

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

WYDZIAŁ INŻYNIERII
SANITARNEJ I WODNEJ



ROZPRAWA DOKTORSKA

OPIS STRUKTURY

PRZYZIEMNEJ WARSTWY ATMOSFERY
DLA POTRZEB INŻYNIERII ŚRODOWISKA

mgr inż. LECH ŁOBOCKI

WARSZAWA

1989



Instytut Inżynierii Środowiska
Politechnika Warszawska

Lech Kobocki

OPIS STRUKTURY PRZYZIEMNEJ WARSTWY ATMOSFERY

DLA POTRZEB INŻYNIERII ŚRODOWISKA

Rozprawa doktorska

Promotor: doc. dr hab. Janusz Borkowski

Warszawa, 1989

36-11-90d

S p i s t r e ś c i

Przedmowa	7
Część I. Prosty model turbulencji w przyziemnej warstwie atmosfery	
1. Wstęp	13
2. Definicje i zależności podstawowe	16
3. Podstawowy układ równań	18
3.1. Układ równań modelu "poziomu 2" według hierarchii Mellora i Yamady	18
3.2. Model "poziomu 1"	21
3.3. Problem skali turbulencji	23
3.4. Skalowanie wielkości, występujących w równaniach modelu	31
3.5. Związki pomiędzy poszczególnymi wielkościami w warunkach równowagi obojętnej	32
3.6. Fundamentalne równanie modelu	36
3.6.1. Fundamentalne równanie modelu poziomu 2 ze skalą turbulencji określoną uogólnioną formułą von Kármána	36
3.6.2. Fundamentalne równanie modelu poziomu 1 ze skalą turbulencji określoną uogólnioną formułą von Kármána	39
3.6.3. Fundamentalne równanie modelu Mellora	40
3.6.4. Fundamentalne równanie modelu KEYPS	40
3.7. Funkcje uniwersalne teorii Monina-Obuchowa	41

4. Analiza własności modelu	43
4.1. Zakres zmienności parametrów równowagi i funkcji uniwersalnych. Własności asymptotyczne modeli ...	44
4.1.1. Zakres zmienności podstawowych parametrów równowagi	44
4.1.2. Zakresy zmienności i charakterystyki asymptotyczne funkcji uniwersalnych	52
4.2. Dobór wartości stałych modelu	63
4.2.1. Stała von Kármána	64
4.2.2. Wartość krytyczna dynamicznej liczby Richardsona	65
4.2.3. Stosunek q/u_* ; stała B_1	65
4.2.4. Stała A_1	66
4.2.5. Stała A_2	66
4.2.6. Stała B_2	67
4.2.7. Stała C_1	68
4.3. Dane pomiarowe i wyniki modelowania	68
4.3.1. Bank danych mikrometeorologicznych	68
4.3.2. Wyniki modelowania	71

Część II. Zastosowania modelu w zagadnieniach inżynierii środowiska

5. Metody rozwiązywania równań modelu	83
5.1. Równania algebraiczne w postaci uwikłanej	83
5.2. Równania różniczkowe	86
6. Praktyczne aproksymacje uniwersalnych funkcji teorii Monina-Obuchowa	87
6.1. Skala turbulencji	87
6.2. Kinetyczna energia ruchów turbulentnych	89
6.3. Zależność $Ri(R_f)$	90

7. Parametryzacja turbulencji w numerycznym modelu granicznej warstwy atmosfery	94
8. Podsumowanie i uwagi końcowe	121
9. Zakończenie	122
10. Bibliografia	123

Dodatki

- A. Upraszczenie układu równań z wyższym rzędem domykania
- B. Redukcja algebraiczna układu równań
- C. Rozwiązanie fundamentalnego równania modelu
poziomu 1 ze skalą turbulencji określoną uogólnioną
hipotezą von Kármána
- D. Uproszczony model turbulencji w neutralnie
stratyfikowanej warstwie przyziemnej

P r z e d m o w a

Z ochroną środowiska naturalnego wiąże się szereg trudnych problemów naukowych, technicznych i prawnych. Kompleksowe ujęcie zagadnień ochrony atmosfery, obok wiedzy o źródłach emisji, metodach jej ograniczania i specyfice oddziaływania zanieczyszczeń na elementy środowiska, obejmować winno znajomość szeroko pojmowanych zależności pomiędzy emisją, a stanem zanieczyszczenia atmosfery. Znajomość tych związków, wspierana odpowiednimi metodami i algorytmami obliczeniowymi stanowi podstawę podejmowania racjonalnych decyzji w zakresie planowania przestrzennego, efektywnego gospodarowania środkami przeznaczonymi na ochronę środowiska i regulowania działalności istniejących obiektów gospodarczych. Wypracowane na podstawie współczesnej wiedzy o zjawiskach transportu i przemian zanieczyszczeń w atmosferze metody obliczeniowe stanowią obecnie zarówno element systemu planowania inwestycji jak też i ważne narzędzie systemu prawnego w zakresie ochrony środowiska.

Wyemitowane do atmosfery zanieczyszczenia unoszone są przez wiatr, podlegają mieszaniu, przemianom chemicznym, osiadaniu i wymywaniu przez opady. Procesy te zachodzą w szerokim zakresie skal przestrzennych i czasowych, jednak ich wydajność ma różne znaczenie w poszczególnych skalach. Najczęściej obecnie formułowane zadania praktyczne dotyczą skali lokalnej, choć w ostatnim dziesięcioleciu wzrosło też znacznie zainteresowanie transportem zanieczyszczeń w skali regionalnej i kontynentalnej. Przy rozpatrywaniu problemu w skali lokalnej, na plan pierwszy wysuwa się konieczność określenia pola wiatru oraz intensywności turbulencyjnego mieszania w dolnej części atmosfery. Zadania te należą do grupy podstawowych celów praktycznych współczesnej meteorologii warstwy granicznej.

Z uwagi na olbrzymią złożoność i różnorodność procesów fizycznych i chemicznych zachodzących w szerokim zakresie skal czasowych i przestrzennych w atmosferze, nie jest obecnie możliwe

ściśle ich opisanie formułami matematycznymi, podobnie, jak niemożliwe jest otrzymanie ciągłej w czasie i przestrzeni, dostatecznie rozdzielczej informacji pomiarowej. Niezależnie od konieczności przyjęcia pewnych uproszczeń już na etapie formułowania koncepcji zjawisk fizycznych, ich analiza ilościowa, dokonywana w znacznej mierze przy użyciu środków elektronicznej techniki obliczeniowej, zawierać musi znacznie radykalniejsze przybliżenia, wynikające z braku odpowiedniej do rozmiarów problemu mocy obliczeniowej. Powstający opis ilościowy stanowi zatem pewien matematyczny model przebiegu wybranych zjawisk fizycznych, opisujący jedynie najistotniejsze z punktu widzenia konkretnego celu modelowania cechy tych zjawisk. Konstruowane modele związane są zatem ze ściśle określonym zakresem ich stosowalności; zbudowanie i użytkowanie modelu uniwersalnego znacznie przekracza obecne możliwości.

Lawinowy rozwój modeli matematycznych, opisujących czasową zmienność pól wiatru, temperatury i charakterystyk turbulencji w dolnej atmosferze przy pomocy układów przybliżonych równań hydrodynamiki, analizowanych i rozwiązywanych przy pomocy maszyn cyfrowych, nastąpił w latach siedemdziesiątych bieżącego stulecia. W okresie tym dokonał się także przełom w pracach pomiarowych, związany w znacznej mierze z zastosowaniem osiągnięć elektroniki w technice pomiarowej, gromadzeniu i analizie danych. Zidentyfikowano i opisano ilościowo szereg procesów, przebiegających w granicznej warstwie atmosfery, ustalono z zadawalającą z punktu widzenia praktyki dokładnością i wiarygodnością związki ilościowe, których istnienie sugerowały wcześniejsze rozważania teoretyczne. W okresie tym też wdrożono do zastosowań praktycznych modele ewolucji granicznej warstwy atmosfery, oparte na parametryzacji turbulencji przy pomocy tzw. schematów zamykania wyższego rzędu, wywodzących się ze statystycznej teorii turbulencji. Jakkolwiek sama statystyczna teoria turbulencji traci dziś zwolenników na rzecz prób zastosowań nowych metod matematycznych w opisie turbulencji (jak, np. przekształcenia renormalizacyjne czy teoria fraktali), modele stworzone na jej gruncie znajdują dziś zastosowanie zarówno jako

jedno z podstawowych narzędzi badawczych w meteorologii warstwy granicznej, jak i zaawansowanych opracowań inżynierskich.

Opracowane w latach siedemdziesiątych modele, należące do omawianej grupy, podzielić można obecnie, z punktu widzenia zastosowań, na kilka klas. Trójwymiarowe modele o drobnej siatce obliczeniowej, zdolne do jednoczesnego uwzględnienia ruchów w pewnym zakresie skal przestrzennych (tzw. LES - Large Eddy Simulation), używane są jako "laboratorium numeryczne", zastępując niemożliwe do realizacji w praktyce pomiary. Modele te są domeną silnych, wyposażonych w superkomputery ośrodków badawczych. Proste modele trójwymiarowe o niewielkiej liczbie węzłów siatki stosuje się dziś w zagadnieniach praktycznych, w których wskutek np. niejednorodności podłoża, rzeźby terenu itp. konieczne jest uwzględnienie przestrzennej zmienności pól meteorologicznych. Również i ta klasa modeli wymaga zaangażowania znacznej mocy obliczeniowej. Ograniczenia wynikające z jej braku powodują konieczność rezygnacji z zastosowania tak dokładnego opisu matematycznego, na jaki pozwalałby stan dzisiejszej wiedzy o warstwie granicznej. W ewentualnych zastosowaniach praktycznych sporym problemem jest też brak dostatecznie obszernej i dokładnej informacji pomiarowej (warunki brzegowe i początkowe), koniecznej do uzyskania rozwiązań. Trzecią grupę stanowią modele jednowymiarowe, opisujące właściwości warstwy granicznej rozwijającej się nad płaskim, poziomo jednorodnym podłożem. Modele te cechuje stosunkowo małe zapotrzebowanie na moc obliczeniową, mniejsza jest też ich wrażliwość na błędy danych wejściowych i błędy przybliżeń. Z tych powodów możliwe jest obecnie stosowanie ich w rutynowych obliczeniach inżynierskich, nawet wtedy, gdy zawierają stosunkowo skomplikowany opis procesów fizycznych w atmosferze. W ośrodkach nie dysponujących dostatecznymi mocami obliczeniowymi dla uruchomienia modeli LES, stanowią jedyną rozsądną drogę obliczeniowej weryfikacji schematów, stosowanych w modelach trójwymiarowych.

Pomimo, iż zastosowania modeli z wyższym rzędem zamykania w meteorologii warstwy granicznej mają już za sobą piętnastoletnią

historię, możliwości ich analizy pozostają po dziś dzień ograniczone. Decyduje o tym przede wszystkim stopień komplikacji modelu, opisywanego układem kilkunastu – kilkudziesięciu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Przełomowe znaczenie dla modelowania przepływów turbulentnych w geofizyce miała praca Mellora i Yamady (1974), w której sformułowano kryteria uproszczenia układu równań z wyższym rzędem domykania ze względu na stopień dokładności opisu anizotropowości turbulencji. W dwa lata później Schumann (1977) zwrócił uwagę na problem realizowalności w modelowaniu turbulencji. Następnie jednak uwagę badaczy przyciągnęły problemy rozbudowy otrzymanego modelu poprzez uwzględnienie szeregu innych procesów fizycznych (np. fazowych przemian wody, promieniowania). Przy analizie przybliżonych rozwiązań, otrzymywanych przy użyciu metod numerycznych, koncentrowano uwagę na problemach opisu tych właśnie procesów.

Doświadczenia, wyniesione z wieloletniego użytkowania modeli z uproszczonym systemem zamykania drugiego rzędu, ujawniły pojawianie się w niektórych sytuacjach nieprawidłowości wyników modelowania, jak np. otrzymywanie wartości kwadratu pulsacji pionowej składowej prędkości, przewyższających wartość podwojonej energii kinetycznej ruchu turbulencyjnego w warunkach równowagi silnie chwiejnej (Galperin *et al.*, 1988). Trudności z otrzymaniem w pełni poprawnych wyników skłoniły ponownie badaczy do zwrócenia uwagi na problem parametryzacji turbulencji. Yamada (1986) uściślił warunki realizowalności Schumanna; w pracach Mellora i Yamady (1982), Hassida i Galperina (1983), Helfanda (1985), Flatau (1985) oraz Helfanda i Labragi (1988) podjęto próby sformułowania wynikających z warunków realizowalności ograniczeń dla najpopularniejszych wariantów modelu Mellora i Yamady. Wreszcie, w pracy Galperina i in. (1988), w celu usunięcia wzmiankowanych nieprawidłowości zmodyfikowano wprowadzony przez Mellora i Yamadę system skalowania równań.

W układzie równań modeli z wyższym rzędem zamykania, podobnie jak w wielu prostszych modelach, pojawiają się wielkości

o wymiarze długości lub czasu, interpretowane jako przestrzenne względnie czasowe skale turbulencji. Ich wyznaczenie wymaga określenia dodatkowych związków. Jakkolwiek istnieje już dzisiaj sporo prac, nawiązujących do tego problemu, w większości wzmiankowanych wyżej, klasycznych już dzisiaj modeli, zastosowano stosunkowo proste podejście, oparte na zastosowaniu prandtlowskiej hipotezy o drodze turbulencyjnego mieszania.

Jednoznaczne rozstrzygnięcie szeregu wątpliwości, dotyczących rozmaitych hipotez i przybliżeń stosowanych w modelowaniu warstwy granicznej, na podstawie analizy materiałów empirycznych jest bardzo kłopotliwe. Przyczyny tego stanu rzeczy leżą zarówno w niedostatecznej ilości i jakości materiałów, dotyczących warstwy granicznej, jak też i w niemożliwości wykluczenia przebiegających w czasie eksperymentów pomiarowych procesów, które z różnych względów nie są uwzględniane w analizowanych modelach. Istnieje natomiast pewna możliwość dokonywania negatywnej selekcji, polegającej na analizie właściwości modelu w sytuacjach uproszczonych, dla których istnieją dobrze sprawdzone w praktyce rozwiązania teoretyczne, albo dostatecznie bogaty materiał pomiarowy. Modele dające w tych sytuacjach wyniki niezgodne z obserwacjami wymagać będą korekty lub wykluczenia. W odniesieniu do granicznej warstwy atmosfery za taki "poligon doświadczalny" uznać można np. warstwę przyziemną, w której pominąć można wpływ pewnych oddziaływań dominujących w dużych skalach przestrzennych (np. siła Coriolisa), a przez odpowiedni dobór warunków eksperymentu polowego - ograniczyć się z zadawalającą dokładnością do przypadków quasistacjonarności i jednorodności poziomej. Istnieje tu również stosunkowo bogaty materiał empiryczny, zebrany w licznych eksperymentach polowych, oraz wielokrotnie weryfikowany aparat opisu ilościowego w postaci teorii podobieństwa Monina-Obuchowa.

W prezentowanej pracy podjęta została próba skonstruowania prostego modelu turbulencji w przyziemnej warstwie atmosfery. Zastosowano w nim podejście, wywodzące się z klasycznych modeli turbulencji Mellora-Yamady, z uwzględnieniem sugerowanych przez

wyniki prac badaczy radzieckich (Zilitinkevič i Lajchtman, 1965; Lajchtman, 1979) - udoskonalen hipotez dotyczących skali turbulencji. Powstała rodzina modeli pozwala na klasyfikację stosowanych dotąd modeli jako prostszych przypadków szczególnych, ich porównanie, oraz analizę. Wskazano pewne mankamenty klasycznego modelu mellorowskiego. Rezultaty modelowania porównywane są z danymi empirycznymi, pochodzącymi z wielu eksperymentów polowych.

Na podstawie wyników modelowania i danych empirycznych dokonano aproksymacji tzw. uniwersalnych funkcji teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. Pozwalają one m.in. na spójne sformułowanie warunków brzegowych dla modeli granicznej warstwy atmosfery. Proponuje się również pewne modyfikacje formuł, stosowanych w modelowaniu granicznej warstwy atmosfery w celu określenia przestrzennej skali turbulencji.

