmuje miejsce bC i posuwa się tylko na długość BC, cofnąwszy się na bB. Wielokąt mały, tocząc się dalej, opisze linię tak długą jak jego obwód, gdy tymczasem wielokąt większy opisze linię krótszą od swego obwodu o długość równą tyle razy wziętej długości bB, ile jest boków; opisana linja będzie prawie równa tej, którą opisuje mały wielokąt, gdyż ta ostatnia jest od niej większa tylko o długość bB. Widzimy tu bez przeszkody, dlaczego większy wielokąt (unoszony przez wielokąt mały) nie opisuje dłuższej linii: bo każdy bok większego wielokąta pada na pewną część długości, zajmowanej poprzednio przez bok sąsiedni.

Weźmy teraz pod uwagę dwa koła, mające wspólny środek A, postawione na dwóch równoległych, w punktach styczności mniejszego B i większego C; przy toczeniu się mniejszego koła, punkt B nie będzie już pozostawał przez pewien czas nieruchomym, jak to było przy toczeniu się wielokątów, kiedy bok BG się cofał i punkt I stał na miejscu, dopóki bok KI nie padł na IM a równocześnie IB cofał swój koniec B do b, przyczem BG padało na bC a bB nakrywało część AB, tak że cofnięcie wynosiło tylko $BC = IM$; cofnięcia te objaśniały, dlaczego większy wielokąt opisuje linię równą obwodowi małego wielokąta. Ale tu, jeżeli chcemy w podobny sposób objaśniać toczenie się kół, należy zaznaczyć, że w przeciwieństwie do skończonej liczby boków wielokątów, jest ich tu nieskończenie wiele; tamte były skończone i podzielne, a te są nieskończone i niepodzielne. Wierzchołki wielokąta zatrzymywały się podczas toczenia dopóki bok się nie położył na równoległej a czas zatrzymania się każdego wierzchołka był równy

czasowi całkowitego obrotu wielokąta, podzielonemu przez liczbę boków; podobnie przy kole, opóźnienia jego nieskończonej liczby boków są momentalne, gdyż każde jest nieskończeniem małą częścią czasu skończonego, jak punkt nieskończeniem małą częścią linii; w obu zaś przypadkach liczba ich jest nieskończoną; cofnięcia wierzchołków większego wielokąta były mniejsze od jego boków, równe różnicom długości boków obu wielokątów; przy kołach znów będzie odpowiedni punkt, czyli bok C, podczas momentalnego opóźnienia punktu B, na tyle się cofać, ile wynosi przewyżka jego długości nad bokiem B, a tyle postępować naprzód, ile wynosi długość B. W sumie, nieskończenie wiele boków większego koła z ich nieskończoną liczbą nieskończenie małych cofnięć, wykonanych w ciągu nieskończenie wielu momentalnych zatrzymań nieskończenie małych boków małego koła oraz ich nieskończenie małych posunięć równych bokom małego koła, opisze linię równą opisanej przez małe koło, gdyż długość ta zawierać będzie nieskończenie wiele nieskończenie małych superpozycji, wywołujących nagromadzenie albo zgęszczenie bez żadnego przenikania części skończonych, czego nie możnaby utrzymywać o linii podzielonej na części skończone, równej obwodowi jakiegokolwiek wielokąta, bo ta ostatnia, wyciągnięta w linię prostą, nie może być zredukowana do mniejszej długości bez superpozycji i przenikania boków między sobą. To zgęszczanie nieskończenie wielu nieskończenie małych części, bez przenikania części skończonych i poprzednio wzmiankowane rozdzielanie nieskończenie wielu niepodzielnych przez wstawianie między nie niepodzielnych próżni (*vacui indivisibili*) jest jak sądzę najważniejszem, co powiedzieć można o zgęszczaniu i rozrzedzaniu ciał, nie przyjmując wzajemnego ich przenikania ani skończonych przestrzeni próżnych. Jeżeli was to zadowala, to się tem posługujcie, jeżeli nie, to weźcie za rzecz płonną a moje objaśnienie za jeszcze płonniejsze i szukajcie innego, więcej zaspokajającego umysł. Temi dwoma wyrazami wam odpowiadam, że jesteście między nieskończonościami i niepodzielnymi.

S a g r e d o: Przyznaję, że pomysły wasze są subtelne i dla mnie nowe i nieznanne, a, jeżeli sama natura zachowuje ten porządek, to nie wiem, jak rzecz rozstrzygnąć: co prawda, to dopóki nie zrozumieć tego, co mnie najwięcej niepokoi, aby nie pozostawać niemy, trzymać się tego będę. Lecz może p. Simplicio będzie miał (z czem się jeszcze nie spotykałem) sposób wytłumaczenia tego objaśnienia, jaki w tej zawilej kwestji podali filozofowie; gdyż istotnie

to wszystko, co dotąd znalazłem o zgęszczeniu było dla mnie tak gęstem a o rozrzedzeniu tak subtelnem, że moja słaba głowa jednego nie rozumiała a drugiego nie przeniknęła.

Simplicio: Jestem pełen konfuzji i spotykam ciężkie przeszkody, by zrozumieć jedno i drugie a głównie to nowe, według bowiem tego poglądu uncja złota może być rozrzedzona i rozciągnięta w ciało większe od całej ziemi, a znów ziemia zgęszczona i zredukowana do masy mniejszej od orzecha: rzecz, w którą nie wierzę i nie wierzę, abyście sami w nią wierzyli; pańskie rozważania i dowodzenia są matematycznymi abstrakcjami, oderwanymi od wszelkiej materji podpadającej pod zmysły i sędzę, że nie doszliśmy do zastosowania tych praw do ciał fizycznych i naturalnych.

Salviati: Nie umiałbym niewidzialnego zrobić dla was widzialnem i nie przypuszczam, abyście tego żądali, o ile wszakże przez nasze zmysły mogą być rozumianym, to ponieważ mówiliście już o złocie, może przyjrzelibyśmy się robotom około jego wielkiego rozciągania? Nie wiem, czy mieliście sposobność widzieć, jak rzemieślnicy wyciągają złoty drut, który jest złotym tylko na powierzchni a wewnętrzną masę ma srebrną i w jaki sposób prowadzona jest ta robota. Biorą walce albo właściwie pręt srebrny, łokieć długości mający, trzy do czterech cali gruby i ten złocą wywalcowanymi arkuszami złota, które jak wiecie są tak subtelne, że je wiatr podnosi. Arkuszy tych kładą 8 do 10, jeden na drugim. Tak pozłożony pręt wyciągany jest z wielką siłą przy jednoczesnem przepuszczaniu go przez otwory drutownicy i to działanie powtarzane jest przy stosowaniu coraz mniejszych otworów, aż pręt nie dojdzie do cienkości panieńskiego włosa; pozłota utrzymuje się jednak na jego powierzchni. Możecie tym sposobem zdać sobie sprawę z subtelności i rozciągłości złota.

Simplicio: Nie uważam, aby ścienienie złota było tak zadziwiające, jak się to Waszmości wydaje; bo najprzód przy pierwszym złoceniu użyto już 10 arkuszy; powtóre, jeżeli nawet srebro, wyciągane w drut, powiększa swą długość, to zmniejsza jednocześnie grubość, tak że wydłużenie równoważy się ścienieniem, podczas gdy powierzchnia o tyle tylko się powiększa, że srebro pozostaje wciąż pokryte złotem, a złoto zredukować trzeba tylko do grubości pierwszych arkuszy.

Salviati: Mylicie się bardzo, panie *Simplicio*, bo powiększenie powierzchni równe jest pierwiastkowi kwadratowemu z wydłużenia, co mogę dowieść geometrycznie.

S a g r e d o: Z mej strony, jak również w imieniu pana Simplicia, prosilibyśmy o przedstawienie dowodu, jeżeli Waszmość sądzi, że będziemy mogli zrozumieć.

S a l v i a t i: Zobaczę, czy będę mógł go sobie odrazu przypomnieć. Jasne jest najprzód, że pierwszy gruby walec srebrny i ostatni najdłuższy drut mają jednakową objętość, boć to jedna i ta sama masa. Otóż jeżeli wykażę, jaki jest wzajemny stosunek powierzchni dwóch walców jednakiej objętości, to cel będzie osiągnięty. Twierdząc więc, że powierzchnie dwóch walców jednakiej objętości mają się do siebie w stosunku równym pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku ich długości.

Niech będą (tab. I, rys. 10) dwa walce równe, których wysokości są AB, CD i linja E między niemi średnia proporcjonalna. Twierdząc, że powierzchnia walca AB, z pominięciem podstawy, ma się do CD, także bez podstawy, jak AB do E, a ten stosunek jest równy pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku AB : CD. Podzielmy walec AB w F w ten sposób, aby część AF była równa CD. A ponieważ podstawy walców równych mają się do siebie w stosunku odwrotnym wysokości, będzie się więc miało koło-podstawa walca CD do koła-podstawy walca AB, jak BA do CD, a że koła mają się do siebie jak kwadraty ze średnic, będą się więc miały do siebie te kwadraty, jak BA do CD; a ponieważ tak się ma BA do CD jak BA^2 do E^2 , więc te cztery kwadraty będą proporcjonalne; a więc i ich boki (pierwiastki) będą także proporcjonalne; i linja AB będzie się miała do E, jak średnica koła C do średnicy koła A; a ponieważ średnice mają się do siebie, jak okręgi kół, a okręgi kół, jak powierzchnie walców jednakiej wysokości, więc linja AB ma się do E, jak powierzchnia walca CD do powierzchni walca AF. Że zaś wysokość AF ma się do AB, jak powierzchnia AF do powierzchni AB i jak wysokość AB do linji E, tak powierzchnia CD do powierzchni AF, będzie więc na odwrót AF do E, jak pow. CD do pow. AB i odwrotnie: pow. AB do pow. CD jak E do AF czyli, jak AB do E, t. j. w stosunku równym pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku AB do CD, c. b. d. d.

Stosując to do naszego zadania, w którym walec srebrny pozłocony, nie dłuższy jak pół łokcia, 3—4 cali gruby, przy grubości włosa panińskiego miał mieć 20000 łokci długości, a często miewa i więcej, znajdziemy, że jego powierzchnia wzrasta 200 razy a więc arkusze złota, nałożone dziesięć jeden na drugi, jeżeli pokrywają 200 razy większą powierzchnię, to muszą dojść do cienkości $\frac{1}{20}$

pojedynczego arkusza. Zważcie co to za cienkość, czy jest ona możliwą bez niezmiernej rozciągliwości cząstek i czy się one nie składają z nieskończonej liczby niepodzielnych cząstek materji fizycznej; czego nie brak innych jeszcze więcej przekonywających przykładów.

Sa gredo: Dowód jest tak piękny, że jakkolwiekby nie miał tej siły przekonywającej, jaka była oczekiwana (której zdaje mi się jednak że miał wielką), to zasłużył sobie doskonale nie krótkie chwile, jakie mu poświęciliśmy.

Salviali: Ponieważ widzę, że dowody geometryczne tak są przez Was cenione i przynoszą niewątpliwy pożytek, przedstawię wam jeszcze twierdzenie odwrotne, odnoszące się do ciekawej kwestji. Mielśmy poprzednio walce równej objętości a różnej wysokości, teraz weźmiemy walce równej powierzchni a różnej wysokości; podstawy zawsze pomijamy. Twierdzę, że dwa walce proste których powierzchnie obwodowe są równe, mają się do siebie w stosunku odwrotnym wysokości.

Niech będą (tab. I, rys. 11) AE i CF , dwa walce równej powierzchni, ale wysokość walca CD większa od wysokości drugiego walca AB . Twierdzę, że tak się ma walec AE do walca CF , jak CD do AB .

Ponieważ powierzchnia CF jest równa powierzchni AE , będzie więc walec CF mniejszy od walca AE , bo, gdyby były równe, to musiałyby być powierzchnia walca CF większa od powierzchni walca AE i to tem więcej, im walec CF jest większy od walca AE . Jeżeli walec ID jest równy walcowi AE , to według poprzedniego: tak się ma powierzchnia ID do powierzchni AE , jak IF do średniej proporcjonalnej między IF a AB . Że zaś powierzchnia AE jest równa powierzchni CF , a powierzchnia ID ma się do powierzchni CF , jak IF do CD , więc CD jest średnią proporcjonalną między IF i AB . Z drugiej znów strony, walec ID jest równy walcowi AE , więc będą się miały te dwa walce jednakowo do walca CF , że zaś walec ID ma się do walca CF jak wysokość IF do wysokości CD , więc walec AE ma się do walca CF jak wysokość IF do wysokości CD , czyli jak wysokość CD do wysokości AB , co było do dowodzenia.

Tem się tłumaczy zjawisko, któremu się ludzie wciąż dziwią, mianowicie: jeżeli z kawałka materji dłuższego niż szeroki, chcemy zrobić worek do ziarna i to jak zwykle z deską jako dno, to, jak się to dzieje, że worek pomieści w sobie więcej, jeżeli krótką stroną kawałka weźmiemy za wysokość, a dłuższą otoczmy dno, niż jeżeli postąpimy odwrotnie. Niech będzie np. płótno 6 łokci

szerokości a 12 długości, to worek więcej pomieści, jeżeli otoczmy dno długością 12 łokci a damy 6 łokci wysokości aniżeli, gdyby dno miało 6 łokci obwodu a worek 12 łokci wysokości. Oprócz tego, że objętość jest większa w pierwszym niż w drugim przypadku, dowieść można jeszcze, w jakim stosunku jest większa przy mniejszej wysokości a mniejsza przy większej: w przytoczonym przypadku płótna dwa razy dłuższego niż szerokie, objętość worka będzie dwa razy mniejsza przy wysokości 12 łokci niż przy wysokości 6 łokci. I tak samo, jeżeli z płótna 25 łok. długości a 7 łok. szerokości zrobimy kosze, to ich objętości będą w stosunku 7:25.

S a g r e d o: Uczymy się tym sposobem z wielką przyjemnością rzeczy nowych i nie pozbawionych użyteczności. Ale co do postawionego teraz zadania, nie sędzę jednak, żeby między mniej obznajmionymi z geometrją, nie znalazło się $\frac{4}{100}$ takich, którzyby na pierwszy rzut oka się nie pomylili i nie pomyśleli, że ciała równej powierzchni są we wszystkich innych swych częściach równe; ten sam błąd popełniany bywa przy porównywaniu wielkości różnych miast, gdy sądzimy, że poznajemy ich wielkości po zmierzeniu obwodu, nie bacząc że obwody mogą być równe, a zamknięte niemi powierzchnie bardzo różne; odnosi się to nie tylko do nieregularnych ale i do regularnych figur, bo wielokąty o wielu bokach mają większe powierzchnie, niż gdy mają mniej boków przy tej samej długości obwodu, a wreszcie koło, jako wielobok o nieskończonej liczbie boków, więcej obejmuje powierzchni niż inne wielokąty tegoż samego obwodu; ze szczególną przyjemnością przypominam sobie odnośny dowód wraz z uczonym komentarzem, które znalazłem, czytając dzieło o sferze Sacrobosco'a.

S a l v i a t i: To prawda, a przy tej samej okoliczności zauważyłem, jak to krótkim dowodzeniem wykazać można, że ze wszystkich regularnych figur izoperymetrycznych koło ma największą powierzchnię a wielokąt o wielu bokach większą niż wielokąt o mniejszej liczbie boków.

S a g r e d o: Ponieważ niezmiernie się lubuję w takich wybornych i niepospolitych twierdzeniach i dowodzeniach, usilnie Was proszę, zapoznajcie mnie z niemi.

S a l v i a t i: W krótkich słowach mogę Wam je przedstawić, dowodząc następującego twierdzenia.

Powierzchnia koła jest średnią proporcjonalną między dwoma wielokątami foremnymi, podobnemi do siebie, z których jeden jest opisany na kole a drugi izoperymetryczny z kołem. Nadto, koło

jest mniejsze od wszystkich wielokątów na niem opisanych, a odwrotnie większe od wszystkich z niem izoperymetrycznych. Dalej między opisanymi na kole te, które mają więcej kątów, są mniejsze od tych, które mają ich mniej, a przeciwnie wśród izoperymetrycznych większe są te, które mają więcej kątów.

Z dwóch podobnych wielokątów A i B (tab. I. rys. 12), niech będzie A opisany na kole A, a drugi B z tem kołem izoperymetryczny. Twierdzą, że koło jest średnio proporcjonalne między niemi. Bo (poprowadziwszy promień AC) ponieważ koło jest równe trójkątowi prostokątnemu, którego jeden bok jest AC a drugi równy obwodowi koła, a tak samo wielokąt A jest równy prostokątowi, którego jeden bok jest równy AC a drugi obwodowi wielokąta, to oczywiście powierzchnia wielokąta opisanego tak się ma do powierzchni koła, jak obwód wielokąta do obwodu koła albo do obwodu wielokąta B, izoperymetrycznego z kołem, ale wielokąt A ma się do wielokąta B jak kwadraty ich obwodów (bo figury są podobne), więc koło A jest średnią proporcjonalną między dwoma wielokątami A i B; a że wielokąt A jest większy od koła A, to koło musi być większe od izoperymetrycznego z niem wielokąta B a więc większe od wszystkich wieloforemnych z niem izoperymetrycznych.

Co do drugiej części, że między wielokątami opisanymi na kole, ten który ma najmniej boków ma największą powierzchnię a ponieważ wśród izoperymetrycznych największy jest ten, który ma najmniej boków, to tak dowodzimy. Do koła o środku O a promieniu OA niech będzie styczna AD i niech AD będzie połową boku opisanego pięciokąta, jak AC jest połową boku takiegoż siedmiokąta. Poprowadźmy proste OGC, OFD i ze środka O promieniem OC zatoczmy łuk ECI. Ponieważ trójkąt DOC jest większy od wycinka EOC a wycinek COI większy od trójkąta COA, więc trójkąt DOC stoi w większym stosunku do trójkąta COA, aniżeli wycinek COE do wycinka COI, albo, sumując i przestawiając, stosunek trójkąta DOA do wycinka FOA będzie większy od stosunku trójkąta COA do wycinka GOA i stosunek dziesięciu trójkątów DOA do dziesięciu wycinków FOA większy od stosunku 14 trójkątów COA do czternastu wycinków GOA, stosunek opisanego pięciokąta do koła większy od stosunku do koła opisanego siedmiokąta: a więc pięciokąt będzie większy od siedmiokąta. Weźmy teraz pięciokąt i siedmiokąt izoperymetryczny z temże kołem. Twierdzą, że siedmiokąt będzie większy od pięciokąta. Ponieważ koło jest średnio proporcjonalne między opisanym na niem a izoperymetrycznym z niem pięciokątem, a także między

takimi siedmiokątami i ponieważ pięciokąt opisany na kole jest większy od takiegoż siedmiokąta, więc jego stosunek do koła będzie większy od stosunku siedmiokąta, że zaś stosunek koła do izoperymetrycznego pięciokąta jest większy niż do izoperymetrycznego siedmiokąta, przeto pięciokąt jest mniejszy od izoperymetrycznego siedmiokąta, c. b. d. d.

Salgre do: Piękne i bardzo dowcipne dowodzenie. Ale gdzie zaszczyliśmy, zagłębiając się w geometrję. Pragnęlibyśmy jednak mieć rozjaśnienie trudności, jakie podnosił p. Simplicio, które są istotnie godne uwagi, szczególnie kwestja zgęszczania wydaje mi się najtrudniejszą.

Salviati: Jeżeli zgęszczenie i rozrzedzenie są przeciwnemi sobie ruchami, to gdy widzimy olbrzymie rozrzedzenie, nie możemy przeczyć niemniej wielkiemu zgęszczeniu; lecz olbrzymie rozrzedzenie i, co więcej godne uwagi, prawie momentalne, widzimy codziennie. Czyż to nie jest olbrzymie rozrzedzenie, gdy mała ilość prochu strzelniczego daje niezmierną masę ognia? A czy czem innem jest nieskończone prawie rozchodzenie się światła? A co by to było za zgęszczenie, gdyby połączyć razem ten ogień i to światło, co przecież niewydać się niemożliwym, i zamknąć je następnie w małej przestrzeni. Pomyślcie tylko, a znajdziecie tysiące podobnych zjawisk rozrzedzenia, bo te częściej się zdarzają niż zgęszczenie; bo gęstą materję częściej się ma pod ręką i łatwiej podpada ona pod zmysły, czy to, gdy bierzemy drzewo i widzimy, jak się ono rozrzedza na ogień i światło a nie możemy zobaczyć ognia i światła zgęszczających się na drzewo, czy też, gdy owoce i kwiaty i tysiące innych podobnych ciał rozrzedzają się na zapachy, a nie możemy obserwować atomów zapachu zgęszczających się na wonne ciała. Wszakże brak rozumnej obserwacji zastąpić trzeba rozważaniem, które wystarczy do zrozumienia nietylko ruchu rozrzedzania i rozpuszczania się ciał stałych ale także zgęszczania substancji delikatnych, choćby jak najrzadszych. Badajmy więc, jak dokonywanem być może zgęszczanie i rozrzedzanie ciał bez pomocy próżni i przenikania; z czego nie wynika, aby w naturze nie było ciał, przy których nie następują te zjawiska i przy których to, co się Wam wydaje niemożliwym, istotnie się nie zdarza. Wreszcie, panie Simplicio, na przekór Waszym filozofom namęczyłem się rozważaniem, jak może być pomyslanem zgęszczanie i rozrzedzanie, nie przyjmując przenikania ciał i nie wprowadzając próżni, zdarzeń, którym przeczyć i które odrzucać, podczas kiedy, gdybyście się

na nie zgadzali, nie oponowałbym Wam tak stanowczo. Albo więc usuniecie te niedogodności, albo zgódźcie się na moje rozważania, lub wreszcie znajdźcie więcej odpowiednie.

Sagredo: Przenikania, zgodnie z filozofami perypytetycznymi, zupełnie przeczę. Co do próżni, to pragnąłbym rozstrząsnąć dowodzenie Arystotelesa, którem on ją zwalcza, wbrew Waszemu i p. Salviati'ego pogładowi. Proszę pana, p. Simplicio, podać nam dowodzenie filozofów, a pan p. Salviati zechce łaskawie odpowiedzieć.

Simplicio: Arystoteles, o ile sobie przypominam, powstaje przeciwko pogładowi niektórych dawnych filozofów, którzy próżnię wprowadzają jako potrzebną do ruchu, utrzymując, że bez niej ruch nie mógłby powstać. Przecistawiając się temu, Arystoteles dowodzi, że właśnie tworzenie się ruchu sprzeciwia się przyjmowaniu próżni, a dowodzenie jego jest następujące. Rozbiera dwa przypadki: najprzód daje się poruszać dwom różnym masom w jednym i tym samym ośrodku a następnie jednej i tej samej masie w dwóch różnych ośrodkach. W pierwszym przypadku utrzymuje, że różne ciała poruszają się w tym samym ośrodku z różnymi prędkościami, mianowicie proporcjonalnymi do ciężkości, tak że np. dziesięć razy większy ciężar porusza się dziesięć razy prędzej. W drugim przypadku przyjmuje, że prędkości tej samej masy w różnych ośrodkach mają się do siebie w stosunku odwrotnym gęstości ośrodków, tak że np. jeżeli gęstość wody jest dziesięć razy większa od gęstości powietrza, to prędkość w powietrzu będzie dziesięć razy większa niż w wodzie. Drugi pogląd tak się wywodzi: ponieważ rzadkość próżni różni się tylko o ilość nieskończenie małą od rzadkości przestrzeni wypełnionej jak najsubtelniejszą materją, to każde ciało, potrzebujące pewnego czasu do ruchu w ośrodku pełnym, w próżni poruszać się winno momentalnie, że zaś ruch momentalny jest niemożliwy, żaden więc ruch w próżni nie może się odbywać.

Salviati: Jest to, jak widzimy, dowodzenie *ad hominem*, t. j. skierowane przeciwko tym, którzy uważają, że próżnia jest potrzebna dla ruchu. Jeżeli zgodzę się na wniosek, bo i ja uważam, że ruch nie odbywa się w próżni, to jednak przez to przyjmowanie próżni w absolutnem znaczeniu nie może być porzucone. Aby powiedzieć coś po myśli dawnych filozofów i lepiej przejrzeć jak wiele Arystoteles dowiódł, możnaby, zdaje mi się, odrzucić oba przykłady. Wątpię najprzód bardzo, czy Arystoteles sprawdził doświadczalnie, że dwa kamienie, z których jeden jest dziesięć razy

cięższy od drugiego, puszczane równocześnie z wysokości stu łokci, spadają w ten sposób, że, gdy pierwszy doszedł do ziemi, to drugi przeleciał dopiero dziesięć łokci.

Simplicio: Z przedstawienia waszego widzi się, że wykonywaliście to doświadczenie, inaczej nie mówilibyście o sprawdzaniu.

Sagredo: Ale ja, panie *Simplicio*, który nie wykonywałem doświadczenia, zapewniam Was, że kula armatnia, 100, 200 lub więcej funtowa, spadając, ani na cal nie wyprzedzi półfuntowej kuli strzelby, spadającej równocześnie z tej samej wysokości 200 łokci.

Salviati: Bez żadnych doświadczeń, możemy krótkim a ścisłym wywodem wykazać jasno, że jest niemożliwe, aby większy ciężar poruszał się prędzej niż mniejszy, jeżeli oba są z jednej materji i wreszcie takie, o jakich mówi *Arystoteles*. Więc powiedz, panie *Simplicio*, czy godzisz się na to, że każde ciało spadające ma prędkość przez naturę oznaczoną, tak że, aby się ta powiększała lub zmniejszała, potrzeba użyć siły przyspieszającej lub opóźniającej.

Simplicio: Niewątpliwie każde ciało ma w danym ośrodku prędkość oznaczoną przez naturę, którą tylko nowy popęd może powiększyć a nowa przeszkoda zmniejszyć.

Salviati: Gdybyśmy więc mieli dwa ciała, których naturalne prędkości są różne, to jasnem jest, że gdy powolniejsze złączymy z przedszem, to wtedy to ostatnie będzie opóźniane przez tamto, a powolniejsze będzie przyspieszone przez przedsze. Czy zgadzacie się co do tego ze mną?

Simplicio: Zdaje mi się, że to nastąpić winno niewątpliwie.

Salviati: Jeżeli więc jest prawdą, że wielki kamień porusza się z prędkością ośmiu stopni a mniejszy z prędkością czterech stopni, to te dwa kamienie złączone razem będą miały prędkość mniejszą od ośmiu stopni. Ale połączone dwa kamienie są większe od wielkiego kamienia, który miał prędkość ośmiu stopni, więc w tym razie ciężar większy poruszałby się wolniej od mniejszego, co sprzeciwiałoby się Waszemu założeniu. Widzicie więc jak z założenia, że większe ciało porusza się prędzej od mniejszego, dochodzę do wniosku, że większy ciężar porusza się wolniej.

Simplicio: Jestem zupełnie stropiony, gdyż wydaje mi się teraz, że mały kamień, dołączony do większego, powiększa jego ciężar, gdy tymczasem ten ciężar nie zostanie powiększony zarówno, jak i prędkość, a w każdym razie ta ostatnia się nie zmniejsza.

Salviati: Tu popełnia pan nowy błąd, panie *Simplicio*, gdyż nie jest prawdą, aby mały kamień powiększał ciężar większego.

Simplicio: To już przechodzi moje pojęcie.

Salviati: Nie przejdzie, skoro tylko usunę wątpliwości w jakich pan jest pogrążony: gdyż zauważcie, że trzeba tu rozróżniać, czy ciężary są w ruchu, czy też znajdują się w spoczynku. Kamień położony na wadze, nie tylko stanie się cięższym, gdy doń dołączymy inny kamień, ale także gdy dołożymy garść konopi, będzie ważył więcej o 6 lub 10 uncyj, które waży ta garść; ale jeżeli zrzucić będziecie kamień z wysokości, razem z konopiami, to czy myślicie, że w ruchu konopie ciężać będą na kamieniu i mają przyspieszać jego ruch? albo że będą go podtrzymywać i jego ruch opóźniać? Czy nie czujemy ciężaru na ramionach, gdy chcemy się opierać jego ruchowi, ale jeżeli sami obniżamy się z taką samą prędkością, z jakąby spadał ciężar, jakże chcecie, aby on tam naciskał lub ciężał? Czy nie widzicie, że byłoby to tak, jakbyśmy chcieli uderzyć pika tego, który biegnie przed nami z tą samą prędkością lub większą niż nasza. Wyprowadźcie więc stąd wniosek, że przy swobodnym i naturalnym spadku mały kamień nie ciąży na większym i nie powiększa jego ciężaru, jak wtedy gdy są w spoczynku.

Simplicio: Ale gdyby wielki kamień położony został na małym?

Salviati: To zwiększyłby jego ciężar, gdyby miał większą prędkość; ale skoro doszliśmy już do wniosku, że, gdyby mały ciężar spadał wolniej, to opóźniałby spadek większego, więc oba kamienie razem spadałyby wolniej, co się sprzeciwia waszemu twierdzeniu. Dochodzimy więc do wniosku, że wielkie i małe ciała, tegoż samego ciężaru gatunkowego, poruszają się z jednakową prędkością.

Simplicio: Wywód wasz jest jak najprawdziwszy, a jednak trudno mi jest uwierzyć, aby kropla ołowiu poruszała się równie prędko, jak kula armatnia.

Salviati: Powiedźcie raczej ziarnko piasku jak kamień młyński. Nie chciałbym, panie Simplicio, abyś tak czynił, jak inni i zbaczając od kwestji głównej, występował przeciwko mojemu pogładowi, różniącemu się o włos od prawdy, i chciał tym włosem zakrywać czyj inny błąd, gruby jak lina okrętowa. Arystoteles mówi: stofuntowa kula żelazna, spadająca swobodnie z wysokości stu łokci, wprzód dochodzi do ziemi, aniżeli jednofuntowa spadająca z wysokości jednego łokcia; ja utrzymuję, że obie spadają równocześnie: Wy znajdujecie, że większa o dwa cale wyprzedza mniejszą, tak, że gdy większa uderza o ziemię, to mała odległa jest od niej

o dwa cale; wy chcecie temi dwoma calami zasłonić dziewięćdziesiąt dziewięć łokci Arystotelesowych i, mówiąc tylko o moim małym błędzie, pomijacie milczeniem drugi większy. Arystoteles mówi, że ciała różnego ciężaru w tym samym ośrodku poruszają się (o ile to zależy od ciężenia) z prędkościami proporcjonalnymi do ich ciężaru i daje jako przykład ciała, których rozważać można tylko czysty absolutny ciężar, nie uwzględniając wpływów, takich jak kształt, ich mniejsze *momenty*, rzeczy na które silny wpływ wywiera ośrodek, zmieniający proste działanie ciężkości, jak to widzimy przy złocie, najcięższem gatunkowo ciele, które jako cienki arkusik unosi się w powietrzu, a również pod postacią delikatnego proszku. Ale jeżeli chcecie postawić ogólną zasadę, to trzeba, abyście wykazali stosunek prędkości zaobserwowany przy wszystkich ciałach ciężkich i to, że kamień dwudziestofuntowy dziesięć razy prędzej się porusza od dwufuntowego, co, jak ja utrzymuję, jest równie błędem, gdyż spadając z wysokości pięćdziesięciu lub stu łokci, zawsze dojdą do ziemi w tej samej chwili.

Simplicio: Ale może przy wielkiej wysokości tysiąca łokci nastąpiłoby to, co się nie zdarza przy wysokości mniejszej.

Salvati: Gdyby Arystoteles przypuszczał coś podobnego, obarczylibyście go innym błędem, któryby był kłamstwem; gdyż takich pionowych wysokości na ziemi niema, więc rzecz jasna, że nie mógł Arystoteles robić z niemi doświadczenia: a jednak chce on nas przekonać, że je robił, bo powiada, że taki widać skutek.

Simplicio: Zapewne Arystoteles nie posługiwał się tą zasadą lecz drugą, która nie sądzę, aby podlegała tej trudności.

Salvati: Ale ta druga jest niemniej mylna i dziwię się, że sami nie zauważyliście pomyłki i nie spostrzegli, że gdyby była prawdziwą, to według niej jedno i toż samo ciało, w ośrodkach różnej gęstości, jak np. w wodzie i powietrzu, poruszałoby się z prędkościami odwrotnie proporcjonalnymi do gęstości, a więc wszystkie ciała, spadające w powietrzu, musiałyby także spadać w wodzie; co jest zupełnie mylne, gdyż wiele ciał, które spadają w powietrzu, w wodzie nie spadają, ale podnoszą się do góry.

Simplicio: Ja nie pojmuję potrzeby Waszego wniosku a nadto dodam, że Arystoteles mówi o takich ciałach, które w obu ośrodkach spadają a nie o takich, które spadają w powietrzu, a podnoszą się w wodzie.

Salvati: W obronę filozofa przytaczacie argumenty, których on nie podałby z pewnością, aby pierwiastkowego swego błędu nie

powiększać. Powiedźcie mi przytem, czy gęstość wody, albo to co opóźnia jej bieg, pozostaje w pewnym stosunku do gęstości powietrza, która mniej opóźnia jego bieg, a jeżeli tak, to podajcie mi dowolną wartość tego stosunku.

Simplicio: Zgoda, weźmy stosunek dziesięciokrotny; będzie się tym sposobem ciało spadające w powietrzu poruszać dziesięć razy prędzej niż w wodzie.

Salviati: Biorę teraz ciało, które spada w powietrzu a nie spada w wodzie, jak np. kulę drewnianą i pytam się Was, jaką oznaczacie prędkość jej spadku w powietrzu.

Simplicio: Przyjmujemy, że będzie się poruszała z prędkością dwudziestu stopni.

Salviati: Doskonale. Oczywiście może ta prędkość stoi do innej w tym samym stosunku, jak gęstość wody do gęstości powietrza i ta inna prędkość wynosić będzie tylko 2 stopnie, tak że w rzeczywistej zgodzie z zasadą Arystotelesa wnioskować należy, że kula drewniana, która w powietrzu spada z prędkością dwudziestu stopni, powinna spaść w wodzie z prędkością 2 stopni, a nie podnosić się od dna i pływać na powierzchni, jak to czyni; albo też chcielibście powiedzieć, że podnoszenie się w wodzie odbywa się tak samo jak spадanie w powietrzu z prędkością dwóch stopni, czego nie przypuszczam. Właśnie fakt, że kula nie spada na dno, pozwala mi spodziewać się, że się zgodzicie na to, że można znaleźć inną kulę z innego materiału, któraby spadała w wodzie z prędkością dwóch stopni.

Simplicio: Można, tylko materiał musi być znacznie cięższy od drzewa.

Salviati: Tego właśnie szukam. Ale ta druga kula, która w wodzie spada z prędkością dwóch stopni, jak prędko spadać będzie w powietrzu? Powinniście odpowiedzieć (jeżeli chcecie posługiwać się zasadą Arystotelesa), że z prędkością dwudziestu stopni; ale dwadzieścia stopni prędkości przyznaliście sami kuli drewnianej; a więc tak ta, jak i druga cięższa, poruszałaby się w powietrzu z jednakową prędkością. Jakże to zgodzi filozof z pierwszą swoją zasadą, według której różne ciała, w jednym i tym samym ośrodku, poruszają się z różnemi prędkościami, tak się różniąciami od siebie jak ich ciężkości. Ale, nie bacząc już na to, jakże nie mogliście zaobserwować, jak dwa ciała poruszają się w wodzie, jedno sto razy prędzej od drugiego, podczas gdy, spadając w powietrzu, mają prędkości nie różniące się nawet o jedną setną; albo jak jaj-

ko z marmuru, spada w wodzie sto razy prędzej od jajka kury, podczas gdy przy spadaniu obu jajek, z wysokości dwudziestu łokci w powietrzu, jajko marmurowe ani na cztery cale kurzego nie wyprzedzi; że wreszcie niektóre ciała pogrążają się na głębokość dziesięciu łokci w wodzie w ciągu trzech godzin, podczas gdy na spadek w powietrzu potrzebują zaledwie dwóch uderzeń pulsu, a inne (jakby to było z kulą ołowianą) czasu mniej niż podwójnego. Tak tedy wiem dobrze, panie Simplicio, że mnie rozumiecie, że niema różnicy zdań ani żadnej odpowiedzi. Wnosimy więc, że ten argument nie przynosi przeciwko próżni, a gdyby nawet tak było, to byłyby przez to usunięte tylko te wielkie próżnie, których ani ja, ani jak sądzę, starożytni nie przyjmowali jako dane od natury, jakkolwiek mogą być robione siłą, jak to wynika z wielu dowodzeń, o których zbyt długo byłoby tu mówić.

Sagredo: Widząc że p. Simplicio milezy, pozwolę sobie podnieść tu inną kwestję. Jakkolwiek dowiedliście jasno, że ciała nierównego ciężaru w tym samym ośrodku nie poruszają się z prędkościami proporcjonalnymi do ich ciężkości, lecz z jednakowemi, przyjmując przytem, że ciała są z tegoż samego materiału albo tegoż samego ciężaru gatunkowego, a nie (jak myślę) różnych ciężarów gatunkowych (gdyż nie można wymagać, abyśmy wierzyli, że kula korkowa porusza się również prędko jak ołowiana) i dalej, że nie słuszne jest twierdzenie, jakoby jedno i toż samo ciało, w ośrodkach różnej oporności, opóźniało lub przyspieszało swój ruch w stosunku odwrotnym do oporności; pragnąłbym więc bardzo dowiedzieć się, jaki stosunek zaobserwowany został w jednym i drugim przypadku.

Salviati: Zadania są piękne i wiele nad nimi rozmyślałem. Wyłożę wam mój pogląd, choć jeszcze nie w ostatecznej formie. Po przekonaniu się o nieprawdziwości tego, że jedno i toż samo ciało, w różnych ośrodkach, osiąga prędkości odwrotnie proporcjonalne do oporów, jak i tego, że ciała różnego ciężaru, w jednym i tym samym ośrodku, osiągają prędkości proporcjonalne do swych ciężarów (nawet przy samej różnicy ciężarów gatunkowych), skombinowawszy oba te zjawiska przez umieszczenie różnych ciał w różnych ośrodkach, znalazłem, że osiągnięte prędkości tem więcej się różnią, im opór ośrodka jest większy i to w tym stosunku, że dwa ciała, które w powietrzu spadają z bardzo mało różniącemi się prędkościami, w wodzie mogą mieć prędkości, dziesięć razy większe jedna od drugiej; zdarza się także, że ciało spada w powietrzu a w wo-

dzie pływa t. j. wcale nie spada, a nawet się podnosi: to też można znaleźć takie gatunki drzewa, albo sękate ich części, albo korzenie, które pozostają zawieszone w wodzie, podczas gdy spadają szybko w powietrzu.

Sagredo: Usiłowałem nieraz bardzo cierpliwie kulkę wosku, która sama w wodzie się nie zanurza, oblepiać ziarnkami piasku, dopóki nie nabierze ciężaru równego wodzie i nie stanie w jej wnętrzu; pomimo całej ostrożności nie udało mi się tego dokonać. Nie wiem, czy jest inne jakie ciało, któreby miało gęstość równą wodzie, tak aby mogło pozostawać w niej w tem samym miejscu, w jakim je ustawiono.

Salvati: Tak do tej, jak i do tysiąca innych czynności więcej jest od nas uzdolnionych wiele zwierząt. W waszym przypadku, dostarczyć mogą pewnego dowodu ryby, będące do tej czynności tak usposobione, że dowoli utrzymują się w równowadze, nie tylko w czystej wodzie ale i w różnych jej rodzajach natrafianych w naturze, jak zanieczyszczonej czy to szlamem, czy solą, choćby różnica gęstości była znaczna; i utrzymują się w równowadze tak ściśle, że bez poruszania pozostają w spokoju w każdym miejscu; czynią to, posługując się danem im przez naturę narzędziem, małym pęcherzykiem wewnątrz ciała, który przez wązki kanalik komunikuje się z wnętrzem paszczy, tak że stosownie do potrzeby, znajdujące się w pęcherzyku powietrze zostaje wypchnięte, albo gdy ryby są na powierzchni wody, wciągnięte zostaje nowe powietrze i przez tę sztukę stają się to cięższymi, to lżejszymi od wody i w każdym miejscu mogą się utrzymać w równowadze.

Sagredo: Ja znów inną sztuką zwodziłem moich przyjaciół, przed którymi się chwaliłem, że doprowadzam wosk do ścisłej równowagi z wodą. Nalawszy na spód naczynia wodę słoną, dolałem słodkiej i wtedy wosk utrzymywał się stale pośrodku naczynia, opadał do środka, gdy był podnoszony, a podnosił się, gdy był popchnięty do dna.

Salvati: Nie bez użytku jest takie doświadczenie: gdy lekarze badają własności różnych wód, a między innemi głównie lekkość lub ciężkość, większą jednych niż drugich, to urządzają taką kulkę, aby wykazywała jak najmniejsze różnice, pogłębiając się w jednej wodzie, a podnosząc w drugiej. I w ten sposób tak dokładne jest doświadczenie, że przez dodanie tylko dwóch granów soli do sześciu funtów wody, kulka leżąca na dnie podnosi się do samej góry, skąd przedtem opadła. Na dowód dokładności tego doświadczenia,

oraz braku wszelkiego oporu przy rozdzielaniu cząstek wody, dodać może, że nie tylko powiększenie jej ciężaru przez domieszanie cięższej substancji, taki sprawia skutek, ale także proste rozgrzanie i ochłodzenie i to z taką czułością, że przez wprowadzenie czterech kropli innej wody nieco chłodniejszej lub cieplejszej, do tych sześciu funtów, wywołuje się opadanie lub podnoszenie kulki, która przy dodaniu zimnej wody podnosi się a cieplej — opada. Widzicie teraz, jak się mylili ci filozofowie, którzy przyznawali wodzie lepkość albo inne związanie cząstek, stawiające opór rozdzielaniu i przenikaniu.

S a g r e d o: Znalazłem wiele przekonywających rozważań w tym przedmiocie w jednej rozprawie naszego akademika, ale mimo to pozostaje mi wielka wątpliwość, której nie mogę usunąć; jeżeli niema żadnej lepkości lub spójności między cząstkami wody, jakże się mogą utrzymywać duże krople, często spostrzegane zwłaszcza na liściach kapusty, bez spłaszczania się i rozlewania?

Salviati: Jakkolwiek każdy, kto uważa swój pogląd za słuszny, winien odpierać wszelkie zarzuty, tu jednak nie mogę przyznawać sobie możliwości zrobienia tego, ale moja nieudolność nie powinna zamącać jasności prawdy. Przyznaję się najprzód, że nie wiem w jaki sposób utrzymują się wysokie i wielkie krople, jakkolwiek wiem na pewno, że to nie pochodzi ze spójności wewnętrznej cząstek i że przyczyny zjawiska szukać należy na zewnątrz. Że ona nie jest wewnętrzną, mogę Was o tem, oprócz poprzedniego doświadczenia, przekonać innem, nader dowodnem. Gdyby cząstki tej wody, która utrzymuje się podniesiona, podczas gdy jest otoczona powietrzem, miały wewnętrzną przyczynę trzymania się razem, to ta pewniej jeszcze miałaby miejsce, gdyby się znajdowały w otoczeniu w którym miałyby mniej dążności do opadania na dół, niż w powietrzu; ale takim ośrodkiem może być każdy płyn cięższy od powietrza, np. wino, tylko że otoczenia kropli wody winem nie da się zrobić bez rozpuszczenia cząstek wody, trzymających się razem swą wewnętrzną lepkością; ale rozpuszczenie to nie następuje wcześniej, aż obca ciecz zostanie zbliżona, przyczem woda zaraz się rozchodzi, nie czekając rozpuszczenia lub zmieszania, jak to ma miejsce z winem czerwonym; a więc przyczyna zjawiska jest zewnętrzna i może pochodzi od powietrza. I rzeczywiście, zauważyć można wielką niezgodność między powietrzem a wodą, jak to zaobserwowałem przy następującem doświadczeniu. Jeżeli bańkę szklaną, mającą otwór mały jak słomka, napełnię wodą i jeżeli tak napełnioną

bańkę odwrócić otworem do spodu, to woda nie wypłynie, jakkolwiek jest cięższą, a powietrze chociaż lżejsze nie wchodzi do bańki, zwykle tak jedna jak i drugie pozostają w spokoju. Jeżeli zaś tak odwróconą bańkę zanurzę otworem w czerwonym winie, które zaledwie trochę jest lżejsze od wody, to widzimy zaraz jak czerwone promienie wchodzi do bańki, woda opuszcza się do wina, jakkolwiek się ze sobą nie mieszają, aż w końcu wino wypełni bańkę a woda zejdzie do spodu naczynia z winem. Cóż mamy o tem powiedzieć i czem to wytłumaczyć, jeżeli nie niezgodą między wodą a powietrzem, nieznana mi, którą może...

Simplicio: Śmiać się muszę z antypatji pana *Salvati*'ego, do wyrazu antypatja, którego on nie chce tu wymówić, a który tak się nadaje do przecięcia trudności.

Salvati: Niechże takie będzie, dzięki panu *Simplicio*, rozwiązanie naszej wątpliwości i wróćmy po tem zboczeniu, do naszego zadania. Widzieliśmy, że różnica prędkości spadania różnych ciał jest znacznie większa w ośrodkach więcej opornych: ale złoto nie tylko spada w merkurjuszu prędzej niż ołów, jest nadto jedynym metalem, który w nim spada, bo inne metale podnoszą się i pływają; z drugiej strony, kulki ze złota, ołowiu, miedzi, porfiru i innych ciał ciężkich spadają w powietrzu z prędkościami, których różnice nie dają się zauważyć i pewno kulka złota, w końcu swego spadku z wysokości stu łokci nie wyprzedzi kulki miedzianej nawet o cztery cale; z uwagi na to, jestem zdania, że gdyby usunąć zupełnie opór ośrodka, to wszystkie ciała spadałyby z jednakową prędkością.

Simplicio: Śmiało to twierdzenie, panie *Salvati*. Co do mnie, nigdy nie uwierzę, aby w jednej i tej samej próżni, gdy się ruch odbywa, pęczek wełny spadał równie prędko jak kawał ołowiu.

Salvati: Ostrożnie, panie *Simplicio*. Pogląd pański nie jest tak uzasadniony, ani ja nie jestem tak nicopatrny, aby można było sądzić, że nie mam lub nie mogę znaleźć wytłumaczenia. Posłuchajcie więc, co powiem dla mego usprawiedliwienia i przekonania was. Badać mamy ruch różnych ciał w ośrodku nie stawiającym oporu, tak że wszelkie różnice prędkości ciał spadających zostaną usunięte. A ponieważ jedynie tylko przestrzeń, w której zupełnie niema powietrza ani żadnej materji choćby najrzadszej i najmniej opornej, mogłaby wykazać to czego szukamy i ponieważ takiej przestrzeni nie możemy wytworzyć, — to spróbujmy zobaczyć, co się dzieje w ośrodkach najrzadszych i najmniej opornych, w porównaniu z innymi. Znajdujemy istotnie, że różne ciała różnią się tem mniej

w swym ruchu, im ośrodki są mniej odporne i że w rezultacie, pomimo wielkiej różności ciał spadających w najrzadszym ośrodku, zauważyć można różnice prędkości ledwie dostrzegalne, zaledwie istniejące; dlatego wydaje mi się, że możemy przyjmować z wielkiem prawdopodobieństwem, iż w próżni nie będzie wcale tych różnic. Bo zważmy, co się dzieje w powietrzu; ażeby zaś mieć ciało ściśle oznaczonego kształtu, z bardzo lekkiej materji, weźmy wydęty pęcherzyk, pełen powietrza, które zważone w powietrzu nic nie waży (albo bardzo mało, bo mogło być nieco ściśnięte w pęcherzyku), tak że ciężar całego pęcherzyka składa się tylko z ciężaru powłoki, a więc nie wynosi ani tysięcznej części ciężaru tej samej wielkości kulki ołowianej. Takie dwa ciała, panie Simplicio, spuśćcie z wysokości czterech do pięciu łokci; o ile, myślicie, że ołów spadnie wcześniej od pęcherzyka? Bądźcie pewni, że ani dwa ani trzy razy prędzej, chociaż uczyniliście go tysiąckrotnie prędszym.

Simplicio: Być może, że w początku ruchu, w ciągu pierwszych czterech do sześciu łokci, będzie tak jak mówicie, ale w dalszym ciągu, przy dłuższem spadaniu, sędzę, że ołów pozostawi po za sobą pęcherzyk nietylko na $\frac{1}{12}$ część przestrzeni ale na sześć, osiem i dziesięć.

Salviati: I ja tak myślę i nie wątpię, że przy bardzo wielkich wysokościach, ołów może spadać sto mil, podczas gdy pęcherzyk tylko jedną milę. Ale, mój panie Simplicio, właśnie to, co przedstawiacie jako zjawisko przeczące memu pogładowi, najwięcej ten pogląd stwierdza. Wykazuje ono, że przyczyną różnic prędkości ciał różnego ciężaru, nie może być ten ciężar, lecz że ta przyczyna zależy od okoliczności zewnętrznych, a zwłaszcza od oporu ośrodka, tak że po usunięciu tego oporu wszystkie ciała poruszają się z temi samemi stopniami prędkości. Wywodzę to głównie z poglądu, co dopiero przez was przyjętego, który jest zupełnie słuszny, że ciała różnego ciężaru, tem więcej się różnią co do prędkości z jakimi spadają, im większe przebiegają odległości: co nie miałyby miejsca gdyby przyczyną była różność ciężarów. Bo ponieważ te ciężary są wciąż też same, to również ten sam stosunek winien się utrzymywać między przebieżonemi przestrzeniami, który to stosunek widzimy, że stale wzrasta podczas ruchu; bo bardzo ciężkie ciało nie wyprzedzi o $\frac{1}{10}$ część przebieżonej przestrzeni bardzo lekkiego przy spadku z wysokości jednego łokcia, z wysokości 12 łokci wyprzedzi o $\frac{1}{3}$, a ze 100 łokci o $\frac{90}{100}$.

Simplicio: Bardzo dobrze, ale jeżeli według Was różnica cięż-

żaru, przy ciałach różnej ciężkości gatunkowej, nie wywołuje proporcjonalnych zmian prędkości, to znów gdy ciężary są jednakowe, wtedy ośrodek, pozostając wciąż ten sam, nie powinien powodować zmiany prędkości.

Salvati: Podnieśliście przeciw mojemu pogładowi ciężki zarzut, który koniecznie muszę odeprzeć. Powiedziałem co dopiero, że ciało ciężkie, posiada w sobie daną przez naturę własność poruszania się w kierunku wspólnego środka ciał ciężkich tj. ku naszej kuli ziemskiej i to ruchem stale i zawsze równomiernie przyspieszonym, tak że w czasach równych dochodzą nowe momenty i stopnie prędkości. I to zawsze może być sprawdzone, jak tylko usunięte zostaną przypadkowe przeszkody zewnętrzne; między niemi jest jedna, która się nie daje usunąć, mianowicie ośrodek, który musi się otwierać przed ciałem spadającym i usuwać na bok, a temu swemu ruchowi bocznemu, ośrodek, nawet gdy jest płynny, ustepliwy i spokojny, zawsze stawia opór, który stosownie do okoliczności jest większy lub mniejszy, a zwłaszcza tem większy im prędzej ośrodek musi się otwierać dla przepuszczenia ciała, które przez to, z natury spadając ruchem przyspieszonym, doznaje wciąż rosnącego oporu; powstaje stąd opóźnienie i zmniejszenie nowo nabytych prędkości, tak że te w końcu, podobnie jak doznawane opory, dochodzą do tego stopnia, że się równoważą i znoszą wszelkie przyspieszenie, a ciało wprowadzają w ruch jednostajny, w którym ono dalej pozostaje. Więc powiększenie oporu w ośrodkach nie polega na żadnej zmianie ich istoty, ale na prędkości, z jaką ośrodek musi się otwierać i w bok usuwać, aby ciału spadającemu z przyspieszeniem dać przejście. Teraz, widząc, że opór jaki stawia powietrze małemu momentowi spadającego pęcherzyka jest bardzo wielki, przeciwnie zaś wielkiemu ciężarowi ołowiu bardzo mały, dochodzę do wniosku, że, gdyby można było opór ten zupełnie usunąć i dać przez to pęcherzykowi jak największą wygodę a bardzo małą ciężarowi ołowianemu, to zrównałyby się ich prędkości. Stawiam przeto zasadę, że w przestrzeni próżnej albo skądinąd nie stawiającej żadnej przeszkody prędkościom ruchu, tak że wszystkie ciała poruszać się w niej będą z jednakową prędkością, będziemy mogli poznać dość dokładnie stosunki prędkości ciał podobnych i niepodobnych, poruszających się w tym samym ośrodku i w różnych ośrodkach zapełnionych a przez to opornych. Dojdziemy do tego, biorąc pod uwagę, ile ciężar ośrodka ujmuje ciężarowi poruszającego się ciała, gdyż przewyżka ciężaru jest środkiem pomocniczym, za

pomocą którego ciało przebiją sobie drogę, odsuwając na boki części ośrodka, okoliczność, która nie zachodzi w próżni i dla tego niema tam różnicy, jakiej oczekiwać można z różności ciężaru gatunkowego. A ponieważ okazuje się stąd, że ośrodek odciąga tyle ciężkości poruszającemu się w niem ciału, ile waży wypchnięta część ośrodka, więc, zmniejszając w tej proporcji prędkość spadającego ciała, która byłaby równą w ośrodku nie opornym (jak to przypuszczono), otrzymamy to, czego szukamy. Przyjmując np. że ołów jest 10000 razy cięższy od powietrza a heban tylko 1000 razy, to od prędkości obu tych ciał, które w ośrodku bez oporu byłyby równe, odejmie powietrze od ołowiu z 10000 stopni jeden a od hebanu z 1000 stopni jeden, co znaczy z 10000 dziesięć. Gdy więc ołów i heban spadają w powietrzu z jakiegokolwiek wysokości, którą, gdyby opór powietrza był usunięty, przebyłyby w tym samym czasie, to powietrze odejmie od prędkości ołowiu z 10000 stopni jeden a od hebanu z 10000 dziesięć, co znaczy, że podzieliwszy wysokość spadku na 10000 części, ołów spadnie, gdy heban będzie za nim 10 mniej jeden czyli dziewięć części i w tyle. A cóż jest innego, jeżeli znajdujemy, że spuszczać z wieży 200 łokciowej kulkę ołowianą to ona wyprzedza hebanową o 4 cale? Heban waży 1000 razy więcej od powietrza, ale ten pęcherzyk, który był wydęty waży tylko cztery razy tyle; powietrze więc odciągnie od naturalnej prędkości hebanu z tysiąca stopni jeden, a od tej, któraby dla pęcherzyka była absolutnie taką samą, powietrze nie odciągnie jak tylko z czterech części jedną. Gdy zatem kulka hebanu dosięgnie ziemi, pęcherzyk przeleci tylko $\frac{3}{4}$ wysokości. Ołów jest dwanaście razy cięższy od wody, a kość słoniowa tylko dwa razy: woda więc {od ich absolutnych prędkości, które byłyby równe, odciągnie dla ołowiu $\frac{1}{12}$ a dla kości słoniowej $\frac{1}{2}$: w wodzie więc, gdy ołów zejdzie jedenaście łokci, kość słoniowa zejdzie tylko na sześć. Rozumując według tej zasady, sędzę, że znajdziemy, iż doświadczenie ściślej odpowiada takiemu rachunkowi niż Arystotelesowemu. W podobny sposób znaleźć można stosunek między prędkościami tegoż samego ciała w różnych ośrodkach płynnych, nie przez porównywanie różnych oporów tych ośrodków ale przez rozważanie przewyżek ciężkości ciała nad ciężkością ośrodków; cyna jest np. 1000 razy cięższa od powietrza a 10 razy od wody, więc jeżeli podzielimy prędkość absolutną cyny na 1000 stopni, to w powietrzu, które z niej nie ujmuje $\frac{1}{1000}$ części, poruszać się będzie z prędkością 999 stopni, a w wodzie tylko z prędkością 900 stopni, ponieważ woda ujmuje $\frac{1}{10}$ część jej cięż-

kości a woda $\frac{1}{1000}$. Niech będzie ciało nieco cięższe od wody np. drzewo dębowe i niech waży kula z niego 1000 drachm, a także kula wody 950, zaś powietrza 2, to oczywiście, przyjmując, że absolutna jej prędkość jest 1000 stopni, to w powietrzu byłaby 998 a w wodzie tylko 50 stopni, bo woda ujmuje z jej 1000 stopni ciężkości a zostawia tylko 50; ciało to więc poruszałoby się w powietrzu 20 razy prędzej niż w wodzie, gdyż przewyżka jego ciężkości nad ciężkością wody jest tylko dwudziestą częścią jego własnej. I co chciałbym jeszcze zauważyć, że opadanie w wodzie możliwe jest wtedy tylko, gdy ciężar gatunkowy ciała jest większy niż wody; a to są ciała wiele set razy cięższe od powietrza; dla znalezienia więc proporcji prędkości ich w wodzie i w powietrzu możemy bez znaczniejszego błędu rachować, że powietrze nie odejmuje momentowi absolutnej ciężkości, a więc i absolutnej prędkości tych ciał; znalazłszy więc łatwo przewyżkę ciężkości ciała nad ciężkością wody, powiemy, że jego prędkości w powietrzu i w wodzie mają się do siebie jak jego prędkość absolutna do przewyżki nad ciężkością wody. Np. kula z kości słoniowej waży 20 uncji, także sama z wody 17, a więc prędkość kuli w powietrzu i w wodzie mają się do siebie w przybliżonym stosunku 20 do 3.

S a g r e d o: Wielki nabytek zrobiłem w jednej, samej przez się interesującej, kwestji, nad którą często, niestety bezskutecznie rozmyślałem; nieby już nie brakło do zużytkowania tych wywodów, jak tylko znalezienie sposobu oznaczania ciężkości powietrza w porównaniu z wodą, a więc i z innemi ciałami ważkiemi.

S i m p l i c i o: Ale gdyby znaleziono, że powietrze posiada nie ciężkość, ale lekkość, to cóż stąd wyniknie dla całego rozważania, skądinąd bardzo dowcipnego?

S a l v i a t i: Wypadałoby powiedzieć, że było powietrze lekkie i puste. Ale czyżbyście chcieli wątpić o ciężkości powietrza, choć macie jasny tekst Arystotelesa, utrzymujący, że wszystkie elementy mają ciężkość, a tak samo i powietrze? Czego dowodem (jak on dodaje) jest, że sakwa nadęta waży więcej niż wypróżniona.

S i m p l i c i o: Że sakwa lub bania nadęta waży więcej, mniemałbym, że to pochodzi nie z ciężkości powietrza, ale z wielu, w niższych naszych okolicach domieszanych gęstych wyziewów, przy pomocy których ciężar sakwy wzrasta.

S a l v i a t i: Nie podoba mi się to, co mówicie, a mniej jeszcze, że powołujecie się na Arystotelesa, bo on, mówiąc o elementach i chcąc dowieść, że element powietrza ma ciężkość, uwidoczniłby to doświad-

czeniu; gdyby mi w swem dowodzeniu powiedział: biorę sakwę, napelniam ją gęstemi wyziewami i obserwuję przyrost ciężaru, odpowiedziałbym mu, że ważyłaby jeszcze więcej, gdyby była napelniona otrębami; ale dodałbym zaraz, że takie doświadczenia dowodzą tylko, że otręby i gęste wyziewy są ciałami ciężkimi, co do powietrza wszakże pozostaje taka sama wątpliwość jak i przedtem. Wszakże doświadczenie Arystotelesa jest dobre i zasada prawdziwa. Inaczej zato rzecz się ma z nauką innego filozofa, którego nazwiska nie pomnę, ale wiem, że ją czytałem, który dowodził, że powietrze jest raczej ciężkie niż lekkie, gdyż łatwiej ciężkie ciała niesie na dół niż lekkie do góry.

S a g r e d o: Wybornie, doprawdy. Byłoby na mocy tego powietrze wiele cięższe od wody, jakkolwiek wszystkie ciała ciężkie spadają łatwiej w powietrzu niż w wodzie, a wszystkie lekkie łatwiej w wodzie niż w powietrzu, przeciwnie niezliczone ciała podnoszą się w wodzie a spadają w powietrzu. Ale, panie Simplicio, czy ciężkość sakwy pochodzi od ciężkich wyziewów czy od czystego powietrza, to się nie nie sprzeciwia naszej zasadzie, gdyż my badamy, jak się ciała poruszają w tej przestrzeni gazowej. To też wracając do tego, co mnie więcej zajmuje, chciałbym dla gruntownego i absolutnego zbadania tej kwestji, nie tylko być zapewnionym, że powietrze jest ciężkie (gdyż uważam to za przesądzone), ale także dowiedzieć się, jaka jest jego ciężkość. Przeto proszę pana Salviati o udzielenie nam o tem wiadomości, jakie posiada.

S a l v i a t i: Że powietrze ma ciężkość pozytywną, a nie, jak to myśleli niektórzy, lekkość, której nie ma w żadnej materji, tego dostatecznie dowodzi doświadczenie Arystotelesa z wydętym balonem, gdyby bowiem dany był powietrzu przymiot lekkości, to przy powiększaniu ściskania powietrza wzrastałaby lekkość a więc i pęd wznoszenia się do góry, a doświadczenie daje wynik przeciwny. Co do drugiej kwestji, jakim sposobem badać można ciężkość powietrza, to używałem następującej metody. Wziąłem dość dużą flaszkę szklaną, z wąską szyjką, którą nakryłem naparstkiem ze skóry, przylegającym mocno do zwężenia szyjki i mającym na wierzchu wstawioną i ściśle umocowaną błonkę, przez którą, za pomocą szprycyki wtłaczałem z siłą do flaszki wielką ilość powietrza, które tak zostało zgęszczone, że możnaby było napęlić niem dwie do trzech innych flaszek, oprócz tego, które się w niej naturalnie znajdowało. Potem, na bardzo dokładnej wadze, zważyłem ściśle flaszkę wraz ze zgęszczonem w niej powietrzem, wyrównywając wagę odro-

biną piasku. Po otwarciu błonki i gwałtownem wyjściu ściśnionego powietrza, flaszka ponownie postawiona na wadze okazała się znacznie lżejszą i trzeba było dla jej zrównoważenia odjąć część piasku. Niewątpliwie ciężar tej części piasku był ściśle równy ciężarowi powietrza, które było w niej ściśnięte i w końcu wypuszczone. Doświadczenie to wykazało tylko, jaki był ciężar wypuszczonego z flaszki powietrza, równy ciężarowi odjętego piasku; ale ile ostatecznie i ściśle waży powietrze w porównaniu z wodą lub innymi ciałami ciężkimi, tego się nie dowiedziałem i nie mogłem wiedzieć, dopóki nie zmierzyłem ilości wypuszczonego powietrza. Aby tego dokonać, można postępować w dwojaki sposób. Pierwszy polega na wzięciu drugiej podobnej flaszki z szyjką, która także zaopatrzona jest w naparstek skórzany, ale otwarty i taki, że może obejmować naparstek z błonką pierwszej flaszki, do którego ściśle jest przywiązany. Ta druga flaszka ma otwór w dnie, przez który można wsuwać pręcik żelazny i z jego pomocą dziurawić błonkę i umożliwiać przejście zgęszczonego powietrza z pierwszej flaszki do drugiej, pełnej wody. Gdy wszystko przygotowane i błonka prętem przebita, powietrze wpada do flaszki napełnionej wodą i wypycha wodę przez otwór na zewnątrz; oczywiście tak otrzymana ilość wody równa będzie objętości powietrza, które wyszło z pierwszej flaszki. Zatrzymuje się tę wodę i waży flaszkę, z której wyszło powietrze (którą przypuszczam zważono przedtem z powietrzem ściśnionem), odejmując, jak powiedziano, część piasku, która oczywiście wyraża ciężar tej objętości powietrza, jaka jest objętość wody, wypchniętej i wyciekłej; tę wodę ważymy i otrzymujemy ile razy jej ciężar jest większy od ciężaru odjętego piasku; i bez błędu możemy orzec, ile razy cięższa jest woda od powietrza i to nie będzie dziesięć razy, jak oceniał Arystoteles, ale około czterystu, jak to wykazało doświadczenie.

Drugi sposób jest szybszy i może być przeprowadzony z jednym naczyniem, którem jest flaszka przygotowana, jak była mowa, z powietrzem, jakie się w niej naturalnie znajduje, bez wstrzykiwania nowego z zewnątrz; do tej flaszki wtłacza się wodę, nie wypuszczając powietrza, tak że się ono w niej zgęszcza. Po wprowadzeniu wody, ile tylko można, co wynosi około $\frac{3}{4}$ objętości flaszki, ważymy flaszkę jak najdokładniej, a następnie odwracamy szyjką do góry i przebijamy błonkę; wychodzi wtedy z flaszki taka objętość powietrza, ile miejsca zajmuje pozostała we flaszcze woda; poczem ważymy znów flaszkę i otrzymujemy, ile jej ubyło ciężaru przez

wyjście powietrza; będzie to ciężar tej objętości powietrza, która woda wypchnęła z flaszki.

Simplicio: Nie mogę powiedzieć, aby obmyślane przez Was sposoby nie były eleganckie i dowcipne, zdaje mi się wszakże, że o ile na pozór są zadowalające, to znów z innej strony wywołują powątpiewanie. Mianowicie, w swojej własnej dziedzinie elementy niewątpliwie nie są ani ciężkie ani lekkie, to też nie mogę pojąć, jak ta ilość powietrza, która nie wiele co ważyła, dajmy nato cztery drachmy piasku, mogła jednak mieć tę ciężkość w powietrzu, w którym piasek ją równoważył; mnie się zdaje, że doświadczenie nie powinno było odbywać się w powietrzu, ale w innym ośrodku, w którym powietrze wykazywałoby mogło swoją zdolność ciężenia, jeżeli takową posiada.

Salvati: Zarzut pana Simplicio jest ciężki i, albo niema nań odpowiedzi, albo też odpowiedź winna być nie mniej subtelna. Że to powietrze, które zostało zgęszczone i dało się zważyć odjęciem piasku, skoro wróciło do swego elementu, nie było już możliwem do zważenia, to prawda; zważyć można było tylko piasek; to też dla wykonania takiego doświadczenia powinno być wybrane takie miejsce, w którym i powietrze i piasek mogłyby ciężać; bo, jak już była mowa, ośrodek odciąga od każdego z zanurzonych w nim ciał, tyle z ich ciężaru, ile waży wypchnięta przez nie część ośrodka, tak że powietrze od powietrza odciąga cały ciężar; gdybyśmy chcieli postępować ściśle, musielibyśmy ważyć w próżni, gdzie każde ciało wywiera swój moment, bez żadnego zmniejszenia. Gdybyśmy więc mogli, panie Simplicio, zważyć pewną ilość powietrza w próżni, to czy byłbyś pan wtedy objaśniony i upewniony?

Simplicio: Tak istotnie, ale to jest życzenie lub wymaganie niemożliwości.

Salvati: Będziecie mi więc obowiązani, gdy stosownie do życzenia skutecznie Wam tę niemożliwość, inaczej nie mógłbym Wam sprzedać tego, co przed chwilą Wam dałem, bo w opisanym doświadczeniu ważyliśmy powietrze w próżni a nie w powietrzu lub innym wypełnionym ośrodku. Że każde ciało, panie Simplicio, zanurzone w ośrodku płynnym, doznaje ubytku ciężaru, pochodzi to stąd, że ośrodek opiera się rozwarciu, wyparciu i podniesieniu; oznaką tego jest pośpiech, z jakim ośrodek wypełnia przestrzeń, którą jakie wielkie ciało przedtem w nim zajmowało; gdyby ośrodek nie odczuwał zanurzenia, nie oddziaływałby pewno niemu.

Powiedźcie mi więc, jeżeli macie w powietrzu flaszkę omawianą,

napelnioną powietrzem naturalnem, jakież to rozdział, parcie i wogóle, jaką zmianę zrobiło w powietrzu zewnętrznem to powietrze, które zostało gwałtownie wtłoczone do flaszki. Czyż powiększyła się flaszka, żeby powietrze otaczające musiało odstępować dla zrobienia miejsca? Oczywiście nie: możemy więc powiedzieć, że powietrze ściśnięte nie jest zanurzone w otaczającym, bo ono żadnej w niem przestrzeni nie zajmuje, a jest jakby umieszczone w próżni; i rzeczywiście znajduje się ono w próżni, zmieszane z niezupełnie tę próżnię wypełniającem powietrzem naturalnem.

W istocie niema żadnej różnicy między dwoma przypadkami otaczającego ośrodka, gdyż w jednym nie wywiera ten ośrodek żadnego ciśnienia na to, co jest otoczone, a w drugim znów, to co jest otoczone nie działa zupełnie na ośrodek otaczający; i umieszczenie ciała w próżni jest tem samem co ściśnięcie powietrza we flasce. Znalezione więc ciężar ściśniętego powietrza jest ten sam, jakiby miało to powietrze po rozejściu się w próżni. Zapewne, że w próżni ważyłby piasek nieco więcej, ale dodać trzeba że powietrze ściśnięte nieco więcej ważyło niż piasek, lecz tylko tyle więcej, ile ważyłaby w próżni wypchnięta przez piasek mała ilość powietrza.

Simplicio: Zdawało mi się, że te doświadczenia zostawiały coś do życzenia; ale obecnie jestem zupełnie zaspokojony.

Salvati: Kwestje, jakie roztrząsałem, a wlaszcza ta, że różnica ciężkości, choćby największa, nie ma żadnego udziału w różnicy prędkości spadku, tak że raczej wszystkie ciała poruszają się spadając z jednakową prędkością, kwestja ta jest zupełnie nową, na pierwszy rzut oka nieprawdopodobną, tak że, gdyby nie można jej było dostatecznie rozświetlić i przedstawić jaśniejszą od słońca, byłoby lepiej o niej zamilczeć niż mówić; skoro jednak już mi z ust wyszła, to nie mogę pominąć doświadczenia czy dowodu, który może się przyczynić do jej rozwiązania.

Sagredo: Nie tylko to, ale także wiele innych Waszych podań są tak dalekie od poglądów i nauk ogólnie przyjętych, że rozpowszechnione publicznie wzbudzą znaczną liczbę oponentów, gdyż wrodzoną właściwością człowieka jest: choć się ma dobre oczy, nie widzieć tego, co odkrywa inny, przez swą wprawę w odróżnianiu prawdy od fałszu; niemiłą dla wielu uszu nazwą nowatorów w nauce starają się rozcinać węzły, których sami nie mogą rozwiązać, burząc podziemnymi minami budowlę, przez cierpliwych mistrzów wzniesioną: dalecy od tych niedorzeczności, przyjmujemy Wasze

doświadczenia i wywody bez niepokoju; ale jeżeli macie jeszcze więcej dotykalne doświadczenia i skuteczniejsze wywody, wysłuchamy ich bardzo chętnie.

Salviali: Doświadczenie z dwoma ciałami, jak najwięcej różnego ciężaru, które spadają z wysokości, dla obserwowania, czy ich prędkości są równe, przedstawia pewną trudność, bo przy większej wysokości, ośrodek, który pod impetem spadającego ciała wciąż się rozwiera i odrzucany jest na boki, ma większy wpływ na mały moment bardzo lekkiego ciała, niż na gwałtowność bardzo ciężkiego, gdyż przy długiej przestrzeni lekkie ciało zostawać będzie w tyle a przy malej wysokości wątpić można, czy jest jaka różnica, gdyż zaledwie można ją dostrzec. Dlatego rozważałem, czy nie możnaby powtarzać spadku wielokrotnie na niewielkich wysokościach i gromadzić razem tylu ile można małych różnic czasu przybycia do kresu ciała ciężkiego i ciała lekkiego, które razem dałyby czas nietylko możliwy ale nawet bardzo się nadający do zaobserwowania. Z drugiej strony, dla możliwości badania jak najpowszechniejszych ruchów, przy których dla braku pracy oporu ośrodka, zmieniającej działanie zależne od samej ciężkości, umyśliłem spuszczać ciała wzdłuż słabo nachylonej płaszczyzny, bo i przy takim spadku, tak samo jak i przy swobodnym, można dostrzec jak się poruszają ciała różnego ciężaru; idąc dalej, chciałem się jeszcze oswobodzić od przeszkód, powstających przy zetknięciu ciała z płaszczyzną nachyloną; w końcu wziąłem dwie kulki, jedną z ołowiu a drugą z korka, jedną sto razy cięższą od drugiej i zawiesiłem obie na dwóch cienkich sznurkach jednakowej długości, od czterech do pięciu łokci; odchylając obie kulki od ich zawieszenia pionowego, puszczałem je swobodnie i one spadały po okręgach kół jednakowego promienia, przekraczały położenia pionowe sznurków i tą samą drogą wracały, a po stu wahaniach w jedną i drugą stronę, okazało się wyraźnie, że ciało ciężkie poruszało się tak równocześnie z lekkim, że ani w stu ani tysiącu wahań, nie dała się zauważyć jak najmniejsza różnica; chodziły zupełnie równym krokiem, zauważyć się też dawał wpływ ośrodka, stawiający pewien opór ruchowi i znacznie wydatniej zmniejszający wahania kulki korkowej niż ołowianej, ale nie czyniący częstszemi jednych od drugich, nawet gdy łuki przebiegane przez korek wynosiły tylko pięć do sześciu stopni a łuki ołowiu pięćdziesiąt do sześćdziesięciu stopni, dokonywane jednak zawsze w tym samym czasie.

Simplicio: Jeżeli tak jest, to dlaczegożby prędkość ołowiu

nie była większą niż korka, skoro jeden przebiegał 60° gdy drugi w tymże czasie zaledwie 6° .

Salviati: Ale cóżbyście powiedzieli, panie Simplicio, gdyby oba w równych czasach przebiegały swe drogi, nawet jeżeliby korek przy 30° odchylenia miał do przebieżenia 60° a ołów przy 2° tylko 4° ? Czyż nie szybszym byłby korek? a doświadczenie stwierdza, że tak się dzieje; więc zauważcie: odchylając wahadło ołowiane np. na 50° od pionu i poruszając je swobodnie, to opisze ono z drugiej strony pionu prawie 50° , razem 100° , z powrotem zaś luk trochę mniejszy aż po wielu wahanich dojdzie do spoczynku. Każde z tych wahań odbywa się w czasie, który pozostaje stale równy, czy to przy 90° czy przy 50° , 20° , 10° lub 4° , tak że prędkość wciąż się zmniejsza, bo w równych czasach opisane zostają coraz mniejsze luki. Podobne a nawet zupełnie takież samo zjawisko przedstawia korek, zawieszony na sznurku tej samej długości, tylko że on po mniejszej liczbie wahań dochodzi do spoczynku, jako mniej zdolny, z powodu swej lekkości, do pokonywania oporu powietrza: tak więc wszystkie wahania odbywają się w równych czasach i tych samych co i wahania ołowiu. Prawdą więc jest, że, podczas gdy ołów przebiega luk 50° , to korek tylko 10° i korek porusza się wolniej od ołowiu, lecz zdarza się znów przeciwnie, że korek przebiega 50° a ołów 10° lub 6° i tym sposobem w różnych czasach raz szybszym jest ołów, drugi raz korek; ale jeżeli te ciała w równych czasach opisują równe luki, wtedy można powiedzieć na pewno, że ich prędkości są równe.

Simplicio: Wydaje mi się i nie wydaje, aby ta rozprawa była konkludująca i czuję w umyśle takie zamieszanie, że zdaje mi się, jakby jedno i drugie ciało poruszało się raz prędzej drugi raz wolniej i nie mogę sobie jasno wytłumaczyć, żeby ich prędkości były zawsze równe.

Sagredo: Pozwól mi, pan, panie Salviati, odpowiedzieć dwa słowa. Powiedzcie mi, panie Simplicio, czy przyjmujecie za pewne, że prędkości korka i ołowiu są równe, każdorazowo, gdy te ciała wychodzą oba w tej samej chwili ze stanu spoczynku i, poruszając się po tej samej pochyłości, przebiegają równe przestrzenie w równych czasach?

Simplicio: O tem nie można wątpić ani temu przeczyć.

Sagredo: Niech więc będą wahadła, z których każde opisuje 60° , lub 50° , lub 30° , lub 10° , lub 8° , 4° , 2° i jeżeli oba biegną 60° , to przebiegają je w tym samym czasie: luk 50° także jedno i dru-

gie w tym samym czasie jak również łuki 30° , 10° i inne: stąd więc się wnioskuje, że prędkość ołowiu na łuku 60° jest równa prędkości korka na tym samym łuku 60° , i że prędkości na łuku 50° są także sobie równe itd. Ale nie utrzymuje się, że prędkość przy 60° jest równa prędkości przy 50° , ani ta ostatnia prędkości przy 30° , lecz że przy łukach mniejszych prędkości są zawsze mniejsze; to też widzimy toż samo ciało zużywające tyleż czasu na przebieżenie 60° jak i łuków 50° lub 10° i wogóle łuków każdej wielkości. Choć więc korek i ołów biegną z wciąż mniejszemi prędkościami, im mniejsze przebiegają łuki, nie zmienia to jednak ich zgodności w utrzymywaniu jednakich prędkości przy przebieganiu jednakowych łuków. Powiedzieć to chciałem więcej dla zobaczenia, czy dobrze zrozumiałem wykład p. Salviatiego, niż dlatego, abym przypuszczał, że p. Simplicio da lepsze objaśnienie od tych, jakie dał p. Salviati, który zawsze mówi tak zupełnie jasno i nie tylko podnosi pozorne trudności ale rozwiązuje istotne zagadki natury, z rozważaniami, obserwacjami i badaniami, które każdemu są dostępne; dało to sposobność (jak o tem od wielu słyszałem) jednemu z profesorów więcej cenionych, lekceważyć jego nowości, utrzymując, że są marne i na zbyt niskich i popularnych oparte podstawach, tak jakby najwięcej uwielbianemi i najcenniejszemi właściwościami nauk doświadczalnych nie było właśnie wynajdywanie i wyciąganie ich z zasad najwięcej znanych, zrozumianych i przyjętych przez wszystkich. Ale przestańmy karmić się tą lekką strawą i w przypuszczeniu, że p. Simplicio uspokoił się co do tego, że ciężkość ciał nie wywołuje różnicy prędkości, tak że przy różnej ciężkości wszystkie jednakowo się poruszają, proszę, aby p. Salviati zechciał nam powiedzieć, na czem polegają zauważone i widoczne nierówności ruchu; a także odpowiedzieć na replikę pana Simplicia, z którą się zgadzam i według której nie tylko kula armatnia porusza się prędzej od ziarenka śrutu, choć z małą różnicą prędkości, czemu przeciwstawiam ciała jednakiej materji, z których większe spadają w ciągu mniej niż jednego uderzenia pulsu, w połowie tego czasu, podczas gdy inne mniejsze nie spadną i w ciągu godziny, albo czterech albo i dwudziestu; jak się to dzieje z kamieniami i nadzwyczajnie małkim piaskiem, zawieszonym w mętnej wodzie, który w tym ośrodku opada na dwa łokcie w ciągu wielu godzin, podczas gdy niewielkie kamienie spadają w ciągu jednego uderzenia pulsu.