PROSTY MODEL TURBULENCJI W PRZYZIEMNEJ WARSTWIE ATMOSFERY

1. Wstęp

Struktura przyziemnej warstwy atmosfery może być stosunkowo prosto opisana przy pomocy teorii podobieństwa Monina-Obuchowa (1954). Zgodnie z tą teorią, w warunkach stacjonarności i jednorodności poziomej przyziemną warstwę atmosfery charakteryzują jednoznacznie: parametr wyporu $\beta = g/T$ oraz pionowe strumienie turbulencyjne pędu i ciepła. W opisie matematycznym dogodnie jest używać, w miejsce wymienionych wielkości fizycznych, pewnych *parametrów*, związanych z tymi wielkościami. Parametrami takimi być mogą np. prędkość dynamiczna u_* i skala temperatury T_* (zob. rozdz. 2). Jednopunktowe charakterystyki statystyczne pól turbulencyjnych, wyskalowane z pomocą tych parametrów, stanowią *uniwersalne funkcje* parametru równowagi $\zeta = z/L_*$ Monina-Obuchowa, utworzonego z wysokości z i skali długości L_* , będącej kombinacją parametru wyporu $\beta = g/T$ ze skalami u_* i T_* .

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych zgromadzono bogaty materiał pomiarowy, na podstawie którego udało się dość dobrze określić przebieg funkcji uniwersalnych $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$ (definicje tych funkcji podano w rozdz. 2) dla gradientów wiatru i temperatury. Analizy dotyczyły w większości wypadków zakresu zmienności parametru ζ od -2 do 1. Przebiegi funkcji empirycznych $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$, prezentowane przez różnych badaczy, wykazują dużą zgodność w równowadze chwiejnej i pewne zróżnicowanie w równowadze stałej. Przeglądy najbardziej znaczących prac z tego zakresu dokonane zostały w pracach Dyera (1974), Jagloma (1977) i Visvanadhama (1982). Za rozwiązanie standardowe, najczęściej obecnie wykorzystywane (jakkolwiek z różnymi modyfikacjami) w zastosowaniach praktycznych (np. Nickerson, Smiley, 1975; Alojan, Lazrijev, 1980; Berkowicz, Prahm, 1982; Uliasz, Łobocki,

Lobocki, 1983), uznawane są formuły, opracowane przez Busingera i in. (1971).

Mniej liczna grupa opracowań materiałów eksperymentalnych dotyczy funkcji uniwersalnych dla innych wielkości, takich jak np. kinetyczna energia turbulencji, wariancje poszczególnych składowych prędkości, czy też wariancja temperatury (np. McBean, 1971; Wyngaard, Côté, Izumi, 1971; Panofsky et al., 1977). W modelowaniu granicznej warstwy atmosfery funkcje takie stosowane są m.in. przy formułowaniu warunków brzegowych równań bilansu kinetycznej energii ruchów turbulencyjnych i ewolucji momentów statystycznych pola turbulencji. Interesujący materiał pomiarowy, dotyczący poszczególnych składników w równaniach bilansu kinetycznej energii turbulencji i wariancji temperatury przedstawiony został w pracach Wyngaarda i Côté (1971), Garratta (1972), McBeana i Eliotta (1975) oraz Wilczaka i Busingera (1985). Dane te stanowią cenny materiał do weryfikacji sformułowań modelowych.

Wyznaczenie funkcji uniwersalnych dokonane być może również na drodze teoretycznej - przez sformułowanie i rozwiązanie odpowiedniego układu równań. Rozwiązanie o znaczeniu historycznym stanowi tzw. model KEYPS, opracowany w latach pięćdziesiątych niezależnie przez Kazanskiego, Ellisona, Yamamoto, Panofsky'ego i Sellersa (Zilitinkevič, 1970). Model ten wielokrotnie modyfikowano różnymi metodami (np. Zilitinkiewicz, Lajchtman, 1965; Yamamoto, 1975; Lajchtman, 1979). Istnieją ponadto rozwiązania układu równań dynamiki warstwy przyziemnej z wyższym rzędem zamykania (np. Mellor, 1973; Lewellen i Teske, 1973; Prenosil, 1979; Borkowski, 1984). Modele półempiryczne, w których do domknięcia układu równań wykorzystywane są niektóre empiryczne funkcje uniwersalne, przedstawione zostały przez Binkowskiego (1979) oraz Alojana i Lazrijeva (1980). Wyznaczenie funkcji uniwersalnych ϕ_m i ϕ_h za pomocą modelu spektralnego - przy wykorzystaniu empirycznych funkcji spektralnych dla wariancji prędkości i temperatury dokonane zostało przez Claussena (1985).

Ponieważ układ równań dynamiki warstwy przyziemnej może być uważany za szczególny przypadek układu równań dynamiki granicznej warstwy atmosfery, można traktować modelowanie warstwy przyziemnej jako metodę weryfikacji i doskonalenia modeli warstwy granicznej. Z tego punktu widzenia interesować nas będą przede wszystkim te spośród modeli warstwy przyziemnej, w których nie wykorzystuje się empirycznych funkcji uniwersalnych jako elementu domykającego układ równań. Wśród stosowanych w praktyce modeli granicznej warstwy atmosfery szczególną popularnością cieszą się modele z uproszczonym systemie domknięć wyższego rzędu (Mellor, Yamada, 1974, 1982) oraz modele wykorzystujące bilans kinetycznej energii turbulencji (np. Bodin, 1979; Therry i Lacarrère, 1983). Jakość modeli tych w dużym stopniu zależy od przyjętych hipotez, odnośnie skali turbulencji. Dlatego też szczególną uwagę poświęcimy rozwiązaniu problemu skali turbulencji w modelu warstwy przyziemnej.

2. Definicje i zależności podstawowe.

Podstawowymi parametrami skalującymi w teorii Monina-Obuchowa są:

prędkość dynamiczna
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{-\overline{u'w'}} \quad (2.1)$$

skala temperatury
$$T_* = -\frac{H}{\rho c_p u_*} = -\frac{\overline{w'\theta'}}{u_*} \quad (2.2)$$

skala długości
$$L_* = \frac{u_*^2}{\kappa \beta T_*} \quad (2.3)$$

W definicjach powyższych τ jest pionowym turbulentnym strumieniem pędu, ρ - gęstością powietrza w warstwie przyziemnej, c_p - ciepłem właściwym powietrza przy stałym ciśnieniu, H - pionowym turbulentnym strumieniem ciepła, κ - stałą von Kármána, $\beta = g/T_0$ - parametrem wyporu, w którym g jest przyspieszeniem ziemskim, a T_0 - średnią temperaturą dla warstwy przyziemnej. Zdefiniujemy również współczynniki turbulentnej wymiany pędu i ciepła:

$$K_m = -\frac{\tau/\rho}{\frac{dU}{dz}} = \frac{u_*^2}{\frac{dU}{dz}} \quad (2.4)$$

$$K_h = -\frac{H/\rho c_p}{\frac{d\theta}{dz}} = \frac{u_* T_*}{\frac{d\theta}{dz}} \quad (2.5)$$

W myśl teorii podobieństwa Monina-Obuchowa, pionowe gradienty wiatru i temperatury, unormowane przy pomocy ilorazów skal u_* lub T_* i wysokości z , stanowią uniwersalne funkcje jednej bezwymiarowej zmiennej - parametru równowagi Monina-Obuchowa $\zeta = z/L_*$. Związki te zapisać można w postaci:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_m(\zeta) \quad (2.6)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T_*}{\kappa z} \phi_h(\zeta) \quad (2.7)$$

Przez $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$ oznaczono tu odpowiednio funkcje uniwersalne dla gradientów wiatru i temperatury.

Oprócz parametru ζ , do charakteryzowania stanu równowagi w warstwie przyziemnej stosowane są: dynamiczna (strumieniowa) liczba Richardsona R_F oraz gradientowa liczba Richardsona Ri . Dynamiczna liczba Richardsona stanowi stosunek wyrazów, opisujących termiczną i dynamiczną generację energii kinetycznej turbulencji w równaniu bilansu tej energii:

$$R_F = \frac{\beta \overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'} \frac{dU}{dz}} = \frac{\beta u_* T_*}{u_*^2 \frac{dU}{dz}} \quad (2.8)$$

Gradientowa liczba Richardsona definiowana jest jako:

$$Ri = \frac{\beta \frac{d\theta}{dz}}{\left[\frac{dU}{dz} \right]^2} \quad (2.9)$$

Liczba Ri obliczana jest wyłącznie na podstawie cech profilu prędkości; liczba R_F zawiera zarówno pionowy gradient prędkości, jak i pionowe strumienie turbulencyjne. Parametr ζ wyrażony jest przy pomocy strumieni turbulencyjnych. Dlatego też związki pomiędzy wielkościami Ri , R_F i ζ stanowią pewną postać związków pomiędzy gradientami a strumieniami turbulencyjnymi. Z podanych wyżej definicji otrzymać można:

$$Ri = \frac{\phi_h(\zeta)}{\phi_m(\zeta)} R_F \quad (2.10)$$

$$R_F = \frac{\zeta}{\phi_m(\zeta)} \quad (2.11)$$

$$Ri = \frac{\zeta \phi_h(\zeta)}{\phi_m^2(\zeta)} \quad (2.12)$$



3. Podstawowy układ równań.

W niniejszym rozdziale dokonana zostanie próba skonstruowania rodziny modeli, opisywanych układem równań przyziemnej warstwy atmosfery z uproszczonym zamykaniem drugiego rzędu. Ze względu na dużą popularność systemów zamykania, wywodzących się ze sformułowanej przez Mellora i Yamadę (1974) hierarchii, jako punkt wyjściowy rozważań obrany został model "poziomu 2" według tej klasyfikacji, stanowiący (Mellor i Yamada, 1982) dostatecznie dobre przybliżenie dla stacjonarnej i poziomo jednorodnej warstwy przyziemnej. Model ten rozszerzony zostanie przez wprowadzenie uogólnionej na przypadek termicznie stratyfikowanych warstw granicznych formuły von Kármána (Lajchtman, 1979). Przedyskutowane zostaną ewentualne dalsze uproszczenia, prowadzące w końcowym efekcie do otrzymania rodziny modeli, wśród których sklasyfikować można niektóre współczesne modele warstwy przyziemnej.

3.1. Układ równań modelu "poziomu 2" według hierarchii Mellora i Yamady

Równania modelu warstwy przyziemnej, opartego na systemie założeń domykających przyjętych w powszechnie stosowanych modelach Mellora - Yamady, sformułowane zostały przez Mellora (1973). W szeregu późniejszych prac (Mellor i Yamada, 1974; Yamada i Mellor, 1975; Mellor i Yamada, 1982; Enger, 1983; Flatau, 1985; Helfand i Labraga, 1988) równania te, uogólnione dla szerszych klas przepływów, podlegały analizie i udoskonaleniu. Dla przypadku stacjonarnej i poziomo jednorodnej warstwy przyziemnej, równania

modelu (Mellor, Yamada, 1982) uprościć można do postaci (patrz Dodatek A):

$$\overline{w^2} = \frac{1}{3} q^2 + \frac{l_1}{q} \left[2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} + 4\beta \overline{w\theta} \right] \quad (3.1.1)$$

$$\overline{uw} = -3l_1 q \left[-C_1 + \frac{\overline{w^2}}{q^2} \right] \frac{dU}{dz} + \frac{3\beta l_1}{q} \overline{u\theta} \quad (3.1.2)$$

$$\overline{u\theta} = -\frac{3l_2}{q} \left[\overline{w\theta} \frac{dU}{dz} + \overline{wu} \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (3.1.3)$$

$$\overline{w\theta} = -\frac{3l_2}{q} \left[-\beta \overline{\theta^2} + \overline{w^2} \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (3.1.4)$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{\Lambda_2}{q} \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} \quad (3.1.5)$$

$$-\overline{wu} \frac{dU}{dz} + \beta \overline{w\theta} = \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (3.1.6)$$

W modelu Mellora-Yamady przyjmowana jest hipoteza o proporcjonalności skal długości, występujących w tych równaniach:

$$(l_1, l_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (A_1, A_2, B_1, B_2) \ell \quad (3.1.7)$$

Przy analizie układu równań modelu Mellora-Yamady dla warstwy przyziemnej, celowe jest zastosowanie dwóch spośród określonych w hierarchii Mellora-Yamady (1974) przybliżeń: przybliżenia "poziomu 1" (izotropowy rozkład energii turbulencji) i przybliżenia "poziomu 2" (równowaga produkcja-dyssypacja, zaniedbywalność turbulencyjnego transportu momentów pól

turbulencyjnych). Omówienie rozpoczniemy od modelu "poziomu 2". Po wykonaniu przekształceń algebraicznych, przedstawionych w Dodatku B, z układu (3.1.1-6), przy wykorzystaniu (3.1.7) otrzymać można związki pomiędzy pionowymi strumieniami pędu i ciepła, a pionowymi gradientami prędkości wiatru i temperatury:

$$\overline{uw} = - S_M \ell_q \frac{dU}{dz} \quad (3.1.8)$$

$$\overline{w\theta} = - S_H \ell_q \frac{d\theta}{dz} \quad (3.1.9)$$

Wprowadzone w powyższym wielkości S_M i S_H stanowią bezwymiarowe funkcje, zależne od parametrów równowagi. W przypadku modelu "poziomu 2" funkcje te mają postać:

$$S_H = 3A_2 \left[\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma \right] \quad (3.1.10)$$

$$S_M = 3A_1 \frac{\gamma_1 - C_1 - (6A_1 + 3A_2)\Gamma/B_1}{\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma + 3A_1 \Gamma/B_1} \left[\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma \right] \quad (3.1.11)$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} - 2A_1/B_1 \quad (3.1.12)$$

$$\gamma_2 = \frac{B_2 + 6A_1}{B_1} \quad (3.1.13)$$

$$\Gamma = \frac{R_F}{1 - R_F} \quad (3.1.14)$$

Warunkiem wykonalności przekształceń jest $R_F \neq 1$; warunkiem koniecznym realizowalności fizycznej modelu jest z kolei $S_M > 0$ (Helfand, Labraga, 1988), który to warunek sprowadza się do (Mellor, Yamada, 1982):

$$R_F < R_{Fc} = \Gamma_c / (\Gamma_c + 1), \text{ gdzie } \Gamma_c = \gamma_1 / \gamma_2 \quad (3.1.15)$$

Wielkość $\Gamma_c / (\Gamma_c + 1)$ interpretowana jest jako krytyczna wartość dynamicznej liczby Richardsona R_{Fc} .

3.2. Model "poziomu 1"

Układ równań modelu "poziomu 1" ma postać (Mellor, Yamada, 1974):

$$\overline{uw} = - A_1 \ell q \frac{dU}{dz} \quad (3.2.1)$$

$$-\frac{q}{A_2 \ell} \overline{w\theta} = - 3\overline{\beta\theta^2} + q^2 \frac{d\theta}{dz} \quad (3.2.2)$$

$$2 \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} = - 2 \frac{q}{B_2 \ell} \overline{\theta^2} \quad (3.2.3)$$

$$\overline{wu} \frac{dU}{dz} = \overline{\beta w\theta} - \frac{q^a}{B_1 \ell} \quad (3.2.4)$$

W powyższym zapisie uwzględniono hipotezę (3.1.7) o proporcjonalności skal przestrzennych.

Przy omawianiu układu równań "poziomu 1" warto zwrócić uwagę na charakter oraz niektóre konsekwencje uproszczeń, pojawiających się na tym poziomie. Z fizycznego punktu widzenia, uproszczenia te polegają na przyjęciu izotropowości rozkładu kinetycznej energii turbulencji, tj.

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = q^2/3 \quad (3.2.5)$$

Równania (3.2.2), (3.2.3) i (3.2.4) można formalnie otrzymać z równań (3.1.4), (3.1.5) i (3.1.6), dokonując podstawienia $q^2 = 3 \overline{w^2}$; równanie (3.2.1) otrzymywane jest z (3.1.2) po pominięciu członów: związanego z poziomym strumieniem ciepła i zawierającego stałą C_1 . Analizując równania modelu "poziomu 2", zauważamy, (równanie (3.1.1)), że warunek (3.2.5) spełniony jest dla $R_F = -0.5$. Model "poziomu 1" dopuszcza tymczasem zmienność dynamicznej liczby Richardsona, nie należy zatem w ogólnym przypadku oczekiwać zawierania się rozwiązań tego modelu w klasie

rozwiązań modelu "poziomu 2". Podobnie, stałe A_1 , A_2 , B_1 i B_2 mogą przyjmować w obu tych modelach odmienne wartości.

Z równania (3.2.1), zapisanego dla warunków równowagi neutralnej z uwzględnieniem postulatów wyszczególnionych w rozdziale 3.4.1, wynika warunek

$$B_1^{-1/3} = A_1 \quad (3.2.6)$$

Uwzględnienie pojawiającego się w modelu "poziomu 1" związku (3.2.6) powoduje, że wartość stałej A_1 , wyznaczonej z powyższej zależności odbiegać może od niezależnie określonej przy pomocy równania (3.1.1) wartości stałej A_1 dla modelu "poziomu 2".

Rozwiązanie układu równań (3.2.1 - 3.2.4) z funkcjami S_M i S_H zdefiniowanymi wzorami (3.1.8-9) można przedstawić w postaci (patrz Dodatek B, równania B-55 i B-59):

$$S_H = A_2 \left[3B_2 S_H G_H + 1 \right] = A_2 \left[1 - 3\Gamma B_2/B_1 \right] \quad (3.2.7)$$

$$S_M = B_1^{-1/3} \quad (3.2.8)$$

3.3. Problem skali turbulencji

W równaniach modelu z wyższym rzędem zamykania, po sformułowaniu hipotez domykających, pozostają nadal nieokreślone pewne wielkości. Zazwyczaj hipotezy domykające formułowane są w taki sposób, że wielkości te można interpretować jako czasowe lub przestrzenne skale zjawisk związanych z turbulencją. W omówionym powyżej modelu Mellora-Yamady występuje pięć skal przestrzennych, które traktuje się jako proporcjonalne do podstawowej skali długości (*master-length scale*) ℓ . Podobne podejście stosowane jest także w wielu innych pracach.

Szereg współcześnie używanych modeli granicznej warstwy atmosfery zawiera tradycyjne określenie skali długości, wprowadzone przez Blackadara (1962):

$$\ell = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / \ell_{\infty}} \quad (3.3.1)$$

w której ℓ_{∞} jest pewną stałą o wymiarze długości. Formuła ta stanowi w istocie pewne uogólnienie używanej w opisie przyziemnej warstwy atmosfery formuły Prandtla:

$$\ell = \kappa z \quad (3.3.2)$$

Dla małych wysokości ($\kappa z \ll \ell_{\infty}$) formuła (3.3.1) przechodzi w (3.3.2), dla dużych zaś - $\ell \rightarrow \ell_{\infty}$. Powyższe wzory stosowano m.in. w modelu warstwy przyziemnej Mellora (1973) oraz w klasycznej rodzinie modeli warstwy granicznej Mellora i Yamady (Mellor, Yamada, 1974; Yamada, Mellor, 1975; Mellor, Yamada, 1982). Formuła Prandtla stosowana była również w tzw. modelu KEYPS (patrz np. Zilitinkevič, 1970).

W przedstawionych powyżej prostych formułach przestrzenna skala turbulencji zależy w sposób bezpośredni jedynie od wysokości. W rzeczywistości oczekiwać należy jednak zależności również od szeregu innych czynników. W przypadku warstwy przyziemnej czynnikiem o pierwszoplanowym znaczeniu wydaje się być także

stratyfikacja termiczna, opisywana w ramach teorii Monina-Obuchowa parametrem ζ . Zależność taka uwzględniana była m.in. w pracach Monina (1965), Lewellena i Teske (1973) oraz Prenosila (1979). W niniejszej pracy przyjmujemy, że stosunek $\ell/\kappa z$ zależy od parametru ζ , tj. że istnieje funkcja uniwersalna:

$$\ell_N(\zeta) = \frac{\ell}{\kappa z} \quad (3.3.3)$$

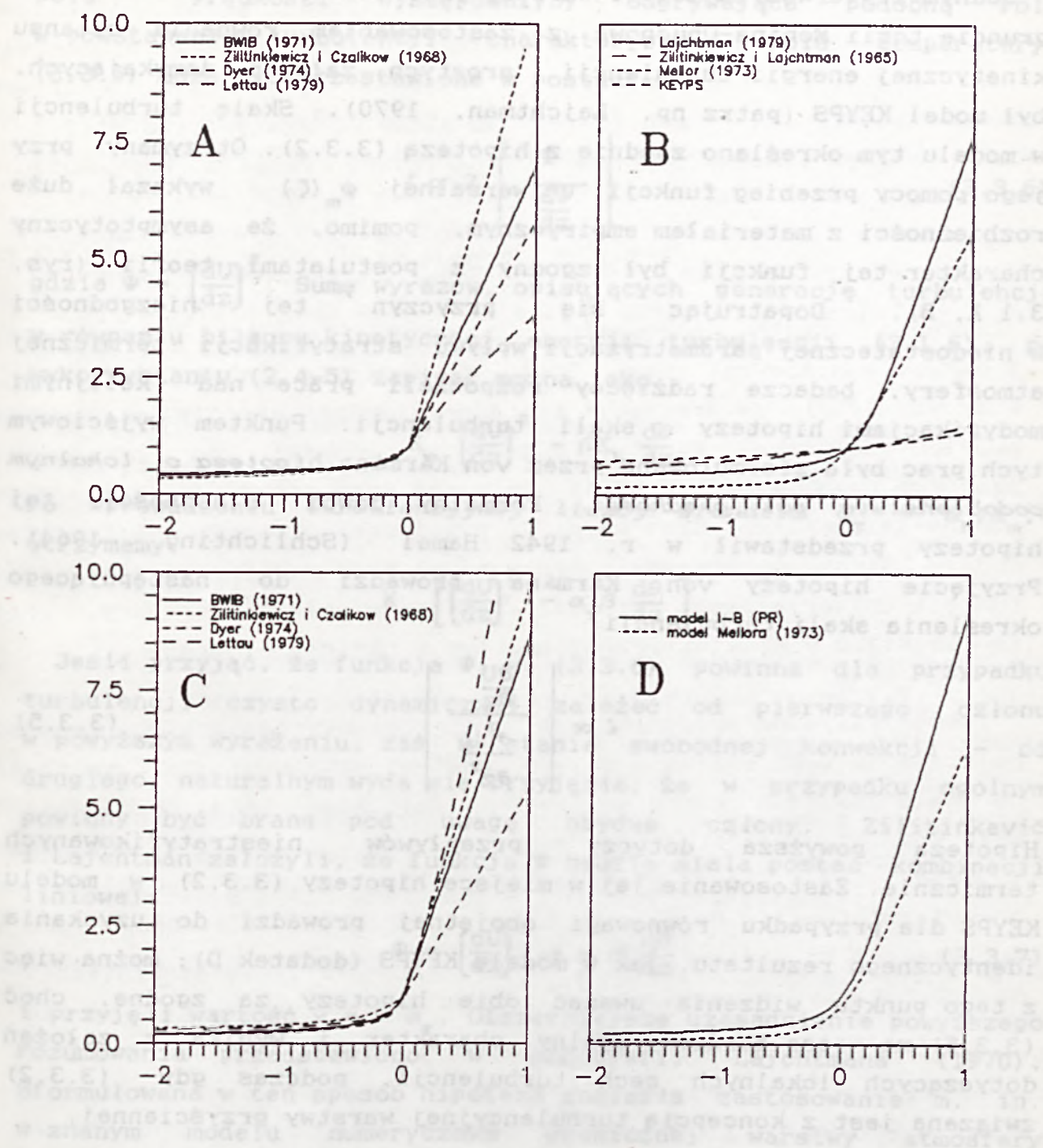
albo

$$\ell_n(\zeta) = \frac{\ell}{\kappa L_*} \quad (3.3.4)$$

Postulaty dotyczące asymptotycznego zachowania się funkcji $\ell_N(\zeta)$ sformułowano m.in. w pracy Monina (1965). W niniejszej pracy funkcja ta wyznaczana jest na podstawie hipotez ogólniejszej natury, dotyczących skali turbulencji w warstwie przyziemnej.

Skala turbulencji jest wielkością niemierzalną w sposób bezpośredni, ponadto może być ona definiowana rozmaitymi sposobami. Dla potrzeb porównania wyników poszczególnych modeli i materiału pomiarowego przyjmujemy, że skalę tę traktować będziemy jako wielkość określoną stosunkiem K_m/q . Z kolei, współczynnik turbulencji K_m związany jest z mierzalnymi bezpośrednio wielkościami zależnością (2.4), którą można traktować jako jego definicję.

Powyższe ustalenia stwarzają możliwość obliczenia wartości ℓ_N na podstawie materiału empirycznego. Rys. 4.1. (str. 74) przedstawia wartości funkcji uniwersalnej $\ell_N(\zeta)$, obliczonej dla poszczególnych danych z eksperymentów: Minnesota (Izumi i Caughey, 1976), ITCE-81 (Cvang, Zubkowskij i Kallistratova, 1981), Gotex-II (Ericson, 1982; Bergström i Alexandersson, 1981) i Cabauw (Driedonks, van Dop i Kohsiek, 1978; Wessels, 1984). Dla warunków równowagi chwiejnej obserwuje się znaczny rozrzut danych pomiarowych, podczas gdy dla warunków równowagi stałej zauważalna jest wyraźna zależność funkcyjna. Funkcja ta maleje wraz ze wzrostem parametru stabilności ζ .



Rys. 3.1. Przebieg funkcji uniwersalnej $\phi_m(\zeta)$, opisującej bezwymiarowy gradient prędkości wiatru na podstawie danych pomiarowych (A) i wyników modelowania (B).
 Bezwymiarowy gradient temperatury $\phi_h(\zeta)$ na podstawie danych pomiarowych (C) i rezultatów modeli (D).

Jednym z pierwszych modeli warstwy przyziemnej, stworzonych na gruncie teorii Monina-Obuchowa z zastosowaniem równania bilansu kinetycznej energii turbulencji i prostych założeń domykających, był model KEYPS (patrz np. Lajchtman, 1970). Skalę turbulencji w modelu tym określano zgodnie z hipotezą (3.3.2). Otrzymany przy jego pomocy przebieg funkcji uniwersalnej $\phi_m(\zeta)$ wykazał duże rozbieżności z materiałem empirycznym, pomimo, że asymptotyczny charakter tej funkcji był zgodny z postulatami teorii (rys. 3.1 A, B). Dopatrując się przyczyn tej niezgodności w niedostatecznej parametryzacji wpływu stratyfikacji termicznej atmosfery, badacze radzieccy rozpoczęli prace nad kolejnymi modyfikacjami hipotezy o skali turbulencji. Punktem wyjściowym tych prac była sformułowana przez von Kármána hipoteza o lokalnym podobieństwie pól prędkości. Formalny dowód słuszności tej hipotezy przedstawił w r. 1942 Hamel (Schlichting, 1964). Przyjęcie hipotezy von Kármána prowadzi do następującego określenia skali turbulencji:

$$l \propto \left| \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} \right| \quad (3.3.5)$$

Hipoteza powyższa dotyczy przepływów niestratyfikowanych termicznie. Zastosowanie jej w miejsce hipotezy (3.3.2) w modelu KEYPS dla przypadku równowagi obojętnej prowadzi do uzyskania identycznego rezultatu, jak w modelu KEYPS (dodatek D); można więc z tego punktu widzenia uważać obie hipotezy za zgodne, choć (3.3.5) ma nieco bardziej ogólny charakter i wynika z założeń dotyczących lokalnych cech turbulencji, podczas gdy (3.3.2) związana jest z koncepcją turbulencyjnej warstwy przyściennej.

Próbie uogólnienia hipotezy von Kármána dla termicznie stratyfikowanych warstw przyściennych podjęli Zilitinkevič i Lajchtman (1965). Sformułowali oni hipotezę, głoszącą że skala turbulencji w warunkach swobodnej konwekcji winna być opisana analogiczną do (3.3.5) formułą, w której zamiast charakterystyk

pola prędkości występowałyby odgrywające podobną rolę w powstawaniu turbulencji charakterystyki pola temperatury. (3.3.5) może być przestawione w postaci:

$$\ell \propto 2 \left| \frac{\Psi}{\frac{d\Psi}{dz}} \right| \quad (3.3.6)$$

gdzie $\Psi = \left(\frac{dU}{dz} \right)^2$. Sumę wyrazów, opisujących generację turbulencji w równaniu bilansu kinetycznej energii turbulencji (3.1.6), po wykorzystaniu (2.4-5) zapisać można jako:

$$K_m \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - \beta K_h \frac{d\theta}{dz}$$

Po wprowadzeniu turbulencyjnej liczby Prandtla $\alpha_T = K_h/K_m$, otrzymamy:

$$K_m \left[\left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - \alpha_T \beta \frac{d\theta}{dz} \right]$$

Jeśli przyjąć, że funkcja Ψ w (3.3.6) powinna dla przypadku turbulencji czysto dynamicznej zależeć od pierwszego członu w powyższym wyrażeniu, zaś w stanie swobodnej konwekcji - od drugiego, naturalnym wyda się przyjęcie, że w przypadku ogólnym powinny być brane pod uwagę obydwa człony. Zilitinkevič i Lajchtman założyli, że funkcja Ψ będzie miała postać kombinacji liniowej:

$$\Psi = \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 + \gamma \beta \frac{d\theta}{dz} \quad (3.3.7)$$

i przyjęli wartość $\gamma = -\alpha_T$. Obszerniejsze uzasadnienie powyższego rozumowania przedstawiono w monografii Lajchtmana (1970). Sformułowana w ten sposób hipoteza znalazła zastosowanie m. in. w znanym modelu numerycznym granicznej warstwy atmosfery Bobylewej, Zilitinkeviča i Lajchtmana (1967).

Również i opisana wyżej modyfikacja nie przyniosła radykalnej poprawy zgodności przebiegu funkcji uniwersalnych z danymi eksperymentalnymi (rys. 3.1 B). Przyczyn tego faktu upatrywano początkowo w zaniedbaniu skutków wypromieniowania ciepła przez

dolne warstwy atmosfery. Jednak podjęte przez Gavrilova i Lajchtmana (1973) próby uwzględnienia tych efektów zakończyły się również niepowodzeniem. Sukces przyniosło dopiero spostrzeżenie (Lajchtman, 1979), że stała γ , występująca w (3.3.7) nie musi być tożsama z turbulencyjną liczbą Prandtla. Przyjmując

$$\Psi = \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - m \alpha_T \beta \frac{d\theta}{dz} \quad (3.3.8)$$

otrzymano istotne polepszenie zgodności wyników modelowania z danymi pomiarowymi (rys. 3.1). Stwierdzono także (Lajchtman, Kudrova, 1980), że przyjęcie tak sformułowanej hipotezy w prostym modelu granicznej warstwy atmosfery prowadzi do otrzymania zgodnych z pomiarami funkcji uniwersalnych teorii podobieństwa Monina-Kazańskiego dla warstwy granicznej. Sporym mankamentem modelu Lajchtmana pozostał jednak nadal brak możliwości określenia funkcji uniwersalnych, określających cechy pola temperatury. Brak ten usunięto w modelu, przedstawionym w niniejszej pracy.

Istota fizyczna proponowanych przez badaczy radzieckich ulepszeń polegała na uwzględnieniu wpływu lokalnej stratyfikacji termicznej na skalę zaburzeń turbulencyjnych. Zależność taka uwzględniana była również w pracach innych autorów, np. w pracach Lewellena i Teske (1973), a następnie Prenosila (1979) uwzględniono postulaty teorii Monina-Obuchowa dotyczące zależności skali turbulencji od stratyfikacji termicznej. Zadano w nich następującą postać formuły, określającej skalę turbulencji:

$$\frac{\ell}{x z} = \begin{cases} \alpha, & \zeta \leq \zeta_1 \\ \alpha \zeta_1 \zeta^{-1}, & \zeta > \zeta_1 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Modele Lewellena i Teske oraz Prenosila dobrze prognozowały przebiegi funkcji uniwersalnych teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. W pracy Prenosila testowano również wariant modelu, w którym wykorzystano zamiast (3.3.9) – rozwiązanie tzw. równania skali turbulencji. Otrzymane wyniki, podobnie jak

doświadczenia Mellora i Yamady (1982) zdają się jednak świadczyć na niekorzyść takiego rozwiązania.

Interesująca koncepcja, polegająca na częściowej rezygnacji założenia o proporcjonalności poszczególnych skal przestrzennych, przedstawiona została w pracy Therry'ego i Lacarréré (1983). Praca ta postuluje stosowanie stosunkowo prostego modelu, zawierającego równanie bilansu energii turbulencyjnej i parametryzację strumieni turbulencyjnych przy pomocy K-teorii, przy rozróżnieniu dwóch skal długości - związanych z dyssypacją i mieszaniem.