Salviati: Że ośrodek więcej opóźnia ciała gatunkowo lżejsze, to było już powiedziane i objaśnione zmniejszeniem ciężaru. Ale

dlaczego ten sam ośrodek rozmaicie zmniejsza prędkość ciał, różniących się tylko wielkością, przy jednakim materiale i kształcie, to się da objaśnić tylko badaniem subtelniejszym od tego, w którym wystarczało do objaśnienia, że ciało jest większe, albo że ruch ośrodka przeciwny ruchowi ciała zmniejsza jego prędkość. Przyczynę obecnie roztrząsanego zjawiska upatruję w spotykanych na powierzchniach ciał stałych chropowatościach i porowatościach, które to nierówności uderzają o powietrze lub inny ośrodek otaczający, skutkiem czego dochodzi do nas brzęczenia ciał, nawet gdy są o ile można zaokrąglone; podczas gdy bardzo prędko biegną w powietrzu, to nie tylko brzęczą ale piszczą i świszczą, jeżeli mają znaczniejsze wgłębienia i wypukłości. Przy kręceniu na tokarni każde ciało okrągłe wytwarza trochę wiatru. Ale co więcej? czyż nie słyszymy znacznego brzęczenia, nawet w tonie dość ostrym, jakie sprawia bąk kręcący się na ziemi z wielką szybkością? Ton piszczalki jest tem niższy, im wolniej była wiercona: dowodzi to że chropowatości uderzają o powietrze, jakkolwiek mała jest ich powierzchnia. To też nie można wątpić, że przy spadku ciał, ocierających się o płyn, który je otacza, powstaje zwalnianie prędkości tem większe, im powierzchnia będzie większą od powierzchni ciał mniejszych, porównywanych z większemi.

Simplicio: Zatrzymajcie się proszę, bo zaczyna mi się mieszać: gdyż, jeżeli godzę się na to, że tarcie ośrodka o powierzchnię opóźnia ruch, i to tem (*ceteris paribus*) więcej im większa jest powierzchnia, to znów nie rozumiem, dlaczego powierzchnie mniejszych ciał nazywacie większemi; i dalej, jeżeli, jak mówicie, większa powierzchnia doznaje większego oporu, to właśnie większe ciała więcej się winny opóźniać, a przecież tak się nie dzieje: ale tę trudność łatwo usunąć, gdy się powie, że większe ciała mają wprowadzić większe powierzchnie ale także i większy ciężar, tak że przeszkody przy większej powierzchni nie mają jednak tego wpływu, co przeszkody przy małej powierzchni i małym ciężarze, więc prędkość większego ciała nie może być mniejszą. Nie widzę przeto przyczyny, dla którejby ustawała równość prędkości, bo gdy się zmniejsza ciężar, zmniejsza się także działanie opóźniające powierzchnię.

Salvati: Odpowiem razem na wasze zarzuty. Zgadza się na to, panie Simplicio, że mając dwa równe ciała, jednakiej materji i kształtu (które niewątpliwie równie prędko będą się poruszały), jeżeli się zmniejszy jednakowo tak ciężar jednego jak i jego po-

wierzchnię (przyczem kształt pozostaje nie zmieniony), to nie zmniejszy się przez to jego prędkości.

Simplicio: Zdaje mi się, że tak być powinno, gdyż przyjmujemy, że większy i mniejszy ciężar nie posiadają różnych prędkości.

Salviati: Tego też nie utrzymuję i jednocześnie trzymam się waszego wniosku, że, jeżeli ciężar zmniejsza się w większej proporcji niż powierzchnia, to może powodować wciąż rosnące opóźnienie ruchu, im większe będzie zmniejszanie ciężaru w stosunku do zmniejszania powierzchni.

Simplicio: Przeciwno temu nie mam żadnego sprzeciwu.

Salviati: Wie pan, panie Simplicio, że nie można zmniejszać powierzchni ciała w jednakowym stosunku z ciężarem, przy utrzymywaniu wciąż podobnego kształtu. Bo ciężar zmniejsza się razem z objętością, a jeżeli objętość zmniejszy się więcej niż powierzchnia, to i ciężar więcej od powierzchni zostanie zmniejszony. Ale geometria uczy, że o wiele większy jest stosunek objętości dwóch ciał podobnych od stosunku powierzchni. Dla bliższego objaśnienia weźmy przykład. Wyobraźmy sobie sześcian o dwucalowej krawędzi, to każda jego ściana będzie miała cztery cale kw. a sześć ścian dwadzieścia cztery cale kw. Trzema przecięciami podzielimy ten sześcian na osiem małych sześcianów o krawędzi jednocalowej i ścianie jednego cala kw., to powierzchnia małego sześcianu wynosić będzie sześć cali kw., podczas gdy powierzchnia większego była 24 cali kw. Powierzchnia więc zmniejszyła się w stosunku $\frac{1}{4}$ a objętość w stosunku $\frac{1}{8}$; objętość więc a z nią i ciężar zmniejszają się znacznie więcej niż powierzchnia. A jeżeli podzielić jeszcze mały sześcian na osiem mniejszych, to każdy z nich będzie miał półtora cala kw. powierzchni a więc $\frac{1}{16}$ powierzchni wielkiego sześciana a objętość $\frac{1}{64}$. Widzicie więc, jak przy dwóch tylko podziałach objętość zmniejsza się cztery razy więcej niż powierzchnia; jeżeli zaś dalej dzielić będziemy, aż dojdziemy do drobnego proszku, to objętość zmniejszy się sto i więcej razy więcej od powierzchni. A to, co widzieliście z sześcianem, dzieje się także z innymi podobnymi bryłami, których objętości stoją w półtoracznej proporcji (*in sesquialtera proportionem*) do powierzchni. Widzicie więc, w jak znacznie większej proporcji wzrosła przeszkoda, przy zetknięciu poruszającego się ciała małego z ośrodkiem, niż ciała większego; oprócz tego jest zapewne chropowatość: w małych powierzchniach proszku nie mniejsza aniżeli w większych ciałach, które bywają starannie wygładzone; zauważcie przytem jak bardzo jest

potrzebne, aby ośrodek był płynny i zupełnie nie stawiał oporu, żeby tak wątłą siłą mógł być otwierany i ustępował dla umożliwienia przejścia. Widzicie więc, panie Simplicio, że się nie myliłem, mówiąc, że powierzchnia małych ciał jest wielka w porównaniu z powierzchnią ciał wielkich.

Simplicio: Jestem całkowicie przekonany i zdaje mi się, że, gdybym miał na nowo rozpoczynać moje studia, poszedłbym za radą Platona i zaczynałbym od matematyki, gdyż ta postępuje bardzo skrupulatnie, przyjmując za rzecz pewną to tylko, co jest ściśle dowiedzione.

Sagredo: Miałem wielką przyjemność w tej rozmowie, ale zanim pójdziemy dalej, pragnąłbym zrozumieć jedno orzeczenie, które mi się wydało nowem, gdy przed chwilą powiedzieliście, że objętości ciał podobnych mają się do siebie w stosunku półtoracznym powierzchni; jakkolwiek bowiem dobrze zrozumiałem twierdzenie i dowodzenie, że powierzchnie ciał podobnych stoją do siebie w podwójnym stosunku boków i drugie, że objętości tychże ciał stoją do siebie w potrójnym stosunku tychże boków, ale o stosunku objętości do powierzchni nie przypominam sobie, aby było co mówione.

Salviati: Waszność sama sobie odpowiada, a oświadcza że, wątpi. Gdy jedno jest potrójne a drugie podwójne, to czyż pierwsze nie jest półtoraczne drugiego? oczywiście że tak. Więc ponieważ powierzchnie stoją w podwójnym stosunku do linii, a objętości w potrójnym, to czyż nie możemy powiedzieć, że objętości stoją w półtoraczny stosunku do powierzchni?

Sagredo: Rozumiem to doskonale. Ale, choćbym jeszcze nie jedno miał do zauważenia, oddaliłoby to nas jeszcze więcej od wytkniętego celu, t.j. od objaśnienia wytrzymałości na złamanie; to też, jeżeli pozwolicie, może teraz do tego przyjdziemy, co było postawione na początku.

Salviati: Masz pan słuszność, ale różne dotąd podniesione kwestje, zabrały nam tyle czasu, że dziś już mało co tylko mówić będziemy mogli o tej głównej kwestji, pełnej dowodzeń geometrycznych, które muszą być z uwagą rozpatrywane; może więc byłoby lepiej odłożyć rozmowę do jutra, tak z tego powodu, jak i dlatego, że mógłbym przynieść ze sobą niektóre pisma, w których zestawilem w porządku wszystkie do tego się odnoszące twierdzenia i zadania, gdyż przy całej pamięci nie mógłbym sobie ich przypomnieć z potrzebną metodą.

Sagredo: Doskonale się pogodzę z tą radą i to tem chętniej, że na zakończenie dzisiejszego posiedzenia będę miał czas prosić o rozjaśnienie niektórych wątpliwości dotyczących ostatnio traktowanego przedmiotu. Jedną z nich jest, czy opór ośrodka może wystarczać do zniweczenia przyspieszenia ciał z najcięższej materji, wielkiej objętości i kulistego kształtu; wybieram ten kształt dlatego, że kula ma najmniejszą powierzchnię, a zatem mniej jest narażona na opóźnienie. Drugą kwestją jest ruch wahadła i to z dwóch względów: po pierwsze, czy rzeczywiście wszystkie wahadła, wielkie, średnie i małe, wahają się w ściśle równych czasach i powtórę w jakiej proporcji są do siebie czasy wahań wahadeł nierównej długości.

Salvati: Pytania są piękne, gdy jednak przy każdej prawdzie napotyka się zawsze nowe interesujące wnioski, wątpię bardzo, aby reszta dzisiejszego dnia wystarczyła nam dla roztrząśnienia wszystkich.

Sagredo: Jeżeli one tak piękne, jak dotąd poruszane, to wolę im poświęcić tyle dni, ile nam dziś godzin zostaje do nocy i sądzę, że pan Simplicio, nie będzie znudzony tą rozmową.

Simplicio: Oczywiście nie, a zwłaszcza, jeżeli rozbierane będą kwestje odnoszące się do rzeczy przyrodzonych, których nie dotykali inni filozofowie.

Salvati: Przejdziemy więc do pierwszego twierdzenia, orzekającego, bez żadnej wątpliwości, że niema kuli tak wielkiej i ciężkiej, którejby przyspieszenia nie zmniejszał opór ośrodka choćby jak najrzadszego i przy dalszym ruchu nie sprowadzał takowego do jednostajności, czego jasny dowód daje nam samo doświadczenie. Bo gdyby ciało spadające dochodzić mogło w dalszym swym ruchu do jakiegokolwiek stopnia prędkości, to żadna prędkość udzielona mu przez motor zewnętrzny nie mogłaby być tak wielka, aby się ono jej nie pozbyło i nie straciło wskutek oporu ośrodka. Np. kula armatnia, spadająca z wysokości 4 łokci, nabywa 10 stopni prędkości i jeżeli z tą prędkością spada do wody, to gdyby opór wody nie mógł pokonywać tego impetu, prędkość będzie się zwiększać a przynajmniej trwać aż do dna; co nie następuje, a przeciwnie woda, choćby tylko parę łokci głęboka, zwalnia bieg i osłabia do tego stopnia, że koryto rzeki lub jeziora otrzyma bardzo słabe tylko uderzenie. Jasne w tem jest, że prędkość, którą woda na bardzo krótkiej drodze potrafiła zniszczyć, nie mogłaby być nabyta nawet na głębokości 1000-ca łokci. I dlaczego tolerowalibyśmy

jej nabycie na 1000-cu łokci, podczas gdy na 4-ch została zniszczona? Ale więcej jeszcze, czyż nie widzimy jak niezmierny impet kuli armatniej bywa całkowicie zniesiony w paru łokciach wody, że bez istotnego uszkodzenia okrętu załedwie takowy dziurawi? Albo powietrze, pomimo swej ustepliwości, może hamować prędkość spadającego dość ciężkiego ciała, co moglibyśmy udowodnić podobnemi doświadczeniami; bo jeżeli z wierzchołka bardzo wysokiej wieży, strzelimy ku ziemi, to kula mniej głęboko w nią wejdzie, niż gdyby strzał nastąpił z wysokości czterech lub sześciu łokci; dowód oczywisty, że impet z którym leciała kula z lufy na wierzchu wieży, zmniejszał się w powietrzu; spadek więc z jaknajwiększej wysokości nie wystarcza do nabycia impetu, który odejmuje powietrze, gdy ten impet w jakikolwiek sposób został udzielony. Podobnie uszkodzenie, jakie robi w murze uderzenie kuli, wystrzelonej z muszkietu w odległości dwudziestu łokci, nie sędzę, aby mogło być zrobione strzałem pionowym z jakiegokolwiek wysokości. Dlatego sędzę, że każde przyspieszenie ciała naturalnego ma swój koniec i że ostatecznie, skutkiem oporu ośrodka, ruch sprowadzony zostaje do jednostajności, w której następnie wciąż pozostaje.

S a g r e d o: Doświadczenia wydają mi się zupełnie zadowalające, zarzuciłby można tylko, czy dałyby się sprawdzić z ciałami bardzo wielkimi i ciężkimi i czy kula armatnia przychodząca z księżycy lub z najwyższej warstwy powietrza nie sprawiłaby silniejszego uderzenia niż wychodząca z armaty.

S a l v i a t i: Niewątpliwie można wszystkiemu oponować i nie wszystko da się dowieść doświadczeniem, w tym zarzucie wszakże, zdaje mi się, że jedna rzecz winnaby być wzięta pod uwagę: a mianowicie, bardzo jest prawdopodobnem, że ciało z wysokości spadające nabywa takiego impetu dochodząc do ziemi, jakoby wystarczał, aby się podniosło do tej samej wysokości, co widzimy wyraźnie na wahadle, które na 50° do 60° odchyłone od pionu nabywa taką prędkość i własność, która akuratnie wystarcza, aby się równie wysoko podniosło, pomijając niewielką stratę spowodowaną oporem powietrza. Aby więc kulę armatnią podnieść na wysokość, któraby wystarczała do nabycia tak wielkiej prędkości, jak przy wyjściu z działa, winnoby wystarczać, aby ją wystrzelić pionowo z tegoż działa i zaobserwować, czy spadając sprawi toż samo uderzenie, jak przy strzale z bezpośredniego sąsiedztwa; sędzę, iż prawdopodobnie różnica nie byłaby wielką. Sędzę przeto, że prędkość, jaką ma kula armatnia tuż przy wyjściu z działa, będzie

taką, jakiej nigdy nie pozwoliłby nabyć opór powietrza, choćby kula spadała swobodnie wychodząc ze spoczynku, z jak największej wysokości. Przechodzę teraz do drugiej kwestji, dotyczącej wahadła, przedmiotu, który wielu wydaje się dość oschłym, a zwłaszcza tym filozofom, którzy są stale zajęci badaniem najgłębszych zadań przyrody; ale ja nie będę gardził tem zadaniem, zachęcony przykładem samego Arystotelesa, którego zawsze podziwiam, że się wszystkiem zajmuje, co tylko godnem jest uwagi; mógłbym wam także zakomunikować niektóre myśli dotyczące muzyki, przedmiotu najszlachetniejszego, o którym wielu pisało znakomitych ludzi, a nawet i sam Arystoteles rozważał odnośnie a liczne ciekawe zadania; tak że jeżeli Wam wyłożę, na podstawie łatwych a dowcipnych doświadczeń, niektóre zadziwiające zjawiska w dziedzinie dźwięków, mam nadzieję, że rozważanie moje przyjmiecie.

Sagredo: Będziemy za nie bardzo wdzięczni i co do mnie, spełni się moje gorące życzenie, gdyż, zajmując się wszystkimi instrumentami muzycznymi i rozmyślając wiele nad spółdźwięcznością, nie mogłem nigdy pojąć, skąd to pochodzi, że jedno mnie zadowala, a drugie nietylko, że nie zadowala, ale nawet w najwyższym stopniu się nie podoba. Znane zadanie dwóch strun, naciągniętych do równodźwięczności, z których, gdy jedna dźwięk wydaje, to druga się porusza i tak samo dźwięczy, nie jest dla mnie jasne, a także nie rozumiem dobrze formy spółdźwięku i innych szczegółów.

Salvati: Zobaczymy, czy nasze wahadła nie mogą nam dostarczyć rozwiązania tych wszystkich wątpliwości. A co do pierwszej, mianowicie, czy ściśle jest prawdziwem, że wahadło wszystkie swoje wahania wielkie, średnie i małe, uskutecznia w równych czasach, powołuję się tu na wywody naszego Akademika, który wykazał, że ciało spadające wzdłuż cięciwy jakiegokolwiek łuku, zawsze spada w ciągu tegoż samego czasu, czy ten łuk ma całe 180° czy też 100° , 60° , 2° , $\frac{1}{2}^{\circ}$ albo 4° ; przyczem wszystkie dochodzą do najniższego punktu łuku. Następnie, ciała spadające wzdłuż łuków tych cięciw podnoszących się nad poziom nie więcej jak na 90° , spadają jak wykazuje doświadczenie, wszystkie w równych czasach ale nieco krótszych niż przy spadku po cięciwach; zjawisko tem więcej zadziwiające, że można było oczekiwać skutku przeciwnego. Jeżeli bowiem jednakie są początki i końce ruchów, a linja prosta jest najkrótszą drogą między temi punktami, wydawałoby się racjonalnem, że ruch po tej linji winien trwać najkrócej, a jednak tak

nie jest; najkrótszy czas i najprędszy ruch odbywa się wzdłuż łuku, którego ta prosta jest cięciwą. Przy wahadłach różnej długości, czasy mają się do siebie, jak pierwiastki kwadratowe z długości, albo inaczej, długości mają się do siebie, jak kwadraty z czasów wahań; gdy jedno wahadło ma się poruszać dwa razy wolniej niż drugie, to musi być cztery razy dłuższe: jeżeli chcecie n. p., aby czas jednego wahanja wahadła był dwa razy większy od czasu wahanja drugiego wahadła, to trzeba, aby jego długość była cztery razy większa, od długości drugiego wahadła. A gdy, podczas jednego wahanja jednego wahadła, drugie robi trzy wahanja, to długość pierwszego musi być dziewięć razy większa od długości drugiego. Wynika stąd, że długości wahadeł mają się do siebie w stosunku kwadratów z liczby wahań dokonanych w ciągu tego samego czasu.

S a g r e d o: Więc, jeżeli dobrze zrozumiałem, to mogę szybko obliczyć długość wahadła niezmiernie wielkiego, nawet gdyby jego punkt zawieszenia był nie widzialny, jeżeli tylko obserwować mogę jego koniec dolny. Dość będzie, gdy zawieszę u spodu dość znaczny ciężar i wprawię go w ruch, to w jedną, to w drugą stronę, a przyjaciel zacznie liczyć wahanja, ja zaś równocześnie liczyć będę wahanja drugiego wahadła, którego długość jest ściśle równa jednemu łokciowi, z liczb wahań tych wahadeł, dokonywanych w tym samym czasie, znajdę długość pierwszego wahadła; jeżeli n. p. założymy, że mój przyjaciel policzył dwadzieścia wahań długiego wahadła, a ja policzyłem dwieście czterdzieści mojego łokciowego; to, podnosząc do kwadratu liczby 20 i 240, otrzymamy 400 i 57600; powiem wtedy, że długi sznur zawiera 57600 miar takich, jakich jest 400 w łokciu; a więc, dzieląc 57600 przez 400, otrzymamy długość wielkiego wahadła 144 łokci.

S a l v i a t i: Nie pomylicie się ani na piędź, zwłaszcza jeżeli brać będziecie wielkie liczby wahań.

S a g r e d o: Waszmość daje mi często sposobność podziwiania bogactwa a zarazem największej hojności natury, gdy z prostych, prawie trywjalnych rzeczy wyciąga wiadomości wysoce ciekawe, nowe i dalekie od wszelkiej imaginacji. Pewno tysiące razy obserwowałem wahanja żyrandoli, wiszących w kościołach na bardzo długich sznurach, niezauważone przez nikogo, lecz nie wyciągnąłem nic więcej z tych obserwacji, jak tylko nieprawdopodobieństwo poglądu tych, którzy mniemali, że podobne ruchy utrzymywane są przez ośrodek otaczający, a więc przez powietrze; bo zdawało mi się, że powietrze miałoby wielkie zadanie do spełnienia a jedno-

cześnie małą robotę, tracąc godziny i godziny na popychanie, to w jedną to w drugą stronę zawieszonego ciężaru z taką regularnością, ale, żebym się miał dowiedzieć, że jedno i toż samo ciało, zawieszone na stułokciowym sznurze i odchylone czy to na 90^0 czy na 1^0 lub $\frac{1}{2}^0$, tyleż czasu potrzebuje na przebieżenie małego łuku jak i wielkiego, temu nie mogę uwierzyć i wciąż wydaje mi się to niemożliwe. A teraz ciekaw jestem usłyszeć owe zjawiska dźwiękowe, które nie przestają mnie niepokoić.

Salviati: Przedewszystkiem trzeba zaznaczyć, że każde wahadło ma tak stały i określony czas wahań, że nie można go w żaden sposób poruszać w innym perjodzie jak w tym jedynym jego naturalnym. Jeżeli wezmę w rękę sznurek, na którym zawieszony jest ciężar i będę się starał jakimkolwiek sposobem zwiększać lub zmniejszać liczbę jego wahań, będzie to próżna fatyga; przeciwnie znów, wahadło w spoczynku, choćby najcięższemu, możemy przez jedno nań dmuchnięcie nadać ruch i to tem większy jeżeli powtarzać będziemy dmuchnięcia w chwilach odpowiadających wahaniom; jeżeli pierwszym dmuchnięciem odchyliny wahadło od pionu na $\frac{1}{2}$ cala, to dodając drugie dmuchnięcie wtedy, gdy wahadło ku nam wróciło po ukończeniu pierwszego wahanía, nadamy mu nowy ruch, a, gdy tak wciąż dmuchać będziemy w chwilach właściwych, a nie wtedy gdy wahadło ku nam idzie (bo to hamowałoby ruch a nie pobudzało), to temi wieloma popędami nadać mu możemy taki impet, że zużyłaby być musiała siła znacznie większa, od jednorazowego dmuchnięcia, aby wahadło zatrzymać.

Sagredo: Dzieckiem jeszcze będąc, widziałem jak jeden człowiek, przez popychanie we właściwych czasach wielkiego dzwonu, wywoływał dzwonienie, a, żeby je zatrzymać, wieszało się na linie czterech do sześciu ludzi i nieraz lina podnosiła wszystkich w górę, gdyż nie mogli wstrzymać impetu, jaki nadał jeden człowiek, regularnemi popchnięciami.

Salviati: Przykład ten również pożytecznie służyć mi może do objaśnienia zadziwiającej zagadki struny cytry lub cymbału, która porusza i rzeczywiście robi dźwięczną inną strunę zgodną z nią co do tonu albo różniącą się na oktawę lub kwintę. Dotknięta struna rozpoczyna i prowadzi dalej swe drgania przez cały czas dopóki trwa jej oddźwięk: te drgania wprawiają powietrze w ruch, drzenie jego rozszerza się dalej i uderza o wszystkie struny tegoż samego instrumentu a także innych sąsiednich: struna nastrojona do unisona z dotkniętą, usposobiona do dokonywania

swych drgań w tem samem tempie, nabywa w końcu drgania takiegoż jak pierwsza i widzicie wyraźnie rozszerzenie się jej drgań według perjodu struny poruszającej. Falowanie to, rozszerzając się w powietrzu, wprawia w ruch i drganie nie tylko struny ale jakiegokolwiek inne ciało skłonne do drgania, które drgać będzie przez cały czas drgania struny: tak że jeżeli na brzegu instrumentu położymy kawałki szczeci lub innej lekkiej materji, to ujrzymy drganie, podczas dźwięczenia cymbału, to jednego to drugiego ciała, stosownie do tego, która struna drga jednocześnie ze struną poruszoną, inne zostają w spokoju przy odgłosie tej struny a poruszają się przy odgłosie innej. Gdy mocno pociągniemy smyczkiem po grubej strunie wiolonczeli, zbliżając do niej kieliszek z cienkiego i gładkiego szkła, to jeżeli ton struny jest unisono z tonem kieliszka, ten będzie drgał i głośno dźwięczał. Jak przez otaczający ośrodek rozszerzają się drgania dźwięczącego ciała, zobaczyć można, gdy się rozdzwieczy kieliszek, napełniony wodą, przez pocieranie palcem po brzegu; widzi się wtedy falowanie wody jak najregularniejsze a lepiej jeszcze zobaczy się to zjawisko, gdy nóżka kieliszka stoi na dnie dużego naczynia, napełnionego wodą po brzeg kieliszka, który także wprawia się w dźwięczenie pocierając palcem po brzegu; widzi się wtedy jak najregularniejsze zmarszczki rozchodzące się z wielką szybkością, daleko wokoło kieliszka, a nawet zdarzyło mi się widzieć, przy dość dużym kielichu, że ton skakał o oktawę wyżej i w tej samej chwili każda z fal rozdzielała się na dwie: zjawisko wyraźnie pokazujące, że forma oktawy jest zdwojeniem. (*la forme del ottava esser la dupla*).

Sagredo: I mnie się toż samo nieraz zdarzyło, sprawiając przyjemność a także pożytek; bo, pozostając długo niepewnym co do tej formy współdźwięczności, nie sądziłem, aby jej stosunek, podawany zwykle przez autorów piszących učenje o muzyce, był zadowalający. Mówili oni, że diapazon czyli oktawa stoi w podwójnym, diapenta, albo jak ją nazywają kwinta, w półtoracznym stosunku, bo struna monochordu, dźwięcząca cała a potem dźwięcząca w połowie, przy postawionym koziółku w pośrodku, daje oktawę, a jeżeli koziółek postawiony zostanie na trzeciej części długości struny daje kwintę, a więc oktawę przedstawia stosunek $\frac{1}{2}$ a kwintę $\frac{2}{3}$. Uzasadnienie to, nie wydało mi się konkludującym dla ustalenia, że podwójność i półtoraczność są formami naturalnemi diapazonu i diapenty. A motywy moje były następujące: w trojaki sposób podnosić możemy ton struny, przez skrócenie, większe nacią-

gnięcie czyli napięcie i zmniejszenie grubości. Przy równem napięciu i grubości otrzymujemy oktawę przez skrócenie do połowy, t.j. uderzając raz całą strunę a drugi raz jej połowę. Przy równej długości i grubości, otrzymujemy oktawę, naciągając więcej strunę, ale nie wystarczy tu zdwojenie siły lecz, trzeba wziąć siłę cztery razy większą; jeżeli struna była naciągnięta jednym funtem, to potrzeba użyć czterech funtów dla otrzymania oktawy. Wreszcie, przy równej długości i jednakowem napięciu, widzimy, że, aby struna przez zmniejszenie grubości dawała oktawę, to trzeba, aby była cztery razy cieńszą, od dającej ton niższy. A to, co mówię o oktawie, t.j., że się jej formę bierze z napięcia, z grubości lub z podwójnego stosunku długości, odnosi się także do innych interwałów muzycznych; jeżeli bowiem ze stosunku długości wypada półtoraczność, t.j. raz całą strunę, drugi raz dwie trzecie, to chcąc ją otrzymać przez zmianę napięcia albo grubości, wziąć trzeba kwadrat ze stosunku półtoraczego t.j. $\frac{9}{4}$ (ła dupla sesquiquarta); jeżeli np. struna dająca ton niższy naciągnięta była czterema funtami, to dla tonu wyższego trzeba nie sześciu ale dziewięciu funtów a co do grubości, trzeba strunę niższą uczynić grubszą od wyższej w stosunku 9 do 4 aby otrzymać kwintę. Wobec tych ścisłych doświadczeń, wydało mi się zupełnie nieuzasadnionem przyjmowanie razem z dowcipnymi filozofami, dla formy oktawy stosunku $\frac{1}{2}$ zamiast $\frac{1}{4}$, a dla kwinty $\frac{2}{3}$ zamiast $\frac{4}{9}$. Ale ponieważ jest niemożliwem liczenie drgań struny, zbyt licznych podczas dźwięczenia, byłbym w ciągłej wątpliwości, czy rzeczywiście, przy wyższym tonie oktawy, struna dokonywa w tym samym czasie dwa razy tyle drgań co przy niższym, gdyby nie to, że nieustanne fale przy dźwięczącym i drgającym kieliszku wykazały mi wyraźnie, jak w tej samej chwili, gdy dał się słyszeć jeden raz ton wyższy, powstawały nowe fale mniejsze, które jak najściślej przepołowiały każdą z fal pierwotnych.

Salviati: Piękne to doświadczenie, przy którym rozróżnić można poszczególne drgania, wychodzące od drgającego ciała; drgania te rozchodząc się w powietrzu, wprawiają w ruch nasz bębenek uszny i stają się dźwiękiem w naszej duszy. Ale ponieważ widziałem i zaobserwowałem, że wzburzenie w wodzie trwa tylko dopóty, dopóki pociągamy palcem po kieliszku, a nawet w ciągu tego czasu nie bywa stałe, a tylko to powstaje to znika, czyż więc nie byłoby rzeczą piękną, gdyby można było uczynić drgania długotrwałemi, przez miesiące i lata, tak żeby można było je mierzyć i łatwo liczyć?

S a g r e d o: Istotnie, taki wynalazek cenilibym bardzo.

S a l v i a t i: Wynalazek był dziełem przypadku, a moją tylko była obserwacja, poważna i cenna jakkolwiek nie pochodząca z głębokiego rozważania, lecz z roboty dość pospolitej. Skrobiąc ostrem dłotem żelaznem płytę mosiężną, dla usunięcia plam, przy szybkim poruszaniu dłota, usłyszałem raz i dwa między wieloma ślizgami i świstami, gwizd bardzo mocny i wyraźny, a gdy spojrzałem na płytę, spostrzegłem długi szereg cienkich równoległych kresek w ściśle równych odstępach. Przy dalszem skrobaniu wielokrotnie zauważyłem, że tam tylko, gdzie się ten gwizd powtarzał, dłoto robiło takie kreski, tam zaś, gdzie skrobanie dawało się słyszeć bez gwizdu, nie było żadnego śladu podobnych kresek. Powtarzając nieraz tą zabawkę, skrobiąc to z większą, to z mniejszą szybkością, gwizd odzywał się w tonie wyższym lub niższym i zauważyłem, że przy wyższych tonach kreski były gęstsze a przy niższych rzadsze, a nawet wtedy, gdy skrobanie przy końcu było szybsze niż przy początku, ton gwizdu się podnosił, a jednocześnie kreski stawały się więcej skupione, ale zawsze zupełnie czyste i równo od siebie oddalone; oprócz tego przy gwizdzących skrobaniach czułem w dłoni drganie dłota a przez rękę przebiegający pewien dreszcz. Widać w rezultacie, że z żelazem dzieje się toż samo co z nami, gdy mówimy cicho a potem wydajemy silny głos, że wypuszczając oddech bez wydawania dźwięku nie czujemy w gardle i w ustach żadnego ruchu, w porównaniu z mocnem drganiem, które odczuwamy w krtani i gardzieli przy wydawaniu głosu, zwłaszcza w głębokich i silnych tonach. Nieraz zaznaczałem na strunach cymbału dwa tony jednobrzmiące z dwoma różnymi gwizdami, o których była mowa, a różnica między niemi wynosiła doskonałą kwintę, gdy zaś zmierzyłem odległości między kreskami, znalazłem, że 45 kreskom jednego tonu odpowiadało 30 drugiego; co rzeczywiście odpowiada formie przypisywanej diapencie. Ale zanim pójdę dalej, muszę ostrzec, że z trzech sposobów podwyższanie tonu, ten, który opiera się na cienkości struny, właściwiej byłoby odnosić do jej ciężaru. Bo przy jednakowym materiale pozostaje dla grubości ten sam stosunek, tak że z dwóch strun bydlęcych, musi jedna być cztery razy grubsza od drugiej, aby dawać oktawę i toż samo ma miejsce przy obu strunach metalowych. Ale jeżeli chcę otrzymać oktawę z jednej struny bydlęcej i drugiej metalowej, to stosunek nie będzie czterokrotny co do grubości, ale trzeba wziąć ciężar cztery razy większy; tak że struna metalowa nie będzie miała czterokrotnego

przekroju struny bydlęcej ale czterokrotny ciężar i będzie tyle razy cieńszą od bydlęcej, odpowiadającej wyższej oktawie. Wynika stąd, że, jeżeli założymy w jednym cymbale struny złote a w drugim mosiężne i będą tej samej długości, napięcia i grubości, to ponieważ złoto jest dwa razy cięższe, struny złote dawać będą ton o kwintę niższy. Tu zauważcie, że prędkości ruchu więcej się opiera ciężar ciała niż jego wielkość, odwrotnie niżby można było się spodziewać; gdyż zdawało się, że prędkość więcej może być hamowana przez opór ośrodka, gdy ciało jest większe i lżejsze niż gdy jest cięższe i mniejsze; w tym przypadku zaś rzecz się dzieje zupełnie przeciwnie. Ale wracając do pierwszego, powiadam, że bezpośredni stosunek formy interwału muzycznego nie zależy ani od długości struny, ani od napięcia, ani od przekroju, a tylko od liczby drgań i uderzeń fal powietrza, dochodzących do bębienka naszego ucha i które w ciągu tegoż samego czasu wprawiają ten bębenek w drganie. Trzymając się tego, możemy ze ścisłością objaśnić, dlaczego jedne spółdzięki sprawiają nam wielką przyjemność, inne mniejszą a inne nawet wielką nieprzyjemność, możemy więc podać przyczynę mniej lub więcej doskonałej spółdzięczności i dysonansu. Nieprzyjemność tego ostatniego pochodzi, jak myślę, z niezgadzających się ze sobą drgań, które wytwarzają dwa różne tony i uderzają nie współmiernie o nasz bębenek uszny, a najnieznośniejszymi są rozdźwięki, gdy czasy drgań nie dają się wyrazić liczbami, ile idzie jednych na ile drugich, jak gdy z dwóch na jeden ton nastrojonych strun, jedna drga w takiej części względem drugiej, jak bok kwadratu do przeciwprostokątnej: rozdźwięk podobny trytonowi albo połowie diapenty. Spółdzięczną i mile brzmiącą będzie taka para tonów, które uderzać będą w pewnym porządku o bębenek; a pierwszym warunkiem tego porządku jest, aby liczby uderzeń w ciągu pewnego czasu były współmierne, tak aby błona bębienka nie znajdowała się w ciągłym zamieszaniu, poddając się i ulegając wciąż niezgodnym uderzeniom. To też pierwszą i najdoskonalszą spółdzięcznością jest oktawa, bo każdemu uderzeniu (o bębenek) niższego tonu, odpowiadają dwa wyższego; tak że te dwa wyższe przychodzą równocześnie z jednym niższym i ze wszystkich uderzeń połowa pada razem, podczas gdy przy unisonie wszystkie padają razem i o żadnej spółdzięczności niema już mowy. Kwinta jest również przyjemną, bo na każde dwa drgania struny niższej, struna wyższa daje trzy drgania, skąd wynika, że trzecia część uderzeń (o bębenek) wyższego tonu schodzi się z ude-

zeniami niższego, a dwie samotne przedzielają pary zgodnych; przy kwarcie (diatessaron) przedziela ich trzy. Przy sekundzie (tuono sesquiotto), na każde dziewięć uderzeń jedno tylko dochodzi zgodnie z uderzeniem struny niższej, wszystkie inne są niezgodne, przyjmowane z odrazą przez bębenek i poczytywane za dyssonans przy słuchaniu.

Simplicio: Pragnąłbym większej jasności w tym wywodzie.

Salviali: Niech będzie (tab. I, rys. 13) AB długość drgania struny niższej, a CD struny wyższej, która z poprzednią daje oktawę i niech będzie E środek AB. Widocznem jest, że, gdy ruch wychodzi z punktów A i C, to, gdy drganie wyższe dochodzi do D, drugie dojdzie tylko do środka E, który nie brzmi, nie stanowiąc końca ruchu a uderzenie będzie tylko w D. Gdy drganie wraca od D do C, to drugie przechodzi od E do B, i wtedy dwa uderzenia z B i C dochodzą jednocześnie do bębena; a gdy drgania tak następować będą po sobie, to uderzenia będą się naprzemian raz spotykać a drugi raz nie; ale uderzeniom końcowym towarzyszyć będzie zawsze jedno z uderzeń C, D, i zawsze toż samo; wynika stąd, że, gdy A i C uderzają jednocześnie, to, gdy A przechodzi do B, C idzie do D i wraca do C, tak że pary AC są zawsze też same. Ale jeżeli drgania AB i CD dają diapentę, to ich czasy mają się do siebie w stosunku półtoracznym i dzielić należy AB struny niższej na trzy części równe w E i O. Drgania zaczynają się dawać słyszeć w tej samej chwili w punktach A i C; oczywiście, gdy uderzenie następuje w D, drganie struny niższej dochodzi do O, a bębenek otrzymuje uderzenie tylko w D; przy powrocie od D do C, drganie struny niższej postępuje od O do B i wraca od B do O, wykonywając uderzenia odosobnione w B, nie wpadające w tempo uderzeń struny wyższej (co należy zauważyć), bo ponieważ przyjęliśmy równoczesny początek drgań w A i C, to drugie drganie, które uderzało odosobnione w D, uderzy wracając o tyle później, ile nam trzeba na przejście od C do D lub od A do O. Ale uderzenie w B następuje tylko o połowę tego czasu później, bo $OB = \frac{1}{2} AO$; dalej jedno drganie wraca od O do A a równocześnie drugie idzie od C do D, tak że oba uderzają razem w A i D. Podobne periody następują dalej, ze wstawieniem dwóch oddzielnych i odosobnionych uderzeń wyższego tonu i jednego odosobnionego niższego tonu, między dwa odosobnione wyższego. Jeżeli podzielimy czas na równe małe momenty, to w pierwszych dwóch momentach od A i od C następuje przejście do O i do D

i uderzenie w D, następnie w trzecim i czwartym momencie powrót od D do C i uderzenie w C a jednocześnie ruch od O do B, uderzenie w B i powrót od B do O, wreszcie w piątym i szóstym momencie drgania od O i C do A i D i równoczesne uderzenia w obu tych punktach, a na błonie bębna uderzenia następują w takim porządku, że jeżeli się spotykają na początku, to po dwóch momentach następuje odosobnione, po trzecim znów odosobnione i tak samo po czwartym a po dwóch następnych dwa uderzenia razem: wtedy perjod jest ukończony i cała anomalia powtarza się wiele razy w następstwie.

S a g r e d o: Nie mogę więcej milczeć i muszę objawić zadowolenie, jakie mi sprawiło tak wyborne uzasadnienie zjawisk, które mnie tak długo trzymały w ciemności i ślepotcie. Teraz rozumiem dlaczego unisono nie różni się od jednego pojedynczego głosu: pojmuję dlaczego oktawa jest najlepszym spółdziwkiem a przytem tak podobna do jednodzwiku, że brzmi jak ten ostatni: podobna jest do unisonu, bo drgania strun na jeden ton nastrojonych uderzają wszystkie razem, uderzenia niższej struny zawsze razem z uderzeniami wyższej, a między niemi równoodległe od obu uderzenie odosobnione, i tak bez żadnego zamieszania, dlatego też ta spółdziwczoność jest zbyt słodka i mało ożywiona. Zato kwinta ze swojemi kontratemпами, ze wstawkami między pary dwóch połączonych drgań, dwóch drgań odosobnionych struny wyższej i jednej odosobnionej struny niższej, tej ostatniej następującej w połowie dwóch poprzednich i w połowie perjodu między uderzeniami par drgań, wywołuje takie mile lechotanie bębna, że, ożywiając słodycz deszczykiem kwasu, daje wrażenie zarazem pocałunku i ukąszenia.

S a l v i a t i: Skoro Waszmościom tak przypadły do gustu te nowości, podać Wam muszę, w jaki sposób może nie tylko ucho ale i oko zabawić się widokiem podobnych wybryków. Zawieście kulki ołowiane albo inne ciężkie ciała na trzech sznurkach różnej długości, ale takich, że gdy najdłuższy dokonywa dwóch wahań, to w tym samym czasie najkrótszy robi ich cztery a średni trzy, a co ma miejsce, gdy najdłuższy ma 16 palm lub innych miar, średni 9 a najkrótszy 4; gdy wszystkie równocześnie odchyłone zostaną od pionu i puszczone, widzi się nieokreślone krzyżowanie się sznurków, różnie się schodzących, ale w ten sposób, że przy każdym czwartym wahaniu najdłuższego wszystkie trzy znajdują się równocześnie w początku ruchu i zaczyna się takż sam nowy

perjod; to pomieszenie wahań jest takie samo, jak czynione na słuchu przez struny dające oktawę i kwintę. Jeżeli w podobny sposób oznaczmy długość innych sznurków odpowiednio do wiadomych spółdźwięczących interwałów muzycznych, to otrzymamy znów inne splećanie ruchów wahadeł, takie jednak, że po pewnej liczbie wahań wszystkie znów stawać będą równocześnie w punktach wyjścia i razem puszcza się w ruch, by rozpocząć nowy podobny perjod. Ale jeżeli czasy wahań dwóch lub więcej sznurków są niewspółmierne, tak że nigdy w jednej i tej samej chwili nie wracają do punktu wyjścia, albo nawet, gdy są współmierne, wracają po zbyt długim przeciągu czasu i po zbyt wielkiej liczbie wahań, to oko zostaje zmęczone widokiem tej ciągłej nieregularności, a ucho z udręczeniem odbiera drgania powietrza wpadające bez żadnego porządku i regularności.

Ale dokądże to, moi panowie, pozwoliliśmy się doprowadzić przez te różne kwestje i niespodziewane rozmowy. Noc nadeszła, z przedmiotu postawionego roztrząsaliśmy bardzo mało, nie prawie; tymczasem zboczyliśmy tak z drogi, że zaledwie przypominam sobie punkt wyjścia i pierwsze rozważania, przyjęte jako hipotezy i podstawy dalszych rozwiązań.

Sagredo: To też skończymy dziś na tem i pozwolimy umysłowi uspokoić się nocnym spoczynkiem, aby jutro (jeżeli się panowie zgadzają) powrócić do pożądaných i głównych rozważań.

Salviati: Nie omieszkam, o tej samej godzinie co i dziś służyć wam i was zadowolić.

Koniec dnia pierwszego.

DZIEŃ DRUGI.

Sagredo: Oczekując przybycia Waszmości, p. Simplicio i ja staraliśmy się przypomnieć sobie nasze ostatnie rozważania a zwłaszcza te zasady, które miały służyć Waszmości do wykazania, że opór, jaki wszystkie ciała stałe stawiają na złamanie, zależy od pewnego środka wiążącego, który utrzymuje spójność cząstek, tak że trzeba silnego rozciągania, aby ustępowały i rozdzielały się. Szukając, na czym polegać może ta spójność, w niektórych ciałach bardzo wielka, próbowaliśmy opierać ją głównie na próżni, która stała się powodem tylu rozpraw, że te zajęły cały dzień i odsunęły

nas daleko od pierwotnie postawionego zadania, mianowicie od rozważenia wytrzymałości ciał na złamanie.

Salviati: Dobrze pamiętam to wszystko i wracam do naszego punktu wyjścia: na czemkolwiek polega wytrzymałość ciał przy łamaniu ich gwałtowną siłą, istnieje ona jednak niewątpliwie i to znaczna przy rozciąganiu wzdłuż a mniejsza przy wyginaniu poprzecznem, tak że np. pręt stalowy lub nikłowy może unosić zawieszony na nim ciężar 1000 f., a umocowany poziomo w murze łamie się pod ciężarem 50 f. O tej drugiej wytrzymałości wypadam nam mówić i badać będziemy, w jakim stosunku przedstawia się ona dla graniastostupów i walców, podobnych i niepodobnych co do kształtu, długości i grubości, a zrobionych z tegoż samego materiału. Za podstawę rozumowania biorę wywodzone w mechanice prawo drąga, według którego siła ma się do oporu w stosunku odwrotnym odległości ich od podpory.

Simplicio: Było to dowiedzione przez Arystotelesa w jego mechanice, wprzód niż przez innych.

Salviati: Zgadza się, abyśmy mu przyznali pierwszeństwo co do czasu, ale zdaje mi się, że ścisłością dowodzenia przewyższył go znacznie Archimedes, bo na jednym jego twierdzeniu o równowadze ciężarów opiera się zasada, nie tylko drąga, ale i innych narzędzi mechanicznych.

Sagredo: Ponieważ ta zasada stanowi podstawę tego, co narazie zamiar mam dowieść, byłoby przeto najwłaściwszem, żebyście nam dali jej wywód i to, jeżeli nie jest zbyt długi, wywód całkowity i zupełny.

Salviati: Ażeby lepiej to uczynić, wybiorę inną drogę niż Archimedes, dla wejścia na pole dalszych rozumowań, nie innego nie przypuszczając, jak tylko, że dwa równe ciężary umieszczone na szali równoramiennej są w równowadze (zasada przyjmowana również przez Archimedes): i dowiodę dalej, że nie tylko prawdziwym jest także, że dwa nierówne ciężary są w równowadze, gdy mają się do siebie w stosunku odwrotnym długości ramion wagi, ale nawet niema żadnej różnicy pomiędzy tym przypadkiem a przypadkiem równych ciężarów, równoodległych od podpory wagi. Dla jasnego dowiedzenia tego, co powiedziałem, biorę graniastostup lub walec AB (tab. II, rys. 14), zawieszony końcami na linji HI i podtrzymywany przez dwa sznurki HA i IB. Widocznem jest, że jeżeli bym zawiesił całość na sznurku C umieszczonym w połowie wagi HI, graniastostup AB pozostanie w równowadze, bo zgodnie z za-

sadą przez nas postawioną, każda z dwóch jego połów zawieszona jest w tej samej odległości od punktu C. Przypuśćmy teraz, że graniastosłup podzielony zostanie na dwie części nierówne, płaszczyzną po linii D, część większą DA i mniejszą DB i dla utrzymania tych części w niezmiennem położeniu względem HI, zawiesimy je jeszcze na sznurku ED, który, umocowany w E, podtrzymywać będzie obie części graniastosłupa AD i DB; niewątpliwem jest, że skoro nie zaszła żadna zmiana w graniastosłupie względem HI, to graniastosłup pozostanie w tej samej równowadze. Ale ta równowaga utrzyma się jeszcze i wtedy, gdy część graniastosłupa wiszącą dwoma końcami na sznurkach AH i DE zawiesimy w jej środku na jednym sznurku GL i tak samo drugą część DB w jej środku na sznurku FM. Usuńmy teraz sznurki HA, ED, IB a pozostawmy tylko dwa GL i FM, to równowaga się utrzyma przy zawieszeniu całości w punkcie C. Mamy więc teraz dwa ciężary AD i DB zawieszone na końcach G i F wagi GF, która jest w równowadze w punkcie C i odległość zawieszenia ciężaru AD od punktu C jest CG a CF odległość zawieszenia ciężaru DB. Pozostaje więc dowieść, że te odległości mają się do siebie w stosunku odwrotnym ciężarów t. j., że GC ma się do CF, jak graniastosłup DB do graniastosłupa DA. Ponieważ GE jest połową EH a EF połową EI, to całe GF będzie połową całego HI a więc będzie równe CI, odejmując zaś od obu stron część wspólną CF, będzie reszta GC równa reszcie FI, albo równa FE a, dodając do obu stron CE, będzie $GE = CF$; a ponieważ GE tak się ma do EF jak FC do CG, a więc jak GE do EF, albo jak podwójna do podwójnej, czyli jak HE do EI, czyli jak graniastosłup AD do graniastosłupa DB. A więc w jednakim stosunku i odwrotnie, tak się ma odległość GC do CF jak ciężar DB do ciężaru DA i tego właśnie chciałem dowieść. Sądzę nadto, że zgodzicie się na twierdzenie, że oba graniastosłupy AD i DB są w równowadze względem punktu C, bo jedna połowa całego ciężaru AB leży z prawej a druga z lewej strony zawieszenia w C i tym sposobem obie przedstawiają dwa równe i równoodległe ciężary. Jeżeli zaś zamienimy dwa graniastosłupy AD i DB na sześciiany lub kule, albo dwie inne bryły jakiegokolwiek kształtu (zachowując tylko też same punkty zawieszenia G i F), to zawsze utrzyma się równowaga względem C, bo oczywiście jest, że zmiana kształtu nie pociąga za sobą zmiany ciężaru, skoro ilość materji pozostaje też sama. Wynika stąd wniosek ogólny, że jakiekolwiek dwa ciężary, w odległościach odwro-

tnie proporcjonalnych, pozostają w równowadze. Gdy to jest ustalone, to zanim pójdziemy dalej, powinniśmy zauważyć, że te siły, opory, momenty i kształty mogą być rozważane abstrakcyjnie, niezależnie od wszelkiej materji a także konkretnie, łącznie z materją; i tym sposobem przypadki odpowiadające kształtom uważanym jako niematerialne, ulegać będą pewnym zmianom, gdy uwzględniać będziemy materję a więc i ciężkość. Jeżeli np. (tab. II, rys. 15) weźmiemy drąg BA, oparty na podporze C dla podniesienia ciężkiego kamienia D, to oczywiście na mocy dowiedzionej zasady, siła przyłożona do końca B wystarczy do podniesienia ciężaru D, jeżeli jej moment mieć się będzie do momentu tegoż D w tym samym stosunku, jak odległość AC do odległości CB i to jest prawdziwem, jeżeli nie bierzemy pod uwagę innych momentów jak tylko siły w B i oporu w D, jakby sam drąg był idealny i bez ciężkości. Ale jeżeli uwzględniać będziemy ciężar samego drąga, który może być zrobiony z drzewa lub żelaza, to oczywiście do siły w B przyłączony ciężar drąga, zmieni stosunek, który trzeba będzie inaczej wyrazić. I dlatego, zanim pójdziemy dalej, trzeba abyśmy się umówili co do odróżniania tych dwóch sposobów rozważania; nazywać więc będziemy stosunek absolutnym, gdy narzędzie uważane będzie jako idealne, bez uwzględnienia ciężaru materji z której jest zrobione; gdy zaś łączyć będziemy z jego kształtem absolutnym materję i jej ciężar, nazywać to będziemy momentem lub siłą złożoną (composta).

Sagredo: Wbrew obietnicy, że nie dam powodu do zbaczania, muszę jednak to uczynić, gdyż nie mogę śledzić rozważania, mając pewną wątpliwość; zdaje mi się mianowicie, że Waszmość, porównywał siłę w B z całym ciężarem kamienia D, a tymczasem część tego ciężaru i to znacznie większa opuszcza się na płaszczyźnie poziomej; tak więc...

Salviati: Rozumiem dobrze. Ostrzegam Waszmość tylko, że nie wymienilem całkowitego ciężaru kamienia ale mówiłem o momencie, jaki ma ten ciężar i wywiera na punkt A t.j. na koniec drąga BA, który to moment jest zawsze mniejszy od ciężaru całego kamienia i zmienia się razem z jego kształtem i większem lub mniejszem podniesieniem.

Sagredo: Jestem zaspokojony, lecz powstaje inne pragnienie, mianowicie chciałbym wiedzieć, jaka część całego ciężaru opiera się na płaszczyźnie, a jaka ciąży na koniec drąga A.

Salviati: Życzeniu Waszmości uczynić mogę zadość w paru

słowach, a tylko zrobić inny rysunek (tab. II, rys. 16). Niech będzie ciężar ze środkiem ciężkości w A, opierający się o ziemię swym końcem B, drugi koniec tego ciężaru podtrzymuje drąg CG, oparty o podpórę N a naciskany siłą w G; ze środka A i z końca C spuścimy prostopadłe do poziomu AD i CF. Twierdzę, że moment całego ciężaru ma się do momentu siły w G, jak stosunek złożony odległości GN do NC i odległości FB do BO. Połóżmy FB do BO jak NC do X, a ponieważ cały ciężar A podtrzymywany jest przez dwie siły w B i C, to siła w B ma się do siły w C, jak odległość FO do OB, a składając razem siły w B i C, będzie całkowity moment ciężaru A do siły w C, jak linja FB do BO, albo jak NC do X; ale moment siły w C ma się do momentu siły w G, jak odległość GN do NC; a więc razem cały ciężar A, do momentu siły w G, jak GN do X, a w stosunku złożonym GN do NC i NC do X czyli FB do BO, a więc ciężar A ma się do siły działającej w G, jak stosunek złożony GN do NC i FB do BO, co było do dowodzenia. Wracając do naszego pierwszego zadania, przyjąwszy to co powiedziano, nie trudno będzie pojąć przyczynę, dlaczego graniastosłup lub wałek, szklany, stalowy, drewniany albo z innego materiału łamliwego, unosić może, gdy jest zawieszony, bardzo wielki ciężar, podczas gdy poprzecznie (jak co dopiero powiedziano) złamany być może tem mniejszym ciężarem, im więcej jego długość przewyższa jego grubość. Bo niech będzie (tab. II, rys. 17) graniastosłup ABCD umocowany w murze częścią AB, podczas gdy na drugiego jego koniec działa siła ciężaru E (przypuszcza się zawsze, że mur zbudowany jest do pionu a graniastosłup utkwiony w nim pod kątem prostym); oczywiście, mając się złamać, przerwie się w miejscu B, gdzie granica muru służy za podpórę a BC jest ramieniem drąga, na które działa siła; grubość ciała BA stanowi drugie ramię drąga, na które działa opór, dążący do oddzielenia części BD po za murem, od tych, które są w murze: według tego, tak się ma moment siły w C do momentu oporu zawartego w grubości graniastosłupa, czyli do przylegania podstawy BA do części sąsiednich, jak długość CB do połowy BA, a dlatego absolutny opór na złamanie, jaki stawia graniastosłup BD (który to opór absolutny jest ten, jaki stawia graniastosłup, gdy jest wprost wyciągany, gdyż wtedy siła wyciągająca jest równa oporowi) ma się do oporu względnego, to jest do oporu na złamanie drąga BC, jak długość BC do połowy AB graniastosłupa, która w przypadku walca byłaby równa promieniowi jego podstawy. I to jest nasze pierwsze podanie.

A zauważcie, że w tem, co powiedziałem, pominięty został ciężar własny ciała BD, które przyjmowałem jako nic nie ważące. Lecz jeżeli wprowadzimy do rachunku ten ciężar łącznie z ciężarem E, to wtedy musimy do ciężaru E dodać połowę ciężaru ciała BC, tak że n.p. jeżeli BD waży dwa funty a E dziewięć funtów, to przyjąć należy za ciężar działający E jedenaście funtów.

Simplicio: A dlaczego nie dwadzieścia?

Salviati: Ciężar E, panie Simplicio, zawieszony na końcu C, ciśnie na drąg BC całym swoim momentem dziesięciu funtów, gdyby więc było zawieszone samo BD, ciążyłoby całym momentem dwóch funtów, ale, jak widzicie, ciało to jest rozłożone jednostajnie na całej swej długości BC, więc części sąsiadujące z końcem B ciążą mniej niż dolne; tak że w sumie wyrównują się jedna z drugimi i ciężar całego graniastosłupa sprowadza się do jego środka ciężkości, odpowiadającego środkowi drąga BC; ale ciężar wiszący na końcu C ma moment dwa razy większy niż gdyby był zawieszony w środku, przeto połowa ciężaru graniastosłupa ma być dodana do ciężaru E, podczas gdy używać będziemy ich momentu jako umieszczonego na końcu C.

Simplicio: Przekonywa mnie to w zupełności, a nadto zdaje mi się, że oba ciężary BD i E, w ten sposób umieszczone, mieć będą ten sam moment, jak gdyby we środku drąga BC umieszczone było całe ciało BD i podwójny ciężar E.

Salviati: Istotnie rzecz się tak ma i powinna być zapamiętana. Możemy teraz natychmiast oznaczyć, w jakim stosunku pręt lub graniastosłup więcej opierać się może złamaniu, jeżeli jest więcej szeroki niż gruby, a siła działa nań w kierunku szerokości lub grubości. Dla zrozumienia, niech będzie (tab. II, rys. 18) prawidło (riga) AD którego szerokość jest AC a grubość znacznie mniejsza CB; to pytanie, dla czego postawione na wąskiej podstawie, jak na pierwszym rysunku, nie daje się złamać pod znacznym ciężarem T, podczas gdy położone na płask, jak na drugim rysunku nie wytrzymuje ciężaru X mniejszego od T; podpora jest w pierwszym przypadku BC a w drugim CA, odległość siły jest w obu przypadkach jednakowa, równa długości BD. Ale w pierwszym przypadku odległość oporu od podpory, t.j. połowa prawidła CA, jest większa niż w drugim, w którym jest połową BC: a więc siła ciężaru T winna być większą od X w tym stosunku, w jakim połowa szerokości CA jest większą od połowy grubości BC, gdyż te połowy są ramionami oporu, który w obu przypadkach ma też samą wiel-

kość, równą ilości włókien całej podstawy AB. Wnosimy stąd, że toż samo prawidło lub graniastosłup, szerszy niż grubszy, więcej się opiera złamaniu, gdy stoi na wężkiej ścianie, aniżeli gdy leży na płask i to w tym stosunku, jak się ma szerokość do grubości.

Może przystąpimy teraz do zbadania, w jakim stosunku moment ciężaru własnego graniastosłupa lub walca ustawionego równolegle do poziomu, powiększa się względem wytrzymałości na złamanie, gdy graniastosłup zostaje wydłużony; znajduję, że moment ten powiększa się w podwójnym stosunku wydłużenia. Aby tego dowieść (tab. II, rys. 19), weźmy graniastosłup lub walec AD, umocowany w murze końcem A, równolegle do poziomu; i przypuśćmy, że został przedłużony do E przez dodanie części BE. Drag AB wydłużył się przez to do C, czyli wzięty absolutnie moment siły, działającej przeciwko oporowi na złamanie i rozerwanie w A, powiększył się w stosunku CA do BA, ale oprócz tego ciężar ciała BE, dodanego do ciała AB, powiększa moment ciężaru działającego w stosunku graniastosłupa AE do graniastosłupa AB, który to stosunek jest ten sam, co stosunek długości AC do AB. Połączysz więc oba, powiększenia długości i ciężaru, nieć będziemy moment złożony z obu powiększony w podwójnym stosunku. Wynika stąd, że momenty sił działających na graniastosłupy i walce, jednakowo grube a nie jednakowo długie, mają się do siebie w podwójnym stosunku ich długości czyli tak jak kwadraty z długości.

Powiemy następnie, w jakim stosunku wzrasta opór na złamanie graniastosłupów i walców, gdy ich długość pozostaje też sama a wzrasta grubość. I powiadam że:

Graniastosłupy i walce jednakowo długie, lecz nierównej grubości, stawiają na złamanie opór, rosnący w potrójnym stosunku średnic ich grubości, czyli ich podstaw.

Niech będą (tab. II, rys. 20) dwa walce A, B, których długości są równe, DG, FH, podstawy nierówne, koła o średnicach GD, EF. Twierdzę, że opór na złamanie walca B ma się do oporu walca A w stosunku potrójnym średnicy FE do średnicy DC. Bo jeżeli weźmiemy pod uwagę absolutny i prosty opór, jaki jest w podstawach czyli kołach EF, DC, przeciwko rozerwaniu przy ciągnięciu wzdłuż, to niewątpliwie opór walca B jest tem większy od oporu walca A, im koło EF jest większe od CD, gdyż tem więcej jest włókien i nitek czyli części trzymających, które wiążą w jedną całość części ciała. Ale zauważmy, że posługujemy się tu dwoma

dragami, których części, czyli odległości sił są linje DG, FH a podpory w punktach D i F, inne zaś części czyli odległości oporów są połowy średnic kół DC, EF, bo włókna są rozproszone na całej powierzchni kół i wszystkie sprowadzają się do ich środków; zważywszy, powiadam, że opór w środku podstawy EF przeciwko sile w H jest tem większy od oporu CD przeciwko sile w G (a gdy siły są w G i H, to dragi są równe DG i FH) im połowa średnicy FE jest większa od połowy średnicy DC; opór więc na złamanie walca B wzrasta względem oporu walca A w stosunku wzajemnym kół EF, DC i ich półśrednic, powiedziałbym średnic: ale stosunek kół jest podwójnym stosunkiem średnic, więc stosunek oporów którego jest częścią, jest potrójnym stosunkiem tychże średnic, czego właśnie mieliśmy dowieść. Ale ponieważ sześciany są do siebie w stosunku potrójnym swych boków, możemy podobnież wnosić, że opory walców jednakowo długich mają się do siebie jak sześciany z ich średnic.

Z tego, co dowiedziono, możemy jeszcze wnosić, że opory graniastosłupów i walców, jednakowo długich, mają się do siebie w stosunku półtoracznym tychże walców. Oczywiście dlatego, że graniastosłupy i walce jednakowo wysokie mają się do siebie w tym samym stosunku co podstawy, czyli w podwójnym stosunku boków lub średnic podstaw, a że opory (jak dowiedziono) są do siebie w potrójnym stosunku tychże boków lub średnic, więc stosunek oporów jest półtoracznością stosunku tych brył a zatem i ich ciężarów.

Simplicio: Przedtem, nim pójdziemy dalej, muszę otrzymać objaśnienie jednej trudności, mianowicie nie było dotąd mowy o pewnym rodzaju oporu, który zmniejsza się w ciałach, gdy te się wydłużają i to oporu nie tylko przeciw działaniu poprzecznemu ale i wzdłuż; w ten sposób widzimy właśnie, jak sznur bardzo długi mniej jest zdolny do utrzymania wielkiego ciężaru niż krótszy; sądę więc, że i pręt drewniany lub żelazny, więcej ciężaru utrzyma, gdy będzie krótki niż gdy będzie bardzo długi; mam tu na myśli użycie go wzdłuż a nie w poprzek; i nadto stawiam w rachunek jego własny ciężar, który przy dłuższym sznurze jest większy.

Salviati: Przypuszczam, panie Simplicio, że w tym punkcie mylicie się wraz z wielu innymi, bo jeżeli dobrze rozumiem myśl Waszą, to chcecie powiedzieć, że bardzo długi sznur, np. czterdzie-

stołokciowy nie może utrzymać tyle ciężaru co takież sznur jedno lub dwułokciowy.

Simplicio: To co powiedzieliście wydaje mi się dość prawdopodobnem.

Salvati: A ja to mam za mylne, nie za niemożliwe; i sędzę, że możecie łatwo być wyprowadzeni z błędu. Bo weźmy (tab. II, rys. 21) sznur AB przywiązany na górze w A, a na drugim końcu unoszący ciężar C, pod działaniem którego powinien się zerwać. Wskażcie, p. Simplicio, w którym miejscu ma nastąpić zerwanie.

Simplicio: Niech będzie w D.

Salvati: A dla jakiej przyczyny zerwanie ma nastąpić w D?

Simplicio: Dlatego, że sznur w tem miejscu nie może utrzymać stu funtów ciężaru części DB razem z ciężarem C.

Salvati: Więc sznur zawsze w tem samem miejscu się rozrywa, gdy jest obciążony stoma funtami?

Simplicio: Tak sędzę.

Salvati: Ale powiedzcie, jeżeli ten sam ciężar przywiążemy nie na końcu B, lecz zaraz obok D, np. w E, albo jeżeli sznur zawiesimy nie w A ale bliżej D, np. w F, to czy punkt D nie będzie odczuwał tegoż samego ciężaru stu funtów.

Simplicio: Odczuje, jeżeli tylko część EB dodamy do ciężaru C.

Salvati: Jeżeli więc sznur w D jest ciągnięty takimż samymi stoma funtami, to mówicie, że się zerwie, że zaś EF jest tylko małym kawałkiem w stosunku do AB, jakże więc możecie utrzymywać, że dłuższy sznur jest słabszy niż krótki? Pozwólcie się więc wyprowadzić z błędu, który dzieliliście z wieloma skądinąd inteligentnymi. A idąc dalej, ponieważ dowiedziono, że graniastosłupy lub walce mają moment własnego oporu rosnący w stosunku kwadratów z długości (przy tej samej grubości), a przy równie długich, lecz nie jednakowo grubych, opór rośnie w stosunku sześciannów z boków lub średnic ich podstaw, przejdziemy do zbadania, jak się zachowują takie bryły różnej długości i grubości, co do których twierdzę że:

Graniastosłupy i walce różnej długości i grubości mają opory na złamanie w stosunku złożonym ze stosunku sześciannów ze średnic ich podstaw i odwrotnego stosunku długości.

Niech będą (tab. II, rys. 22) takie dwa walce ABC, DEF. Twierdzą, że opór walca AC ma się do oporu walca EF w stosunku złożonym ze stosunku sześciannu ze średnicy AB do sześciannu ze śred-

dnicy DE i stosunku długości EF do długości BC¹⁾. Niech będzie $EG = BC$ a do linii AB, DE trzecia proporcjonalna H²⁾ i czwarta I³⁾, oraz EF do BC, jak I do S. Ponieważ opór walca AC ma się do oporu walca DG, jak sześciąt z AB do sześciąt z DE, czyli jak linia AB do linii I, a opór walca GD do oporu walca DF, jak długość FE do EG, czyli jak linia I do S, a więc także opór walca AC ma się do oporu walca DF, jak linia AB do S; ale stosunek linii AB do S jest równy stosunkowi złożonemu AB do I i I do S, więc opór walca AC ma się do oporu EF, jak stosunek złożony AB do I, czyli sześciąt z AB do sześciąt z DE i I do S, czyli długość EF do długości BC, czego chciałem dowieść.

Po dowiedzeniu tego twierdzenia pragnę, abyśmy rozważyli, jak się rzecz ma z walcami i graniastosłupami podobnemi, co do których dowiodę, że:

Walce i graniastosłupy podobne mają momenty złożone, czyli wynikające z ich ciężarów i ich długości, które są ramionami drągów, a będące do siebie w stosunku półtoracznym oporów ich podstaw⁴⁾.

Aby tego dowieść, weźmy (tab. II, rys. 23) dwa walce podobne AB i CD. Twierdząc, że moment walca AB, dla przewyciężenia oporu jego podstawy B, ma się do momentu CD, dla przewyciężenia oporu jego podstawy D, jak półtoraczny stosunek oporu podstawy B do oporu podstawy D; bo momenty ciał AB, CD, dla przewyciężenia oporów ich podstaw, składają się z ciężarów ciał i z sił ich drągów, a siła drąga AB jest równa sile drąga CD, dlatego, że długość AB ma się do połowy średnicy podstawy B (wskutek podobieństwa walców), jak długość CD do połowy średnicy podstawy D, więc cały moment walca AB będzie do całego momentu CD, jak sam ciężar walca AB do samego ciężaru walca CD, czyli jak tenże walec AB do tegoż CD; ale te mają się do siebie w potrójnym stosunku⁵⁾ średnic ich podstaw B i D, a opory tychże podstaw w stosunku tychże podstaw, a więc w podwójnym

$$1) \frac{\text{opór AC}}{\text{opór EF}} = \frac{AB^2}{DE^2} \cdot \frac{EF}{BC} \quad \text{P. T.}$$

$$2) H = \frac{DE^2}{AB} \quad \text{P. T.}$$

$$3) \frac{I}{H} = \frac{DE}{AB}; \quad I = \frac{DE^2}{AB^2} \quad \text{P. T.}$$

4) Co znaczy: w stosunku oporów podniesionym do potęgi $\frac{3}{2}$. P. T.

5) Co znaczy: w stosunku sześciatów. P. T.

stosunku¹⁾ ich średnic; więc momenty walców są w półtoraczym stosunku oporów ich średnic.

Simplicio: Twierdzenie to jest dla mnie zupełnie nowem i nieoczekiwanem, sądziłem bowiem, że przy zupełnem podobieństwie figur również stosunek momentów do oporów pozostaje ten sam.

Sagredo: Jest to dowodzenie tego twierdzenia, o którym na początku naszych rozpraw mówiłem, że wydaje mi się ciemnem.

Salviati: Tak samo jak p. Simplicio i ja dawniej myślałem, że opory brył podobnych są podobne, aż dopiero jedna, nawet nie bardzo pewna i dokładna obserwacja, zdawała się wykazywać, że ciała podobne nie utrzymują w takiejże mierze swej mocy, ale że większe są mniej zdolne do wytrzymania gwałtownych zderzeń, tak samo jak wysocy ludzie przy upadku ponoszą więcej szkody niż mali chłopcy i tak, jak na początku była mowa, widziano, że spadająca z tej samej wysokości wielka belka lub słup rozpada się na kawałki, a mała żerdź lub walec z marmuru pozostają całe. Spostrzeżenia te skłoniły mnie do wzięcia pod uwagę tych kwestji, które obecnie wykładam: własność to rzeczywiście zadziwiająca, bo między nieskończenie wielkimi bryłami podobnemi nie znajdzie się dwóch takich, których momenty i opory (proprie resisteze) pozostają w tym samym stosunku.

Simplicio: Przypomina mi to pewien ustęp z Arystotelesa zadań mechanicznych, gdy szukał przyczyny, dlaczego belka drewniana im dłuższa tem jest słabsza i łatwiej się ugina, chociaż krótkie są cieńsze a długie grubsze i, jeżeli sobie dobrze przypominam, to sprowadził przyczynę do zasady drąga.

Salviati: Najzupełniejsza prawda, a ponieważ zdaje się, że rozwiązanie nie usuwa całkowicie przyczyny powątpiewania, to monsignor di Guevara, który istotnie swemi uczonemi komentarzami uświetnił znakomicie to dzieło i rozszerzył innemi więcej przenikliwemi rozważaniami, usuwającemi wszelkie trudności, nie przestał wszakże powątpiewać, czy przy powiększaniu w tym samym stosunku długości i grubości takich brył, utrzymuje się w tym samym stopniu ich moc i opór na złamanie lub zginanie. Ja po długich rozmyślaniach znalazłem to, co w dalszym ciągu zamierzam wyłożyć. A najprzód dowiodę, że:

¹⁾ Co znaczy: w stosunku kwadratów.

Z pomiędzy ciężkich graniastosłupów lub walców, do siebie podobnych, jest tylko jeden jedyny, stojący na granicy (przy obciążeniu własnym ciężarem) pomiędzy złamaniem a pozostaniem w całości: tak że każdy większy, jako nie mogący się utrzymać własnym ciężarem, rozpada się, a każdy mniejszy opiera się jakiegokolwiek sile, dążącej do jego złamania.

Niech będzie (tab. II, rys. 24) graniastosłup ciężki AB, doprowadzony do takiej długości, że przy najmniejszym przedłużeniu się rozpada. Twierdzą, że między wszystkimi do niego podobnymi (których może być nieskończenie wiele) graniastosłup ten jest jedyny, który można doprowadzić do takiego stanu granicznego, że każdy większy pod własnym ciężarem będzie się łamał, a każdy mniejszy nie i raczej się oprze każdemu nowemu obciążeniu, innemu niż własny ciężar. Niech będzie CE graniastosłup podobny większy od AB. Twierdzą, że nie może się utrzymać, ale się złamie pod obciążeniem własnego ciężaru. Połóżmy część CD równą AB. A ponieważ opór CD ma się do oporu AB, jak sześciąt z grubości CD do sześciąt z grubości AB, czyli jak graniastosłup CE do graniastosłupa AB (bo są podobne), a więc ciężar CE jest największy, jaki może się utrzymać na długości graniastosłupa CD; ale długość CE jest większa; więc graniastosłup CE się złamie. Ale jeżeli FC jest mniejszy: to dowieść można w podobny sposób, (kładąc FH równe BA), że opór FC tak się ma do oporu AB, jak graniastosłup FC do graniastosłupa AB, gdyby odległość AB, czyli FH, była równa FC; ale jest większa, a więc moment graniastosłupa FC umieszczony w C nie starczy do złamania graniastosłupa FC.

S a g r e d o: Bardzo jasna i z krótkiego dowodzenia wynikająca prawda i konieczność twierdzenia, które na pierwszy wygląd wydawało się dość odległym od prawdopodobieństwa. Należałoby więc zmieniać stosunek długości i grubości większego graniastosłupa, przy wydłużaniu lub skracaniu aż do dojścia do granicy między utrzymaniem się w całości a rozpadem, a poszukiwanie tej granicy sądzę, że może być również pomysłowym.

S a l v i a t i: Raczej absolutnie pożytecznem a i trudniejszym, dołożyłem też starań, aby ją znaleźć i zaraz Wam wywód przedstawię.

Dany jest walec lub graniastosłup największej długości, przy jakiej może jeszcze się utrzymać pod własnym ciężarem i dana jest większa jeszcze długość a chodzi o oznaczenie grubości walca,

dla którego dana długość stanowiłaby granicę utrzymywania się pod własnym ciężarem.

Niech będzie (tab. II, rys. 25) walec BC, największy, jaki może utrzymywać swój własny ciężar i długość DE, większa od AC, chodzi o znalezienie grubości walca, któryby przy długości DE mógł utrzymywać swój własny ciężar.

Niech będzie I trzecia proporcjonalna do DE i AC ¹⁾ a walec FE taki, aby tak się miało DE do I, jak średnica FD do średnicy BA. Twierdzę, że to jest największy i jedyny między wszystkimi doń podobnemi, który może utrzymywać swój własny ciężar. Dla linii DE i I niech będzie trzecia proporcjonalna M a czwarta O ²⁾. I połóżmy FG = AC. A ponieważ średnica FD ma się do średnicy AB, jak linja DE do I, a dla DE i I, O jest czwartą proporcjonalną, przeto sześcián z FD ma się do sześciánu z BA, jak opór walca DG do oporu walca BC; a więc wytrzymałość walca DG do tejże walca BC ma się, jak linja DE do O. A że moment walca BC jest równy jego oporowi, to mieć będziemy żądane twierdzenie, jeżeli dowiedzimy, że moment walca FE ma się do momentu walca BC, jak opór DF do oporu BA, albo jak sześcián z FD, do sześciánu z BA, albo jak DE do O, czyli dowiedzimy, że moment walca FG jest równy oporowi w FD. Moment walca FE ma się do momentu walca DG, jak kwadrat z DF do kwadratu z BA, czyli jak kwadrat z DE do kwadratu z I, czyli jak kwadrat z I do kwadratu z M, czyli jak I do O; a więc w równym stosunku jak moment walca FE do momentu walca BC, jak linja DE do O, albo sześcián z DF do sześciánu z BA, czyli jak opór podstawy DF do oporu podstawy BA, czego właśnie szukaliśmy.

S a g r e d o: Długie to dowodzenie, panie Salviati i nadęz trudne do zatrzymania w pamięci, gdy się je raz słyszy; czyby przeto Waszmość nie zechciał go powtórzyć.

S a l v i a t i: Jestem na usługi Waszmości, ale może lepiej będzie podać Wam krótsze; tylko trzeba będzie zrobić inny rysunek.

S a g r e d o: Wdzięcznym będę Waszmości, gdy co dopiero podane udzieli mi na piśmie, abym je mógł rozpatrzyć w swobodnej chwili.

$$1) \quad I = \frac{AC^2}{DE} \quad \text{P. T.}$$

$$2) \quad M = \frac{I^2}{DE}, \quad O = \frac{I^2}{DE^2}, \quad DE : I = M : O. \quad \text{P. T.}$$

Salviati: Nie omieszkam służyć. A teraz weźmy (tab. II, rys. 26) walec A z podstawą o średnicy CD, największy, jaki może się utrzymać, do którego szukamy podobnego jeszcze większego, długości E, a takiej podstawy, aby leżał na granicy utrzymywania się pod własnym ciężarem. Weźmy najprzód pod uwagę walec długości E o podstawie KL, podobny do walca A, i niech będzie do linii DC i KL trzecia proporcjonalna MN¹⁾, średnica podstawy walca X, którego długość jest równa E. Twierdzę że X jest szukany walcem. Bo opór DC ma się do oporu KL, jak kwadrat z DC do kwadratu z KL, czyli jak kwadrat z KL do kwadratu z MN, czyli jak walec E do walca X, czyli jak moment E do momentu X; ale opór KL ma się do MN, jak sześciąt z KL do sześciannu z MN, czyli jak sześciąt z DC do sześciannu z KL, czyli jak walec A do walca E, czyli jak moment A do momentu E; co odwracając mamy, że opór DC ma się do oporu MN, jak moment A do momentu X, a więc walec X ma ten sam układ momentu i oporu co i walec A.

Ale pragnę uogólnić to zadanie i twierdzenie będzie takie:

Dany jest walec AC z jakimkolwiek stosunkiem momentu do oporu i dana jest pewna długość DE; znaleźć grubość walca, o długości DE i tym samym stosunku momentu do oporu, jaki ma walec AC.

Weźmy napowrót poprzedni rysunek (tab. II, rys. 25) i tak samo postępując powiemy. Ponieważ moment walca FE ma się do momentu części DE, jak kwadrat z ED do kwadratu z FG, czyli jak linja DE do l, a moment walca DG do momentu walca AC, jak kwadrat z FD do kwadratu z AB, czyli jak kwadrat z DE do kwadratu z l, czyli jak kwadrat z l do kwadratu z M, czyli jak linja l do O; a więc *ex aequali* moment walca FE do momentu walca AC ma ten sam stosunek, co linja DE do O, czyli jak sześciąt z DE do sześciannu z l, czyli jak sześciąt z FD do sześciannu z AB, czyli jak opór podstawy FD do oporu podstawy AB, co właśnie być powinno.

Widzimy stąd, że ani sztuka ani natura nie mogą swych tworców nieskończenie powiększać, tak że byłoby niemożliwem budowanie olbrzymich okrętów, pałaców albo świątyń, których wiosła, reje, belkowania, łańcuchy żelazne i inne części mogłyby utrzymywać własne ciężary; jak z drugiej strony natura nie może wytwarzać

¹⁾ $MN = \frac{KL^2}{CD}$

nadmiernych drzew, gdyż ich gałęzie łamałyby się pod własnym ciężarem; nie mogą także kości ludzkie, końskie lub innych zwierząt być zbyt wielkie i odpowiadać swemu celowi, gdyż te zwierzęta wtedy tylko dochodziłby mogły do takich wymiarów, gdyby materia była mocniejszą niż bywa zwykle; musiałyby bowiem być przewidziane znaczne zgrubienia kości, żeby nie nastąpiło odkształcenie, jak o tem zostałem ostrzeżony przez mego najprzenikliwszego poeę, opisującego w ten sposób olbrzyma:

Nie mogę zdać sobie sprawy, jak był wielki,

Tak bezmiernie grube było w nim wszystko.

Dla objaśnienia rysuję Wam kość (tab. II, rys. 27), której zwykła długość jest trzy razy większa od grubości, i która musiałaby być jeszcze więcej zgrubioną, aby mogła tak służyć wielkiemu zwierzęciu, jak mała kość — małemu. Widzicie na rysunku, jak nieproporcjonalnie przedstawia się wielka kość. Ktoby przeto chciał utrzymać olbrzyma we właściwej proporcji, musiałby albo znaleźć materję znacznie mocniejszą i wytrzymalszą dla utworzenia jego kości, albo rzec się wytrzymałości i wytworzyć olbrzyma słabszego od człowieka zwykłej miary; przy nadmiernej wielkości byłby zgnieciony i rozpadalby się pod własnym ciężarem. Widzimy naodwrot, że przy zmniejszaniu ciała, siły nie zmniejszają się w tym samym stosunku, a przeciwnie zdarza się jakby względny wzrost sił. Dlatego myślę, że mały pies może udźwignąć na grzbiecie dwóch lub trzech innych tej samej wielkości, podczas gdy koń unieść może zaledwie jednego konia.