Nielokalna zależność skali turbulencji w warstwie granicznej od stanu równowagi w przyziemnej warstwie atmosfery zaproponowana została przez Deardorffa (1974). Zależność tą wykorzystywano z dobrymi wynikami w pracach Bodina (1979) oraz Therry'ego i Lacarréré (1983).

W modelu warstwy granicznej, zbliżonym do modelu "poziomu $2\frac{1}{2}$ " Mellora i Yamady, rozwijanym przez Uniwersytet w Uppsali (Enger 1983; Enger, 1986; Tjernström, 1987), stosowanych jest szereg prognostycznych formuł określających skalę turbulencji w poszczególnych obszarach, wyróżnionych w warstwie granicznej. Również i w tym modelu uwzględniana jest zależność skali turbulencji od stanu równowagi w warstwie przyziemnej.

Obliczanie skali turbulencji w ostatnich z omawianych grup modeli dokonywane jest przy pomocy rozmaitych wzorów diagnostycznych, sformułowanych na podstawie analizy danych doświadczalnych, względnie odpowiednio dobranych w eksperymentach numerycznych. Natomiast zaproponowane przez Lajchtmana (1979) uogólnienie formuły von Kármána posiada walor uzasadnionej argumentacją fizyczną hipotezy, której zakres stosowalności może być szerszy, niż dobranych dla konkretnych warunków formuł diagnostycznych. W dalszym ciągu rozdziału skonstruowana została przy pomocy tej hipotezy rodzina modeli, wykorzystujących przedstawiony przez Mellora i Yamadę sposób parametryzacji

turbulencji. Dotychczas istniejące modele sklasyfikowano jako pewne przypadki szczególne. W dalszych rozdziałach poszczególne warianty poddane zostają analizie, przy czym sporo uwagi poświęca się problemowi sformułowania skali turbulencji w przyziemnej warstwie atmosfery. Wyniki modelowania skonfrontowane zostają z materiałem empirycznym. Na podstawie otrzymanych zależności dla warstwy przyziemnej proponowane są korekty schematów obliczania skali turbulencji w inżynierskich modelach warstwy granicznej.

3.4. Skalowanie wielkości występujących w równaniach modelu.

W myśl teorii podobieństwa Monina-Obuchowa, wszystkie jednopunktowe charakterystyki statystyczne pól turbulencyjnych, wyskalowane przy pomocy parametrów warstwy przyziemnej u_* , T_* oraz L_* , winny stanowić jednoznacznie określone funkcje co najwyżej jednej zmiennej - bezwymiarowego parametru równowagi $\zeta = z/L_*$. W celu wyznaczenia tych funkcji wprowadzimy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$q_N = B_1^{-1/3} \frac{q}{u_*} \quad (3.4.1)$$

$$k_n = K_m \kappa^{-1} u_*^{-1} L_*^{-1} \quad (3.4.2)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon \kappa z u_*^{-3} \quad (3.4.3)$$

Wprowadzona zmienna k_n równa jest dynamicznej liczbie Richardsona:

$$R_F = \frac{\beta u_* T_*}{u_*^2 \frac{dU}{dz}} = \frac{\beta u_* T_*}{u_*^4 K_m^{-1}} = \frac{\kappa \beta T_*}{u_*^2} \kappa^{-1} u_*^{-1} K_m = k_n \quad (3.4.4)$$

3.5. Związki między poszczególnymi wielkościami w warunkach równowagi obojętnej

Dla warunków równowagi obojętnej przyjmujemy następujące postulaty:

$$(i) \quad \ell_{Nneu} = 1, \quad \text{tj.} \quad \ell_{neu} = \kappa z \quad (3.5.1)$$

$$(ii) \quad \phi_{Mneu} = 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (3.5.2)$$

Na mocy (3.1.6) i (3.5.2) otrzymujemy:

$$-\overline{wu} \frac{dU}{dz} = \frac{q^3}{\Lambda_1}, \quad \text{czyli} \quad u_*^3 = \frac{\kappa z q^3}{B_1 \ell} \quad (3.5.3)$$

Wprowadzając zdefiniowaną wyżej (3.4.1) funkcję q_N , otrzymamy:

$$\ell_{Nneu} = q_{Nneu}^3 \quad (3.5.4)$$

Wykorzystując postulat (3.5.1), dostajemy:

$$q_{Nneu} = 1, \quad \text{tj.} \quad B_1 = \left[\frac{q}{u_*} \right]_{neu}^3 \quad (3.5.5)$$

Z definicji funkcji S_M (3.1.8), postulatów (3.5.1), (3.5.2), oraz (3.5.5) wynika:

$$S_{Mneu} = \frac{u_*^2}{\ell q \frac{dU}{dz}} = \left[\frac{q}{u_*} \right]_{neu}^{-1} = B_1^{-1/3} \quad (3.5.6)$$

Zajmiemy się obecnie określeniem stałej proporcjonalności w hipotezie (3.3.6). W warunkach równowagi obojętnej funkcja Ψ (3.3.8) przyjmuje postać:

$$\Psi = \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \quad (3.5.7)$$

Wykorzystując postulat (3.5.2), wyrażenie stojące pod znakiem modułu w (3.3.6) zapiszemy w postaci:

$$\frac{\Psi}{\frac{d\Psi}{dz}} = \frac{u_*^2 (\kappa z)^{-2}}{u_*^2 \kappa^{-2} \frac{d}{dz} \left[z^{-2} \right]} = -z/2 \quad (3.5.8)$$

Po uwzględnieniu (3.5.1) dostajemy zatem zamiast (3.3.6):

$$\ell = -2\kappa \frac{\Psi}{\frac{d\Psi}{dz}} \quad (3.5.9)$$

W dalszej części rozdziału dla wygody stosować będziemy symbolikę wprowadzoną w Dodatku B. Z definicji funkcji S_M (3.1.8, B-17), oraz G_M (B-14) wynika:

$$\left[S_M \ G_M \right]_{neu} = \left[\frac{u_*^3}{q^3} \frac{\ell}{\kappa z} \right]_{neu} = B_1^{-1} \quad (3.5.10)$$

a ponieważ $S_{Mneu} = B_1^{-1/3}$ (3.5.6), więc $G_{Mneu} = B_1^{-2/3}$.

Z definicji funkcji S_H (3.1.9, B-18) oraz G_H (B-15) wynika:

$$\left[S_H \ G_H \right]_{neu} = 0 \quad (3.5.11)$$

Przy tym, $G_H = 0$, natomiast:

$$S_{Hneu} = \left[\frac{u_* \kappa z}{\ell q \phi_h} \right]_{neu} = B_1^{-1/3} \phi_{hneu}^{-1} \quad (3.5.12)$$

Warunki (3.5.11) i (3.5.10) zgodne są z równaniem bilansu energii kinetycznej ruchu turbulencyjnego w postaci bezwymiarowej (B-27). Przy równowadze obojętnej również zdefiniowany przez (3.1.14) parametr Γ przyjmuje wartość zerową.

Równanie ewolucji wariancji temperatury przybiera identyczną postać zarówno w modelu "poziomu 2" (3.1.5, B-26), jak i "poziomu 1" (3.2.3, B-57). Wykorzystując definicję parametru Y_θ

(B-19) oraz otrzymany wcześniej związek (3.5.12), dostaniemy:

$$B_2 = B_1^{1/3} \phi_{h\text{ neu}}^{-1} \left[\frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} \right]_{\text{neu}} \quad (3.5.13)$$

Pozostałe równania modeli "poziomu 1" i "poziomu 2", z których wyznaczane są stałe A_1 , A_2 i C_1 , różnią się pomiędzy sobą.

W modelu "poziomu 1" stała A_1 związana jest (niezależnie od stanu równowagi) ze stałą B_1 zależnością (3.2.6), natomiast stałą A_2 otrzymujemy z (3.2.7), podstawiając (3.5.12) oraz $\Gamma = 0$:

$$A_2 = S_{H\text{ neu}} = B_1^{-1/3} \phi_{h\text{ neu}}^{-1} \quad (3.5.14)$$

W modelu "poziomu 2", na mocy (B-22):

$$A_1 = \frac{B_1}{6} \left[1 - 3 \left[\frac{w^2}{q^2} \right]_{\text{neu}} \right] \quad (3.5.15)$$

zaś z (B-25), przy $G_H = 0$ i (3.5.12) otrzymujemy:

$$A_2 = \frac{1}{3 \left[\frac{w^2}{q^2} \right]_{\text{neu}} \phi_{h\text{ neu}} B_1^{1/3}} \quad (3.5.16)$$

Wreszcie z (B-24), (3.5.6) i (3.5.12) otrzymujemy:

$$\left[Y_u \right]_{\text{neu}} = 3 A_2 B_1^{-1/3} \left[1 + \phi_{h\text{ neu}}^{-1} \right] \quad (3.5.17)$$

Podstawiając (3.5.17) do (B-23) z uwzględnieniem (3.3.10), dostajemy:

$$C_1 = \left[\frac{w^2}{q^2} \right]_{\text{neu}} - \frac{1}{3 A_1 B_1^{1/3}} \quad (3.5.18)$$

Otrzymane zależności dla obydwu przybliżeń modelowych zestawiono w tabeli 3.1.

Tab. 3.1. Związki stałych A_1 , A_2 , B_1 , B_2 i C_1 z wartościami funkcji uniwersalnych w warunkach równowagi neutralnej (w oznaczeniach opuszczono indeks "neu")

Stała	model "poziomu 1"	model "poziomu 2"
A_1	$B_1^{-1/3}$	$\frac{B_1}{6} \left[1 - 3 \left[\frac{w^2}{q^2} \right] \right]$
A_2	$B_1^{-1/3} \phi_h^{-1}$	$\left[3 \left[\frac{w^2}{q^2} \right] \phi_h B_1^{1/3} \right]^{-1}$
B_1	$\left[\frac{q}{u_*} \right]^3$	$\left[\frac{q}{u_*} \right]^3$
B_2	$B_1^{1/3} \phi_h^{-1} \left[\frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} \right]$	$B_1^{1/3} \phi_h^{-1} \left[\frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} \right]$
C_1	—	$\left[\frac{w^2}{q^2} \right] - \frac{1}{3 A_1 B_1^{1/3}}$

3.6. Fundamentalne równanie modelu

Równanie bilansu energii kinetycznej ruchów turbulentnych (3.1.6), wraz ze związkami turbulentnych strumieni pędu i ciepła z gradientami uśrednionych pól prędkości wiatru i temperatury (3.1.8-14) i odpowiednią hipotezą o skali turbulencji tworzy zamknięty układ równań, który przekształcić można do pojedynczego równania, wiążącego parametry równowagi ζ i R_F . Równanie to nazywać będziemy w dalszym toku *fundamentalnym równaniem modelu*.

3.6.1. Fundamentalne równanie modelu "poziomu 2" ze skalą turbulencji określaną uogólnioną formułą von Kármána (Model II-B)

Równanie (3.1.6), po podstawieniu związku (3.1.8) prowadzi do:

$$\frac{\overline{uw}^2}{S_M \ell q} + \beta \overline{w\theta} = \frac{q^3}{B_1 \ell} \quad (3.6.1)$$

czyli

$$\frac{u_*^4}{S_M \ell q} - \beta u_* T_* = \frac{q^3}{B_1 \ell} \quad (3.6.2)$$

Wykorzystując (3.4.4), (3.1.8) oraz definicję współczynnika K_m , zapisać możemy:

$$R_F = \frac{S_M \ell q \beta u_* T_*}{u_*^4} \quad (3.6.3)$$

Wykorzystując definicję skali długości Monina-Obuchowa (2.3), otrzymamy związek funkcji q_N i ℓ_N z parametrami równowagi ζ i R_F :

$$R_F = S_M \frac{\ell}{\kappa z} \frac{q}{u_*} \frac{\kappa \beta T_* z}{u_*^2} = S_M \ell_N B_1^{1/3} q_N \zeta \quad (3.6.4)$$

zaś równanie bilansu kinetycznej energii turbulencji z wprowadzoną parametryzacją strumieni turbulentnych i dyssypacji (3.6.2),

przyjmie po uwzględnieniu (3.6.3) postać:

$$1 - R_F = S_M B_1^{1/3} q_N^4 \quad (3.6.5)$$

albo, po uwzględnieniu (3.6.4):

$$1 - R_F = S_M B_1^{1/3} \frac{R_F^4}{\ell_N^4 \zeta^4 S_M^4 B_1^{4/3}} = \frac{R_F^4}{\ell_N^4 \zeta^4 S_M^3 B_1} \quad (3.6.6)$$

W celu określenia skali turbulencji stosowana będzie uogólniona hipoteza von Kármána w postaci (3.5.9), z funkcją Ψ daną przez (3.3.8). Funkcję tę przedstawimy z pomocą (2.4-5) i definicji α_T oraz L_* w postaci:

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - m \alpha_T \beta \frac{d\theta}{dz} = \frac{u_*^4}{K_m^2} + m \beta \frac{u_* T_*}{K_m} = \\ &= \frac{u_*^2}{R_F^2 \kappa^2 L_*^2} + m \beta \frac{T_*}{R_F \kappa L_*} = \frac{u_*^2}{\kappa^2 L_*^2} \left[R_F^{-2} + m \beta \frac{T_* \kappa L_*}{R_F u_*^2} \right] = \\ &= \frac{u_*^2}{\kappa^2 L_*^2} \left[R_F^{-2} - m R_F^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Wyrażenie występujące przed nawiasem ma w myśl założeń teorii Monina-Obuchowa wartość stałą, natomiast R_F jest funkcją ζ względnie z . Spełniony więc będzie związek:

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{u_*^2}{\kappa^2 L_*^2} \left[-2R_F^{-3} + m R_F^{-2} \right] L_*^{-1} \frac{dR_F}{d\zeta} \quad (3.6.8)$$

Zatem, skala turbulencji może być opisana formułą:

$$\ell = -2 \kappa \frac{\left[R_F^{-2} - m R_F^{-1} \right]}{\left[-2R_F^{-3} + m R_F^{-2} \right] L_*^{-1} \frac{dR_F}{d\zeta}}, \quad \text{tj.}$$

$$\ell = 2 \kappa \frac{R_F \left[1 - m R_F \right] L_*}{\left[2 - m R_F \right] \frac{dR_F}{d\zeta}} \quad (3.6.9)$$

albo, w postaci bezwymiarowej:

$$\ell_N = 2 \frac{R_F (1 - mR_F)}{\zeta \left[2 - mR_F \right] \frac{dR_F}{d\zeta}} \quad (3.6.10)$$

Otrzymany rezultat podstawimy do równania (3.6.6). Otrzymujemy:

$$\ell_N \zeta = 2 \frac{R_F (1 - mR_F)}{\left[2 - mR_F \right] \frac{dR_F}{d\zeta}} = \frac{R_F}{(1 - R_F)^{1/4} S_M^{3/4} B_1^{1/4}}$$

albo:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = S_M^{3/4} B_1^{1/4} \frac{2 (1 - mR_F) (1 - R_F)^{1/4}}{\left[2 - mR_F \right]} \quad (3.6.11)$$

Otrzymane równanie (3.6.11) jest fundamentalnym równaniem modelu "poziomu 2" ze skalą turbulencji określoną uogólnioną formułą von Karmana.