Simplicio: A jak się rzecz ma z niezmiernemi masami u ryb? Wieloryb jest przecie dziesięć razy większy od słonia, a jednak może się utrzymać.

Salviati: Wskutek uwagi pańskiej, panie Simplicio, spostrzegam, że nie uprzedziłem Was o jednym jeszcze warunku, który mógłby zapewnić istnienie olbrzymów i olbrzymich zwierząt na równi z małemi stworzeniami; dla utrzymywania własnego ciężaru nie potrzebuje, jak mówiono, materia być mocniejszą; możnaby, utrzymując wszystkie proporcje, zmniejszyć ciężar kości i mięsa a także innych części opierających się o kości; tego sposobu użyła natura tworząc ryby, których kości i części mięsne nie tylko są bardzo lekkie, ale prawie nie mają żadnego ciężaru.

Simplicio: Widzę dobrze, panie Salviati, dokąd pan zmierza; chcecie powiedzieć, że ponieważ ryby żyją w wodzie, a woda swoją gęstością, albo, jak mówią inni, swoim ciężarem, zmniejsza

ciężar ciał w niej zanurzonych, to materja ryb nie ma żadnego ciężaru i może się bez obciążania kości utrzymywać w wodzie; ale to nie wystarcza, bo, gdyby nawet kości nie były obciążone, to przecie same są ciężkie. A czyż żebro wieloryba, wielkie jak belka, nie jest dość ciężkie, aby zeszło do dna w wodzie? taka zaś wielka masa nie miałaby utrzymywać własnego ciężaru.

Salviati: Ostro oponujecie i aby odpowiedzieć na Wasz zarzut, proszę powiedzieć mi, czy widzieliście kiedy rybę pozostającą nieruchomo w wodzie, nie spływającą do dna i nie podnoszącą się do powierzchni i nie usiłującą pływać?

Simplicio: Spostrzeżenie to jak najistotniejsze.

Salviati: Jeżeli więc ryby pozostawać mogą w wodzie zupełnie nieruchome, to jasnem jest, że ich ciężar gatunkowy jest równy ciężarowi wody, a skoro w ich ciele niektóre części są od wody cięższe, to koniecznie inne części muszą mieć mniejszy ciężar gatunkowy, aby równowaga mogła być zachowana. Jeżeli więc kości są cięższe, to mięso lub inne części muszą być lżejsze i te ostatnie przeciwstawiają się ciężkości kości swoją lekkością; tak więc u zwierząt wodnych spotykamy rzecz wprost przeciwną tej, jaką widzimy u zwierząt ziemnych, których kości muszą unosić swój własny ciężar i otaczające je mięso, podczas gdy u ryb mięso unosi własny ciężar i ciężar ości. Tym sposobem znika zarzut, jakoby w wodzie mogły istnieć olbrzymie zwierzęta a nie na ziemi t. j. w powietrzu.

Simplicio: Jestem zupełnie zaspokojony i zauważę jeszcze, że te, które nazywamy zwierzętami ziemnymi, byłoby racjonalniej mianować powietrznymi, gdyż one żyją w powietrzu, powietrzem są otoczone i niem oddychają.

Sagredo: Podzielam zdanie p. *Simplicia*, jego wątpliwość i jej rozwiązanie. Dodam nadto, że, gdy które z olbrzymich zwierząt wodnych wyciągnięte zostanie na ląd, to niedługo będzie się mogło na nim utrzymać, gdyż wiązania kości się rozpręgna i ciało się rozleci.

Salviati: Ja również sklaniam się do tego poglądu i nie jestem daleki od mniemania, że toż samo miałoby miejsce z bardzo wielkim okrętem, który pływając po morzu utrzymuje się pod ciężarem własnym oraz towarów i uzbrojenia, a na lądzie się rozpada otoczony powietrzem. Ale wróćmy do naszego przedmiotu:

Dany jest ciężar graniastoslupa lub walca oraz ciężar maximum, jaki może unosić, znaleźć największą długość, przy której następuje złamanie.

Niech będzie (tab. II, rys. 28) graniastosłup AC i D ciężar maximum, który zawieszony w C może być utrzymywany przez graniastosłup, szukamy największej długości, przy której graniastosłup może pozostawać w całości. Utwórzmy stosunek, według którego tak się ma ciężar AC do sumy $AC + 2D$, jak długość CA do AH, dla których średnią proporcjonalną jest AG. Twierdząc, że AG jest szukaną długością; bo moment ciężący ciężaru D w C jest równy momentowi podwójnego ciężaru D, umieszczonego w pośrodku AC, gdzie także działa moment graniastosłupa AC; a więc moment oporu tego graniastosłupa w A równa się momentowi sumy ciężarów $AC + 2D$, działających w połowie AC. A ponieważ położyliśmy, że moment $AC + 2D$ do momentu AC ma się, jak HA do AC, między którymi AG jest średnią proporcjonalną; więc moment $AC + 2D$ ma się do momentu AC, jak kwadrat z GA do kwadratu z AC; ale moment cisnący graniastosłupa GA ma się do momentu AC, jak kwadrat GA do kwadratu z AC; a więc długość AG jest szukanem maximum, po za którym każde większe wydłużenie graniastosłupa wywołuje jego rozpadnięcie.

Dotąd rozważaliśmy momenty i opory graniastosłupów i walców, których jeden koniec był umocowany a drugi obciążony ciężarem, działającym sam jeden lub łącznie z ciężarem własnym bryły lub wreszcie wyłącznie z tym ostatnim. Teraz chciałbym pomówić o takichże graniastosłupach i walcach, podpartych na obu końcach lub w jednym punkcie między końcami. A najprzód twierdząc, że walec, obciążony tylko własnym ciężarem i podparty w środku lub na obu końcach, powinien, dla utrzymywania się w całości, być dwa razy dłuższy od walca opartego w jednym końcu, maximalnej długości. Jest to samo przez się oczywiste, bo jeżeli dany jest (tab. II, rys. 29) walec ABC i jego połowa AB jest największą długością walca, mogącego się utrzymywać, gdy jest podparty w swym końcu B, to tak samo utrzymywać się będzie, gdy cały walec spoczywa na podporze G, a połowa AB jest równoważoną przez połowę BC. I tak samo, jeżeli długość walca DEF jest taka, że jedna jego połowa może się utrzymywać, gdy jest utwierdzona swym końcem D a druga EF końcem F, to cały walec położony końcami D i F na podporach H i I łamać się będzie po przyłożeniu w E jakiegokolwiek siły lub ciężaru.

Subtelniejsze rozumowanie pozwala nam abstrahować ciężar własny takich brył i badać, czy ciężar działający w środku, który wystarcza, aby spowodować złamanie, nie wywołałby złamania, gdyby

został zawieszony nie w środku, ale w innym miejscu bliżej końca. Jeżeli np. złamać chcemy pręt, chwytając go za dwa końce i opierając o kolano, to czy siła potrzebna do złamania wystarczy także, gdy o kolano oprze się nie środek pręta ale inny punkt, położony bliżej jednego z końców.

Sagredo: Zdaje mi się, że Arystoteles poruszył to zadanie w swoich problematach mechanicznych.

Salviati: Problem Arystotelesa nie był ściśle taki. On badał przyczynę, dlaczego mniej siły potrzeba do złamania pręta, gdy się go chwytą za końce, a więc dalej od kolana, niż gdy jest ujmowany rękami w pobliżu kolana, i stąd wyprowadzał ogólne twierdzenie o długości ramion drąga. Nasze zadanie dołącza jeszcze inną kwestję, szukamy bowiem, czy na końcach pręta wystarczą też same siły, gdy kolano jest w środku lub bliżej którego z końców.

Sagredo: Na pierwszy rzut oka możnaby odpowiedzieć, że wystarczą, bo momenty obu ramion drąga pozostają niezmienione, podczas gdy jedno ramie się skraca, a drugie o tyleż wydłuża.

Salviati: Widzicie, jak łatwo można się omylić i ile potrzeba ostrożności i rozwagi, aby się uchronić od błędów. Pogląd Wasz, na pozór tak prawdopodobny, dlatego jest mylny, że gdy pewna siła, umieszczona w środku drąga wystarcza do jego złamania, to umieszczona bliżej końca siła cztery, dziesięć, sto i tysiąc razy większa może nie wystarczać. Rozpatrzmy tę kwestję wogóle oraz rozbierzemy poszczególne przypadki.

Niech będzie (tab. II, rys. 30) walec z drzewa AB, który ma być złamany w środku C i drugi takiż walec DE, do złamania w F zdala od środka. Ponieważ $AC = CB$, więc siła w A będzie równa sile w B. Ale im mniejsze będzie DF w stosunku AC, tem mniejszy jest moment w D w stosunku od momentu w A i zmniejsza się proporcjonalnie do stosunku DF do AC; trzeba więc moment w D powiększyć, aby przewyciężyć opór w F; ale odległość DF może się zmniejszać nieograniczenie względem AC, należy więc zwiększać nieskończenie siłę w D, aby mogła przewyciężyć opór w F. Przeciwnie, im odległość FE stawać się będzie większą od CB, zmniejszać trzeba tem więcej siłę E dla pokonania oporu w F. Ale odległość FE w stosunku do CB nie może być bezgranicznie zwiększana przez przeniesienie podpory F do końca D, a tylko co najwyżej podwojona; a więc siła w E, przewyciężająca opór w F, będzie zawsze większa od połowy siły działającej w B. Widzicie

przeto konieczność powiększania razem momentów obu sił w E i D dla pokonania oporu w F, tem większego, im więcej podpora F zbliża się do końca D.

Sagredo: Cóż powiecie na to, p. Simplicio? Czyż nie wypada, abyście przyznali, że geometria jest potężniejszym od innych narzędziem do zaostrenia umysłu i usposobienia go do doskonałego wywodu i wykładu? i czy nie miał wielkiej racji Platon, gdy żądał, aby jego uczniowie przedewszystkiem dobrze byli utwierdzeni w matematyce. Pojąłem przecie całkowicie prawo drąga, powiększanie i zmniejszanie się momentów sił i oporów, razem z długościami ramion, a jednak pobiłłem w tem zadaniu i to nie mało ale nieskończenie.

Simplicio: Istotnie zaczynam pojmować, że logika, jakkolwiek jest środkiem wielce pomocnym w dyalektyce, nie może pobudzać umysłu do wynalazków i do ścisłości geometrycznej.

Sagredo: Mnie się zdaje, że logika pozwala nam rozpoznać, czy badania i wywody przeprowadzone zostały prawidłowo, ale, żeby nam dawała ich przebieg i konkluzję, tego nie sędzę. Ale byłoby lepiej gdyby nam p. Salviati pokazał, w jakim stosunku winny się powiększać momenty sił, aby pokonywały opór tego samego drewna, stosownie do różnych miejsc jego złamania.

Salviati: Stosunek szukany znajdujemy w następujący sposób:

Jeżeli na długości walca naznaczymy dwa punkty, w których ma nastąpić złamanie, to opory w tych punktach mają się do siebie, jak prostokąty z odwrotnie wziętych odległości tych punktów.

Niech będą (tab. II, rys. 31) A i B najmniejsze siły wystarczające do złamania w C, a E i F także najmniejsze do złamania w D. Twierdzę, że siły A, B, mają się do sił E i F, jak prostokąt ADB do prostokąta ACB. Bo siły A, B, mają się do sił E, F, jak stosunek złożony sił A, B, do siły B, siły B do F, i siły F do F, E. Ale siły A, B, mają się do siły B, jak długość BA do AC, a siła B ma się do siły F, jak linia DB do BC, a siła F ma się do sił F, E, jak DA do AB, a więc siły A, B, są do sił E i F w stosunku złożonym z trzech, a mianowicie, jak prosta BA do AC, jak DB do BC i jak DA do AB; ale z dwóch stosunków DA do AB i AB do AC składa się stosunek DA do AC; a więc siły A, B są do sił E i F w stosunku złożonym z dwóch: jednego DA do AC i drugiego DB do BC; ale prostokąt ADB jest do prostokąta ACB w stosunku złożonym z tych samych DA do AC i DB do BC; a więc siły A, B mają się do sił E, F, jak prostokąt ADB do pro-

stokata ACB, to jest jak opór na złamanie w C do oporu w D, co było do dowodzenia.

Jako wynik tego twierdzenia rozwiązać możemy dość ciekawe zadanie następujące.

Dany jest ciężar maximalny¹⁾ działający na środek walca lub graniastosłupa, gdzie opór jest najmniejszy i dany jest ciężar od poprzedniego większy, znaleźć na walcu punkt, w którym umieszczony ten ciężar większy działać będzie jako maximalny.

Niech się ma ciężar większy do maximalnego, działającego w środku walca (tab. II, rys. 32) AB, tak jak linja E do F, chodzi o znalezienie punktu na walcu, w którym dany ciężar działać będzie jako maximalny. Niech będzie między dwiema E i F średnia proporcjonalna G i niech się ma E do G, jak AD do S, które jest mniejsze od AD. Na AD, jako średnicy, zakresłmy półkole AHD, poprowadźmy AH równe S; połączmy punkty H i D i odetnijmy RD = HD. Twierdzę, że R będzie żądanym punktem, w którym umieszczony ciężar większy od maximalnego, działającego w środku walca D, stanie się maximalnym. Na długości BA postawmy półkole ANB, wyprowadźmy prostopadłą RN i poprowadźmy ND. A ponieważ dwa kwadraty z NR i RD są równe kwadratowi z ND, albo z AD albo dwom kwadratam z AH i HD, a kwadrat z HD równy kwadratowi z RD, więc kwadrat z NR, czyli prostokąt ARB będzie równy kwadratowi z AH, czyli kwadratowi z S; ale kwadrat z S ma się do kwadratu z AD jak F do E²⁾, czyli jak ciężar maximalny w D do danego ciężaru większego, a więc ten większy, działając w R, będzie maximalnym, czego mieliśmy dowieść.

S a g r e d o: Rozumiem doskonale i znajduję, że graniastosłup AB tem będzie mocniejszy i wytrzymalszy na ciśnienie, im to ciśnienie więcej oddalać się będzie od środka graniastosłupa; bardzo ciężkie i długie belki obciążane być mogą w pobliżu swych końców znacznymi ciężarami, zmniejszając przez to swój własny ciężar, co przy belkowaniu wielkich przelotów jest bardzo dogodne i niemniej potrzebne. I pożądanem byłoby określić kształt ciała, któreby we wszystkich swych częściach było jednakowo odporne, tak aby równie łatwo w środku jak i w każdym innym punkcie jednym i tym samym ciężarem mogło być złamane.

¹⁾ T. j. wywołujący złamanie.

P. T.

²⁾ Ponieważ $\frac{S}{AD} = \frac{F}{G} = \frac{G}{E}$, więc $\frac{S^2}{AD^2} = \frac{F}{G} \times \frac{G}{E} = \frac{F}{E}$. P. T.

Salviati: Miałem zamiar właśnie przedstawić Wam wywód doniosłego znaczenia w tym przedmiocie. Rysuję (tab. II, rys. 33) dla lepszego zrozumienia. DB jest graniastosłup, którego opór na złamanie w AD, przy sile działającej w B, jest tem mniejszy od oporu w CI, ile długość BC jest mniejsza od BA, jak to co dopiero dowiedziono; wyobraźmy sobie teraz, że ten graniastosłup zostaje przecięty diagonalnie według FB, tak że jego dwiema przeciwległymi podstawami będą dwa trójkąty, z których jeden ku nam zwrócony jest FAB. Taki graniastosłup posiada względem poprzedniego odwrotną własność, bo tem mniejszy stawia opór na złamanie w C aniżeli w A, przy sile działającej w B, im długość CB jest mniejsza od BA, co łatwo dowieść: bo ponieważ przecięcie CNO jest równoległe do AFD, to tak się ma linja FA do NC w trójkącie AFB, jak linja AB do BC, a że przyjmujemy punkty A i C za podpory dwóch drągów, których ramiona są BA, AF, BC, CN, to te będą do siebie podobne i taki będzie moment siły B działającej na końcu ramienia BA, dla pokonania oporu na końcu ramienia AF, jaki jest moment siły B, na ramieniu BC, pokonywającej opór na końcu ramienia CN: ale opór, przy podporze w C, działający na ramię CN, przeciw sile B, jest mniejszy od oporu w A i to o tyle, o ile prostokąt CO jest mniejszy od prostokąta AD, czyli o ile linja CN jest mniejsza od AF, albo CB od BA; jest więc opór na złamanie części OCB w C tem mniejszy od oporu całego DAO na złamanie w A, im długość CB jest mniejsza od AB. Mając więc belkę albo graniastosłup DB, skoro odejmiemy jej połowę przekrojem diagonalnym, zostanie klin albo graniastosłup trójkątny FBA, i te dwie bryły mają własności wprost przeciwne, t. j. jedna tem większy stawia opór, im więcej się ją skraca, a druga w miarę skracania traci swoją moc. Skoro to jest dowiedzione, to musi się koniecznie znaleźć takie przecięcie, przy którym, po odjęciu części zbędnej, pozostanie bryła takiego kształtu, że we wszystkich swych częściach stawiać będzie jednaki opór.

Simplicio: Jest to konieczne, bo jeżeli przechodzimy od większego do mniejszego, to musimy także spotkać równe.

Sagredo: Trzeba tylko znaleźć kierownicę, po której ma być prowadzoną piła, aby zrobić taki właśnie przekrój.

Simplicio: Sądzę, że to będzie łatwem, bo jeżeli odejmujemy ściśle połowę, przecinając po przekątnej i bryła jaka zostaje, ma własność odwrotną niż ta, jaką miał cały graniastosłup, tak że we wszystkich miejscach, w których jedna bryła nabywała wytrzyma-

łości, to druga tyleż jej traci, — to zdaje mi się, że, trzymając się drogi pośredniej, to jest odejmując tylko połowę tej połowy, czyli czwartą część całości, pozostanie nam bryła, nie zyskująca i nie tracąca wytrzymałości we wszystkich tych miejscach, w których straty jednej i zyski drugiej były stale równe.

Salviali: Nie trafiliście, panie Simplicio, i jak Wam pokażę zobaczycie, że to co może być odjęte od graniastosłupa, bez osłabienia go, nie jest jego czwartą częścią, lecz trzecią. Pozostaje teraz (jak to zaznaczył p. Sagredo) znaleźć po jakiej linii ma przechodzić piła a tą linią, jak dowiodę winna być parabola. Wprzód jednak dowiodę pewnej Lemmy, a mianowicie:

Jeżeli dwie wagi, czyli dwa dragi, są tak podparte, że ramiona, na które działają siły, mają się do siebie jak kwadraty z ramion na które działają opory, które to opory mają się do siebie jak ich ramiona, to siły działające są sobie równe. Niech będą (tab. II. rys. 34) dwa dragi AB, CD, podzielone swemi podporami E, F, w ten sposób, że ramiona EB i FD mają się do siebie, jak kwadraty z ramion EA i FC. Twierdzę, że siły, które w B i D przeciwważą opory w A i C są sobie równe. Niech będzie EG średnia proporcjonalna między EB i FD: ma się więc BE do EG, jak GE do FD i jak AE do CF i taki jest według założenia stosunek oporów, działających w A i C. A ponieważ EG ma się do FD, jak AE do CF, więc będzie także po przestawieniu GE do EA, jak DF do FC; a ponieważ (skoro dragi DC i GA są w punktach F i E podzielone proporcjonalnie), gdyby siłę, pokonywającą w D opór działający w C, przenieść do G, to tam pokonywałaby ten sam opór, z C przeniesiony do A; ale z założenia opór w A ma się do oporu w C, jak AE do CF, albo jak BE do EG, a więc siła G, albo, co na jedno wychodzi, siła D przeniesiona do B, zrównoważy opór w A. I tego właśnie miałem dowieść.

Przyjawszy to: niech będzie (tab. II, rys. 35) na ścianie FB graniastosłupa DB narysowana linja paraboli FNB, z wierzchołkiem w B, według której przecięty jest graniastosłup, tak że zostaje bryła o podstawie AD, zawarta między prostokątem AG, linią prostą BG i powierzchnią DGBF, zakrzywioną według krzywizny linii parabolicznej FNB. Twierdzę, że ta bryła jest wszędzie jednakowo wytrzymałą. Przetnijmy ją płaszczyzną CO, równoległą do AD i wyobraźmy sobie dwa oddzielne dragi, oparte na podporach A i C, jeden z ramionami BA i AF a drugi BC i CN. W paraboli FBA, tak się ma AB do BC, jak kwadrat z FA do kwadratu z CN,

i oczywiście ramię BA jednego drąga do ramienia BC drugiego, jak kwadrat z AF do kwadrata z CN. Że zaś opór równoważony drągiem BA ma się do oporu równoważonego drągiem BC, jak prostokąt DA do prostokąta OC, czyli jak linja AF do NC, będące drugimi ramionami drągów, to oczywiście, na mocy poprzedniej lemmy, taż sama siła, która przeniesiona do BG równoważy opór DA, równoważyć będzie także opór CO. Toż samo dowieść można dla przekroju bryły w jakimkolwiek innem miejscu: a więc taka bryła paraboliczna jest wszędzie jednakowo wytrzymała. Że zaś, przecinając graniastosłup według paraboli FNB, odejmujemy trzecią część, to jest oczywiste, bo pól paraboli FNBA i prostokąt FB są podstawami dwóch brył, zawartych między dwiema płaszczyznami równoległymi, t.j. prostokątami FB i DG, bryły te więc pozostają do siebie w stosunku swoich podstaw; ale prostokąt FB jest półtora raza wziętą połową paraboli FNBA, więc przecięcie graniastosłupa według linii parabolicznej odejmuje jego trzecią część. Widzimy więc, jak zmniejszając ciężar przeszło o 33⁰/₁₀₀, budować można belkowania bez żadnego uszczerbku dla ich mocy, co przy wielkich okrętach, zwłaszcza dla podtrzymywania pokładu, może przynieść niemały pożytek, gdyż lekkość ma wielkie znaczenie w tych budowlach.

Sagredo: Korzyści są tak wielkie, że nie można ich tu wszystkich wymieniać. Ale ja, nie zatrzymując się na nich, wolałbym się dowiedzieć, czy istotnie zmniejszenie nastąpi we wskazanym stosunku. Że przecięcie według przekątnej odejmuje połowę ciężaru, to rozumiem dobrze, ale że przecięcie według paraboli odejmuje trzecią część graniastosłupa, mogę to zawierzyć p. *Salviati*, zawsze prawdopodobnemu, lecz wolałbym nauczyć się niż ufać.

Salviati: Chcecie więc dowodu na to, że przewyżka graniastosłupa ponad to, co przed chwilą nazwaliśmy bryłą paraboliczną, wynosi jego trzecią część. Już to Wam raz przedstawiałem, spróbuję więc przypomnieć sobie ten wywód, przy którym posługiwałem się pewną lemmą Archimedesza z jego księgi o spiralnych, a mianowicie: jeżeli mamy ilekolwiek linii takich, że różnice między niemi są sobie równe i równe najkrótszej z tych linii i mamy także tyleż linii równych najdłuższej z tamtych, to kwadraty z tych ostatnich linii wynosić będą mniej niż trzy razy wzięte kwadraty z linii między sobą różnych, a znów więcej niż trzy razy wzięte kwadraty z tychże linii, po odjęciu od nich kwadratu z linii największej. To założwszy, niech będzie (tab. II, rys. 36) prostokąt

ACBP z wpisaną weń linią paraboliczną AB; mamy dowieść, że trójkąt mieszany BAP, którego boki są BP, PA, a podstawą linia paraboliczna BA, stanowi trzecią część całego prostokąta CP. Gdyby tak nie było, to musiałby być albo większy od tej trzeciej części, albo mniejszy. Przypuśćmy, że jest mniejszy i to o powierzchnię X. Dzieląc wciąż prostokąt CP, na części równe, liniami równoległymi do boków BP, CA, dojdziemy w końcu do takich części, że jedna z nich będzie mniejszą od X. Niech jedną z tych części będzie prostokąt OB, a przez punkty, w których inne równoległe przecinają linią paraboliczną, poprowadźmy równoległe do AP i weźmy pod uwagę figurę, opisaną na naszym trójkącie mieszanym, złożoną z prostokątów BO, IN, HM, FL, EK, GA, których suma będzie mniejszą od trzeciej części prostokąta CP, bo przewyżka tej sumy nad mieszanym trójkątem jest mniejsza od BO, a BO mniejsze od X.

Sagredo: Proszę nie tak prędko, bo nie rozumiem, dlaczego przewyżka figury, opisaney, nad trójkątem mieszanym ma być mniejszą od prostokąta BO.

Salvati: Czyż prostokąt BO nie jest równy sumie małych prostokątów, przez które przechodzi nasza parabola, mianowicie BI, IH, HF, FE, EG, GA, których część tylko zostaje poza trójkątem mieszanym, a czyż prostokąt BO nie jest z założenia mniejszy od X? Skoro więc trójkąt razem z X miał być równy trzeciej części prostokąta CP, to figura opisana, dodająca trójkątowi mniej niż X, pozostanie zawsze mniejszą od trzeciej części tegoż prostokąta CP; ale to jest niemożliwe, bo ta figura jest większą od tej trzeciej części; a więc i nasz trójkąt mieszany nie może być mniejszy od trzeciej części prostokąta.

Sagredo: Mam więc rozwiązanie mojej wątpliwości. Pozostaje jeszcze dowieść, że figura opisana jest większą od trzeciej części prostokąta CP, z czem jak sądzę więcej będziemy mieli roboty.

Salvati: Ależ to nie jest tak wielce trudne! Gdyż w paraboli kwadrat z linii DE ma się do kwadratu z ZG, jak linia DA do AZ, albo jak prostokąt KE do prostokąta AG (bo wysokości AK i KL są równe), a więc taki jest stosunek kwadratu z ED do kwadratu z ZG, czyli kwadratu z LA do kwadratu z AK, jak prostokąta KE do prostokąta KZ. W ten sam sposób dowiedziemy, że prostokąty LF, MH, NI, OB, mają się do siebie jak kwadraty z linii MA, NA, OA, PA. Weźmy teraz pod uwagę, że figura opisana złożona jest z części, które mają się do siebie jak kwadraty z linii,

większych jedna od drugiej o długość równą najmniejszej z nich, a znów prostokąt CP złożony jest z części, z których każda jest równa największej z poprzednich, mianowicie prostokątowi OB. Więc, według lemmy Archimedesesa, figura opisana jest większa od trzeciej części prostokąta CP; a, że poprzednio była mniejsza, więc to jest niemożliwe; zatem trójkąt mieszany nie jest mniejszy od trzeciej części prostokąta CP. Twierdzą także, że nie jest większy, bo, gdyby tak było, to byłoby X równe przewyżce trójkąta ponad trzecią część prostokąta CP, a po dokonaniu nowego dzielenia prostokąta na prostokąty wciąż równe, doszlibyśmy do takich, z których każdy byłby mniejszy od powierzchni X. Skoro więc prostokąt BO jest mniejszy od X i opisana taka jak wyżej figura, to otrzymamy w mieszanym trójkącie figurę wpisaną, złożoną z prostokątów VO, TN, SM, RL, QK, która także nie będzie mniejsza od trzeciej części wielkiego prostokąta CP. Bo trójkąt mieszany przewyższa figurę wpisaną o mniej, niż ta figura przewyższa trzecią część prostokąta CP; gdyż przewyżka trójkąta ponad trzecią część prostokąta CP jest równa powierzchni X, która jest mniejsza od prostokąta BO, a ten znów jest znacznie mniejszy od przewyżki ponad figurę wpisaną; bo temu prostokątowi są równe razem wzięte małe prostokąty AG, GE, EF, FH, HI, IB, tych zaś tylko mniejsze połowy stanowią przewyżkę trójkąta ponad figurę wpisaną. A ponieważ trójkąt przewyższa trzecią część prostokąta CP o dość wiele (mianowicie o powierzchnię X), a figurę wpisaną nie o tyle, to byłaby ta figura jeszcze większą od trzeciej części prostokąta CP; ale według powyższej lemmy jest ona mniejsza, bo prostokąt CP, jako zbiór wszystkich największych prostokątów, ma się do prostokątów tworzących figurę wpisaną, jak zbiór wszystkich kwadratów z linii równych największej, do kwadratów z linii, których różnice są równe, po odjęciu kwadratu z największej linii; zbiór zaś (podobnie jak kwadratów) największych prostokątów (t.j. prostokąt CP) jest większy od trzy razy wziętego zbioru prostokątów, które jeden drugiego przewyższają i tworzą figurę wpisaną, po odjęciu od tego ostatniego zbioru największego prostokąta. A zatem trójkąt mieszany nie jest ani większy ani mniejszy od trzeciej części prostokąta CP, a więc jest jej równy.

S a g r e d o: Piękne to i pomysłowe dowodzenie, tem więcej że daje także kwadraturę paraboli, wykazując, że jest równa czterem trzecim trójkąta wpisanego, co dowodzi Archimedes dwoma różnemi lecz jednakowo cennemi szeregami twierdzeń. Niedawno ta-

kże Luca Valerio, nowy Archimedes naszych czasów, podał tego nowy wywód w dziele jakie napisał o środku ciężkości brył.

Salviati: Rzeczywiście, jest to dzieło nie stojące niżej od pism najslawniejszych geometrów terażniejszości i przeszłości; a gdy je zobaczył nasz akademik, to zaprzestał rozpoczętych badań nad tym przedmiotem, bo wszystko wydało mu się wybornie doowiedzionem i rozwiązaniem przez tegoż pana Valerio.

Sagredo: O tem wszystkiem byłem zawiadomiony przez naszego akademika i prosiłem go, aby mi pozwolił zapoznać się z dokonaniami przezeń pracami w tym przedmiocie, ale bezskutecznie.

Salviati: Posiadam je w odpisie i pokażę Waszmości, abyście mieli przyjemność poznania różnorodności metod, które obu autorów doprowadziły do jednakich wyników i dowodzeń; niektóre wszakże ich wnioski mają odmienne znaczenie, chociaż w istocie są jednakowo prawdziwe.

Sagredo: Pragnąłbym bardzo je poznać i kiedy wrócicie na nasze zwykłe zebrania, zechciejcie łaskawie przynieść je ze sobą. Ale tymczasem, ponieważ parabolicznie obciążony graniastosłup może być potrzebny do wielu urządzeń mechanicznych, byłoby dobrze, aby rzemieślnicy mieli jakie proste prawidło kreślenia paraboli na ścianie graniastosłupa.

Salviati: Linje te kreślić można różnemi sposobami, z których podam Wam dwa najprostsze. Jeden z tych jest istotnie zadziwiający, bo z jego pomocą, prędzej niż ktoś nakreśli cyrklem cztery lub sześć okręgów kół, mogę nakreślić dwadzieścia lub czterdzieści parabol, niemniej regularnych i równych jak koła. Mam kulę brązową, jak najregularniej obtoczoną, nie większą od orzecha; rzucam ją na zwierciadło metalowe, nie leżące poziomo ale trochę nachylone, tak że kula w swym biegu lekko ciśnie na zwierciadło, to opisuje ona jak najregularniejszą i najczystsza linję paraboliczną, mniej lub więcej szeroką, stosownie do nachylenia zwierciadła. Skąd mamy jasne i oczywiste doświadczenie, że ruch pocisków odbywa się po linjach parabolicznych; zjawisko po raz pierwszy zaobserwowane przez naszego przyjaciela, którego dowód podany w jego piśmie o ruchu, zobaczymy na następnem naszym zebraniu. Kule, mającą w ten sposób opisywać parabolę, należy trochę ręką ogrzać i zwilżyć, aby na zwierciadle zostawiała ślad wyraźny. Drugi sposób kreślenia na graniastosłupie linji, o którą nam chodzi, jest następujący. U góry ściany wbija się dwa gwoździe w jednakiej wysokości, w odległości jeden od drugiego dwa razy

większej niż szerokość prostokąta, w który chcemy wpisać połowę paraboli, a od tych gwoździ zwiesza się cienki łańcuszek, tak długi, aby jego spód był odległy od poziomu gwoździ na długość tegoż prostokąta; ten łańcuszek wygina się w kształcie paraboli¹⁾, tak że gdy się ją na ścianie wypunktuje i nakreśli, otrzymuje się zupełną parabolę: pion w pośrodku dzieli ją na dwie części. Przeniesienie tej linii na przeciwległe ściany graniastosłupa nie przedstawia żadnej trudności, każdy przeciętny rzemieślnik może to zrobić. Można także za pomocą linii geometrycznych, nakreślonych na cyrkułu naszego przyjaciela wypunktować wprost tę linię na ścianie graniastosłupa.

Rozważaliśmy dotąd wiele rzeczy odnoszących się do wytrzymałości ciał na złamanie, przyjmując jako znaną wytrzymałość na rozzerwanie i tak mogliśmy konsekwentnie postępować dalej, wciąż dochodząc do coraz to nowych wniosków i ich wywodów, których jest nieskończenie wiele w naturze. Na zakończenie dzisiejszych rozpraw pragnę jeszcze rozważyć opór ciał wydrążonych, którymi natura się posługuje w tysiącu przypadków; bo bez powiększenia ciężaru moc ich znacznie wzrasta, jak to widzimy na kościach ptaków i na różnych rurach, które są lekkie a jednak wytrzymałe na wygięcie i złamanie: bo żdźbło słomy utrzymujące kłos, cięższy od całej łodygi, gdyby było zrobione z tej samej materji ale pełne, byłoby nierównie mniej wytrzymałe na wygięcie i złamanie. To też zaobserwowano sztucznie i badaniami stwierdzono, że pusta laska, albo rura drewniana lub metalowa, jest znacznie mocniejszą, niż gdyby przy równym ciężarze i długości była pełna, przyczem musiałaby być cieńszą i delikatniejszą; doprowadziło to do robienia lanc wewnątrz pustych, dla uczynienia ich mocniejszymi a zarazem lżejszymi. Dowiedzimy więc, że:

Opory dwóch walców równej masy i długości, z których jeden jest pusty a drugi pełny, mają się do siebie jak ich średnice.

Niech będzie (tab. II, rys. 37) laska albo walec pusty AE i walec pełny IN równego ciężaru i jednakowo długi. Twierdzę, że opór na złamanie walca AE ma się do takiegoż oporu walca pełnego IN , jak średnica AB do średnicy IL . Ponieważ oba walce są równej masy i długości, przeto koło IL , będące podstawą walca pełnego, jest równe obręczce AB , podstawie walca AE (nazywam obręczką powierzchnię jaka zostaje po odjęciu koła mniejszego od spółśro-

¹⁾ W rzeczywistości łańcuszek układa się według linii łańcuchowej.

kowego większego) a więc ich opory na rozerwanie są równe. Ale przy łamaniu, w walcu IN, jednym ramieniem draga będzie długość LN, przy podporze w punkcie L a drugim ramieniem przeciwległym średnica IL; w walcu zaś pustym, pierwszym ramieniem będzie BE, równe LN, a drugim, po za punktem podpory B, średnica AB; a więc opór walca pustego będzie o tyle większy od oporu walca pełnego, o ile AB jest większe od IL, co było do dowodzenia. Rura więc nabywa tyle mocy nad walcem pełnym, jaki jest stosunek średnic, jeżeli jest z tegoż samego materiału, równego ciężaru i długości. Dobrze będzie rozważyć jeszcze inne przypadki różnie między jednakowo długimi rurami i walcami różnych ciężarów, albo rurami mniej lub więcej wydrążonemi. A najprzód podamy, jak, mając daną rurę, znaleźć można równy jej masą walec pełny.

Rozwiązanie jest bardzo łatwe. Bo niech będzie (tab. II, rys. 38) linja AB średnica rury, a CD średnica jej pustego wnętrza. Poprowadźmy w kole większem linję AE równą średnicy CD i połączmy punkt E z punktem B. Ponieważ w półkolu AEB kąt E jest prosty, więc koło o średnicy AB będzie równe dwom kołom o średnicach AE i EB; ale AE jest średnicą pustego wnętrza; a więc koło o średnicy EB będzie równe powierzchni obrączki ACBD; a więc walec pełny, którego podstawą będzie koło o średnicy EB będzie masą równy rurze, będąc jednakowo długim. Dowiódłszy tego, możemy łatwo znaleźć, jaki jest stosunek oporów walca i rury jakichkolwiek, ale jednakowo długich.

Niech będzie (tab. II, rys. 39) rura ABE i walec RSM jednakiej długości, znaleźć trzeba w jakim stosunku będą się miały do siebie ich opory. Według poprzedniego znajdziemy walec ILN, równy masą rurze i tak samo długi, a do dwóch linji IL i RS (średnic podstaw walców IN i RM) niech będzie czwarta proporcjonalna V¹⁾. Twierdząc że opór rury AE ma się do oporu walca RM, jak linja AB do V. Bo ponieważ rura AE jest jednakowej masy i długości z walcem IN, więc opór rury ma się do oporu walca, jak linja AB do IL; ale opór walca IN ma się do oporu walca RM, jak sześciąt z IL do sześciąt z RS, czyli jak linja IL do V; a więc *ex aequali* opór rury AE ma się do oporu walca RM, jak linja AB do V i to jest czego szukaliśmy.

¹⁾ $V = \frac{RS^2}{IL^2}$ czyli $V : RS = RS^2 : IL^2$

DZIEŃ TRZECI

O RUCHU MIEJSCOWYM

O bardzo starym przedmiocie przynosimy naukę zupełnie nową. Niema nic dawniejszego w naturze od ruchu, a pisma o nim filozofów są nieliczne i nie wystarczające. Znam liczne i godne uwagi jego objawy, dotąd nie zaobserwowane i nie dowiedzione. Niektóre mniej ważne opisywano, jak np. że ruch naturalny ciężaru spadającego jest stale przyspieszany. Ale jaki jest stosunek tego przyspieszenia, nie wskazano; nikt bowiem, o ile wiem, nie dowiódł, że drogi przebieżone w czasach równych przez ciało wychodzące ze spoczynku i spadające, mają się do siebie jak liczby nieparzyste, następujące po jedności. Zauważono, że ciała rzucone, czyli pociski, opisują jakąś krzywą, ale nikt nie zaznaczył, że to jest parabola. Że tak jest, oraz wiele innych rzeczy niemniej godnych uwagi, będzie przezemnie dowiedzione i co ważniejsza, udostępniona zostanie rozległa i nader ważna umiejętność, której ta praca nasza stanie się zawiązkiem, a której tajników nie zgłębiły umysły od mojego przezorniejsze.

Na trzy części dzieli się ta rozprawa. W pierwszej rozważamy ruch jednostajny. W drugiej opisujemy ruch jednostajnie przyspieszony. W trzeciej jest mowa o ruchu gwałtownym, czyli o pociskach.

O RUCHU JEDNOSTAJNYM

Ruchu jednostajnego, czyli jednakowego, jedno tylko mamy określenie, które wyrażam jak następuje.

Określenie

Pod równym albo jednostajnym rozumiem ruch taki, gdy w jakichkolwiek równych sobie odstępach czasu, ciała przebiegają drogi równe.

Ostrzeżenie

Do dawnego określenia (które poprostu ruch nazywa jednakowym, gdy w równych czasach przebiegane są równe drogi) dołączyliśmy przydawkę „w jakichkolwiek“, to znaczy we wszystkich równych odstępach czasu: gdyż zdarzyć się może, że w niektórych czasach równych drogi przebyte są równe, ale w mniejszych częściach tych czasów, chociaż równych sobie, drogi przebyte nie są równe. Z przytoczonego określenia wynikają następujące cztery axiomy.

Axiomat I

W tym samym ruchu jednostajnym droga przebiegana w czasie dłuższym jest dłuższa od przebieganej w czasie krótszym.

Axiomat II

W tym samym ruchu jednostajnym czas przebiegu po drodze dłuższej jest dłuższy od czasu przebiegu po drodze krótszej.

Axiomat III

W czasach równych przebiegana jest przy większej prędkości droga dłuższa niż przy mniejszej.

Axiomat IV

Prędkość, z jaką w pewnym czasie przebieganą jest droga dłuższa, jest większa od prędkości przebiegu w tymże czasie drogi krótszej.¹⁾

Twierdzenie I. Podanie I

Jeżeli ciało, poruszające się jednostajnie, przebiega dwie drogi z jednakową prędkością, to czasy przebiegu są proporcjonalne do dróg.

Niech bowiem ciało (tab. III, rys. 40) przebiega ruchem jednostajnym z jednakową prędkością drogi AB i BC i niech będzie DE czas potrzebny do przebycia AB, a EF — do przebycia BC. Twierdząc, że tak się ma droga AB do drogi BC, jak czas DE do czasu EF. Przedłużmy w obie strony linie dróg i czasów do G, H i I, K i podzielmy AG na dowolną liczbę dróg równych AB, i tak samo DI na taką liczbę czasów równych DE; z drugiej strony weźmy na CH dowolną liczbę dróg równych BC i taką liczbę czasów na FK równych EF. Będą więc droga BG i czas EI jednakimi, dowolnie wybranymi, wielokrotnościami drogi BA i czasu ED, i tak samo droga HB i czas KE takimiż wielokrotnościami drogi CB i czasu FE. A ponieważ DE jest czasem przebiegu po AB, to czas całkowity EI odnosi się do całej drogi BG, że zaś ruch jest jednostajny, to i w czasie EI będzie tyleż części równych DE, ile jest dróg BA w całkowitej drodze BG i tak samo znajdujemy, że KE jest czasem

¹⁾ Oznaczając przez: s i s' drogi, v i v' prędkości, t i t' czasy, wyrazić można te axiomy proporcjami: $s:s'=t:t'$, $t:t'=s:s'$, $s:s'=v:v'$, $v:v'=s:s'$, przyczem $s=vt$, $s'=v't'$.

przebiegu po HB. Wskutek zaś założenia jednostajności ruchu, gdyby GB było równe BH, to będzie także czas IE równy czasowi EK; gdyby zaś GB było większe lub mniejsze od BH, to także IE będzie większe lub mniejsze od EK. Z czterech przeto rozważanych wielkości: pierwsza AB, druga BC, trzecia DE, czwarta EF, mieszczą się pierwsza i trzecia, to jest droga AB i czas DE, jednakową liczbę razy w drodze GB i czasie IE, a dowiedziono, że te ostatnie są obie jednocześnie albo równe, albo większe, albo mniejsze od czasu EK i drogi BH, i toż samo odnosi się do wielkości drugiej i czwartej. Ma się więc wielkość pierwsza do drugiej, to jest droga AB do drogi BC, jak trzecia do czwartej, t. j. jak czas DE do czasu EF, co było do dowodzenia.

Twierdzenie II. Podanie II

Jeżeli ciało w równych czasach przebiega dwie drogi, to te drogi są proporcjonalne do prędkości. Jeżeli zaś drogi są proporcjonalne do prędkości, to czasy są równe.

Niech będą, na poprzednim rysunku, AB, BC, drogi przebieżone w czasach równych, a mianowicie AB z prędkością DE i BC z prędkością EF. Twierdzę, że droga AB ma się do drogi BC, jak prędkość DE do prędkości EF; jeżeli bowiem weźmiemy, jak poprzednio, po obu stronach dowolne wielokrotności dróg i prędkości, mianowicie GB i IE, złożone z części AB i DE i tak samo HB i KE, złożone z części BC i EF, to w ten sam sposób dojdziemy do wniosku, że wielokrotności GB i IE są albo równe, albo jednakowo większe lub mniejsze od wielokrotności BH i EK; a więc i podanie jest oczywiste.

Twierdzenie III. Podanie III

Przy nierównych prędkościach, a równych drogach, prędkości są odwrotnie proporcjonalne do czasów.

Niech będą (tab. III, rys. 41) prędkości nierówne: A większa i B mniejsza, przy których odbywa się ruch po tej samej drodze CD. Twierdzę, że czas przebiegu po CD z prędkością A, ma się do czasu takiegoż przebiegu z prędkością B, jak B do A. Niech będzie A do B jak CD do CE; więc na mocy poprzedniego twierdzenia czas przebiegu po CD z prędkością A jest równy czasowi przebiegu po CE z prędkością B; ale czasy przebiegu po CE i po CD z prędkością B mają się do siebie jak CE do CD; a więc czas przebiegu po CD z prędkością A ma się do czasu przebiegu po tejże

drodze CD z prędkością B, jak CE do CD, czyli jak prędkość B do prędkości A, co było do dowodzenia.

Twierdzenie IV. Podanie IV

Jeżeli dwa ciała w ruchu jednostajnym mają nierówne prędkości, to drogi przebieżone w czasach nierównych mają się do siebie w stosunku złożonym ze stosunku prędkości i stosunku czasów.¹⁾

Dwa ciała (tab. III, rys. 42) E i F są w ruchu jednostajnym i stosunek prędkości ciała E do prędkości ciała F jest jak, A do B; czas zaś przebiegu ciała E ma się do czasu przebiegu ciała F, jak C do D. Twierdząc, że droga przebieżona przez ciało E z prędkością A w czasie C, ma się do drogi przebieżonej przez ciało F z prędkością B w czasie D, w stosunku złożonym ze stosunku prędkości A do prędkości B i stosunku czasu C do czasu D. Niech będzie G droga przebieżona przez ciało E z prędkością A w czasie C i niech się ma prędkość A do prędkości B, jak G do I, a czas C do czasu D, jak I do L; wiadomo, że I jest to droga, jaką ciało F przebiega w tym samym czasie, jak ciało E drogę G, bo drogi G i I mają się do siebie, jak prędkości A i B; a ponieważ czas C ma się do czasu D jak I do L, to jeżeli I jest drogą, jaką przebiega ciało F w czasie C, będzie L drogą przebiegu ciała F w czasie D z prędkością B; stosunek zatem G do L składa się ze stosunku G do I i I do L, czyli ze stosunku prędkości A do prędkości B i czasu C do czasu D, jak to objawia podanie.

Twierdzenie V. Podanie V

Jeżeli dwa ciała poruszają się jednostajnie z nierównymi prędkościami i drogi jakie przebiegają są nierówne, to czasy przebiegu mają się do siebie jak stosunek złożony ze stosunku dróg i z odwrotnego stosunku prędkości.²⁾

Niech będą (tab. III, rys. 43) dwa ciała A i B i ich prędkości, mające się do siebie jak V do T, oraz drogi przebieżone jak S do R. Twierdząc, że stosunek czasów przebiegu ciał A i B jest równy stosunkowi złożonemu ze stosunku prędkości T do V i stosunku dróg S do R. Niech będzie C czas przebiegu ciała A i niech się ma prędkość T do prędkości V, jak czas C do czasu E. A ponie-

$$1) \frac{s}{s'} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{t}{t'} \quad \text{P. T.}$$

$$2) \frac{t}{t'} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{v'}{v} \quad \text{P. T.}$$

waż C jest to czas przebiegu ciała A z prędkością V po drodze S, to skoro tak się ma czas C do czasu T, jak prędkość T do prędkości V, więc E będzie czasem przebiegu ciała B po drodze S. Niech się ma po trzecie, droga S do drogi R, jak czas E do czasu G; więc G będzie czasem przebiegu ciała B po drodze R. A ponieważ stosunek C do G składa się ze stosunków C do E i E do G; stosunek zaś C do E jest równy odwrotnemu stosunkowi prędkości ciała A i B, czyli stosunkowi T do V; stosunek więc E do G jest równy stosunkowi dróg S do R; zatem twierdzenie jest dowiedzione.

Twierdzenie VI. Podanie VI

Jeżeli dwa ciała poruszają się jednostajnie, to stosunek ich prędkości jest równy stosunkowi złożonemu, ze stosunku dróg przebieżonych i odwrotnego stosunku czasów.¹⁾

Niech będą, jak na poprzednim rysunku, dwa ciała A i B, poruszające się ruchem jednostajnym: drogi przez nie przebiegane są w stosunku V do T, a czasy, jak S do R. Twierdzą, że prędkość ciała A ma się do prędkości ciała B, jak stosunek złożony ze stosunku drogi V do drogi T i czasu R do czasu S.

Niech C będzie ta prędkość, z jaką ciało A przebiega drogę V w czasie S i niech się ma droga V do drogi T, jak prędkość C do innej E; jeżeli E jest prędkością, z jaką ciało B przebiega drogę T w tym samym czasie S, jeżeli znów czas R ma się do czasu S, jak prędkość E do innej G; to G będzie prędkością, z jaką ciało B przebiega drogę T w czasie R. Mamy więc prędkość C, z jaką ciało A przebiega drogę V w czasie S i prędkość G, z jaką ciało B przebiega drogę T w czasie R, więc tak się ma C do G, jak stosunek złożony ze stosunku C do E i stosunku E do G; stosunek zaś C do E jest równy stosunkowi drogi V do drogi T, a stosunek E do G jest równy stosunkowi R do S; więc twierdzenie jest dowiedzione.

Salviati: To jest, co napisał nasz autor o ruchu jednostajnym. Przejdziemy teraz do subtelniejszego i nowego rozważania, dotyczącego ruchu naturalnie przyspieszonego, który się zwykle odbywa przy spadku ciał ważkich i oto tytuł i wstęp.

¹⁾ $\frac{v}{v'} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'}$

O RUCHU NATURALNIE PRZYSPIESZONYM

Dotąd mówiliśmy o ruchu jednostajnym, przechodzimy teraz do ruchu przyspieszonego. A najprzód winno być podane i objaśnione określenie tego naturalnego zjawiska. Jakkolwiek można dowolnie wyobrazić sobie jakikolwiek rodzaj ruchu i obserwować towarzyszące mu objawy (jak np. ci, którzy wyobrażali sobie helisy i konchoidy, jako krzywe powstające z pewnych ruchów, które w naturze nie mogą się zdarzać, a na zasadzie swych przypuszczeń wywodzili chwalebnie ich własności), to jednak postanowiliśmy rozważać te właśnie objawy, które zachodzą w naturze, przy swobodnym spadku ciał i pozwalają godzić określenie ruchu przyspieszonego z istotą tego ruchu w naturze. Po długich rozmyślaniach uznaliśmy taką drogę za najlepszą, z tego względu zwłaszcza, że to, co doświadczenie przedstawia zmysłom, odpowiada w zupełności wyjaśnionym zjawiskom. Wreszcie do badania ruchu naturalnie przyspieszonego doprowadziła nas, jakby ręką, uważna obserwacja nawyków i urządzeń natury, we wszystkich jej sprawach, przy których prowadzeniu stara się ona stosować najprostsze i najłatwiejsze środki; bo zdaje mi się, że nikt nie będzie utrzymywał, aby pływanie lub fruwanie, mogło być wykonywane prościej i łatwiej, niż temi środkami, których używają naturalnym instynktem ryby i ptaki. Jeżeli przytem zauważę, że kamień, wychodzący ze spoczynku i spadający ze znacznej wysokości, doznaje wciąż nowych przyrostów prędkości, to dla czegoż nie mam wierzyć że te przyrosty powstają w sposób najprostszy i dla każdego zrozumiały. Bo, badając ściśle, nie znajdziemy żadnego dodatku lub przyrostu, prostszego niż taki, który dochodzi wciąż jednakowo. Zrozumiemy to łatwo, rozpatrując bliskie pokrewieństwo pojęć czasu i ruchu: jak bowiem ruch jednostajny określa równość przestrzeni przebieżonych w równych czasach (bo nazwaliśmy jednostajnym taki ruch, w którym w czasach równych przebiegane są drogi równe), to przy takiej równości czasów prościej pojąć możemy wzrosty prędkości: przyjmując w myśli ruch ten jako jednostajny i w jednakowy sposób stale przyspieszany, bo w jakichkolwiek czasach równych dochodzą równe dodatki prędkości. Tak że, jeżeli od chwili, gdy ciało wychodzi ze spoczynku i zaczyna spadać, weźmiemy pod uwagę równe odstępów czasu spadania, to stopień prędkości, nabyty w ciągu pierwszego i drugiego odstepu, będzie dwa razy większy od nabytego w ciągu samego pierwszego, nabyty w ciągu trzech odstepów, trzy razy, a w ciągu czterech, cztery razy

wiekszy. Tak, że (dla łatwiejszego zrozumienia), gdyby ciało swój ruch, po pierwszym odstępie czasu, z osiągniętym stopniem albo momentem prędkości, w ten sam sposób dalej prowadziło, to poruszałoby się dwa razy wolniej, niż gdyby stopień prędkości osiągnięty był w dwóch odstępach czasu: nie zblądźmy więc, jeżeli przyjmiemy, że natężenie prędkości odpowiada przeciągowi czasu: skąd wynika takie określenie ruchu, którym się mamy zajmować: Równomiernie, albo jednostajnie przyspieszonym nazywamy taki ruch, który, od chwili wyjścia ze spoczynku, w czasach równych, przydaje sobie równe momenty prędkości.

Sagredo: Nie będę się sprzeciwiał tej lub każdej innej definicji, postawionej przez jakiego autora, bo wszystkie one są arbitralne; mogę wszakże, nie obrażając nikogo, powątpiewać, czy takie abstrakcyjnie zupełnie postawione definicje nadają się i sprawdzają, dla tego rodzaju ruchu przyspieszonego, jaki wykonywają ciała ciężkie naturalnie spadające. A ponieważ zdaje się, że nasz autor zapewnia, że to co określa jest naturalnym ruchem ciał ciężkich, pragnąłbym chętnie, aby mi odjęto pewne skrupuły, które mnie bałamucą; abym mógł potem z tem większą uwagą wysłuchać dowodzeń, na które czekamy.

Salviati: Zechciejcie więc, Waszmość i pan Simplicio, przystąpić do formułowania zarzutów. Wyobrażam sobie, że będą też same, jak te, które sobie przypominam, gdy pierwszy raz zobaczyłem tę rozprawę i które w części odparte zostały przez samego autora, a w części po własnem zastanowieniu się odrzucone.

Sagredo: Weźmy pod uwagę ciało ciężkie wychodzące ze spoczynku, czyli ze stanu, w którym pozbawione było wszelkiej prędkości, i rozpoczynające ruch w ten sposób, że jego prędkość, od pierwszej chwili, rośnie proporcjonalnie do czasu; tak że, jeżeli w ciągu ośmiu uderzeń pulsu nabywa osiem stopni prędkości, to przy czwartym uderzeniu ma ich tylko cztery, przy drugim dwa a przy pierwszym jeden, a ponieważ czas jest nieskończenie podzielny, wynika stąd, że, jeżeli poprzedzające prędkości mają być mniejsze w tym samym stosunku, to nie można wyobrazić sobie tak małej prędkości, z jakąby ciało musiało się poruszać w chwili nieskończonej powolności, t.j. gdy wychodzi ze spoczynku. Jeżeliby więc ciało, z prędkością osiągniętą w ciągu czterech uderzeń pulsu i pozostającą bez zmiany, przebiegało dwie mile w ciągu godziny, a z osiągniętą w ciągu dwóch uderzeń pulsu — jedną milę, to twierdzić należy, że w chwilach najbliższych sąsiadujących z wyj-

ściem ze stanu spoczynku, ruch ciała będzie tak powolny, że (przy dalszym równie powolnym ruchu) ciało nie przebiegnie jednej mili ani w ciągu godziny, ani w ciągu dnia, roku i tysiąca lat i w ciągu jeszcze dłuższego czasu nie posunie się ani na palec: zjawisko, które trudno nam śledzić wyobraźnią, bo zmysły nasze pokazują nam, że ciało wazkie spada nagle z wielką prędkością.

Salviati: Taż sama trudność zajmowała mnie w samym początku, ale ja wnet przezwyciężyłem; a udało mi się to przez także doświadczenie, jak to, które co dopiero było przytoczone. Powiedzieliście, że doświadczenie wskazuje, iż ciało skoro tylko wychodzi ze spoczynku ma zaraz znaczną prędkość; a ja powiadam, że toż samo doświadczenie wyjaśnia, że pierwszy impet bardzo nawet ciężkiego ciała jest powolny i opóźniony. Połóżcie ciężar na masie miękkiej, to ustępuje pod ciśnieniem, jakie wywiera ciężar; oczywiście więc, jeżeli podniesiemy ciężar na łokieć lub dwa i spuścimy go, aby spadł na tęż samą masę, to przy uderzeniu wywarte będzie nowe i większe ciśnienie aniżeli to, które przedtem wywarł sam ciężar; skutek wywarty będzie wtedy przez ciało spadające i przez prędkość nabytą podczas spadku, a ten skutek będzie tem większy, im z większej wysokości nastąpi uderzenie, to jest im większą będzie prędkość ciała uderzającego. Jaka zaś jest prędkość spadającego ciężaru, o tej możemy bez błędu wnioskować ze sposobu i wielkości uderzenia. Ale powiedzcie mi moi panowie, jeżeli na pal spuszczaemy babę kafara z wysokości czterech łokci i ta wbija go w ziemię np. na cztery palce, to spuszczone z dwóch łokci wbija go mniej, a z jednego jeszcze mniej, i jeszcze mniej z wysokości piędzi; a, jeżeli w końcu podniesioną będzie tylko na palec, to, czy nie działa tyle, jakby była położoną bez uderzenia? z pewnością bardzo mało i działanie byłoby zupełnie niedostrzegalnem, gdyby była podnoszona tylko na taką wysokość, jak gruby jest papier. A ponieważ skutek uderzenia zależy od prędkości tegoż ciała uderzającego, to któżby mógł wątpić, że gdy ruch jest bardzo wolny, a prędkość jak najmniejsza, to jej działanie jest niedostrzegalne? Uwydatnia się tu potęga prawdy, bo toż samo doświadczenie, które na pierwsze wejrzenie zdawało się dowodzić pewnej rzeczy, lepiej rozważane wykazuje rzecz wprost przeciwną. Ale nawet, bez uciekania się do takiego doświadczenia (które bezwątpienia jest jaknajwięcej przekonujące), zdaje mi się, że nie trudno będzie przeniknąć do prawdy prostem rozumowaniem. Mamy ciężki kamień, podtrzymywany w powietrzu w spoczynku; jeżeli

odejmiemy podpórę i damy mu swobodę, to, będąc cięższym od powietrza, spada na dół i to nie ruchem jednostajnym, lecz z początku powolnym a następnie stale przyspieszonym; a że prędkość może się powiększać lub zmniejszać bez granic, to cóżby przekonać mnie mogło, że takie ciało, wychodząc z nieskończonej wielkiej powolności (gdyż tem jest spoczynek), przyjmie odrazu raczej dzieśnięć stopni prędkości, a nie cztery, dwa, jeden, pół lub jedną setną stopnia? lub zresztą wszystkie mniejsze, do nieskończoności? Zechciejcie to przyznać. Nie przypuszczam, abyście odmawiali swej zgody na to, że osiągnięcie stopni prędkości przez kamień spadający, od chwili wyjścia ze spoczynku, następuje w tym samym porządku, jak zmniejszanie się lub strata tychże stopni przy podrzucaniu go siłą popychającą w górę, do tej samej wysokości: a jeżeli tak jest, to wydaje mi się niewątpliwem, że przy zmniejszaniu się prędkości podnoszącego się kamienia, gdy ta w końcu zostaje unicestwiona, kamień nie prędzej dojdzie do stanu spoczynku, póki nie przejdzie przez wszystkie stopnie powolności.

Simplicio: Ale skoro stopnie coraz większej powolności są w liczbie nieskończonej, to nigdy nie będą wszystkie wyczerpane: a więc podnoszące się ciało wazkie nigdy nie dojdzie do spoczynku, ale poruszać się będzie nieskończenie, ciągle się opóźniając: czego nie widać aby się zdarzało.

Salviali: Zdarzałoby się to, panie Simplicio, gdyby ciało z każdym stopniem prędkości poruszało się przez czas pewien; ale ono przez każdy taki stopień przechodzi, nie trwając w nim jak chwilę a w każdym najmniejszym przeciągu czasu jest takich chwil nieskończenie wiele, wystarczają one przeto, aby odpowiadać nieskończenie wielu stopniom zmniejszającej się prędkości. Że zaś ciało, lecące w górę, nie utrzymuje się w ciągu żadnego przeciągu czasu w tym samym stopniu prędkości, to można w ten sposób wykazać: jeżeli określony zostanie pewien przeciąg czasu, to miałoby ciało w pierwszej chwili tego okresu, jak i w ostatniej, ten sam stopień prędkości, i w tym samym stopniu utrzymywałoby się w ciągu następnego okresu na przebieganej przestrzeni i jak przechodziło od pierwszego okresu do drugiego, dla tej samej przyczyny przeszłoby tak samo od drugiego do trzeciego aż w końcu utrzymałoby się do nieskończoności w ruchu jednostajnym.

Sagredo: Z rozważania tego wyciągnąćby można dość trafne rozwiązanie poruszanej przez filozofów kwestji, jaka jest przyczyna przyspieszenia w ruchu naturalnym ciał wazkich. Bo, jak

uwazam, przy ruchu ciężaru, rzuconego pod górę, siła (virtu) rzutu wciąż się zmniejsza i dopóki się nie zrówna z przeciwdziałającą ciężkością, to ciężar się podnosi, a gdy się siła i ciężkość zrównoważą, to ciężar przestaje się podnosić i przechodzi w stan spoczynku, w którym popęd, jaki mu był udzielony, nie inaczej zostaje unicestwiony, jak tylko przez to, że zużyta została przewyżka, jaką miał poprzednio nad ciężarem ciała, dzięki której ciało mogło się podnosić do góry. Gdy więc trwa zmniejszanie się tego obcego popędu i następuje przewyżka ciężaru ciała, wtedy zaczyna się spadanie, ale bardzo powolne, wskutek przeciwdziałania nadanego popędu, którego znaczna część jeszcze się w ciełe utrzymuje; a ponieważ ten popęd wciąż się zmniejsza i ciężkość wciąż w większym stosunku przeważa, powstaje stąd stałe przyspieszenie ruchu.

Simplicio: Pomysł jest dowcipny, ale raczej pięknie obmyślany niż trafny. Gdyż to, co się w nim wydaje zadowalającym, odnosi się tylko do ruchu naturalnego, poprzedzonego ruchem gwałtownym, przyczem utrzymuje się w nim jeszcze część udzielonego popędu, który dał początek ruchowi gwałtownemu: lecz gdy niema żadnej takiej pozostałości i ciało po długotrwałym spoczynku puszcza się w ruch, to całe rozumowanie traci swą siłę.

Sagredo: Sądzę że jesteście w błędzie i że to odróżnianie przypadków jest zbyteczne albo, lepiej mówiąc, żadne. Bo powiedzcie mi, czyliż przy podrzucaniu nie może być nadany ciału popęd, raz wielki, raz mały, tak że ciało wznieść się może na wysokość stu łokci, albo dwudziestu, albo czterech, albo jednego?

Simplicio: Tak, bezwątpienia.

Sagredo: I nie mniej, udzielony popęd może tak mało przewyższać opór ciężkości, że ciało podniesie się tylko na szerokość palca; a w końcu popęd może być tylko taki, że będzie równoważył opór ciężkości tak, że ciało nie będzie podniesione w górę a tylko podtrzymane. Gdy więc trzymacie w ręku kamień, czyż robicie co innego, jak to, że mu nadajecie taki popęd do podnoszenia się w górę, jaka jest jego ciężkość pociągająca go nadół? I czy nie nadajecie mu tego popędu przez cały czas trzymania w ręku? Czy może ten popęd się zmniejsza w ciągu długiego trzymania? A czyż to ma jakie znaczenie, że tą podporą, nie dopuszczającą, aby kamień spadał, jest nasza ręka, lub stół, albo sznur, na którym jest zawieszony? Oczywiście nie. Wynika więc stąd, panie Simplicio, że, czy dłuższy czy krótszy czas, albo tylko chwila spoczynku poprzedza spadek kamienia, nie czyni to żadnej różnicy, bo kamień

się nie ruszy, dopóki działa popęd przeciwny jego ciężkości a ściśle wystarczający do utrzymania go w spoczynku.

Salviati: Nie wydaje mi się odpowiedniem rozpoczynanie obecnie badania przyczyny przyspieszenia ruchu naturalnego, o czym różni filozofowie różne wyrazili poglądy: jedni odnosili to do zbliżania się do środka, inni do tego, że wciąż mniej części chce się od siebie oderwać, inni znów do oporu otaczającego ośrodka, który schodzi się po za ciałem spadającym, popychając je i wciąż goniąc; wszystkie te zapatrywania, wraz z innemi podobnemi poddaćby należało sprawdzeniu i rozpatrzeniu, choć się mało na tem zyska. Na teraz wystarczy naszemu autorowi, abyśmy zrozumieli, jak on badać i objaśniać zamierza niektóre własności ruchu przyspieszonego (jakakolwiek byłaby ich przyczyna), równie jak momenty prędkości, od wyjścia ciała ze spoczynku, wciąż rosnące w najprostszym stosunku do wzrostu czasu trwania ruchu, co znaczy, że w równych czasach następują równe przyrosty prędkości. A gdy się okaże, że przypadki, które zostaną przedstawione, sprawdzają się przy naturalnym ruchu ciała spadającego z przyspieszeniem, to będziemy mogli przyjąć, że powyższe określenie odnosi się do takiego ruchu ciężarów i że prawdą jest, że przyspieszenie jest proporcjonalne do czasu trwania ruchu.

Sagredo: O ile teraz rozumiem, to zdaje mi się, że bez zmiany pomysłu, tak można to wyraźniej określić: Ruch jednostajnie przyspieszony jest taki, przy którym prędkość wzrasta proporcjonalnie do przebytej drogi: tak że np. przy spadku z wysokości czterech łokci, prędkość jest dwa razy większa, niż przy spadku z wysokości dwóch łokci, a ta znów dwa razy od odpowiadającej wysokości jednego łokcia. Wydaje mi się bowiem niewątpliwem, że ciało spadające z wysokości sześciu łokci uderza z impetem dwa razy większym, niż gdy spada z wysokości trzech łokci, a trzy razy większym w porównaniu ze spadkiem z dwóch łokci, i sześć razy większym niż przy spadku z wysokości jednego łokcia.

Salviati: Pociesza mnie to, że miałem takiego towarzysza w błędzie; powiem Wam nadto, że Wasze przedstawienie ma w sobie tyle prawdopodobieństwa, że sam nasz autor mi nie przeczył, gdy mu je komunikowałem i że on przez pewien czas pozostawał w tym samym błędzie. Co wszakże najwięcej podziwiałem, to gdy ujrzałem, jak w czterech najprostszych słowach objawiają się nie tyle fałszywe ile niemożliwe dwa podania, które uważałem co dopiero za prawdopodobne i wielu je przedstawiałem, nie znalazłszy takich, którzy by się na nie nie zgadzali.

Simplicio: Ja także stanąlbym w rzędzie zgadzających się: a że ciało spadające nabywa sił w spadku, gdy prędkość rośnie proporcjonalnie do drogi przebieżonej i moment jego uderzenia jest podwójny przy dwa razy większej wysokości, to do tych podań można się przyłączyć bez wstępu i przeciwnu.

Salviali: A jednak są one równie fałszywe i niemożliwe jak to, że ruch odbywa się momentalnie. I oto najwięcej jasne dowodzenie. Gdyby prędkości były proporcjonalne do dróg przebieżonych lub mających być przebieżonemi, toby te drogi przebiegane były w czasach równych; skoro więc prędkość, z jaką ciało spadające przebiega cztery łokcie, miałaby być dwa razy większą od prędkości przebiegu dwóch pierwszych łokci, to musiałyby czasy tych dwóch przebiegów być sobie równe; ale przebieg przez to samo ciało czterech łokci w tym samym czasie co i dwóch łokci, możebny jest tylko przy ruchu momentalnym, a my widzimy że ciało spadające dokonywa swego ruchu w czasie i w mniejszym przeciągu czasu przebywa dwa łokcie aniżeli cztery; fałszem więc jest, aby prędkość ciała spadającego wzrastała tak, jak przebyta droga. Dowieść można z równą jasnością że i drugie podanie jest błędne. Bo ponieważ ciało uderzające jest toż samo, różnica i moment uderzeń określane są tylko różnicą prędkości. Gdyby ciało spadające z podwójnej wysokości wytwarzało podwójny moment uderzenia, to musiałyby uderzać z podwójną prędkością; ale z podwójną prędkością ciało przebiegałoby w tym samym czasie podwójną drogę a my widzimy, że czas spadku z większej wysokości jest dłuższy.

S a g r e d o: Z nadzwyczajną jasnością i łatwością objawiacie nam ukryte wnioski; ta wielka łatwość czyni je mniej cennemi, niż gdy bywały stawiane wobec prawdopodobieństwa sprzeciwu. Myślę, że mniej cenilbym ogólne wiadomości, nabyte z tak małym trudem, w porównaniu z temi, co do których prowadzono długie a niepojęte rozprawy.

Salviali: Byłoby to jeszcze znośnem, gdyby ci, którzy krótko i jasno wykazują błędy podań, poczytywanych ogólnie za prawdziwe, otrzymywali tylko pogardę, zamiast uznania; ale więcej jeszcze nieprzyjemnego i przykrego wrażenia doznają ci, którzy w tym samym dziale wiedzy starając się dorównać każdemu, dowiadują się potem że pominęli prawdziwe wnioski, które przez innego krótką i łatwą rozprawą zostały wykryte i wykazane jako błędne. Nie nazwę tego uczucia zazdrością, zamieniającą się zwykle w gniew

i nienawiść na odkrywców takich błędów, ale powiem, że jest to pobudką albo pożądaniem, aby raczej trzymać się zastarzałych błędów, aniżeli pozwalać na przyjęcie nowo odkrytej prawdy, które to pożądanie prowadzi nieraz do stawiania sprzeciwu prawdzie przez siebie podzielanej, dlatego tylko, aby się skłonić do poglądu licznego a mało inteligentnego tłumu innej opinii. O takich fałszywych wnioskach, przyjmowanych za prawdziwe i o łatwych sprzeciwach, często słyszałem mówiącego naszego akademika, i dobrze to zapamiętałem.

S a g r e d o: Nie powinna nas Waszmość tego pozbawiać, ale przy sposobności nam zakomunikować, nawet, gdyby trzeba było poświęcić temu osobne posiedzenie. Tymczasem, ciągnąc dalej nasze rozprawy, ustalając określenie ruchu jednostajnie przyspieszonego, dochodzimy do następującego:

Ruchem równomiernie albo jednostajnie przyspieszonym nazywamy ruch taki, przy którym, od wyjścia ze spoczynku, w czasach równych, dochodzą równe momenty prędkości.

Salviati: Po ustaleniu tego określenia, stawia nasz autor i przyjmuje za prawdziwą taką zasadę:

Przyjmuję, że stopnie prędkości nabyte przez toż samo ciało, przy różnych nachyleniach równi pochyłych, są sobie równe, skoro wysokości tych równi są równe.

Wysokością równi pochylej nazywa prostopadłą, spuszczoną z najwyższego punktu tej równi na linię poziomą, przechodzącą przez najniższy punkt tejże równi pochylej, jeżeli więc (tab. III, rys. 44) BA jest równoległa do poziomu, nad którą wznoszą się równie pochyle CA, CD, to będzie prostopadła CB, spuszczone na poziomą BA, nazwana przez autora wysokością równi CA, CD i przyjmuje on, że stopnie prędkości tegoż samego ciała, spadającego wzdłuż równi pochyłych CA, CD, nabyte w punktach końcowych A, D, są jednakie, bo taż sama jest wysokość obu równi CB. I takież sam jeszcze stopień prędkości miałoby ciało spadające z punktu C, przy końcu spadku w B.

S a g r e d o: Istotnie, przypuszczenie to ma, o ile mi się zdaje, tyle prawdopodobieństwa, że zasługuje na przyjęcie bez sprzeciwu, zakładając zawsze, że usunięte zostaną wszystkie przypadkowe, zewnętrzne przeszkody i że równie są twarde i gładkie, a ciało ma kształt doskonale okrągły, tak że i ciało i równia nie mają chropowatości. Gdy wszystkie te sprzeczności i przeszkody są usunięte, mówi mi zdrowy rozsądek bez trudności, że ciężka i doskonale

okrągła kula schodząca po liniach CA, CD, CB, dochodziłaby do spodów A, D, B z jednakowymi impetami.

Salviali: Rozumujecie bardzo prawdopodobnie, lecz oprócz tego pragnę Wam przez jedno doświadczenie tak jeszcze wzmocnić to prawdopodobieństwo, abyście je mogli przyrównać do wystarczającego dowodzenia. Niech Wam ten papier przedstawia na poziomej płaszczyźnie wystawioną ścianę, na wbitym w nią gwoździu wisi kula ołowiana, jedno lub dwuuncyjowa, (tab. III, rys. 45) zawieszona na cienkiej nici AB, dwa do trzech łokci długiej, prostopadle do poziomemu; na ścianie narysujemy poziomą DC, przecinającą pod kątem prostym pionową AB, która na szerokość dwóch palców jest oddalona od ściany; jeżeli nie AB z kulą odchylimy do AC i puścimy kulę swobodnie, to zobaczymy, że ta spadając opisze łuk CBD, przeleci przez jego spód B i biegnąc po BD podniesie się prawie do narysowanej poziomej CD, nie dochodząc do niej tylko na bardzo a bardzo małą odległość, wskutek oporu powietrza i nici. Stąd możemy prawdziwie wnioskować, że impet nabyty w punkcie B, przez kulę, przy spadaniu po łuku CB, wystarcza, aby ją podnieść po łuku BD do tej samej wysokości; po zrobieniu i kilkakrotnem powtórzeniu tego doświadczenia, jeżeli gwoździć wbijamy na kierunku AB w E albo w F, tak aby sterczał na pięć lub sześć palców; to ten zatrzyma nie AC posuwając się przy przebiegu kuli po łuku CB i wbity w E zmusi kulę do ruchu po łuku BG, opisanym ze środka E, skąd widzimy czego dokonać może ten sam impet, który przedtem, poczynając od tegoż samego punktu B, podnosił toż samo ciało po łuku BD do wysokości poziomej CD. Teraz panowie zauważcie dobrze, że kula dochodzi do linii poziomej w punkcie G i toż samo następuje, gdy przeszkodę umieścimy niżej, np. w F, wtedy kula opisze łuk BI, kończąc zawsze swe podnoszenie się dokładnie na linii CD; a gdyby gwoździć przeszkadzający wbity był tak nisko, że reszta nici nie wystarczałaby do osiągnięcia poziomu CD (co nastąpiłoby, gdyby gwoździć był bliższy B niż punktu przecięcia AB z poziomą CD), to nie nawinęłaby się na gwoździć. Doświadczenie to nie pozwala powątpiewać o prawdziwości przypuszczenia: bo ponieważ łuki CD i DB są równe i podobnie położone, więc nabytek momentu przy spadaniu po łuku CB jest ten sam, jak przy spadaniu po łuku DB; ale moment nabyty w B, na łuku CB, wystarcza do podniesienia tegoż samego ciała po łuku BD; więc i moment nabyty przy spadaniu po DB jest równy momentowi, który toż samo ciało podnosi po tym samym

łuku od B do D, tak że wogóle każdy moment osiągnięty przy spadku jest równy temu, który może podnieść toż samo ciało po tym samym łuku: ale wszystkie momenty, które mogą podnosić ciało po łukach BD, BG, BI, są sobie równe, bo są nabyte przez toż samo ciało przy spadaniu po łuku CB, jak wykazało doświadczenie: a więc i wszystkie momenty, nabyte przy spadaniu po łukach DB, GB, IB, są sobie równe.

Sagredo: Rozumowanie wydaje mi się tak ścisłym, a doświadczenie tak przystosowanym do sprawdzenia postulatu, że ten postulat uważać można za dowiedziony.

Salviati: Ja sądzę, panie Sagredo, że nie potrzebujemy troszczyć się o to, że twierdzenie nasze stosować będziemy do ruchów po powierzchniach prostych a nie po krzywych, na których przyspieszenie inaczej się powiększa, aniżeli to przyjmujemy na płaszczyznach prostych. Gdy więc doświadczenie nas uczy, że spadanie ciała po łuku CB daje mu taki moment, że może się podnosić po którymkolwiek z łuków BD, BG, BI, to nie możemy z równą widocznością wykazać, że toż samo nastąpi, gdy zupełnie doskonała kula spada po płaszczyznach prostych, nachylonych tak samo jak cięciwy tych łuków; prawdopodobnem jest raczej, że gdy utworzone będą kąty z tych płaszczyzn prostych w punkcie B, to kula spadająca po pochyłości wzdłuż cięciwy CB, doznając przeszkody na płaszczyznach podnoszących się wzdłuż cięciw BD, BG, BI, przez uderzenia o nie, straciłaby na swoim impecie i nie mogłaby, podnosząc się, dojść do wzniesienia linji CD. Ale po usunięciu przeszkody, co przesadza doświadczenie, wydaje mi się zupełnie zrozumiałem, że impet (pochodzący istotnie od siły ilości spadku) starczyć powinien do doprowadzenia ciała do tej samej wysokości. Przyjmijmy to więc tymczasem za postulat, którego prawda absolutna później zostanie ustalona, gdy zobaczymy inne wnioski wynikające z tej hipotezy i sprawdzimy je ściśle doświadczeniem. Po postawieniu tej jednej zasady, przechodzi autor do twierdzeń ściśle dowodzonych, z których pierwsze jest następujące:

Twierdzenie I. Podanie I

Czas, w którym jakąkolwiek drogę przebywa ciało, wychodzące ze spoczynku i poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym, jest równy czasowi, w którymby taż sama droga przebyta została przez toż samo ciało, biegnące ruchem jednostajnym, którego

stopień prędkości jest połową ostatniego i największego stopnia prędkości ruchu przyspieszonego.

Niech AB (tab. III, rys. 46) przedstawia czas, w którym ciało, wychodzące ze spoczynku w C, przebywa ruchem jednostajnie przyspieszonym drogę CD; a stopień prędkości powiększający się na poszczególnych odstępach czasu AB, ostatni największy niech będzie EB, na prostopadłej do AB; poprowadźmy AE oraz wszystkie do EB równoległe i jednakowo od siebie odległe linie, to będą one przedstawiały rosnące stopnie prędkości, poczynając od A. Przepołówmy EB w F, poprowadźmy [FG, AG, równoległe do AB, FB, prostokąt AGFB będzie równy trójkątowi AEB, bo GF przepoławia linię AE w punkcie I: a jeżeli równoległe w trójkącie AEB, przedłużone zostaną do GIF, to będzie suma wszystkich równoległych zawartych w czworokącie równa sumie zawartych w trójkącie AEB; bo te, co są w trójkącie IEF, są równe tym, które się mieszczą w trójkącie GIA; podczas gdy zawarte w trapezie AIFB są wspólne. A że każdemu z odstępów czasu w AB odpowiada jedna linia i wszystkie punkty AB, przez które w trójkącie AEB poprowadzone zostały równoległe, przedstawiają rosnące stopnie prędkości, podczas gdy linie równoległe w prostokacie wyobrażają taką samą liczbę tegoż samego stopnia prędkości jednostajnej, to jasnym jest, że wszystkie momenty prędkości przy ruchu przyspieszonym przedstawione są przez rosnące równoległe w trójkącie AEB a przy ruchu jednostajnym przez równe linie równoległe prostokąta GB: czego bowiem braknie momentom w pierwszej połowie ruchu przyspieszonego (braknie równoległych zawartych w trójkącie AGI), to przybywa momentom przez równoległe w IEF. A więc dwa ciała przebędą równe drogi w tym samym czasie, jedno biegnąc od początku ruchem jednostajnie przyspieszonym a drugie ruchem jednostajnym ze stałą prędkością równą połowie największej prędkości nabytej w ruchu przyspieszonym, czego należało dowieść.