3.6.2. Fundamentalne równanie modelu "poziomu 1" ze skalą turbulencji określoną uogólnioną formułą von Kármána (Model I-B)

Model ten tworzą równania: (3.2.1-4) oraz uogólniona hipoteza von Kármána, którą dogodnie stosować jest nadal w postaci (3.6.9). Po podstawieniu (3.2.1) i (3.2.4) do (3.6.9) z uwzględnieniem (3.2.5) otrzymamy:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = \frac{2 (1 - mR_F) (1 - R_F)^{1/4}}{\left[2 - mR_F \right]} \quad (3.6.12)$$

Analityczne rozwiązanie równania (3.6.12) przedstawił Lajchtmann (1979). Należy jednak podkreślić, iż model Lajchtmanna oparty był wyłącznie na równaniu bilansu kinetycznej energii turbulencji i nie zawierał związków (3.2.2)-(3.2.3), pozwalających określić, po rozwiązaniu równania fundamentalnego, funkcje uniwersalne dla gradientu temperatury i wariancji temperatury. Rozwiązania równania (3.6.12) ma postać (por. Dodatek C):

$$\zeta = -\frac{2}{3} y^3 + \frac{n^4-1}{2 n^3} \left[-2 \arctg(ny) + \ln \left[\frac{ny+1}{ny-1} \right] \right] + C \quad (3.6.13)$$

gdzie:

$$C = \frac{2}{3} - \frac{n^4-1}{2 n^3} \left[-2 \arctg(n) + \ln \left[\frac{n+1}{n-1} \right] \right], \quad (3.6.14)$$

$$n = \left[\frac{m}{m-1} \right]^{1/4} \quad (3.6.15)$$

$$y = \left[1 - R_F \right]^{1/4} \quad (3.6.16)$$

3.6.3. Fundamentalne równanie modelu Mellora (Model II-A)

W przedstawionym przez Mellora (1973) modelu warstwy przyziemnej zastosowano opisany wyżej układ równań "poziomu 2", ze skalą turbulencji określoną formułą:

$$l = \kappa z \quad (3.6.17)$$

tj. $l_N = 1$. Prowadzi to natychmiast do otrzymania równania fundamentalnego w postaci:

$$1 - R_F = \frac{R_F^4}{\zeta^4 S_M^3 B_1} \quad (3.6.18)$$

3.6.4. Fundamentalne równanie modelu KEYPS (Model I-A)

Model KEYPS, zamieszczony w niniejszym omówieniu głównie ze względów historycznych, złożony jest z równania bilansu energii kinetycznej ruchów turbulencyjnych, oraz hipotezy (3.6.17). Rozszerzony wariant tego modelu może być skonstruowany przy pomocy układu (3.2.1) - (3.2.4). Fundamentalne równanie modelu ma postać:

$$1 - R_F = \frac{R_F^4}{\zeta^4} \quad (3.6.19)$$

3.7. Funkcje uniwersalne teorii Monina-Obuchowa

Dysponując rozwiązaniem fundamentalnego równania modelu $R_F(\zeta)$, możemy przy pomocy związków omówionych w rozdziale 3.6 sformułować postać funkcji uniwersalnych, opisujących energię kinetyczną ruchu turbulencyjnego, skalę turbulencji, wariancję temperatury, pionowe gradienty wiatru i temperatury. Z równania (3.6.5) otrzymujemy:

$$q_N = \left[\frac{1 - R_F}{S_M B_1^{1/3}} \right]^{1/4} \quad (3.7.1)$$

z (3.6.4):

$$\ell_N = \frac{R_F}{S_M B_1^{1/3} q_N \zeta} \quad (3.7.2)$$

albo, uwzględniając (3.7.1):

$$\ell_N = \frac{R_F (1 - R_F)^{-1/4}}{S_M^{3/4} B_1^{1/4} \zeta} \quad (3.7.3)$$

Mając dane rozwiązanie równania fundamentalnego w postaci funkcji $R_F(\zeta)$, funkcję $\phi_m(\zeta)$ wyznaczyć można ze związku (2.11). Zależności definicyjne (3.1.8) i (3.1.9) można przedstawić z wykorzystaniem (2.6), (2.7), (3.4.1) i (3.3.3) w postaci bezwymiarowej:

$$\phi_m^{-1} = S_M B_1^{1/3} \ell_N q_N \quad (3.7.4)$$

$$\phi_h^{-1} = S_H B_1^{1/3} \ell_N q_N \quad (3.7.5)$$

Z (3.7.4) i (3.7.5) wynika dalej:

$$\phi_h = \phi_m \frac{S_M}{S_H} \quad (3.7.6)$$

Wreszcie, z (3.1.5), po uwzględnieniu definicji funkcji q_N , ℓ_N oraz ϕ_h :

$$\frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} = B_2 B_1^{-1/3} \ell_N q_N^{-1} \phi_h \quad (3.7.7)$$

a po uwzględnieniu (3.7.6), (2.11), (3.7.2) i (3.7.1):

$$\frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} = B_2 B_1^{-2/3} \left[\frac{S_M B_1^{1/3}}{1 - R_F} \right]^{1/2} S_H^{-1} = B_2 B_1^{-2/3} q_N^{-2} S_H^{-1} \quad (3.7.8)$$

Powyżej przedstawione zależności słuszne są zarówno dla modelu "poziomu 2", jak też i dla modelu "poziomu 1" - po formalnym podstawieniu:

$$S_M B_1^{1/3} = 1 \quad (3.7.9)$$

Zależność liczby R_i od R_F dana jest przez (por. B-38):

$$R_i = \frac{S_M}{S_H} R_F \quad (3.7.10)$$

W modelach "poziomu 1" i "poziomu 2" wielkości S_M i S_H stanowią funkcje jednej zmiennej - R_F (patrz Dodatek B). Nie zależą przy tym one od konkretnej postaci hipotezy określającej skalę turbulencji. Zatem postać związku $R_i = f(R_F)$ jest także niezależna od postaci tej hipotezy. Dla modeli "poziomu 1" związek ten przybiera formę:

$$R_i = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{R_F^{-1} - 1}{R_F^{-1} - 3B_2/B_1 - 1} R_F \quad (3.7.11)$$

zaś dla modeli "poziomu 2":

$$R_i = \frac{A_1}{A_2} \frac{\gamma_1 - C_1 - (6A_1 + 3A_2) \Gamma/B_1}{\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma + 3A_1 \Gamma/B_1} R_F \quad (3.7.12)$$

Zarazem, stosunek liczb R_i i R_F jest identyczny (por. 2.12), jak stosunek funkcji uniwersalnych $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$.

4. Analiza własności modeli.

Zajmiemy się obecnie analizą własności modeli, wprowadzonych w rozdziale 3.6. Celem analizy jest:

- określenie zakresu zmienności funkcji uniwersalnych i parametrów stabilności w poszczególnych modelach
- wyznaczenie dopuszczalnych zakresów wartości stałych poszczególnych modeli i dobór wartości stałych.
- ocena wyników modelowania

Określenie związków pomiędzy wartościami stałych modelu, a wartościami funkcji uniwersalnych w warunkach równowagi obojętnej, jak również ewentualnych związków pomiędzy stałymi, dokonane zostało wcześniej - w rozdziale 3.5. Ustalenia te - z wyjątkiem określonej przez (3.5.9) stałej proporcjonalności w uogólnionej hipotezie von Kàrmàna - nie zależą od postaci hipotezy o skali turbulencji, a jedynie mogą różnić się w przypadku przybliżeń "poziomu 1" i "poziomu 2". W niniejszym rozdziale dokonane zostaną:

- analiza przebiegu zmienności funkcji uniwersalnych i parametrów stabilności w poszczególnych modelach
- porównanie charakterystyk asymptotycznych poszczególnych modeli z rezultatami teorii Monina-Obuchowa
- porównanie rezultatów poszczególnych modeli
- częściowa ocena zależności wyników modelowania od doboru stałych
- porównanie wyników modelowania z danymi eksperymentalnymi

Przy badaniu przebiegu zmienności rozwiązań modelowych zastosowane zostaną zarówno metody analityczne, jak i numeryczne.

4.1. Zakres zmienności parametrów równowagi i funkcji uniwersalnych. Własności asymptotyczne modeli.

4.1.1. Zakres zmienności podstawowych parametrów równowagi

Kluczowe znaczenie dla analizy własności poszczególnych modeli ma określenie zakresu zmienności parametrów równowagi ζ , R_F oraz R_i dla poszczególnych modeli. W tym celu zbadać należy równania fundamentalne poszczególnych modeli, oraz zależności (3.7.11) dla modeli "poziomu 1" albo (3.7.12) - dla modeli "poziomu 2". Ponieważ $S_M > 0$ stanowi warunek konieczny realizowalności modelu (patrz rozdział 3.1), zbadania wymagają również wpływające zeń ograniczenia.

Zbadamy obecnie własności asymptotyczne równań fundamentalnych poszczególnych modeli i ich rozwiązań. Analizę rozpoczniemy od modelu I-A. Z równania (3.6.19), przy założeniu wzajemnej jednoznaczności funkcji $R_F(\zeta): \mathbb{R} \rightarrow \{R_F: R_F \in (-\infty, 1)\}$ otrzymujemy natychmiast:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} R_F = 1; \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} R_F = -\infty \quad (4.1.1)$$

Przy czym, po zapisaniu (3.6.19) w postaci:

$$\zeta^4 = \frac{R_F^3}{R_F^{-1} - 1} \quad (4.1.2)$$

widoczne jest, że przy $\zeta \rightarrow -\infty$ $R_F(\zeta)$ zachowuje się tak, jak funkcja $-|\zeta|^{4/3}$.

Analizę własności równania fundamentalnego modelu I-B rozpoczniemy od zbadania przebiegu zmienności funkcji $\zeta(y)$,

określonej przez (3.6.13). Wyjściowe równanie (C-5), które posłużyło nam do otrzymania postaci funkcji $\zeta(y)$ może być zapisane w postaci:

$$\frac{d\zeta}{dy} = -2 \left[\frac{2 - m + my^4}{1 - m + my^4} \right] y^2 \quad (4.1.3)$$

Jednocześnie, $y = (1 - R_F)^{1/4}$ (3.6.16). Mianownik ułamka stojącego po prawej stronie przyjmuje wartość zerową, gdy

$$y = (1 - R_F)^{1/4} = \left[\frac{m - 1}{m} \right]^{1/4} = n^{-1} \quad (4.1.4)$$

to jest, gdy $R_F = m^{-1}$. Z (4.1.3) i (3.6.16) wynika dalej, że dla $R_F \in (-\infty, 1/m)$ i $R_F < 1$ funkcja $\zeta(R_F)$ jest monotoniczna i różnowartościowa¹. W tej sytuacji dogodne wydaje się interpretowanie m^{-1} jako tzw. krytycznej wartości dynamicznej liczby Richardsona R_{Fc} . W pracach pomiarowych (np. Kondo, Kanechika, Yasuda, 1978) szacuje się, że wartość ta jest rzędu $0.1 \div 0.4$. Nie wybierając jeszcze żadnej konkretnej wartości R_{Fc} i związanej z nią stałej m , przyjmiemy w tym miejscu, że jest ona mniejsza od jedności. W dalszym toku pracy ograniczać będziemy się więc jedynie do rozpatrywania przypadku $R_F \in (-\infty, 1/m)$, $m^{-1} \equiv R_{Fc} < 1$.

¹ Z równania (4.1.3) wynika, że w przedziale (n^{-1}, ∞) funkcja $\zeta(y)$, stanowiąca jego rozwiązanie, będzie monotoniczna. Zbadanie ciągłości tej funkcji sprowadza się do analizy wyrażeń, znajdujących się w nawiasie kwadratowym w (3.6.13), przy czym wystarczy ograniczać się do przedziału (n^{-1}, ∞) . W tym zakresie zmienności wyrażenie $(ny+1)/(ny-1)$ jest dodatnie, a argument funkcji arctg mieści się w przedziale $(1, \infty)$. Zatem, dla $y > n^{-1}$ funkcja $\zeta(y)$ jest wzajemnie jednoznacznie określona i równanie (3.6.16) może być rozwiązane ze względu na y przy zadanych wartościach ζ .

Z (3.6.13) wynika:

$$\lim_{y \rightarrow 1/n} \zeta = \infty ; \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta = -\infty \quad (4.1.5)$$

Przy $y \rightarrow n^{-1}$ wszystkie człony prawej strony (3.6.13), oprócz członu logarytmicznego, przyjmują skończone wartości. Wykorzystując fakt wzajemnie jednoznacznego określenia funkcji danej wzorem (3.6.13) w przedziale $(1/n, \infty)$, (4.1.5) przedstawimy jako:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} y = n^{-1} ; \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} y = \infty \quad (4.1.6)$$

i wreszcie, uwzględniając (3.6.15-16):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} R_F = (1 - n^{-4}) = m^{-1} ; \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} R_F = -\infty \quad (4.1.7)$$

Zbadanie charakterystyk asymptotycznych modelu I-B w warunkach swobodnej konwekcji może być dokonane dwiema technikami: przez analizę równania (3.6.12) i jego rozwiązania (3.6.13), albo przez uproszczenie wyjściowego układu równań przy założeniu, że u_* jest wielkością małą i traci rolę parametru określającego stan warstwy przyziemnej. Przedstawimy poniżej analizę wykonaną drugą metodą.

W stanie swobodnej konwekcji równanie bilansu kinetycznej energii turbulencji (3.2.4) zawiera już tylko wyrazy związane z termiczną generacją energii i dyssypacją; spełnione są warunki $|R_F| \gg 1$ oraz $1 - R_F \cong -R_F$. Równanie to, po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej analogicznie do (3.6.5) zapisać można jako:

$$R_F = -q_N^4 \quad (4.1.8)$$

Związek (3.6.4) po uwzględnieniu (3.7.9) przepisujemy w postaci:

$$R_F = \ell_N \zeta q_N \quad (4.1.9)$$

Funkcję Ψ , określoną przez (3.3.8), przedstawimy wykorzystując przekształcenie (3.6.7) i warunek $|R_F| \gg 1$ w postaci:

$$\Psi = -m \alpha_T \beta \frac{d\theta}{dz} = \frac{u_*^2}{\kappa^2 L_*^2} m R_F^{-1} \quad (4.1.10)$$

Z kolei, (3.6.8) zapisać można w formie:

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{u_*^2}{\kappa^2 L_*^2} m R_F^{-2} L_*^{-1} \frac{dR_F}{d\zeta} \quad (4.1.11)$$

Po czym otrzymujemy analog formuły von Kármána dla warunków swobodnej konwekcji w postaci bezwymiarowej:

$$\ell_N \zeta = -2 \frac{R_F}{\frac{dR_F}{d\zeta}} \quad (4.1.12)$$

Po podstawieniu (4.1.9) i (4.1.8) otrzymujemy:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = -2 (-R_F)^{1/4} \quad (4.1.13)$$

Czyli:

$$\frac{2}{3} |R_F|^{3/4} = |\zeta| + \text{const} \quad (4.1.14)$$

Albo:

$$R_F \sim -|\zeta|^{4/3} \quad (4.1.15)$$

W celu przeanalizowania własności asymptotycznych rozwiązania fundamentalnego równania modelu II-A (3.6.18) niezbędne jest zbadanie przebiegu zmienności występującej w tym równaniu funkcji $S_M(R_F)$. Funkcja ta dana jest wzorami (3.1.11) oraz (3.1.14). Z (3.1.14) wynika, że funkcja $\Gamma(R_F)$ posiada asymptotę $R_F = 1$. Z uwagi na interpretację fizyczną, dalsze analizy ograniczymy do przedziału zmienności $R_F \in (-\infty, 1)$. Z (3.1.14) otrzymujemy:

$$\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \Gamma = -1 ; \quad \lim_{R_F \rightarrow 1^-} \Gamma = +\infty \quad (4.1.16)$$

Zbadać należy zatem własności funkcji (3.1.11) dla $\Gamma \in (-1, \infty)$.

W tym celu przekształcimy nieco (3.1.11):

$$S_M = 3A_1 \frac{\frac{\gamma_1^2 - C_1 \gamma_1}{\Gamma} - \left[\gamma_2 \gamma_1 - C_1 \gamma_1 \right] - \gamma_1 \frac{6A_1 + 3A_2}{B_1}}{\gamma_1 \sqrt{\Gamma} - \gamma_2 + 3A_1/B_1} +$$

$$+ \frac{3 A_1 \gamma_2 (6A_1 + 3A_2) \Gamma}{B_1 (\gamma_1 \sqrt{\Gamma} - \gamma_2) + 3A_1} \quad (4.1.17)$$

Ponieważ stałe modelu są dodatnie, więc:

$$\lim_{R_F \rightarrow 1^-} S_M = \lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} S_M = -\infty \quad (4.1.18)$$

$$\lim_{R_F \rightarrow -\infty} S_M = \lim_{\Gamma \rightarrow -1^+} S_M =$$

$$= \frac{A_1 (B_1 + 12A_1 + 9A_2 - 3B_1 C_1) (1 + 12A_1/B_1 + 3B_2/B_1)}{B_1 + 3A_1 + 3B_2} \quad (4.1.19)$$

Ostatnią z otrzymanych wartości granicznych oznaczmy przez $\tilde{S}_M$. Z (4.1.18) wynika, że istnieje taka wartość $R_{Fc2} < 1$, dla której:

$$R_F > R_{Fc2} \wedge R_F < 1 \Rightarrow S_M(R_F) < 0. \quad (4.1.20)$$

Pozostałe w równaniu fundamentalnym (3.6.18) wyrazy: $1 - R_F$, R_F^4 , ζ^4 są nieujemne, zatem dla $R_F \in (R_{Fc2}, 1)$ w równaniu tym powstaje sprzeczność². Dlatego też wartość R_{Fc2} traktowana jest jako krytyczna (Mellor, Yamada, 1982).