Twierdzenie II. Podanie II

Jeżeli ciało, wychodząc ze spoczynku, spada ruchem jednostajnie przyspieszonym, to drogi przebyte w jakichkolwiek czasach, są do siebie w podwójnym stosunku czasów, t.j. w stosunku kwadratów z czasów¹⁾.

¹⁾ $s : s' = t^2 : t'^2$

P. T.

Niech długość (tab. III, rys. 47) AB przedstawia czas upływający od pewnej chwili początkowej A , zawierając w sobie dwa jakiegokolwiek czasu AD , AE ; niech będzie także III linja, po której ciało, wyszedłszy ze spoczynku w H , spada ruchem jednostajnie przyspieszonym; niech będzie dalej HL , droga przebyta w pierwszym odstępie czasu AD i HM także droga, po której spadek następuje w czasie AE . Twierdzę, że stosunek drogi MH do drogi HL jest równy podwójnemu stosunkowi czasu EA do czasu AD . Innymi słowy drogi MH , HL są do siebie w tym samym stosunku jak kwadraty z EA i AD . Poprowadźmy AC linję nachyloną pod jakimkolwiek kątem do AB , przez punkty D , E , poprowadźmy równoległe DO i EP , z których DO przedstawia maximum stopnia prędkości nabytej w chwili D czasu AD , a PE także maximum stopnia prędkości nabytej w chwili E czasu AE . Ponieważ wyżej dowiedziono, że drogi przebieżone ruchem jednostajnie przyspieszonym i ruchem jednostajnym o prędkości równej połowie największej prędkości nabytej w ruchu przyspieszonym, są równe, — wynika stąd, że drogi MH i LH są takie, jak gdyby były przebieżone ruchem jednostajnym z prędkościami $\frac{1}{2} PE$ i $\frac{1}{2} OD$ w czasach EA i DA . Gdyby teraz można było wykazać, że te drogi MH i LH mają się do siebie w podwójnym stosunku czasów EA i DA , to twierdzenie byłoby dowiedzione. Ale w czwartym twierdzeniu pierwszej księgi dowiedziono, że przy ruchu jednostajnym drogi przebieżone mają się do siebie w stosunku złożonym ze stosunku prędkości i stosunku czasów: tu zaś stosunek prędkości jest taki sam jak stosunek czasów (bo $\frac{1}{2} PE$ tak się ma do $\frac{1}{2} OD$, jak PE do OD a więc tak, jak AE do AD), zatem stosunek dróg przebieżonych jest podwójnym stosunkiem czasów, co było do dowodzenia.

Objasnia to, że tenże stosunek dróg przebieżonych jest podwójnym stosunkiem najwyższych stopni prędkości, to jest linii PE i OD , bo tak się ma PE do OD jak EA do DA .

Wniosek I

Wynika stąd, że jeżeli od początku ruchu wzięte będą, następujące po sobie równe wielkości czasów, jak AD , DE , EF , FG , w ciągu których przebieżone będą drogi HL , LM , MN , NI , to te drogi mieć się będą do siebie jak liczby nieparzyste, poczynając od jedyności, czyli jak 1,3,5,7. Bo taki jest stosunek różnic kwadratów z linji, rosnących o jednakową długość i których przyrosty są równe najmniejszej z tych linji: innymi słowy różnic kwadratów z liczb

po sobie idących od jedności. Gdy więc stopnie prędkości rosną w czasach równych w prostym szeregu liczb, to drogi przebyte w tych czasach rosną w szeregu liczb nieparzystych, poczynając od jedności.

S a g r e d o: Proszę, przerwijcie na chwilę czytanie, gdyż właśnie wpadłem na myśl, dla której jaśniejszego przedstawienia zrobię mały rysunek (tab. III, rys. 48). Linją AI oznaczę czas od chwili A. Pod dowolnym kątem prowadzę przez A linję AF, łączę punkty końcowe I, F, przepoławiam AI w C i prowadzę CB równoległą do IF. Przyjmuję następnie CB za największy stopień prędkości, która, poczynając od spoczynku w A, wzrasta jednostajnie jak linje równoległe do BC, tak że powstaje trójkąt ABC (czyli że wzrasta według wzrostu czasu); bez sprzeciwu, na zasadzie naszego rozważania, przyjmuję, że droga przebieżona przez ciało, spadające z prędkością w ten sposób rosnącą, będzie równa drodze przebieżonej przez to ciało w tym samym czasie AC ruchem jednostajnym ze stopniem prędkości EC, równym połowie stopnia BC. Idąc dalej wyobraźmy sobie, że ciało spadające ruchem przyspieszonym, które w chwili C nabyło stopień prędkości BC, porusza się następnie bez przyspieszenia z tym samym stopniem prędkości, ciało to, w odstępie czasu CI przejdzie drogę dwa razy większą od drogi przebytej w równym czasie AC ze stopniem prędkości EC równym połowie BC. Ale ponieważ ciało spada z prędkością rosnącą zawsze jednostajnie we wszystkich równych odstępach czasu, to do stopnia CB dochodzić będą w następnym czasie CI też same momenty prędkości, rosnącej według równoległych w trójkącie BFG, równym trójkątowi ABC. Tak, że dodając, do stopnia prędkości CI, połowę stopnia FG, największego z osiągniętych w ruchu przyspieszonym a mierzonych równoległymi trójkąta BFG, otrzymamy stopień prędkości IN, z którym ciało biegłoby ruchem jednostajnym, w ciągu czasu CI; ten stopień IN jest potrojonym stopniem EC i odpowiada drodze przebieżonej w drugim odstępie czasu CI, mającej być trzy razy większą od przebieżonej w pierwszym odstępie czasu CA. A jeżeli, po AI, weźmiemy nowy odstęp czasu IO i powiększymy trójkąt do APO, to oczywiście, przy dalszym ruchu w ciągu czasu IO ze stopniem prędkości IF, nabytym w ruchu przyspieszonym w ciągu czasu AI, który to stopień IF jest cztery razy wziętym EC, droga przebyta w czasie IO byłaby cztery razy większą od przebytej w pierwszym odstępie czasu AC; ale przy ciąglem po-

większaniu się jednostajnego przyspieszenia w trójkącie FPQ, podobnym do trójkąta ABC, trzeba przy sprowadzaniu do ruchu jednostajnego dodać stopień równy EC; dodawszy przeto $QR=EC$, mieć będziemy całą prędkość ruchu jednostajnego, w czasie IO, pięciokrotną prędkości jednostajnej w pierwszym odstępie czasu AC, więc droga będzie pięć razy większą od przebytej w pierwszym odstępie czasu AC. To proste zestawienie uwidocznia więc także, że drogi przebieżone w czasach równych przez ciało wychodzące ze spoczynku i nabywające prędkości w miarę wzrostu czasu, mają się do siebie jak liczby nieparzyste od jedności 1, 3, 5, a zbierając razem drogi przebieżone, mamy w czasie podwójnym drogę czterokrotną, w potrójnym dziewięciokrotną i wogóle drogi będące do siebie w podwójnym stosunku czasów, czyli w stosunku kwadratów z tych czasów.

Simplicio: Istotnie więcej mi się podoba proste i jasne przedstawienie pana Sagredo, niż nieco ciemne dla mnie dowodzenie Autora; tak że jestem dość mocno przekonany, że taki winien być przebieg sprawy, jeżeli postawionem i przyjętem zostało określenie ruchu jednostajnie przyspieszonego. Ale czy takie jest przyspieszenie, którem się natura posługuje przy spadaniu ciężarów, o tem jeszcze wątpię i dla tego sędzę, że tak dla mnie jak i dla innych, będących podobnego zdania, potrzebaby przeprowadzić w tem miejscu którekolwiek z doświadczeń, na których nie zbywa i któreby w różnych przypadkach zgadzały się z wywiedzionymi wnioskami.

Salviati: Jak prawdziwy uczony, stawia Waszmość zupełnie uprawnione żądanie, praktykowane i odpowiednie w naukach, stosujących twierdzenia matematyczne do wyników naturalnych, jak to widzimy w perspektywie, astronomji, mechanice, muzyce i innych naukach; wszystkie one wzmacniają swe zasady przez doświadczenie, stanowiące fundament całej dalszej budowy: nie sędzę też, aby się wydało zbyt cennem, że rozpatrywać będziemy dłużej tę pierwszą i główną podstawą, na której się opiera olbrzymi zespół nieskończonej liczby wniosków, których małą część tylko mamy w tej księdze postawioną przez Autora, a ten dość uczynił, aby udostępnić dalsze rozważanie tej sprawy. Autor nie pominął przedstawienia doświadczeń a dla przekonania się o tem, że przyspieszenie spadających ciał ważkich odbywa się w wyżej przedstawionym stosunku, wielokrotnie razem z nim w następujący sposób wykonywałem doświadczenie.

Na linjale, albo raczej na desce drewnianej, 12 łokci długości, $\frac{1}{2}$ łokcia szerokości a 3 cale grubości, na wąskim boku wydrążono rowek, mający nieco więcej niż 1 cal szerokości. Wyciągnięty był jak najregularniej prosto, i aby miał gładką powierzchnię, wyklejony został gładkim i czystym pergaminem; spuszczone biegnąca w tym rowku okrągłą i gładko obtoczoną kulę z bardzo twardego mosiądzu. Deskę zawieszano z jednej strony podniesioną, to na jeden, to na dwa łokcie, poczem puszczano kulę w rowku i w sposób, który zaraz będzie wskazany, oznaczano czas spadania wzdłuż całego rowka: każde doświadczenie powtarzano wielokrotnie dla ścisłego wypośrodkowania czasu i nie znaleziono żadnej różnicy, ani nawet na $\frac{1}{10}$ uderzenia pulsu. Następnie puszczano kulę przez ćwierć długości rowka i znajdowano stale połowę poprzedniego czasu spadania. Brano następnie inne długości drogi i porównywano mierzony czas spadania z ostatnio otrzymanym, z jego $\frac{2}{3}$ albo $\frac{3}{4}$ lub innemi częściami; przy stokrotnem prawie powtarzaniu otrzymywaliśmy stale, że drogi są proporcjonalne do kwadratów z czasów: i to dla każdego nachylenia równi t.j. rowka, w którym biegła kula. Znaleźliśmy przytem, że przy różnych nachyleniach, czasy obserwowane tak się mają do siebie, jak to niżej wykazuje i dowodzi nasz Autor. Do mierzenia czasu używaliśmy kubła pełnego wody, z małym otworem w dnie, przez który wychodziła cienka żyła wody, lapana w mały kubek, w ciągu każdego obserwowanego czasu spadania. Zbierana w ten sposób woda była dokładnie ważona i z różnic ważeń otrzymaliśmy stosunki ciężarów i stosunki czasów; i to z taką dokładnością, że wielokrotnie powtarzane obserwacje nie dawały nigdy wydatnej różnicy.

Simplicio: Z wielkiem zadowoleniem byłbym uczestniczył w tych doświadczeniach, ale przekonany o waszej pilności i wier-nem ich przedstawieniu, jestem spokojny i przyjmuje je jako zupełnie pewne i prawdziwe.

Salviati: Możemy więc wrócić do naszego czytania i iść dalej.

Wniosek II

Wynika powtórę, że jeżeli od początku ruchu wzięte będą jakiekolwiek dwie drogi, przebyte w jakichkolwiek czasach, to te czasy mają się do siebie jak jedna z dróg do średniej proporcjonalnej między dwiema drogami. Bo przyjmując (tab. III, rys. 49) początek w S i dwie drogi ST i SV i odciawszy średnią proporcjonalną SX, będzie się miał czas spadku po ST do czasu spadku po SV

jak ST do SX; innemi słowy, czas po SV do czasu po ST jak VS do SX. Bo ponieważ dowiedziono że drogi mają się do siebie jak kwadraty z czasów, stosunek zaś dróg VS do ST jest równy podwójnemu stosunkowi VS do SX, czyli stosunkowi kwadratów z VS i SX; a więc czasy spadku po SV i ST jak drogi VS do SX¹⁾.

Scholiu m

Co dowiedziono dla spadku pionowego, odnosi się także do jakkolwiek nachylonych równi; na tych równiach stopień przyspieszenia wzrasta w tym samym stosunku, mianowicie proporcjonalnie do czasu, t.j. jak szereg liczb całkowitych²⁾.

Salv i a t i: Pragnąłbym tu, Mości Sagredo, abyście mi, choćby to nawet miało nieco znudzić pana Simplicio, pozwolili przerwać na chwilę czytanie, abym mógł objaśnić, ile, na zasadzie dotąd dowiedzonego, jak i opierając się na niektórych wnioskach mechanicznych naszego akademika, mogę dodać z pamięci, dla większego wzmocnienia prawdziwości wniosków, otrzymanych wyżej przez rozumowanie i doświadczenie; ale przedtem, dla geometrycznego dowodzenia, ważnem jest wyprowadzenia jednego elementarnego twierdzenia pomocniczego, odnoszącego się do impetów.

Sagredo: Jeżeli taki ma być nabytek, jak Waszmość obiecuje, to żaden czas nie będzie dla mnie zbyt długim, aby go z ochotą nie spożytkować, dla pogłębienia naszej wiedzy o ruchu: i co do mnie, prosić mogę tylko o zaspokojenie jak najprędzej mej ciekawości; a sądzę że p. Simplicio jest tego samego zdania.

Simplicio: Nie mogę nic innego powiedzieć.

Salv i a t i: Skoro pozwalacie, rozważmy najprzód znane dobrze zjawisko, że momenty, albo prędkości tegoż samego ciała, przy różnych nachyleniach równi, są różne i że mają największą wartość przy kierunku prostopadłym do poziomemu, a na równi nachylonej są tem mniejsze im więcej równie odchyła się od pionu, to też impet, zdolność, energja, albo, jak powiemy, moment spadania ciała, zmniejsza się przez równię, na której ciało się opiera i po której spada.

Dla lepszego objaśnienia (tab. III, rys. 50), niech będzie linja AB, prostopadła do poziomemu AC, stawiana następnie w różnych

¹⁾ Z twierdzenia II-go, $s:s' = t^2:t'^2$, skąd $s^2:ss' = t^2:t'^2$, oraz $t:t' = s:\sqrt{ss'}$. P. T.

²⁾ Jeżeli $v = g \sin \alpha \cdot t$, $v' = g \sin \alpha' \cdot t'$, to stosunek $v:v' = t:t'$ nie zależy od α . P. T.

nachyleniach do poziomu jak AD, AE, AF itd.; twierdzą, że ciało spadające po prostopadłej BA będzie miało impet zupełny i największy, mniejszy spadając po DA, jeszcze mniejszy po EA i wciąż zmniejszający się przy spadaniu po FA a wkońcu zupełnie wyczerpany na poziomej CA, gdzie ciało znajduje się w stanie obojętnym tak dla ruchu jak i dla spoczynku i samo przez się nie ma skłonności do poruszania się w którąkolwiek stronę i nie stawia żadnego oporu ruchowi; bo ponieważ jest niemożliwem, aby ciało ważkie lub zespół takich ciał, sam przez się podnosił się w górę, oddalając się od wspólnego środka (*commune centro*), do którego dążą wszystkie rzeczy ważkie, to niemożliwem jest także, aby się samo przez się poruszało, jeżeliby przy takim ruchu jego własny środek ciężkości nie zbliżał się do wzmiankowanego wspólnego środka: na poziomej więc, która tu oznacza pewną powierzchnię, wszędzie równo oddaloną od tego środka i dla tego nie mającą żadnego nachylenia, impet albo moment tego ciała będzie żaden. Odnosnie do tych zmian impetów, muszę jeszcze zaznaczyć to, co w jednym dawnym traktacie mechaniki, ułożonym kiedyś w Padwie przez naszego Akademika, wyłącznie dla użytku jego uczniów, było wyczerpująco i gruntownie dowiedzione, przy okazji rozważania początku i natury przedziwnego narzędzia, śruby, a mianowicie badania, w jakim stosunku następuje zmiana impetu przy różnych nachyleniach równi, jak np. na równi AF, której jeden koniec jest wzniesiony na wysokość FC nad poziomem i wzdłuż tej wysokości impet ciała ważkiego i moment spadania jest największy, szuka się tedy w jakim stosunku jest ten moment do momentu spadania tegoż ciała po równi FA. Twierdzą, że ten stosunek jest odwrotnym stosunkiem tych długości i to właśnie jest twierdzeniem pomocniczem, służyć mającem przy twierdzeniu, które mam nadzieję w następstwie móc dowieść. Jasne jest, że taki jest impet ciała spadającego, jaki jest opór, albo najmniejsza siła, wystarczająca do przeszkodzenia spadkowi i zatrzymania: dla zmierzenia tej siły, czy tego oporu, użyję ciężkości innego ciała. Wyobraźmy sobie teraz, że na równi FA leży ciało G, zaopatrzone w nitkę, która przewinięta przez F ma przywiązany ciężar H i weźmy pod uwagę, że droga spadania albo podnoszenia się pionowego tego ostatniego, jest wciąż równa całkowitemu podnoszeniu się lub spadaniu ciała G po równi pochyłej AF, ale nie już jego podnoszeniu się lub spadaniu pionowemu, w którym to kierunku ciało G, (podobnie jak każde inne) wywiera swój opór, co jest oczywiste; bo biorąc pod

uwagę trójkąt AFC, mamy ruch ciała G np. pod górę, od A do F, złożony z poprzecznego poziomego AC i prostopadłego CF, a że pierwszy, jak powiedziano nie doznaje żadnego oporu (bo przy tym ruchu niema żadnego zmniejszenia lub powiększenia odległości od wspólnego środka wszystkich ciał, gdyż ta na poziomie pozostaje zawsze tą samą), pozostaje więc tylko opór przy podnoszeniu się wzdłuż prostopadłej CF. Skoro więc ciało G, przy ruchu od A do F opiera się tylko podnoszeniu na wysokość CF, a drugie ciało H w kierunku pionowym przebywa drogę równą spadkowi FA, i ten stosunek podnoszenia się i opadania pozostaje zawsze ten sam, przy mniejszym lub większym ruchu tych ciał (gdyż są one ze sobą związane), możemy więc jak najpewniej twierdzić, że gdy ma nastąpić równowaga t. j. stan spoczynku dla ciał, to ich momenty, prędkości, skłonności do ruchu, t. j. drogi, jakieby były przebyte przez te ciała w tym samym czasie, są do siebie w stosunku odwrotnym ciężkości tych ciał, co jest dowiedzione dla wszystkich ruchów mechanicznych, tak że wystarczy do zatrzymania spadku ciała G, aby ciało H tyle razy mniej ważyło od G, ile wynosi stosunek FC do FA. Jeżeli więc zrobimy, że tak się ma FA do FC jak ciężar G do ciężaru H, to następuje równowaga, bo H i G będą miały równe momenty i ustanie ich ruch. I skoro tylko umówimy się, że impet, energia, moment lub skłonność ciała do ruchu, tyle wynosi co siła lub opór najmniejszy, wystarczający do zatrzymania i gdy dowiedziono, że ciężar H wystarcza do utrzymywania ruchu ciężaru G, to będzie mniejszy ciężar H, działający w kierunku pionowym FC całym swym momentem, ścisłą miarą momentu cząstkowego wywieranego przez ciężar G na równi pochyłej FA; ale miarą całego momentu tegoż ciężaru G jest sam ten ciężar (gdyż dla przeszkodzenia spadkowi pionowemu ciężaru, użyć trzeba przeciwwagi tak ciężkiej, jak gdyby ciężar miał swobodę ruchu pionowego); impet zatem albo moment cząstkowy ciała G wzdłuż równi pochyłej FA, do całkowitego albo maximalnego impetu tegoż G na pionowej FC, stać będzie jak ciężar H do ciężaru G, t. j. na rysunku jak prostopadła FC wysokość równi pochyłej do tejże pochyłej FA i tego mieliśmy dowieść twierdzeniem pomocniczem, które nasz autor, jak zobaczymy, przyjmuje jako znane w drugiej części szóstego podania niniejszej rozprawy.¹⁾

¹⁾ Oznaczając przez α kąt nachylenia, h wysokość, l długość równi, p i r ciężary, mamy $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, $p = r \sin \alpha = r \frac{h}{l}$, $p : r = h : l$ P. T.

S a g r e d o: Z tego, co Waszmość wywiodła, można, jak mi się zdaje łatwo wywnioskować, gdy się weźmie pod uwagę więcej stosunków odwrotnych, że momenty jednego i tegoż samego ciała, wzdłuż równi różnego nachylenia, jak FA, FI, a jednakiej wysokości, są do siebie w stosunku odwrotnym długości tych równi.¹⁾

S a l v i a t i: Wniosek jak najprawdziwszy. Gdy to załatwione, przejdę teraz do dowiedzenia następującego twierdzenia:

Stopnie prędkości ciała spadającego ruchem naturalnym z tej samej wysokości, po równiach pochyłych, w jakikolwiek sposób nachylonych, przy dojściu do poziomu są stale równe, jeżeli usunięto przeszkody.

Ostrzedz tu winieniem najprzód, że skoro ustalono, iż przy każdym nachyleniu, ciało po wyjściu ze spoczynku porusza się z rosnącą prędkością albo ilością impetu, proporcjonalnie do czasu (zgodnie z określeniem ruchu naturalnie przyspieszonego, danem przez autora), to, jak dowiedziono w poprzednim podaniu, drogi przebieżone są do siebie w podwójnym stosunku czasów a więc także i stopni prędkości; jakie więc będą impety pierwszego ruchu, takie proporcjonalnie będą stopnie prędkości, nabyte w tym samym czasie, bo tak jedne jak i drugie rosną w tym samym stosunku w ciągu tego czasu.

Niech będzie (tab. III, rys. 51) równia pochyła AB, której wzniesieniem nad poziom jest prostopadła AC i pozioma BC; a że co dopiero wywiedziono, że impet ciała spadającego po prostopadłej AC ma się do impetu tegoż po równi pochyłej AB, jak AB do AC, weźmy na równi pochyłej AB, do AB i AC trzecią proporcjonalną AD; impet więc po AC ma się do impetu po AB, czyli po AD, jak AC do AD, a więc ciało, w tym samym czasie, w jakimby przebiegło drogę prostopadłą AC, przebiegnie drogę AD po równi pochyłej AB (bo momenty mają się do siebie jak drogi), a stopień prędkości w C do stopnia prędkości w D będzie się miał jak AC do AD; ale stopień prędkości w B ma się do tegoż stopnia w D jak czas spadania po AB do czasu spadania po AD, według określenia ruchu przyspieszonego, a czas spadania po AB do czasu po AD, jak AC średnia proporcjonalna między BA i AD do AD, zgodnie z ostatnim wnioskiem drugiego podania, zatem stopnie prędkości w B i C mają

¹⁾ $p = r \frac{h}{l}, p' = r \frac{h}{l'}, p : p' = l' : l$

się do stopnia w D jak AC do AD a więc są równe, co było twierdzeniem, jakie zamierzono dowieść.¹⁾

Na tej podstawie będziemy teraz mogli łatwiej dowieść następującego trzeciego podania autora, w którym posługuje się on zasadą, że czas spadania po równi pochyłej ma się do czasu spadku pionowego jak długość równi pochyłej do jej wysokości. Bo jeżeli BA jest czas spadania po AB, to czas spadania po AD będzie średnią między nimi dwiema a więc równy AC, według drugiego wniosku drugiego twierdzenia. Ale jeżeli AC jest czasem spadku po AD, to będzie zarazem czasem spadku po AC, tak że AD i AC przebiegane są w czasach równych i skoro BA jest czasem spadku po AB, to AC będzie czasem spadku po AC, a więc jak AB do AC tak się ma czas po AB do czasu po AC.²⁾

Tak samo dowieść można, że czas po AC do czasu po innej równi pochyłej AE ma się jak AC do AE; skąd *ex aequali*, czas po równi pochyłej AB do czasu po równi pochyłej AE ma się również jak AB do AE itd.

Możnaby jeszcze, zapomocą takiego samego szeregu twierdzeń, jak to zaraz zobaczy p. Sagredo, dowieść bezpośrednio szóstego podania autora; ale dość już tego zbaczania od przedmiotu, które mogło się Waszmościom wydać zbyt długiem, jakkolwiek przyniosło istotny pożytek w tej kwestji ruchu.

Sagredo: Przeciwnie, bardzo mi przypadło do gustu i było jaknajpotrzebniejsze do dokładnego zrozumienia tej zasady.

Salviati: Wracam więc do czytania tekstu.

Twierdzenie III. Podanie III

Jeżeli po równi pochyłej i po prostopadłej, jednakowej wysokości, wyrusza ze spoczynku toż samo ciało, to czasy tych ruchów będą się miały do siebie jak długości równi i prostopadłej.

Niech będzie (tab. III, rys. 52) równia pochyła AC i prostopadła AB, których wysokość jest jednakowa nad poziomem CB, jest nią mianowicie sama linja BA: twierdzą, że czas spadku tego ciała po równi AC do czasu spadku po prostopadłej AB, ma się tak, jak długość równi AC do długości prostopadłej AB. Poprowadźmy ja-

$$1) \quad AC = h, v = \sqrt{2gh}, t = \frac{v}{g}, v' = g \sin \alpha \cdot t', AB = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t'^2,$$

$$v' = g \sin \alpha \sqrt{\frac{2AB}{g \sin \alpha}} = \sqrt{2g \sin \alpha AB} = \sqrt{2g AC} = v \quad \text{P. T.}$$

$$2) \quad v = gt, v' = g \sin \alpha \cdot t', v = v', t : t' = \sin \alpha \cdot t = AC : AB. \quad \text{P. T.}$$

kierunków linie DG, EI, FL, równoległe do poziomu CB; wiadomo z wyłożonego, że stopnie prędkości ciała, biegnącego od pierwszego początku ruchu w A, nabyte w punktach G, D, są równe, bo zbliżenie do poziomu jest jednakie: podobnież takie będą stopnie w punktach I, E, jak również w L i F. Jeżeli poprowadzimy nie tylko te równoległe, lecz inne przechodzące przez wszystkie punkty linii AB i ciągnące się aż do linii BC, to w punktach końcowych każdej równoległej momenty czyli stopnie prędkości będą zawsze jednakowe. Drogi więc AC i AB przebiegane będą z tym samym stopniem prędkości. Lecz dowiedzione było, że jeżeli dwie drogi przebiegane są z temi samemi stopniami prędkości, to te drogi są proporcjonalne do czasów przebiegu; a więc czas spadania po AC ma się do czasu po AB, jak długość równi AC do długości prostopadłej AB, c. b. d. d. ¹⁾

Są g r e d o: Zdaje mi się, że możnaby to jasno i krótko wywieść z poprzedniego wniosku, orzekającego, że drogi przebyte ruchem przyspieszonym, wzdłuż AC i AB, są równe drogom przebytem ruchem jednostajnym ze stopniem prędkości równym połowie największego stopnia CB; skoro więc dwie drogi AC i AB przebiegane są tym samym ruchem jednostajnym, to oczywistem jest, na mocy pierwszego podania, że czasy przebiegu są proporcjonalne do dróg.

Wniosek

Wynika stąd, że czasy spadku, wzdłuż różnie nachylonych równi jednakiej wysokości są proporcjonalne do długości tych równi. Bo jeżeli jakakolwiek równia AM schodzi z tegoż samego punktu A i kończy się na tym samym poziomie CB, to tak samo dowieść można, że czasy spadku po AM i po AB są proporcjonalne do dróg AM i AB; ale jak czasy wzdłuż AB i AC, tak samo mają się do siebie linie AB i AC, a więc ex aequali jak AM do AC, tak się ma czas spadku po AM do czasu spadku po AC. ²⁾

Twierdzenie IV. Podanie IV

Czasy spadku wzdłuż jednakowo długich, a różnie nachylonych równi pochytych, są do siebie w stosunku odwrotnym pierwiastków kwadratowych z wysokości tych równi.

$$1) \quad h = \frac{1}{2} g t^2, \quad l = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t'^2, \quad l \sin \alpha = h = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t'^2, \quad \frac{t}{t'} = \sin \alpha = \frac{h}{l}.$$

P. T.

$$2) \quad t : t'' = l' : l''.$$

P. T.

Niech będą (tab. III, rys. 53), mające wspólny wierzchołek B, dwie równie jednakiej długości a niejednakowo nachylone BA, BC i poprowadzone linie poziome do prostopadłej BD: wysokość równi BA niech będzie BE, równi BC wysokość BD, a średnia proporcjonalna między wysokościami DB i BE niech będzie BI: wiadomo też, że stosunek DB do BI jest równy pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku DB do BE. Twierdząc, że czasy spadku, albo biegu po równiach BA i BC są do siebie w stosunku odwrotnym wysokości DB do BI: bo mianowicie do czasu spadku po BA odnosi się wysokość innej równi BC to jest BD, do czasu zaś po BC wysokość BI. Dowieść mamy zatem, że czas spadku po BA ma się do czasu po BC jak DB do BI. Poprowadźmy IS równoległą do DC; a ponieważ dowiedziono, że czas spadku po BA ma się do czasu spadku po prostopadłej BE jak BA do BE, czas zaś po BE do czasu po BD jak BE do BI a czas po BD do czasu po BC jak BD po BC, albo BI do BS; więc *ex aequali* będzie czas po BA do czasu po BC, jak BA do BS, albo jak CB do BS, będzie zatem CB do BS jak DB do BI, i twierdzenie jest dowiedzione.¹⁾

Twierdzenie V. Podanie V

Stosunek czasów spadku po równiach różnego nachylenia, różnej długości i różnej wysokości, składa się ze stosunku długości równi i odwrotnego stosunku pierwiastków kwadratowych z wysokości.

Niech będą (tab. III, rys. 54) równie AB, AC, różnie nachylone, których długości i wysokości są nierówne. Twierdząc, że stosunek czasu spadku po AC do czasu po AB, złożony jest ze stosunku AC do AB i z odwrotnego stosunku pierwiastków kwadratowych z wysokości tych równi. Poprowadźmy prostopadłą AD, którą spotkają poziome BG, CD i niech będzie AL średnia proporcjonalna między AG i AD; równoległą do poziomą, przeprowadzoną przez punkt L, spotka również AC w F i będzie AF średnią między CA i AE. A ponieważ czas po AC ma się do czasu po AE, jak linia FA do AE, czas zaś po AE do czasu po AB jak toż AE do tegoż AB: więc czas po AC do czasu po AB ma się jak AF do AB. Tak więc pozostaje nam dowieść, że stosunek AF do AB składa się ze stosunku CA do AB i stosunku GA do AL, który jest odwrotnym stosunkiem pierwiastków kwadratowych z DA i AG. To zaś jest oczywiste, po

¹⁾ $t = \frac{1}{2} g \frac{h}{1} t^2$, $t = \frac{1}{2} g \frac{h'}{1} t'^2$, $t : t' = \sqrt{h'} : \sqrt{h}$.

położeniu CA między FA i AB: stosunek bowiem FA do AC jest równy stosunkowi LA do AD czyli GA do AL, który jest pierwiastkiem kwadratowym stosunku wysokości GA, AD i stosunek CA do AB jest właśnie stosunkiem długości; więc twierdzenie jest dowiedzione.¹⁾

Twierdzenie VI. Podanie VI

Jeżeli, czy to z najwyższego punktu, czy też ze spodu koła, poprowadzimy jakiekolwiek równie pochyłe dochodzące do obwodu, to czasy spadku po tych równiach będą równe.

Niech będzie (tab. III, rys. 55) koło, postawione na poziomie GH, w którym przez spód t. j. punkt styczności z poziomem przechodzi średnica AF, a z najwyższego punktu A schodzą do obwodu równie pochyłe AB, AC. Twierdzą, że czasy spadku po tych równiach są sobie równe. Poprowadźmy BD, CE prostopadłe do średnicy i niech będzie AI średnia proporcjonalna między wysokościami równi EA, AD. Ponieważ prostokąty FAE, FAD są równe kwadratowi z AC i AB a prostokąt FAE ma się do prostokąta FAD, jak EA do AD, tak się więc ma kwadrat z CA do kwadratu z AB jak linia EA do linii AD. Że zaś, jak linia EA do DA, tak się ma kwadrat z IA do kwadratu z AD, więc kwadraty z linii CA, AB, mają się do siebie jak kwadraty z linii IA, AD i jak linia CA do AB tak się ma IA do AD. Poprzednio dowiedziono, że stosunek czasu spadku po AC do czasu spadku po AB składa się ze stosunków CA do AB i DA do AI, który ostatni jest równy stosunkowi BA do AC, więc stosunek czasu spadku po AC do czasu spadku po AB składa się ze stosunków CA do AB i BA do AC. Stosunek więc tych czasów jest stosunkiem równości, więc twierdzenie jest dowiedzione.²⁾

Tak samo wywodzi się z zasad mechaniki, że, jak na rysunku (tab. III, rys. 56), ciało przebiega w czasach równych drogi CA, DA. Bo weźmy BA równe DA i poprowadźmy prostopadłe BE i DF, to wiadomo z początków mechaniki że moment ciężaru podnoszonego po równi ABC ma się do całkowitego swego momentu jak BE do BA a moment tego samego ciężaru na równi AD do całkowitego swego momentu, jak DF do DA albo do BA: ma się

$$1) \quad l = \frac{1}{2} \frac{h}{l} v^2, \quad l' = \frac{1}{2} \frac{h'}{l'} v'^2, \quad \frac{l}{l'} = \frac{1}{1'} \frac{V_h}{V_{h'}}. \quad \text{P. T.}$$

$$2) \quad l = \frac{1}{2} g \frac{h}{l} v^2, \quad l' = \frac{1}{2} g h' v'^2, \quad l^2 = \frac{1}{2} g h' v'^2, \quad t = l'. \quad \text{P. T.}$$

więc moment tego samego ciężaru na równi pochyłej DA do momentu na równi pochyłej ABC jak linja DF do linji BE. Drogi przebyte w równych czasach przez ten sam ciężar po równiach CA i DA mieć się będą do siebie jak linje BE, DF, zgodnie z drugim podaniem pierwszej księgi. Ale jak BE do DF, dowiedzimy, że się ma AC do DA, a więc ciało przebiega drogi CA, DA, w czasach równych.

Że zaś BE ma się do DF jak CA do DA, to dowodzi się w sposób następujący:

Połączmy CD i przez D i B poprowadźmy równoległe do AF, mianowicie DGL, przecinającą CA w l i drugą BH: kąt ADI będzie równy kątowi DCA, bo obejmują one równe łuki LA, AD a kąt DAC jest wspólny: więc w trójkątach równokątnych CAD, DAI będą boki obejmujące kąty równe do siebie proporcjonalne i jak CA do AD tak się ma DA do AI, czyli BA do AI albo HA do AG albo BE do DF, c. b. d. d.

Krótsze jest następujące dowodzenie.

Niech będzie (tab. III, rys. 57) na poziomie AB postawione koło, którego średnica CD jest prostopadła do poziomemu; z jej górnego końca D schodzi do obwodu jakakolwiek równia pochyła DF. Twierdzę, że spadek po równi DF i swobodny spadek po średnicy DC tegoż samego ciała odbywa się w czasach równych. Poprowadźmy FG równoległą do poziomemu AB i prostopadłą do średnicy DC oraz połączmy F, C; ponieważ czas spadku po DC do czasu spadku po DG ma się jak średnia proporcjonalna między CD i DG do tegoż DG: średnią zaś między CD i DG jest DF, bo kąt DFC w półkolu jest prosty i FG prostopadła do DC: więc czas spadku po DC do czasu spadku po DG ma się jak linja FD do DG; czasy więc spadku po DF i po DC mają ten sam stosunek do DG, a więc są równe. W podobny sposób możnaby dowieść, że jeżeli przez najniższy punkt koła poprowadzona będzie cięciwa CE i równoległa do poziomemu EH i połączone punkty E i D, to czas spadku po EC jest równy czasowi spadku po DC.

Wniosek I

Wynika stąd, że czasy spadku po wszystkich przez C i D przechodzących cięciwach są równe.

Wniosek II

Wynika także, że jeżeli z jednego punktu schodzą prostopadła i równia pochyła, po których czasy spadku są równe, to mieszczą się one w półkolu, którego średnicą jest wymieniona prostopadła.

Wniosek III

Wynika jeszcze, że czasy spadku po równiach pochyłych są sobie równe wtedy, gdy wysokości równych części tych równi mają się do siebie jak długości tych równi; wiadomo bowiem, że czasy spadku po CA, DA, na przedostatnim rysunku, są równe, gdy wysokość części AB równej AD, mianowicie BE, tak się ma do wysokości DF, jak CA do DA.

Sagredo: Zechce Waszmość przerwać na chwilę czytanie, póki nie wyjaśnię sobie jednej myśli, którą właśnie powziąłem, a która, o ile nie jest mrzonką zbliża się do wdzięcznej igraszki, jak te wszystkie zdarzające się w naturze lub z konieczności.

Widocznem jest, że, jeżeli z jednego punktu płaszczyzny poziomej poprowadzimy na tej płaszczyźnie linje proste we wszystkich kierunkach i przypuścimy, że po każdej z tych linii porusza się jeden punkt ruchem jednostajnym, a przytem wszystkie te punkty wychodzą w tym samym czasie z punktu oznaczonego i prędkość ich jest jednakowa, to będą one wszystkie stale i zawsze znajdować się na wciąż rosnącym okręgu koła i wszystkie te koła mieć będą wspólny środek w punkcie oznaczonym, zupełnie w ten sam sposób, jak na powierzchni wody stojącej kamyk, który spada z wysokości wytwarza swem uderzeniem małe pole rozchodzące się we wszystkich kierunkach, wciąż rosnącemi kręgami. Lecz jeżeli ustawimy płaszczyznę prostopadle do poziomemu i u jej szczytu oznaczmy jeden punkt, z którego rozchodzić się będą na tej płaszczyźnie, w różnych kierunkach możliwych, linje nachylone, a po tych linjach spadać będą ciężary ruchem naturalnie przyspieszonym, to jak się ułożą te ciężary, przyjmując, że pozostają wciąż widocznymi? Budzi to mój podziw, że zgodnie z poprzednimi podaniami, widzieć będziemy zawsze, że wszystkie znajdują się na wciąż rosnącym okręgu koła, w miarę jak spadając oddalają się od punktu wyjścia: i dla lepszego objaśnienia (tab. III, rys. 58) naznaczymy punkt najwyższy A, z którego rozchodzą się linje jakkolwiek nachylone AF, AH, a także pionowa AB, na której leżą C, D, środki obu kół przechodzących przez A a przecinających obie linje nachylone w punktach F, H, B, E, G, I. Widocznem jest z poprzednich dowodzeń, że jeżeli ciała wyruszają równocześnie z A w różnych kierunkach, to znajdować się one będą równocześnie, jedno w E, drugie w G, trzecie w I i dalej spadając dojdą równocześnie do F, H, B i tak dalej, nieskończenie wiele ciał dochodzić będzie równo-

częśnie do coraz większych okręgów kół aż do nieskończoności. Z dwóch więc rodzajów ruchu, któremi posługuje się natura, powstaje cudownie odpowiadająca różność nieskończonej liczby kół. Tam widzimy siedlisko i początek w środku nieskończenie wielu kół spółśrodkowych a tu w najwyższym punkcie styczność nieskończenie wielu kół różnośrodkowych. Jedne powstają z ruchu równego i jednostajnego, a drugie z ruchów samych w sobie nierównych, różnych jeden od drugiego i odbywających się po nieskończonej liczbie różnych nachyleń. Ale dodamy nadto, że jeżeli z obu wymienionych punktów poprowadzimy linje, nie tylko na płaszczyźnie pionowej i poziomej ale we wszystkich kierunkach przestrzeni, to ujrzymy, zamiast kół wychodzących jak poprzednio z obu punktów, powstającą nieskończoność kul, albo lepiej kulę rosnącą do nieskończoności. I to w dwojaki sposób, raz z początkiem we środku a drugi raz na obwodzie takich kul.

Salviati: Jest to zaiste bardzo piękna myśl, odpowiadająca bystrości pana Sagredo.

Simplicio: Zrozumiałem tę myśl odnośnie do obu sposobów, w jaki się tworzą koła lub kule, odpowiednio do dwóch rodzajów ruchu naturalnego, jakkolwiek powstawanie kół przy ruchu przyspieszonym nie jest dla mnie jasne w swej całości; w każdym razie możliwość oznaczania początku ruchu, już to w środku już też na szczycie powierzchni kulistej, każe mi myśleć, że zachodzi tu może jaka wielka tajemnica, w tych prawdziwych a cudownych wnioskach; mam tu na myśli tajemnicę, dotyczącą stworzenia świata, uważanego jako mający kształt kulisty i siedliska pierwszej przyczyny.

Salviati: Nie wzbraniałbym się i w to uwierzyć, ale sędzę, że podobnie głębokie rozważania związane są z naukami, wyższymi od tych, jakie nas zajmują. Nam powinno wystarczać, gdy będziemy tymi podrzędniejszymi pracownikami, którzy odnajdują i wydobywają marmur w kopalni, z którego później pomysłowi rzeźbiarze tworzą cudowne postaci, znajdujące się w ukryciu pod grubą i bezkształtną powłoką. Jeżeli więc pozwolicie pójdziemy dalej.

Twierdzenie VII. Podanie VII

Jeżeli wysokości dwóch równi mają się do siebie jak kwadraty z ich długości, to czasy spadku po tych równiach od wyjścia ze spoczynku będą sobie równe.

Jeżeli równie nie jednakowo długie (tab. III, rys. 59) i nachylone AE, AB, mają wysokości FA, DA, to stosunek AE do AB jest równy stosunkowi kwadratów z FA i DA. Twierdzą, że czasy spadku po równiach AE i AB od wyjścia ze spoczynku w A są sobie równe. Poprowadźmy poziome równoległe, dochodzące do linii wysokości EF i BD, ostatnia przetnie AE w G. A ponieważ stosunek FA do AD jest równy stosunkowi kwadratów z EA i AB a tak się ma FA do AD jak EA do AG; więc stosunek EA do AG jest równy stosunkowi kwadratów z EA i AB; więc AB jest średnią proporcjonalną między EA i AG i ponieważ czas spadku po AB do czasu spadku po AG ma się jak AB do AG, a znów czas spadku po AG do czasu spadku po AE ma się jak AG do średniej proporcjonalnej między AG i AE, którą jest AB,—będzie się więc miał czas spadku po AB do czasu spadku po AE jak AB do siebie samego, czyli czasy te są równe, c. b. d. d.¹⁾

Twierdzenie VIII. Podanie VIII

Na równiach, wychodzących z punktów postawionego na poziomie okręgu koła, a dochodzących do dolnego lub górnego końca średnicy pionowej, czasy spadku są równe czasowi spadku po średnicy: na równiach nie dochodzących do średnicy są krótsze a na przecinających średnicę dłuższe.

Niech będzie (tab. III, rys. 60) średnica pionowa AB koła postawionego na poziomie. Dowiedziono już, że czasy spadku wzdłuż równi pochyłych, dochodzących do punktów A i B są sobie równe. Że czas spadku po równi DF nie dochodzącej do średnicy będzie krótszy, to widzimy poprowadziwszy równię DB, dłuższą i mniej nachyloną niż DF; czas więc spadku po DF jest krótszy niż po DB, to jest po AB. Tak samo pokazuje się, że czas po CO jest dłuższy, bo ta równia jest dłuższa i mniej nachylona niż CB; twierdzenie więc jest dowiedzione.

Twierdzenie IX. Podanie IX

Jeżeli z punktu, wziętego na linii poziomej, schodzą dwie jakkolwiek nachylone równie i zostaną przecięte linią tworzącą z nimi kąty, równe naprzemian nachyleniom równi, to czasy spadku po równiach, od punktu początkowego do przecięć z linią sieczną, będą sobie równe.

¹⁾ $l^2 = \frac{1}{2} g h t^2$, $l'^2 = \frac{1}{2} g h' t'^2$, $l^2 : l'^2 = h : h'$, $t = t'$.

P. T.

Z punktu C (tab. III, rys. 61), na poziomej LX schodzą dwie jakkolwiek nachylone równie CD, CE i utworzony przy jakimkolwiek punkcie linji CD kąt CDF jest równy kątowi XCE: linja DF przecina równię CE w F w ten sposób, że kąty CDF, CFD są równe kątom XCE, LCD. Twierdząc, że czasy spadania po CD i CF są sobie równe. Że zaś (przy założeniu, że kąt CDF jest równy kątowi XCE) kąt CFD jest równy kątowi DCL, to jest oczywiste. Odjawszy bowiem wspólny kąt DCF od trzech kątów trójkąta CDF, równych razem dwóm kątom prostym, którym znów są równe wszystkie kąty przy C pod linją LX, pozostaną w trójkącie dwa CDF, CFD równe dwóm XCE, LCD: z założenia zaś kąt CDF jest równy kątowi XCE: więc pozostały CFD równy pozostałemu DCL. Odetnijmy CE równe CD i z punktów D i E poprowadźmy prostopadłe DA, EB do poziomej XL, zaś z C spuśmy na DF prostopadłą CG. A ponieważ kąt CDG jest równy kątowi ECB, a kąty DGC, CBE są proste, przeto trójkąty CDG, CBE są równokątne i jak DC do CG, tak się ma CE do EB, że zaś $DC = CE$, więc $CG = BE$. Że zaś przytem w trójkątach DAC, CGF, kąty DCA, CAD są równe kątom GFC, CGF: więc jak CD do DA tak się ma FC do CG albo do BE. Stosunek więc wysokości równych równi CD, CE jest równy stosunkowi ich długości DC, CE: zatem według pierwszego wniosku poprzedniego twierdzenia szóstego, czasy spadku po nich będą równe, c. b. d. d.¹⁾

Inny dowód (tab. III, rys. 62) poprowadźmy FS prostopadłą do poziomemu AS. Ponieważ trójkąt CSF jest podobny do trójkąta DGC, więc jak SF do FC tak się ma GC do CD. Ponieważ trójkąt CFG jest podobny do trójkąta DCA, więc jak FC do CG tak się ma CD do DA: a więc tak się ma SF do CG jak CG do DA. Zatem CG jest średnią proporcjonalną między SF i DA i tak się ma DA do SF jak kwadrat z DA do kwadratu z CG. Z podobieństwa trójkątów ACD i CGF wynikało, że jak DA do DC tak GC do CF, albo przestawiając DA do CG jak DC do CF, oraz kwadrat z DA do kwadratu z CG jak kwadrat z DC do kwadratu z CF. Ale dowiedziono już, że kwadrat z DA ma się do kwadratu z CG, jak linja DA do linji SF; zatem jak kwadrat z DC do kwadratu z CF tak się ma linja DA do FS, na mocy zaś siódmego podania, skoro wysokości równi CD i CF, to jest DA i FS, mają się do siebie jak kwadraty z długości tych równi, to czasy spadku po tych równiach są sobie równe.

¹⁾ $l = \frac{1}{2} g \sin LCD \cdot t^2$, $l' = \frac{1}{2} g \sin BCE \cdot t'^2$, $l:l' = \sin LCD : \sin BCE$, $t = t'$. P. T.

Twierdzenie X. Podanie X

Czasy spadku po równiach różnego nachylenia a równej wysokości, mają się do siebie jak długości tych równi, bez względu na to, czy ruch się zaczyna od punktu wyjścia ze spoczynku czy też od punktów jednakiej wysokości.

Niech będą (tab. III, rys. 63) ruchy, po ABC i po ABD aż do poziomu DC, takie że ruch po AB poprzedza ruchy po BD i BC. Twierdzą, że czas ruchu po BD, do czasu po BC, ma się jak długość BD, do długości BC. Poprowadźmy AF równoległą do poziomu i przedłużmy DB do spotkania się z nią w F, a FE niech będzie średnią proporcjonalną między DF i FB, zaś po nakreśleniu OE równoległej do DC, AO średnią proporcjonalną między CA i AB. Jeżeli czas spadku po AB jest równy AB, to czas spadku po FB jest równy FB. Czas spadku po AC będzie więc mierzony przez AO a czas spadku po FD przez FE. Czas spadku po różnicy BC będzie więc BO a po różnicy BD będzie równy BE. Ale jak BC do BO, tak się ma BD do BC; więc czasy spadków po BD i BC następujących po spadkach wzdłuż AB i FB, albo co na jedno wychodzi wzdłuż wspólnej drogi AB, mają się do siebie jak długości BD i BC; że zaś czas po BD do czasu po BC, od chwili wyjścia ze spoczynku B, ma się jak długość BD do BC, to dowiedziono wyżej. A więc czasy spadku po różnych równiach jednakiej wysokości mają się do siebie jak długości tych równi, czy to gdy ruch zaczyna się od spoczynku, czy też, jeżeli poprzedzają go inne ruchy, gdy się zaczyna od tej samej wysokości, c.b.d.d.¹⁾

Twierdzenie XI. Podanie XI

Jeżeli równia, po której odbywa się ruch, zaczynając od spoczynku, w jakikolwiek sposób zostanie podzielona, to czasy spadku po dwóch jej częściach mają do siebie jak długość pierwszej części do przewyżki ponad tę część średniej geometrycznej, między długością całej równi a tą pierwszą częścią²⁾.

Ruch (tab. III, rys. 64), poczynszy od spoczynku w A, odbywa się po AB podzielonej jakkolwiek w C; całej zaś AB i pierwszej jej części AC średnia geometryczna niech będzie AF: przewyżka więc średniej AF nad częścią AC będzie CF: Twierdzą, że czas

¹⁾ $v = a + gt$, $v' = a + g \sin \alpha \cdot t'$, $v = v'$, $t = t' \sin \alpha$, $t : t' = h : l$. P. T.

²⁾ $h = \frac{1}{2} gt^2$, $h' = \frac{1}{2} gt'^2$, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $t' = \sqrt{\frac{2h'}{g}}$, $t' - t = \sqrt{\frac{2}{g}} (V_{h'} - V_h)$, $t : (t' - t) = V_h : V_{h'} - V_h = h : V_{hh'} - h$. P. T.

spadku po AC do czasu dalszego spadku po CB, ma się jak AC do CF. Ponieważ czas spadku po AC do czasu po całej drodze AB ma się jak AC do średniej AF; więc rozdzielając mamy czas po AC do czasu po reszcie CB jak AC do CF. Jeżeli więc czasem spadku po AC jest samo AC, to czasem po CB będzie CF; co było d.d.

Ale jeżeli ruch się odbywa (tab. III, rys. 65) nie po przedłużeniu ACB, lecz po wygięciu ACD aż do poziomu BD, do którego z F poprowadzona jest równoległa FE, to dowieść można tak samo, że czas AC do czasu po wygiętej CD ma się jak AC do CE. Albowiem czas po AC do czasu po CB jest jak AC do CF, a czas po CB w dalszym ciągu spadku AC do czasu po CD w dalszym ciągu tegoż spadku po AC, jak dowiedziono, ma się jak CB do CD, czyli jak CF do CE; a więc czas po AC do czasu po CD będzie jak linja AC do CE.

Twierdzenie XII. Podanie XII

Jeżeli prostopadła i równia jakkolwiek nachylona przecinają się między dwiema linjami poziomymi i jeżeli weźmiemy średnie proporcjonalne między ich długościami a długościami ich części zawartych między wzajemnem ich przecięciem a górną linję poziomą, to czas spadku po prostopadłej ma się do czasu spadku po linji złożonej z górnej części prostopadłej i dolnej nachylonej jak cała długość prostopadłej do sumy dwóch dróg, z których jedna jest średnią proporcjonalną między prostopadłemi a druga przewyżką całej równi pochyłej nad średnią proporcjonalną między długościami całej równi i jej części dolnej.

Niech będą (tab. III, rys. 66) poziomy, górny AF, dolny CD, między którymi przecinają się w B prostopadła AC i równia pochyła DF; średnia proporcjonalna między całą prostopadłą CA a jej częścią górną AB niech będzie AR, a między całą DF a częścią górną BF niech będzie FS. Twierdzą, że czas spadku po całej prostopadłej AC do czasu spadku po jej części górnej AB i po dolnej części równi pochyłej BD ma się jak AC do średniej między prostopadłemi czyli AR, zwiększonej przewyżką równi FD ponad średnią FS czyli linją SD. Poprowadźmy RS, która będzie równoległą do poziomej. A ponieważ czas spadku po całej AC ma się do czasu po części AB jak CA do średniej AR, to przyjmując, że AC jest czasem spadku po AC, będzie AR czasem spadku po AB a RC czasem spadku po BC. Ale skoro przyjmujemy, że czasem spadku po AC jest samo AC, to będzie także FD czasem spadku po FD i podobnie wywnioskujemy, że DS jest czasem spadku po DB na-

stępującego po spadku po BF lub AB. A więc czas spadku po całej AC jest AR razem z RC a po załamanej ABD będzie AR razem z SD, co było d. d.

Toż samo ma miejsce, jeżeli zamiast prostopadłej weźmiemy inną równie, np. NO; dowodzenie będzie także także samo.

Zadanie I. Podanie XIII

Mając daną prostopadłą, dostawić do jej spodu równie pochyłą, tej samej wysokości, ale taką aby spadek po niej, następujący w dalszym ciągu spadku po prostopadłej, odbywał się w tym samym czasie, jak po prostopadłej od wyjścia ze spoczynku.

Niech będzie dana (tab. III, rys. 67) prostopadła AB, na której przedłużeniu do C odcinamy równą jej część BC i poprowadźmy poziome EC, AG. Z B ma schodzić równia nachylona do poziomemu CE, tak aby spadek po niej, następujący po spadku po AB, odbywał się w tym samym czasie, co spadek po AB od wyjścia ze spoczynku w A. Położmy CD równe CB, poprowadźmy BD i weźmy BE równe obu BD, DC. Twierdzę, że BC będzie żadaną równią. Przedłużmy BE do spotkania poziomu AG w G, i niech będzie GF średnią proporcjonalną między EG i GB. Będziemy mieli EF do FB jak EG do GF oraz kwadrat z EF do kwadratu z FB jak kwadrat z EG do kwadratu z GF, to jest jak linja EG do GB; ale EG jest dwa razy większe od GB; więc kwadrat z EF jest dwa razy większy od kwadratu z FB; ale także kwadrat z DB jest dwa razy większy od kwadratu z BC; a więc tak się ma linja EF do FB jak DB do BC, a po wzięciu sum i przestawieniu, EB do obu DB i BC jak BF do BC; ale BE jest równe sumie DB i BC, więc BF jest równe BC albo BA. Jeżeli więc przyjmujemy AB za miarę czasu spadania po AB, to GB będzie czasem spadania po GB a GF czasem spadania po całym GE; więc BF będzie czasem spadania po reszcie BE, następującego po spadku z G albo z A. Co było d. d.

Zadanie II. Podanie XIV

Dane są: prostopadła i równia do niej nachylona; odciąć długość na górnej części prostopadłej taką, aby od wyjścia ze spoczynku w tym samym czasie została przebyta co i równia pochyła w dalszym ciągu spadku po przebyciu szukanego odcinka.

Niech będzie (tab. IV, rys. 68) prostopadła DB i równia do niej nachylona AC. Trzeba na prostopadłej AD wyznaczyć odcinek,

któryby był w tym samym czasie przebyty po wyjściu ze spoczynku co i równia AC w dalszym ciągu tego spadku. Poprowadźmy poziomą CB, a otrzymamy, że BA razem z podwójną AC ma się do AC jak CA do AE, oraz że tak się ma BA do AC jak EA do AR, a przez R poprowadźmy RX prostopadłą do DB; twierdząc, że X będzie szukany punktem. A ponieważ tak się ma BA razem z podwojoną AC do AC, jak CA do AE, więc BA razem z AC do AC jak CE do EA i ponieważ BA do AC jak EA do AR, więc BA razem z AC do AC jak ER do RA. Ale jak BA razem z AC do AC tak się ma CE do EA; więc jak CE do EA tak się ma ER do RA i także jak suma pierwszych wyrazów obu stosunków do sumy drugich wyrazów t.j. jak CR do RE. A więc RE jest średnią proporcjonalną między CR i RA. Dalej, ponieważ z założenia tak się ma BA do AC jak EA do AR, a z powodu podobieństwa trójkątów BA do AC jak XA do AR; więc jak EA do AR, tak się ma XA do AR, a więc EA i XA są równe. Jeżeli zatem czas spadku po BA jest równy BA, a po RC równy RE średniej proporcjonalnej między CR i RA, to AE będzie czasem spadku po AC po przebyciu drogi RA lub XA; ale XA jest czasem spadku po XA, skoro RA jest czasem spadku po RA. Ponieważ zaś XA jest równe AE, więc czasy spadku są równe, c. b. d. d.

Zadanie III. Podanie XV

Dane są: prostopadła i równia do niej nachylona; na dolnem przedłużeniu prostopadłej wyznaczyć odcinek, któryby w dalszym ciągu spadku wzdłuż danej prostopadłej, przebyty był w tym samym czasie co i równia pochyła w dalszym ciągu tegoż spadku.

Niech będzie (tab. IV, rys. 69) prostopadła AB i równia do niej nachylona BC. Trzeba na dolnem przedłużeniu prostopadłej wyznaczyć odcinek któryby przy spadku z A przebyty był w tym samym czasie co i BC przy spadku z A. Poprowadźmy poziomą AD, która przedłużenie CB spotyka w D i niech będzie DE średnią proporcjonalną między CD i DB, BF równe BE, a AG trzecią proporcjonalną do BA i AF¹⁾. Twierdząc, że BG będzie tym odcinkiem, który w dalszym ciągu spadku po AB przebyty będzie w tym samym czasie co równia BC w dalszym ciągu tegoż spadku. Bo jeżeli miarą czasu spadku po AB jest AB, to czasem spadku po DB będzie DB a ponieważ DE jest średnią proporcjonalną między BD i DC,

¹⁾ $BA : AF = AF : AG$

P. T.

będzie także DE czasem spadku po całej DC, a BE czasem spadku po całej DC, a BE czasem spadku po BC po wyjściu ze spoczynku w D, albo w dalszym ciągu spadku po AB; tak samo znajdziemy, że BF jest czasem spadku po BG, w dalszym ciągu spadku po AB, a skoro BF jest równe BE, to twierdzenie jest dowiedzione.

Twierdzenie XIII. Podanie XVI

Jeżeli części równi pochylej i prostopadłej, czasy spadku po których od wyjścia ze spoczynku są równe, zaczynają się w jednym i tym samym punkcie, to ciało spadające z jakiegokolwiek wysokości, przebywać będzie drogę po równi pochylej prędzej niż po prostopadłej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 70) prostopadła EB i równia pochyła CE wychodząca z tegoż samego punktu E, czasy spadku po których, od wyjścia ze spoczynku w E są równe oraz na przedłużeniu w górę prostopadłej obrany punkt A, z którego spadają ciała. Twierzę, że w dalszym ciągu spadku po AE, ciało przeleci prędzej po równi pochylej EC aniżeli po prostopadłej EB. Połączmy CB, poprowadźmy poziomą AD, przedłużmy CE do spotkania z nią w D i niech będzie DF średnia proporcjonalna między CD i DE, AG także średnia proporcjonalna między BA i AE i poprowadźmy FG i DG. Ponieważ czasy spadku po EC i EB po wyjściu ze spoczynku w E są równe, więc kąt ECB jest prosty wedle drugiego wniosku szóstego podania: prosty jest także kąt A, a kąty przy wierzchołku E równe sobie: trójkąty zatem AED, CEB są podobne i boki ich obejmujące kąty równe są proporcjonalne; a więc tak się ma BE do EC jak DE do EA. Prostokąt więc BEA jest równy prostokątowi CED: a ponieważ prostokąt CDE przewyższa prostokąt CED o kwadrat z ED, a prostokąt BAE przewyższa prostokąt BEA o kwadrat z EA, to przewyżka prostokąta CDE nad prostokątem BAE, albo, co na jedno wychodzi, przewyżka kwadratu z FD nad kwadratem z AG, jest równa przewyżce kwadratu z DE nad kwadratem z AE, która ostatnia jest równa kwadratowi z DA; jest więc kwadrat z FD równy dwom kwadratom z GA i AD, którym jest równy kwadrat z DG; więc linja DF jest równa DG i kąt DGF równy kątowi DFG, a kąt EGF mniejszy od kąta EFG i bok przeciwny EF mniejszy od boku EG. Jeżeli AE jest czasem spadku po AE, to DE będzie czasem spadku po DE; że zaś AG jest średnią proporcjonalną między BA i AE, więc AG będzie czasem spadku po całej AB, a reszta EG czasem spadku po reszcie EB po

wyjściu ze spoczynku w A; tak samo znajdziemy, że EF jest czasem spadku po EC w dalszym ciągu spadku po DE albo po AE, a dowiedziono, że EF jest mniejsze od EG; twierdzenie więc jest dowiedzione.

Wniosek

Z tego i z poprzedniego wynika, że droga, która po spadku z wyższego punktu przebywana jest w tym samym czasie po prostopadłej i po równi pochyłej, jest mniejszą od drogi, przebytej w tym samym czasie po równi pochyłej, ale niepoprzedzonej spadkiem z wyższego punktu, a znów większą od samej równi pochyłej, gdyż dowiedziono poprzednio, że w dalszym ciągu (tab. IV, rys. 71) spadku z wyższego punktu A czas spadku wzdłuż EC jest krótszy niż poprzedzający po EB, a więc droga przebywana w czasie spadku po EB równym czasowi spadku po EC jest mniejsza od całej drogi EB. Że zaś ta droga prostopadła jest większa od EC, to okaże się jasnym po rozpatrzeniu rysunku poprzedniego podania, gdzie dowiedziono, że droga prostopadła BG przebyta zostaje w tym samym czasie co i droga BC w dalszym ciągu spadku po AB: że zaś BG jest większe od BC, tak się dowodzi. Ponieważ BE i FB są sobie równe, a BA mniejsze od BD, przeto większy jest stosunek FB do BA aniżeli EB do BD, a stąd FA do AB większy aniżeli ED do DB; tak się ma zatem FA do AB jak GF do FB (jest bowiem AF średnią proporcjonalną między BA i AG), i podobnie jak ED do BD, tak się ma CE do EB; więc stosunek GB do BF jest większy aniżeli CB do BE, a więc GB większe od BC.

Zadanie IV. Podanie XVII

Dane są: prostopadła i dochodząca do niej równia pochyła. Oznaczyć na tej ostatniej drodze, któraby w dalszym ciągu spadku po prostopadłej, przebyta była w tym samym czasie, co droga po prostopadłej od wyjścia ze spoczynku.

Niech będzie (tab. IV, rys. 72) prostopadła AB i równia pochyła EB: oznaczyć trzeba na BE drogę, któraby w dalszym ciągu spadku po AB przebyta była w tym samym czasie, co prostopadła AB po wyjściu ze spoczynku.

Niech będzie linja pozioma AD, spotykająca w D przedłużenie równi pochyłej, odetnijmy $FB=BA$ i niech będzie BD do DF jak FD do DE. Twierdzę, że czas po BE, w dalszym ciągu spadku po AB,

jest równy czasowi po AB, od wyjścia ze spoczynku w A. Skoro przyjmujemy, że AB jest czasem spadku po AB, to DB będzie czasem spadku po DB. A ponieważ tak się ma BD do DF jak FD do DE, to DF będzie czasem spadku po całej równi DE, a BF czasem spadku po jej części BE, zaczynając od D; ale czas spadku BE w dalszym ciągu DB jest ten sam co w dalszym ciągu AB; a więc czas po BE w dalszym ciągu AB będzie BF, czyli równy czasowi AB po wyjściu ze spoczynku w A, co miało być dowiedzionem.

Zadanie V. Podanie XVIII

Na prostopadłej, od początku ruchu, odcięta jest droga przebywana w danym czasie, i dany jest inny czas krótszy; oznaczyć na tej prostopadłej inną drogę, która byłaby przebyta w tym danym krótszym czasie.

Niech będzie (tab. IV, rys. 73) prostopadła A, na której dana jest droga AB, po której czas spadku od początku w A niech będzie AB, oraz poziom CBE i dany czas mniejszy od AB, oznaczony na poziomie przez BC; na tej prostopadłej ma być oznaczona droga równa AB, która byłaby przebyta w czasie BC. Poprowadźmy linią AC. Ponieważ BC jest mniejsze od BA, to kąt BAC jest mniejszy od BCA. Zbudujmy równy temu ostatniemu kąt CAE i linia AE spotka poziom w punkcie E, poprowadźmy do tej linii prostopadłą ED, która przetnie daną prostopadłą w punkcie D i odcenijmy $DF = BA$. Twierdzę, że FD będzie tą częścią prostopadłej, po której spadek będzie się odbywał w ciągu danego czasu BC, jeżeli ruch zaczynał się od A. Że zaś w trójkącie prostokątnym AED z wierzchołka kąta prostego E schodzi EB prostopadła do AD, to AE będzie średnią proporcjonalną między DA i AB, a BE średnią między DB i BA, czyli między FA i AB (bo $FA = DB$). Jeżeli więc AB jest z założenia czasem spadku po AB z początkiem w A, to AE albo EC będzie czasem spadku po AF, a reszta BC czasem spadku po reszcie FD, co miało być dowiedzionem.

Zadanie VI. Podanie XIX

Dana jest jakakolwiek droga na prostopadłej, od punktu wyjścia ze spoczynku i dany czas spadku: oznaczyć czas, w ciągu którego przebieżona zostanie przez toż samo ciało droga tej samej długości, wzięta w innem miejscu prostopadłej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 74) na prostopadłej AB jakakolwiek

droga AC, od początku ruchu w A i niech będzie równa jej inna droga DB, gdziekolwiek wzięta, oraz dany czas spadku po AC, to jest samo AC. Oznaczyć trzeba czas spadku po DB, następującego w dalszym ciągu spadku z A. Na całej AB zakresłmy półkole AEB i niech będzie CE prostopadła z C do AB; połączmy AE, a linja ta będzie większą od EC. Odetnijmy $EF = EC$; twierdzą, że reszta FA będzie czasem spadku po DB. Albowiem AE jest średnią proporcjonalną między BA i AC; a że AC jest czasem spadku po AC to AE będzie czasem spadku po AB. Że zaś CE jest średnią proporcjonalną między DA i AC (bo $DA = BC$), to będzie CE czyli EF czasem spadku po AD; więc reszta AF jest czasem spadku po reszcie DB, co należało dowieść.

Wniosek

Wynika stąd, że jeżeli czas spadku po jakiej drodze, od punktu wyjścia ze spoczynku, jest równy tej drodze, to czas spadku po tej drodze, w dalszym ciągu spadku po części dodanej, będzie równy przewyżce, średniej proporcjonalnej między sumą obu dróg i daną drogą, ponad średnią proporcjonalną między daną drogą i częścią dodaną. Bo jeżeli (tab. IV, rys. 75) czas spadku po AB, od punktu wyjścia ze spoczynku w A jest AB, to po dodaniu części AS mieć będziemy czas spadku po AB w dalszym ciągu spadku po SA równy przewyżce średniej proporcjonalnej między SB i BA, ponad średnią proporcjonalną między BA i AS.

Zadanie VII. Podanie XX

Dana jest jakakolwiek droga i na niej część przy początku; oznaczyć inną część na drugim końcu, któraby była przebieżona w tym samym czasie co i pierwsza część dana.

Niech będzie (tab. IV, rys. 76) droga CB a na niej część CD przy początku spadku C. Oznaczyć przy drugim końcu B inną część, która byłaby przebiegana w tym samym czasie jak dana CD. Weźmy średnią proporcjonalną między BC i CD i niech nią będzie BA; a trzecią proporcjonalną dla BC i CA niech będzie CE.¹⁾ Twierdzą, że EB jest tą drogą, która w dalszym ciągu spadku z C przebyta będzie w tym samym czasie co i CD. Jeżeli bowiem czas spadku wzdłuż całego CB jest CB, to BA (średnia proporcjonalna między BC i CD) będzie czasem spadku wzdłuż CD. A że CA jest

¹⁾ $BC : CA = CA : CE$.

średnią proporcjonalną między BC i CE to będzie CA czasem spadku po CE: ale BC jest czasem spadku po całym CB, więc reszta BA będzie czasem spadku po reszcie EB, w dalszym ciągu spadku z C; a że toż samo BA było czasem spadku po CD, więc drogi CD i EB przebyte będą w równych czasach po wyjściu ze spoczynku w C, co miało być dowiedzionem.

Twierdzenie XIV. Podanie XXI

Jeżeli spadek odbywa się po prostopadłej od wyjścia ze spoczynku i od początku ruchu przebieżona zostanie pewna część drogi w ciągu pewnego czasu, a następnie ciało spada po jakiegokolwiek równi pochyłej, to droga, w tym samym czasie po tej równi przebieżona, będzie od drogi przebieżonej po prostopadłej więcej niż dwa razy, a mniej niż trzy razy większą.

Pod poziomem (tab. IV, rys. 77) AE niech będzie prostopadła AB po której odbywa się spadek, zaczynając od A i bierzemy jego jakąkolwiek część AC; w dalszym ciągu spadek odbywa się po jakiegokolwiek równi pochyłej CG, schodzącej z punktu C. Twierdzę że droga przebyta wzdłuż CG, w ciągu czasu równego czasowi spadku po AC, jest więcej niż dwa razy a mniej niż trzy razy większą od AC. Odetnijmy $CF = AC$ i przedłużmy równię GC aż do poziomu w E, a będzie CE do EF jak FE do EG. Jeżeli więc AC jest czasem spadku po AC, to EC będzie czasem spadku po EC, a CF albo CA czasem spadku po CG. Wykazać trzeba przeto, że CG jest więcej niż dwa razy, a mniej niż trzy razy, większe od CA. A że mamy CE do EF, jak FE do EG, więc także jak CF do FG. Ale EC jest mniejsze od EF a także CF mniejsze od FG i GC większe od podwójnego FC lub AC. Ponieważ znów FE jest mniejsze od podwójnego EC (bo EC większe od CA albo od CF), więc GF jest mniejsze od podwójnego FC, a GC mniejsze od potrójnego CF albo CA. Co było do dowiedzenia.

Możnaby także postawić zasadę ogólniejszą, że to, co się odnosi do prostopadłej i do równi pochyłej, odnosi się także do przypadku, gdy po ruchu po równi jakkolwiek nachylonej, następuje ruch po równi więcej nachylonej, jak to pokazuje drugi rysunek: dowodzenie będzie także samo.

Zadanie VIII. Podanie XXII

Dane są dwa nierówne odstępy czasu, oraz droga wzdłuż prostopadłej przebywana po wyjściu ze spoczynku w ciągu krótszego

odstępu; poprowadzić z wierzchołku prostopadłej równię pochyłą taką, aby dochodziła do poziomu i była przebyta w ciągu dłuższego z dwóch danych odstępów czasu.

Niech będą (tab. IV, rys. 78) czasy nierówne A większy i B mniejszy i droga CD przebywana wzdłuż prostopadłej po wyjściu ze spoczynku w ciągu czasu B. Mamy poprowadzić z końca C równię pochyłą dochodzącą do poziomu, która byłaby przebywana w ciągu czasu A. Niech będzie jak B do A, tak CD do innej linii, której równa CX schodzi z C do poziomu: oczywiście będzie CX szukaną równią, po której ciało przebiegnie w ciągu danego czasu A. Dowiedziono bowiem, że czas biegu po równi jest w tym stosunku do czasu biegu po jej wysokości, jak długość równi do jej wysokości. Czas zaś po CX do czasu po CD ma się jak CX do CD, to jest jak czas A do czasu B: czas zaś B jest czasem spadku po CD od wyjścia ze spoczynku, a czas A czasem spadku po równi CX.

Zadanie IX. Podanie XXIII

Dana jest droga po prostopadłej, przebieżona od początku wyjścia ze spoczynku; przeprowadzić przez jej koniec równię pochyłą taką, aby w dalszym ciągu spadku po prostopadłej, część jej danej długości w tym samym czasie była przebieżona i aby ta część była większa niż dwa razy a mniejsza niż trzy razy dana droga po prostopadłej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 79) na prostopadłej AS w ciągu czasu AC przebieżona droga AC od punktu wyjścia ze spoczynku w A, od której IR jest większe niż dwa a mniejsze niż trzy razy. Z końca C mamy przeprowadzić równię pochyłą, po którejby ciało, spadające w dalszym ciągu spadku po AC, przebywało drogę równą IR, w ciągu tegoż samego czasu AC. Niech będą RN, NM, równe AC i jak reszta IM do MN niech się ma AC do innej linii, której równą odcinamy od C do poziomu AE, przedłużamy do O i odcinamy CF, FG, GO, równe RN, MN, MI. Twierdzę, że czas spadku po równi pochyłej CO, w dalszym ciągu spadku po AC, jest równy czasowi AC od wyjścia ze spoczynku w A. Ponieważ bowiem tak się ma OG do GF jak FC do CE, więc także sumy wyrazów stosunków do ich następników OF do FG czyli do FC, jak FE do EC i dalej suma obu liczników do drugiego licznika t. j. całe OE do EF jak FE do EC. Więc OE, EF, EC tworzą proporcję ciągłą, a ponieważ AC jest czasem spadku po AC, CE czasem spadku po EC a EF czasem spadku po całej równi EO, to reszta CF czasem

spadku po reszcie CO. Że zaś $CF = CA$, dowiedziono więc czego należało dowieść; jest więc CA, czas spadku po AC po wyjściu ze spoczynku w A, równy CF czasowi spadku po CO w dalszym ciągu spadku po EC albo spadku po AC. Zauważyć należy, że toż samo ma miejsce, jeżeli ruch poprzedzający odbywa się nie po prostopadłej, ale po równi pochyłej, jak na następującym rysunku, gdzie ruch poprzedzający odbywa się po równi pochyłej AS, pod poziomem AE; zresztą dowodzenie jest także samo.

Scholi um

Rozpatrując uważnie widzimy, że im mniejsza jest różnica (tab. IV, rys. 80) pomiędzy linią IR a potrojonem AC, tem więcej zbliża się równia pochyła drugiego ruchu to jest CO do prostopadłej, po której w końcu przebieżoną zostaje w czasie równym AC, droga równa potrojonemu AC. Bo im więcej IR zbliża się do potrojonego AC, tem bliższe będzie IM zrównania się z MN. A ponieważ jak IM do MN na rysunku, tak będzie AC do CE, to CE będzie mało co większem od AC i co zatem idzie punkt E bardzo bliskim punktu A, a CO i CS przecinać się będą pod bardzo ostrym kątem, zlewając się ze sobą. Ale znów jeżeli IR będzie bardzo mało większa od podwojonego tegoż AC to IM będzie króciuchną linią wskutek czego AC będzie bardzo małym w porównaniu z CE, które stanie się bardzo długiem i zbliżyć się będzie do równoległej do poziomu, poprowadzonej przez C. Wnosić stąd można, że jeżeli, jak na rysunku, w dalszym ciągu spadku po równi pochyłej AC następuje odbicie, kierujące ciało wzdłuż linii poziomej, jaką jest CT, to w ciągu czasu równego AC, ciało przebiegnie drogę równą zdwojonemu AC. I tu więc, jak widzimy, stosuje się podobne rozumowanie. Wynika zaś stąd, że ponieważ tak się ma OE do OF jak FE do EC, to FC jest miarą czasu spadku po CO. Ale jeżeli część pozioma TC, jest równa zdwojonemu AC, to przepołówmy ją w V, a jej przedłużenie ku X będzie nieskończenie wielkie, gdyż jej przecięcie z AE wymaga, aby stosunek nieskończonego TX do nieskończonego VX nie był inny jak stosunek nieskończonego VX do nieskończonego XC.

Do tego samego wyniku dojśćby można inną drogą, powtarzając rozumowanie użyte przy dowodzeniu pierwszego podania. Bo weźmy pod uwagę (tab. IV, rys. 81) trójkąt ABC, w którym linie równoległe do podstawy BC przedstawiają stopnie prędkości odpowiadające rosnącym czasom spadku; linjami temi, ponieważ jest ich

nieskończenie wiele, jak i punktów na linii AC i chwil w każdym czasie, wypełniona jest cała powierzchnia trójkąta. Jeżeli przyjmujemy, że ruch odbywać się będzie w ciągu tego samego czasu, co ruch poprzedni, ale już nie jako przyspieszony, tylko jako jednostajny, z największym stopniem prędkości nabytej, której to stopień przedstawia linja BC, to z tych stopni prędkości złoży się prostokąt ADBC, będący zdwojeniem trójkąta ABC. Droga przebyta tym ruchem jednostajnym będzie równa podwójnej drodze przebytej ze stopniami prędkości, jakie przedstawia trójkąt ABC. Ale na płaszczyźnie poziomej ruch jest jednostajny, bo niema tam żadnej przyczyny przyspieszenia lub opóźnienia; wynika stąd, że droga CD przebyta w czasie AC będzie dwa razy większa od drogi AC, bo ruch przyspieszony odbywa się, od wyjścia ze spoczynku, według równoległych trójkąta a ruch jednostajny według równoległych prostokąta, które, w swej liczbie nieskończone, wynoszą dwa razy tyle, co nieskończone również równoległe trójkąta.

Zauważyć wypada nadto, że stopień prędkości, jakkolwiek się w ciele objawia, jest w niem niezniszczalnie zawarty, podczas gdy przyczyny zewnętrzne wytwarzają przyspieszenie lub opóźnienie, co tylko spostrzec można na płaszczyźnie poziomej: bo przy spadku po pochyłości dołącza się przyczyna przyspieszenia, a przy podnoszeniu się — opóźnienia. Wynika stąd również, że ruch po poziomie jest także wieczny, bo gdy pozostaje zawsze jednaki, nie osłabia się ani wzmacnia, nie zmniejsza się i nie powiększa. I dalej, ponieważ osiągany przy swobodnym spadku stopień prędkości, jest niezniszczalną i wieczną ciała spadającego własnością, to jasnym jest, że gdy po spadku wzdłuż równi pochyłej następuje odbicie na inną równię podnoszącą się, to tam zjawia się przyczyna opóźnienia; gdyż na takiej równi toż samo ciało swobodnie spada, bo następuje tam zmieszanie przeciwnych sobie skłonności, to jest stopnia prędkości osiągniętego przy poprzednim spadaniu, któryby sam przez się ciało do nieskończoności jednostajnie posuwał i naturalnej skłonności do ruchu z góry nadół, z tym samym stosunkiem przyspieszenia, według którego ciało zawsze się porusza. Wydaje się przeto zrozumiałem, jeżeli badamy zaznaczone przyczyny, że ciało, które spadało wzdłuż równi pochyłej i zostało odbite na równię podnoszącą się, zatrzymuje w sobie osiągnięty przy spadku stopień prędkości, jednocześnie wszakże poddaje się naturalnej skłonności do spadania, to jest ruchowi od wyjścia ze spoczynku przyspieszonemu, w stosunku zawsze przyjmowanemu. Co,

gdyby dla dobrego zrozumienia było nieco ciemne, jaśniej wyłożone zostanie na rysunku.

Przypuśćmy, że spadek się odbywa (tab. IV, rys. 82) po równi pochyłej AB, poczem, wzdłuż innej równi podnoszącej się BC, następuje ruch odbity, oraz że te równie są jednakiej długości i pod jednakimi kątami nachylone do poziomu GH. Wiadomo, że ciało, wychodzące ze spoczynku w A i spadające po, AB osiąga stopnie prędkości w miarę wzrostu czasu; stopień w B, największy z osiągniętych, będzie z natury niezmiennie pozostawał w ciele, jeżeli się nie zjawia nowe przyczyny przyspieszenia lub opóźnienia; przyspieszenia, jeżeli ciało dalej spada, opóźnienia — jeżeli po odbiciu podnosi się wzdłuż BC: na poziomej zaś GH ruch ciągnąłby się do nieskończoności ze stopniem prędkości osiągniętym przez spadek od A do B. A prędkość ta jest taka, że w ciągu czasu równego czasowi spadku wzdłuż AB, przebieżonaby została wzdłuż poziomej droga równa 2AB. Przypuśćmy teraz, że ciało porusza się z tym samym stopniem prędkości jednostajnie wzdłuż BC, w ten sposób, że w tym samym, co dopiero wymienionym czasie przebyta byłaby wzdłuż BC droga równa 2AB. W rzeczywistości jednak widzimy, że ciało, zaraz gdy się zacznie podnosić, poddane będzie tym samym wpływom, jak przy spadku wzdłuż AB, bo spadając po BC osiągnęłoby też samą prędkość i przebyło tę samą drogę w tym samym czasie jak wzdłuż AB; oczywiście to zmieszanie (*mixtio*) ruchów, jednostajnego pod górę, a przyspieszonego na dół, doprowadzi ciało po równi BC do końca C, w którym osiągnięte zostaną równe stopnie prędkości. Jeżeli weźmiemy po obu stronach punkty D, E, równo oddalone od B, to czas spadku po DB jest równy czasowi odbicia wzdłuż BE, co tak możemy dowieść. Poprowadzimy DF, równoległą do BC; wiadomo, że po spadku wzdłuż AD następuje odbicie wzdłuż DF. Lecz jeżeli z D ciało biegłoby dalej poziomo wzdłuż DE, to prędkość w E byłaby takąż sama jak w D i ciało podniosłoby się od E do C. Słusznie więc możemy twierdzić, że jeżeli w dalszym ciągu spadku po jakiegokolwiek równi pochyłej, następuje odbicie wzdłuż równi podnoszącej się, to ciało, wskutek nabytego impetu wzniesie się do tej samej wysokości, czyli wzniesienia nad poziomem. Gdy spada wzdłuż (tab. IV, rys. 82) AB, ciało podnosi się wzdłuż płaszczyzny odbicia BC aż do poziomej AC; nie tylko wtedy, gdy nachylenia równi są jednakie, ale także gdy są nierówne, jak równia BD. Bo na równiach różnego nachylenia, lecz jednakiej wysokości nabywane są jednakie stopnie

prędkości. Jeżeli EB, BD są jednakowo nachylone, to spadek wzdłuż ED podnosi ciało wzdłuż BD aż do D, bo taki impuls nadaje mu impet prędkości w punkcie B; impet zaś w B jest jednaki, czy ciało spada wzdłuż AB, czy wzdłuż EB; wiadomo, że ciało, po swym spadku po AB jednakowo popychane jest po BD jak i po EB. Prawda, że czas podniesienia po BD jest dłuższy niż po BC, jak i czas spadku po EB dłuższy niż po AB: stosunek zaś tych czasów jest równy stosunkowi długości samych równi. Wypada nam jeszcze znaleźć stosunek dróg przebytych wzdłuż równi różnego nachylenia i różnej wysokości a w równych czasach: a więc zbadać spadek między dwiema równoległymi poziomami. Ten zaś odbywa się według następującego stosunku.

Twierdzenie XV. Podanie XXIV

Miedzy dwiema poziomami równoległymi dana jest prostopadła, przez której spód przechodzi równia pochyła. Po spadku wzdłuż prostopadłej, droga przebyta przy podnoszeniu się ciała po równi, w ciągu czasu równego czasowi spadku, jest większa od długości prostopadłej a mniejsza od podwojonej tejże długości.

Pomiędzy (tab. IV, rys. 83) poziomami BC i HG niech będzie prostopadła AE i równia pochyła EB. Po spadku wzdłuż AE następuje w E odbicie w kierunku B. Twierdzę, że droga przebyta przy podnoszeniu się ciała wzdłuż równi, w ciągu czasu spadku po AE, jest większą od AE a mniejszą od podwójnego AE. Połóżmy $ED = AE$ i jak EB do BD niech się ma DB do BF. Dowiedzimy najprzód, że do punktu F dojdzie ciało w czasie tym samym co spadając po AE, a następnie, że EF jest większe od EA a mniejsze od tegoż podwojonego. Jeżeli przyjmiemy, że czas spadku po AE jest równy AE, to czas spadku po BE albo podnoszenia się wzdłuż EB będzie równy linii BE; a ponieważ DB jest średnią proporcjonalną między EB i BF, a BE czasem spadku po BE, to BD jest czasem spadku po BF, a reszta DE czasem spadku po reszcie FE. Ale takż jest czas spadku po FE po wyjściu ze spoczynku w B i także czas podnoszenia się wzdłuż EF, gdy ciało podnosi się z E ze stopniem prędkości osiągniętym przez spadek wzdłuż BE lub AE: więc tak samo DE jest właśnie tym czasem, w ciągu którego ciało po spadku z A, wzdłuż AE i odbiciu w B, dochodzi do punktu F. Położyliśmy zaś $ED = AE$. A ponieważ jak całe EB do całego BD, tak się ma droga DB do drogi BF, to będzie także jak całe EB do całego BD miała się reszta ED do DF. Jest zaś EB większe od

BD, więc i ED jest większe od DF a EF mniejsze od podwojonego DE albo AE, co miało być dowiedzionem. Toż samo ma miejsce, gdy spadek poprzedzający odbywa się nie wzdłuż prostopadłej, lecz wzdłuż równi pochyłej; dowodzenie jest toż samo, byleby tylko równia odbicia była mniej odchyloną a więc dłuższą od równi spadku.

Twierdzenie XVI. Podanie XXV

Jeżeli w dalszym ciągu spadku po jakiegokolwiek równi pochyłej, następuje ruch po płaszczyźnie poziomej, to czas spadku po równi ma się do do czasu ruchu wzdłuż jakiegokolwiek linii poziomej, jak podwójna długość równi do przyjętej linii poziomej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 84) linja pozioma CB i równia pochyła AB i po spadku wzdłuż AB następuje ruch wzdłuż poziomej, na której bierzemy jakąkolwiek odległość BD. Twierdząc, że czas spadku po AB ma się do czasu ruchu po BD, jak podwojone AB do BD. Weźmy BC równe podwojonemu AB, to wiadomo z poprzedniego, że czas spadku po AB równa się czasowi ruchu wzdłuż BC; ale czas ruchu po BC ma się do czasu ruchu po DB jak linja CB do linii BD; a więc czas ruchu po AB do czasu ruchu po BD ma się jak podwojone AB do BD, c. b. d. d.

Zadanie X. Podanie XXVI

Dana jest prostopadła między dwiema poziomymi, a także długość większa od długości prostopadłej a mniejsza od tejże podwojonej; przez spód prostopadłej przeprowadzić równię pochyłą taką, aby przy podnoszeniu się po niej, w dalszym ciągu spadku po prostopadłej, ciało przebyło długość równą danej, w czasie równym czasowi spadku po prostopadłej.

Między poziomymi (tab. IV, rys. 85) AO, BC, niech będzie prostopadła AB; a także FE większe od BA a mniejsze od tegoż podwojonego. Przez B ma być przeprowadzona równia pochyła taka, aby ciało po spadku z A do B, ruchem odbitym, w ciągu czasu równego czasowi spadku po AB, podniosło się po niej wzdłuż drogi równej EF. Położmy $ED = AB$, to będzie reszta DF mniejsza od AB, bo całe EF jest mniejsze od podwojonego AB; niech będzie dalej $DI = DF$ i jak EI do ID niech się ma DF do FX, a z B odejmiemy $BO = EX$. Twierdząc, że BO jest tą równią, wzdłuż której ciało, w dalszym ciągu spadku po AB, w czasie równym czasowi tego spadku, przebiegnie pod górę drogę równą danej długości EF.

PolóŜmy BR, RS równe ED, DF. PoniewaŜ jak EI do ID, tak się ma DF do FX, to będzie takŜe ED do ID jak DX do FX, a więc ED do DF, jak DX do FX i jak EX do XD; czyli jak BO do OR, tak RO do OS. JeŜeli więc czas spadku po AB jest równy AB, to czas spadku po OB będzie równy OB, po OS równy RO, przy czym reszta BR będzie czasem spadku po reszcie SB, przy spadaniu ciała od O do B. Ale czas spadku po SB od wyjścia ze spoczynku w O jest równy czasowi podnoszenia się od B do S w dalszym ciągu spadku po AB: a więc BO jest właŝnie tą równią, wychodzącą z B, po której ciało w dalszym ciągu spadku po AB, przebędzie podnosząc się drogą BS równą danej EF w czasie BR równym BA, czego naleŜało dowieŝć.

Twierdzenie XVII. Podanie XXVII

JeŜeli ciało spada wzdłuŜ dwóch równi róŜnego nachylenia a tej samej wysokoŝci, to droga przebyta w dolnej części równi dłuŜszej, w tym samym czasie co cała równia krótsza, jest równa sumie dwóch dróg, z których jedna jest tej długoŝci co równia krótsza, a druga tak się ma do krótszej, jak dłuŜsza do przewyŜki dłuŜszej nad krótszą.

Niech będzie (tab. IV, rys. 86) AC równia dłuŜsza, AB krótsza, obie jednej wysokoŝci AD; na dolnej części AC odetnijmy $CE = AB$ i jaki jest stosunek całego CA do AE, taki niech będzie CE do EF. TwierdŜe, ŝe droga FC jest tą właŝnie, którą ciało przebędzie w dalszym ciągu spadku z A w tym samym czasie co spadając po AB. Albowiem całe CA ma się do AE jak CE do EF, więc reszta EA ma się do reszty AF jak całe CA do całego AE. Trzy więc długoŝci: CA, AE, AF sà ciągłymi proporcjonalnymi.¹⁾ JeŜeli więc czas spadku po AB przyjmiemy równy AB, to czas spadku po AC będzie AC, a czas spadku po AF równy AE, a po reszcie FC równy EC; zaŝ EC jest równe AB, twierdzenie więc jest dowiedzione.

Twierdzenie XVIII. Podanie XXVIII

Pozioma AG (tab. IV, rys. 87) jest styczna do koła. Z punktu stycznoŝci prowadzimy ŝrednicę AB i dwie cięciwy AE, EB. Oznaczyć stosunek czasu spadku po AB do czasu spadku wzdłuŜ AE i EB. PrzedłuŜmy BE do stycznej w G i poprowadzmy linię AF

¹⁾ $CA : AE = AE : AF$.

przepolawiającą kąt BAE. Twierdząc, że czas spadku wzdłuż AB ma się do czasu spadku wzdłuż AEB, jak AE do AEF. Ponieważ bowiem kąt FAB jest równy kątowi FAE a kąt EAG równy kątowi ABF, to będzie cały kąt GAF, równy dwom FAB i ABF a więc równy GFA i linja GF równa GA. A ponieważ prostokąt BGE jest równy kwadratowi z GA, czyli kwadratowi z GF, więc będą trzy linje BG, GF, EG tworzyć proporcję ciągłą.¹⁾ Jeżeli zatem przyjmujemy że AE jest czasem spadku po AE, to GE będzie czasem spadku po GE, GF czasem spadku po całej drodze GB, a EF takimże po EB w dalszym ciągu spadku z G albo z A wzdłuż AE. A więc czas spadku po AE albo AB ma się do czasu spadku wzdłuż AEB jak AE do AEF, c. b. d. d.

Krócej w ten sposób. Odmierzmy GF równe GA; wiadomo, że GF jest średnią proporcjonalną między BG i GE. Reszta jak wyżej.

Zadanie XI. Podanie XXIX

Dana jest długość pozioma, na której końcu wystawiona została prostopadła a na tej prostopadłej odcięta połowa danej długości poziomej. Ciało, spadające z tej wysokości a następnie zwrócone na poziomą, przebiegnie obie te drogi w krótszym czasie niż jakkolwiek inną długość prostopadłej razem z daną długością poziomą.

Niech będzie (tab. IV, rys. 88) na płaszczyźnie poziomej dana jakakolwiek długość BC a z końca B wyprowadzona prostopadła, na której BA jest połową BC. Twierdząc, że czas, w ciągu którego ciało spadające z A, przebiegnie obie drogi AB i BC, jest najkrótszy ze wszystkich czasów przebiegu drogi BC i jakiegokolwiek innej części prostopadłej, większej lub mniejszej od AB. Niech będzie EB, większa jak na pierwszym rysunku a mniejsza jak na drugim. Mamy dowieść, że czas spadku po EB i BC jest większy od czasu spadku po AB i BC. Przyjmujemy, że czas spadku wzdłuż AB jest równy AB; czas ten jest zarazem czasem ruchu po BC, bo BC jest dwa razy większe od AB, a czas ruchu po obu drogach ABC będzie równy podwojonemu BA. Niech będzie BO średnia proporcjonalna między EB i BA. Jest więc BO czasem spadku po EB. Niech będzie dalej droga pozioma BD dwa razy większa od BE, to czas ruchu po tej drodze, w dalszym ciągu spadku po EB jest także równy BO. Niech będzie jak DB do BC, czyli jak EB do BA, tak OB

¹⁾ $BG : GF = GF : EG.$

do BN. Ponieważ ruch na poziomie jest jednostajny i OB jest czasem spadku po BD w dalszym ciągu spadku z E, to będzie NB czasem ruchu wzdłuż BC w dalszym ciągu spadku z tej samej wysokości E. Wynika stąd, że OB razem z BN jest czasem ruchu wzdłuż EBC, a ponieważ podwojone AB jest czasem spadku po ABC, pozostawałoby więc dowieść, że OB razem z BN jest większe od podwojonego BA; że zaś OB jest średnią proporcjonalną między EB i BA, to tak się ma EB do BA jak kwadrat z OB do kwadratu z BA; a ponieważ EB do BA ma się jak OB do BN, to będzie także stosunek OB do BN równy kwadratowi ze stosunku OB do BA; ale tenże stosunek OB do BN składa się ze stosunków OB do BA i AB do BN: a więc stosunek AB do BN jest równy stosunkowi OB do BA. Długości więc BO, BA, BN tworzą proporcją ciągłą¹⁾ i OB razem z BN są większe od podwojonego BA, czego należało dowieść.

Twierdzenie XIX. Podanie XXX

Jeżeli z pewnego punktu linii poziomej schodzi prostopadła do niej, a z innego punktu tejże poziomej poprowadzona zostanie do tej prostopadłej równia pochyła taka, że ciało w najkrótszym czasie z poziomej spada po tej równi na prostopadłą, to ta równia będzie odcinać na prostopadłej długość równą odległości między dwoma punktami wziętymi na poziomej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 89) prostopadła BD schodząca z punktu B poziomej AC, na której bierzemy drugi punkt C, a na prostopadłej odcinamy $BE = BC$ i prowadzimy CE. Twierdzą, że ze wszystkich z punktu C do prostopadłej prowadzonych równi pochyłych, CE będzie taką, po której w najkrótszym czasie następuje spadek do prostopadłej. Weźmy CF i CG równie mniej i więcej nachylone i nakreślmy IK styczną w C do koła opisanego promieniem BC, będzie ona równoległą do prostopadłej i poprowadźmy EK równoległą do CF, dochodząca do stycznej a przecinająca okrag koła w L; wiadomo, że czas spadku po LE jest równy czasowi spadku po CE, ale czas spadku po KE jest większy niż po LE; a więc większy niż po CE; ale czas spadku po KE jest równy czasowi spadku po CF, bo te drogi są równe i jednakiego nachylenia. Takież są drogi CG i IE i czasy spadku po nich jednakowe: ale czas spadku po HE jest krótszy niż po IE, bo HE krótsze od IE; a więc

¹⁾ $BO : BA = BA : BN$.

czas spadku po CE (równy czasowi spadku po HE) jest krótszy niż po IE, co miało być dowiedzionem.

Twierdzenie XX. Podanie XXXI

Jeżeli linja prosta leżąca nad poziomą jest jakkolwiek do niej nachylona, to równia pochyła przechodząca przez jakikolwiek punkt poziomej i ciągnąca się do linji nachylonej, po której spadek trwa najkrócej, dzielić będzie na dwie połowy kąt między prostopadłemi z danego punktu wyprowadzonymi, jedna do poziomej a druga do równi pochyłej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 90) CD linja do poziomej AB jakkolwiek nachylona i dany na poziomej jakikolwiek punkt A, poprowadźmy AC prostopadłą do AB i AE prostopadłą do CD, a kąt CAE niech dzieli na dwie połowy linja AF. Twierdzą, że ze wszystkich równi poprowadzonych od punktów linji CD do punktu A, równia FA jest tą wzdłuż której spadek trwa najkrócej. Poprowadźmy FG równoległą do AE, kąty naprzemian ległe GFA i FAE są równe: a GAF z wykreślenia równy FAE; więc boki trójkąta FG i GA są równe. Jeżeli ze środka G promieniem GA opiszemy koło, to ono przejdzie przez F i będzie stycznem do poziomej i do nachylonej w punktach A, F; kąt zaś GFC jest prosty, bo GF jest równoległe do AE: wynika stąd, że wszystkie linje prowadzone z A ku linji nachylonej wychodzą po za obwód koła, a stąd znów, że czas spadku po tych wszystkich linjach jest dłuższy niż po FA. Co było do dowodzenia.

L e m m a

Jeżeli dwa koła są styczne wewnętrznie, a koło wewnętrzne jest styczne do jakiegokolwiek linji prostej, przecinającej koło zewnętrzne, to trzy proste przeprowadzone od punktu styczności kół do trzech punktów linji stycznej, mianowicie do punktu jej styczności z kołem wewnętrznem i do punktów jej przecinania się z kołem zewnętrznem, tworzą między sobą kąty równe.

W punkcie A (tab. IV, rys. 91) stykają się dwa koła, których środki są, B mniejszego, C większego: styczną do koła mniejszego jest jakakolwiek prosta FG w punkcie H, przecinająca koło większe w punktach F i G, a dochodzą do niej trzy linje AF, AH, AG, między którymi zawarte kąty FAH, GAH są równe. Przedłużmy AH do spotkania okręgu w I, poprowadźmy ze środków BH, CI, a przez te środki przeprowadźmy BC i przedłużmy do A i do O i N. A po-

nieważ kąty ICN, HBO są równe, bo każdy z nich jest dwa razy większy od IAN, to linje BH i CI będą równoległe. Że zaś BH idąca od środka do punktu styczności jest prostopadła do FG i do tejże jest prostopadła CI i łuk FI równy łukowi IG więc kąt FAI jest równy kątowi IAG, c. b. d. d.

Twierdzenie XXI. Podanie XXXII

Jeżeli na poziomie weźmiemy dwa punkty i przez jeden z nich poprowadzimy prostą jakkolwiek nachyloną w stronę drugiego, to połączymy drugi punkt z punktem linji nachylonej, tak oddalonym od jej początku, jak oddalone są od siebie oba punkty na poziomie, mieć będziemy spadek wzdłuż tej linji łączącej trwający krócej aniżeli wzdłuż jakiegokolwiek innej linji, poprowadzonej z tego samego punktu do linji nachylonej. Wzdłuż innych linij o równe kąty od pierwszej odchylonych, czasy spadku będą sobie równe.

Niech będą (tab. IV, rys. 92) na poziomie dwa punkty A i B i przechodząca przez B prosta BC, na której od punktu B odcięto $BD = BA$ i poprowadzono AD. Twierdzą, że czas spadku po AD będzie krócej trwający niż wzdłuż innych linij, poprowadzonych od A do nachylonej BC. Z punktów A i D, poprowadźmy do BA i BD prostopadłe AE i DE, przecinające się w E; a ponieważ w trójkącie równoramiennym ABD, kąty BAD i BDA są równe, to będą także równe ich dopełnienia do kątów prostych DAE i EDA, a więc ze środka E promieniem EA opisane koło przejdzie przez D i będzie styczne do BA i BD w punktach A i D. Ponieważ A jest górnym końcem prostopadłej AE, to czas spadku po AD będzie mniejszy niż po wszelkiej innej z A do BC poprowadzonej prostej przekraczającej okrąg koła, co pierwsze miało być dowiedzionem.

Jeżeli, przedłużymy prostopadłą AE, weźmiemy na niej jakikolwiek punkt F i promieniem AF zatoczmy koło AGC przecinające linję nachyloną w G i C, a następnie poprowadzimy AG i AC, to te linje tworzyć będą ze środkową AD kąty równe, a czasy spadku wzdłuż AG i AC będą sobie równe, jako wzdłuż cięciw jednego koła.

Zadanie XII. Podanie XXXIII

Dana jest prostopadła i równia pochyła, obie jednakiej wysokości i mające wspólny wierzchołek. Na prostopadłej, ponad tym wierzchołkiem znaleźć punkt, z któregooby ciało spadało wzdłuż pro-

stopadłej a dalej wzdłuż równi, tak samo długo, jak wzdłuż prostopadłej spuszczone z jej wierzchołka.

Niech będą (tab. IV, rys. 93) prostopadła i równia pochyła jednakiej wysokości AB, AC, oznaczyć na prostopadłej, ponad A, taki punkt, z którego ciało spadające przebiegnie wzdłuż AC w tym samym czasie, co spadając z A po AB. Poprowadźmy DCE prostopadłą do AC, i odetnijmy CD równe AB i połączmy AD; kąt ADC jest większy od CAD (bo CA większa od CD czyli AB); niech będzie kąt DAE równy kątowi ADE i EF prostopadła do AE, która przedłużona przecina równię pochyłą w F, odetnijmy AI i AG równe CF i poprowadźmy przez G poziomą GH. Twierdzę, że H jest szukany punktem.

Niech będzie czas spadku po AB równy AB, to czas spadku po AC, ze spoczynku w A będzie AC. W trójkącie prostokątnym AEF, z wierzchołka kąta prostego E idąca linja EC jest prostopadłą do podstawy AF, więc AE jest średnią proporcjonalną między FA i AC, a CE takąż między AC i CF, czyli między CA i AI; a ponieważ AC jest czasem spadku z A po AC, AE czasem spadku po całym AF, to EC będzie czasem spadku po AI. Że zaś w trójkącie równoramiennym AED boki AE i ED są równe, to ED będzie czasem spadku po AF a EC czasem spadku po AI; więc CD albo AB jest czasem spadku po IF od wyjścia ze spoczynku w A, t. j. innemi słowy AB jest czasem spadku po AC zaczynając od G lub H, c. b. d. d.

Zadanie XIII. Podanie XXXIV

Niech będą prostopadła i równia pochyła, mające wspólny wierzchołek. Szukany jest punkt położony wyżej na prostopadłej, z któregooby ciało spadające i biegnące dalej wzdłuż równi pochyłej, skuteczniało te ruchy w tym samym czasie, co i spadek po samej równi z jej wierzchołka.

Niech będą (tab. IV, rys. 94) równia pochyła i prostopadła AB i AC, ze wspólnym wierzchołkiem A. Na prostopadłej powyżej A ma być oznaczony punkt, z któregooby ciało spadało najprzód po prostopadłej a następnie po równi w tym samym czasie, co po samej równi, wychodząc ze spoczynku w A.

Poprowadźmy poziomą BC i odetnijmy $AN=AC$, i jak AB do BN niech będzie AL do LC, weźmy $AI=AL$, a na przedłużeniu prostopadłej odetnijmy CE takie, aby było trzecią proporcjonalną

do AC i BI¹⁾. Twierdząc, że CE jest szukaną odległością, tak że jeżeli weźmiemy $AX=CE$, to ciało spadać będzie z X wzdłuż XAB w tym samym czasie co z A wzdłuż AB. Poprowadźmy poziomą XR, równoległą do BC; spotykającą przedłużenie BA w R, przedłużmy AB do D, poprowadźmy ED równoległe do BC a na AD opiszmy półkołę i wyprowadźmy z B prostopadłą do AD, dochodzącą do okręgu koła. Wiadomo, że FB jest średnią proporcjonalną między AB i BD, a linia łącząca FA średnią proporcjonalną między DA i AB. Odetnijmy $BS=BI$ i $FH=FB$, a ponieważ jak AB do BD tak się ma AC do CE, nadto BF jest średnią między AB i BD a BI średnią między AC i CE; to tak jak BA do AC, będzie FB do BS. A że jak BA do AC albo do AN, tak się ma FB do BS, to będzie odwrotnie BF do FS jak AB do BN, czyli jak AL do LC: prostokąt więc FB, CL jest równy prostokątowi AL, SF; ten zaś prostokąt AL, SF, jest przewyżką prostokąta AL, FB albo AI, BF nad prostokątem AI, BS albo AS, IB; prostokąt znów FB, LC jest przewyżką prostokąta AC, BF nad prostokątem AL, BF; prostokąt zaś AC, BF jest równy prostokątowi ABI (bo tak się ma BA do AC jak FB do BI), więc przewyżka prostokąta ABI nad prostokątem AI, BF albo AI, FH jest równa przewyżce prostokąta AI, FH nad prostokątem AIB; więc podwojony prostokąt AI, FH jest równy dwóm prostokątom ABI i AIB: albo podwojonemu AIB razem z kwadratem z IB. Jeżeli dodamy do obu stron kwadrat z AI to będzie podwojony prostokąt AIB razem z kwadratami z AI i z IB, a więc kwadrat z AB, równy podwojonemu prostokątowi AI, FH razem z kwadratem z AI. Jeżeli znów dodamy po obu stronach kwadrat z BF, to będą razem dwa kwadraty z AB i z BF, czyli będzie kwadrat z AF równy podwojonemu prostokątowi AI, FH razem z dwoma kwadratami z AI i z FB, czyli z AI i z FH. Ale kwadrat z AF jest równy podwojonemu prostokątowi AH, HF, oraz dwóm kwadratami z AH i z HF; więc podwójny prostokąt AI, FH z kwadratami z AI i z FH jest równy podwójnemu prostokątowi AHT z kwadratami z AH i z HF; a po odjęciu po obu stronach kwadratu z FH zostanie podwojony prostokąt AI, FH razem z kwadratem z AI, równy podwojonemu prostokątowi AHF razem z kwadratem z AH. Że zaś te wszystkie prostokąty mają bok FH wspólny, to będzie linia AH równa linji AI; bo gdyby była większą lub mniejszą, to byłyby prostokąty FHA i kwadrat z HA większe lub mniejsze od prostokątów FH, IA z kwadratem z IA, co byłoby przeciwne dowiedzionemu.

¹⁾ $AC:BI=BI:CE$.

Jeżeli teraz czas spadku po AB przyjmiemy równy AB, to czas spadku po AC będzie równy AC, a IB średnia między AC i CE będzie czasem spadku po CE albo po XA, zaczynając od X, że zaś średnią między DA i AB, albo między RB, BA, jest AF, a między AB i BD, albo między RA i AB średnią jest BF równe FH, to według poprzednio dowiedzionego, przewyżka AH będzie czasem spadku po AB, po wyjściu ze spoczynku w R czyli w dalszym ciągu spadku z X; ale czas spadku po AB, po wyjściu ze spoczynku z A jest AB. Jest więc czas spadku po XA równy IB a po AB w dalszym ciągu spadku od R albo od X równy AI; zatem czas spadku po XAB jest równy AB, to jest równy czasowi spadku po AB po wyjściu ze spoczynku w A, c. b. d. d.

Zadanie XIV. Podanie XXXV

Dane są prostopadła i od jej spodu równia pochyła, oznaczyć na tej ostatniej punkt, do którego przebieżona będzie wzdłuż samej równi droga w tym samym czasie co i droga wzdłuż prostopadłej i równi.

Niech będzie (tab. IV, rys. 95) prostopadła AB i do niej nachylona BC. Na BC ma być oznaczona długość, którą od wyjścia ze spoczynku ciało przebiegnie po samej równi w tym samym czasie, co i spadając wzdłuż prostopadłej a w dalszym ciągu wzdłuż równi. Poprowadźmy poziomą AD, przecinającą przedłużenie nachylonej CB w E. Odetnijmy BF równe BA i zakreślmy ze środka E promieniem EF koło FIG; przedłużmy FE do przecięcia się z kołem w G i jak GB do BF tak niech będzie BH do HF i poprowadźmy HI styczną do koła w I. Następnie z B poprowadźmy BK prostopadłą do FC, która przetnie w L linią EIL, a do EL poprowadźmy prostopadłą LM, spotykającą BC w M. Twierdzę, że linja BM, od wyjścia ze spoczynku w B przebieżona będzie w tym samym czasie co obie drogi AB, BM od wyjścia ze spoczynku w A. Połóżmy EN równe EL. Ponieważ GB ma się do BF jak BH do HF, to po przestawieniu będzie GB do BH jak BF do FH a po podzieleniu GH do HB jak BH do HF. Więc prostokąt GHF jest równy kwadratowi z HB; ale tenże prostokąt jest także równy kwadratowi z HI; a więc BH jest równe HI. A ponieważ w czworokącie ILBH boki HB, HI są równe i kąty B i I są proste, to bok BL jest równy LI: przytem EI jest równe EF, więc całe LE czyli NE jest równa dwóm LB, EF. Odejmując wspólne EF, otrzymamy resztę FN równą LB; a ponieważ FB równe BA, więc LE jest rów-

ne dwóm AB , BN . Jeżeli znów przyjmujemy, że czas spadku po AB jest równy AB , to czas spadku po EB będzie równy EB : zatem czas spadku po całym EM będzie równy EN , czyli średniej proporcjonalnej między ME i EB ; więc czas spadku po reszcie BM , w dalszym ciągu spadku po EB albo po AB , będzie równy BN . Że zaś czas spadku po AB jest AB , to czas spadku po obu ABM jest ABN . Ponieważ dalej czas spadku po EB , po wyjściu ze spoczynku w E , jest równy EB , to czas wzdłuż BM po wyjściu ze spoczynku w B będzie równy średniej proporcjonalnej między BE i BM a więc równy BL . Jest więc czas spadku po obu ABM po wyjściu ze spoczynku w A , równy ABN a czas spadku po samej BM , po wyjściu ze spoczynku w B , równy BL ; dowiedziono zaś, że BL jest równe dwóm AB , BN , więc twierdzenie jest dowiedzione.

Krócej w następujący sposób (tab. IV, rys. 96).

Niech będzie BC równia pochyła a BA prostopadła. Poprowadźmy przez B prostopadłą do EC , przedłużoną po obu stronach i połączmy BH równe przewyżce BE nad BA i kątowni BHE nakreślmy równy kąt HLE : przedłużona EL spotka BK w L ; z L wyprowadźmy prostopadłą do EL , a ta prostopadła LM przetnie BC w M . Twierdzą, że BM jest szukaną drogą na równi EC . Bo ponieważ kąt MLE jest prosty, to BL jest średnią proporcjonalną między MB i BE a LE takąż między ME i EB . Jeżeli odetniemy EN równe LE , to linje NE , EL i LH będą równe, a HB będzie przewyżką NE nad BL . Ale toż samo HB jest także przewyżką NE nad NB i BA ; a więc oba NB i BA są równe BL . Jeżeli zaś przyjmiemy, że EB jest czasem spadku po EB , to BL będzie czasem spadku wzdłuż BM po wyjściu ze spoczynku w B , a BN czasem spadku wzdłuż BM w dalszym ciągu spadku po EB albo po AB , zaś AB jest czasem spadku po AB . A więc czas spadku wzdłuż ABM czyli ABN są równe czasowi spadku wzdłuż BM , po wyjściu ze spoczynku w B : c. b. d. d.

L e m m a

Niech będzie (tab. IV, rys. 97) DC prostopadła do średnicy BA i z końca B poprowadźmy jakkolwiek BDE i połączmy FB . Twierdzą, że FB jest średnią między DB i BE . Połączmy EF i przez B poprowadźmy styczną BG , która będzie równoległą do CD : ponieważ kąt DBG jest równy kątowi FDB , a temuz GBD jest także równy EFB , więc trójkąty FBD i FEB są podobne i jak BD do BF tak się ma FB do BE .

L e m m a

Niech będzie (tab. IV, rys. 98) linja AC większa od DF i niech stosunek AB do BC będzie większy od stosunku DE do EF. Twierdzą, że AB jest większe od DE. Bo ponieważ stosunek AB do BC jest większy od stosunku DE do EF, to położmy, że jak AB do BC tak się mieć będzie DE do EG mniejszego od EF: a ponieważ AB do BC ma się jak DE do EG, to dodając i odwracając będzie jak CA do AB tak GD do DE: że zaś CA jest większe od GD, więc i BA jest większe od DE.

L e m m a

Niech będzie (tab. IV, rys. 99) ćwierć koła ACIB i z B poprowadzona BE równoległa do AC; z któregośkolwiek punktu linji BE zataczamy koło styczne do AB w B a przecinające ćwierć koła w I; łączymy CB i CI, przedłużając to ostatnie do S. Twierdzą, że linja CI będzie zawsze mniejsza od CD. Połączmy AI, która dotknie się koła BOE. Jeżeli poprowadzimy DI, to będzie ta linja równą DB; a że DB jest styczną do ćwierci koła, to i DI będzie do tegoż styczną i prostopadłą do średnicy AI. Więc AI jest styczną w I do koła BOE. A że kąt AIC jest większy od kąta ABC, bo obejmuje łuk większy, to będzie także kąt SIN większy od kąta ABC; a że część IES jest większa od części BO, więc linja CS jest bliższą środka koła od linji CB i CO większe od CI, bo tak się ma SC do CB jak OC do CI.

Toż samo więcej jeszcze wypada, jeżeli (jak na rysunku) (tab. IV, rys. 100) BIC będzie mniejsze od ćwierci koła; wtedy prostopadła BD przecina koło CIB, a ponieważ DI jest równe DB, kąt DIA będzie rozwarty i AIN przetnie koło BIE; a że kąt ABC jest mniejszy od kąta AIC a ten ostatni równy SIN, ten zaś mniejszy od tego, który tworzy SI ze styczną w I, więc tem bardziej łuk SEI jest większy od BO i t. d. c. b. d. d.

Twierdzenie XXII. Podanie XXXVI

Jeżeli z najniższego punktu koła, stojącego na poziomie, poprowadzimy równię pochyłą podpierającą mniej niż ćwierć koła i jeżeli z końców tej równi poprowadzimy dwie równie do jakiegokolwiek punktu łuku podpartego, to spadek wzdłuż tych dwóch równi trwać będzie krócej aniżeli wzdłuż równi pierwszej a także krócej niż wzdłuż samej niższej z dwóch równi.

Niech będzie (tab. IV, rys. 101) z najniższego punktu C łuku CBD koła postawionego na poziomie wyprowadzona równia podnosząca się CD i dwie równie z końców C i D nachylone do jakiegokolwiek punktu B wziętego na tym łuku: twierdząc, że czas spadku po obu równiach DBC jest krótszy od czasu spadku po samej DC albo samej BC po wyjściu ze spoczynku w B. Poprowadzona przez D pozioma MDA przetnie przedłużenie CB w A: niech będą DN i MC prostopadłe do MD i BN prostopadła do BD: na trójkącie prostokątnym DBN opisane półkole DFBN, przecinające DC w F: a między CD i DF średnia proporcjonalna DO; między zaś CA i AB także średnia AV. Niech będzie PS czas spadku po DC albo po BC (wiadomo bowiem, że te czasy są jednakie) i jaki jest stosunek CD do DO taki niech będzie stosunek czasu SP do czasu PR; więc PR będzie czasem spadku wzdłuż DF, zaczynając od D a RS czasem spadku po reszcie FC. Że zaś PS jest także czasem spadku po BC, zaczynając od B; to, jeżeli położymy, że jak BC do CD, tak się ma SP do PT, wtedy będzie PT czasem spadku z A do C, gdyż z poprzednich dowodzeń DC jest średnią między AC i CB. Niech będzie także jak AC do AV tak TP do PG, więc PG będzie czasem spadku z A do B, GT zaś resztującym czasem spadku wzdłuż BC w dalszym ciągu spadku z A do B. Ale ponieważ DN jest średnicą koła DFN prostopadłą do poziomemu, to linje DF i DB przebiegane będą w czasach równych. A gdyby dowiedzionem zostało, że ciało prędzej przebiegnie drogę BC, w dalszym ciągu spadku wzdłuż DB, aniżeli drogę FC po przebieżeniu DF, to mielibyśmy twierdzenie dowiedzione. Ciało zaś przebiega drogę BC z tą samą prędkością, czy spada z D wzdłuż DB, czy też z A wzdłuż AB, bo przy obu spadkach DB, AB, osiąga jednakie momenty prędkości; trzeba więc dowieść, że prędzej przebiegnie BC w dalszym ciągu AB aniżeli FC w dalszym ciągu DF. Wyjaśniono zaś, że czas spadku po BC w dalszym ciągu AB jest równy GT a czas spadku po FC w dalszym ciągu DF równy RS; wykazać więc trzeba, że RS jest większe od GT, co tak się wykazuje: ponieważ jak SP do PR, tak się ma CD do DO, a jak RS do SP, tak OC do OD: zatem jak SP do PT, tak DC do CA. Ponieważ dalej TP do PG jak CA do AV, więc PT do TG jak AC do CV, a także RS do GT jak OC do CV. Że zaś OC jest większe od CV, co zaraz będzie dowiedzione, więc czas RS jest większy od czasu GT, c. b. d. d. Że zaś CF jest większe od CB, a FD mniejsze od BA, więc stosunek CD do DF jest większy od stosunku CA do AB; ale CD do DF tak się ma jak

kwadrat z CO do kwadratu z OF, a DO jest średnią proporcjonalną między CD i DF, więc CA ma się do AB jak kwadrat z CV do kwadratu z VB; czyli stosunek CO do OF jest większy od stosunku CV do VB; więc według poprzedniej lemmy CO jest większe od CV. Widzimy nadto, że czas spadku po DC ma się do czasu spadku po DBC jak DOC do DO razem z CT.

Scholium

Z poprzedniego wynioskować można, że najszybszy ruch od jednego punktu do drugiego odbywa się nie wzdłuż najkrótszej linii t.j. prostej, ale po łuku koła. Bo, dzieląc ćwierć koła (tab. IV, rys. 102) BAEC, której bok BC jest prostopadły do poziomu, to jest łuk AC, na ilekolwiek części równych AD, DE, EF, FG, GC, prowadząc z C linie proste do punktów A, D, E, F, G, i łącząc je linjami AD, DE, EF, FG, GC, widzimy, że ruch wzdłuż ADC jest prędszy niż wzdłuż AC albo wzdłuż DC po wyjściu ze spoczynku w D, ale z A będzie DC przebieżone prędzej niż obie drogi ADC, podobnie po dwóch DEC po wyjściu ze spoczynku w A spadek odbywa się prędzej niż po samem DC. Spadek więc po trzech ADEC będzie szybszy niż po dwóch ADC. Podobnie spadek w dalszym ciągu ADE będzie szybszy wzdłuż dwóch EFC niż wzdłuż samego EC. Więc wzdłuż czterech ADEFC szybszy niż wzdłuż trzech ADEC. A że wzdłuż dwóch FGC, w dalszym ciągu spadku wzdłuż ADEF, spadek będzie szybszy niż wzdłuż FC, więc wzdłuż pięciu ADEFGC szybszy niż wzdłuż czterech ADEFC. Im więcej przeto wielobok wpisany zbliża się do obwodu koła, tem szybciej odbywa się ruch między A i C.

Co zaś dowiedziono dla ćwierćcia, to odnosi się także w kole i do mniejszych łuków i takż jest wywód.

Zadanie XV. Podanie XXXVII

Mając daną prostopadłą i równię pochyłą tej samej wysokości, oznaczyć położenie odcinka równi tej samej długości co i prostopadła, po którymby ruch odbywał się w tym samym czasie co i wzdłuż prostopadłej.

Niech będzie (tab. IV, rys. 103) AB prostopadła, AC równia pochyła. Idzie o znalezienie tej części równi jednakiej długości z prostopadłą AB, wzdłuż której ruch, po wyjściu ze spoczynku z A, odbywałby się w tym samym czasie co wzdłuż prostopadłej AB. Odetnijmy AD równe AB; resztę DC przepołówmy w I; i jak AC do

CI tak niech się ma CI do AE; odetnijmy DG równe AE. Oczywiście EG będzie równe AD i AB. Twierdzą, że EG jest tą drogą, która przy spadku z A przebieganą będzie w tym samym czasie co i AB. Albowiem jak AC do CI tak się ma CI do AE, albo ID do DG, a więc także CA do AI jak DI do IG. Skoro zaś CA do AI ma się jak CI do IG, więc będzie także przewyżka CA nad CI, to jest IA do przewyżki AI nad IG, to jest do AG, jak CA do AI. Przytem AI jest średnią proporcjonalną między CA i AG, a CI takąż między CA i AE. Jeżeli więc przyjmujemy, że czas spadku wzdłuż AB jest równy AB, to AC będzie czasem spadku wzdłuż AC, a CI albo ID czasem spadku wzdłuż AE. Ale ponieważ AI jest średnią proporcjonalną między CA i AG, a CA jest czasem spadku po AC, to AI będzie czasem spadku wzdłuż AG, a reszta IC czasem spadku po reszcie drogi GC: że zaś DI był to czas spadku wzdłuż AE, więc DI, IC są czasami spadku po AG i CG; zatem reszta DA będzie czasem spadku wzdłuż EG, równym czasowi spadku po AB, c. b. d. d.

Wniosek

Wynika stąd, że szukany odcinek leży na równi między częściami górną i dolną, które są przebiegane w czasach równych.

Zadanie XVI. Podanie XXXVIII

Dane są dwie płaszczyzny poziome przecięte przez prostopadłą; znaleźć na tej ostatniej punkt taki, z któregooby ciało spadające najprzód prostopadłe, a następnie poruszające się po danych płaszczyznach, przebywało wzdłuż tych ostatnich, w czasach równych czasowi spadku po prostopadłej, drogi pozostające jedna do drugiej w danym stosunku.

Niech będą (tab. IV, rys. 104) płaszczyzny poziome CD, BE, przecięte prostopadłą ACB i dany stosunek drogi krótszej do dłuższej N do FG. Na prostopadłej w górze ma być oznaczony punkt, z któregooby spadające ciało zwrócone na CD, przebywało w czasie równym czasowi spadku drogę, tak się mającą do drogi przebywanej przez inne ciało spadające z tegoż samego punktu i zwrócone na płaszczyznę BE w czasie równym swemu czasowi spadku, — jak N do FG. Połóżmy GH równe N i jak FH do HG tak niech się ma BC do CL. Twierdzą, że L będzie szukany punktem w górze prostopadłej. Odetnijmy $CM = 2CL$, poprowadźmy LM, przecinającą płaszczyznę EB w O, to będzie także $BO = 2BL$. A ponieważ jak FH do HG, tak się ma BC do CL, to także jak HG czyli N do

GF będzie CL do LB albo CM do BO. Że zaś $CM = 2CL$, to CM będzie droga, którą ciało, wyszedłszy z L, po spadku wzdłuż LC, przebiegnie na płaszczyźnie CD; i dla tej samej przyczyny BO będzie droga, przebieżoną po spadku wzdłuż LB, w czasie równym czasowi spadku po LB; że zaś BO jest równe $2BL$ więc zadanie jest rozwiązane.

Sagredo: Istotnie zdaje mi się, że przyznać trzeba naszemu akademikowi, że on bez przechwalki przypisywać sobie może zasługę utworzenia nowej nauki o bardzo starym przedmiocie. A widząc, jak on szczęśliwie i zręcznie z jednej prostej zasady wywodzi dowodzenia tylu twierdzeń, muszę niemniej podziwiać, że rzeczy te pozostawały nietkniętymi przez Archimedes, Apollonjusza, Euklidesa i tylu innych matematyków i filozofów znakomitych, a zwłaszcza, że o tym ruchu znajduje się napisanych wiele grubych tomów.

Salvati: O ruchu znaleźć trochę można w odnośnym fragmencie Euklidesa, lecz nie można odkryć śladu, jaką szedł droga, aby odkryć stosunek przyspieszenia i jego zmiany przy różnych nachyleniach. Twierdzić, też można, że teraz dopiero otwarty został dostęp do nowej metody, umożliwiającej nieskończenie mnóstwo ważnych badań, które w przyszłości inne umysły będą mogły przeprowadzać.

Sagredo: Sądzę istotnie, że równie jak pewne własności koła, które jako przykłady dowiedzione są w trzeciej księdze Euklidesa, stanowią wstęp do niezliczonej liczby innych, więcej ukrytych, tak samo te, w krótkiej rozprawie wywiedzione twierdzenia, skoro się znajdują w ręku innych myślących badaczy, torować będą drogę do coraz to nowych pomysłów i prawdopodobnie z czasem takie gruntowne badanie przedmiotu rozciągnie się na wszystkie inne zakresy przyrody.

Dzień dzisiejszy był długi i dość pracowity, lecz więcej mnie zadowolili same podania aniżeli ich dowodzenia i sądę, że aby je dobrze zrozumieć, poświęcić trzeba każdemu więcej niż godzinę: odkładając tę pracę do czasu spokojnego, poproszę Waszmość o pozostawienie mi książki, po rozpatrzeniu pozostałej jej części odnoszącej się do ruchu pocisków; co, jeżeli pozwolicie, będzie mieć miejsce w dniu następnym.

Salvati: Nie omieszkać zejść się z Waszmościami.

Koniec dnia trzeciego.

DZIEŃ CZWARTY

Salviati: Otóż i p. Simplicio przychodzi w porę, abyśmy, bez odkładania mogli przejść do ruchu, a taki jest tekst naszego autora.

O RUCHU POCISKÓW

Rozważaliśmy dotąd ruch jednostajny, oraz naturalnie przyspieszony wzdłuż równi pochyłych. W dalszym ciągu zajmę się niektórymi zjawiskami i wskazówkami naukowymi ściśle dowiedzionymi, dotyczącymi ciał w ruchu złożonym z jednostajnego i naturalnie przyspieszonego; tego rodzaju bowiem jest ruch pocisków i w ten sposób powstaje.

Jeżeli ciało bez żadnej przeszkody porusza się na płaszczyźnie poziomej, to ze wszystkiego, co poprzednio obszernie zostało wyłożone, wynika, że ten ruch jest jednostajny i nieustannie trwający, przy rozciąganiu się płaszczyzny do nieskończoności; gdy zaś płaszczyzna jest ograniczona, a poruszające się na niej ciało ciężkie, to ono, doszedłszy do brzegu płaszczyzny, poruszać się będzie dalej, a do pierwotnego, jednostajnego, nieginącego ruchu dochodzi ruch wywołany przez ciężkość i wytwarza się ruch złożony, który nazywam pociskowym i który się składa z jednostajnego poziomego i z jednostajnie przyspieszonego. Wywiedziemy tu niektóre właściwości tego ruchu, z których pierwsza jest następująca.

Twierdzenie I. Podanie I

Pocisk w swym ruchu złożonym z jednostajnego poziomego i naturalnie przyspieszonego z góry na dół, opisuje połowę paraboli.

Sagredo: Musimy tu, panie Salviati, tak dla mnie jak i dla p. Simplicia, nieco się zatrzymać, gdyż nie jestem tak daleko posunięty w geometrii, abym studjował Apollonjusza, który, o ile wiem, pisał o tych parabolach i innych przecięciach ostrokągowych, nie sądzę zaś, abyśmy mogli bez tych wiadomości rozumieć dowodzenia podań, jakie mają nastąpić. A ponieważ, zaraz w pierwszym twierdzeniu, autor ma nam dowieść, że linja, jaką opisuje pocisk, jest parabolą, to zdaje mi się, że najprzód zająć się trzeba tą krzywą, gruntownie ją poznać i choćby nie wszystkie wywiedzione przez Apollonjusza jej własności to przynajmniej te z nich przypomnieć, na których opierać się będą dalsze rozważania.

Salviati: Waszmość zbyt się poniża, żądając podania na no-

wo wiadomości, które niedawno przyjmowaliście jako dobrze znane: wtedy, powiadam, gdy przy rozważaniu wytrzymałości posługiwaliśmy się już pewnem podaniem Apollonjusza, co nie robiło nam żadnej trudności.

Sagredo: Być może znałem je przypadkowo, lub przyjmowałem jako znane, dopóki było potrzebne podczas rozważania; tu wszakże, gdy mamy się zapoznać z wieloma twierdzeniami, dotyczącymi tych linii, nie możemy żałować czasu i trudu.

Simplicio: Co się mnie tyczy, to chociaż jak sędzę p. Sagredo będzie dobrze zaopatrzony, mnie zatrzymują dawne przeszkody, bo jakkolwiek nasi filozofowie traktowali już o ruchu pocisków, to jednak nie przypominam sobie, aby określali linje w tym ruchu opisywane inaczej, jak ogólnie jako linje krzywe, z wyjątkiem tylko spadku po prostopadłej. To też jeżeli ta szczypta geometrii, której tu i owdzie w ciągu naszych rozmów nauczyłem się z Euklidesa, nie wystarczy do zrozumienia dalszych dowodzeń, zmuszony będę przyjmować twierdzenia na wiarę, nie sięgając do ich głębi.

Salviati: Pragnę też zbudzić w Was wdzięczność dla naszego autora, który mi pozwolił rzucić okiem na swoją pracę, a ponieważ nie miałem wtedy pod ręką ksiąg Apollonjusza, wyjaśnił mi dwie główne własności paraboli, bez żadnych wstępnych studjów i na tych własnościach oprzemy się w naszym rozważaniu; dowiedzione zostały te własności przez Apollonjusza ale między wieloma innemi, których poznawanie zabrałoby nam zbyt wiele czasu; ja zaś pragnąłbym skrócić tę drogę, wyciągając pierwszą własność po prostu z samego powstawania paraboli i wiążąc z nią bezpośrednio dowodzenie drugiej własności. Przejdziemy więc najprzód do pierwszej własności.

Wyobraźmy sobie (tab. V, rys. 105) ostrokrag prosty z podstawą kołową IBKC i wierzchołkiem w punkcie L, który przecięty płaszczyzną równoległą do boku LK daje przecięcie BAC zwane parabolą; jej podstawa BC przecina pod kątem prostym średnicę IK koła IBKC i niech będzie oś paraboli AD równoległa do boku LK; weźmy jakikolwiek punkt F na linji BFA i poprowadźmy prostą FE, równoległą do BD. Twierdząc, że kwadrat z BD ma się do kwadratu z FE jak oś DA do odcinka AE. Wyobraźmy sobie przez punkt E przeprowadzoną płaszczyznę, równoległą do koła IBKC, to ta przetnie ostrokrag według koła o średnicy GEH. A ponieważ BD jest prostopadła do IK, średnicy koła IBK, to kwadrat z BD jest równy prostokątowi o bokach ID, DK. Tak samo będzie na kole

górnem, przechodzącym przez punkty G, F, H, kwadrat z linii FE równy prostokątowi o bokach GE, EH. Więc kwadraty z BD i FE mają się do siebie jak prostokąt IDK do prostokąta GEH. A ponieważ linja ED jest równoległa do HK, to będzie EH równe DK, gdyż są równoległe; a że prostokąt IDK ma się do prostokąta GEH jak ID do GE, czyli jak DA do AE; więc prostokąt IDK ma się do prostokąta GEH, jak kwadrat z BD do kwadratu z FE, albo jak oś DA do odcinka AE, c. b. d. d.

Drugie podanie, potrzebne w naszym rozważaniu, jest następujące. Nakreślmy parabolę (tab. V, rys. 106) i przedłużmy jej oś CA na zewnątrz do D, poprowadźmy przez jakikolwiek jej punkt B linję BC równoległą do podstawy paraboli i odetnijmy DA równe osi CA. Twierdzą, że linja prosta, poprowadzona przez punkty D, B, nie będzie przecinała paraboli, lecz tylko dotykać się jej będzie w tym samym punkcie B. Albowiem, jeżeli to jest możliwe, to ona przetnie parabolę wyżej, a jej przedłużenie niżej. Weźmy więc na niej jakikolwiek punkt G i poprowadźmy prostą FGE. Ponieważ kwadrat z FE jest większy od kwadratu z GE, to stosunek kwadratu FE do kwadratu z BC będzie większy od stosunku kwadratu GE do tegoż kwadratu z BC. A ponieważ, według twierdzenia poprzedniego, kwadrat z FE ma się do kwadratu z BC, jak EA do AC, to stosunek EA do AC będzie większy od stosunku kwadratu z GE do kwadratu z BC albo kwadratu z ED do kwadratu DC (bo w trójkącie DGE, tak się ma GE do równoległej BC, jak ED do DC). Ale linja EA tak się ma do AC albo do AD, jak cztery prostokąty EAD do czterech kwadratów z AD, czyli do kwadratu z CD (który jest równy czterem kwadratom z AD); mamy więc, że stosunek czterech prostokątów EAD do kwadratu z CD jest większy od stosunku kwadratu z ED do kwadratu z DC; byłyby więc cztery prostokąty EAD większe od kwadratu ED, co jest nieprawdziwe, gdyż one są mniejsze; a to dlatego, że części EA i AD linji ED nie są równe. Więc linja DB dotyka się paraboli w B, ale jej nie przecina, c. b. d. d.

Simplicio: Wywody swe prowadzicie zbyt okazale; i przyjmujecie zawsze, o ile mi się zdaje, że wszystkie podania Euklidesa są mi równie dobrze znane, jak jego pierwsze axiomy, a tak nie jest. I tak, co dopiero usłyszałem, że cztery prostokąty EAD są mniejsze od kwadratu z DE, dlatego, że części EA, AD linji ED nie są równe, co mnie nie zaspokaja i o czem powątpiewam.

Salvati: Istotnie wszyscy poważniejsi matematycy przyjmują,

że czytelnikowi co najmniej elementy Euklidesa dobrze są znane; panu zaś wystarczy przypomnieć, że jeżeli linja podzielona zostanie raz na części równe a drugi raz na nierówne, to prostokąt z części nierównych jest mniejszy od prostokąta z części równych (czyli kwadratu z połowy) o kwadrat z odległości między punktami podziału. Wynika stąd, że kwadrat z całości, obejmujący cztery kwadraty z połowy, jest większy od czterech prostokątów z części nierównych. Dowiedzione dwa twierdzenia z Elementów przecięć ostrokągowych, należy mieć w pamięci, dla zrozumienia dalszego ciągu niniejszej rozprawy, bo na nich tylko opiera się autor. Teraz więc wrócić możemy do tekstu, aby zobaczyć w jaki sposób dowiedzione tam jest pierwsze twierdzenie, wykazujące, że linja opisana przez pocisk w ruchu złożonym z jednostajnego poziomego i naturalnego, spadającego jest połową paraboli.

Wyobraźmy sobie (tab. V, rys. 107) linję albo płaszczyznę poziomą AB, wysoko umieszczoną, po której ciało od A do B jednostajnie się porusza; po usunięciu zagrody w B, ciało, skutkiem swej ciężkości poddane zostaje naturalnemu spadkowi wzdłuż pionowej BN. Przedłużmy AB w linii prostej do E i odcinajmy na BE równe części upływającego czasu BC, CD, DE, a z punktów C, D, E, poprowadźmy równoległe do poziomej BN: na pierwszej z nich odetnijmy jakąkolwiek długość CI, na następnej cztery razy większą DF, potem dziewięć razy większą EH i tak dalej w stosunku do kwadratów z CB, DB, EB, czyli w podwójnym stosunku tych długości. Bo jeżeli przyjmujemy, że do ruchu jednostajnego od B do C, dochodzi spadek pionowy na długości CI, to ciało po upływie czasu BC znajdzie się w punkcie I. Dalej w ciągu czasu DB, czyli zdwojonego BC, będzie droga przebyta w spadku równa czterokrotnemu CI: bo w pierwszym traktacie dowiedziono, że przy ruchu jednostajnie przyspieszonym drogi przebieżone mają się do siebie jak kwadraty z czasów. Podobnie będzie droga EH, przebyta w spadku, w ciągu czasu BE, równa dziewięciokrotnemu CI, bo EH, DF, CI mają się do siebie, jak kwadraty z linii EB, DB, CB. Jeżeli przez punkty I, F, H, poprowadzimy proste IO, FG, HL, równoległe do EB, to będą linje HL, FG, IO równe linjom EB, DB, CB; równie jak BO, BG, BL są równe CI, DF, EH. Więc kwadrat z HL ma się do kwadratu FG jak linja LB do BG; a kwadrat z FG do kwadratu z IO jak GB do BO. Punkty więc I, F, H, leżą na jednej i tej samej linii parabolicznej. Podobnie biorąc inne jakiegokolwiek wielkości, odpowiadające równym częściom czasu, można

by dowieść, że punkty, do których dochodzi w tych czasach pocisk leżą na jednej i tej samej linii parabolicznej, c. b. d. d.

Salviati: Wniosek ten otrzymany został przez odwrócenie poprzednio dowiedzionego twierdzenia, gdyż jeżeli przez punkty B, H, przeprowadzimy parabolę, a punkty F, I nie będą leżały na tej krzywej, lecz na zewnątrz lub na wewnątrz; to FG będzie mniejsze lub większe od linii dochodzącej do paraboli i kwadraty z HL i FG mieć będą do siebie większy lub mniejszy stosunek od linii LB i BG, tymczasem kwadrat z HL ma zawsze ten właśnie stosunek do kwadratu z FG; więc punkt F leży na paraboli i tak samo wszystkie inne punkty.

Sagredo: Nie mogę zaprzeczyć, że rozważanie to jest nowe, pomysłowe i konkludujące; opiera się ono na tem mianowicie założeniu, że ruch poprzeczny utrzymuje się zawsze jednostajny, że ruch naturalnie przyspieszony jest proporcjonalny do kwadratów z czasu i że te ruchy i ich prędkości mieszają się ale sobie nie przeszkadzają, nie zmieniają się i nie opóźniają, tak że linja rzutu, przy dalszym ruchu, nie zmienia swej natury; to zaś nie wydaje mi się możliwem. Bo ponieważ oś naszej paraboli, wzdłuż której zakładamy że się odbywa ruch naturalny ciężarów, jest prostopadłą do poziomu, więc dochodzi do środka ziemi, parabola zaś oddala się wciąż od swej osi, więc pocisk nie doszedłby nigdy do środka ziemi, a gdyby zaś doszedł, co wydaje się koniecznem, to musiałaby linja rzutu przerodzić się na inną, różną od parabolicznej.

Simplicio: Do tej trudności dołączyć muszę inne jeszcze: jedna z nich polega na tem naszym przypuszczeniu, że płaszczyzna pozioma, która ani się nie podnosi ani nie obniża, jest linią prostą, tak jakby jej części były wszędzie jednakowo oddalone od środka ziemi, co przecież nie jest prawdą; bo postępując od środka płaszczyzny do jej końców, coraz więcej oddalamy się od środka ziemi, a więc płaszczyzna wciąż się podnosi; wynika stąd, że na takiej płaszczyźnie ruch nie może trwać wiecznie i nie może na żadnej jej części utrzymywać się jednostajnym, ale wciąż się zwalnia. Nadto uważam za niemożliwe, aby można było unikać oporu ośrodka i aby się zachowywała stałość ruchu poprzecznego, jak i praca przyspieszenia ciał spadających. Przy tych wszystkich trudnościach wydaje się bardzo nieprawdopodobnem, aby to co było dowiedzione, wychodząc z tak niepewnych założeń, mogło być sprawdzone doświadczeniami.

Salviati: Wszystkie postawione trudności i żądania tak są uzasadnione, że pominięcie ich uważam za niemożliwe; to też przyj-

muje je wszystkie i sędzę, że i nasz autor toż samoby uczynił. Godzę się nawet na to, że nasz abstrakcyjnie wyciągnięty wniosek zmieni się w rzeczywistość i okaże się do tego stopnia mylnym, że ani ruch poprzeczny nie jest jednostajny, ani przyspieszenie ruchu naturalnego nie ma przyjmowanej proporcji, ani linja rzutu nie jest parabolą i t. d. Lecz w zamian za to proszę, abyście nie kwestjonowali naszemu autorowi tego, co przyjmowali inni najznakomitsi mężowie, jakkolwiek to było fałszywem. A sama już powaga Archimedesza może każdego uspokoić; przyjął on w swej mechanice, przy pierwszej kwadraturze paraboli, jako pewnik, że drąg wagi jest linją prostą, której wszystkie punkty są jednakowo oddalone od wspólnego środka ciał ważkich, a sznury, na których zawieszone są ciężary, są do siebie równoległe. Tę licencję przyzna nam każdy, bo nasze narzędzia i odległości, z jakimi mamy do czynienia, są tak małe w porównaniu z naszym wielkiem oddaleniem od środka ziemi, że możemy przyjmować bardzo małą częśćkę łuku wielkiego koła za linję prostą, a dwie prostopadłe z jej końców spuszczone są do siebie równoległe. Gdybyśmy chcieli uwzględniać przy doświadczeniach takie małe wielkości, musielibyśmy zacząć od poprawiania architektów, którzy, ze swym pionem przyjmują najwyższe wieże, wzniesione między linjami równoległemi. Dodam, że moglibyśmy również powiedzieć, iż Archimedes i inni przyjmowali w swych rozważaniach, że są nieskończenie oddaleni od środka ziemi, a w tym przypadku ich podania nie byłyby błędne; i dlatego wnioskowali z absolutną ścisłością. Jeżeli więc chcemy stosować, w skończonej odległości dowiedzione wnioski, do odległości nieskończenie wielkich, musimy od prawdziwie dowiedzionego odciągnąć to, co z powodu nie nieskończonej odległości jest do uwzględnienia; chociaż zawsze odległość jest jeszcze bardzo wielką w porównaniu z małością naszych urządzeń, z których największem jest nośność pocisków przy wystrzałach, zwłaszcza armatnich; jakkolwiek ta ostatnia jest wielką, nie przenosi jednak czterech mil, podczas gdy odlegli jesteśmy od środka ziemi na tyleż tysięcy mil; a jeżeli tę nośność odmierzymy na powierzchni ziemi, to linja paraboliczna nieznacznie tylko się zmieni, w rzeczywistości zaś tak się skieruje, że przejdzie przez środek ziemi. Następnie, co do przeszkód, pochodzących z oporu ośrodka, to te są znaczniejsze a z powodu swej wielkiej różnorodności niemożliwe do zawarcia w pewnych prawidłach ścisłych; bo, dopóki bierzemy tylko pod uwagę opór powietrza, to ten przeszkadza wszyst-

kim ruchom w sposób nieskończenie rozmaity, stosownie do nieskończenie różnych zmian kształtów, ciężarów i prędkości ciał. Co do prędkości, to im ona jest większa, tem większy będzie także opór powietrza, które tem więcej przeszkadza, im ciało jest lżejsze; tak, że jakkolwiek ciężar powinienby spadać z przyspieszeniem proporcjonalnem do kwadratów z czasów, to jednak tylko bardzo ciężkie ciała, spadające ze znacznej wysokości doznają od powietrza takiego oporu, że ten może pokonać w zupełności przyspieszenie i uczynić ruch jednostajnym; co następuje tem prędzej i na tem mniejszej wysokości, im ciało jest lżejsze. Również i ruch poziomy, który po usunięciu wszystkich przeszkód, winienby być jednostajny i wiecznie trwający, będzie skutkiem oporu powietrza hamowany i w końcu zatrzymany, a to tem prędzej, im ciało będzie lżejsze. Dla tych wszystkich nieskończenie różnych przypadków, ciężkości, prędkości i kształtu nie można podać żadnej ścisłej teorii. Trzeba je więc abstrahować, aby móc naukowo traktować ten przedmiot, a wnioskami znalezionemi i dowiedzionemi bez brania pod uwagę przeszkód, posługiwać się w tych granicach, jakie wskaże doświadczenie. A nie mały stąd będzie pożytek, bo tworzywo i kształt tak zostaną dobrane, aby opór ośrodka był możliwie mały, mianowicie wybrane będą ciała najcięższe i okrągłe: przytem drogi i prędkości nie będą zbyt wielkie, abyśmy nie mogli dokładnie ich zmierzyć. Przeciwnie, pociski, których używaliśmy, były z materji ciężkiej i okrągłego kształtu, a jeżeli z materji lżejszej, to miały kształt walców, jak strzały rzucone z procy lub luku, a jednak odchylenia ich dróg od linii parabolicznej były nieznaczne. Nawet (i tu wziąć pragnę nieco więcej swobody) małość tych odchyień była taka, że zewnętrzne działania poboczne, między któremi najważniejszy jest opór ośrodka, nie mogły być zauważone przy naszych doświadczeniach, co mogę uwidocznic na dwóch następujących. Wezmę pod uwagę ruchy w powietrzu, gdyż takie były przeważnie te, o których mówiliśmy, przy tych ruchach zaś powietrze w dwojaki sposób wywiera działanie. Najprzód więcej opóźnia ruch ciał lekkich aniżeli ciężkich. Następnie przy ruchu jednego i tegoż samego ciała większy stawia opór przy większej prędkości, aniżeli przy mniejszej. Co do pierwszego, doświadczenie wykazało, że dwie równie wielkie kule, z których jedna jest 10 do 12 razy cięższa od drugiej, spadając z wysokości 150 do 200 łokci, dochodzą do ziemi z bardzo małą różnicą prędkości, co nas upewnia, że obie doznają bardzo małego oporu powietrza; bo gdyby kula oło-

wiana, zaczynająca spadać w tym samym momencie co i drewniana, mniej była od niej opóźniana, to musiałaby przy tak znacznej wysokości dochodzić do ziemi wyprzedzając drewnianą, gdyż jest 10 razy cięższą; to jednak się nie zdarza, bo wyprzedzanie nie wynosi ani setnej części całej wysokości. Pomiędzy zaś kulą ołowianą a kamienną, ważącą zaledwie trzecią część lub połowę pierwszej, różnica w dojściu do ziemi zaledwie mogła być zauważoną. A ponieważ impet, nabyty przez kulę ołowianą przy spadku z wysokości 200 łokci, (który jest taki, że pozwoliłby jej przebiec w dalszym ciągu spadku, w tym samym czasie ruchem jednostajnym, 400 łokci) jest dość znaczny w porównaniu z prędkościami, które łukiem lub innemi maszynami nadawać możemy naszemu pociskom (z wyjątkiem impetu, jaki daje broń palna), to zapewne nie wiele zbłądzimy, jeżeli twierdzenie dowiedzione bez uwzględniania oporu ośrodka, poczytamy za absolutnie prawdziwe. Co do drugiego z wymienionych punktów, to opór, jakiego jedno i toż samo ciało doznaje od powietrza, gdy się porusza z wielką prędkością, nie jest znacznie większy od oporu jakiego doznaje przy wolniejszym ruchu, co może być stwierdzone następującem doświadczeniem. Na dwóch jednakowo długich nitkach, 4-o lub 5-cio łokciowych zawieszamy dwie kulki ołowiane i wyprowadzamy obie z położenia pionowego, podnosząc jedną na 80 lub więcej stopni a drugą na 4 lub 5; puszczone swobodnie, opisują, spadając i przekraczając pionową, jedna wielkie łuki 160, 150, 140 stopni, powoli się zmniejszające, a druga łuki małe 10, 8, 6 itd., zmniejszające się jeszcze wolniej. Twierdząc więc najprzód, że łuki 180, 160 itd. opisywane będą w tych samych czasach, co i małe 10, 8, itd. A ponieważ oczywiście prędkość pierwszej kulki jest 16 i 18 razy większa niż drugiej, a przy większej prędkości większy być musi opór powietrza niż przy mniejszej, to wahań winno by być mniej przy wielkich łukach 180, 160 stopni itd. niż przy małych 10, 8, 4 albo 2 i 1; ale temu przeczy doświadczenie; bo gdy dwaj towarzysze wzięli się do liczenia wahań, jeden wielkich a drugi małych, to przekonali się, licząc nie tylko dziesiątki ale i setki, że nie różnili się ani o jedno wahnięcie. Doświadczenie to stwierdza jednocześnie oba twierdzenia, a mianowicie, że wielkie i małe wahania odbywają się wszystkie w czasach równych i że opór powietrza nie działa więcej opóźniająco przy ruchach prędkich niż przy powolnych, wbrew temu, co się nam przedtem wydawało i co mylnie przyjmowaliśmy.

Sagredo: Ale ponieważ nie można przeczyć, że powietrze

stawia opór i jednej i drugiej kulce, bo przecież obie zwalniają ruch i w końcu się zatrzymują, należy więc powiedzieć, że opóźnienia następują przy obu kulkach w tym samym stosunku. Ale w jakim? Jeżeli w jednym przypadku opór jest większy niż w drugim, od czegoż to może zależeć, jak nie od tego, że raz był wywołany większą prędkością a drugi raz mniejszą? I ponieważ tak się rzecz ma, to właśnie ta ilość prędkości jest przyczyną a zarazem miarą oporu. Będą więc wszystkie ruchy, małe i wielkie, opóźniane i hamowane w tym samym stosunku; uwaga ta nie wydaje mi się zbyteczną.

Salviati: Moznaby także i w tym drugim przypadku wnioskować, że odchylenia od wniosków, dowiedzionych niezależnie od okoliczności zewnętrznych są tylko małego znaczenia, odnośnie do ruchów z wielką prędkością, którymi najwięcej przyjdzie się tu zajmować, a także odnośnie do odległości, które są bardzo małe w porównaniu z wielkością promienia i kół wielkich globu ziemskiego.

Simplicio: Pragnąłbym bardzo poznać przyczynę wyłączenia przez Waszmość pocisków broni palnej, t. j., jak sądzę, wyrzucanych siłą prochu; przypuszczam, że pociski tej broni podlegają innym zmianom i zahamowaniom, przy oporze powietrza, niż pociski proc, łuków i kuli ręcznych.

Salviati: Skłania mnie do tego nadzwyczajna, nawet nadnaturalna gwałtowność tej broni, tak, że bez przesady mogę powiedzieć, że prędkość, z jaką kula wychodzi z muszkietu lub z armaty, nazwać można nadprzyrodzoną. Bo jeżeli kula taka spada naturalnie choćby z najznaczniejszej wysokości, to prędkość jej wskutek oporu powietrza nie będzie się stale powiększać; lecz następuje to, co się zdarza przy spadaniu lekkich ciał już przy umiarkowanej wysokości, mianowicie, że ruch staje się jednostajnym, a dla kuli żelaznej lub ołowianej po spadku z kilku tysięcy łokci; taką zaś najwyższą prędkość końcową osiągnąć może w sposób naturalny ciężar spadający w powietrzu; a prędkość tę poczytuję za mniejszą od tej, jaką tej samej kuli udziela proch. Można to wykazać przez stosowne doświadczenie. Wystrzelmy z rusznicy, z wysokości 100 albo więcej łokci, kulę ołowianą, prostopadle na dół do bruku kamiennego i z tej samej rusznicy wystrzelmy do tegoż bruku z wysokości jednego lub dwóch łokci, zobaczymy następnie którym wystrzałem bruk będzie więcej rozbity: jeżeli bowiem kula dochodząca z wysokości słabiej działa aniżeli druga, to z pewnością powietrze ją hamowało i zmniejszało jej prędkość, nadaną pierwotnie przez ogień; osiągnięciu podobnej prędkości przeszkadza powietrze

i kula nie nabędzie jej nigdy, z jakkolwiek wielkiej wysokości by spadała; a jeżeli prędkość udzielana przez ogień nie przewyższa tej, jaka może być nabyta przy naturalnym spadku, to więcej szybkie uderzenie na spodzie winnoby być silniejszym od mniej szybkiego. Nie wykonałem tego doświadczenia, lecz skłonny jestem utrzymywać, że kula ruszniczna lub armatnia, spadająca z jeszcze większej wysokości, nie zrobi takiego uderzenia jak to, które następuje z odległości paru łokci od muru, t. j. tak nieznacznej, że krótkotrwałe rozrywanie i przecinanie powietrza, nie wystarcza dla zniesienia nadnaturalnej gwałtowności, jaką wytwarza ogień. Ten nadmierny impet silnego wystrzału, może powodować pewne odkształcenia krańnej pocisku, czyniąc początek paraboli mniej nachylnym a koniec więcej zakrzywionym. Wszakże to wszystko nie może stanowić ani małego ani żadnego zarzutu, co do poszukiwań praktycznych naszego autora, z pśród których najważniejszym jest ułożenie tablicy strzałów tak zwanych dalekonośnych (*di volata*), zawierającej odległości spadania kul, wystrzelonych przy różnych podniesieniach. A ponieważ te strzały wykonywano z moździerzy, przy niewielkich nabojach; nie było więc w nich nadnaturalnego impetu, tak, że krańce pocisków odznaczały się dokładnie.

Ale tymczasem, wróćmy do traktatu, a autor zechce nas doprowadzić do rozpatrywania i badania impetu pocisku, poruszającego się ruchem złożonym z dwóch jednostajnych, jednego poziomego a drugiego skierowanego pionowo.

Twierdzenie II. Podanie II

*Jeżeli jakie ciało porusza się jednostajnie w dwóch kierunkach, i to w jednym poziomym a drugim pionowym, to ruch z tych dwóch złożony będzie potencjalnie równy (*erit potentia aequalis*) momentom obu ruchów.*

Ciało porusza się jednostajnie w dwóch kierunkach, pionowemu odpowiada (tab. V, rys. 108) droga AB; poziomemu zaś w tym samym czasie droga BC. Ponieważ drogi AB, BC, przebiegane są w tym samym czasie ruchem jednostajnym, to momenty tych ruchów mają się do siebie jako też same AB, BC. Ciało zaś, poruszające się według tych dwóch zmian, opisze przekątną AC a moment jego prędkości będzie AC. Ale AC jest potencjalnie równe (*potentia aequatur*) tym samym AB, BC, więc moment złożony z dwóch momentów AB, BC jest potencjalnie równy obu razem wziętym, c. b. d. d.

Simplicio: Należałoby rozjaśnić pewną wątpliwość, która mi się nasuwa, zdaje mi się, że co dopiero wyrażony wniosek nie zgadza się z takimże z innego podania poprzedniego traktatu, według którego impet ciała, biegnącego od A do B, był równy takiemuż biegnącego od A do C; tu zaś wypada, że impet w C jest większy niż w B.

Salviati: Oba podania, panie Simplicio, są prawdziwe lecz nader różne między sobą. Tu chodzi o jedno i toż samo ciało, które jeden tylko ruch może wykonywać, ale ten ruch jest złożony z dwóch, obu jednostajnych; a tam była mowa o dwóch ciałach spadających z jednakowem przyspieszeniem, jedno wzdłuż prostopadłej AB, drugie po pochyłej AC. W tym ostatnim przypadku czasy przyjmowano nierówne, bo czas spadku po pochyłej AC jest większy niż czas spadku wzdłuż prostopadłej AB; teraz zaś rozważamy ruchy po AB, BC, AC, jednostajne i dokonywane w tym samym czasie.

Simplicio: Przepraszam, idźmy dalej, bo jestem zaspokojony.

Salviati: W dalszym ciągu poszukuje autor impetu ciała, ożywionego dwoma ruchami, jednym jednostajnym poziomym a drugim jednostajnie przyspieszonym pionowym, z których w rezultacie składa się ruch pocisku, opisującego linią paraboliczną; w każdym jej punkcie stara się oznaczyć, jaki jest impet pocisku: dla zrozumienia tego podaje autor sposób albo powiedzmy metodę regulowania i mierzenia tego impetu na tej linii, wzdłuż której się odbywa spadek ciężaru ruchem naturalnie przyspieszonym po wyjściu ze spoczynku: mówiąc:

Twierdzenie III. Podanie III

Niech będzie (tab. V, rys. 100) ruch po linii AB, ze spoczynku w A i przyjmijmy na niej jakikolwiek punkt A; i połączmy, że samo AC przedstawia czas albo miarę czasu spadku po AC, a także miarę impetu albo momentu nabytego w C po spadku wzdłuż AC. Weźmy dalej na tej samej prostej AB inny punkt B, w którym impet nabyty przez ciało przy spadku po AB oznaczony być może w stosunku do impetu nabytego w C, którego miarą jest AC. Połączmy AS, średnią proporcjonalną między BA i AC. Dowiedziemy, że impet w B ma się do impetu w C jak linia SA do AC. Poprowadźmy poziome, CD dwa razy większą od AC i BE dwa razy większą od BA. Wiadomo z poprzedniego, że jeżeli ciało spada po AC, a następnie zwrócone zostanie na poziomą CD, z impetem osiągnię-

tym w C, to przebiegnie tam ruchem jednostajnym drogę CD w tym samym czasie, w jakim spadało po AC; tak samo BE przebyte zostanie w tym samym czasie co AB. Ale czas spadku po AB jest równy AS, więc BE przebyte będzie w czasie AS. Połóżmy teraz, że tak się ma czas SA do czasu AC jak EB do BL. Że zaś ruch po EB jest jednostajny, to droga BL przebyta będzie w czasie AC z momentem prędkości w B. Ale w tym samym czasie przebyta będzie droga CD z momentem prędkości w C: momenty zaś prędkości mają się do siebie jak drogi z temi momentami przebyte w tym samym czasie: zatem moment prędkości w C ma się do momentu prędkości w B jak DC do BL. Że zaś jak DC do BE, tak się mają do siebie ich połowy, t. j. CA do AB a EB do BL ma się jak BA do AS, więc CD do BL ma się jak BA do AS, więc CD do BL ma się jak CA do AS, t. j. jak moment prędkości w C do momentu prędkości w B, tak się ma CA do AS, albo czas spadku po CA do czasu spadku po AB. Tak się uwydatnia metoda mierzenia impetu albo momentu prędkości na linii prostopadłego spadku, przyczem przyjęto, że impet rośnie proporcjonalnie do czasu.

Zanim pójdziemy dalej, należy nadmienić, że ponieważ ma być mowa o ruchu złożonym z jednostajnego poziomego i przyspieszonego z góry na dół (bo z takiego połączenia powstaje i formuje się krążna pocisku, t. j. parabola), musimy przeto ustalić pewną ogólną miarę, którąby obu ruchów prędkości impety lub momenty mogły być mierzone. Że zaś niezliczone są stopnie prędkości ruchu jednostajnego, z których nie którykolwiek przypadkowy, lecz jeden z tych niezliczonych ma być złożony i połączony ze stopniem prędkości, nabytym w ruchu naturalnie przyspieszonym, to nie można obmyśleć prostszej drogi wiodącej do wyboru i oznaczenia stopnia prędkości jak przyjęcie innego tegoż rodzaju. Aby się zatem jaśniej wyrazić; niech będzie (tab. V, rys. 110) prostopadła AC do poziomej BC: AC będzie wysokością a CB amplitudą połowy paraboli AB, którą opisuje złożenie dwóch ruchów, z których jeden jest spadkiem ciała po AC, ruchem naturalnie przyspieszonym, po wyjściu ze spoczynku w A, a drugi ruchem poprzecznym jednostajnym wzdłuż poziomej AD. Impet nabyty w C przez spadek po AC, mierzy się tąż wysokością AC, bo zawsze ten sam jest impet ciała spadającego z tej samej wysokości: na poziomej zaś można dla ruchów jednostajnych wyznaczać niezliczone stopnie prędkości; aby ten, który wybiorę z tej mnogości, oznaczyć i odróżnić od innych, i jakby palcem go wskazać, przedłużę wysokość CA w górę i na

przedłużeniu, stosownie do potrzeby, ustale taką wysokość AE, aby ciało, wychodzące ze spoczynku w E i po tej wysokości spadające, osiągało w A taki impet, z jakim ma się poruszać zwrócone na poziomą AD: jest to ten stopień prędkości, z jakim w czasie spadku po EA, przebieżona będzie wzdłuż poziomej droga równa podwójnemu EA. Uwaga ta wydała się tu konieczną.