²Dowód, że $S_M \geq 0$ jest koniecznym warunkiem realizowalności fizycznej modelu Mellora-Yamady poziomu 2.5, przedstawiony został ostatnio przez Helfanda i Labragę (1988).

Z (3.1.11) wynika, że $S_M = 0$, gdy:

$$a) \frac{B_1(\gamma_1 - C_1)}{3(2A_1 + A_2)} = \frac{R_F}{1 - R_F}, \text{ czyli}$$

$$R_F = \frac{B_1(\gamma_1 - C_1)}{3(2A_1 + A_2) + B_1(\gamma_1 - C_1)} = \frac{\gamma_1 - C_1}{1 - 2\gamma_1 + 3A_2/B_1 - C_1} \quad (4.1.21)$$

oraz, gdy:

$$b) R_F = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (4.1.22)$$

Ponadto, mianownik w (3.1.11) zeruje się dla:

$$c) R_F = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 3A_1/B_1} \quad (4.1.23)$$

a funkcja $S_M(R_F)$ posiada w tym punkcie asymptotę. Jako wartość ograniczającą prawostronnie przedział zmienności tej funkcji, z uwagi na możliwość zaistnienia omówionej wyżej sprzeczności, obrać należy mniejszą z wartości (4.1.21), (4.1.22). Ponieważ stałe modelu mają wartości dodatnie, wartość R_F określona przez (4.1.23) jest większa od wartości R_F , określanej przez (4.1.22).

Dla warunków swobodnej konwekcji, wykorzystując otrzymany wcześniej (4.1.19) rezultat $\lim_{R_F \rightarrow -\infty} S_M = \text{const.} = \tilde{S}_M$, otrzymamy:

$$\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \zeta = -\infty \quad (4.1.24)$$

Jeśli przyjąć, że funkcja $\zeta(R_F)$ jest monotoniczna dla R_F mniejszych od pewnej ustalonej wartości, (4.2.21) przedstawić można będzie jako:

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} R_F = -\infty \quad (4.1.25)$$

Przy czym, dla dostatecznie dużych $|\zeta|$, $R_F \sim -(-\zeta)^{4/3}$

Analiza własności modelu II-B w warunkach równowagi silnie stałej jest bardzo skomplikowana. Pochodna $dR_F/d\zeta$, opisywana równaniem fundamentalnym (3.6.11), przyjmować będzie wartości zerowe dla $R_F = R_{Fc2}$ ($S_M = 0$), $R_F = m^{-1}$, oraz $R_F = 1$, oraz posiada asymptotę $R_F = 2 m^{-1}$. O jakościowym charakterze rozwiązań zdecydować będzie zatem konkretny zestaw stałych modelu. Najmniejsza spośród wymienionych wyżej wartości ogranicza prawostronnie przedział zmienności parametru R_F . O asymptotycznym zachowaniu się rozwiązania decyduje, która z wymienionych liczb ma najmniejszą wartość.

Własności modelu w warunkach swobodnej konwekcji mogą być przeanalizowane techniką, zastosowaną już wcześniej przy analizie modelu I-B. Z (3.6.5) otrzymujemy, przy $R_F \rightarrow \infty$:

$$R_F = -\tilde{S}_M B_1^{1/3} q_N^4 \quad (4.1.26)$$

(4.1.9) i (4.1.12) pozostają w mocy dla modelu II-B, otrzymujemy więc:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = -2 (-R_F \tilde{S}_M B_1^{1/3})^{1/4} \quad (4.1.27)$$

Czyli:

$$\frac{2}{3 (\tilde{S}_M B_1^{1/3})^{1/4}} R_F^{3/4} = \zeta + \text{const} \quad (4.1.28)$$

I ostatecznie, podobnie, jak w przypadku pozostałych modeli rodziny, dla dostatecznie dużych $|\zeta|$ otrzymujemy $R_F \sim -|\zeta|^{4/3}$

Przejdziemy obecnie do określenia ograniczeń, związanych z zależnością parametru R_F od Ri . Zależność ta dana jest przez (3.7.11) w przypadku modeli I-A i I-B, oraz przez (3.7.12) - w przypadku modeli II-A i II-B. Dla modeli I-A i I-B, przyrównując

mianownik drugiego ze stojących po prawej stronie ułamków, otrzymamy kolejną "krytyczną" wartość liczby Richardsona:

$$R_{Fc1} = \frac{B_1}{3 B_2 + B_1} \quad (4.1.29)$$

Ponieważ współczynniki B_1 i B_2 posiadać muszą wartości dodatnie, zachodzić będzie $R_{Fc1} < 1$. W modelu I-A wartość ta ogranicza przedział zmienności parametru R_F . W modelu I-B przedział zmienności R_F ograniczony jest przez $\min(m^{-1}, R_{Fc1})$.

Zarówno w przypadku modelu I-A, jak i modelu I-B przy $m^{-1} < R_{Fc1}$ z faktu określenia rozwiązań równań fundamentalnych, ciągłych w przedziale $(-\infty, 1)$ (dla modelu I-A) bądź $(-\infty, m^{-1})$ (dla modelu I-B), wynikałoby istnienie krytycznej wartości $\zeta_c(R_{Fc1})$, przy której $Ri \rightarrow \infty$, oraz (jak wykażemy później) funkcja uniwersalna $\phi_m(\zeta)$ przyjmuje skończoną wartość. Spośród faktów tych jedynie nieograniczony wzrost Ri przy $R_F \rightarrow R_{Fc}$ znajduje potwierdzenie w części danych pomiarowych (Kondo, Kanechika, Yasuda, 1978). Pozostałe stoją w sprzeczności zarówno z rezultatami teorii Monina-Obuchowa, jak i z danymi doświadczalnymi.

W warunkach swobodnej konwekcji, z zależności (3.7.11) wynika, że $Ri \propto R_F$.

Dla modeli II-A i II-B, zależność pomiędzy Ri a R_F określona jest w przedziale:

$$R_F \in \left[-\infty, \gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2 - 3A_1/B_1) \right] \quad (4.1.30)$$

przy $\zeta \rightarrow -\infty$ $Ri \propto R_F$.

Analizę zmienności parametrów równowagi uzupełnimy określeniem zmienności funkcji $S_H(R_F)$. Funkcja ta:

- przy $R_F \rightarrow 1^-$ dąży do $-\infty$
- przy $R_F = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ osiąga wartość 0
- przy $R_F \rightarrow -\infty$ dąży do wartości stałej $\tilde{S}_H$, równej:

* dla modeli "poziomu 1":

$$\tilde{S}_H = A_2 (1 + 3 B_1/B_2) \quad (4.1.31)$$

* dla modeli "poziomu 2":

$$\tilde{S}_H = A_2 (1 + 12A_1/B_1 + 3B_2/B_1) \quad (4.1.32)$$

Zakresy zmienności parametrów stabilności oraz funkcji Γ , S_M oraz S_H dla poszczególnych modeli zebrano w tab. 4.1. Warto zwrócić uwagę, że dla wszystkich modeli, łącznie z nieuwzględnionym w tabeli modelem II-B, w stanie swobodnej konwekcji liczby Ri i R_F są do siebie wprost proporcjonalne (co wynika z (3.7.10), (3.2.8), (4.1.19), (4.1.31) i (4.1.32)), oraz, że ((4.1.2), (4.1.15), (4.1.25), (4.1.28)) $R_F \propto -|\zeta|^{4/3}$.

4.1.2. Zakresy zmienności i charakterystyki asymptotyczne funkcji uniwersalnych

Wykorzystując zebrane w rozdziale 3.7. związki funkcji uniwersalnych teorii Monina-Obuchowa z parametrami stabilności R_F oraz ζ , oraz otrzymany w poprzednim paragrafie rezultat:

$$R_F \propto -|\zeta|^{4/3} \quad \text{dla } \zeta \rightarrow -\infty, \quad (4.1.33)$$

bez trudu określimy asymptotyczny charakter zmienności funkcji uniwersalnych dla przypadku swobodnej konwekcji. Rezultaty tej analizy zebrane są w tab. 4.2. Nieuwzględniona w tabeli funkcja

$\ell_n(\zeta) = \zeta \ell_N(\zeta)$ w modelu I-B w warunkach równowagi stałej dąży do wartości:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \ell_N = n - n^{-3} \quad (4.1.34)$$

W przypadku stanu równowagi silnie stałej ($\zeta \rightarrow +\infty$), charakterystyki asymptotyczne poszczególnych modeli różnią się pomiędzy sobą, mogą też jakościowo zależeć od zestawu stałych. W modelu I-A i modelu I-B przy $R_{Fc1} < m^{-1}$ istnieje, jak zauważono wcześniej, "krytyczna" wartość parametru ζ :

$$\zeta_c = \frac{R_{Fc1}}{(1 - R_{Fc1})^{1/4}} \quad (4.1.35)$$

Odpowiadająca jej krytyczna wartość liczby Richardsona R_{Fc1} dana jest wzorem (4.1.29). Z powodu występowania "krytycznej" wartości parametru ζ , w tabl. 4.3, przedstawiającej charakterystyki asymptotyczne poszczególnych modeli w warunkach równowagi silnie stałej, wyróżniono dla modeli "poziomu 1" przedziały zmienności związane z zakresem stosowalności równania bilansu energii kinetycznej turbulencji oraz z zakresem stosowalności przyjętych równań transportu ciepła i bilansu wariancji temperatury. Przy analizie własności modelu II-A, której wynik przedstawione zostały również w tab. 4.3., założono, że opisana wzorem (4.1.22) krytyczna wartość liczby Richardsona jest najmniejsza spośród wartości, dla których funkcje $S_M(R_F)$ i $S_H(R_F)$ mogą posiadać miejsca zerowe lub asymptoty.

Tab. 4.1. Zakresy zmienności parametrów ζ , R_i , R_F , Γ oraz funkcji S_M i S_H (wartość graniczna dla stanu swobodnej konwekcji, wartość krytyczna lub graniczna dla równowagi silnie stałej)

Parametr	Model I-A i model I-B [†]	Model I-B [‡]	Model II-A [*]
ζ	$-\infty, \frac{R_{Fc1}}{(1 - R_{Fc1})^{1/4}}$	$-\infty, +\infty$	$-\infty, +\infty$
R_F	$-\infty, R_{Fc1}$	$-\infty, m^{-1}$	$-\infty, R_{Fc2}$
R_i	$-\infty, +\infty$	$-\infty, Ri_c^\#$	$-\infty, Ri(R_{Fc2})$
Γ	$-1, \frac{R_{Fc1}}{1 - R_{Fc1}}$	$-1, \frac{1}{1 - m}$	$-1, \frac{R_{Fc2}}{1 - R_{Fc2}}$
S_M	A_1 (stała)		$\tilde{S}_M, 0$
S_H	$A_2(1+3B_1/B_2), -\infty$		$\tilde{S}_H, 0$

[†] Dla $R_{Fc1} < m^{-1}$; [‡] Dla $R_{Fc1} > m^{-1}$; $R_{Fc1} = B_1/(3B_2 + B_1)$

^{*} Dla $\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} < \frac{\gamma_1 - C_1}{1 - 2\gamma_1 + 3A_2/B_1 - C_1}$;

[#] $Ri_c = \frac{A_1}{A_2 - \frac{3A_2 B_2 m}{B_1(m-1)}}$

Tab. 4.2. Charakterystyki asymptotyczne modeli I-A, I-B, II-A i II-B w warunkach swobodnej konwekcji ($\zeta \rightarrow -\infty$)

Model	q_N	ϕ_m, ϕ_h	$\overline{\theta'^2} / T_*^2$	ℓ_N
I-A, II-A	$\propto \zeta ^{1/3}$	$\propto \zeta ^{-1/3}$	$\propto \zeta ^{-2/3}$	1
I-B				1.5
II-B				$1.5 \left[\tilde{S}_M B_1^{1/3} \right]^{1/4}$

Tab. 4.3. Charakterystyki asymptotyczne poszczególnych modeli w warunkach równowagi silnie stałej

	Model I-A		Model I-B przy $R_{Fc1} < m^{-1}$	
	$\zeta \rightarrow \zeta_c$	$\zeta \rightarrow +\infty$	$\zeta \rightarrow \zeta_c$	$\zeta \rightarrow +\infty$
R_F	$= R_{Fc1}$	$\rightarrow 1$	$= R_{Fc1}$	$\rightarrow m^{-1}$
q_N	$= (1-R_{Fc1})^{1/4}$	$\rightarrow 0$	$= (1-R_{Fc1})^{1/4}$	$\rightarrow (1-m^{-1})^{1/4}$
ℓ_N	$= 1$ (stała)	$= 1$ (stała)	$= \frac{R_{Fc1}}{(1-R_{Fc1})\zeta_c}$	$\rightarrow 0$ $\propto \zeta^{-1}$
ϕ_m	$= \frac{\zeta_c}{R_{Fc1}}$	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$	$= \frac{\zeta_c}{R_{Fc1}}$	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$
ϕ_h	$\rightarrow +\infty$	$\times$	$\rightarrow +\infty$	$\times$
$\frac{\overline{\theta}^2}{T_*^2}$	$\rightarrow +\infty$	$\times$	$\rightarrow +\infty$	$\times$

w powyższej tabeli "=" oznacza przyjmowanie przez funkcję skończonej wartości w danym punkcie, " $\rightarrow$ " - dążenie asymptotyczne, " $\propto$ " - przybliżoną proporcjonalność w zakresie równowagi silnie stałej, " $\times$ " - przedział wartości argumentu, w którym rozwiązania równań modelu nie posiadają interpretacji fizycznej.

Tab. 4.3. (c.d.)

	Model I-B przy $R_{Fc1} > m^{-1}$	Model II-A *
	$\zeta \rightarrow +\infty$	$\zeta \rightarrow +\infty$
R_F	$\rightarrow m^{-1}$	$\rightarrow R_{Fc2}$
q_N	$\rightarrow (1-m^{-1})^{1/4}$	$\rightarrow +\infty$
ℓ_N	$\rightarrow 0$ $\propto \zeta^{-1}$	1 (stała)
ϕ_m	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$
ϕ_h	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$	$\rightarrow +\infty$ $\propto \zeta$
$\frac{\overline{\theta}^2}{T_*^2}$	$\rightarrow \frac{B_2 B_1^{-2/3} (1-m^{-1})^{1/2}}{A_2 [1-(1+3B_2/B_1)m^{-1}]}$	?

* Dla $\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} < \frac{\gamma_1 - C_1}{1 - 2\gamma_1 + 3A_2/B_1 - C_1}$;

Własności asymptotyczne modelu II-B w warunkach swobodnej konwekcji mogą być przeanalizowane techniką, opisaną w rozdz. 4.1.1 (przy analizie modelu I-B). Z (3.6.5) otrzymujemy, przy $R_F \rightarrow -\infty$:

$$R_F = -\tilde{S}_M B_1^{1/3} q_n^4 \quad (4.1.36)$$

W warunkach swobodnej konwekcji zależności (4.1.8) i (4.1.9) pozostają w mocy dla modelu II-B, otrzymujemy więc:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = -2 (-R_F \tilde{S}_M B_1^{1/3})^{1/4} \quad (4.1.37)$$

Czyli:

$$\frac{2}{3 (\tilde{S}_M B_1^{1/3})^{1/4}} R_F^{3/4} = \zeta + \text{const} \quad (4.1.38)$$

Funkcje $S_M(R_F)$ i $S_H(R_F)$ nie zależą od postaci hipotezy określającej skalę turbulencji, i przy $\zeta \rightarrow -\infty$ dążą do wartości stałych $\tilde{S}_M$ i $\tilde{S}_H$. Zatem, w stanie swobodnej konwekcji funkcje uniwersalne, stanowiące rozwiązanie równań modelu II-B, zachowywać się będą analogicznie do przeanalizowanych już wcześniej rozwiązań modelu I-B; w szczególności, identyczne będą wykładniki potęg parametru ζ w wyrażeniach określających asymptotyczny charakter zmienności funkcji uniwersalnych. Różnice sprowadzać mogą się do innych wartości współczynników proporcjonalności i wyrazów wolnych. W szczególności, dla funkcji opisującej skalę turbulencji otrzymujemy wartość graniczną:

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \ell_N = 1.5 (\tilde{S}_M B_1^{1/3})^{1/4} \quad (4.1.39)$$

Analiza własności modelu I-B w warunkach równowagi silnie stałej jest bardzo skomplikowana. Pochodna $dR_F/d\zeta$, opisywana równaniem fundamentalnym (3.6.11), przyjmować będzie wartości zerowe dla $R_F = R_{Fc2}$ ($S_M = 0$), $R_F = m^{-1}$, oraz $R_F = 1$, oraz posiada asymptotę $R_F = 2 m^{-1}$. O jakościowym charakterze rozwiązań decydować będzie zatem konkretny zestaw stałych modelu. Jeżeli dobór stałych dokonany zostanie tak, aby spełniony był warunek $R_{Fc2} > m^{-1}$, wówczas funkcje $S_M(R_F)$ i $S_H(R_F)$ przy $\zeta \rightarrow \infty$ posiadać będą skończone, dodatnie wartości $S_M(R_{Fc})$ i $S_H(R_{Fc})$, a charakterystyka asymptotyczna modelu w warunkach silnej stabilności będzie podobna do charakterystyki modelu I-B. Należy jednak zwrócić uwagę, że w wyrażeniach określających wartości asymptotyczne występować będą wielkości $S_M(R_{Fc})$ i $S_H(R_{Fc})$. Powoduje to

konieczność uwzględniania dodatkowych ograniczeń przy doborze wartości stałych modelu. Ponieważ wielkości $S_M(R_{Fc})$ i $S_H(R_{Fc})$, mają na ogół dosyć małe wartości bezwzględne, należy oczekiwać złego uwarunkowania zadania. Ilustracją posłużyć może przykład asymptotycznej wartości funkcji uniwersalnej:

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\theta^2}}{T_*^2} = \frac{S_M^{1/2}(m^{-1}) B_2 B_1^{-1/2}}{S_H(m^{-1}) (1 - m^{-1})} \quad (4.1.40)$$

Ponieważ wartości m^{-1} i R_{Fc2} są do siebie dosyć zbliżone, wartości $S_M(R_{Fc})$ i $S_H(R_{Fc})$ będą bliskie zeru, a określona wzorem (4.1.40) wartość graniczna wykazywać będzie dużą czułość na zmiany stałych modelu, trudną do usprawiedliwienia racjami fizycznymi.