Zauważymy nadto, że pozioma CB zwana jest amplitudą połowy paraboli AB.

Wysokość, t. j. AC, tejże paraboli osią.

Linia zaś EA, przez spadek po której oznacza się impet poziomy nazywam wyniosłością (sublimitas).

Po tych uwagach i określeniach, zwracam się do dowodzeń.

S a g r e d o: Zatrzymajcie się, proszę, sądzę bowiem, że tu będzie na miejscu podnieść ten pomysł autora, wykazując jego zgodność z koncepcją Platona oznaczania różnych prędkości biegów jednostajnych przy zmianach obrotów ciał niebieskich; wpadł on wypadkowo na myśl, że żadne ciało nie może przejść od spoczynku do pewnego oznaczonego stopnia prędkości, który ma następnie stale zachowywać, nie przeszedłszy przez wszystkie inne stopnie prędkości mniejszej, t. j. właściwie mówiąc większego opóźnienia, jakie się mieszczą między stopniem oznaczonym a stopniem największego opóźnienia, to jest spoczynkiem; mówił on, że Bóg, po stworzeniu ruchomych ciał niebieskich, dla nadania im tych prędkości, z jakimi następnie miały wiecznie krążyć jednostajnie po drogach kołowych, sprawił, że wychodząc ze spoczynku poruszały się po wyznaczonych drogach prostolinijskich takim ruchem naturalnym, jak się poruszają nasze ciała, wyszedłszy ze spoczynku i wciąż przyspieszają swój bieg. I dodaje, że skoro osiągnięty został przez nie odpowiedni stopień prędkości, który potem miał się wiecznie utrzymywać, wtedy ruch prostolinijski zmieniał się na kołowy, który jedyny nadaje się do pozostawiania jednostajnym, bo obiegi odbywają się bez oddalania się lub zbliżania do pewnego celu, do którego by te ciała dążyły. Pomysł ten godny jest Platona i tem więcej winien być ceniony, że zamilezone jego podstawy a odkryte przez naszego autora, po usunięciu osłonek i pozorów poetycznych, przedstawiają go w prawdziwej postaci. I wydaje mi się prawdopodobnem, że skoro mamy z nauki astronomji dość dokładne dane o wielkości orbit planet, ich odległości od środka, około którego krążą, jak ich prędkości, to i nasz autor (dla którego pomysł Platona nie jest tajemnicą) pewno nieraz z ciekawości

myślał o rozpoczęciu badań nad znalezieniem pewnej określonej wyniosłości (sublimità), wzdłuż jakiej wychodzące ze stanu spoczynku planety musiałyby się poruszać, po oznaczonych drogach prostolinijnych, biegiem naturalnie przyspieszonym, aby następnie prędkość nabyta odpowiadała przy ruchu jednostajnym wielkościom ich orbit i czasem ich obrotów.

Salviati: Przypominam sobie, że mi opowiadał o zrobieniu takiego obliczenia i znalezienia przytem zgodności z obserwacjami; ale nie chciał więcej o tem mówić, obawiając się, aby liczne nowości jakie odkrył i które wywołały oburzenie wśród wielu, nie roznieciły nowych iskier. Ktoby jednak miał ochotę, może na podstawie wskazówek, zawartych w traktacie jaki mamy przed sobą, uczynić zadość swemu upodobaniu. Ale wróćmy do naszego przedmiotu.

Zadanie I. Podanie IV

Jakim sposobem, w poszczególnych punktach danej paraboli, opisanej przez pocisk, określa się impet.

Niech będzie (tab. V, rys. 111) połowa paraboli BEC, jej amplituda CD, wysokość DB, która w górę przedłużona spotyka w A styczną CA do paraboli, a przez wierzchołek B poprowadzona równoległa BI do poziomu CD. Jeżeli amplituda CD jest równa całej wysokości DA, to będzie BI równe BA i równe BD. A jeżeli przyjmiemy, że AB jest miarą czasu spadku po AB i miarą momentu prędkości nabytego w B przy spadku wzdłuż AB po wyjściu ze spoczynku w A, to DC (podwojone BI) będzie drogą, która z impetem osiągniętym wzdłuż AB, po skierowaniu ciała na poziomą przebieżona zostanie w tym samym czasie. Lecz w ciągu tegoż czasu, ciało spadające po BD ze spoczynku w B, przebiega wysokość BD, więc spadające po AB ze spoczynku w A, zwrócone z impetem AB na poziomą, przebiegnie drogę równą DC. Przyłączający się spadek po BD przebywa wysokość BD; i opisana zostaje parabola BC: na której impet w końcu C składa się z jednostajnego poprzecznego; którego moment jest AB i z drugiego momentu nabytego przy spadku BD w końcu D czyli C; które to oba momenty są sobie równe. Jeżeli więc AB jest miarą jednego z nich, mianowicie jednostajnego poprzecznego, to BI równe BD będzie miarą impetu osiągniętego w D lub C, a prosta IA będzie ilością momentu złożonego z obu: będzie więc ona także ilością czyli miarą całego momentu, jaki pocisk biegnący po paraboli BC posiada jako impet w C. To założywszy, weźmy na paraboli jakikol-

wiek punkt E, w którym oznaczony ma być impet pocisku. Poprowadźmy poziomą EF i weźmy BG średnią proporcjonalną między BD i BF. Ponieważ AB, czyli BD, jest miarą czasu i momentu prędkości przy spadku BD ze spoczynku w B, to BG będzie czasem, albo miarą czasu impetu w F przy zejściu z B. Jeżeli zatem położymy BO równe BG to łącząca przekątna AO będzie ilością impetu w punkcie E; albowiem AB przyjęto jako miarę czasu i impetu w B, który po skierowaniu ciała na poziomą dalej się utrzymuje; BO zaś określa impet w F, albo w E, przy spadku ze spoczynku w B wzdłuż wysokości BF, te zaś AB, BO, równoważone są potencjalnie przez AO, otrzymuje się więc co było żądane.

Sagredo: Rozważanie, tak składania tych różnych impetów, jak i ilości impetu wypadkowego, wydaje mi się tak nowem, że doznaję niemałej konfuzji. Nie mówię o składaniu dwóch ruchów jednostajnych, jakkolwiek niejednakowych, gdyż jeden jest poziomy a drugi pionowy, bo te są najodpowiedniejsze do wytworzenia ruchu potencjalnie równego obu składowym, lecz nie mogę zdać sobie sprawy z połączenia ruchu jednostajnego poziomego z przyspieszonym prostopadłym. Dlatego prosiłbym o nieco gruntowniejszy wykład tego przedmiotu.

Simplicio: I dla mnie jest to potrzebne, tem więcej, że nie jestem jeszcze całkowicie przekonany o potrzebie tych twierdzeń, stanowiących jakby podstawę innych, które po nich następują. Przyznam się, że nawet przy składaniu dwóch ruchów jednostajnych, poziomego i pionowego, pragnąłbym lepiej zdawać sobie sprawę z potęgi wypadkowej. Teraz, panie Salviati, zechce Waszmość uczynić zadość naszej potrzebie i życzeniu.

Salviati: Życzenia Wasze są zupełnie uzasadnione, a ponieważ dłuższy czas nad tem myślałem, spróbuję uczynić im zadość. Pozwólcie tymczasem, że wrócę do rzeczy, wielokrotnie już poruszanych przez autora.

Rozprawiać stanowczo o ruchach, ich prędkości lub impecie, czy to jednostajnych, czy też naturalnie przyspieszonych, nie możemy, nie określiwszy naprzód miary, którejby użyć było można do mierzenia prędkości, a także do mierzenia czasu. Co do miary czasu, to mamy ogólnie przyjęte godziny, minuty pierwsze i drugie¹⁾ itd. a tak samo jak dla czasu, musimy mieć i dla prędkości, miarę dla wszystkich zrozumiałą i ogólnie przyjętą, czyli wszędzie jednakową.

¹⁾ Sekundy.

Za odpowiednią do tego użytku uważał autor, jak tu powiedziano, prędkość ciała swobodnie spadającego, bo wszędzie na ziemi prędkości jednakowo rosną. Gdyż stopień prędkości, jaki np. osiąga po wyjściu ze spoczynku jednofuntowa kula ołowiana, spadająca prostopadle z wysokości, jednego pręta (*una picca*) jest zawsze ten sam we wszystkich miejscowościach, a przez to najodpowiedniejszy do wyrażenia ilości impetu, pochodzącego z naturalnego spadku. Pozostaje więc jeszcze szukać metody oznaczania ilości impetu w ruchu jednostajnym w taki sposób, aby wszyscy ci, którzy o niej będą mówić, wytwarzali sobie toż samo pojęcie o jej wielkości i prędkości; aby jeden nie wyobrażał sobie impetu przedszego niż drugi; a następnie, aby przy łączeniu i mieszanu powstałych z ruchu jednostajnego i przyspieszonego, różni ludzie nie tworzyli sobie różnych pojęć o różnych wielkościach impetów. Dla oznaczania i przedstawiania takiego szczególnego impetu i prędkości, nie znalazł nasz autor innego odpowiedniejszego środka, jak posługiwać się tym impetem, który osiąga ciało w ruchu naturalnie przyspieszonym, którego każdy moment osiągnięty, przy zmianie ruchu na jednostajny, zatrzymuje swoją prędkość ściśle określoną i taką, że w ciągu czasu równego czasowi spadku przebieżona będzie długość, równa podwójnej wysokości spadku. Lecz ponieważ jest to główny punkt rozbieranej kwestji, dobrze będzie objaśnić go szczególnym przykładem. Wracając więc do prędkości i impetu nabytego przez ciało spadające, jak powiedzieliśmy, z wysokości jednego pręta, którą to prędkością chcemy się posługiwać przy mierzeniu innych prędkości lub opóźnień w innych przypadkach i przyjmując np., że czas takiego spadku wynosić będzie cztery sekundy, to nie powinniśmy, dla określenia impetu ciała spadającego z jakiegokolwiek innej wysokości, większej lub mniejszej, brać stosunku tej ostatniej wysokości do jednego pręta; przyjmując np., że przy czterokrotnie większej wysokości spadku, osiągnięta zostanie prędkość cztery razy większa; to bowiem byłoby mylne; gdyż przy ruchu naturalnie przyspieszonym, prędkość ani rośnie ani się zmniejsza proporcjonalnie do drogi, a tylko proporcjonalnie do czasu, drogi zaś rosną proporcjonalnie do kwadratów z czasu, jak to było dowiedzione. Bo gdybyśmy mieli na linii prostej oznaczoną pewną jej część, jako miarę prędkości, a także jako miarę czasu i przebieżonej w ciągu tego czasu drogi (które trzy wielkości, dla skrócenia przedstawiane są często przez jedną i tęż samą linję), to dla zmierzenia czasu i stopnia prędkości, któryby tożsamo ciało

osiągnęło na innej odległości, brać musimy jako miarę nie bezpośrednio tę ostatnią odległość, lecz średnią proporcjonalną między dwiema odległościami. Lecz lepiej to objaśnić na przykładzie. Wyobraźmy sobie (tab. V, rys. 112), że wzdłuż linii AC, prostopadłej do poziomu, przebiega ciało jej część AB ruchem przyspieszonym naturalnego spadku: czas trwania tego spadku przedstawić mogą jakąkolwiek linią, a dla skrócenia przedstawię go przez tę samą linią AB, którą przyjmę także za miarę impetu i nabytej w tym ruchu prędkości, tak, że dla wszystkich wielkości, branych pod uwagę w ciągu rozmowy, miarą będzie AB. Ustaliwszy naszym dowolnem przypuszczeniem, że jedna wielkość AB przedstawia trzy miary różnego rodzaju, mianowicie miary dróg, czasów i impetów, zajmiemy się oznaczeniem dla danej drogi AC, czasu spadku od A do C i impetu osiągniętego w C, w stosunku do czasu i impetu, których miarą jest AB. Jeden i drugi znajdziemy, biorąc dla dwóch linii AC, AB, średnią proporcjonalną AD i ustalając, że czas spadku po AC ma się do czasu spadku po AB jak linia AD do AB. Powiemy tak samo, że impet, albo stopień prędkości, osiągnięty w C, ma się do impetu w B jak ta sama linia AD do AB, bo prędkość rośnie w tym samym stosunku co i czas: a jakkolwiek ten wniosek przyjęty został jako postulat, wszakże autor objaśniał jego zastosowanie w podaniu trzeciem.

Po dobrem zrozumieniu i ustaleniu powyższego, weźmiemy pod uwagę impet pochodzący z dwóch ruchów złożonych; jednego złożonego z poziomego i zawsze jednostajnego, oraz prostopadłego do poziomu, także jednostajnego. Ale drugi złożony będzie z poziomego jednostajnego i prostopadłego naturalnie przyspieszonego. Gdy oba są jednostajne, to jak widzieliśmy co dopiero, impet wypadkowy ze złożenia obu, jest obu równy potencjalnie, co dla jasności objaśnimy na przykładzie. Wyobraźmy sobie, że ciało, spadające po prostopadłej AB (tab. V, rys. 108) ma np. 3 stopnie impetu równomiernego, ale przenoszone jest przez AB ku C z prędkością i impetem 4 stopni, tak, że w tym samym czasie, gdy spadając przebiegnie po prostopadłej 3 łokcie, to po poziomej przejdzie 4; lecz przez złożenie obu prędkości przejdzie ono w ciągu tego czasu od A do C, postępując ciągle po przekątnej AC, której długość nie wynosi 7, to jest sumy z AB, 3 i BC, 4, ale 5, które potencjalnie jest równe obu 3 i 4. Bo jeżeli weźmiemy kwadraty z 3 i 4, to jest 9 i 16 i połączymy je, to utworzą razem 25, jako kwadrat z AC, równy obu kwadratam z AB i BC, a więc AC będzie

bokiem a raczej pierwiastkiem kwadratu 25, czyli będzie 5. Przyjąć więc należy, za prawidło ściśle i pewne, że gdy chodzi o oznaczenie ilości impetu, złożonego z dwóch impetów danych, jednego poziomego, drugiego prostopadłego a obu jednostajnych, należy utworzyć z nich kwadraty i dodać do siebie, następnie wyciągnąć pierwiastek z sumy, który da ilość impetu złożonego z obu. I jak w naszym przykładzie ciało wskutek ruchu prostopadłego miałoby popchnięcie do poziomu z siłą 3 stopni a w ruchu poziomym uderzenie w C z 4 stopniami, popychane przez oba połączone impety, będzie ono jakby uderzone i poruszające się z 5 stopniami prędkości i siły. A uderzenie to mieć będzie też samą wartość we wszystkich punktach przekątnej AC, dopóki impety składowe pozostają też same, nie rosną i nie zmniejszają się.

Zobaczmy teraz, co następuje przy składaniu ruchu jednostajnego poziomego z ruchem prostopadłym do poziomemu, który zaczynając od spoczynku postępuje z naturalnem przyspieszeniem. Oczywiście przekątna, będąca linią ruchu z tych dwóch złożonego, nie jest linią prostą lecz półparabolą, jak to było dowiedzione; wzdłuż której impet wciąż wzrasta, dzięki ciągłemu wzrostowi prędkości ruchu prostopadłego. To też dla określenia, jaki będzie impet w danym punkcie tej przekątnej parabolicznej, trzeba najprzód oznaczyć ilość impetu jednostajnego poziomego, a następnie badać, jaki będzie impet spadku w danym punkcie; to rozważanie czasu nie było potrzebne przy składaniu dwóch ruchów jednostajnych, bo ich prędkości i impety były wciąż też same; tu przeciwnie, gdy przychodzi składać ruch, który poczynawszy od największego opóźnienia, postępuje z prędkością rosnącą razem z czasem, konieczne jest, aby ilość czasu wykazywała ilość stopnia prędkości w danym punkcie: w rezultacie więc impet złożony z tych dwóch (jak dla naszych ruchów jednostajnych) będzie potencjalnie równy obu składowym. Ale lepiej jeszcze objaśnię to na przykładzie. Niech będzie (tab. V, rys. 113) na prostopadłej do poziomemu AC wzięta jakakolwiek część AB, która jednocześnie mierzy drogę ruchu naturalnego po tej prostopadłej, a także jest miarą czasu i stopnia prędkości a raczej impetu. Oczywiście jest najprzód, że impet ciała spadającego z A przemieni się w B na ruch jednostajnie wzdłuż BD równoległej do poziomemu, a ilość prędkości tego ruchu będzie taka, że w ciągu czasu AB ciało przebiegnie podwójną drogę AB i tak długą niech będzie BD. Połóżmy dalej $BC = BA$, poprowadźmy CE równoległą do BD i jej równą, i opiszmy przez punkty B,

E, linją paraboliczną BEI. A ponieważ w ciągu czasu AB z impetem AB przebiegana jest pozioma BD, lub CE, dwa razy większa od AB i w tym samym czasie prostopadła BC z impetem nabytym w C, równym poziomemu, więc ciało po upływie czasu AB znajdzie się w B, przebywszy od E parabolę BE, i mieć będzie impet złożony z dwóch, z których każdy jest równy impetowi AB. A ponieważ jeden z nich jest poziomy a drugi pionowy, to impet wypadkowy będzie potencjalnie równy obu składowym. Połóżmy więc $BF = BA$ i poprowadźmy przekątną AF; impet i uderzenie w E będzie większe od uderzenia w B, ciała spadającego z wysokości A, albo od uderzenia impetu poziomego wzdłuż BD, w stosunku AF do AB. Ale jeżeli uważamy zawsze BA jako miarę drogi spadku od spoczynku w A do B, oraz miarę czasu i impetu, jaki ciało spadające nabywa w B, to wysokość BO nie byłaby równą ale większą od AB; wzięwszy BG średnią proporcjonalną między AB i BO, będzie BG miarą czasu i impetu w O, nabytego przy spadku z wysokości BO; droga po poziomej, która przebyta z impetem AB w ciągu czasu AB była dwa razy większa od AB, będzie w ciągu czasu BG o tyle większa o ile BG jest większe od BA. Połóżmy $LB = BG$ i poprowadźmy przekątną AL, to otrzymamy ilość złożoną z dwóch impetów, poziomego i pionowego, które opisują parabolę: z nich poziomy jest jednostajny, nabyty w B przez spadek po AB, a drugi jest nabyty w O, a raczej w I, przez spadek po BO w ciągu czasu BG, które jest zarazem ilością jego momentu. Podobnie znajdziemy impet w końcowym punkcie paraboli, gdy jej wysokość będzie mniejsza od wyniosłości AB, biorąc między oboma średnią proporcjonalną; ta, umieszczona na poziomej zamiast BF, pozwala poprowadzić przekątną jak AF będącą ilością impetu w punkcie końcowym paraboli.

Do rozważanej metody badania impetów, strzałów a raczej uderzeń takich pocisków, dodać należy inną nader ważną uwagę, mianowicie, że dla dobrego oznaczenia siły uderzenia i jego energii, nie wystarcza rozważanie samej prędkości pocisku, lecz należy jeszcze mieć na względzie stan i warunki, w jakich się znajduje ciało uderzane, gdyż z wielu względów ma to wielkie znaczenie dla skuteczności uderzenia. A najprzód, niema takiego, ktoby nie wiedział, że ciało uderzane tem więcej podlega gwałtownej prędkości uderzającego, im bardziej się mu opiera i ruch jego hamuje w całości lub częściowo; i jeżeli uderzone ustępuje przed prędkością uderzającego, to takie uderzenie nie wywiera żadnego skutku.

Ten zaś, kto pędzi by przebić laną swego przeciwnika i wpada na uciekającego z takąż samą prędkością, nie uderzy go, lecz tylko dotknie bez uszkodzenia.

Ale jeżeli uderzenie trafia na taki przedmiot, który uderzającemu nie zupełnie ustępuje, lecz tylko częściowo, to uderzenie uszkadza, lecz nie całym swoim impetem lecz tylko przewyżką prędkości uderzającego nad prędkością cofania się i ustępowania uderzonego: tak, że jeżeli np. ciało uderzające dochodzi do uderzonego z 10 stopniami prędkości, a to ostatnie, ustępując częściowo cofa się z 4 stopniami, to impet i uderzenie wynosić będzie 6 stopni. Uderzenie wreszcie będzie zupełne i największe odnośnie do ciała uderzającego, gdy ciało uderzane wcale nie ustępuje, lecz całkowicie się opiera i wstrzymuje cały ruch uderzającego; jeżeli to może się zdarzyć. Powiedziałem, odnośnie do ciała uderzającego, bo jeżeliby ciało uderzone poruszało się w odwrotnym kierunku, t. j. w stronę uderzającego, to strzał i uderzenie będą tem silniejsze, im obie przeciwne prędkości razem wzięte są większe od prędkości ciała uderzającego. Nadto zauważyć należy, że większe lub mniejsze ustępowania zależy nietylko od mniejszej lub większej twardości tworzywa, jakby to było żelazo, ołów, wena itp. ale także od położenia ciała otrzymującego uderzenie; jeżeli to położenie jest takie, że ruch ciała uderzającego spotyka je pod kątem prostym, to impet strzału będzie największy: lecz jeżeli ruch będzie nachylony, jakbyśmy powiedzieli, ukośny, to cios będzie słabszy i to tem więcej, im większe będzie nachylenie, bo tak położony przedmiot, choćby był z najtwardszego tworzywa, nie niszczy i nie zatrzymuje całego impetu i ruchu ciała uderzającego, które wymykając się leci dalej, wykonywając ruch swój częściowo tylko na powierzchni opierającej się przeszkody. Gdy więc poprzednio oznaczano wielkość impetu pocisku na końcu paraboli, to miano zawsze na względzie uderzenie prostopadłe do tej paraboli albo do stycznej do niej w danym punkcie; bo jeżeli ten ruch złożony jest z poziomego i prostopadłego, to uderzenie nie wywiera swego maksymalnego działania ani na płaszczyznę poziomą ani na pionową, gdyż względem obu otrzymane zostaje ukośnie.

S a g r e d o: Rozważanie tych uderzeń przypomina mi zagadnienie albo raczej jedną kwestję z mechaniki, której rozwiązania nie znalazłem w żadnym autorze, ani nawet wzmianki, któraby mnie choć w części zadowoliła. Moje powątpiewanie i podziw polegają na tem, że nie mam przeświadczenia, skąd może pochodzić i od

czego zależy energia i niezmienna siła, objawiająca się podczas uderzenia, gdy jednym ciosem młotka, nie ważącego więcej jak 8 do 10 funtów pokonywamy takie opory, które nie ustępują żadnemu ciężarowi działającemu bez uderzenia a tylko z impetem naciskowym, choćby ten ciężar wynosił wiele set funtów. Pragnąłbym bardzo poznać sposób mierzenia siły tego uderzenia, która, nie sądzę, aby była nieskończoną, uważam raczej, że ma pewną wartość oznaczoną, która mogłaby być porównaną i wreszcie zmierzoną z innymi siłami naciskającymi ciężkości, albo draga, albo śruby, albo innych narzędzi mechanicznych, których zwiększenie siły jest dla mnie w zupełności zrozumiałe.

Salviati: Nie sam pan tylko podziwia to działanie, nie mając jasnego pojęcia o przyczynie zadziwiającego zjawiska. Rozmyślałem nad niem pewien czas na próżno i wciąż się zwiększała moja niepewność, aż w końcu, spotkawszy raz naszego akademika, podwójnie zostałem przezeń pocieszony: dowiedziałem się najprzód, że i on także pozostawał przez długi czas w podobnej nieświadomości, następnie powiedział mi, że poświęciwszy wiele tysięcy godzin swego życia na zastanawianie się i badanie, doszedł do niektórych wyników, bardzo dalekich od naszych bezpośrednich wyobrażeń a przez to nowych i swą nowością zadziwiających. A jakkolwiek wiem, że Waszmość pragnął, aby się zapoznać z takimi pomysłami, nader oddalonymi od panujących poglądów, to jednak obecnie nie będę mógł uczynić zadość żądaniu, lecz przyrzekam, że, gdy ukończymy czytanie tego traktatu, objaśnię wszystkie te pomysły i nadzwyczajności, które mi pozostały w pamięci z rozmów z naszym akademikiem. A tymczasem podajajmy za podaniami autora.

Zadanie II. Podanie V

Na przedłużeniu osi danej paraboli oznaczyć punkt najwyższy, z którego spadające ciało opisze daną parabolę.

Niech będzie (tab. V, rys. 114) parabola AB, jej amplituda HB, przedłużenie jej osi HC, na którym ma być oznaczona wyniosłość, z której spadające ciało, z impetem osiągniętym w A zwrócone na poziomą, opisuje parabolę AB. Poprowadźmy poziomą AG, równoległą do BH i połączmy AF = AH, poprowadźmy prostą FB, styczną do paraboli w B a przecinającą w G poziomą AG; odetnijmy AC trzecią proporcjonalną¹⁾ do FA i AG. Twierdzę, że C będzie szu-

¹⁾ $FA : AG = AG : AC$.

kany punkt, z którego ciało, wychodzące ze spoczynku w C i z nabytym impetem w A skierowane poziomo razem z impetem spadku ze spoczynku w A do H, opisze parabolę AB. Bo jeżeli CA jest czasem spadku od C do A a jednocześnie miarą impetu nabytego w A, to będzie AG (średnia proporcjonalna między CA i AF) czasem spadku i impetu przy spadku z F do A, albo z A do H. A ponieważ ciało spadające z C, z impetem nabytym w A, przebieży ruchem jednostajnym na poziomie drogę równą podwojonemu CA, a w czasie i z impetem AG drogę równą podwojonemu GA czyli BH (bo przy ruchu jednostajnym drogi są proporcjonalne do czasów), a w ruchu prostym spadającym ze spoczynku w czasie GA przebiegnie drogę AH; zatem w tym samym czasie przebieżona będzie przez ciało amplituda HB i wysokość AH. Ciało więc spadające z C opisze parabolę AB, jak to było założone.

Wniosek

Wynika stąd, że połowa podstawy, albo połowa amplitudy pół paraboli (która jest czwartą częścią amplitudy całej paraboli), jest średnią proporcjonalną między jej wysokością a wyniosłością, z której spadek ją opisuje.

Zadanie III. Podanie VI

Dana jest wyniosłość i wysokość połowy paraboli, znaleźć jej amplitudę.

Niech będzie AC (tab. V, rys. 115), prostopadła do poziomej DC, na której dana jest wysokość CB i wyniosłość BA. Oznaczyć trzeba na poziomej CD amplitudę tej półparaboli, którą ciało z wyniosłości BA opisze z wysokością BC. Weźmy średnią proporcjonalną między CB i BA i odetnijmy CD równą tejże podwojonej. Twierdząc, że CD będzie szukaną amplitudą. Wynika to z poprzedniego.

Twierdzenie IV. Podanie VII

Z pomiędzy ciał, opisujących półparabolę jednakiej amplitudy, to, które opisuje parabolę o amplitudzie równej podwójnej wysokości, będzie miało mniejszy impet od każdego innego.

Niech będzie (tab. V, rys. 116) półparabola BD, której amplituda CD jest dwa razy większa od wysokości CB, odetnijmy na górnym przedłużeniu osi BA równe wysokości BC: poprowadźmy AD styczną do paraboli w D a poziomą BE przecinającą w E, będzie

więc BE równe BC albo równe BA ; wiadomo, że parabolę opisuje ciało, którego impet jednostajny poziomy jest taki jak nabyty w B przy spadku ze spoczynku w A a impet naturalny z góry na dół, jak w C przy spadku ze spoczynku w B . Wynika stąd, że impet z tych dwóch złożony, działający w punkcie końcowym D będzie jak przekątna AE równy potencjalnie obu. Niech będzie GD jakkolwiek inna półparabola z tą samą amplitudą CD , lecz z wysokością CG , mniejszą lub większą od wysokości BC ; styczną do niej będzie HD , przecinająca poziomą przeprowadzoną przez G w punkcie K ; i niech będzie jak HG do GK , tak KG do GL , z której to wysokości GL , wedle tego co poprzednio dowiedziono, spadające ciało opisuje parabolę GD . Między AB i GL niech będzie średnia proporcjonalna GM : to GM będzie czasem i momentem albo impetem w G przy spadku z L (założono bowiem, że AB jest miarą czasu i impetu). Niech będzie znów, między HC i CG średnia proporcjonalna GN , będzie ona miarą czasu i impetu przy spadku z G do C . Jeżeli poprowadzimy MN , to będzie ono miarą impetu ciała opisującego parabolę BD , osiągniętego w punkcie końcowym D . Twierdząc, że impet ten jest większy od impetu na paraboli BD , który się równał AE . Albowiem GN jest średnią między BC i CG , a że BC równe BE , to jest równe GK (bo obie są połową DC); będzie więc jak CG do GN , tak NG do GK i jak CG albo HG do GK , tak kwadrat z NG do kwadratu z GK ; jak zatem HG do GK , tak się ma KG do GL a więc jak kwadrat z NG do kwadratu z GK , tak się ma KG do GL ; lecz jak KG do GL , tak się ma kwadrat z KG do kwadratu z GM (bo GM jest średnią między KG i GL), a więc trzy kwadraty NG , GK i GM tworzą ciąg proporcjonalny¹⁾ a dwa skrajne NG i GM razem wzięte dają kwadrat z NM większy od podwojonego kwadratu z KG , który jest równy podwojonemu kwadratu z AE : więc kwadrat z MN jest większy od kwadratu z AE i linja NM większa od linji EA , c. b. d. d.

Wniosek

Okazuje się stąd, że odwrotnie, przy ruchu pocisku z punktu końcowego D , po półparaboli DB , impet osiągnięty jest mniejszy, niż dla każdej innej wysokości większej lub mniejszej od wysokości półparaboli DB , której styczna AD czyni z poziomem kąt równy połowie kąta prostego. Stąd znów wynika, że jeżeli z tym samym

¹⁾ $NG : GK = GK : GM$.

impetem wyrzucane będą pociski, z punktu końcowego D, przy różnych nachyleniach, to rzut najdalej sięgający, to jest największa amplituda połowy lub całej paraboli, nastąpi przy nachyleniu równym połowie kąta prostego; inne rzuty, przy większym lub mniejszym nachyleniu sięgać będą mniej daleko.

S a g r e d o: Zadziwiająca i wyborna jest potęga ścisłych dowodzeń, a takimi są tylko dowodzenia matematyczne. Widziałem już ufając opowiadaniom wielu bombardjerów, że ze wszystkich strzałów armatnich lub moździerzowych, te, których kula padała najdalej, robione były przy nachyleniu równym połowie kąta prostego, które oni nazywają szóstym punktem kwadransa.¹⁾ Ale zrozumienie przyczyny, skąd to pochodzi, nieskończenie wiele więcej znaczy, niż proste zapewnienie innych a nawet więcej niż wielokrotnie powtarzane doświadczenie.

S a l v i a t i: Uwaga Waszmości jest nader słuszna: a poznanie jednego zjawiska, na zasadzie jego przyczyn, otwiera nam drogę do zrozumienia innych zjawisk bez potrzeby uciekania się do doświadczeń; tak też rzecz się ma i w tym przypadku, gdzie przez rozważanie dochodzimy do zdania sobie sprawy, że najdalszy rzut następuje przy nachyleniu równym połowie kąta prostego; tu autor dowodzi rzeczy, która doświadczalnie nie była zaobserwowana a mianowicie, że inne strzały jednakowo daleko niosą, gdy nachylenia są jednakowo większe lub mniejsze od połowy kąta prostego: tak, że kule, z których jedna przy nachyleniu 7-go a druga 5-go punktu kwadransa zostały wystrzelone, dochodzą do poziomu w jednakiej odległości a także wystrzelone przy nachyleniu 8 i 4, 9 i 3 itd. Ale wysłuchajmy dowodzenia.

Twierdzenie V. Podanie VIII

Amplitudy parabol, opisanych przez pociski wyrzucone z jednym impetem i przy nachyleniach jednakowo większych lub mniejszych od połowy kąta prostego są sobie równe.

W trójkącie prostokątnym (tab. V, rys. 117) MCB niech będzie pozioma BC równa pionowej CM, tak, że kąt MBC jest połową prostego: przedłużmy CM do D i wykreślmy nad i pod przekątną MB przy wierzchołku B dwa równe kąty MBE i MBD. Dowieść mamy, że amplitudy parabol opisanych przez pociski wyrzucone z B z jednakowym impetem, przy nachyleniach EBC i DBC są so-

¹⁾ Czwierć koła podzielona na 12 części.

bie równe. Ponieważ bowiem kąt zewnętrzny BMC jest równy wewnętrznym MDB, DBM, więc tym obu równy jest także kąt MBC. Jeżeli zamiast kąta DBM weźmiemy kąt MBE, to będzie MBC równy dwóm MBE, BDC, a po odjęciu wspólnego MBE, zostanie reszta BDC równa reszcie EBC. Trójkąty zatem DCB i BCE są podobne. Przepołówmy proste DC i EC w H i F, poprowadźmy HI, FG równoległe do poziomej CB i jak DH do HI niech będzie IH do IHL; będzie zatem trójkąt IHL podobny IHD, któremu znów jest podobny EGF, że zaś IH, GF są równe (bo każda jest połową BC), więc FE, czyli FC jest równe HL, a dodając do obu FH, otrzymamy CH równe FL. Jeżeli teraz wyobrazimy sobie połowę paraboli, przechodzącą przez H i B, o wysokości HC a wyniosłości HL, to jej amplituda będzie CB, które jest równe podwojonemu HI, podczas gdy HI jest średnią proporcjonalną między DH albo CH i HL; styczną więc do niej będzie DB wobec równości CH i HD. Jeżeli znów wyobrazimy sobie parabolę, przechodzącą przez F i B, z wyniosłością FL a wysokością FC, między którymi średnią proporcjonalną jest FG, równe połowie poziomej CB, to tak samo amplitudą jej będzie CB: styczną zaś do niej jest EB, bo EF i FC są sobie równe. Że zaś kąty DBC, EBC (nachylenia rzutu) różnią się jednako od połowy kąta prostego, przeto twierdzenie jest dowiedzione.

Twierdzenie VI. Podanie IX

Amplitudy dwóch parabol są równe, jeżeli wysokości i wyniosłości tych parabol są do siebie odwrotnie proporcjonalne.

Wysokość (tab. V, rys. 118) GF paraboli FH ma się do wysokości CB paraboli BD, jak wyniosłość BA do wyniosłości FE. Twierdząc, że amplitudy HG i DC są sobie równe. Ponieważ bowiem pierwsza GF ma się do drugiej CB, jak trzecia BA do czwartej FE, to prostokąt GFE z pierwszej i czwartej jest równy prostokątowi CBA z drugiej i trzeciej; zatem kwadraty równe tym prostokątom są sobie równe; a że prostokątowi GFE jest równy kwadrat z połowy GH a prostokątowi CBA kwadrat z połowy CD, to te kwadraty, ich boki i zdwojenia tych boków są sobie równe. Temi ostatnimi zaś są amplitudy GH i CD, c. b. d. d.

Lemma dla następującego twierdzenia

Jeżeli linja prosta podzielona zostanie w jakimkolwiek punkcie na dwie części, to suma kwadratów ze średnich proporcjonalnych

między całą linią a każdą z części jest równa kwadratowi z całej linii.

Niech będzie (tab. V, rys. 119) AB podzielona w C . Twierdzą, że kwadraty ze średnich proporcjonalnych między całą AB i częściami AC , CB razem wzięte są równe kwadratowi z całej AB . Opiszmy półkole na AB i wyprowadźmy z C prostopadłą CD , połączmy DA i DB . Jest więc DA średnią między BA , AC a DB średnią między AB , BC , a suma kwadratów z linii DA , BD jest równa kwadratowi z AB , bo kąt ADB w półkolu jest prosty; więc twierdzenie jest dowiedzione.

Twierdzenie VII. Podanie X

Impet czyli moment jakiejkolwiek półparaboli jest równy momentowi naturalnego spadku wzdłuż prostopadłej do poziomu tak dłużej jak suma wyniosłości i wysokości półparaboli.

Niech będzie (tab. V, rys. 120) półparabola AB , której wyniosłością jest DA a wysokością AC , z których się składa prostopadła DC . Twierdzą, że impet na półparaboli w B jest równy momentowi naturalnego spadku od D do C . Przyjmijmy też samą DC za miarę czasu i impetu i weźmy średnią proporcjonalną między CD i CA równą CF . Niech będzie nadto CE średnia proporcjonalna do DC i CA , to CF jest miarą czasu i momentu spadku wzdłuż DA ze spoczynku w D a CE czasem i momentem spadku wzdłuż AC ze spoczynku w A , zaś przekątna EF momentem z nich złożonym i to jest właśnie moment na półparaboli w B . Że zaś DC podzielone jest w A a CF i CE są średnie między całem CD a jego częściami DA i AC , to będzie suma kwadratów z tych średnich, na mocy powyższej lemmy równa kwadratowi z całości; ale ta suma jest także równa kwadratowi z EF , a więc i linja EF jest równa DC . Wynika stąd, że momenty spadku po DC i po półparaboli AB w C i w B są równe, c. b. d. d.

Wniosek

Wynika stąd, że impety wszystkich półparabol, których sumy wyniosłości i wysokości są równe, są sobie równe.

Zadanie II. Podanie XI

Mając dany impet i amplitudę półparaboli, oznaczyć jej wysokość.

Niech będzie dany impet (tab. V, rys. 121), określony długością prostopadłej do poziomu AB i na poziomej dana amplituda BC .

Należy znaleźć wyniosłość półparaboli, której impet byłby równy AB a amplituda BC . Z poprzedniego wynika, że połowa amplitudy BC jest średnią proporcjonalną między wysokością a wyniosłością tejże półparaboli, której impet według poprzedniego jest równy impetowi spadku wzdłuż AB , ze spoczynku w A . Zatem AB tak ma być podzielone, aby prostokąt z jego części był równy kwadratowi z połowy BC czyli z BD . Okazuje się tu, że DB nie może być większe od połowy BA , bo prostokąt utworzony z części jest największy gdy części są równe. Przepołówmy zatem BA w E . Gdyby BD było równe BE , zadanie byłoby rozwiązane: wysokością półparaboli byłoby BE a wyniosłością EA (i oto amplituda paraboli o podniesieniu równem połowie kąta prostego jest największa, jak to było dowiedzione, że wszystkich opisanych przy jednakowym impecie). Gdy znów BD jest mniejsze od połowy BA , to podzielić należy to ostatnie tak, aby prostokąt z jego części był równy kwadratowi z DB . Opiszmy półkole na EA , od A odetnijmy AF równe BD : i poprowadźmy FE , któremu równe odetnijmy EG . Będzie tedy prostokąt BGA razem z kwadratem z EG równy kwadratowi z EA , któremu także jest równa suma kwadratów z AF i FE . Jeżeli odejmiemy równe sobie kwadraty z GE i FE , zostanie prostokąt BGA równy kwadratowi z AF albo z BD ; a linja BD jest średnią proporcjonalną między BG i GA . Wynika stąd, że wysokość półparaboli o amplitudzie BC i impecie AB jest równa BG a wyniosłość równa GA . Jeżeli odetniemy BI równe GA , to BI będzie wysokością a IA wyniosłością półparaboli IC . Na zasadzie dowiedzonego, możemy to uczynić.

Zadanie III. Podanie XII

Obliczyć i zestawzić w tablicy amplitudy wszystkich półparabol, opisanych przez pociski wyrzucone z jednakim impetem.

Z poprzednio dowiedzonego wynika, że pociski z jednakim impetem wyrzucane, opisywać będą parabole, których sumy wyniosłości i wysokości będą jednakie. Wszystkie te sumy leżą przeto na pionowej zawartej między temiż samemi dwiema poziomemi. Niech będzie (tab. V, rys. 122) do poziomej CB prostopadła równa jej BA i poprowadźmy przekątną AC . Kąt ACB będzie zatem połową prostego czyli 45 stopni. Przepołówmy prostopadłą BA w D , to będzie DC tą półparabolą, którą ma wyniosłość AD a wysokość DB ; a jej impet w C jest ten sam, jak ciała spadającego ze spoczynku w A wzdłuż AB , w punkcie B . Poprowadźmy AG równo-

ległe do BC; dla wszystkich innych półparabol tegoż samego impetu winny sumy wyniosłości i wysokości mieścić się między AG i BC. Ponieważ dalej dowiedzionem zostało, że amplitudy tych półparabol, których styczne jednakowo nad lub pod 45 stopniem są skierowane, są sobie równe, więc rachunek przeprowadzony dla większych nachyleń, służyć będzie i dla mniejszych. Przyjmijmy także liczbę dziesięciu tysięcy części, jako największą amplitudę półparaboli opisanej rzutem przy nachyleniu 45° , taką więc będzie linja BA i amplituda półparaboli BC. Obieramy zaś liczbę 10000, bo użyjemy do rachunku tablicy stycznych, która daje tę liczbę jako styczną kąta 45 stopni. Przystępując do dzieła, poprowadźmy CE pod kątem ECB większym od kąta ACB (ale zawsze ostrym): mamy nakreślić półparabolę styczną do linji EC której wyniosłość razem z wysokością ma być równa AB. Z tablicy stycznych weźmiemy długość stycznej BE kąta BCE i ta długość przepołowiona da nam punkt F. Określamy następnie trzecią proporcjonalną do BF i do BI (połowy BC), która koniecznie będzie większa od FA. Niech nią będzie FO.¹⁾ Dla półparaboli więc wpisanej w trójkąt ECB, ze styczną CE i amplitudą CB, otrzymujemy wysokość BF i wyniosłość FO. Ale suma BO przewyższa odległość między równoległymi AG i BC, a tymczasem parabole nie mogą przekraczać tych granic, gdyż tak szukana jak i parabola DC opisywane są pociskami wyrzucanymi z C z tym samym impetem. Szukać więc należy innej paraboli, podobnej do znalezionej (bo pod kątem BCE mogą być opisane niezliczone podobne do siebie większe lub mniejsze), której suma wyniosłości i wysokości jest równa BA. Niech się więc ma OB do BA jak amplituda BC do CR i otrzymamy CR amplitudę półparaboli opisanej przy nachyleniu kąta BCE, której suma wyniosłości i wysokości mieści się między poziomami GA i CB, co właśnie było żądane. Postępowanie zatem będzie takie.

Wziąwszy styczną danego kąta BCE, przepoławia się ją i do tej połowy oraz do połowy BC znajduje się trzecią proporcjonalną, którą jest FO. Niech będzie dalej jak OB do BA tak BC do tej ruchomej amplitudy CR. Weźmy przykład.

Niech kąt ECB ma 50 stopni, styczna jego będzie 11918 a jej połowa BF 5959, połowa BC 5000, trzecia proporcjonalna do obu tych połów 4195, które dodane do BF daje 10154 jako BO. Jak

¹⁾ $BF : BI = BI : FO$.

P. T.

więc OB do BA, czyli jak 10154 do 10000, tak będzie BC, czyli 10000 (obie bowiem są stycznymi kąta 45 stopni) do innej i otrzymamy ruchomą amplitudę BC 9848, podczas gdy BC (największa amplituda) wynosi 10000. Amplitudy całych parabol wynosić będą dwa razy tyle 19696 i 20000. Równie wielka jest amplituda paraboli przy nachyleniu 40 stopni, bo to nachylenie na tyleż się różni od 45 stopni.

S a g r e d o: Aby dobrze zrozumieć to dowodzenie, brak mi wiadomości, dlaczego trzecia proporcjonalna do BF i BI ma być (jak mówi autor) koniecznie większa od FA.

S a l v i a t i: Wniosek ten, jak mi się zdaje, wywiedziony może być w ten sposób. Kwadrat ze średniej z trzech linii proporcjonalnych jest równy prostokątowi z dwóch skrajnych, a więc kwadrat z BI albo z równej do niej BD jest równy prostokątowi z pierwszej skrajnej FB i drugiej, którą należy znaleźć; ta druga skrajna musi być koniecznie większa od FA, bo prostokąt BF na FA jest mniejszy od kwadratu z BD i to właśnie o kwadrat z DF, jak to dowiódł Euklides. Zauważyć należy również, że punkt F, przepoławiający styczną EB, znajdować się będzie w wielu razach ponad punktem A a raz tylko w tymże punkcie A; w tym zaś przypadku oczywiście cała trzecia proporcjonalna do połowy stycznej i do BI dającej wyniosłość) leżeć będzie ponad A. Lecz autor wybrał taki przypadek, kiedy nie było oczywiście, że wzmiankowana trzecia proporcjonalna będzie zawsze większa od FA i że przewyżka ponad F przekroczy równoległą AG. Ale idźmy dalej.

Dobrzeby było, przy pomocy tej tablicy ułożyć drugą uzupełniającą, dla wysokości takichże półparabol, opisanych z tym samym impetem. Postępowanie będzie następujące.

Zadanie IV. Podanie XIII

Z danych w następującej tablicy amplitud półparabol, przy zachowaniu wspólnego impetu z jakim każda z nich została opisana, oznaczyć wysokość poszczególnych półparabol.

Niech będzie (tab. V, rys. 123) dana amplituda BC. Impet zaś, który przyjmujemy, że jest wciąż jednakowy, niech będzie AB, jest to suma wysokości i wyniosłości. Mamy oznaczyć i wydzielić samą wysokość. Ponieważ BA ma być tak podzielone, aby prostokąt z jego części był równy kwadratowi z połowy amplitudy BC, to punkt podziału przypadnie w F. Przepołówmy AB i BC w D i I. Kwadrat więc z IB jest równy prostokątowi BFA, podczas gdy kwadrat

z DA równy jest temuż prostokątowi razem z kwadratem z FD. Jeżeli zatem od kwadratu z DA odejmiemy kwadrat z BI, równy prostokątowi BFA, to pozostanie kwadrat z FD, a dodawszy do jego boku FD długość BD, otrzymamy szukaną wysokość BF. Postępuje się zatem w ten sposób. Od kwadratu z połowy BA odejmuje się kwadrat z BI, z reszty wyciąga się pierwiastek kwadratowy, dodaje do niego BD i otrzymuje szukaną wysokość BF. Przykład. Szukamy wysokości półparaboli opisanej przy 55 stopniach podniesienia. Amplituda z poprzedniej tablicy jest 9396, połowa jej 4698 a kwadrat z tej połowy 22071204; to odjęte od kwadratu z połowy BA, który jest zawsze jednaki, mianowicie 25000000, daje resztę 2928796, z której pierwiastek kwadratowy wynosi prawie 1710. Dodany do połowy BA, to jest do 5000, daje 6710 i taka jest wysokość BF. Nie będzie zbytecznem ułożenie trzeciej tablicy, zawierającej wysokości i wyniosłości półparabol, mających jednakową amplitudę.

S a g r e d o: Tę ostatnią pragnąłbym widzieć, bo z niej mógłbym się dowiedzieć o różnicy w impecie i sile przy jednakowej nośności strzałów, która to różnica musi być bardzo wielka dla różnych podniesień i tak np. przy wyrzucaniu kuli pod nachyleniem 3 lub 4 albo 87 lub 88 stopni, na odległość taką, jak przy nachyleniu 45 stopni (w którym to przypadku wystarcza najmniejszy impet), znalazłoby niezmierną przewagę siły.

S a l v i a t i: Waszność ma zupełną rację i przekona się, że aby wysledzić działanie, trzeba wielkimi liczbami iść ku nieskończonemu impetowi. Ale przyjrzyjmy się układowi tablicy (na str. 206 i 207).

Zadanie V. Podanie XIV

Znaleźć, dla różnych podniesień, wysokości i wyniosłości półparabol jednakiej amplitudy.

Łatwo rozwiązać to zadanie. Jeżeli bowiem przyjmiemy stałą amplitudę półparaboli równą 10000 częściom, to połowa stycznej któregośkolwiek stopnia podniesienia wyrażać będzie wysokość. Gdy np. amplituda półparaboli o podniesieniu 30 stopni wynosi 10000, to wysokość jej będzie 2887, bo tyle prawie wynosi połowa stycznej. Mając wysokość otrzymamy wyniosłość w ten sposób. Ponieważ dowiedziono, że połowa amplitudy półparaboli jest średnią proporcjonalną między wysokością a wyniosłością, a znaną już jest wysokość, i połowa amplitudy wynosi stale 5000, należy więc kwadrat z ostatniej wielkości podzielić przez wysokość, a iloraz da wy-

WYSOKOŚCI PÓLPARABOL PRZY TYM SAMYM IMPECIE

	Stopnie		Stopnie		Stopnie		Stopnie	
Stopnie podniesienia	1	3	29	2351	57	7033	85	9924
	2	13	30	2499	58	7190	86	9951
	3	28	31	2653	59	7348	87	9972
	4	50	32	2810	60	7502	88	9987
	5	76	33	2967	61	7649	89	9998
	6	108	34	3128	62	7796	90	10000
	7	150	35	3289	63	7939		
	8	194	36	3456	64	8078		
	9	245	37	3621	65	8214		
	10	302	38	3793	66	8340		
	11	365	39	3962	67	8474		
	12	432	40	4132	68	8497		
	13	506	41	4302	69	8715		
	14	585	42	4477	70	8830		
	15	670	43	4659	71	8940		
	16	760	44	4827	72	9045		
	17	855	45	5000	73	9144		
	18	955	46	5173	74	9270		
	19	1060	47	5346	75	9330		
	20	1170	48	5523	76	9415		
	21	1285	49	5698	77	9493		
	22	1402	50	5868	78	9567		
	23	1527	51	6038	79	9636		
	24	1685	52	6207	80	9698		
	25	1786	53	6379	81	9755		
	26	1922	54	6546	82	9806		
	27	2061	55	6710	83	9851		
	28	2204	56	6873	84	9890		

niosłość. I tak w przykładzie. Wysokość znaleziono 2887, kwadrat z 5000 wynosi 25000000, co podzielone przez 2887 daje prawie 8659 jako szukaną wyniosłość.

Salviati: Widzimy tu najprzód jak prawdziwą jest powyższa uwaga, według której przy różnych podniesieniach, im się ono więcej odchyła w górę lub na dół od średniego, tem większego trzeba impetu i siły, aby rzucić pocisk na tą samą odległość. Albowiem impet z dwóch ruchów się składa, jednostajnego poziomego i przyspieszonego prostopadłego i ten impet staje się miarą sumy wysokości i wyniosłości, a ta suma, jak widzimy na podanej tablicy, jest najmniejsza przy 45 stopniach podniesienia, gdy wysokość i wy-

Sto- pnie	Amplitudy półpa- rabol opisanych przy tym samym impetie		Sto- pnie	Tablica wysokości i wyniosłości półparabol, mających amplitudę 10000, obliczonych dla różnych stopni nachylenia					
				Sto- pnie	Wysokość	Wy- niosłość	Sto- pnie	Wysokość	Wy- niosłość
45	10000			1	87	286533	46	5177	4828
46	9994	44		2	175	142450	47	5362	4662
47	9476	43		3	262	95802	48	5553	4502
48	9945	42		4	349	71531	49	5752	4346
49	9902	41		5	437	57142	50	5959	4196
50	9648	40		6	525	47573	51	6174	4048
51	9782	39		7	614	40716	52	6395	3906
52	9704	38		8	702	35587	53	6635	3768
53	9612	37		9	792	31565	54	6882	3632
54	9511	36		10	881	28356	55	7141	3500
55	9396	35		11	972	25720	56	7413	3372
56	9272	34		12	1062	23518	57	7699	3247
57	9136	33		13	1154	21701	58	8002	3124
58	8989	32		14	1246	20056	59	8336	3008
59	8829	31		15	1339	18660	60	8659	2887
60	8659	30		16	1434	17405	61	9020	2772
61	8481	29		17	1528	16355	62	9404	2658
62	8290	28		18	1624	15388	63	9814	2547
63	8090	27		19	1722	14522	64	10253	2438
64	7880	26		20	1820	13736	65	10722	2332
65	7660	25		21	1919	13025	66	11230	2226
66	7431	24		22	2020	12376	67	11778	2122
67	7191	23		23	2122	11778	68	12376	2020
68	6944	22		24	2226	11230	69	13025	1919
69	6692	21		25	2332	10722	70	13736	1820
70	6428	20		26	2438	10253	71	15522	1722
71	6157	19		27	2547	9814	72	15388	1624
72	5878	18		28	2658	9404	73	16355	1528
73	5592	17		29	2772	9020	74	17405	1434
74	5300	16		30	2887	8659	75	18660	1339
75	5000	15		31	3008	8336	76	20056	1246
76	4694	14		32	3124	8002	77	21701	1159
77	4383	13		33	3247	7699	78	23518	1062
78	4067	12		34	3372	7413	79	25720	972
79	3746	11		35	3500	7141	80	28356	881
80	3420	10		36	3638	6282	81	31565	792
81	3090	9		37	3768	6635	82	35573	702
82	2736	8		38	3906	6395	83	40716	614
83	2419	7		39	4048	6174	84	47573	525
84	2079	6		40	4196	5959	85	57142	437
85	1736	5		41	4346	5752	86	71531	349
86	1391	4		42	4502	5553	87	95802	262
87	1044	3		43	4662	5362	88	142450	175
88	698	2		44	4828	5177	89	286533	87
89	349	1		45	5000	5000	90	nieskończ.	0

niosłość są sobie równe, wynoszą każda 5000 a suma ich 10000. Przy innem podniesieniu np. 50 stopni, otrzymamy wysokość 5959, wyniosłość 4196, a sumę obu 10155. I takiz będzie impet przy 40 stopniach, gdyż to podniesienie jest tak samo oddalone od środ-

kowego. Zaznaczyć przeto należy, że wszystkie impety są równe sobie parami, przy podniesieniach jednakowo oddalonych od środkowego, z tą piękną odmianą, że wysokość i wyniosłość przy podniesieniach większych odpowiadają na odwrót wyniosłości i wysokości przy mniejszych; tak że podczas gdy przy 50 stopniach mamy wysokość 5959 a wyniosłość 4196, to odwrotnie przy 40 stopniach otrzymamy wysokość 4196 a wyniosłość 5959 i tak samo dla wszystkich innych bez żadnego wyjątku. W rachunku opuszczone zostały ułamki, nie mające znaczenia przy wielkich liczbach.

Sagredo: Zauważę przytem, że z dwóch impetów, poziomego i prostopadłego, im wyższe będą rzuty, tem mniejszy okaże się poziomy a tem większy prostopadły. Przeciwnie, przy małym podniesieniu, potrzeba wielkiej siły impetu poziomego przy małej wysokości spadku pocisku. I, jeżeli dobrze rozumiem, że przy całkowitem podniesieniu do 90 stopni, żadna siła na świecie niewystarczy, aby rzucić pocisk na jeden cal odległości od prostopadłej; lecz pocisk spadnie koniecznie na to miejsce, z którego został wyrzucony, to znów nie mógłbym z tą samą pewnością twierdzić że przy podniesieniu zero stopni, t. j. po linii poziomej nie możnaby z pewną skończoną siłą rzucić pocisku na pewną odległość. I tak np. nawet śmigownica nie zdołałaby kuli żelaznej wyrzucić poziomo, czyli, jak się mówi, z białego punktu (*di punto bianco*), t. j. bez żadnego podniesienia. Twierdzę, że w tym przypadku pozostaje pewna wątpliwość i nie przeczę stanowczo faktowi, gdyż wstrzymuje mnie inny przypadek, nie mniej godzien podziwu, którego posiadam stanowczy dowód. A przypadek ten polega na niemożności absolutnie prostego wyciągnięcia liny, równoległej do poziomemu; wygina się ona zawsze i żadną siłą nie można jej wyprostować.

Salviati: A więc, mości *Sagredo*, w tym przypadku ustaje pański podziw tego cudownego skutku, skoro pan posiada dowód. Badając wszakże uważnie, znajdziemy może pewną analogję między przypadkami pocisku i liny. Krzywizna linii rzutu poziomego pochodzi od dwóch sił, z których jedna (siła rzutu) działa poziomą, podczas gdy druga (ciężkość pocisku), działa w kierunku do tamtej prostopadłą. Ale przy wyciąganiu liny działają także dwie siły, pozioma rozciągająca i ciężar liny działający do niej prostopadle. Dość więc podobne są oba przypadki. I skoro pan przyznaje ciężarowi liny tyle potęgi i energii, aby mógł przeciwważać i przewyciężać jakkolwiek niezmienną siłę to dla czegoż odmawia pan tego ciężarowi kuli? Albo, powiedziałbym lepiej jeszcze, dziwi nas

i sprawia nam przyjemność, gdy lina, mocno lub słabo rozciągana, wygina się według linii zbliżonej do paraboli, a to podobieństwo jest tak wielkie, że jeżeli narysujemy na powierzchni płaskiej, postawionej prostopadle do poziomu, linię paraboliczną i trzymać ją będziemy odwrotnie, t.j. zwróconą wierzchołkiem do spodu a podstawą równoległą do poziomu, i jeżeli przyłożymy cienki łańcuszek utrzymujemy na końcach podstawy narysowanej paraboli, to zobaczymy, że się ten łańcuszek ugina i schodzi z tąż parabolą; a to schodzenie się tem będzie dokładniejsze, im parabola mniejszą ma krzywiznę, czyli więcej jest rozciągnięta, tak że przy paraboli opisanej z podniesieniem 45 stopni, łańcuch dokładnie (quasi ad unguem) zakrywa parabolę.

Sagredo: Możliwy przeto, takim łańcuszkiem, subtelnie wykonanym, wyznaczać szybko na powierzchni płaskiej wiele parabol.

Salviati: Możliwy i to z niemalym pożytkiem, jak o tem zaraz powiem.

Simplicio: Ale zanim pójdziemy dalej, pragnąłbym przekonać się o ścisłości twierdzenia, które podajecie jako stanowczo dowiedzione, mianowicie, że jest niemożliwe, z największą nawet siłą, rozciągnąć liny zupełnie prosto, równoległe do poziomu.

Sagredo: Postaram się przypomnieć sobie ten dowód, dla zrozumienia którego trzeba, aby p. Simplicio przyjął za rzecz pewną to, co zostało ustalone we wszystkich maszynach, nie tylko doświadczeniem lecz i teoretycznymi wywodami, mianowicie że nawet najmniejsza prędkość ciała poruszającego jest w stanie przezwyciężyć choćby bardzo wielki opór ciała poruszanego, które będzie się wolno poruszać, gdy tylko stosunek prędkości poruszającego do powolności poruszanego będzie większy od stosunku oporu ciała poruszanego do siły poruszającego.

Simplicio: Jest mi to dobrze znane i dowiedzione zostało przez Arystotelesa w jego zadaniach mechanicznych. Spostrzega się to wyraźnie na drągu, na przemieszczaniu, którego ciężar ruchomy waży tylko 4 funty a podnosi ciężar 400, gdy tylko odległość ciężaru ruchomego od środka, około którego przemieszczania się obraca, jest więcej niż sto razy większa od odległości punktu zawieszenia większego ciężaru; a pochodzi to stąd, że ciężar ruchomy, obniżając się, przebywa drogę sto razy większą od drogi, po której się równocześnie podnosi wielki ciężar. Innymi słowy, mały ciężar ruchomy porusza się ze sto razy większą prędkością od wielkiego ciężaru.

S a g r e d o: Wybornie rozumujecie i przyznacie niewątpliwie, że jakkolwiek małą będzie siła ciała poruszającego, to jednak przemoże jak największy opór, skoro tylko powiększenie prędkości przewyższy ubytek siły i ciężkości. Ale przejdźmy do przypadku liny. A objaśniając na rysunku, (tab. V, rys. 124) niech linę przedstawia linja AB, przechodząca przez dwa punkty stałe AB, na której końcach są zawieszone wielkie ciężary C, D, które ciągnąc z wielką siłą utrzymają linę wyciągniętą prosto, o ile przyjmujemy ją jako nieważką. Lecz jeżeli w jej środkowym punkcie E zawiesimy jakikolwiek mały ciężar H, to linja AB się ugnie i zejdzie do F, a wydłużając się wskutek tego zmusi do podniesienia się dwa wielkie ciężary C, D: co w ten sposób może być dowiedzione. Z punktów A i B, jako środków, opisujemy dwie ćwiartki koła EFG i ELM; a ponieważ promienie AI i BL są równe AE i EB, to FI i FL będą wydłużeniami t.j. przewyżkami AF i FB ponad AE i EB; one zatem wyznaczają podniesienia ciężarów C i D, gdy ciężar H zdoła obniżyć linę do F, to zaś może nastąpić wtedy, gdy stosunek linji EF, t.j. obniżenia ciężaru H, do linji FI określającej podniesienie ciężarów C i D, będzie większy od stosunku obu ciężarów C i D do ciężaru H. Ale to nastąpi koniecznie, chociażby ciężary C i D były jak największe a ciężar H jak najmniejszy. Albowiem przewyżka C i D nad H nie jest tak wielka, aby nie mogła być przedstawioną przez przewyżkę styczną EF nad kawałkiem siecznej FI. O tem zaś przekonamy się w ten sposób: niech będzie koło o średnicy GI i jaki jest stosunek ciężarów C i D do ciężaru H, taki niech będzie stosunek BO do innej linji C, większej od D, tak że stosunek BO do D będzie większy od stosunku BO do C; weźmy następnie trzecią proporcjonalną do OB i D, mianowicie BE i jak OE do EB, tak niech się ma średnica GI do przedłużenia IF, a przez koniec F poprowadźmy styczną FN. A ponieważ tak się ma OE do EB, jak GI do FI, to będzie się miała suma OB do BE jak GF do FI. Ale między OB i BE średnią proporcjonalną jest D a między GF i FI średnią jest NF; więc tak się ma NF do FI, jak OB do D i stosunek ten jest większy od stosunku ciężarów C i D do H. Stosunek więc obniżenia, czyli prędkości ciężaru H, do podniesienia, czyli prędkości ciężarów C i D, jest większy od stosunku ciężarów C i D do ciężaru H; zatem H musi się obniżać a linja AB odchyłać od prostej poziomej. Co zaś dzieje się z nieważką linją AB przy małym obciążeniu w B, to stanie się z ciężką liną bez dodawania innego ciężaru, gdyż zawieszony zostaje ciężar tworzywa samej liny AB.

Simplicio: Zaspokojony jestem zupełnie; a może p. Salviati, stosownie do obietnicy, zechce objaśnić nam pożytek, jaki możemy wyciągnąć z łańcuszka i jednocześnie zakomunikować nam poglądy naszego akademika na siłę uderzenia.

Salviati: Dzień nam zajęły przeprowadzone rozważania, a godzina jest już trochę późna i nie starczyłaby na wyczerpanie wzmiankowanych przedmiotów; odłożmy przeto rozprawy do innej sposobniejszej chwili.

Sagredo: Godzę się na to z Waszmością, gdyż przekonałem się z różnych rozmów z zaufanymi przyjaciółmi naszego akademika, że przedmiot ten jest bardzo ciemny i nikomu z traktujących o nim dawniej nie udało się zbadać jego tajników, dalekich od zwykłych wyobrażeń; a najwięcej dziwnem wydaje mi się to, że siła uderzenia jest nieoznaczoną, jeżeli nie nieskończenie wielką. Czekać więc będziemy na sposobność pana Salviati. Tymczasem prosiłbym o wiadomość, co teraz następuje w traktacie o pociskach.

Salviati: Są tam jeszcze niektóre twierdzenia o środku ciężkości brył, wywiedzione przez naszego akademika w jego młodych latach, które jak się zdaje, w traktacie jaki napisał Federigo Comandino, przedstawiały pewne niedokładności. Sądził on, że przez te podania, które zobaczycie napisane, będzie mógł zastąpić to, czego szukał w książce Comandina, a zajął się tem rozważaniem na żądanie prześwieconego margrabiego Cuid'Ubaldo del Monte znakomitego matematyka swego czasu, jak to wykazują różne ogłoszone jego dzieła; temu to panu doręczył odpis i zamierzał rozciągnąć badanie na bryły, któremi się nie zajmował Comandino, ale gdy później znalazł ten sam przedmiot w książce wielkiego geometry pana Luca Valerio i przekonał się, że tenże cały ten przedmiot bez żadnego pominięcia opracował, wtedy przestał się tem zajmować, chociaż co do metody inaczej niż Valerio przedmiot traktował.

Sagredo: Dobrze więc będzie, aby na czas, jaki upłynie do naszego następnego spotkania, Waszmość zostawił mi książkę, dla przejrzenia i wystudjowania tych podań, jak są napisane.

Salviati: Czynię zadość życzeniu Waszmości i spodziewam się, że podania będą się Wam podobały.

Koniec dnia czwartego.

D O D A T E K

Zawierający twierdzenia i ich dowodzenie, dotyczące środka ciężkości brył, napisane niegdyś przez naszego autora.

P o s t u l a t

Jeżeli równe ciężary w jednaki sposób rozłożone są na różnych dragach i jeżeli środek ciężkości jednych dzieli drag w pewnym stosunku, to środek ciężkości innych dzielić będzie inny drag w tym samym stosunku.

L e m m a

Niech będzie linja (tab. V, rys. 125) AB przepołowiona w C a jej połowa AC podzielona w E w ten sposób, że jak się ma BE do EA, tak będzie się miało AE do EC. Twierdzą, że BE jest dwa razy większe od EA. Albowiem, jak BE do EA, tak się ma EA do EC, a sumując i przemieniając, będzie BA do AC jak AE do EC, że zaś jak AE do EC, albo jak BA do AC, tak się ma BE do EA, więc BE jest dwa razy większe od EA.

To założywszy, należy dowieść, że, jeżeli wielkości, jednakowo się różniące między sobą i to o wielkość najmniejszej z nich, tak rozłożone zostaną na dragu, że ich punkty zawieszenia będą jednakowo od siebie oddalone, to wspólny ich środek ciężkości podzieli drag w ten sposób, że część, na której są zawieszone mniejsze ciężary będzie dwa razy większa od części pozostałej.

Na dragu AB (tab. V, rys. 126) zawieszone są w różnych odstępach, w jakiegokolwiek liczbie, wielkości F, G, H, K, N, z których najmniejsza jest N; punkty zawieszenia są A, C, D, E, B, a środek ciężkości wszystkich wielkości leży w X. Dowieść mamy, że część BX unosząca mniejsze wielkości jest dwa razy większa od AX. Przepołówmy drag w D punktem, który schodzić się musi albo z jednym z punktów zawieszenia albo ze środkiem jednego z odstępów między tymi punktami; inne odstępów między A i D niech będą przepołowione w punktach M i I; każdą zaś z wielkości podzielmy na części równe N: wielkość F mieć będzie tyle części ile jest zawieszonych wielkości, które poczynając od G będą się zmniejszać każda o jedną część. Będzie więc F miała części; N, O, Y, S, T, wielkość G części N, O, Y, S, wielkość H części N, O, Y, wielkość K części N, O; wszystkie N są razem równe F, wszystkie O równe G, wszystkie Y równe H, wszystkie S równe K, a T równe N. Wszystkie N równoważą się w D, połowie draga AB, tak samo wszystkie O w I, Y w C, S w M, a T jest zawieszone w A. Są więc na dragu

AD zawieszone w równych odstępach, w D, I, C, M, A, wielkości różniące się między sobą jednakowo i których różnica jest równa najmniejszej; największa, złożona z wszystkich N, zawieszona jest w D; najmniejsza T w A, pozostałe zaś są równomiernie rozłożone. Niech będzie znów drugi drąg AB, na którym zawieszono zostały w tej samej liczbie równe tamtych wielkości w tym samym porządku. Drągi AB i AD podzielone więc będą przez środki ciężkości wszystkich zawieszonych na nich wielkości w tym samym stosunku. Środek ciężkości zatem wymienionych wielkości leży w X i to X dzieli drągi BA, AD, w tym samym stosunku, tak się ma więc BX do XA jak XA do XD, i na zasadzie powyższej lemmy BX jest dwa razy większe od XA, c. b. d. d.

Jeżeli na konoidzie parabolicznej opiszemy lub w nią wpisujemy bryłę z walców jednakiej wysokości, a oś konoidy tak zostanie podzielona, że część przy wierzchołku będzie dwa razy większa od części przy podstawie: to środki ciężkości brył leżące będą na tej osi, wpisanej — bliżej a opisanej — dalej od podstawy konoidy, niż punkt podziału: odległości zaś obu środków ciężkości od punktu podziału będą jednakie i równe szóstej części wysokości walców tworzących bryły.

Niech będzie (tab. V, rys. 127) konoida paraboliczna i bryły wpisana i opisana, oś konoidy EA podzielona w N, tak że AN jest dwa razy większe od NE. Należy dowieść, że środek ciężkości bryły wpisanej leży na NE a opisanej na AN. Przetnijmy te bryły płaszczyzną przechodzącą przez oś i niech będzie przekrój paraboliczny BAC, a linja BC podstawą płaszczyzny siecznej i konoidy; przekroje walców są prostokątne, jak wynika z opisu: pierwszy z walców wpisanych, o osi DE, tak się ma do walca o osi DY, jak kwadrat z OD, do kwadratu z SY, czyli jak DA do AY: walec zaś o osi DY do walca YZ jak SY do RZ w potęgach, czyli jak YA do AZ i tak samo walec, którego oś jest ZY do walca o osi ZV ma się jak ZA do AV, tak więc wymienione walce mają się do siebie jak linje DA, AY, ZA, AV: te zaś różnią się jedna od drugiej o jednakową długość a mianowicie o najmniejszą z nich, tak że AZ jest dwa razy większa od AV, AY trzy razy a DA cztery razy; więc i wymienione walce różnią się także o wielkość najmniejszego i linja XM, na której w równych odległościach są zawieszone (bo każdy z nich ma swój środek ciężkości na osi) dzielona jest przez ich wspólny środek ciężkości w ten sposób, że jej część dochodząca do X jest dwa razy większa od części pozostałej. Przy takim

podziale, jeżeli będzie $X\alpha$ dwa razy większe od αM , to α będzie środkiem ciężkości bryły wpisanej. Podzieliwszy AV na połowę w ϵ , będziemy mieli $X\epsilon$ dwa razy większe od ME ; że zaś $X\alpha$ jest dwa razy większe od αM , to ϵE będzie trzy razy większe od $E\alpha$, a AE trzy razy większe od EN ; że zaś EN jest większe od $E\alpha$ więc punkt N leży bliżej podstawy konoidy niż punkt α ; n ponieważ jak AE do EN tak się ma ϵE do $E\epsilon$, to tak się będzie miała przewyżka AE ponad ϵE , czyli $A\epsilon$ do przewyżki EN ponad $E\alpha$ czyli do $N\alpha$, jak AE do EN . Wynika stąd, że αN jest trzecią częścią $A\epsilon$ a szóstą AV . Tak samo dowodzi się, że walce bryły opisanej różnią się między sobą jednakowo, że różnica równa jest najmniejszemu z walców i że ich środki ciężkości leżą na ϵM w równych odstępach. Jeżeli więc ϵM tak rozdzielimy w π , że $\epsilon\pi$ będzie dwa razy większe od πM ; to będzie π środkiem ciężkości całej bryły opisanej, a ponieważ $\epsilon\pi$ jest dwa razy większe od πM a $A\epsilon$ mniejsze od podwójnego EM (bo $A\epsilon$ jest równe EM), to całe AE jest mniejsze od potrojonego $E\pi$; to zaś $E\pi$ jest większe od EN , a ponieważ ϵM jest trzy razy większe od $M\pi$ a ME razem z podwojonem $\epsilon\pi$ trzy razy większe od ME ; to AE razem z $A\epsilon$ jest trzy razy większe od $E\pi$; że zaś AE jest trzy razy większe od EN , więc reszta $A\epsilon$ będzie trzy razy większa od πN . Jest zatem $N\pi$ szóstą częścią AV , c. b. d. d. Pokazuje się z tego, że konoidę paraboliczną opisać można bryłą i wpisać w nią bryłę w ten sposób, że środki obu brył mniej będą od siebie oddalone niż jakakolwiek dana długość. Bo jeżeli daną linję sześć razy powiększymy i długości osi walców przyjmujemy mniejsze od tej sześciokrotności, to odległości środków obu brył od punktu N będą mniejsze od danej długości.

Toż samo inaczej

Oś konoidy CD (tab. V, rys. 128) podzielona jest tak w O , że CO jest dwa razy większe od OD . Dowieść mamy, że środek ciężkości bryły wpisanej leży na OD a opisanej na CO . Przetnijmy bryły płaszczyzną przechodzącą przez oś. Walce SN , TM , VI , XE mają się do siebie jak kwadraty z SD , TN , VM , XI a te znów jak linje NC , CM , CI , CE ; te znów różnią się jednakowo jedna od drugiej, a różnica jest równa najmniejszej CE ; walec TM jest równy walcowi QN , walec VI równy PN , a XE równy LN ; więc walce SN , QN , PN , LN różnią się jednakowo jeden od drugiego i różnica jest równa LN . Ale przewyżka walca SN nad QN jest pierścieniem, którego wysokością jest QT , czyli ND a szerokością SQ : przewyżka

zaś walca QN nad PN stanowi pierścień o szerokości QP a przewyżka walca PN nad LN pierścień o szerokości PL. Wymienione pierścienie SQ, QP, PL są sobie równe i równe walcowi LN. Pierścień znów ST jest równy walcowi XE; pierścień QV, który jest podwójny, równy walcowi VI, który również jest dwa razy większy od walca XE i tak samo pierścień PX walcowi TM a walec LE walcowi SN. Tak więc na dragu KF, łączącym środki prostych EI i DN, podzielonym na części równe w punktach H i G są pewne wielkości, mianowicie walce SN, TM, VI, XE, a środkiem ciężkości pierwszego jest K, drugiego H, trzeciego G, czwartego F. Mamy także i drugi drag MK, będący połową draga FK, w tyłuż punktach podzielony na równe części, mianowicie MH, HN, NK, i na nim inne wielkości, liczbą i wielkością równe tym, jakie są na dragu FK i mające swoje środki ciężkości w punktach M, H, N, K, w tym samym porządku rozłożone: bo walec LE mający swój środek ciężkości w M, równy jest walcowi SN ze środkiem ciężkości w K: pierścień PX mający środek ciężkości w H równy walcowi TM ze środkiem ciężkości w H, a pierścień QV ze środkiem w G równy walcowi VI ze środkiem w N; wreszcie pierścień ST ze środkiem w K równy walcowi XE ze środkiem w F. Środek zatem ciężkości wymienionych wielkości dzieli drag w tym samym stosunku: na obu zatem dragach ten sam jest wspólny środek ciężkości, który niech będzie Y. Będzie więc FY do YK jak KY do YM; zatem FY dwa razy większe od YK, a podzieliwszy CE na połowę w Z, będzie ZF dwa razy większe od KD i ZD trzy razy większe od DY; że zaś CD jest trzy razy większe od DO, więc DO jest większe od DY; dlatego też Y, środek ciężkości bryły wpisanej, leży bliżej podstawy niż punkt O. A ponieważ, jak CD do DO, tak się ma ZD do DY, więc także CZ do YO będzie jak CD do DO; więc YO jest trzecią częścią CZ a szóstą częścią CE. W ten sam sposób możemy dowieść, że walce bryły opisanej jednakowo są różne jeden od drugiego i że różnica jest równa najmniejszemu z nich, a jeżeli ich środki ciężkości rozłożone są w równych odstępach na dragu KZ i tak samo środki ciężkości równych tym walcem pierścieni na drugim dragu KG, będącym połową dragu KZ, to środek ciężkości bryły opisanej R dzielić będzie drag w ten sposób, że jak ZR do RK, tak się będzie miało KR do RG. Będzie więc ZR dwa razy większe od RK, a że CZ jest równe KD a nie dwa razy większe, to całe CD jest mniejsze od potrojonego DR a prosta DR większa od DO czyli że środek ciężkości bryły opisanej leży dalej od podstawy niż

punkt O. A ponieważ ZK jest trzy razy większe od KR a KD razem z dwoma ZC trzy razy większe od KD, to będzie CD razem z CZ trzy razy większe od DR; że zaś CD jest trzy razy większe od DO więc reszta CZ będzie trzy razy większa od RO czyli OR jest szóstą częścią EC, c. b. d. d.

Teraz będzie można dowieść, że środek ciężkości konoidy parabolicznej tak dzieli jej oś, że część jej przy wierzchołku jest dwa razy większa od części przy podstawie.

Niech będzie (tab. V, rys. 129) konoida paraboliczna o osi AB, podzielonej w punkcie N w ten sposób, że AN jest dwa razy większe od NB. Dowieść mamy, że N jest środkiem ciężkości konoidy. Jeżeli nie leży w N, to leżeć musi niżej lub wyżej. Przypuśćmy że leży niżej w X i weźmy linję LO równą NX, podzielmy LO w S tak, aby BX razem z OS miało się do OS jak się ma konoida do bryły Y; wpiszmy w konoidę bryłę z walców jednakiej wysokości taką, aby odległość jej środka ciężkości od N była mniejsza od LS a przewyżka konoidy nad bryłą wpisaną była mniejszą od bryły Y; jasną jest rzeczą, że wszystko to może być zrobione. Niech będzie I środek ciężkości bryły wpisanej; będzie więc IX większe od SO: a ponieważ XB razem z SO ma się do SO jak konoida do Y (Y zaś jest większe od przewyżki konoidy nad bryłą wpisaną), to będzie także stosunek konoidy do wzmiankowanej przewyżki większy od stosunku BX i OS do OS, a więc stosunek bryły wpisanej do tej przewyżki większy od stosunku BX do SO: że zaś stosunek BX do XI jest mniejszy od stosunku BX do SO, więc stosunek bryły wpisanej do przewyżki będzie znacznie większy od stosunku BX do XI: jaki zaś jest stosunek bryły wpisanej do przewyżki, taki stosunek miałyby pewna inna linja do XI; będzie ona z konieczności większą od BX. Niech nią będzie MX. Tak więc mamy środek ciężkości konoidy w X, środek ciężkości bryły wpisanej w I, więc środek ciężkości przewyżki pierwszej nad drugą leżeć będzie na linji XM w punkcie końcowym długości tak się mającej do XI, jak się ma bryła wpisana do przewyżki konoidy. Dowiedziono zaś, że stosunek ten jest równy stosunkowi MX do XI; więc M byłby środkiem ciężkości przewyżki konoidy nad bryłą wpisaną, co oczywiście jest niemożliwem; gdyż poprowadziwszy przez M płaszczyznę równoległą do podstawy konoidy mieć będziemy wszystkie części przewyżki położone z jednej strony tej płaszczyzny a nie rozdzielone przez nią. Nie może więc środek ciężkości konoidy leżeć pod N. Lecz również nie może leżeć wyżej. Bo gdyby leżeć mógł w H,

to wzięwszy, jak poprzednio, linję LO równą HN, tak podzieloną w S, że BN razem z SO ma się do SL jak konoida do Y i opiszawszy na konoidzie bryłę złożoną z walców, taką że jej przewyżka będzie mniejsza od Y a odległość środka ciężkości bryły opisanej od N mniejsza od SO, mielibyśmy resztę VH większą od LS; a ponieważ BN razem z OS ma się do SL, jak konoida do Y (bo Y jest większe od przewyżki bryły opisanej nad konoidą), to stosunek BN razem z SO do SL jest mniejszy od stosunku konoidy do wzmiankowanej przewyżki. Że zaś BN jest mniejsze od BN razem z SO a VH większe od SL, zatem większy jest stosunek konoidy do wymienionych części od stosunku BV do VII; jaki więc jest stosunek konoidy do tychże części, taki będzie stosunek do VII linji większej od BV. Niech tą linją będzie MV, a ponieważ środek ciężkości bryły opisanej leży w V a konoidy w H; konoida ma się do pozostałych części jak MV do VH, przeto środkiem ciężkości pozostałych części byłby punkt M, co również jest niemożliwe. Więc środek ciężkości konoidy nie leży nad N. Skoro zaś dowiedziono, że nie leży niżej, koniecznie więc leży w samym punkcie N. Podobnie rozważać można konoidę przeciętą inną płaszczyzną pod wierzchołkiem. A naprzód dowiedzimy innym sposobem, że środek ciężkości konoidy parabolicznej leży między środkami ciężkości brył wpisanej i opisanej.