Przejdziemy obecnie do oceny otrzymanych wyników. Rezultaty modelowania porównywać można zarówno z danymi pomiarowymi, jak też z wynikami uzyskiwanymi przy użyciu innych metod. Asymptotyczne własności modelu ocenione być mogą drogą porównania z przewidywaniami teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. Teoria ta pozwala określić charakter zmienności poszczególnych funkcji uniwersalnych w pewnych stanach asymptotycznych: stanie swobodnej konwekcji i stanie równowagi silnie stałej. Należy podkreślić, że w obydwóch tych stanach w rzeczywistości występuje szereg zjawisk nieuwzględnionych zarówno w teorii Monina-Obuchowa, jak i w ocenianych modelach. W warunkach silnej konwekcji zachodzi penetracja w warstwę przyziemną dużych wirów, powstających w wysokiej, dobrze rozwiniętej warstwie granicznej. Zaburzenia pola prędkości, związane z tym zjawiskiem, stanowią główną przyczynę (Panofsky et al., 1977) rozbieżności pomiędzy obserwacjami, a wynikami teorii podobieństwa i zbudowanych na gruncie podobnej koncepcji fizycznej modeli.

W warunkach równowagi silnie stałej turbulencja, poza stosunkowo cienką turbulentną warstwą przyścienną, ma charakter sporadyczny - występuje okresowo w tzw. *strukturach koherentnych*. Towarzyszą temu często zaburzenia falowe. Zjawiska te powodują określone

trudności przy interpretacji wyników pomiarów i próbach porównań z wynikami modelowania. Z wymienionych wyżej przyczyn dane pomiarowe, używane jako narzędzie weryfikacji modeli struktury turbulencji w stanach przejściowych, traktować należy z dużą ostrożnością w warunkach stanów asymptotycznych. Można natomiast konsekwentnie stosować do tego celu rezultaty teorii podobieństwa, wyprowadzone z analogicznych założeń i koncepcji fizycznych, co omawiana rodzina modeli.

Teoria podobieństwa Monina-Obuchowa, wraz z późniejszymi uzupełnieniami (patrz np. Monin i Jagłom, 1965; Businger, 1973; Lajchtman, 1970; Zilitinkevič, 1970; Kitajgorodskij i Zeidler, 1978; Sorbjan, 1983, 1988) określa charakter zmienności poszczególnych funkcji uniwersalnych w stanach asymptotycznych. Rezultaty te zestawiono w tabl. 4.4. Do wyników tych dołączyć można przewidywania Monina (1965) odnośnie funkcji $\ell_N(\zeta)$, w myśl których powinno zachodzić $\ell_N \propto z^{-1}$ w warunkach równowagi silnie stałej, oraz $\ell_N \rightarrow \text{const.}$ w stanie swobodnej konwekcji.

Tab. 4.4. Przewidywania teorii podobieństwa Monina-Obuchowa
odnośnie zachowania się funkcji uniwersalnych
w stanach asymptotycznych

	ϕ_m, ϕ_h	q_N	R_F, Ri	$\overline{\theta'^2} / T_*^2$
Swobodna konwekcja [†]	$\propto \zeta ^{-1/3}$	$\propto \zeta ^{1/3}$	$\propto - \zeta ^{4/3}$	$\propto \zeta ^{-2/3}$
Silna stabilność [‡]	$\propto \zeta$	$\rightarrow \text{const.}$	$\rightarrow \text{const.}$	$\rightarrow \text{const.}$

[†]Traktowana jako przypadek turbulencji czysto konwekcyjnej przy $u_* \rightarrow 0$ i $\zeta \rightarrow -\infty$ oraz istniejącym pionowym turbulencyjnym strumieniu ciepła o skończonej wartości.

[‡]Traktowana jako przypadek $\zeta \rightarrow +\infty$.

Wnioski z analizy asymptotycznych własności modeli przedstawić można następująco:

1. Jak widać z porównania danych, zestawionych w tabelach 4.1, 4.2, 4.3 i 4.4, spośród modeli I-A, I-B i II-A jedynie model I-B posiada charakterystykę asymptotyczną w pełni zgodną z przewidywaniami teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. Zgodność ta uwarunkowana jest ograniczeniem, wiążącym wartości stałych modelu:

$$m^{-1} < \frac{B_1}{3 B_2 + B_1} \quad (4.1.41)$$

Model II-B może mieć zgodną charakterystykę asymptotyczną z przewidywaniami teorii podobieństwa, jeżeli dobór stałych modelu zapewni spełnienie warunku:

$$m^{-1} < R_{Fc2} \quad (4.1.43)$$

gdzie R_{Fc2} jest najmniejszą z liczb R_F , dla których $S_M(R_F) = 0$ lub $S_M(R_F) = 0$.

2. Wszystkie analizowane modele prognozują przebieg zmienności funkcji uniwersalnych w warunkach silnej chwiejności (swobodnej konwekcji) zgodnie z teorią podobieństwa Monina-Obuchowa.

3. Przy $\zeta \rightarrow \zeta_c$ w modelu I-A funkcje uniwersalne związane z momentami statystycznymi pól temperatury wzrastają nieograniczenie, podczas gdy funkcje uniwersalne opisujące momenty nie zawierające pulsacji temperatury (pęd, energia kinetyczna turbulencji) przyjmują skończone wartości (tabl. 4.3)! Podobna sytuacja pojawia się w modelu I-B jedynie wtedy, gdy nie jest spełniony warunek (4.1.40), tj. $R_{Fc1} < m^{-1}$. Krytyczna wartość parametru ζ nie występuje w przewidywaniach teorii, opisane rozbieżności pomiędzy zachowaniem się np. funkcji $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$ traktować należy zatem jako błędne.

4. Charakter zmienności funkcji $q_N(\zeta)$ oraz $\overline{\theta'^2} / T_*^2$ w modelu Mellora (II-A) w warunkach równowagi silnie stałej jest niezgodny z przewidywaniami teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. Analizę zgodności dla pozostałych funkcji prowadzono przy narzuceniu warunku (spełnionego przez wszystkie rozważane dalej zestawy stałych):

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} < \frac{\gamma_1 - C_1}{1 - 2\gamma_1 + 3A_2/B_1 - C_1} \quad (4.1.44)$$

5. W modelu II-B występować może zagadnienie złego uwarunkowania zadania o doborze wartości stałych modelu ze względu na jego własności asymptotyczne w warunkach równowagi silnie stałej.

4.2. Dobór wartości stałych modelu.

Przyjęcie hipotezy o proporcjonalności skal długości, związanych z poszczególnymi procesami w przepływach turbulentnych, powoduje konieczność określenia wartości stałych proporcjonalności. Stałe te wyznacza się na ogół metodami pośrednimi, na podstawie pomiarów, wykonywanych w pewnych klasach przepływów. Niewielka różnorodność dostępnego materiału pomiarowego ograniczana jest dodatkowo w trakcie interpretacji pewnymi niedostatkami aparatu pojęciowo-teoretycznego (np. konieczność stosowania dodatkowych hipotez domykających, jak hipoteza o skali turbulencji). Większość zastosowanych do chwili obecnej metod (Wichmann i Schaller, 1986) wiązała się z wykorzystaniem materiału, pochodzącego z przepływów niestratyfikowanych termicznie w warunkach równowagi pomiędzy produkcją a dyssypacją. Otrzymane przez różnych badaczy wartości stałych wykazują zauważalne rozbieżności, które tłumaczyć można zarówno błędami instrumentalnymi, jak też i rzeczywistą zależnością stosunku poszczególnych skal długości od warunków fizycznych realizacji pomiarów, a więc niespełnieniem wzmiankowanej hipotezy. Ujawniać mogą się także niedostatki przyjmowanych hipotez domykających.

W przypadku przepływów stratyfikowanych termicznie mamy do czynienia z pojawieniem się nowych, silnych oddziaływań na strukturę turbulencji. Naturalne więc wydaje się pytanie o zasadność hipotezy o proporcjonalności poszczególnych skal przestrzennych turbulencji (implikującej możliwość używania konkretnych wartości stałych, otrzymanych w pomiarach wykonanych w warunkach równowagi neutralnej) w modelach, używanych do opisu przepływów uwarstwionych termicznie. Odpowiedź na to pytanie, nawet gdy motywowana argumentami empirycznymi, jest siłą rzeczy rozpatrywana w ramach pewnego (często stosowanego domyślnie) konkretnego modelu; nie sposób więc jednoznacznie orzec, czy ujawniające się rozbieżności są rezultatem nierealności hipotezy o proporcjonalności skal, czy też innych, przyjętych w modelu hipotez. Pewną możliwość weryfikacji modelu, jak również

sformułowania dodatkowych kryteriów doboru wartości stałych stwarza przedstawiona w poprzednim podrozdziale analiza własności asymptotycznych. Na przeszkodzie stoi jednak mała ilość dostępnych pomiarów i znaczny rozrzut, wynikający m.in. z oddziaływania niemożliwych do izolacji w tych warunkach czynników.

Różnice wartości poszczególnych stałych, podawanych przez różnych autorów, zdają się skłaniać ku przypuszczeniu, że w rzeczywistości stałe te mogą stanowić funkcje najrozmaitszych wielkości fizycznych; oznacza to jednak, że ścisłe określenie ich uniwersalnych wielkości jest niemożliwe. W tej sytuacji usprawiedliwione wydaje się dobieranie stałych do konkretnych klas przepływów i konkretnych modeli, z zachowaniem wszakże pewnych granic, wynikających z obserwowanej w naturze zmienności. Jednocześnie należy zaznaczyć, że dobór konkretnych wartości parametrów nie jest pierwszoplanowym celem pracy; większy nacisk kładziemy na jakościową analizę własności modelu i ewentualne doskonalenie układu równań, traktując mieszczącą się w pewnych granicach nieokreśloność parametrów jako nieuchronną na obecnym etapie wiedzy konieczność. Interesować nas może również reakcja modelu na zmiany wartości stałych, stanowiąca swoiste kryterium jego jakości.

4.2.1. Stała von Kármána

Spotykane w literaturze wartości stałej von Kármána mieszczą się w przedziale 0.35 ± 0.43 , przy tym najczęściej stosowane są dwie wartości: 0.35 i 0.4 (Jaglom, 1977). Popularność pierwszej z nich związana jest z rezultatami eksperymentu Kansas (Businger et al., 1971). Uzyskane w eksperymencie dane cechował mały rozrzut, pozwalający na precyzyjne i wiarygodne wyznaczenie odpowiednich funkcji aproksymujących. W późniejszych pracach wielokrotnie jednak (Dyer, 1974; Jaglom, 1977; Högström, 1988) kwestionowano zasadność zastosowanej w obróbce danych metody korekty błędów systematycznych, wskazano też, że rozbieżność pomiędzy otrzymaną

w eksperymencie Kansas wartością κ , a wartościami otrzymywanymi w innych eksperymentach może być wynikiem błędów kalibracji aparatury pomiarowej. Ostatnio, po troskliwej analizie rezultatów dosyć dokładnych pomiarów, Högström (1988) otrzymał potwierdzenie stosowanej już wielokrotnie wartości $\kappa = 0.4$, którą stosować będziemy w niniejszej pracy.

4.2.2. Wartość krytyczna dynamicznej liczby Richardsona

Jak wskazano w rozdz. 4.1, w modelach I-B i II-B krytyczna wartość dynamicznej liczby Richardsona R_{Fc} może stanowić parametr modelu. Przy tym, w modelu I-B określa ona poprzez (4.1.4) wartość parametru n względnie m , w modelu II-B zaś może ona być związana albo ze stałą m , albo ze stałymi A_1 , A_2 , B_1 , B_2 i C_1 . W modelu II-A krytyczna wartość dynamicznej liczby Richardsona związana jest z wartościami stałych A_1 , A_2 , B_1 , B_2 i C_1 .

Krytyczna wartość dynamicznej liczby Richardsona przyjmowana jest zwykle w granicach $0.15 \div 0.25$ (Arya, 1972). We wczesnych pracach (Ellison, 1957) stosowana była wartość 0.15. Analiza danych eksperymentalnych (Kondo i in. 1978), dopuszcza wartości mieszczące się w przedziale $0.1 \div 0.4$, przy czym jako najbardziej prawdopodobną przyjmuje się 0.14. Yamada (1975), stosując model z wyższym rzędem domykania, stwierdził, że R_{Fc} winna zawierać się w przedziale $0.18 \div 0.27$. Lajchtman (1979) we wspomnianym wcześniej modelu przyjmował wartość 0.13. Przeprowadzone obliczenia dla różnych wartości tego parametru wskazują na dobrą zgodność z materiałem empirycznym dla tej ostatniej wartości.

4.2.3. Stosunek q/u_* ; stała B_1

Stała B_1 wyznaczana jest najczęściej przy pomocy zależności (3.5.5), wiążącej jej wartość z wartością stosunku q/u_* w warunkach równowagi neutralnej. Zestawione przez Mellora

i Yamadę (1982) wartości tego stosunku, otrzymane doświadczalnie dla różnych klas przepływów, mieszczą się w granicach $2.30 \div 2.95$. Rezultaty eksperymentu ITCE-1981 (Gerstmann, 1987) sugerują przyjęcie wartości ok. 3.2, przedstawione na rys. 4.2 dane z innych eksperymentów mikrometeorologicznych wskazują na możliwość wyboru jeszcze wyższych wartości. Rozbieżności te, jakkolwiek mieszczące się w granicach 30% wartości q/u_* , wpływają w znacznym stopniu na wartość stałej B_1 , oraz - jak wykażemy później - na wyniki modelowania. Przyjęcie wartości $q/u_* = 2.3$ powoduje $B_1 = 12.2$; wybrana przez Mellora i Yamadę wartość $q/u_* = 2.55$ odpowiada wartości $B_1 = 16.6$, ale dla $q/u_* = 3.25$ otrzymujemy już przeszło dwukrotnie większą wartość stałej $B_1 = 34.3$. W modelowaniu granicznej warstwy atmosfery przyjmowane były również jeszcze wyższe wartości, np. Enger (1983) przyjmował $B_1 = 44.2$.

4.2.4. Stała A_1

W przypadku modeli poziomu 1 (I-A, I-B) wartość stałej A_1 związana jest bezpośrednio zależnością (3.2.8) z określoną już wartością B_1 ; dla modeli poziomu 2 (II-A, II-B) jest ona związana (3.5.15) również z wartością $\overline{w'^2}/q^2$ w stanie równowagi neutralnej. Dane, zebrane w pracy Mellora i Yamady (1982), sugerują przyjęcie wartości tego ostatniego stosunku równej 0.222.