Niech będzie (tab. V, rys. 130) konoida o osi AB, środek bryły opisanej w C a wpisanej w O. Twierdzę, że środek konoidy leży między C i O; bo w przeciwnym razie leżałby pod lub nad nimi albo w jednym z nich. Niech leży w R, to ponieważ R jest środkiem ciężkości całej konoidy, a środkiem ciężkości bryły wpisanej jest O, to środek ciężkości pozostałych części, stanowiących przewyżkę konoidy nad bryłą wpisana, leżeć będzie na OR przedłużonej w stronę R i to w takim punkcie, że jak się ma podwyżka do bryły wpisanej, tak się mieć będzie OR do linji między R a tym punktem. Niech to będzie stosunek OR do RX. Albo więc X leży po za konoidą albo wewnątrz niej albo na podstawie. Położenie na zewnątrz lub na podstawie jest oczywistym absurdem: a jeżeli leży wewnątrz to ponieważ tak się ma XR do RO, jak bryła wpisana do przewyżki konoidy, to taki stosunek, jaki ma BR do BO, mieć będzie bryła wpisana do bryły H, koniecznie mniejszej od tej przewyżki. Wpiszmy inną bryłę, którąby konoida przewyższała o ilość mniejszą od H a którejby środek ciężkości leżał wewnątrz OC, dajmy na to w V. A ponieważ pierwsza bryła ma się do H, jak BR

do RO, druga zaś mająca środek w V jest większą od pierwszej a od konoidy różni się o ilość mniejszą od H, to druga bryła będzie się miała do przewyżki nad nią konoidy, jak linja większa od BR do RU. Że zaś R jest środkiem ciężkości konoidy a V bryły wpisanej, to środek ciężkości przewyżki leżałby na zewnątrz konoidy, pod B, co jest niemożliwe. W ten sam sposób możnaby dowieść, że środek ciężkości nie leży na linji CA. Oczywiście zaś jest, że nie leży ani w C ani w O. Gdyby bowiem wyobrazić sobie inne bryły, wpisaną większą od tej której środkiem jest O a opisaną mniejszą od tej, której środkiem jest C, to środek ciężkości konoidy przypadłaby po za środkami tych brył, co na mocy wyżej dowiedzionego jest niemożliwe. Leżeć więc winien między środkami brył, wpisanej i opisanej. A jeżeli tak, to leży koniecznie w tym punkcie, który dzieli oś na dwie części tak, że część dochodząca do wierzchołka jest dwa razy większa od części dochodzącej do podstawy, gdyż mogą być wpisane i opisane bryły w ten sposób, że ich środki ciężkości leżą tak blisko w mowie będącego punktu, jak tylko chcemy i wywiedziona zostanie niemożność, aby środek ciężkości konoidy leżał po za linją łączącą środki ciężkości brył wpisanej i opisanej.

Jeżeli trzy linje są do siebie proporcjonalne i jeżeli najmniejsza ma się do przewyżki największej nad najmniejszą, jak pewna długość dana do dwóch trzecich przewyżki największej nad średnią i jeżeli dalej suma największej i podwojonej średniej ma się do potrojonej sumy największej i średniej, jak inna długość dana do przewyżki największej nad średnią, to suma obu danych długości jest równa trzeciej części linji największej.

Niech będą (tab. V, rys. 131) trzy linje proporcjonalne¹⁾ AB, BC, BF, i jak się ma BF do FA, tak niech będzie MS do dwóch trzecich CA, a znów jaki jest stosunek sumy AB i podwojonej BC do potrojonej sumy AB i BC, taki niech będzie stosunek NS, do AC. Dowieść mamy, że MN jest trzecią częścią AB. Ponieważ AB, BC i BF są proporcjonalne, to takiż sam jest stosunek AC do CF; jak AB do BC, ma się więc AC do CF i jak potrojone AB do potrojonego BC, tak się ma AC do CF. Jaki zaś stosunek ma potrojone AB razem z potrojonem BC do potrojonego BC, taki będzie miało AC do linji mniejszej od CF. Niech nią będzie CO. Po dodaniu i przedstawieniu otrzymamy, że stosunek OA do AC jest równy stosunkowi potro-

¹⁾ $AB:BC=BC:AF$.

jonego AB i sześć razy wziętego BC do potrojonego AB razem z potrojonem BC; ma dalej AC do SN ten sam stosunek, jaki ma potrojone AB razem z potrojonem BC do AB razem z podwojonem BC; więc OA do NS ma się jak potrojone AB razem z sześć razy wziętem BC do AB razem z podwojonem BC; a że potrojone AB razem z sześć razy wziętem BC jest trzy razy większe od AB razem z podwojonem BC, przeto AO jest trzy razy większe od SN.

Ponieważ znów OC do CA ma się, jak potrojone CB do potrojonego AB razem z potrojonem CB; oraz CA do CF jak potrojone AB do potrojonego BC, więc jak OC do CF, tak się będzie miało potrojone AB do potrojonego AB razem z potrojonym BC, a po odwróceniu stosunków będzie, jak OF do FC, miało się potrojone BC do potrojonego AB razem z potrojonem BC: tak się więc ma CF do FB, jak AC do BC i potrojone AC do potrojonego BC. Mamy więc OF do FB, jak potrojone AC do potrojonego AB razem z potrojonem BC. Cała zatem OB ma się do BF, jak wzięta sześć razy AB do potrojonych AB i BC; a ponieważ takież jest stosunek FC do CA i CB do BA, to będzie FC do CA, jak BC do BA, a sumując FA do AC, jak razem BA i BC do BA i tak samo potrojone do potrojonego: więc jak FA do AC, tak się ma potrojona BA razem z potrojonem BC do potrojonego AB, przeto FA ma się do dwóch trzecich AC, jak potrojone BA razem z potrojonem BC do dwóch trzecich potrojonego BA, czyli do podwojonego BA: ale FA do dwóch trzecich AC ma się, jak FB do MS. Będzie więc FB do MS, jak potrojone BA razem z potrojonem BC do podwojonego BA; a że, jak OB do FB, tak się ma sześć razy wzięte AB do potrojonych AB i BC; więc stosunek OB do MS jest równy stosunkowi sześć razy wziętego AB do podwojonego BA, zatem MS jest trzecią częścią OB. A że dowiedziono, iż SN jest trzecią częścią AO, przeto MN jest trzecią częścią AB, c. b. d. d.

Kłoc konoidy parabolicznej ma środek ciężkości na jej osi; po podzieleniu tej osi na trzy części równe, środek ciężkości leży na części środkowej i tak ją dzieli, że część zwrócona do mniejszej podstawy, ma się do części zwróconej do podstawy większej, jak większa podstawa do mniejszej.

Od konoidy (tab. V, rys. 132) o osi RB niech będzie odcięta bryła o osi BE płaszczyzną równoległą do podstawy; inna płaszczyzna, prostopadła do podstawy przecina konoidę według paraboli VRC a dwie podstawy według linii prostych LM, VC. Podzielmy

EB na trzy części równe, których środkowa niech będzie QY; tę zaś podzielmy w I w ten sposób, aby stosunek podstawy o średnicy VC do podstawy o średnicy LM, czyli stosunek kwadratu z VC do kwadratu z LM, był równy stosunkowi QI do IY. Dowieść należy, że I jest środkiem ciężkości kłoca LMC. Weźmy linję NS równą BR i SX równą ER, a do NS i SX weźmy trzecią proporcjonalną SG i niech będzie BQ do IO, jak NG do GS. Obojętnem jest czy punkt O przypada nad lub pod LM; a ponieważ na przekroju VRC linje LM i YC należą do paraboli, to jak kwadrat z YC do kwadratu z LM, będzie się miała linja BR do RE; że zaś jak kwadrat z VC do kwadratu z LM, tak się ma QI do IY i jak BR do RE, tak się ma NS do SX, więc QI do YI ma się, jak NS i SX do SX, a jak EB do YI, tak się ma suma potrojonego NS i potrojonego SX do SX; ale, jak EB do BY, tak się ma suma potrojonych NS i SX do NS i SX; więc jak EB do BI, tak się mieć będzie suma potrojonych NS i SX do NS i podwojonego SX. Są zatem trzy linje proporcjonalne NS, SX, GS i tak się ma SG do GN, jak pewna długość OI do dwóch trzecich EB lub NX; jak się więc ma NS razem z podwojonem SX do podwojonego NS razem z potrojonem SX, tak się ma IB do BE czyli do NX. Na mocy poprzednio dowiedzonego obie te linje, razem wzięte są równe trzeciej części NS czyli BR; jest więc RB trzy razy większe od BO, zatem O jest środkiem ciężkości konoidy VRC. Niech A będzie środkiem ciężkości konoidy LRM; zaś środek ciężkości kłoca VLMC, leży na linji OB i to w takim punkcie, że jak się ma kłoc VLMC do części LMR, tak się mieć będzie AO do odległości między O a tym punktem. A ponieważ RO jest równe dwom trzecim RB, a RA dwom trzecim RE, więc reszta AO będzie równa dwom trzecim reszty EB, a ponieważ jak kłoc VLMC do części LMR, tak się ma NG do GS, a także dwie trzecie EB do OI, zaś dwom trzecim EB jest równe AD; będzie więc jak kłoc VLMC do części LMR, tak się miało AO do OI. Zatem punkt I jest środkiem ciężkości kłoca VLMC i tak dzieli oś, że jej część zwrócona do mniejszej podstawy ma się do części zwróconej do podstawy większej, jak podwojona podstawa większa razem z mniejszą do podwojonej mniejszej razem z większą. Co też jest treścią wytworniej wyrażonego twierdzenia.

Jeżeli jakiegokolwiek wielkości w ten sposób są ułożone, że druga jest równa pierwszej razem z podwojoną pierwszą, trzecia równa drugiej razem z potrojoną pierwszą, czwarta równa trzeciej razem

z cztery razy wziętą pierwszą i każda następna równa poprzedniej razem z tyle razy wziętą pierwszą, jaka jest jej liczba porządkowa i jeżeli te wielkości zawiesimy w równych odstępach na dragu, to ich środek ciężkości podzieli drąg w ten sposób, że część po stronie mniejszych wielkości będzie trzy razy większa od pozostałej.

Niech będzie (tab. V, rys. 133) drąg LT i zawieszona na nim wielkości A, F, G, H, K, których pierwsza zawieszona jest w T. Twierdząc, że środek ciężkości tak dzieli drąg TL, że część dochodząca do T jest trzy razy większa od pozostałej. Niech będzie TL trzy razy większe od LI, SL potrojone LP, QL potrojone LN i LP potrojone LO, będą wtedy IP, PN, NO, OL równe sobie. Przyjmijmy, że w F zawieszona została wielkość równa podwojonej A, w G równa potrojonej A, w H cztery razy wziętej A i B i że te wszystkie A odejmujemy od wielkości F, G, H, K. Pozostająca w F reszta B jest równa A, w G dwa razy większa, w H trzy razy it.d. i tak będą odjęte wszystkie B, a jeżeli tak samo odejmiemy wszystkie C i wszystkie D i E, to wszystkie A będą równe całemu K, wszystkie B całemu H, wszystkie C całemu B, wszystkie D całemu F, a E równe A: a ponieważ TL jest dwa razy większe od IL, więc I będzie punktem równowagi wielkości złożonych ze wszystkich A i podobnie, skoro SP jest dwa razy większe od PL, to P będzie punktem równowagi wszystkich B, tak samo N punktem równowagi wszystkich C, O wszystkich D a L samego E. Na dragu zatem TL są w równych odstępach zawieszona wielkości K, H, G, F, A a na dragu LI w równych odstępach tyleż takichże wielkości w tym samym porządku, bo wszystkie A zawieszona w I są równe K zawieszonym w L, wszystkie B zawieszona w P równe H zawieszonym w P, wszystkie C zawieszona w N równe G zawieszonym w Q, wszystkie D zawieszona w O równe F a E zawieszona w L równe A. Więc środek ciężkości wszystkich wielkości dzielić będzie oba drągi w tym samym stosunku. Jeden zatem jest środek ciężkości wszystkich wielkości. Będzie nim wspólny środek prostej TL i prostej LI, który niech będzie X. I jak TX do XL tak będzie się miało LX do XI i całe TL do LI, jest zatem TL trzy razy większe od LI i TX trzy razy większe od XL.

Jeżeli ilekolwiek wielkości tak ustawimy, że druga przewyższać będzie pierwszą o trzy razy wziętą pierwszą, trzecia drugą o pięć razy wziętą pierwszą, czwarta trzecią o siedem razy wziętą pierwszą i t.d., którakolwiek przewyższać będzie poprzedzającą o taką

nieparzystą wielokrotność pierwszej, jak następują po sobie kwadraty z linii powiększających się jednakowo o długość najmniejszej z nich, — i gdy te wszystkie wielkości rozłożone zostaną na drągu w równych odstępach, to ich środek ciężkości tak podzieli drąg, że część jego od strony mniejszych wielkości będzie więcej niż trzy razy większa od pozostałej a po odjęciu długości jednego odstępu mniej niż trzy razy większa.

Niech będą (tab. V, rys. 134) zawieszone na drągu BE wzmiankowane wielkości i z nich utworzone podobne grupy jak w poprzednim twierdzeniu. Będą więc układy z A i z C w tym samym porządku rozłożone, tylko z większymi różnicami. Niech ED będzie trzy razy większe od BD i GF trzy razy większe od FB, będzie więc D środkiem ciężkości wszystkich A a F wszystkich C, środek zaś ciężkości wszystkich A i C przypada między D i F. Niech nim będzie punkt O. Widocznem jest, że EO jest więcej niż trzy razy większe od OB a GO od tegoż OB mniej niż trzy razy większe c.b.d.d.

Jeżeli w ostrokrag, lub część ostrokregu, wpisujemy bryłę złożoną z walców jednakiej wysokości a drugą opisujemy i jeżeli oś tak zostanie podzielona, że część zwrócona do wierzchołka będzie trzy razy większa od części pozostałej: to środek ciężkości bryły wpisanej leżeć będzie bliżej podstawy ostrokregu niż punkt podziału a środek ciężkości bryły opisanej bliżej wierzchołka.

Niech będzie (tab. V, rys. 135) ostrokrag o osi MN, tak podzielonej w punkcie S, że NS jest trzy razy większe od SM. Twierdzą, że środek ciężkości bryły wpisanej w ostrokrag leży na NM bliżej podstawy niż punkt S a bryły opisanej leży również na NM bliżej wierzchołka niż punkt S. Osie walców wpisanych niech będą MC, CB, BE, EA równe sobie. Pierwszy walec o osi MC ma się do drugiego o osi CB, jak ich podstawy (bo wysokości są jednakie) albo jak kwadraty z CN i NB. Podobnie widzimy, że walce o osiach CB i BE mają się do siebie, jak kwadraty z BN i NE a walce o osiach BE i EA, jak kwadraty z EN i NA; linje zaś NC, NB, NE, NA różnią się jednakowa i to o długość najmniejszej NA. Wielkości zatem leżących na sobie walców bryły wpisanej mają się do siebie, jak kwadraty z linii różniących się jednakowo jedna od drugiej i to o długość najmniejszej; i tak są uszykowane wielkości na drągu TI. Z poprzedniego wynika, że środek ciężkości wszystkich wielkości dzieli drąg TI w ten sposób, że część od strony T jest więcej niż trzy razy większa od pozostałej. Niech tym

środkiem będzie O; jest przeto TO większe od potrojonego OI. Ale TN jest równe potrojonemu IM, więc całe MO jest mniejsze od czwartej części MN, którego część czwartą stanowi z założenia MS. Więc O leży bliżej podstawy ostokręgu niż punkt S. Bryła znów opisana ma osie walców MC, CB, BE, EA, AN równe sobie i tak, jak poprzednio wykazać można, że walce te mają się do siebie, jak kwadraty z MN, NC, BN, NE, AN, linji różniących się jednakowo jedna od drugiej o długość najmniejszej AN; środek więc ciężkości wszystkich tych walców, leży w punkcie V, który dzieli drag RI w ten sposób, że część zwrócona do R, t.j. RV jest więcej niż trzy razy większa od pozostałej VI, podczas gdy TV jest od niej mniej niż trzy razy większe. Ale NT jest równe potrojonemu IM, więc VM jest większe od czwartej części NM, która z założenia jest równa MS. Tak więc punkt V leży bliżej wierzchołka od punktu S, c. b. d. d.

Na danym ostokręgu opisać bryłę a drugą wpisać, obie złożone z walców jednakiej wysokości, w ten sposób aby odległość środka ciężkości bryły opisanej od środka ciężkości bryły wpisanej była mniejsza od jakiegokolwiek linji danej.

Niech będzie (tab. V, rys. 136) dany ostokrąg o osi AB i prosta K. Twierdzą, że jeżeli weźmiemy walec L równy wpisanemu w ostokrąg o wysokości równej połowie osi AB, a AB tak podzielimy w C, aby AC było trzy razy większe od CB, ta tak się będzie miało AC do K, jak walec L do bryły X. Dalej na ostokręgu opiszmy bryłę z walców jednakiej wysokości, a drugą wpiszmy w ostokrąg, takie aby bryła opisana była większą od wpisanej na objętość mniejszą od bryły X; środek ciężkości bryły opisanej niech będzie E położony nad C a środek bryły wpisanej S pod C. Twierdzą, że ES jest mniejsze od K. Bo gdyby tak nie było, to kładąc CA równe EO, ponieważ OE tak się ma do K, jak L do X, bryła zaś wpisana nie jest mniejsza od walca L a przewyżka nad nią bryły opisanej mniejsza od bryły X, więc bryła wpisana do wzmiankowanej przewyżki byłaby w mniejszym stosunku niż OE do K; stosunek zaś OE do K nie jest mniejszy niż OE do ES, gdyż ES nie jest mniejsze od K; więc bryła wpisana ma do przewyżki nad nią bryły opisanej stosunek większy niż OE do ES. Jaki zatem stosunek ma bryła wpisana do wzmiankowanej przewyżki, taki miałyby do ES linja większa od EO; niech nią będzie ER, środek zatem ciężkości bryły wpisanej leży w S a opisanej w E. Wynika stąd, że śro-

dek ciężkości przewyżki bryły opisanej nad wpisaną leży na linii RE i to tak, że do jego odległości od E ma się linja ES, jak bryła wpisana do przewyżki; ale taki właśnie jest stosunek RE do ES; więc środkiem ciężkości przewyżki bryły opisanej nad wpisaną byłby punkt R, co jest niemożliwe, gdyż płaszczyzna równoległa do podstawy, przechodząca przez R, nie przecina zupełnie tej przewyżki. Przytem nieprawdą jest, aby ES nie było mniejszem od K, jest więc mniejsze. Toż samo dowieść można w podobny sposób i dla ostrosłupa.

Z powyższego wynika, że dany ostrokrag można opisać bryłą złożoną z walców jednakiej wysokości lub wpisać w ostrokrag takąż bryłę, w ten sposób, że między ich środkami ciężkości a punktem dzielącym oś ostrokregu na dwie części, z których dochodząca do wierzchołka jest trzy razy większa od pozostałej, odległości są mniejsze od jakiejkolwiek danej linii. Bo, ponieważ, jak dowiedziono, punkt dzielący oś we wzmiankowanym stosunku, leży zawsze między środkami ciężkości brył wpisanej i opisanej, może przeto także odległość tych środków ciężkości, jednego od drugiego być mniejsza od jakiejkolwiek linii danej, skoro odległość każdego środka ciężkości od punktu podziału może być znacznie mniejsza od danej linii.

Środek ciężkości jakiegokolwiek ostrokregu lub ostrosłupa dzieli oś w ten sposób, że część osi zwrócona do wierzchołka jest trzy razy większa od części zwróconej do podstawy.

Ostrokrag o osi AB (tab. V, rys. 137) podzielony jest w C tak, że AC jest trzy razy większe od CB: dowieść mamy, że C jest środkiem ciężkości ostrokregu. Jeżeli bowiem tak nie jest, to środek ciężkości ostrokregu leżeć będzie albo nad, albo też pod punktem C. Przypuśćmy najprzód, że leży pod, niech będzie w E: i weźmy linję SP równą CE i podzielmy ją w N w ten sposób, aby BE razem z PN miało się do PN, jak się ma ostrokrag do bryły X; wpiszmy w ostrokrag bryłę z walców jednakiej wysokości, której środek ciężkości mniej jest oddalony od punktu C niż długość SN a przewyżka ostrokregu nad tą bryłą mniejsza od X; jest to możliwe na mocy poprzedniego dowiedzionego. Niech będzie I środek ciężkości tej bryły wpisanej. Będzie zatem linja IE większa od NP, bo SP jest równe CE a IC mniejsze od SN: a że BN razem z NP tak się ma do NP, jak ostrokrag do X, przewyżka zaś ostrokregu nad bryłą wpisaną jest mniejsza od X, więc stosunek ostro-

kręgu do przewyżki jest większy od stosunku BE razem z NP do NP a także stosunek bryły wpisanej do przewyżki większy od stosunku BE do NP: że zaś stosunek BE do EI jest tem mniejszy od stosunku do NP razem z IE im większe jest NP, więc bryła wpisana do przewyżki nad nią ostrokregu ma stosunek większy od stosunku BE do EI. Jaki zaś stosunek miałaby bryła wpisana do przewyżki, taki ma do EI pewna linja większa od BE. Niech nią będzie ME. Że zaś ME ma się do EI, jak bryła wpisana do przewyżki nad nią ostrokragu, i E jest środkiem ciężkości ostrokragu a I środkiem ciężkości bryły wpisanej: więc M byłby środkiem ciężkości przewyżki, co jest niemożliwe. Nie leży zatem środek ciężkości ostrokregu pod punktem C. Ale także nie leży nad tym punktem. Bo gdyby mógł leżeć w R, to biorąc linję SP z punktem podziału w N tak, aby BC razem z NP miało się do NS jak ostokrąg do X i opisując na ostokręgu podobną bryłę, przewyższającą ostokrąg o ilość mniejszą od X, to środek ciężkości bryły opisanej leżałby w odległości od C mniejszej od NP. Niech więc będzie bryła opisana ze środkiem ciężkości w O. Byłaby wtedy odległość OR większa od NS, a ponieważ BC razem z PN ma się do NS, jak ostokrąg do X: przewyżka zaś bryły opisanej nad ostokręgiem jest mniejsza od X, więc BO byłoby mniejsze od BC razem z PN a OR większe od SN, stosunek zaś ostrokregu do przewyżki byłby znacznie większy od stosunku BO do OR. Niech ten stosunek będzie jak MO do OR, wtedy MO będzie większe od BC, a M byłby środkiem ciężkości przewyżki, co jest niemożliwe. Zatem środek ciężkości ostrokregu nie leży nad C ani pod tym punktem, więc leży w punkcie C. Toż samo w ten sam sposób dowiedzione być może i dla ostrosłupa.

Jeżeli cztery linje tworzą proporcję ciągłą i jeżeli najmniejsza ma się do przewyżki największej nad najmniejszą jak pewna dana linja do $\frac{3}{4}$ przewyżki największej nad drugą; a linja równa największej razem z podwojoną drugą i potrojoną trzecią ma się do linji równej cztery razy wziętej największej razem z cztery razy wziętą drugą i cztery razy wziętą trzecią, jak inna dana linja do przewyżki największej nad drugą, to suma obu danych linji będzie równa czwartej części największej z czterech linji tworzących proporcję ciągłą.

Niech będą (tab. V, rys. 138) cztery linje tworzące proporcję ciągłą AB, BC, BD, BE, tworzące proporcję ciągłą i niech się ma

BE do EA jak FC do $\frac{3}{4}$ AC a linja równa AB razem z podwojoną BC i potrojoną BD do linji równej cztery razy wziętym AB, BC i BD jak KG do AC. Dowieść mamy, że KF jest czwartą częścią AB. Ponieważ AB, BC, BD, BE tworzą proporcję ciągłą¹⁾, to takąż proporcję tworzą AC, CD, DE i jak cztery razy wzięte AB, BC, BD do AB razem z podwojonem BC i potrojonem BD, tak się mają cztery razy wzięte AC, CD, DE, czyli cztery razy wzięte AE, do AC razem z podwojonem CD i potrojonem DE i tak samo się ma AC do KG; tak się ma więc potrojone AE do AC razem z podwojonem CD i potrojonem DE, jak $\frac{3}{4}$ AC do KG, zaś jak potrojone AE do potrojonego EB, tak się ma $\frac{3}{4}$ AC do GF; więc na mocy 24 twierdzenia 5 księgi²⁾, jak potrojone AE do AC razem z podwojonem CD i potrojonem DB, tak się ma $\frac{3}{4}$ AC do KF i jak cztery razy wzięte AE do AC razem z podwojonem CD i potrojonem DB, czyli do AB razem z CB i BD, tak się ma AC do KF, a także odwrotnie, jak cztery razy wzięte AE do AC, tak się ma AB razem z CB i BD do KF; jak więc AC do AE, tak się ma AB do AB razem z CB i BD, więc odwracając, jak cztery razy wzięte AE do AE, tak się ma AB do KF. Jest więc KF czwartą częścią AB.

Środek ciężkości ściętego ostrosłupa lub ostrokągu leży na jego osi i tak ją dzieli, że część zwrócona do mniejszej podstawy ma się do części pozostałej, jak trzy razy wzięta większa podstawa razem z dwa razy wziętą średnią między dwiema podstawami i z podstawą mniejszą do trzy razy wziętej mniejszej podstawy razem z podwojoną średnią między dwiema podstawami.

Ostrokąg, lub ostrosłup o osi (tab. V, rys. 139) AD, ścięty jest płaszczyzną równoległą do podstawy i ma oś VD, a jak się ma trzy razy większa podstawa razem z podwojoną średnią i z najmniejszą do potrojonej najmniejszej razem z podwojoną średnią i z największą, tak się ma VO do OD. Dowieść mamy, że O jest środkiem ciężkości kłosa. Niech będzie VM czwartą częścią VD.

Nakreślmy linję HX równą AD i niech będzie KX równe AV a do HX, KX trzecia proporcjonalna XL i czwarta XS: i jak HS do SX tak niech się ma MD do linji odciętej od O w stronę A, którą niech będzie ON, a ponieważ podstawa większa ma się do średniej między większą a mniejszą, jak DA do AV, czyli jak HX do XK

¹⁾ $AB:BC=BC:BD=BD:BE$.

²⁾ Euklidesa.

a ta średnia do mniejszej, jak KX do XL, więc podstawy większe i średnia i mniejsza mają się do siebie, jak linje HX, XK i XL.

Ponieważ potrojona podstawa większa razem z podwojoną średnią i razem z podstawą mniejszą ma się do potrojonej mniejszej razem z podwojoną średnią i razem z większą, t.j. VO do OD ma się, jak potrojone XH razem z podwojonem XK i razem z XL do potrojonego XL razem z podwojonem XK i razem z XH, będzie więc OD do DV jak HX razem z podwojonem XK i potrojonem XL do cztery razy wziętych XH, XK, XL.

Cztery zatem linje HX, XK, XL, XS tworzą proporcję ciągłą i jak się ma XS do SH, tak się będzie mieć odcięta poprzednio linja MO do $\frac{3}{4}$ DV, czyli do DM albo do $\frac{3}{4}$ HK; tak zaś się ma HX razem z podwojonem XK i potrojonem XL do cztery razy wziętych HX, XK, XL, jak OD do DV, to jest do MK, zatem (wedle poprzednio dowiedzionego) będzie DN czwartą częścią HX, to jest $\frac{1}{4}$ AD; więc N jest środkiem ciężkości ostrosłupa lub ostrokągu o osi AD. Niech będzie I środek ciężkości ostrosłupa lub ostrokągu o osi AV. Zatem środek ciężkości kłoca leży na IN w części po za N i w takiej odległości od tego punktu, że IN ma się do tej odległości, jak kłoc do ostrosłupa lub ostrokągu o osi AV. Pozostaje zatem dowieść, że IN tak się ma do ON jak kłoc do ostrokągu o osi AV. Jak się zaś ma ostrokąg o osi DA do ostrokągu o osi AV, tak się ma sześcián z DA do sześciánu z AV, czyli sześcián z HX do sześciánu z XK, ten zaś stosunek jest równy stosunkowi HX do XS: skąd wynika, że jak HS do SX, tak się będzie miał kłoc o osi DV do ostrokągu lub ostrosłupa o osi VA; że zaś jak HS do SX, tak się ma MD do ON, więc kłoc do ostrosłupa o osi AV ma się jak MD do NO. A ponieważ AN jest równe $\frac{3}{4}$ AD, zaś AI równe $\frac{3}{4}$ AV, więc będzie reszta IN równa $\frac{3}{4}$ VD a to IN jest równe MD. A że dowiedziono, że MD do NO ma się, jak kłoc do ostrokągu AV, więc ten sam jest stosunek IN do NO, c.b.d.d.

Koniec dodatku

DZIEŃ PIĄTY

Salviati: Bardzo się cieszę, że po kilkoletniej przerwie następuje znów zwykle nasze zebranie i przekonany jestem, że ruchliwy umysł pana Sagredo nie zależał pola i przez ten czas nie

zaniedbał rozmyślań nad nauką o ruchu, która zajmowała nas w ostatnim dniu naszych rozmów. Z rozmowy z Waszmością, jak i z panem Simplicio, zbierałem zawsze owoce niepospolitej erudycji, to też proszę, abyście zechcieli przedstawić swe rozważania, dotyczące przedmiotu traktowanego przez naszego autora. W ten sposób zacząć będziemy mogli nasze zwykłe rozmowy i dzień ten spędzić przy pożytecznem zajęciu.

S a g r e d o : Nie przeczę Waszmości, że w ciągu tych lat przeszły mi przez myśl różne poglądy na nowości dowiedzione przez tego poczciwego staruszka (*buon vecchio*) w jego nauce o ruchu, oparte przez niego na zasadach geometrii. A teraz, gdy sobie tego życzyacie, przypomnę tu niektóre z nich, dając Wam sposobność zbogacenia mej wiedzy waszemi uczonemi rozumowaniami.

Zaczynając więc w tym porządku, jak w traktacie o ruchu, przedstawię Waszmościom dawną mą wątpliwość, jaką znów zbudziło we mnie pierwsze twierdzenie naszego autora, dotyczące ruchu jednostajnego. Autor opiera się mianowicie (tak jak wielu dawnych i nowszych pisarzy) na zasadzie równych wielokrotności. Panuje tu pewna niejasność odnośnie do piątego, albo, jak chcą inni, szóstego określenia piątej księgi Euklidesa. Uważam się za szczęśliwego, że znalazłem sposobność naradzenia się z Waszmościami co do tej wątpliwości i mam nadzieję całkowicie się od niej uwolnić.

S i m p l i c i o : Co do mnie, uważam nowe nasze zebranie za szczególny dar losu, dający mi możność rozjaśnienia szczegółu wskazanego przez pana Sagredo. Przy ograniczonych wiadomościach geometrycznych, nabytych w szkole początkowej, nie mogłem zdać sobie sprawy z tej trudności. I skoro po długiem oczekiwaniu będę mógł dowiedzieć się czegokolwiek, odnośnie do tej kwestji, bardzo będę zadowolony.

S a g r e d o : Mówię więc, że w dowodzeniu pierwszego twierdzenia o ruchu jednostajnym, opierał się nasz autor na piątym czy szóstym określeniu piątej księgi Euklidesa i że, mając już zdawna pewną wątpliwość co do tego określenia, zbywało mi na jasności jakiej pożądałem we wzmiankowanym twierdzeniu. A właśnie gruntowne zrozumienie tej pierwszej zasady miałoby dla mnie ważne znaczenie, bo pozwoliłoby mi lepiej zrozumieć dalszą naukę o ruchu.

S a l v i a t i : Uczynię zadość życzeniu Waszmościów, uprzystępniając innym sposobem określenie Euklidesa i torując drogę, o ile mi

to będzie możliwe, do wprowadzenia zasady proporcjonalności. Tymczasem należy Wam wiedzieć, że tę wątpliwość podzielali z Wami ludzie znakomici, którzy przez długi czas odczuwali toż samo niezadowolenie, jakie objawili Waszmoście co do zakończenia tego dnia.

Wyznam przytem, że przez kilka lat po ukończeniu studiów nad piątą księgą Euklidesa otoczony byłem takąż samą ciemnością. W końcu przewyciężyłem trudność studjując przepyszne spiralne Archimedesasa, gdzie w pięknym początku księgi spotkałem dowodzenie, podobne do wzmiankowanego dowodzenia naszego autora. Przy tej sposobności myśleć zacząłem, czy się nie znajdzie prostsza droga, któraby można dojść do tegoż celu i otrzymać, tak dla mnie jak i dla innych, ściślejszych wiadomości o proporcjach; to też zajęłem się wtedy uważnie tym przedmiotem i to, do czego doszedłem, pragnę teraz poddać światłemu sądowi Waszmościów.

Przypuśćmy najprzód (jak to czyni Euklides przy swoim określeniu), że mamy wielkości proporcjonalne. Innemi słowy, jeżeli są dane trzy wielkości, to jaki jest stosunek, zależność albo związek ilościowy między pierwszą a drugą, taki sam będzie między trzecią a pewną czwartą. Twierdzę dalej, że, aby dać określenie wzmiankowanych wielkości proporcjonalnych, wytwarzające w umyśle czytelnika ściśle pojęcie o ich naturze, należy wziąć pod uwagę tę z pomiędzy ich własności, która jest najłatwiejszą do ustalenia i najzrozumialszą nawet dla nie matematyka. Toż samo czyni Euklides w wielu innych miejscach. Przypomnijcie sobie, że on nie powiedział, iż koło jest figurą płaską, wewnątrz której dwie przecinające się proste tak się dzielą wzajemnie, że prostokąt utworzony z dwóch części jednej jest zawsze równy prostokątowi z dwóch części drugiej; albo wewnątrz której wszystkie czworokąty mają kąty przeciwległe równe dwom kątom prostym. Gdyby zaś tak było powiedziane, byłyby to zawsze dobre określenia. Tymczasem znaną mu była inna własność koła, zrozumialsza od poprzednich i łatwiejsza do wytworzenia pojęcia i któż się na to nie zgodzi, że lepiej uczynił wybierając jaśniejszą i widoczniejszą jako określenie, dla wyciągnięcia z niego następnie innych więcej oddalonych i wprowadzenia ich jako wnioski.

Sagredo: Tak się ma rzecz z pewnością i sędzę, że trudno byłoby kogo znaleźć, ktoby się zgodził w zupełności na to określenie, jakie podaję zgodnie z Euklidesem.

»Cztery wielkości są proporcjonalne jeżeli jakiekolwiek jedna-

kie wielokrotności pierwszej i trzeciej są stale większe, mniejsze lub równe jakimkolwiek jednakim wielokrotnościom drugiej i czwartej».

Któż to ma umysł tak szczęśliwie obdarzony, aby miał pewność, że gdy cztery wielkości są proporcjonalne, to ich jednakie wielokrotności zawsze się zgadzają?

Albo też czy ta zgodność jednakich wielokrotności nie następuje i wtedy, gdy wielkości nie są proporcjonalne? W poprzednim określeniu powiedział już Euklides.

»Stosunek dwóch wielkości jest to taka zależność lub związek między nimi, który się odnosi do ich ilości«.

Tu więc czytelnik pojmuje zaraz co to jest stosunek dwóch wielkości, trudno mu zaś będzie zrozumieć, że jaka jest zależność lub związek między pierwszą wielkością a drugą, taka będzie podobnie między trzecią a czwartą wielkością, jeżeli równe wielokrotności pierwszej i trzeciej zgadzają się zawsze w sposób wskazany z równymi wielokrotnościami drugiej i czwartej, będąc zawsze większe, mniejsze lub równe.

Salviati: Jakkolwiekby było, wydaje mi się orzeczenie Euklidesa, prędzej twierdzeniem do dowiedzenia aniżeli przedwstępem określeniem. Że zaś słyszałem często potakiwanie memu pogładowi, postaram się przeto przedstawić w sposób ogólny określenie pojęcia proporcji, tak aby było dostępne i dla tych, którzy nie znają geometrii.

Powiemy zatem, że cztery wielkości są między sobą proporcjonalne, to jest stosunek pierwszej do drugiej jest taki sam, jak trzeciej do czwartej, jeżeli pierwsza jest ściśle taką samą wielokrotnością drugiej, jak trzecia czwartej. Czy p. Simplicio ma w tym względnie jaką wątpliwość?

Simplicio: Oczywiście że nie.

Salviati: Ale ponieważ, między czterema wielkościami nie zawsze zachodzi wzmiankowana równość albo taka ścisła wielokrotność, musimy iść dalej i zapytam się pana Simplicio, czy uważa cztery wielkości za proporcjonalne, jeżeli pierwsza jest trzy i pół razy większa od drugiej i tak samo trzecia trzy i pół razy większa od czwartej.

Simplicio: Zupełnie się zgadzam i uważam za proporcjonalne nie tylko cztery wielkości, jakie Waszmość wymienia ale i te, które są związane jakąkolwiek inną wielokrotnością, całkowitą lub ułamkową.

Salviati: Krótko i ogólnie możemy więc powiedzieć:

Cztery wielkości wtedy są między sobą proporcjonalne, jeżeli nadmiar (excesso) pierwszej nad drugą (jakikolwiekby był) jest równy nadmiarowi trzeciej nad czwartą.

Simplicio: Dotąd nie zauważyłem żadnej trudności; zdaje mi się jednak, że Waszmość nie daje w ten sposób określenia wielkości proporcjonalnych, jak tylko w przypadku, gdy poprzedniki są większe od następników, gdyż przyjmuje, że pierwsza przewyższa drugą a trzecia podobnie przewyższa czwartą. Ale jak, pytam się, mam postępować, jeżeli poprzedniki są mniejsze od następników?

Salviati: Odpowiadam, że, jeżeli Waszmość ma cztery wielkości takie, że pierwsza jest mniejsza od drugiej a trzecia mniejsza od czwartej, to wtedy będzie druga większa od pierwszej a czwarta większa od trzeciej. Zechce Waszmość wtedy odwrócić porządek i przyjąć, że druga jest pierwszą a czwarta trzecią. I będą znów poprzedniki większe od następników i nie będzie potrzeba określenia innego, jak to, które podałem.

Sagredo: Tak jest istotnie. Zechce więc Waszmość przyjmować zawsze, że poprzedniki są większe od następników, co, jak mi się zdaje, ułatwi wywody i uczyni je zrozumialszemi.

Salviati: Oprócz ustalonego w ten sposób określenia moglibyśmy jeszcze tak określić cztery wielkości proporcjonalne. Jeżeli pierwsza, aby mieć do drugiej taki stosunek, jak trzecia do czwartej, nie jest wcale ani większą ani mniejszą niż być powinna, to wtedy przyjmuje się, że pierwsza ma do drugiej ten sam stosunek, jaki ma trzecia do czwartej. Przy tej okazji określe jeszcze pojęcie większości stosunku i powiem:

Jednakże, gdy pierwsza wielkość jest większa niż być powinna, aby mieć taki stosunek do drugiej jak trzecia do czwartej, wtedy pragnąłbym, abyśmy się umówili orzekać, że pierwsza ma większy stosunek do drugiej niż trzecia do czwartej.

Simplicio: Tak, ale jeżeli pierwsza jest mniejsza, niżby być powinna, aby mieć do drugiej ten sam stosunek, jaki ma trzecia do czwartej?

Salviati: Jeżeliby pierwsza była mniejszą niżby być powinna, aby mieć do drugiej ten sam stosunek, jaki ma trzecia do czwartej, byłoby to oczywistą oznaką, że trzecia jest większą niżby być powinna, aby mieć do czwartej taki stosunek, jaki ma pierwsza do drugiej. W tym przypadku zechce Waszmość przestawić wielkości, kładąc trzecią i czwartą na miejsce pierwszej i drugiej a pierwszą i drugą na miejsce trzeciej i czwartej.

S a g r e d o: Dotąd doskonale rozumiem pogląd Waszmości i zasadę, na której się opiera rozumowanie wasze o proporcjonalności. Zdaje mi się, że dalej dokonać winna Waszmość jednej z dwóch rzeczy: albo na podstawie tych swoich zasad dowieść całego piątego określenia Euklidesa, albo też wyprowadzić ze swoich dwóch określeń dwa inne, które Euklides umieszcza między określeniami jako piąte i siódme i na których opiera całą budowę tejże piątej księgi. Jeżeli je nam Waszmość dowiedzie jako wnioski, wtedy nie pozostanie nam nic do życzenia w tym przedmiocie.

S a l v i a t i: Taki właśnie był mój zamiar, bo jeżeli okaże się widocznem, że przy danych czterech wielkościach proporcjonalnych według tegoż określenia, jednakowe wielokrotności pierwszej i trzeciej zgadzają się zawsze, z konieczności będąc równe mniejsze lub większe od jednakich wielokrotności drugiej i czwartej, będę mógł wtedy bez innego przewodnika wkroczyć w piątą księgę Euklidesa i będzie można zrozumieć, jako oczywiste, twierdzenia o wielkościach proporcjonalnych. I dalej, jeżeli z podanego określenia większości stosunku wywiodę, że, gdy w pewnym przypadku mamy jednakowe wielkości pierwszej i trzeciej, jak i drugiej i czwartej a wielokrotność pierwszej przewyższa wielokrotność drugiej, podczas gdy wielokrotność trzeciej nie jest większą od wielokrotności czwartej, to za pomocą tego dowodzenia można będzie wywieść inne twierdzenia o wielkościach nie proporcjonalnych. Wniosek nasz bowiem będzie właśnie określeniem, którem na początku posługiwał się sam Euklides.

S i m p l i c i o: Skoro tylko zostanę przekonany o tych dwóch własnościach jednakich wielokrotności, to jest o tem, że przy czterech wielkościach proporcjonalnych, one się wciąż zgadzają, będąc albo równe, albo większe, albo mniejsze; i że gdy cztery wielkości nie są proporcjonalne, to wielokrotności w pewnym przypadku się nie zgadzają, wtedy nie będę już żądał żadnego objaśnienia, aby jasno zrozumieć całą piątą (księgę) elementów geometrycznych.

S a l v i a t i: Powiedz mi pan, panie S i m p l i c i o, czy jeżeli cztery wielkości A, B, C, D są proporcjonalne t.j. pierwsza A ma taki stosunek do drugiej B, jak trzecia C do czwartej D, to zgadzacie się na to, że i 2 A ma taki stosunek do B, jak 2 C do D?

S i m p l i c i o: Rozumiem to dobrze, gdyż, jeżeli jedna pierwsza ma ten sam stosunek do drugiej, jak jedna trzecia do czwartej, to nie umiałbym powziąć idei, dlaczego dwie pierwsze miałyby mieć

inny stosunek do drugiej, niż ten, jaki mają dwie trzecie do czwartej.

Salviati: Gdy więc Waszmość zgadza się na to, to zgodzi się także, że cztery, dziesięć lub sto pierwszych mają do jednej drugiej ten sam stosunek, jaki mają cztery, dziesięć lub sto trzecich do jednej czwartej.

Simplicio: Z pewnością tak i byleby tylko wielokrotności były też same, to łatwo pojąć, że pierwsza, wzięta dwa razy, dziesięć lub sto, ma ten sam stosunek do drugiej, jak trzecia, wzięta dwa razy, dziesięć lub sto, do czwartej. Trudnoby było dowieść przeciwnego.

Salviati: Nie będzie więc ciężko zrozumieć, że wielokrotność pierwszej ma ten sam stosunek do drugiej, jaki ma takąż sama wielokrotność trzeciej do czwartej, czyli że pierwsza, wzięta ilekolwiek razy, ma do drugiej ten sam stosunek, jaki ma tyleż razy wzięta trzecia do czwartej. Wszystko zatem, co powiedziałem dotąd o braniu wielokrotności poprzedników, odnieście do następników, zostawiając poprzedniki bez zmiany i powiedźcie, czy jesteście tego zdania, że gdy cztery wielkości są proporcjonalne, to pierwsza do podwojonej drugiej mieć będzie inny stosunek, niż trzecia do podwojonej czwartej?

Simplicio: Stanowczo sędzę, że nie; bo skoro pojedyncza pierwsza ma się do pojedynczej drugiej, jak pojedyncza trzecia do pojedynczej czwartej, to rozumiem dobrze, że taż sama pierwsza do dwa, cztery lub dziesięć razy wziętej drugiej, będzie się miała, jak taż sama trzecia do dwa, cztery lub dziesięć razy wziętej czwartej.

Salviati: Przyznajecie więc i rozumiecie dobrze, że jeżeli (tab. V, rys. 140) cztery wielkości A, B, C, D, są proporcjonalne, a pierwsza i trzecia zostaną jednakowo uwielokrotnione, to stosunek wielokrotności E pierwszej A do drugiej B będzie ściśle równy stosunkowi takiej samej wielokrotności F trzeciej C do czwartej D. Przypuśćcie teraz, że naszymi czterema wielkościami proporcjonalnymi są E, B, F, D, t.j. że wielokrotność E będzie pierwszą, taż sama B drugą, wielokrotność F trzecią a czwarta D będzie czwartą. Waszmość przyznała, że, jeżeli pomnożymy jednakowo następniki B i D t.j. wielkości drugą i czwartą, to stosunek pierwszej wielkości do wielokrotności drugiej będzie taki, jaki jest stosunek trzeciej do wielokrotności czwartej. Ale temi czterema

wielkościami są teraz E, F, jednakie wielokrotności pierwszej i trzeciej oraz G, H, jednakie wielokrotności drugiej i czwartej.

Sagredo: Przyznaję, że jestem w zupełności zaspokojony i pojmuję teraz, dlaczego jednakie wielokrotności czterech wielkości proporcjonalnych stale się zgadzają co do swej większości, mniejszości lub równości. Bo, jeżeli weźmiemy jednakie wielokrotności pierwszej i trzeciej i jednakie wielokrotności drugiej i czwartej, to według dowodzenia Waszmości będzie miała wielokrotność pierwszej do wielokrotności drugiej ten sam stosunek, jaki ma wielokrotność trzeciej do wielokrotności czwartej i jasne jest, że jeżeli wielokrotność pierwszej jest większa od wielokrotności drugiej, to także wielokrotność trzeciej winna przewyższać (dla zachowania proporcji) wielokrotność czwartej. Gdyby zaś była mniejsza lub równą, to tak samo wielokrotność trzeciej wielkości będzie mniejszą lub równą wielokrotności czwartej.

Simplicio: Nie mam nic przeciw temu. Pragnąłbym jednak dowiedzieć się, dlaczego (w przypuszczeniu czterech wielkości nieproporcjonalnych) jednakie ich wielokrotności nie zgadzają się odpowiednio ze sobą, co do swej większości, mniejszości lub równości.

Salviati: Co do tego, (tab. V, rys. 141) mogę Waszmość w zupełności zaspokoić. Weźmy cztery wielkości: AB, C, D, E, i niech będzie pierwsza AB większa, niżby być winna, aby mieć do drugiej C ten sam stosunek, jaki ma trzecia D do czwartej E. Dowiodę, że jeżeli weźmiemy w szczególny sposób jednakie wielokrotności pierwszej i trzeciej i inne jednakie wielokrotności drugiej i czwartej, to wielokrotność pierwszej będzie większa od wielokrotności drugiej, podczas gdy wielokrotność trzeciej nie będzie przewyższać wielokrotności czwartej, lecz przeciwnie będzie od niej mniejszą.

Przypuśćmy, że od pierwszej wielkości AB odjęta zostanie ta przewyżka, która czyni ją większą, niżby być powinna, aby była dokładnie proporcjonalną i niech tą przewyżką będzie FB. Pozostaną wtedy cztery wielkości ściśle proporcjonalne i będzie się miała reszta AF do C, jak D do E.

Pomnożmy przez siebie FB tyle razy, aby ta wielokrotność była większą od C i niech nią będzie HI. Weźmy następnie HL równe takiejże wielokrotności AF i M równe takiej wielokrotności D, jaką HI jest względem FB. Wtedy niewątpliwie LI będzie taką wielokrotnością AB, jaką HI jest względem FB, albo M względem D.

Weźmy teraz N taką wielokrotność C , że to N będzie bardzo bliskie ale trochę większe od LH i wreszcie niech będzie O takie, aby, jak N do C , miało się O do E .

Ponieważ N jest trochę tylko większe od LH , to, jeżeli odejmiemy od N jedną z jej wielkości składowych (równą C), pozostanie reszta nie większa od LH . Dołączając napowrót do N wielkość odjętą, a do LH , które nie jest mniejsze od tej reszty, dołączając HI większe od części dodanej do N , otrzymamy całe LI większe od N .

Mamy więc przypadek, w którym wielokrotność pierwszej wielkości jest większa od wielokrotności drugiej. Ale ponieważ cztery wielkości AF , C , D , E , są proporcjonalne, a LM i M są jednakowymi wielokrotnościami pierwszej i trzeciej, zaś N i O — drugiej i czwartej, to wszystkie te wielkości (według tego co wyżej ustalono) zgadzać się będą ze sobą, co do większości, mniejszości lub równości. A że LH wielokrotność pierwszej jest mniejsza od N wielokrotności drugiej, to będzie także M wielokrotność trzeciej koniecznie mniejszą od O wielokrotności czwartej.

Skoro więc dowiedziono, że, jeżeli pierwsza wielkość o cokolwiek przewyższa tę, która ma się do drugiej, jak trzecia do czwartej, to możliwem będzie wziąć pewną wielokrotność pierwszej i trzeciej i inną wielokrotność drugiej i czwartej w ten sposób, aby wielokrotność pierwszej przewyższała wielokrotność drugiej, podczas gdy wielokrotność trzeciej nie będzie przewyższać wielokrotności czwartej.

S a g r e d o: Rozumiem wybornie wszystko, co Waszmość dotąd dowiodła. Pozostaje jeszcze, abyście z poprzednich dowodzeń wyprowadzili, jako wniosek konieczny, oba sporne określenia Euklidesa, co spodziewam się będzie łatwe, gdyż dowiedliście już dwóch twierdzeń odwrotnych.

S a l v i a t i: Nie przedstawia to żadnej trudności, a najprzód wywiodę piąte określenie w ten sposób.

Jeżeli (tab. V, rys. 142) dla czterech wielkości: A , B , C , D jakiegokolwiek jednakie wielokrotności pierwszej i trzeciej są stale co do swej równości, większości lub mniejszości zgodne z jakimikolwiek jednakimi wielokrotnościami drugiej i czwartej, to te cztery wielkości są proporcjonalne.

Przypuśćmy bowiem, że (jeżeli to jest możliwe) nie są proporcjonalne. Byłby wtedy jeden z poprzedników większy, niż być powinien, aby mieć do następnika ten sam stosunek, jaki ma drugi poprzednik do swego następnika. Niech taką będzie narysowana

wielkość A. Na mocy więc poprzednio dowiedzionego, biorąc jednakie wielkości A i C i w sposób jak wyżej podano jednakie wielokrotności B i D, otrzymalibyśmy wielokrotność A większą od wielokrotności B, zaś wielokrotność C nie większą ale mniejszą od wielokrotności D, co się sprzeciwia naszemu założeniu.

Aby dowieść siódmego określenia, tak powiem:

Niech będą cztery wielkości A, B, C, D i przypuśćmy, że zdarza się przypadek, kiedy przy jednakowych wielokrotnościach dwóch poprzedników, pierwszej i trzeciej i jednakowych także wielokrotnościach dwóch następników, drugiej i czwartej, wielokrotność A jest większa od wielokrotności B ale wielokrotność C nie jest większa od wielokrotności D. Twierdzę, że A mieć będzie do B stosunek większy, niż C do D, czyli że A będzie nieco większe, niżby być powinno, aby mieć do B taki sam stosunek, jaki ma C do D.

Gdyby A nie było większe, to byłoby, albo ściśle proporcjonalne albo też mniejsze od wartości, jakaby wtedy mieć winno. W pierwszym przypadku byłyby jednakie wielokrotności pierwszej i trzeciej, wzięte w jakikolwiek sposób, zawsze zgodne z jednakiemi wielokrotnościami drugiej i czwartej, co do większości, mniejszości lub równości; to zaś sprzeciwia się przypuszczeniu.

W drugim przypadku, gdyby pierwsza była mniejszą od wartości, jakaby mieć winna, aby być proporcjonalną, byłoby to znakiem, że trzecia wielkość jest większą, niżby być powinna aby mieć do czwartej ten sam stosunek, jaki ma pierwsza, do drugiej. Powiedziałbym wtedy, aby odjąć od trzeciej przewyżkę, która ją czyni większą od ściśle proporcjonalnej. Pozostałaby reszta ściśle proporcjonalna. Biorąc więc poszczególne wielokrotności przypuszczane wyżej, to jasnem jest, że jeżeli wielokrotność pierwszej przewyższa wielokrotność drugiej, to i wielokrotność reszty z trzeciej będzie większa od wielokrotności czwartej. Jeżeli więc zamiast zmniejszać wielokrotność tej reszty pozostawimy ją dorównywającą wielokrotności całej trzeciej, to będzie ona większą od wielokrotności reszty a więc tem bardziej większą od wielokrotności czwartej. To zaś sprzeciwia się założeniu.

Sagredo: Jak najzupełniej zadowala mnie objaśnienie dane przez Waszmość w kwestji, która mnie przez czas długi zajmowała: nie umiałbym powiedzieć, czego doznaję więcej, czy zadowolenia z posiadania nowej wiadomości, czy też żalu, że nie postarałem się o jej otrzymanie zaraz przy pierwszych naszych spotkaniach, tem bardziej, że dowiedziałem się później, iż Waszmość

komunikowała ją różnym przyjaciołom, którzy sąsiadując łatwiej go mogli odwiedzać. Ale, jeśli łaska, idźmy dalej, chyba że p. Simplicio ma co powiedzenia w kwestji, którą rozważaliśmy.

Simplicio: Mógłbym tylko dodać, że jestem zupełnie zadowolony z rozprawy i dowodzenia były dla mnie zrozumiałe.

Salviati: Po założeniu tych podstaw, możnaby skrócić częściowo i przerobić całą piątą księgę Euklidesa, ale to zaprowadziłoby nas za daleko i odciągnęło od naszego głównego zamierzenia. Przytem wiadomo mi, że znane są Waszmościom podobne kompensja innych autorów.

Gdy więc na żądanie Waszmościów rozważone zostały określenia piąte i siódme piątej księgi, spodziewam się, że wolno mi będzie przedstawić uwagi zapamiętane co do innego jeszcze określenia tegoż Euklidesa. Przedmiot ten nie jest zbyt odległy od rozpoczętego i nie obcy naszemu głównemu zamierzeniu, bo odnosi się do stosunku złożonego, którym nasz autor w swej księdze często się posługiwał.

Miedzy określeniami szóstej księgi Euklidesa, określenie piąte odnosi się do stosunku złożonego i tak brzmi:

Stosunek nazywa się złożonym z wielu stosunków, jeżeli wielkości tych ostatnich, pomnożone przez siebie, dają ten stosunek.

Zauważę przytem, że ani Euklides, ani żaden inny dawny autor nie posługuje się podobnem określeniem, w ten sposób jak podano w księdze: wynikają stąd dwie niedogodności: dla czytelnika trudność zrozumienia a dla pisarza zbyt duża notatka.

S a g r e d o: To prawda, ale nie wydaje mi się prawdopodobnem, aby Euklides, przy swej nadzwyczajnej ścisłości, pomieścił to określenie w swem dziele przez nieuwagę i niepotrzebnie. Z drugiej znów strony, mogło ono być dodane przez innych albo przynajmniej w ten sposób zmienione, że dziś trudno rozpoznać, co autor chciał dać za podstawę swoim twierdzeniom.

Simplicio: Ponieważ nie posługują się niem inni autorowie, muszę Waszmościom zawierzyć, tembardziej, że się tem nie wiele zajmowałem; mnieby się to nie zdawało, żeby ten Euklides, którego pisma tak wysoko cenicie za ich dokładność, postawił je niepotrzebnie. Przyznać muszę wszakże, że przy mojej słabej znajomości rzeczy, bo się nigdy nie zagłębiałem w matematyce, upatruję jeszcze jedną trudność w tem określeniu i to zapewne nie mniejszą niż w określeniu, które co dopiero objaśniał p. Salviati.

Przez pewien czas pomagałem sobie czytaniem długich komen-

tarzy w tej kwestji, ale, prawdę powiedziawszy, nie znalazłem objaśnienia tej niejasności. To też, gdyby Waszmościowie mieli do zrobienia jakie szczególne uwagi, któreby mi to ułatwiły, byłbym za nie wielce obowiązany.

Salviati: Należy Wam zdać sobie sprawę, że nie chodzi tu o żadne głębsze rozważanie; w istocie nie chodzi tu o nic innego, jak o najprostsze zwrócenie uwagi.

Wyobraźmy sobie (tab. V, rys. 143) dwie wielkości jednakiej jakości A i B. A ma pewien stosunek do B. Między obiema wielkościami postawmy trzecią takiejże jakości. Powiedzmy teraz, że stosunek A do B może być złożony z dwóch stosunków pośrednich, t. j. stosunku A do C i stosunku C do B. W tem jest główna myśl określenia Euklidesa.

Simplicio: Istotnie, tak pojmuję Euklides stosunek złożony, ale ja nie rozumiem, dlaczego A do B miałoby mieć stosunek złożony z dwóch stosunków, t. j. A do C i C do B?

Salviati: A powiedz mi pan, p. Simplicio, czy pan rozumie, że A do B ma jakikolwiek stosunek?

Simplicio: Ponieważ oba są jednego rodzaju, to tak.

Salviati: I że ten stosunek jest niezmienny i nigdy nie może mieć innej wartości, różnej od tej jaką ma?

Simplicio: I na to się zgadzam.

Salviati: Dodam jeszcze, że również A do C ma stosunek niezmienny, tak samo jak i C do B. Stosunek krańcowych wielkości A i B nazywa się złożonym z dwóch stosunków pośrednich między krańcowymi, t. j. ze stosunku, jaki ma A do C i stosunku jaki ma C do B.

Dodam nadto, że, jeżeli Waszmość wyobrazi sobie postawioną, między temi krańcowymi wielkościami, nie jedną **A, C, D, B**, wielkość, ale więcej, jak widać obok A, C, D, B, wtedy zrozumie, że stosunek A do B złożony jest ze wszystkich stosunków pośrednich, to jest ze stosunków, jakie ma A do C, C do D, D do B i gdyby było więcej wielkości, to zawsze stosunek pierwszej do ostatniej będzie złożony ze stosunków między wielkościami pośrednimi.

Zauważę przytem, że jeżeli stosunki składowe są jednakie, t. j. równe sobie, to, jak powiedzieliśmy, pierwsza wielkość mieć będzie do ostatniej stosunek złożony ze wszystkich pośrednich; że zaś te pośrednie są sobie równe, to możemy tak się wyrazić, że pierwsza wielkość ma do ostatniej stosunek, będący taką wielokrotnością stosunku pierwszej do drugiej wielkości, ile jest stosunków po-

średnich między pierwszą a ostatnią. Jeżeli np. dane są trzy wielkości i pierwsza ma się do drugiej, jak druga do trzeciej, będzie wtedy prawdziwym orzeczenie, że pierwsza ma do trzeciej stosunek złożony ze stosunków pierwszej do drugiej i drugiej do trzeciej; ale ponieważ przyjmujemy, że te dwa stosunki są równe, t. j. jednakowe, to można powiedzieć, że stosunek pierwszej wielkości do trzeciej jest podwojonym stosunkiem pierwszej do drugiej. Gdyby wielkości było cztery, to możnaby powiedzieć, że stosunek pierwszej do czwartej jest złożony z trzech stosunków pośrednich i jest potrojonym stosunkiem pierwszej do drugiej, bo stosunek pierwszej do czwartej jest trzy razy wziętym stosunkiem pierwszej do drugiej i t. d.

Ale niema tu już rozważań i dowodzeń, gdyż chodzi tylko o proste nadanie nazwisk. Gdyby się Waszmościom nie podobała nazwa „złożony“, nazwalibyśmy go nieregularnym, zlepionym albo zmieszanym (*incomposta, o impastata o confusa*) lub też inaczej, jak się Waszmościom spodoba; a tylko trzymajmy się tego, że wszędzie, gdzie mieć będziemy trzy wielkości tegoż samego rodzaju i nazwę ich stosunek nieregularnym, zlepionym albo zmieszanym, to rozumieć przez to będziemy stosunek wielkości krańcowych a nie inny,

S a g r e d o: Rozumiem to doskonale i nieraz podziwiałem zręczność Euklidesa przy podaniu, w którym dowodzi, że równoległoboki równokątne mają stosunek złożony ze stosunków boków. W tym przypadku oba stosunki składają się z czterech wyrazów, które są czterema bokami równoległoboków; zaleca on przeto, aby oba stosunki przedstawić przez trzy wyrazy, tak, że jeden będzie stosunkiem pierwszego wyrazu do drugiego a drugi stosunkiem drugiego wyrazu do trzeciego. Dowodzenia zaś nie przeprowadza inaczej, jak tylko przez wykazanie, że jeden równoległobok ma się do drugiego, jak pierwszy wyraz do trzeciego, t. j. że stosunek równoległoboków jest złożony z dwóch stosunków, pierwszego wyrazu do drugiego i drugiego do trzeciego, które są właśnie temi dwoma stosunkami, jakie miał utworzone pierwotnie z czterech boków równoległoboków.

Salviati: Waszmość to doskonale przedstawia. Jeżeli więc określenie stosunku, złożonego w ten sposób jest pojęte i ustalone (a nie można rozumieć przez to nic innego, jak to, co tak nazwalismy), to 23-go podania szóstej księgi Euklidesa dowieść będzie można, tak, jak on sam to czyni, bo nie przyjmuje określenia w ten sposób, jak ono jest rozpowszechnione ale właśnie tak, jak my je przyjęli-

śmy wyżej. Po wzmiankowanem 23-em podaniu postawiłbym jako wniosek zbyteczne piąte określenie szóstej księgi o stosunku złożonym, nadając mu kształt twierdzenia.

Weźmy dwa stosunki, jeden między wielkościami A i B a drugi między C i D. Zwykle określenie mówi, że stosunek złożony z tych dwóch otrzymamy mnożąc przez siebie ilości tych stosunków. Zgadza się z panem Simplicio, gdy mniema, że trudno jest to pojąć i że trzeba by dowieść, co w krótkich słowach w ten sposób da się zrobić.

Choćby cztery wielkości tych dwóch stosunków nie były linjami, lecz innemi wielkościami, można je jednak zawsze przedstawić sobie jako linje (tab. V, rys. 144). Z dwóch poprzedników A i C utworzymy prostokąt i tak samo drugi z następników B i D. Według 23-go twierdzenia stóstej księgi Euklidesa, jasnem jest, że prostokąt utworzony z A i C do prostokąta z B i D jest w stosunku złożonym ze stosunków A do B i C do D, i że te stosunki są temi właśnie, które przyjmowaliśmy na początku dla znalezienia, jaka proporcja wyniknie z ich porównania. Że zaś stosunek A do B i stosunku C do D jest właśnie stosunkiem prostokąta AC do prostokąta BD, to pytam się pana Simplicia, jakim sposobem doszliśmy do otrzymania obu wyrazów, z których się składa szukany stosunek?

Simplicio: Myślę, że nie inaczej, jak tylko żeśmy utworzyli dwa prostokąty z pierwotnie danych czterech linij, czyli jeden z poprzedników A i C a drugi z następników B i D.

Salviati: Ale tworzenie prostokątów z linij w geometrii, odpowiada właśnie mnożeniu liczb w arytmetyce, o czem wie każdy początkujący jeszcze matematyk, a to, cośmy mnożyli przez siebie, to były linje A i C oraz B i D, czyli odpowiednie wyrazy danych stosunków.

Jeżeli więc pomnożymy przez siebie ilości albo wartości danych stosunków, to otrzymamy ilość albo wartość stosunku, który się nazywa złożonym z nich obu.

Koniec dnia piątego.

DZIEŃ SZÓSTY

O SILE UDERZENIA

Rozmawiają: Salviati, Sagredo i Aproino

Sagredo: Nieobecność pańska, panie Salviati, w ciągu tych piętnastu dni, dała mi sposobność rozpatrzenia podań, dotyczących środka ciężkości ciał stałych a przytem uważnego przejrzenia dowodzeń tyłu i tak nowych podań o ruchu naturalnym i gwałtownym, a że było między niemi nie mało dość trudnych do zrozumienia, to rad byłem ze współpracy tego pana, którego Waszmości przedstawiam.

Salviati: Chciałem właśnie prosić Waszmość o zaznajomienie mnie z towarzyszem, a jednocześnie dowiedzieć się dlaczego nie ma pana Simplicia.

Sagredo: Przypuszczam, a nawet sędzę na pewno, że przyczyną nieobecności pana Simplicia jest spotkanie przezeń niejasności w niektórych dowodzeniach różnych zadań, dotyczących ruchu, jak również w podaniach o środku ciężkości. Te zwłaszcza mam tu na myśli, które z powodu długiego szeregu dowodzeń geometrycznych nie są dostępne nie mającym wciąż pod ręką Elementów; pan, którego widziecie, jest p. Paweł Aproino, szlachcie z Treviso, i nie tylko słuchacz naszego akademika, gdy ten wykladał w Padwie, ale jego najbliższy zaufany, który długo i często z nim obcował i razem z innymi (wśród których najwybitniejszym był Daniel Antonini, szlachcie z Udine, rozumu i wartości nadludzkiej, który w obronie ojczyzny i swego prześwietnego Księcia chwalebną śmierć poniósł i otrzymał wszystkie zasłużone odznaczenia od najjaśniejszej Rzeczypospolitej Weneckiej) brał specjalny udział w wielkiej liczbie doświadczeń, odnoszących się do różnych zagadnień a dokonywanych w domu naszego akademika. Pan ten przybył z Wenecji przed dziesięcioma dniami, jak zwykle odwiedził mnie, a ponieważ się dowiedział, że jestem w posiadaniu tych traktatów naszego wspólnego przyjaciela, zapragnął przejrzeć je razem z nami i wziąć udział w naszej wspólnej rozmowie o cudownem zagadnieniu uderzenia, powiedział mi, że już wiele razy rozprawiał o tem z naszym akademikiem, ale zawsze bez stanowczego rozstrzygnięcia kwestji, wspólnie z nim prowadził wiele doświadczeń, dotyczących różnych zagadnień, a także niektóre inne, odnoszące się do siły uderzenia i do jej wyjaśnienia i gotów jest zakomunikować nam, między innemi jedno z nich, bardzo ciekawe i subtelne.

Salviati: Cieszy mnie bardzo poznanie pana Aproino, zwłaszcza, że słyszałem o nim już wiele od naszego akademika; z wielką przyjemnością zapoznam się choćby tylko z częścią poszukiwań, wykonanych w domu naszego akademika, w obecności tak wybitnych mężów, jak p. Aproino i p. Antonini, o których wspominał mi często nasz przyjaciel z uznaniem i podziwem. To też, gdy dziś rozmawiać mamy o uderzeniu, powie nam może p. Aproino, co wynioskował z doświadczeń w tej materji, z mej strony zaś gotów jestem zakomunikować szczegóły o innych doświadczeniach, wykonanych nad różnemi zagadnieniami i to w znacznej liczbie, bo nasz akademik był zawsze gorliwym i biegłym eksperymentatorem.

Aproino: Gdybym chciał wyrazić Waszmości należną podziękę za jego uprzejmość, wyrzecbym musiał tyle słów, że mało lub wcale nie byłoby czasu dla rozpraw nad podniesioną kwestją.

Sagredo: Nie, nie, panie Aproino, pozwólcie nam zaraz rozpocząć nasze naukowe rozprawy, zostawiając dworakom ceremonialne komplementy a poprzestając na waszych krótkich, prostych i serdecznych słowach.

Aproino: Jakkolwiek nie wyobrażam sobie, abym mógł tu przedstawić rzecz, któraby była nieznaną panu Salviati'emu, a przeto całe zadanie prowadzenia rozpraw onby powinien wziąć na siebie, to jednak nie dla czego innego, jak tylko dla zdjęcia zeń choćby tylko części ciężaru, przedstawię tu główne motywy, które skłoniły naszego przyjaciela do zagłębienia się w cudownem zagadnieniu uderzenia. Starał się on znaleźć sposób zmierzenia wielkiej siły uderzenia i możliwego ustanowienia zasad, na których oparta by być mogła istota tego działania, które, jak się zdaje, w inny sposób się objawia przy swem największem napięciu, niż ten w jaki następuje zwiększenie siły w urządzeniach mechanicznych (mówię „mechanicznych“ aby wyłączyć olbrzymią potęgę ognia), gdzie łatwo zrozumieć można, jak prędkość nikłego ciała równoważy olbrzymią potęgę oporu, który powolnie porusza. Że jednak przy uderzeniu ruch ciała uderzającego i jego prędkość muszą mieć związek z większem lub mniejszem poruszeniem uderzonego; to nasz akademik powziął najprzód myśl zbadania, jaki ma wpływ na skutek i działanie uderzenia np. ciężar młota i większa lub mniejsza jego prędkość, szukając, czy nie byłoby możliwem znalezienie pewnej miary, któraby pozwoliła wyznaczyć jedną i drugą energję. W tym celu urządził zręcznie obmyślane doświadczenie. Mocny drąg, około trzech łokci długości, oparł środkiem na krawędzi, tak

aby się mógł wahać swobodnie, jak drążek wagi; na obu jego końcach zawiesił równe ciężary, z których jeden składał się z dwóch naczyń miedzianych, t. j. kubłów, pierwszy kubel, umieszczony na końcu ramienia drąga był pełen wody i miał do uch przywiązane dwulokciowe sznury, do których znów przywiązany był drugi takż sam kubel próżny, wiszący pionowo pod pierwszym napelnionym wodą; na drugim zaś końcu drąga wagi zawieszona była przeciwwaga kamienna lub z innego materiału, ściśle wyrównywająca ciężar obu kubłów, wody i sznurów. Dno górnego kubła miało we środku wywiercony otwór, wielkości nieco mniejszej od jajka, który można było otwierać i zamykać. Wyobrażaliśmy sobie obaj, że gdy wszystko w ten sposób zostanie przygotowane i równowaga drąga ustalona i otworzymy wtedy otwór we dnie górnego kubła a wypływająca stamtąd woda wpadać będzie w dolny kubel, wtedy to uderzenie doda tej stronie wagi pewien moment i dla utrzymania równowagi trzeba będzie powiększyć ciężar zawieszony na drugim ramieniu tak, aby to powiększenie dorównywało sile uderzenia wody; tak, że moglibyśmy wtedy powiedzieć, że moment uderzenia równoważony jest ciężarem 10 lub 12 funtów, gdyby nam przyszło dodać tyle do przeciwwagi.

Sagredo: Urządzenie to wydaje mi się istotnie obmyślanem dociepnie i ciekaw jestem, jaki był wynik doświadczenia.

Apoino: Wynik był niespodziewany i zadziwiający: gdyż skoro tylko odemknięto otwór i woda zaczęła wypływać, wtedy waga przechylać się zaczęła na drugą stronę, a gdy woda uderzyła o dno dolnego kubła, ustawało obniżanie się przeciwwagi, która wolno i równomiernie się podnosiła, dopóki woda ciekła i wróciła do położenia równowagi, nie odchylając się ani na włos i pozostając w niem dalej bez zmiany.

Sagredo: Wynik ten jest istotnie niespodziewany, lecz chociaż wprost przeciwny temu, jakiegośmy się spodziewali i który byłby nam pozwolił zmierzyć siłę uderzenia, to jednak możliwem mi się wydaje objaśnienie znacznej części zjawiska, gdy powiem, że siła i moment uderzenia jest równy momentowi i ciężarowi tej ilości wody spadającej, która znajduje się zawieszona w powietrzu między wodami dwóch kubłów, górnego i dolnego, a ta ilość wody nie ciąży ani na górny ani dolny kubel; na górny dlatego, że cząstki wody nie przylegają mocno do siebie i dolne nie mogą pociągać górnych, jakby to było w przypadku np. masy kleistej jak żywica lub smoła; na dolny zaś dla tego, że przy ciągłym ruchu

przyspieszonym wody spadającej, cząstki górne nie mogą wywierać żadnego ciśnienia na niżej położone, skąd wynika, że cała woda zawarta w żyle tak się zachowuje, jak gdyby jej wcale nie było na wadze. Okazuje się to jeszcze wyraźniej dlatego, że gdyby ta woda wywierała swe ciężenie na kubły, to musiałyby się one przy nastąpieniu uderzenia mocno obniżać, podnosząc przeciwwagę, czego nie zauważono. Ten pogląd poparty jest tem jeszcze, że wyobraziwszy sobie całą wodę nagle zamarzającą, mielibyśmy żyłę zamarzniętą, któraby ciążyła na równi z całym urządzeniem, a z zaprzestaniem ruchu, ustawałoby uderzenie.

A proino: Słowa Waszmości odpowiadają ściśle pogładowi, jaki wyraziliśmy zaraz po wykonaniu doświadczenia i wydał się nam możliwym wniosek, że działanie samej prędkości nabytej spadkiem tej ilości wody z wysokości dwóch łokci, wywołuje bez ciężaru wody ten sam skutek co ciężar wody bez impetu uderzenia tak, że gdyby można było zmierzyć i zważyć ilość wody zawartą w powietrzu między kublami, możnaby ściśle wykazać, że uderzenie wywołać może ciężąc takie działanie, jak ciężar 10 do 12 funtów wody spadającej.

Salviati: Podoba mi się bardzo dowcipny wynalazek i zdaje mi się, że nie występując przeciwko waszemu pogładowi, w którym trudność zmierzenia ilości spadającej wody wytwarza pewną niejasność, moglibyśmy jednak otworzyć drogę do głębszego zbadania rozważanej kwestji przez inne podobne doświadczenie. Wyobraźmy sobie np. jeden z tych wielkich ciężarów, które przy wbijaniu pali w ziemię spuszczone są z pewnej wysokości na te pale (zdaje mi się, że nazywane są babami) i niech będzie np. ciężar jednej takiej baby 100 funtów, wysokość spadku cztery łokcie, a zagłębienie pala w ziemię po jednym uderzeniu 4 cale i przypuśćmy, że toż samo zagłębienie 4 cali następuje bez uderzenia a tylko przez obciążenie ciężarem tysiąca funtów, który działa wyłącznie swoją ciężkością bez uprzedniego ruchu i nazywa się ciężarem martwym (peso morto), pytam się tedy, czy możemy, nie myląc się i nie łudząc, utrzymywać, że siła i energia ciężaru 100 funtów, łącznie z osiągniętą przy czterolokciowym spadku prędkością, jest równoznaczna z ciężarem martwym tysiąca funtów; tak, że działanie samej prędkości znaczy tyle co ciśnienie dziewięciuset funtów ciężaru martwego, bo tyle zostaje po odjęciu od tysiąca funtów stu funtów baby. Widzę, że obaj ociągacie się z odpowiedzią, bo może pytanie moje nie było jasno postawione; powiem zatem krótko, czy może-

my twierdzić, na podstawie opisanego doświadczenia, że obciążenie ciężarem martwym wywierać będzie zawsze na opór toż samo działanie co i baba stofuntowa, spadająca z wysokości czterech łokci, tak, że (aby się jaśniej wyrazić), jeżeli taż sama kula, spadając z tej samej wysokości lecz na pal więcej oporny, takowy zagłębia na dwa cale tylko, to ciężar martwy tysiąca funtów wyrze toż samo działanie i również na dwa cale pal zagłębi.

Aproino: Nie sądzę, aby ktokolwiek tego nie przyznał przy najmniej na pierwsze wejrzenie.

Salviati: A pan, panie Sagredo, czy ma pan jaką wątpliwość?

Sagredo: Teraz jej istotnie nie mam, wszakże doświadczywszy nieraz, jak łatwo jest zbłądzić, nie jestem tak śmiałym, abym się całkowicie pozbył obawy.

Salviati: Skoro Waszmoście, których przenikliwość dała się poznać w tysiącach przypadków, skłaniam się do podzielenia mylnego poglądu, to przyznać muszę, że znajdzie się zaledwie jeden lub dwóch na tysiąc, którzyby w tym błędzie tak podobnym do prawdy nie wytrwali. Lecz co jeszcze więcej nas zadziwi, to gdy ujrzycie błąd jakby zakryty tak subtelną zasłoną, że najłżejszy podmuch może ją podnieść i usunąć i błąd przestanie być zasłonięty i ukryty. Dajmy więc babie tak spadać, aby zagłębiała pal na cztery cale i niech będzie do tego potrzeba tysiąca funtów ciężaru martwego, następnie podnieśmy jeszcze raz babę na tę samą wysokość i niech ona, spadając powtórnie, wbije pal w ziemię tylko na dwa cale, trafiając na grunt twardszy, to czyż możemy utrzymywać, że na tyleż zagłębi pal położenie nań tysiąca funtów martwego ciężaru.

Aproino: Zdaje mi się, że tak.

Sagredo; Niestety, panie Pawle, musimy stanowczo odpowiedzieć, że nie; bo, jeżeli przy pierwszym obciążeniu ciężarem martwym tysiąca funtów pal zagłębia się na cztery cale a nie na więcej, to dlaczego chcecie, aby przez proste zdjęcie i ponowne położenie, pal zagłębiał się znów na dwa cale? Dlaczegoż to zagłębianie nie następuje przed odjęciem ciężaru? Chcecie więc, aby samo odjęcie i powtórne położenie sprawiło to, czego przedtem nie można było dokonać?

Aproino: Nie mogę się nie zarumienić i przyznaję, że byłem w niebezpieczeństwie zatonięcia w szklance wody.

Salviati: Niech to pana nie przeraża, panie Aproino, gdyż

zapewniam pana, że miałeś wielu towarzyszków w tej niemożności rozwiązania lekko zaciągniętego węzła i niewątpliwie każdy błąd mógłby być sam przez się łatwo odkryty, gdyby inne starannie rozwijano i wykazywano ich podstawy, po których usunięciu każdy krok fałszywy mógłby być zaraz rozpoznany. Sprowadzanie w ten sposób krótkimi słowy, do absurdu i namacalnej niemożności, wniosków fałszywych, przez świat cały uznawanych za prawdę, było specjalnym talentem naszego akademika. Ja zaś mam zbiór bardzo wielu rozpowszechnionych i za prawdziwe poczytywanych wniosków, a które krótkimi słowy wykazać można jako myłne.

S a g r e d o: I tu właśnie przedstawia się znów jeden taki przypadek, a skoro inne są do niego podobne, zechce je nam pan zakomunikować przy sposobności, ale tymczasem wróćmy do naszej kwestji. A ponieważ szukamy sposobu (jeżeli taki istnieje) regulowania i mierzenia siły uderzenia, to, jak mi się zdaje, nie znajdziemy tego na podstawie opisanego doświadczenia. Bo przy powtarzaniu uderzenia baby na pal i każdorazowem obserwowaniu nowego obniżania się pala, jasnem się staje, że każde uderzenie wytwarza pracę (*ciasheduno de' conseguenti colpi lavora*); co nie przytrafia się przy ciężarze martwym, gdyż ten w podobny sposób nie powtarza swego działania przy następnych obciążaniach nim pala. Przeciwnie, widzimy wyraźnie, że za drugim razem potrzeba ciężaru martwego większego od tysiąca funtów, a gdyby chodziło o otrzymanie takiego działania, jakie wywiera trzecie, czwarte i piąte uderzenie, to ciężary martwe winnyby być coraz większe; któryż więc z tych ciężarów przyjąć mamy za ścisłą i pewną miarę siły uderzenia, skoro ta ostatnia wciąż jest jedna i taż sama.

Salviati: To jest właśnie pierwsza rzecz zadziwiająca, przed którą umysły badawcze stają pomieszane i niezdecydowane. I istotnie komuż nie przyjdzie na myśl, że miary uderzenia szukać należy nie w ciele uderzającym, ale raczej w tem, które otrzymuje uderzenie. A o ile się zdaje, wnioskowaćby można z opisanego doświadczenia, o nieskończonej albo raczej nieoznaczonej i nie możliwej do oznaczenia sile uderzenia, raz mniejszej, raz większej, stosownie do tego, czy działa na większy lub mniejszy opór.

S a g r e d o: Zaczynam pojmować, że istotnie siła uderzenia może być olbrzymią i nieskończenie wielką; jeżeli bowiem wedle opisanego doświadczenia, pierwsze uderzenie zagłębiło pal na cztery cale, drugie na trzy, to trafiając na grunt wciąż twardszy, trzecie uderzenie zagłębi tylko na dwa, czwarte na półtora, a następne na

jeden, pół, ćwierć cala itd. tak, że zdaje mi się, że gdy tylko zwiększająca się twardość gruntu nie doprowadzi do oporu nieskończenie wielkiego, to pal będzie się wciąż zagłębiał, choć coraz na mniejszą długość; wszakże jakkolwiek małym będzie zagłębienie, to jednak będzie ono zawsze podzielnem przy następujących w dalszym ciągu uderzeniach, a zastępujący je ciężar martwy musiałby wciąż rosnać i dla wyrównania siły ostatniego uderzenia musiałby być użyty ciężar martwy nieskończenie wielki.

Salviati: Jestem w zupełności pańskiego zdania.

Aproino: Czyż może być opór tak wielki, aby, pozostając stałym, nie ustąpił pod żadnem uderzeniem, choćby bardzo lekkiem?

Salviati: Myślę, że nie, jeżeli ciało uderzane nie jest całkowicie nieruchome, t. j. nie stawia oporu nieskończenie wielkiego.

Sagredo: Zadziwiającemi i rzec można nadzwyczajnemi wydają się te zapewnienia, a że sztuka w tym tylko przypadku przewyższa i przemienia naturę, to na pierwsze wejrzenie okazuje się także w wielu przyrządach mechanicznych, podnoszących największe ciężary działaniem małej siły, jak w drągu, śrubie, wielokrażku i innych: lecz tu, w rozważanym przypadku, gdy mała liczba uderzeń 10-cio lub 12-to funtowego młota, zmiażdżyć może np. kostkę miedzianą, którejby nie złamał i nie zmiażdżył ciężar największego bloku marmuru lub najwyższej wieży, postawiony na młocie, przekracza to, jak mi się zdaje, wszelkie naturalne rozważania, dążące do objaśnienia tego cudu, to też, Mości Salviati, weźcie nie w rękę i wywieźcie nas z tego błędnego labiryntu.

Salviati: Według tego, co powiedziano, zdaje się, że główny węzeł rozwiązywanej kwestji leży w niedostatecznem zrozumieniu okoliczności, że działanie uderzenia, które jest zawsze nieskończone, nie powinno by z konieczności odbywać się w sposób odmienny niż w innych maszynach, w których małemi siłami przewycięża się olbrzymie opory. Nie tracę wszakże nadziei, że zdołam wykazać, iż i ta rzecz w ten sam sposób się odbywa. Starać się będę wyjaśnić jej przebieg, a choć wydaje się on zawikłany, to jednak, przy naszych wątpliwościach i zarzutach, dojdę może do takiego uzupełnienia i wzmocnienia kwestji, że, jeżeli nie rozwiążemy węzła, to przynajmniej łatwiej rozluźnimy. Jasne jest, że siła ciała poruszającego lub opór poruszanego nie stanowi jednej całości, lecz składa się z dwóch czynników, których obu należy zmniejszyć energję; jednym z nich jest ciężar, tak ciała poruszającego, jak i tego, które stawia opór a drugim prędkość, z jaką jedno się po-

rusza a drugie zostaje poruszone. A ponieważ to poruszane ma być wprowadzone w ruch z prędkością poruszającego, czyli tak, aby drogi przebieżone przez oba ciała w czasach równych, były sobie równe, to ciężar ciała poruszającego nie może być mniejszy od ciężaru poruszanego, lecz winien być nieco większy, gdyż przy ścisłej równości tych ciężarów, następowałaby równowaga i spoczynek, jak to widzimy na wadze równoramiennej. Ale gdybyśmy chcieli mniejszym ciężarem podnieść większy, to trzeba tak urządzić mechanizm, aby poruszający ciężar mniejszy przebiegał w tym samym czasie drogę większą od przebieganej przez ciężar większy, czyli aby się poruszał prędzej; uczy nas bowiem rozumowanie i doświadczenie, że np. na przemieszanie, aby ciężarek ruchomy mógł unieść ciężar 10 do 15 razy większy, winien jego punkt zawieszenia przebiegać drogę dziesięć do piętnastu razy większą od przebieganej przez punkt zawieszenia wielkiego ciężaru, czyli, co na jedno wychodzi, ciężar ruchomy ma mieć 10 do 15 razy większą prędkość. Skoro zaś toż samo widzimy we wszystkich innych maszynach, to możemy utrzymywać napewno, że ciężkość i prędkość odpowiadają sobie w tym samym stosunku ale brany odwrotnie. Mówimy więc zwykle, że moment lżejszego ciała jest równy momentowi cięższego, gdy prędkość lżejszego ma się do prędkości cięższego, jak ciężar cięższego do ciężaru lżejszego, przyczem każda najmniejsza przewyżka narusza równowagę i powoduje ruch. To założywszy, powiadam, że nie tylko przy uderzeniu działanie wydaje się nieskończonem dla przezwyciężenia jakkolwiek wielkiego oporu, lecz także objawia się to w każdym innym przyrządzie mechanicznym; czyż więc nie jest jasnem, że bardzo mały ciężar jednego funta podniesie spadając ciężar 100 i 1000 funtów i ile chcemy więcej, jeżeli go zawiesimy na ramieniu wagi, sto albo tysiąc razy dalej od środka, niż jest zawieszony ciężar wielki, czyli jeżeli sprawimy, że jego obniżenie będzie sto albo tysiąc razy większe niż podniesienie wielkiego ciężaru, albo jeszcze, że prędkość małego będzie sto lub tysiąc razy większa od prędkości wielkiego? Ale chciałbym jednym wyrazistszym przykładem przekonać was namacalnie, że spadający jaknajmniejszy ciężar może podnieść ciężar jaknajwiększy. Wyobraźcie sobie, Waszmościowie, taki bardzo wielki ciężar, zawieszony na linie, uwiązanej w miejscu stałym i wyniosłym, a wokoło tego punktu jako środka opisany łuk koła, przechodzący przez środek ciężkości ciężaru, który to środek ciężkości leży jak wiadomo na przedłużeniu liny, albo, mówiąc lepiej, na prostej, ła-

czącej punkt zawieszenia ze wspólnym środkiem wszystkich ciężarów, czyli ze środkiem ziemi. Wyobraźcie sobie następnie jakikolwiek mały ciężarek, zawieszony na cienkiej nitce w ten sposób, że jego środek ciężkości leży na tym samym łuku koła; i przypuście, że ten ciężarek dotyka i opiera się o wielki ciężar, to czyż nie myślicie, że dodany z boku ten nowy ciężar nie popchnie cokolwiek ciężaru większego i nie odsunie jego środka ciężkości od idealnej pionowej, na której się pierwotnie znajdował, niewątpliwie wprawiając go w ruch po wzmiankowanym łuku koła, tak, że zejdzie z linii poziomej stycznej do łuku w jego najniższym punkcie, w którym się znajdował środek ciężkości wielkiej bryły? A ta bryła opisze równie wielki łuk, jak opisany przez mały ciężarek, opierający się na wielkim; ale podniesienie środka ciężkości wielkiego ciężaru nie będzie równe obniżeniu środka ciężkości małego ciężarka, gdyż ten ostatni schodzi wzdłuż drogi więcej nachylonej niż ta, wzdłuż której się odbywa podniesienie tamtego środka ciężkości, postępującego od punktu zetknięcia pod kątem mniejszym od wszelkiego najostrejszego. Gdybym miał o tem mówić z ludźmi mniej obyty mi z geometrją, tobym dowiódł, że, skoro ciało wyrusza z najniższego punktu zetknięcia, to może się zdarzyć, że podniesienie nad poziomą jakiegokolwiek punktu koła poza zetknięciem, będzie w pewnym dowolnym stosunku mniejsze od obniżenia równie wielkiego ciała, uważanego w jakimkolwiek innem miejscu, jeśli tylko nie mieści się tam punkt zetknięcia. Lecz pewien jestem, że nie macie co do tego wątpliwości. A więc, skoro proste oparcie małego ciężarka może poruszyć i podnieść wielki ciężar, to cóż będzie wtedy, gdy mały ciężarek odchylimy i spuścimy po łuku, tak aby uderzył o wielki.

A p r o i n o: Istotnie, nie zdaje mi się, aby pozostawała jaka wątpliwość co do tego, że siła uderzenia może być nieskończenie wielką, jak opisane doświadczenie poucza; wszakże wiadomość ta mi nie wystarcza, aby rozjaśnić liczne ciemne mgły, otaczające mój umysł, także nie rozeznaję, jak się odbywa działanie uderzenia i nie mogę odpierać wciąż się nasuwających wątpliwości.

S a l v i a t i: Ale, zanim pójdziemy dalej, pragnąłbym usunąć jeszcze jedną dwuznaczność, czyhającą na nas w ukryciu i sprawiającą, że uważamy wszystkie uderzenia przy wbijaniu pala jako równe, bo dokonane spadkiem tej samej baby z tej samej wysokości, co nie jest prawdziwe. Aby to zrozumieć, wyobraźmy sobie, że chcemy złapać ręką kulę, spadającą z wysokości i powiedzcie, czy, jeżeli

będziecie opuszczać rękę podczas spadania kuli, w kierunku jej ruchu i z tą samą prędkością, poczućcie jakie uderzenie? z pewnością nie poczućcie żadnego. Ale, jeżeli choć o włos się opóźnicie, opuszczając rękę z prędkością mniejszą od prędkości kuli, wtedy otrzymacie uderzenie, lecz nie odpowiadające pełnej prędkości kuli, a tylko przewyższe tej prędkości nad prędkością opuszczania ręki, tak, że gdyby kula spadała z dziesięcioma stopniami prędkości a ręka opuszczała się z ośmioma, to uderzenie byłoby jakby dokonane z dwoma stopniami prędkości kuli, a przy opuszczaniu się ręki z czterema, uderzenie byłoby z sześcioma, a gdyby się opuszczała z jednym, uderzenie byłoby jakby z dziewięcioma, a całkowite uderzenie z dziesięcioma stopniami prędkości nastąpiłoby przy zupełnem nieopuszczaniu się ręki. Jeżeli zastosujemy te wywody do bicia pali, to ponieważ przy pierwszym uderzeniu pał zagłębia się na cztery cale, przy drugim na dwa, a przy trzecim tylko na jeden cal, pod impetem baby, przeto uderzenia nie są równe i pierwsze jest słabsze od drugiego, a drugie od trzeciego, wskutek tego, że zagłębienie czterocalowe ujmuje więcej prędkości przy pierwszym uderzeniu niż przy drugim, a to znów jest słabsze od trzeciego, gdyż przy drugim odchodzi od tej samej prędkości dwa razy tyle niż przy trzecim. Skoro więc większe zagłębienie pała przy pierwszym uderzeniu, mniejsze przy drugim a jeszcze mniejsze przy trzecim, sprawia, że pierwsze uderzenie jest słabsze od drugiego, a drugie od trzeciego, to coś dziwnego, że pierwszemu uderzeniu odpowiada mniejszy ciężar martwy, dający zagłębienie czterocalowe, i że potrzeba większego ciężaru martwego dla zagłębienia pała na następne dwa cale, a jeszcze większego odpowiadającego trzeciemu uderzeniu baby itd., tem większego ciężaru martwego im mniejsze są zagłębienia pała, t. j. im więcej wzrasta opór. Z tego, co powiedziałem, zdaje mi się, że łatwo można wnosić, jak trudne jest oznaczenie siły uderzenia na ciało stawiające opór? którego ustępowanie jest tak zmienne, jak obniżanie się pała, który nieoznaczenie staje się coraz oporniejszym; to też uważam za wskazane zastanowić się nad takimi przypadkami, w których uderzeniu przeciwstawia się zawsze ten sam opór. W celu urządzenia takiego oporu, wyobraźmy sobie ciało stałe, wążące np. tysiąc funtów, położone na płaszczyźnie; do ciała tego niech będzie mocno przywiązana lina, przewinięta przez krążek umocowany na odpowiedniej wysokości ponad ciałem. Jest rzeczą oczywistą, że siła, przyłożona do drugiego końca liny, przewyciężać będzie przy podno-

szeniu ciężaru zawsze ten sam opór, czyli będzie stanowić przeciwagę tysiąca funtów i jeżeli na drugim końcu liny zawiesimy ciało tegoż samego ciężaru, to nastąpi równowaga i oba zawieszone ciężary pozostawać będą w spokoju, dopóki po jednej stronie nie zostanie dołączona jaka przewyżka ciężaru. A skoro pierwsze ciało leży na płaszczyźnie, która je podtrzymuje, to można będzie na drugim końcu liny zawieszać różne ciężary (ale każdy mniejszy od ciężaru, pozostającego w spoczynku), a te, spadając z pewnej wysokości, wymierzać będą różne uderzenia i można będzie obserwować, jak się zachowywać będzie drugie wielkie ciało, leżące na płaszczyźnie, gdy będzie wstrząsane uderzeniami, usiłującami je podnieść. Zdaje mi się, że przedewszystkiem spostrzeżemy, że każdy choćby najmniejszy ciężar spadający, przemoże i podniesie ciężar wielki, jak to wywnioskować winniśmy z nabytej pewności, że każdy mały ciężar przemoże inny bardzo wielki, byleby tylko jego prędkość była o tyle większą od prędkości wielkiego ciężaru, o ile ten ostatni jest większy od ciężaru małego: ale właśnie w danym przypadku prędkość ciała spadającego jest nieskończenie wiele większa, bo przyjęliśmy, że drugie ciało jest w spoczynku, a znów ciężar ciała spadającego nie jest równy zeru w porównaniu z drugim, bo ani to drugie nie jest nieskończenie wielkie ani ciało spadające nie jest zerem: konieczne więc siłą uderzenia przewyższy opór ciała, na które działa. Zbadać trzeba teraz, jak wysoko podniesione zostanie ciało uderzone i czy znaleziona zostanie zgodność z zasadami innych przyrządów mechanicznych; jak np. widzimy na wadze rzymskiej, że podniesienie ważonego ciężaru tak się ma do obniżenia ciężarku ruchomego, jak ciężar ostatniego do ciężaru ważonego. Zbadać trzeba także w rozważanym przypadku, czy, jeżeli ciężar ciała w spoczynku będzie tysiąc razy większy od ciężaru ciała spadającego z wysokości np. jednego łokcia, to ciało w spoczynku podniesione zostanie na setną część łokcia, jak to zdaje się wynikać z zasady innych przyrządów mechanicznych. Wyobraźmy sobie, że robimy pierwsze doświadczenie, spuszczać z wysokości, powiedzmy, jednego łokcia ciężar równy zawieszonemu, a że przyjęliśmy równość ciężarów przywiązanych do obu końców liny, to cóż się stanie z ciężarem w spoczynku, gdy nim wstrząśnie uderzenie? Pragnąłbym poznać wasze zdanie.

Aproino: Skoro Waszmość zwraca się do mnie, oczekując odpowiedzi, to zdaje mi się, że ponieważ oba ciała mają równy ciężar a ciało spadające ma nadto impet prędkości, więc drugie

winno dosyć się podnieść ponad równowagę; bo dla równowagi wystarcza tylko sam ciężar; sądziłbym więc, że podniesienie będzie tu większe od jednego łokcia, który jest miarą obniżenia ciała spadającego.

Salviati: A co Waszmość powie, panie Sagredo?

Sagredo: Na pierwsze wejrzenie sąd wygłoszony wydaje mi się uzasadnionym, ale, jak co dopiero powiedziałem, przekonaly mnie liczne doświadczenia, że łatwo można się mylić i dla tego koniecznem jest zbadać najprzód rzecz gruntownie, zanim się wyda sąd stanowczy. Powiem więc (zastrzegając, że mogę się mylić), że sto funtów spadającego ciężaru wystarczy, aby drugie sto funtów podnieść do równowagi, bez udzielenia tymże innej jakiej prędkości do czego dosłoby było półluncjowej przewyżki, ale zauważyć należy, że to zrównoważenie następuje zwolna (*con gran tardita*); jeżeli więc ciało spadające przybywa z wielką prędkością, to z taką samą drugie ciało zostanie podniesione; zdaje mi się zaś niewątpliwem, że z większą siłą wyrzucone być winno ciało spadające z wielką prędkością, aniżeli spadające powolnie; może się więc zdarzyć, że przewyżka prędkości, osiągnięta przez ciało spadające swobodnie z wysokości jednego łokcia, zostanie zużyta i, że tak powiem, wygaśnie przy podnoszeniu drugiego ciężaru z taką samą prędkością i na tę samą wysokość; to też nie byłbym dalekim od wnioskowania, że oba te ruchy, nadół i do góry, ustają natychmiast po podniesieniu drugiego ciała na wysokość jednego łokcia, podczas gdy pierwsze opada na dwa łokcie, bo jeden łokieć był samego wolnego spadku.

Salviati: Skłaniam się istotnie do tego poglądu, bo jakkolwiek ciało spadające jest połączeniem ciężaru z prędkością, to znów przy podnoszeniu niema żadnego działania ciężkości, gdyż przeciwstawia się i opiera ciężar drugiego ciała i oczywiście pierwsze nie mogłoby się ruszyć bez dodania do drugiego jakiego małego ciężaru; działanie więc, przez które ciężar spadający ma podnosić drugi ciężar jest wyłącznie działaniem prędkości i tylko prędkość może je wywoływać; a ponieważ nie może być udzielona inna prędkość, jak tylko osiągnięta przez spadek ciała z wysokości jednego łokcia po wyjściu ze spoczynku, to drugie ciało podniesie się na tę samą wysokość i z tą samą prędkością, zgodnie z tem, co zauważono przy wielu doświadczeniach, mianowicie, że wychodzące ze spoczynku i spadające ciało, posiada w każdym miejscu prędkość wystarczającą do podniesienia go napowrót równie wysoko.

Sagredo; W ten sposób, jak przypominam sobie, odbywa się ruch ciężarka zawieszonego na nici; gdy odchylimy ciężarek od pionowej o dowolny łuk, mniejszy od ćwierci koła i puścimy aby spadał swobodnie, to przeleci przez pionową i podniesie się wzdłuż takiego samego łuku, jaki był łuk spadku; oczywiście więc podniesienie jest wynikiem prędkości nabytej przy spadku; albowiem przy podnoszeniu się ciała ciężar jego nie może brać żadnego udziału, a tylko przeciwdziała ruchowi, pochłaniając tę prędkość jakiej ciała udzielił spadek.

Salviati: Gdyby przykład wahadła, o którym poprzednio była mowa, nadawał się w zupełności do rozważanego przypadku, rozumowanie Waszmości byłoby bardzo przekonujące, znajduję wszakże niemalą różnicę między dwoma działaniami, t. j. tem, gdy ciało zawieszone na nici nabywa pewnego impetu przy spadaniu po łuku koła z pewnej wysokości i impet ten wystarcza, aby to ciało podnieść znów na tę samą wysokość a drugim działaniem, gdy ciało spadające przywiązane jest do jednego końca liny w celu podnoszenia drugiego ciała, mającego ten sam ciężar; bo ciało spadające po łuku biegnie aż do pionowej ruchem przyspieszonym, dzięki własnemu ciężarowi, który następnie po przejściu pionowej przeszkadza podnoszeniu się ciała (gdyż ruch skierowany jest przeciw ciężkości) tak, że dla impetu nabytego przy spadku naturalnym niema najmniejszego odszkodowania przy ruchu przeciwnaturalnym pod górę. Ale w drugim przypadku ciało spadające wpada na równe mu ciężarem a leżące w spoczynku ciało, nietylko z prędkością nabytą, lecz jeszcze ze swoim ciężarem, który, utrzymując się, sam przez się znosi wszelki opór przeciw podnoszeniu się drugiego ciała, przez to, że osiągnięta prędkość nie doznaje sprzeciwu ciała, działającego przeciw podniesieniu; tak, że impet, udzielony ciału ku dołowi, nie znajduje w niem żadnej przyczyny zniknięcia albo zmniejszenia się i niema jej także w podnoszącem się ciele, które zostaje bez ciężaru, równowazonym będąc przez ciało spadające. I tu właśnie, jak mi się zdaje, następuje ściśle to, co się zdarza z ciałem ciężkiem i doskonale okrągłym, położonem na zupełnie gładkiej, nieco nachylonej płaszczyźnie, które spadać będzie samo przez się, nabywając coraz to większej prędkości; ale gdybyśmy chcieli je podnosić w przeciwnym kierunku, musielibyśmy nadać ciału impet, zmniejszający się wciąż a w końcu zupełnie znikający; gdyby zaś płaszczyzna nie była nachyloną, lecz poziomą, to znajdujące się na niej ciało zachowywać się będzie dowolnie,

t. j. jeżeli je zostawimy w spokoju, to pozostanie nieruchome, a jeżeli nadamy mu impet w pewnym kierunku, to w tym kierunku będzie się poruszało, zachowując swoją prędkość, bo ta nie może się ani powiększać ani zmniejszać, gdyż płaszczyzna pozioma nie dopuszcza ani podniesienia ani obniżenia; i w podobny sposób, jeżeli dwa równe ciężary zawieszono są na dwóch końcach liny, ustawione w równowadze i pozostające w spokoju, a jednemu z nich udzielimy impetu nadół, to ten impet utrzyma się bez zmiany. I tu wypada zaznaczyć, że wszystko to następuje, jeżeli usunięte zostaną wszystkie przeszkody zewnętrzne, jak sztywność i ciężar liny, krążków, tarcie ich osi i inne, jakie mogą się zdarzyć; ale ponieważ brana jest pod uwagę prędkość, którą nabywa jeden z dwóch ciężarów przy spadku z pewnej wysokości, podczas gdy drugi ciężar pozostaje w spoczynku, można więc oznaczyć, jaka będzie prędkość, z którą oba ciężary będą się poruszały przy spadku jednego z nich, podczas gdy tenże dalej spada a drugi się podnosi. Wiemy już z tego, co dotąd wywiedziono, że ciało wychodzące ze spoczynku i spadające swobodnie, nabywa wciąż coraz większej prędkości, tak, że w naszym przypadku najwyższy stopień prędkości osiągnięty zostaje, gdy ciężar swobodnie spadający podnosić zaczyna ciężar będący w spoczynku i oczywistym jest, że ten stopień prędkości dalej się nie powiększa, gdyż wszelka przyczyna powiększenia została usunięta, mianowicie ciężar własny ciała spadającego, który więcej nie działa, bo odjęty został ciałał popęd do spadania przez opór jaki stawia do podnoszenia się związane z niem drugie ciało. Utrzymuje się więc dalej ten najwyższy stopień prędkości i ruch przyspieszony zamienia się na jednostajny; a jaka będzie ta prędkość, to wynika z rozważań poprzednich dni, mianowicie będzie ona taka, iż w czasie równym czasowi spadku ciało przebiegnie drogę dwa razy dłuższą.

S a g r e d o: A więc p. Aproino rozumował lepiej i jestem zresztą bardzo zadowolony z tego, co powiedział Waszmość i przyjmuję za prawdziwe wszystko, co było powiedziane: ale jeszcze nie zaszedłem tak daleko, abym się pozbył niezwykłego podziwu, jaki wzbudza we mnie możność przewycięzania przez uderzenie każdego największego oporu, nawet i wtedy, gdy ciało uderzające jest małe i jego prędkość ograniczona, a co powiększa znacznie mój podziw, to twierdzenie Wasze, że niema tak wielkiego oporu (chybaby był nieskończenie wielki), któryby mógł wytrzymać uderzenie nie ustępując; i dalej, że nie można jakim sposobem oznaczyć

dokładnej miary takiego uderzenia i życzeniem naszym byłoby przeto, aby Waszmość pomogła rozjaśnić te ciemności.

Salviati: Ponieważ nie można dowodzić podania, bez ścisłych danych, a my chcemy rozważać siłę ciała uderzającego i opór uderzanego, wziąć przeto musimy pod uwagę ciało uderzające z niezmienną zawsze siłą, a takim będzie ciało spadające zawsze z jednakiej wysokości; przyjmiemy również, że ciało uderzane stawia zawsze ten sam opór. Aby to osiągnąć, przyjmuję (w naszym przykładzie dwóch równych ciężarów zawieszanych na końcach liny), że ciało uderzające, które spada jest małe, a drugie ciało tyle razy większe ile się podoba i, że przy podnoszeniu tego drugiego działać będzie impet ciała spadającego; opór większego ciała będzie oczywiście stale i we wszystkich miejscach jeden i ten sam, co się nie przytrafia przy gwoździu, lub palu, gdzie opór stale wzrasta i zmienia się w nieznanym zupełnie stosunku, zależnie od twardości drzewa, gruntu itd., chociaż gwóźdź i pal pozostają zawsze też same. Przypomnieć trzeba nadto niektóre twierdzenia, o których była mowa w dniach ubiegłych, w traktacie o ruchu; a zwłaszcza najprzód, że ciała spadające z wyższego punktu aż do poziomu, osiągają zawsze tę samą prędkość, niezależnie od tego, czy spadają pionowo, czy też wzdłuż jakiegokolwiek równi pochyłej tak, że np. (tab. V, rys. 145) jeżeli AB jest płaszczyzną poziomą, na którą z C schodzi pionowa CB i z tegoż C różne pochyłe CA, CD, CE, to wszystkie ciała spadające wzdłuż tych linii z punktu C osiągnąć będą przy dojściu do poziomej jednaki stopień prędkości. Następnie przypomnieć należy, że impet osiągnięty w A przez ciało spadające z punktu C, będzie prawie ściśle wystarczający do podniesienia w górę tego ciała, lub innego tyleż ważącego do tej samej wysokości; skąd wnosić można, że jednakiej potrzeba siły do podniesienia ciała, od poziomu do C, z któregokolwiek z punktów A, D, E lub B. Po trzecie przypomnijmy sobie, że czasy spadku po wymienionych równiach są proporcjonalne do ich długości; tak, że jeżeli np. AC jest dwa razy dłuższe od CE a cztery razy dłuższe od CB, to czas spadku po CA będzie dwa razy większy niż po CE a cztery razy niż po CB. Przypomnijmy sobie wreszcie, że, aby toż samo ciało podciągać wzdłuż różnych równi, to zawsze tem mniejszych trzeba sił, im więcej pochylone są równie, gdyż one w miarę tego są dłuższe. Przyjmując to wszystko (tab. V, rys. 146), weźmy równię AC i przypuśćmy, że długość jej jest np. dziesięć razy większa od wysokości CB i niech będzie położone na AC ciało S,

ważące sto funtów: oczywiście jest, że skoro do tego ciała przywiązany zostanie sznur, przewinięty przez krążek umieszczony ponad punktem C i na drugim końcu sznura zawieszony ciężar dziesięciu funtów, którym niech będzie P, to każdy najmniejszy dodatek siły podniesie ciało S wzdłuż płaszczyzny AC. Zaznaczyć trzeba, że jakkolwiek drogi przebieżone przez oba ciała będą równe (o czym mógłby kto wątpić, na podstawie ogólnej zasady wszystkich mechanizmów, według której mała siła przewycięża wielki opór wtedy tylko, gdy ruch przez nią wywołany jest większy od ruchu oporu w stosunku odwrotnym do wielkości siły i oporu), to w tym przypadku obniżenie małego ciężaru wzdłuż pionowej porównane być winno z podniesieniem pionowem wielkiego ciała S, t. j. po kierunku prostopadłej BC.

Po długiem rozważaniu tej sprawy doszedłem do postawienia następującej konkluzji, która będzie objaśniona i dowiedziona.

Podanie. Jeżeli działanie uderzenia tegoż samego ciężaru, spadającego z tej samej wysokości, wywierane jest na ciało, które na pewnej długości ustępowania stawia wciąż jednaki opór, i jeżeli dla zastąpienia tego działania stosować trzeba oznaczoną ilość ciężaru martwego, który ciśnie nie uderzając, to twierdzę, że skoro ten sam ciężar uderzający pada na inne ciało, które stawia większy opór i popchnięte zostaje np. na połowę tej długości, co poprzednie, do skutecznienia tego popchnięcia w drugim przypadku użyć trzeba dwa razy większego ciężaru martwego i tak samo przy innych stosunkach, im wywołane uderzeniem popchnięcie będzie krótsze, tem większego potrzeba naciskającego ciężaru martwego. Mowa tu o oporze, jaki mamy przy biciu pali, a więc takim, który pokonany być może ciężarem martwym nie mniejszym od stu funtów, a ciężar uderzający wynosi tylko dziewięć funtów i spadając z wysokości czterech łokci, popycha pal tylko na cztery cale. Tu najprzód oczywiście jest, że ciężar dziesięciu funtów, spadający pionowo, wystarczy do podniesienia stu funtów, wzdłuż równi dziesięć razy dłuższej od swej wysokości; a dla pionowego podniesienia dziesięciu funtów potrzeba tyleż siły co i dla podciągania stu funtów wzdłuż równi, której długość jest dziesięć razy większa od jej wysokości; gdy więc impet, nabyty przy spadku pionowym ciężaru z pewnej wysokości, użyty zostanie do podnoszenia innego takiegoż ciężaru, to podniesie ten ciężar na tę samą wysokość: lecz równym oporowi spadających pionowo dziesięciu funtów jest opór stu funtów podnoszonych wzdłuż równi dziesięć razy dłuższej od

swej wysokości; impet zatem nabyty przez ciężar dziesięciofuntowy, przy spadku prostopadłym z pewnej wysokości, nadany ciężarowi stu funtów, podciągnie ten ciężar wzdłuż równi pochyłej na długość, odpowiadającą wysokości równej dziesiątej części tej długości. Wyżej już dowiedziono, że siła, wystarczająca do podciągania ciężaru wzdłuż równi pochyłej, wystarczy do podniesienia pionowo tego ciężaru na wysokość odpowiadającą wzniesieniu tej równi, która to wysokość w rozważanym przypadku wynosi dziesiątą część długości równi, to jest tyle, ile wynosi wysokość spadku dziesięciu funtów; jest więc oczywiście, że spadek pionowy ciężaru dziesięciu funtów wystarczy do podniesienia pionowo stu funtów, ale tylko na dziesiątą część wysokości spadku dziesięciu funtów; siła zaś, która może podnieść sto funtów, równa się sile, pociągającej sto funtów ku dołowi, a ta była w stanie pogłębić pal swym naciskiem, Zrozumiałem więc jest, że spadek 20 f. pokonać może opór równy temu, jaki stawia ciężar stu funtów, gdy się ten ciężar podnosi do góry, ale to podniesienie wyniesie tylko dziesiątą część wysokości spadku ciała uderzającego. A gdybyśmy mogli podwoić lub potroić opór pala, tak, że dla pokonania tego oporu potrzebaby ciśnienia dwustu lub trzystu funtów ciężaru martwego, to, powtarzając podobne rozumowanie, znaleźlibyśmy, że impet spadających pionowo dziesięciu funtów pogłębi pal tak przy pierwszym jak i przy drugim i trzecim uderzeniu, przy pierwszym na dziesiątą, drugim na dwunastą, a trzecim na trzydziestą część swego spadku. A powiększając opór nieograniczenie, pokonywać go można zawsze tem samem uderzeniem lecz przy wciąż zmniejszających się pogłębieniach, tak, że utrzymywać można z całą słusnością, że siła uderzenia jest nieskończoną; z drugiej znów strony można także pod innym względem siłę naciskającą bez uderzenia uważać jako nieskończoną (infinita); bo gdy pokonywa ona opór pala, to pogłębia takowy nie tylko na tę głębokość, na jaką pogłębiony został przez uderzenie, lecz pogłębiać będzie dalej do nieskończoności (in infinito).

Sagredo: Widzę wyraźnie, że Waszmość podąża do zbadania istotnej podstawy rozbieranego zadania; lecz ponieważ w różny sposób przedstawia się uderzenie i stosowane jest do różnych rodzajów oporu, sądzę że potrzebnem byłoby objaśnienie niektórych przynajmniej, tych zaś gruntowne zrozumienie doprowadziłoby do przyjęcia wszystkich innych.

Salviati: Waszmość ma zupełną słusność i zaraz gotów je-

stem przedstawić niektóre przypadki. W jednym z nich, przytrafiającym się często, działanie, objawia się nie w ciele uderzonym, lecz w uderzającym, gdy mocne kowadło uderzone zostanie ołowianym młotem, to działanie uwidoczni się w młocie, który się spłaszczy a nie w kowadle, które się nie obniży. Podobne jest działanie młotka kamieniarskiego, który nie zahartowany a przez to miękki, długo uderzając w stalowe twarde zahartowane dłóto, nie miażdży tego dłóta, lecz sam się wydraża i niszczy. Innym znów razem odbite zostaje w inny sposób działanie ciała uderzającego, jak się to widzi nieraz, gdy się wbija gwoźdź w bardzo twarde drzewo i młotek odskakuje, nie wbijając wcale gwoździa, a w tym przypadku mówimy, że uderzenie nie podziało. Nie różni się od tego odskok, jaki ma miejsce przy rzucaniu na twardą podłogę wydętego balonika i wielkiego innego ciała z tego rodzaju materiału, że się ugina przy uderzeniu, lecz następnie, jakby się zasklepiając, wraca do swego pierwotnego kształtu, a odskok taki następuje, nie tylko, gdy ciało uderzające ugina się a potem wraca do swego kształtu, ale i gdy ciało uderzane tak się zachowuje, i w ten sposób pałka, jakkolwiek zrobiona z twardego i nie uginającego się drzewa, odskakuje od naciągniętej błony bębna. Czasem widzi się także zadziwiające zjawisko, jak do działania uderzenia przylacza się ciśnienie i powstaje mieszanina obu działań; a widzimy to w prasach do sukna lub do oleju itp., gdzie przez proste ciśnienie czterech lub sześciu ludzi opuszcza się śruba, a gdy ci cofną drąg o jeden krok w tył i potem szybko go popchną, to tak zacisną śrubę, że ta siła czterech lub sześciu ludzi sprawia przez uderzenie to, czego zaledwie dwunastu lub dwudziestu ludzi dokonaćby mogło samem ciśnieniem; dlatego też drąg musi być mocny, z bardzo twardego drzewa, tak aby się ugiął bardzo mało lub nie ugiął wcale, gdyż gdyby to następowało, to uderzenie zużyteby zostało na wygięcie.

Każde ciało, mające być raptownie poruszonym, stawia dwojakiego rodzaju opór: jeden opór jest wewnętrzny, o którym mówimy, że trudniej jest podnieść ciężar tysiąca funtów aniżeli stu funtów; drugi odnosi się do drogi, po której ruch ma następować, gdyż więcej trzeba siły aby rzucić kamień na sto kroków aniżeli na pięćdziesiąt. Tym dwom różnym oporom odpowiadają proporcjonalnie dwa różne popędy (*due diversi motori*), z których jeden działa cisnąc bez uderzenia, a drugi działa uderzając. Popęd działający bez uderzenia, pokonywa opór nieco mniejszy od swej mocy

t.j. ciężkości cisnącej, lecz wprawia w ruch na nieskończonej przestrzeni (i spazio) zawsze z tą samą siłą; a moment uderzający pokonywa każdy opór, choćby największy, ale na ograniczonym przebiegu (intervallo). Uważam też za prawdziwe oba te twierdzenia, popęd uderzający porusza nieskończony opór na skończonym i ograniczonym przebiegu, a cisnący porusza skończony i ograniczony opór na nieskończonym przebiegu; tak że uderzający jest proporcjonalny do przebiegu a nie do oporu, a cisnący proporcjonalny do oporu a nie do przebiegu. Budzi to we mnie wątpliwość, czy kwestja, podniesiona przez p. Sagredo, może być wyjaśniona, gdyż w tym celu przysłoby porównywać ze sobą rzeczy nie dające się ustosunkować, a za takie uważam działania uderzenia i ciśnienia, jak w szczególnym przypadku jakiegoś niezmiernego oporu (tab. V, rys. 147), gdy klin AB ma być posunięty na ograniczonym przebiegu, między punktami A i B, a ciśnienie ciężaru D pokonać jest w stanie nie każdy opór klina BA, a tylko ograniczony, nie większy od ciężaru D; a i ten opór nie będzie pokonany na ograniczonym przebiegu AB, lecz na nieskończonej odległości, gdyż będzie to wciąż ten sam opór ciała AB, jak to przyjmować należy, bo nic przeciwnego nie było założone.

Moment ciała przy uderzeniu niczem innem nie jest, jak zbiorem i połączeniem nieskończenie wielu momentów, z których każdy jest równy jednemu momentowi wewnętrznemu i naturalnemu własnemu (będącemu momentem własnej absolutnej ciężkości, jaką wiecznie wywiera ciało, położone na jakiegokolwiek podstawie) albo jednemu zewnętrznemu lub gwałtownemu, pochodzącemu od siły poruszającej. Nagromadzają się takie momenty w ciągu trwania ruchu ciała, z równym przyrostem, i utrzymują się w ciele w ten sam sposób, jak się powiększa prędkość ciała spadającego. Jak w nieskończenie wielu chwilach czasu, choćby najkrótszego, przechodzi ciało przez różne coraz nowe stopnie prędkości, zachowując wciąż te, które nabywa w ciągu tego czasu, tak również utrzymują się w ciele i łączą ze sobą takie ruchy naturalne lub gwałtowne udzielone przez naturę lub sztukę.

Siła uderzenia ma moment nieskończony, w każdym przypadku gdy od ciała uderzającego przechodzi na uderzone, które się nie ugina, jak to zaraz zostanie dowiedzione.

Ugięcie ciała, uderzonego przez inne, poruszające się z jakąkolwiek prędkością, nie może nastąpić w jednej chwili, gdyż dałoby to ruch momentalny, który jak dowiedziono, jest niemożliwy.

Skoro więc to uginanie trwa przez czas pewien, w miejscu uderzenia, to w ciągu tego czasu także następuje działanie nabytych momentów ruchu ciała uderzającego, i czas ten wystarcza, aby wyzerpać a w części przytłumić połączenie wymienionych wyżej momentów, które, jeżeliby w jednej chwili czasu działały na opór (co nastąpiłoby w przypadku gdyby z obu ciał, uderzającego i uderzanego, żadne się nie uginało), miałyby o wiele większy wpływ na wywołanie ruchu, niż gdyby działały w pewnym czasie, choćby jak najkrótszym; mówię, większy wpływ, bo ciało uderzające wywiera zawsze pewien wpływ na ciało uderzane, jakkolwiek najmniejsze byłoby uderzenie a największe uginanie; lecz działanie to ujść może uwadze naszych zmysłów, choć istnieje ono rzeczywiście, co dowiedzione zostanie w odpowiednim miejscu: wymyka się ono tylko z pod obserwacji; jeżeli bowiem małym nawet młotkiem uderzać będziemy jednostajnie w koniec leżącej na ziemi jak największej belki, to po bardzo wielu uderzeniach okaże się nareszcie że belka posunęła się na pewną dostrzegalną długość, co widocznym jest znakiem, że każda pojedyncze uderzenie wywierało wpływ oddzielnie na posunięcie belki; bo gdyby pierwsze uderzenie nie miało żadnego takiego skutku, to i wszystkie następne, równe pierwszemu, byłyby również bezskutecznymi, co się nie zgadza z doświadczeniem, świadectwem zmysłów i dowodzeniem.

Siła uderzenia ma moment nieskończony, gdyż niema tak wielkiego oporu, którego by nie mogło pokonać najmniejsze uderzenie.

Kto zamyka brązowe wrota kościoła San Giovanni, napróżno usiłowałby zamknąć je jednym prostym pchnięciem, lecz ciąglem popychaniem nadać może temu wielkiemu ciężarowi taką siłę, że w chwili zatrzaśnięcia i uderzenia o próg, zadrży cały kościół. Widocznem stąd jest, że w ten sposób wprawiać można w ruch najcięższe ciała, gromadząc w nich i powiększając siłę, przez pewien czas udzielaną.

Podobne zjawisko przedstawia wielki dzwon, którego niepodobna wprawić w ruch szybki i gwałtowny jednym pociągnięciem sznura ani czterema lub sześcioma, lecz bardzo wieloma równymi i często powtarzanymi, przyczem ostatnie dołączają siłę do nabytej przez pociągnięcia poprzednie, a im większy i cięższy jest dzwon, to nabędzie tem więcej siły i tem większego impetu, otrzymując je w ciągu dłuższego czasu i przez większą liczbę pociągnięć sznura, niż ich potrzeba dla małego dzwonu; ten ostatni szybko wprawiony

być może w ruch lecz także prędzej się zatrzymuje, nie będąc (że się tak wyrazimy) nasiąknięty taką siłą, jak dzwon wielki.

Podobnie rzecz się ma z okrętami, które przy pierwszym pociągnięciu wiosła lub pierwszym podmuchu wiatru nie puszczają się w ruch gwałtownie, lecz, po ciągłym wiosłowaniu i stałym udzielaniu siły żaglom przez wiatr, otrzymują ogromny impet, który zdolny jest je rozbić, jeżeli uderzą o skały.

Giętki i długi pręt luku, niesie dalej niż sztywny i mniej rozpiętości, bo tamten przez dłuższy czas popycha strzałę i wciąż udziela jej siły, podczas gdy ten ostatni wnet się z nią rozstaje.

SPIS RZECZY

DZIEŃ PIERWSZY

	Str.
Proporcjonalność wielkości i wytrzymałości budowli i maszyn .	9
Moc i wytrzymałość belki drewnianej, jednym końcem wpuszczonej w mur	11
Olbrzymy w świecie roślinnym i zwierzęcym	—
Ciekawy wypadek pęknięcia kolumny marmurowej	12
Przyczyny spójności cząstek materiału	13
Tarcie włókien jednych o drugie	14
Wytrzymałość lin	14
Przyrząd do spuszczenia się po linie na rękach bez uszkodzenia dłoni	16
Przyleganie gładkich tafli objaśniane wstętem natury do próżni .	16
Próżnia nie wystarcza do objaśnienia spójności	17
Pomiar siły próżni	19
Wysokość podnoszenia wody ze studzien	20
Wytrzymałość drutu miedzianego na rozciąganie	21
Próba objaśnienia spójności nieskończenie małymi próżniami .	22
Kurczenie się liny zmoczonej	23
Toczenie wieloboków i kół spółśrodkowych po dwóch stycznych równoległych	24
Miska i ostrokąg	27
Ilości skończone i nieskończone	30
Niemожność porównywan w dziedzinie nieskończoności	31
Szeregi liczb kolejnych i kwadratów z tych liczb	32
Jedność jako liczba nieskończona	35
Linja prosta jako koło nieskończone	36
Jedność, ciecz, proszek	37
Zwierciadło palące	38
Prędkość światła	39
Podział linji na nieskończenie wiele części	42
Zgęszczanie i rozrzedzanie ciał	43
Cienkość pozłoty na drucie srebrnym	46
Powierzchnie walców tej samej objętości	47
Objętości walców jednakiej powierzchni	48
Powierzchnia koła i wieloboku izoperymetrycznego	49
Koło, wielobok na niem opisany i z niem izoperymetryczny . .	50

	Str.
Zgęszczanie i rozrzedzanie	51
Potępienie nauki Arystotelesa o spadku ciał	52
Unoszenie się ciał w wodzie	55
Unoszenie się w wodzie i pływanie zwierząt	58
Spójność cząstek wody; tworzenie się kropli	59
Rozpuszczanie się wina czerwonego w wodzie	60
Spadek w próżni i w ośrodku opornym	61
Ciężar powietrza	64
Wahadło i jego izochronizm	69
Szmery przy tarcu	72
Opór przy ruchu ciała zależy od jego powierzchni	73
Ruch jednostajny osiągnięty w ośrodku opornym	75
Spadek po łuku trwa krócej niż po cięciwie	77
Prawa ruchu wahadła	78
Rozchodzenie się drgań	79
Interwale akustyczne	80
Zgodność i niezgodność dźwięków	82

DZIEŃ DRUGI

Prawo równowagi drąga	87
Drąg do podważania ciężarów	89
Wytrzymałość na rozciąganie i złamanie	90
Wysokość i szerokość belek	91
Sily, przyłożone do końców belek wmurowanych, działają proporcjonalnie do długości belek	92
Wytrzymałość proporcjonalna do sześciannu z wysokości belki i do półtoracznej potęgi z objętości	92
Wytrzymałość na złamanie graniastosłupów i walców podobnych	95
Wytrzymałość na rozciąganie prętów i sznurów	94
Wielkie i małe twory	96
Kości olbrzymów, granice wielkości ryb	100
Złamanie pod własnym ciężarem	101
Zmiany położenia podpór	103
Potęga geometrii i logiki	104
Oznaczenie siły potrzebnej do złamania belki	105
Belka o zmniejszającej się wysokości	106
Belka paraboliczna wszędzie jednakowo wytrzymała	107
Kwadratura paraboli	108
Sposoby rysowania paraboli	111
Wytrzymałość walców pustych	112
Porównanie wytrzymałości walców pełnych i pustych	112

DZIEŃ TRZECI

O ruchu jednostajnym

Twierdzenie o tym ruchu	115
Ruch naturalnie przyspieszony	119

	Str.
Określenie tego ruchu	120
Przyczyna przyspieszenia, podtrzymywanie ręką kamienia spadającego	123
Rozpowszechnione błędne poglądy	124
Prędkość spadku wzdłuż równi pochyłych jednakiej wysokości, zahamowane wahadło	126
Twierdzenie I o ruchu przyspieszonym i ruchu jednostajnym, przy równości dróg i czasów	128
Twierdzenie II o proporcjonalności dróg do kwadratów z czasów	129
Wniosek I. Drogi jak liczby nieparzyste	130
Doświadczenia stwierdzające	132
Wniosek II o stosunku czasów przebiegu dwóch dróg	133
Spadek po równiach pochyłych	134
Prędkości osiągane przy tym spadku	137
Twierdzenia III-VI o czasach spadku po równiach	138
Wnioski I-III z tych twierdzeń	142
Twierdzenia VII i VIII o czasach spadku po równiach i cięciwach	144
Twierdzenia IX-XII o czasach spadku po równiach w różnych warunkach	145
Zadania I-III o tych równiach. Twierdzenie XIII o czasach spadku po równiach, następującego po spadku wzdłuż prostopadłej	149
Zadania IV-VII o różnych kombinacjach takich spadków	152
Twierdzenie XIV. Wysokość spadku po prostopadłej i droga dalszego spadku po równi, przebyta w tym samym czasie	155
Zadania VIII i IX i objaśnienia dotyczące poprzednio wymienionego przedmiotu	156
Twierdzenia XV i XVI o podnoszeniu się po równi i o ruchu poziomym, następującym po ruchu wzdłuż równi	160
Zadanie X. Podnoszenie się wzdłuż równi, następujące po spadku prostopadłym. Twierdzenia XVII i XVIII o drogach wzdłuż różnych części równi, przebywanych w tym samym czasie i o spadku wzdłuż dwóch cięciw	161
Zadania XI. Bieg poziomy po spadku z różnych wysokości	163
Twierdzenia XIX i XX. Drogi spadków w czasie najkrótszym	164
Twierdzenie XXI. Najkrótsze czasy spadku wzdłuż różnych części równi pochyłej.	166
Zadania XII — XIV. O ruchu poprzedzającym ruch wzdłuż równi pochyłej	167
Twierdzenie XXII. Najkrócej trwający spadek po dwóch sąsiednich cięciwach. Spadek po łuku koła	171
Zadania XV i XVI. Ruch po odcinku równi i drogi poziome, przebywane po spadku pionowym	173

DZIEŃ CZWARTY

O ruchu pocisków

Twierdzenie I. Pocisk opisuje parabolę	176
Ruch złożony pocisku rzuconego poziomo	177

	Str.
Twierdzenie II. Ruch złożony jednostajny	183
Twierdzenie III. Składanie ruchu jednostajnego z niejednostajnym	186
Określenie wyniosłości (sublimitas)	188
Zadanie I. Impet w różnych punktach paraboli	189
Ruchy złożone	190
Zadanie II. Znaleźć wyniosłość paraboli	196
Zadanie III. Znaleźć amplitudę paraboli	197
Twierdzenia IV — VI. O amplitudach parabol	201
Twierdzenie VII. Obliczanie impetu	—
Zadanie II. Znaleźć wysokość z impetu i amplitudy	—
Zadanie III. Obliczyć tablicę amplitud.	202
Zadanie V. Oznaczanie wysokości i wyniosłości. Rozmowa o pociskach. Rozciąganie liny według linii prostej	205
Tablice wysokości i amplitud	206

DODATEK

Środek ciężkości ciężarów, zawieszonych na dragu	212
Środki ciężkości bryły z walców, opisanej i wpisanej w konoide	—
Środek ciężkości konoidy	213
Twierdzenie pomocnicze. Środek ciężkości kłosa konoidy parabolicznej	219
Środek ciężkości ciężarów, zawieszonych na dragu	221
Środek ciężkości bryły z walców opisanej i wpisanej w ostrokrag	222
Środek ciężkości ostrokregu i ostrosłupa	224
Środek ciężkości kłosa ostrokregowego i ostrosłupowego	226

DZIEŃ PIĄTY

Euklidesa określenie proporcjonalności	228
Określenie podane przez Salviati'ego	229
Stosunek złożony	231

DZIEŃ SZÓSTY

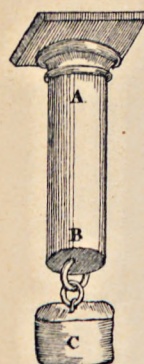
O sile uderzenia

Doświadczenie z naczyniami zawieszonemi jedno nad drugim	242
Niespodziewany wynik, działanie uderzenia i obciążenia	243
Nieskończona siła uderzenia	247
Próba objaśnienia działania uderzenia	249
Uderzenie ciała ustępującego	250
Momentalne działanie uderzenia. Powtarzanie słabych uderzeń	257
Różne przykłady	258

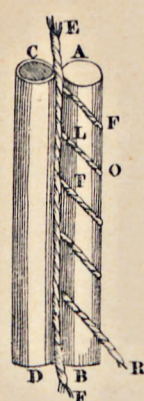


nr. 2813

Rys. 1.



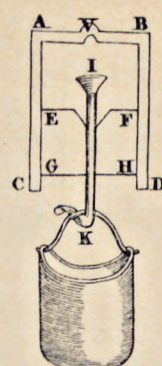
Rys. 2.



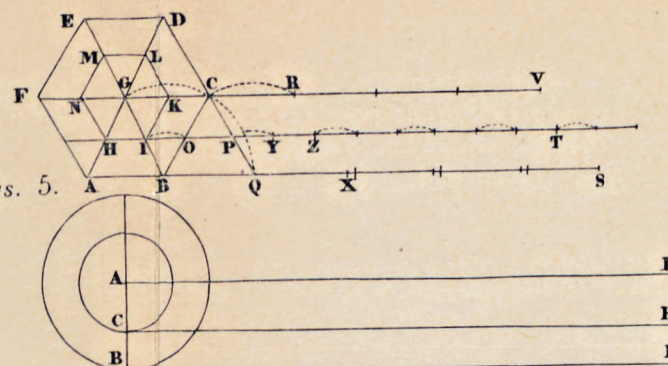
Rys. 3.



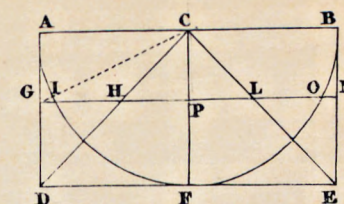
Rys. 4.



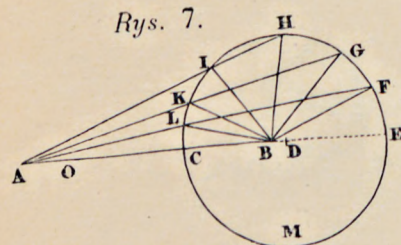
Rys. 5.



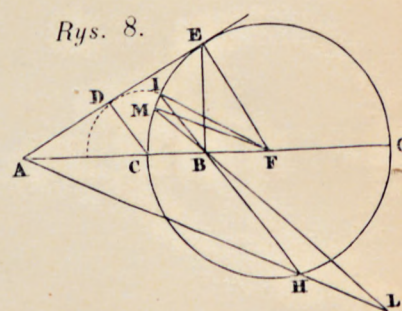
Rys. 6.



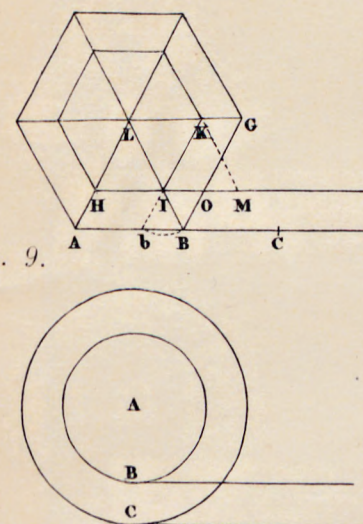
Rys. 7.



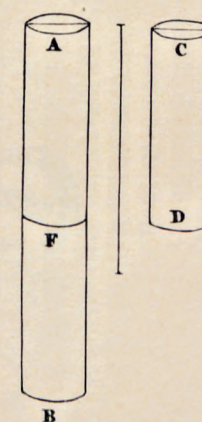
Rys. 8.



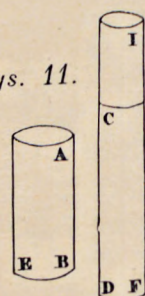
Rys. 9.



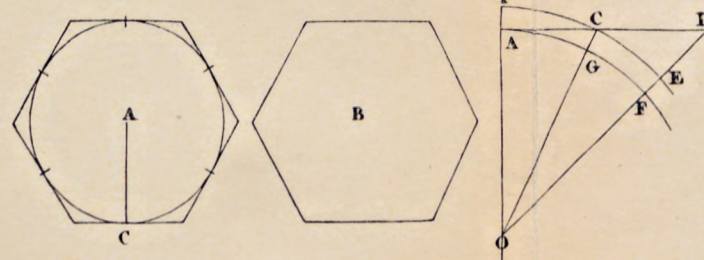
Rys. 10.



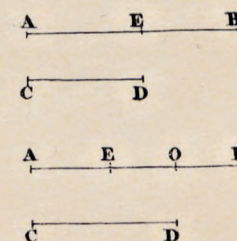
Rys. 11.



Rys. 12.



Rys. 13.

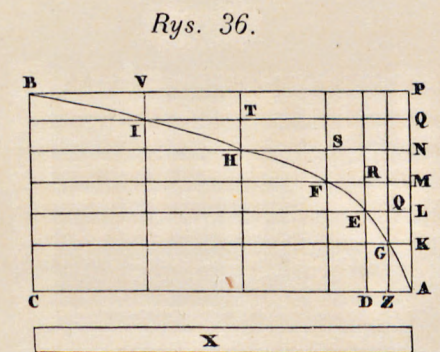
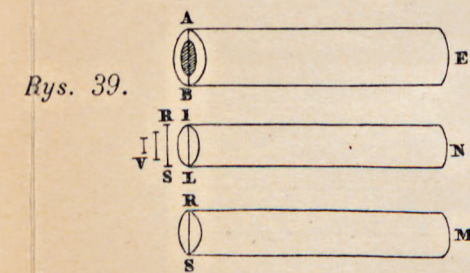
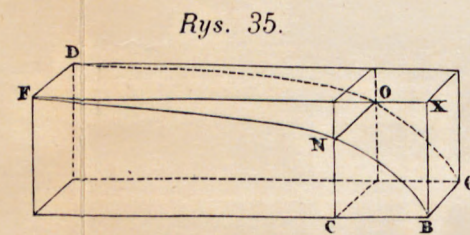
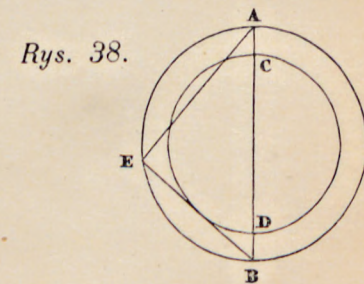
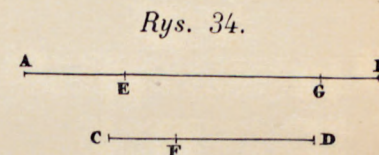
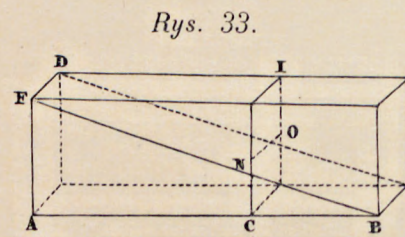
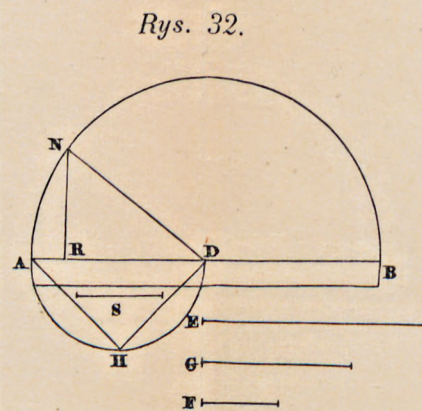
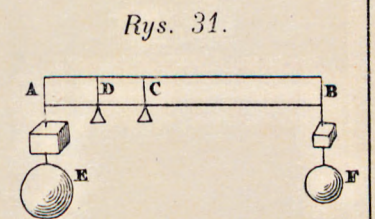
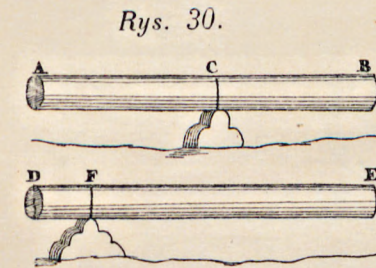
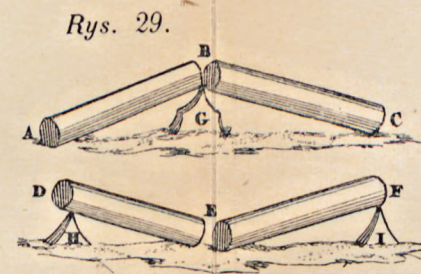
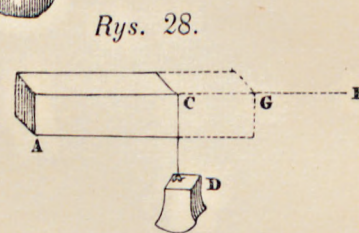
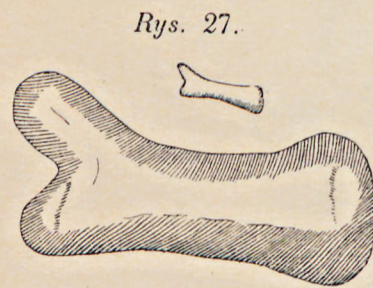
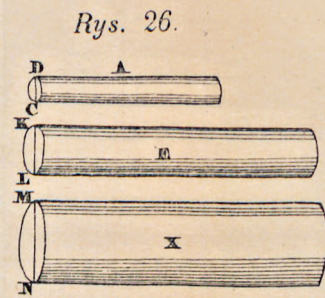
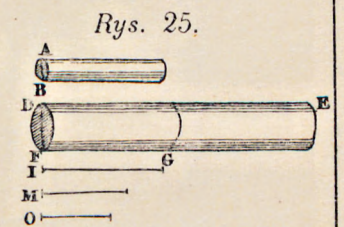
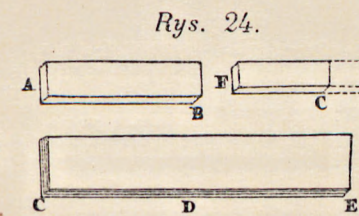
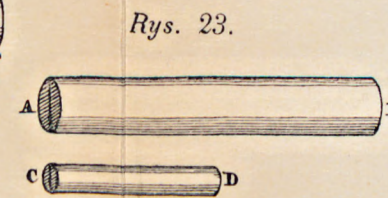
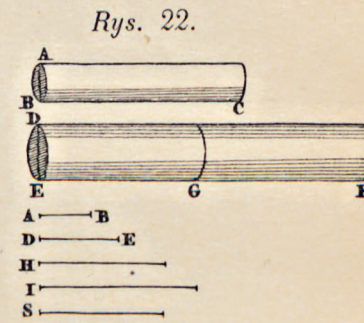
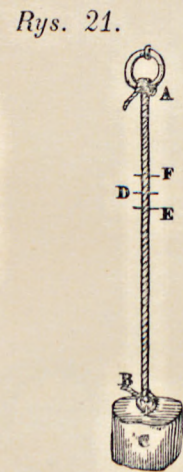
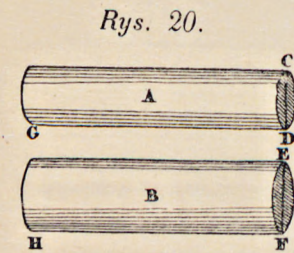
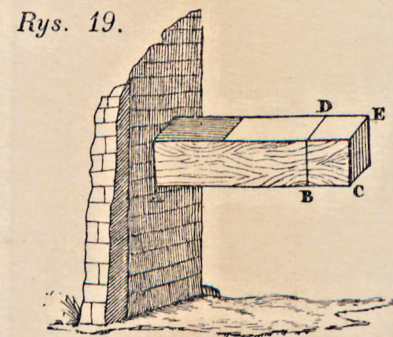
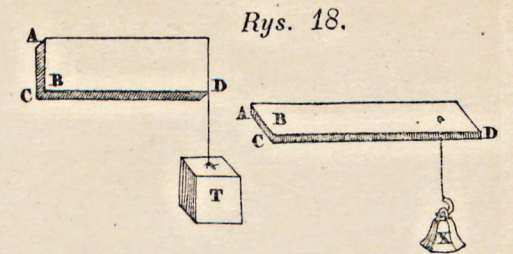
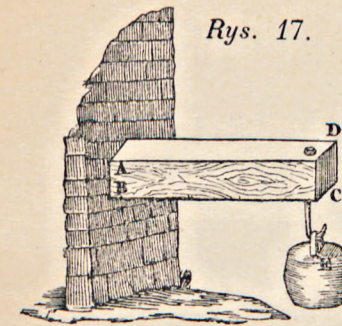
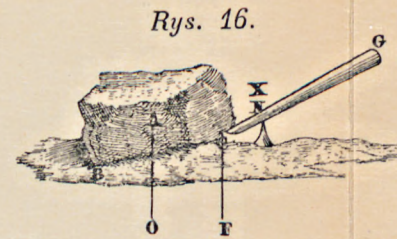
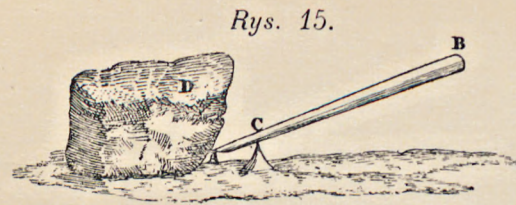
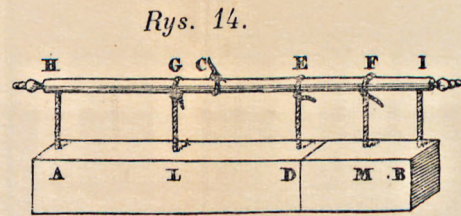




np. 2813



np. 2813





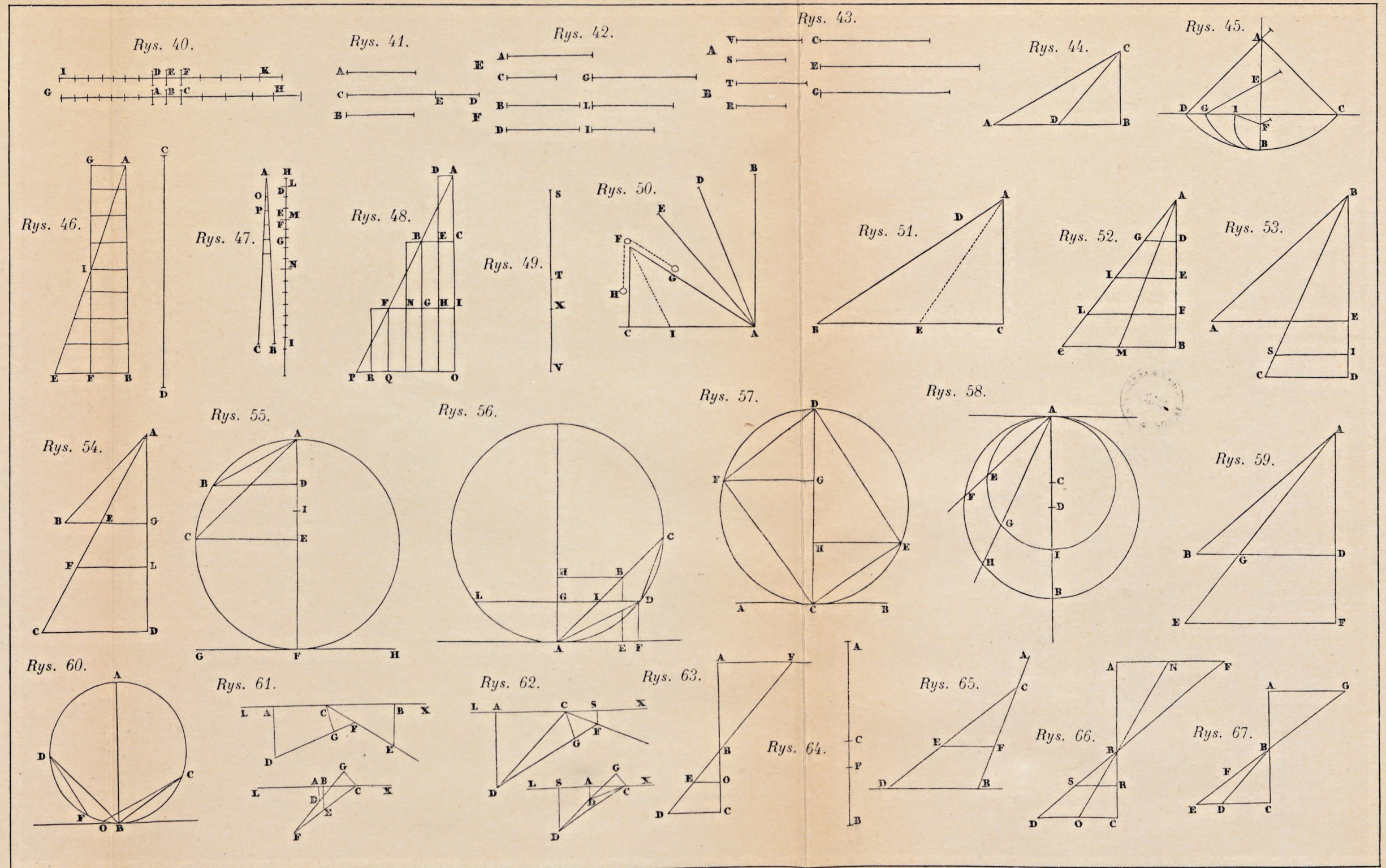
nr. 2813



nr. 2813



nr. 2813





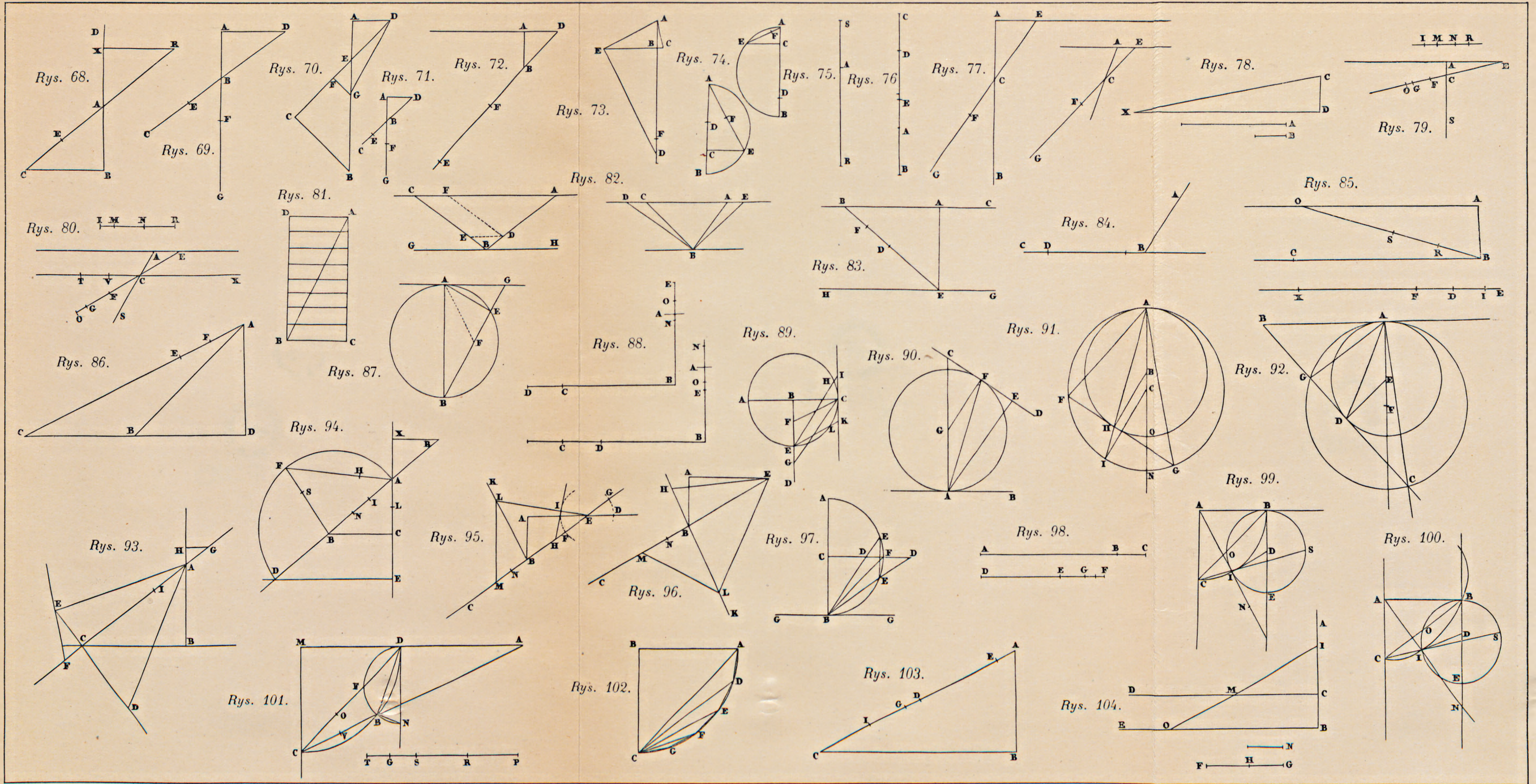
nr. 2813



nr. 2813



nr. 2813





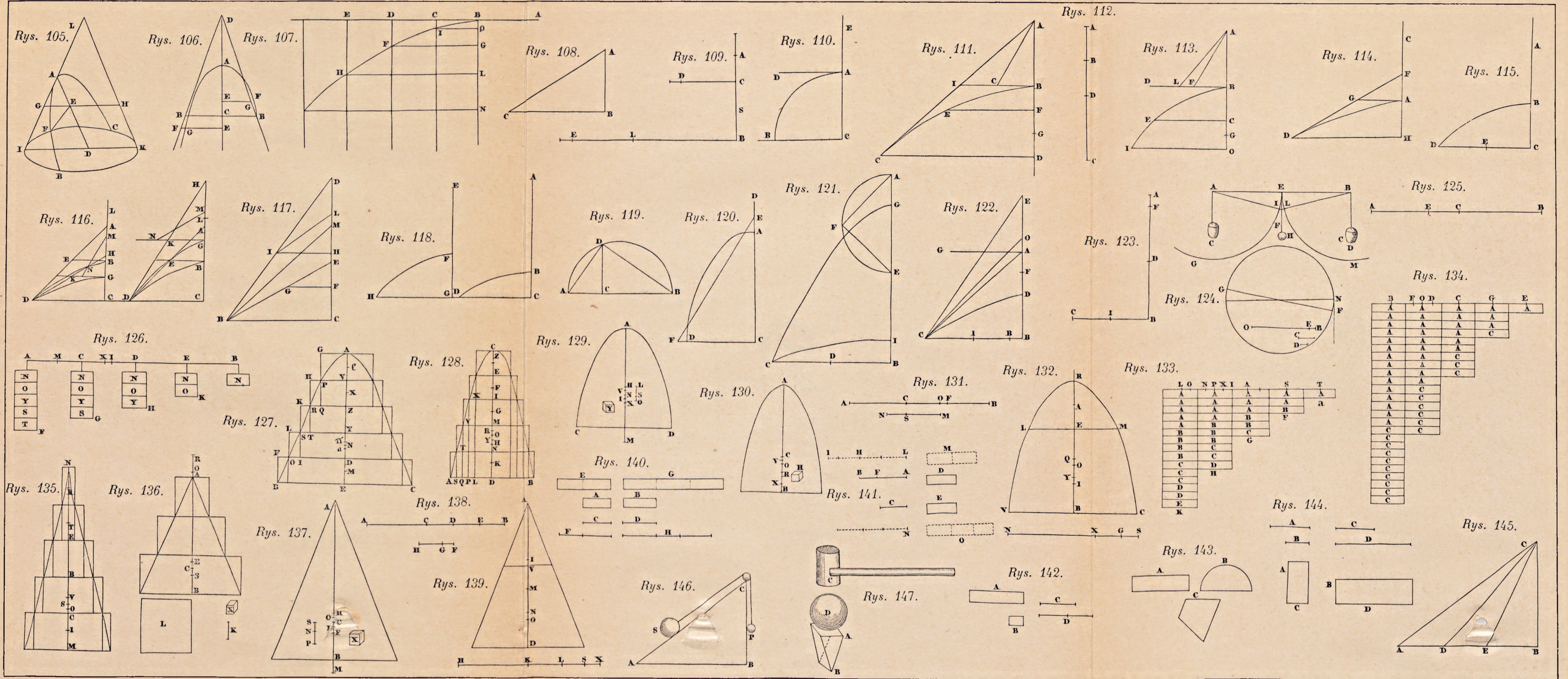
nr. 2813



nr. 2813



nr. 2813





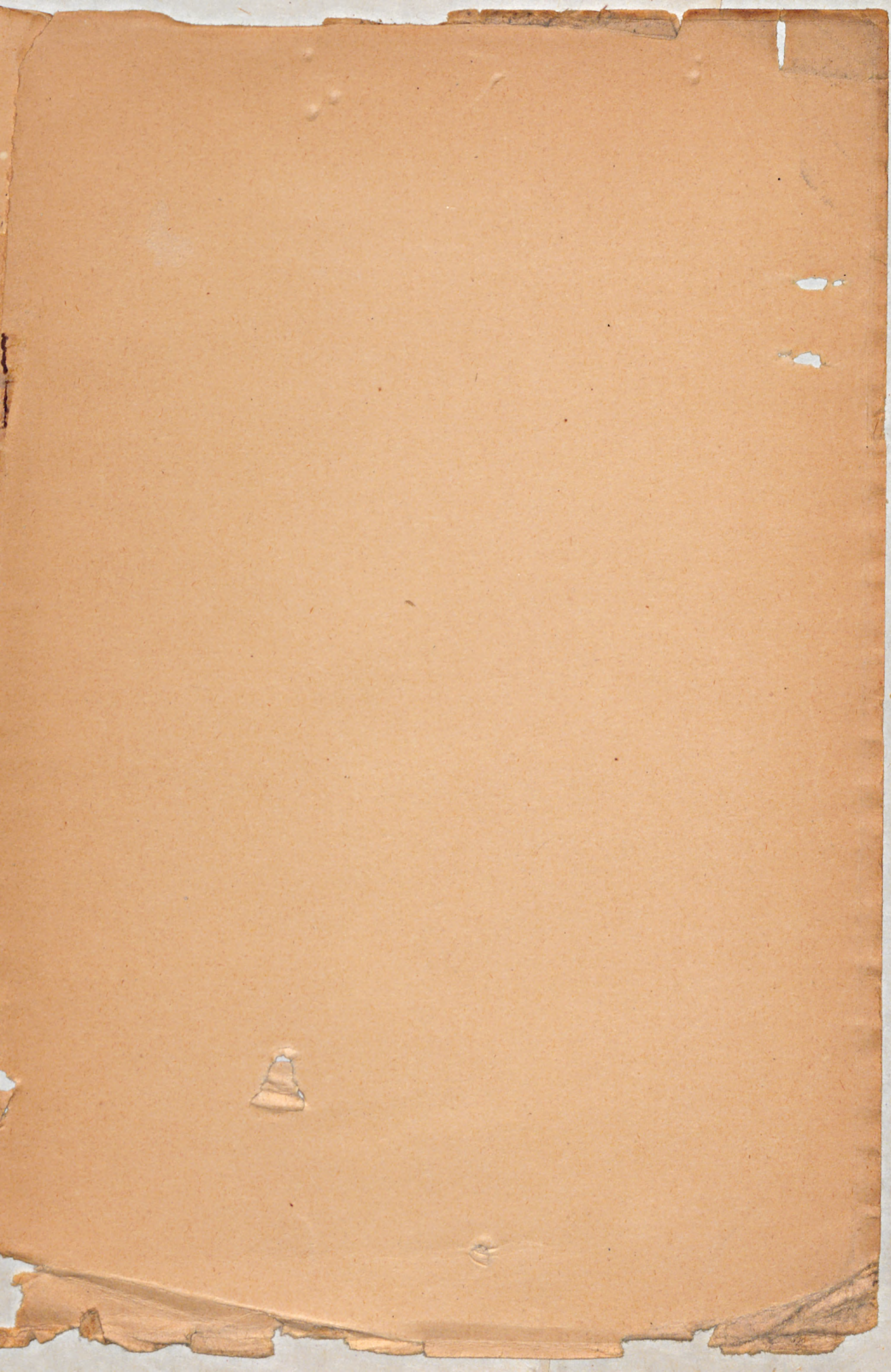
nr. 2813



nr. 2813



nr. 2813



BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Warszawskiej

NP. 2813



400000000136633

DRUKARNIA
KASY im. MIANOWSKIEGO
WARSZAWA, PAŁAC STASZICA