4.2.5. Stała A_2

Wartość stałej A_2 związany jest zależnością (3.5.16) (modele "poziomu 2") względnie (3.5.14) (modele "poziomu 1") z poprzednio określonymi stałymi, oraz z wartością turbulencyjnej liczby Prandtla α_T w warunkach równowagi obojętnej. Zestawione w pracy Mellora i Yamady (1982) dane mieszczą się w granicach $0.55 \div 1.2$. Często przyjmowana jest otrzymana w eksperymencie Kansas wartość 1.35; znaczny jednak rozrzut innych danych doświadczalnych

(Jaglom, 1977) podważa wiarygodność tego rezultatu. Ostatnio otrzymane rezultaty (Högström, 1988) wskazują, że $\alpha_{To} = 1.05$.

4.2.6. Stała B_2

Zarówno dla modeli poziomu 1, jak i poziomu 2, stała B_2 wyznaczana może być przy pomocy wzoru (3.5.13). Wiąże on tą stałą z wyznaczonymi już wartościami, oraz wartością stosunku $\overline{\theta'^2}/T_*^2$ w warunkach równowagi obojętnej. Jednocześnie pozostają w mocy zależności asymptotyczne: (4.1.40) oraz zebrane w tab. 4.3. Wraz ze wzrostem stabilności (rys. 4.3 A) w danych pojawia się znaczny rozrzut, wynikający prawdopodobnie z narastającego błędu względnego przy pomiarach niewielkich w warunkach równowagi stałej fluktuacji temperatur. Czyni to zależność asymptotyczną (4.1.40) mało przydatną pod względem określania stałych modelu. Dane z zakresu równowagi silnie chwiejnej są z kolei niezbyt liczne, co czyni metodę opartą na wykorzystaniu związków podanych w tab. 4.3 mało wiarygodną. Stąd też w niniejszej pracy bazować będziemy na zależności (3.5.13) i wartości $\overline{\theta'^2}/T_*^2$ dla równowagi obojętnej, przy traktowaniu zależności asymptotycznych jako ograniczających zakres możliwych wartości.

Dane dotyczące stosunku $\overline{\theta'^2}/T_*^2$ (rys. 4.3) wykazują znaczny rozrzut w równowadze stałej z jednoczesnym szybkim wzrostem w pobliżu $\zeta = 0$. Utrudnia to znacznie wybór konkretnej wartości. W przeprowadzanych dalej obliczeniach przyjmować będziemy m.in. wartość $\left[\overline{\theta'^2}/T_*^2 \right]_0 = 4.0$. Wartość ta nie odbiega znacznie od przyjmowanej przez Mellora i Yamadę (1982) i Binkowskiego (1979) wartości 3.1.

4.2.7. Stała C_1

Stała ta występuje jedynie w modelach poziomu 2 i jest związana z poprzednio określonymi wielkościami zależnością (3.5.18).

4.3. Dane pomiarowe i wyniki modelowania

4.3.1. Bank danych mikrometeorologicznych

W celu przeprowadzenia weryfikacji modelu zebrano materiał pomiarowy kilku ekspedycji mikrometeorologicznych, w trakcie których wykonywano m.in. wielopoziomowe lub gradientowe pomiary wiatru i temperatury, oraz korelacyjne pomiary pulsacji temperatury i składowych wiatru. Zgromadzono 228 punktów pomiarowych z czterech eksperymentów:

1. Eksperyment GOTEX II, Klöckrike, Szwecja
(Ericson, 1982; Bergström i Alexandersson, 1981)
2. Eksperyment Minnesota 1973, USA (Izumi i Caughey, 1976)
3. Eksperyment ITCE 1981, Cimljansk, ZSRR
(Cwang, Zubkowskij, Kallistratowa, 1981; Hurtalova i in., 1987)
4. Pomiary poligonowe w Cabauw, Holandia, 29.V – 1.VI 1978
(Driedonks, van Dop i Kohsiek, 1978; Wessels, 1984)

□ W trakcie eksperymentu *ITCE-81*, przeprowadzonego w słabo zróżnicowanym, płaskim terenie (stepy okręgu rostowskiego w ZSRR) w okresie 15.VI. – 31.VII. 1981, dokonywane były m.in. równoczesne pomiary gradientowe i pomiary niektórych korelacji pulsacji pól wiatru i temperatury. Pomiary korelacyjne wykonywano niezależnie przy pomocy dwóch anemometrów akustycznych (Kaijo Denki oraz radzieckiego IFA, konstrukcji Instytutu Oceanologii AN ZSRR) oraz trójkierunkowego anemometru śmigłowego (W-173A f-my Weather

Mesurement Corp., USA), umieszczanych w części pomiarów na wysokości 4 m, a w pozostałych - 2 m. W niniejszym opracowaniu wykorzystano wyniki pomiarów korelacyjnych, wykonanych przy użyciu anemometru akustycznego IFA, oraz przedstawione w raporcie eksperymentu wartości pionowych gradientów temperatury i prędkości wiatru na odpowiednich wysokościach.

□ Eksperyment *GOTEX II* przeprowadzono na równinnych, pokrytych niską roślinnością terenach dawnego jeziora Ancyloss w południowej Szwecji, w okresie 6 - 11.V.1980. Wykonywano m.in. masztowe, radiosondażowe i pilotażowe pomiary profili wiatru i temperatury. Przeprowadzono również krótką kampanię pomiarów wielkości pulsacyjnych, przy pomocy termoanemometrów umieszczonych na wysokości 4.5 m. Pomiary te nie były jednak zsynchronizowane z pomiarami profili elementów meteorologicznych.

□ Stacja pomiarowa w Cabauw (środkowa Holandia), wyposażona w 213-metrowy maszt meteorologiczny i specjalistyczną aparaturę pomiarową, dokonuje od roku 1973 systematycznych pomiarów na wielu poziomach temperatury i wilgotności powietrza, prędkości wiatru, widzialności, promieniowania, stężeń podstawowych zanieczyszczeń gazowych, oraz wysokości warstwy mieszania. Przeprowadzane są także kampanijne pomiary charakterystyk turbulencji, pomiary radiosondażowe oraz eksperymenty dyfuzyjne.

W niniejszej pracy wykorzystano dane, pochodzące z kampanii pomiarowej w okresie 29.V - 1.VI. 1978. Pomiary korelacyjne, wykonane przy pomocy trójkierunkowego anemometru śmigłowego i termopar, pochodzą z wysokości 21.2 m.

□ W trakcie eksperymentu *Minnesota 1973*, przeprowadzonego w okresie 10 - 19.VIII.1973 na równinnych, rolniczych terenach Płn.-zach. części stanu Minnesota, wykonywano pomiary profili podstawowych elementów meteorologicznych i charakterystyk turbulencji w całej warstwie granicznej. Pomiar charakterystyk

turbulencji realizowany był przy pomocy dwóch anemometrów akustycznych i termometrów oporowych, zlokalizowanych na 32-metrowym maszcie, oraz przy pomocy pięciu sond do pomiarów turbulencji, umieszczanych na uwięzi aerostatu. Pomiary wykonywano w porze dziennej. W niniejszym opracowaniu wykorzystano wyniki pomiarów charakterystyk turbulencji, wykonanych na wysokości 4 m, oraz pionowe gradienty prędkości wiatru i temperatury, obliczone na podstawie pomiarów tych wielkości, wykonanych na poziomach 2 m i 8 m.

Wyjściowy zestaw, utworzony z danych wymienionych wyżej eksperymentów, obejmował następujące wielkości:

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'w'}, \overline{w'T'}, \overline{T'^2}, \frac{dU}{dz}, \frac{dT}{dz}$$

Następnie, obliczone zostały:

- współczynnik turbulencji K_m
- kinetyczna energia ruchu turbulencyjnego
- parametry warstwy przyziemnej: prędkość dynamiczną u_* , skala temperatury T_* , oraz skalę długości L_* . Odrzucono przy tym niewielką liczbę przypadków, w których występowało $\overline{u'w'} > 0$. Przy obliczaniu skali L_* zgodnie z definicją (2.3), przyjęto $\kappa = 0.40$ oraz stałą wartość parametru wyporu $\beta = 0.034 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- parametr różnicy Monina-Obuchowa $\zeta = z/L_*$, w którym jako z przyjmowano wysokość, dla której obliczano gradienty prędkości wiatru i temperatury. Strumienie turbulencyjne traktowano jako stałe z wysokością.
- skala turbulencji

$$\lambda = K_m / q \quad (4.3.1)$$

- wartości funkcje uniwersalnych, omawianych w niniejszej pracy:

$$\frac{\overline{w'^2}}{q^2}; \quad \frac{\overline{w'^2}}{u_*^2}; \quad \frac{q^2}{u_*^2}; \quad \frac{\overline{\theta'^2}}{T_*^2}; \quad \frac{\lambda}{\kappa z}.$$

4.3.2. Wyniki modelowania

Własności modeli I-A, I-B, II-A i II-B badano przy rozmaitych wartościach stałych m , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 i C_1 . W efekcie tych badań dobrano dla modelu I-B zestaw stałych, przy których osiąga się dobrze zgodne z danymi eksperymentalnymi wyniki. Zestaw ten oznaczany jest na rysunkach 4.1 - 4.3 symbolem PR. Dla porównania przedstawione zostały rezultaty modeli dla wartości stałych, stosowanych przez Mellora i Yamadę (1982) (OM), oraz modyfikacji tego zestawu stałych, otrzymanego przez przyjęcie $\alpha_T = 1$ oraz $\overline{\theta'^2} / T_*^2 = 4$ (MM). Wartości funkcji uniwersalnych dla warunków równowagi obojętnej, na podstawie których określone są stałe, zestawiono w tabl. 4.5.

Rys. 4.1. przedstawia porównanie przebiegu funkcji uniwersalnej $S_{MN}^{\ell}(\zeta) = K_m/q$ z materiałem pomiarowym. Na rys. A przedstawiono dane (wielkość $\lambda/\kappa z$, określona wzorem 4.3.3, w funkcji parametru równowagi ζ , obliczanego opisaną w rozdziale 4.3.1 metodą) z eksperymentów Cabauw, Minnesota i Gotex II. Dla warunków równowagi chwiejnej występuje wyraźny rozrzut wyników. Jest on wyraźnie związany z rozrzutem danych o kinetycznej energii turbulencji (rys. 4.2.A) i może być spowodowany np. efektami penetracji dużych wirów konwekcyjnych w warstwę przyziemną. Bezspornie stwierdzić można natomiast, że w warunkach równowagi stałej występuje wyraźna zależność funkcyjna, oraz, że funkcja ta jest malejąca.

Tab. 4.5. Wartości funkcji uniwersalnych w warunkach równowagi obojętnej, przyjmowane w celu wyznaczenia stałych

Symbol zestawu stałych	PR	OM	MM
$\frac{q}{u_*}$	3.25	2.55	2.55
ϕ_h	1	0.80	1
$\frac{\overline{\theta'^2}}{T_*^2}$	4.00	3.10	4.00
$\frac{\overline{w'^2}}{q^2}$	0.22	0.22	0.22
$R_{Fc}^\dagger$	0.13	-	-

[†]Dla modeli I-B i II-B; w zestawach OM i MM wartość krytyczna dynamicznej liczby Richardsona określona jest przez (4.1.22).

Bogaty materiał empiryczny dotyczący stanów równowagi silnie stałej zebrany został w pracy Kondo, Kanechika i Yasuda (1978). Przedstawiono w niej m.in. dane dotyczące zależności długości drogi turbulentnego mieszania l_M od stanu równowagi warstwy przyziemnej. Definicja tej wielkości, przyjęta w cytowanym opracowaniu, odbiega nieco od określonej powyżej skali turbulencji:

$$l_M^2 = \frac{K_m}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{-\overline{u'w'}}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \quad (4.3.4)$$

Po uwzględnieniu definicji współczynnika K_M i funkcji uniwersalnej ϕ_m otrzymuje się:

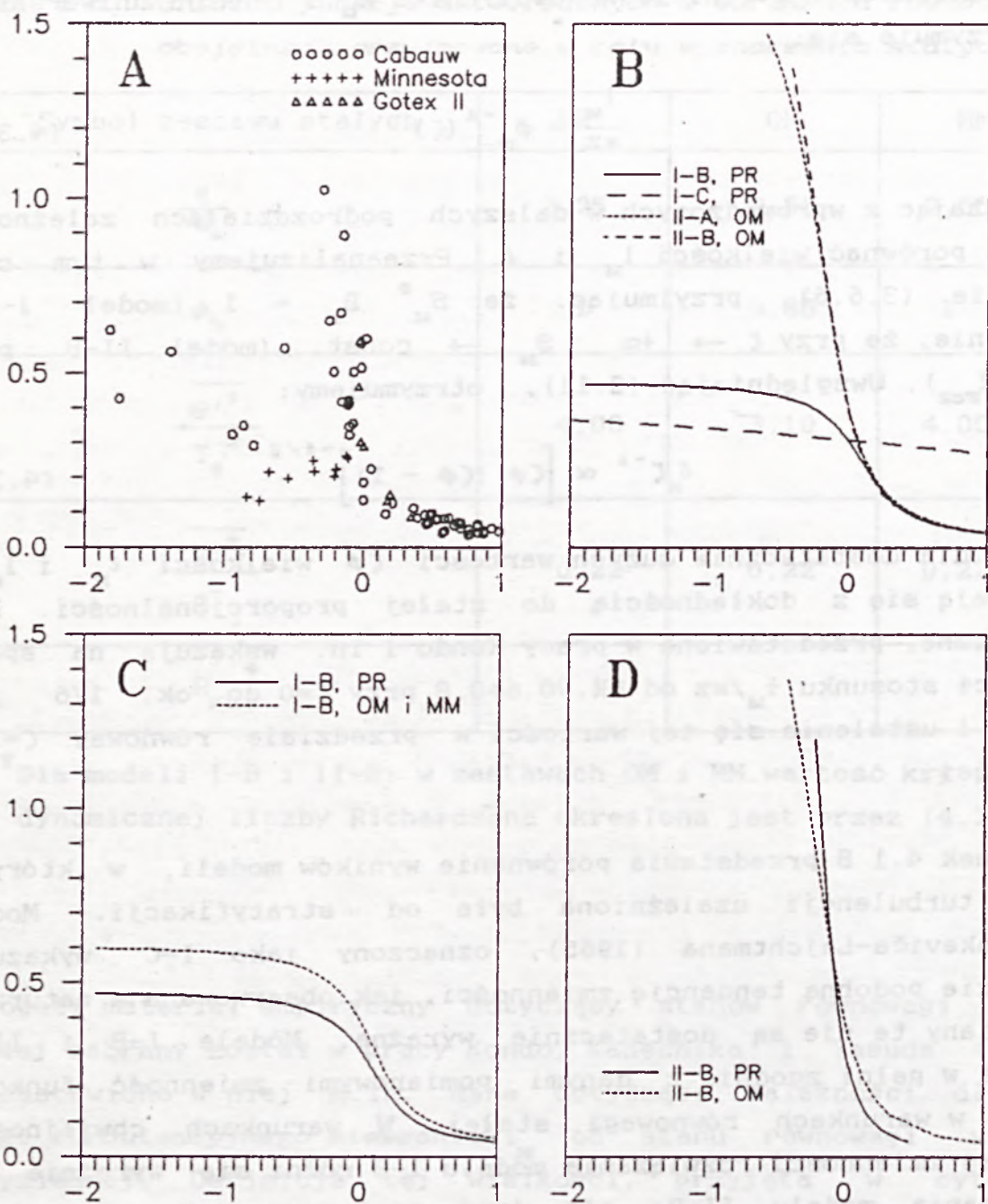
$$\frac{l_M}{\kappa z} = \phi_m^{-1}(\zeta) \quad (4.3.5)$$

Korzystając z wprowadzonych w dalszych podrozdziałach zależności, możemy porównać wielkości l_M i l_N . Przeanalizujemy w tym celu równanie (3.6.6), przyjmując, że $S_M^3 B_1 = 1$ (model I-B), względnie, że przy $\zeta \rightarrow +\infty$ $S_M \rightarrow \text{const.}$ (model II-B przy $m^{-1} < R_{Fc2}$). Uwzględniając (2.11), otrzymujemy:

$$l_N \zeta^{-1} \propto [\zeta \phi(\zeta \phi - 1)]^{-1/2} \quad (4.3.6)$$

Zatem, dla dostatecznie dużych wartości $\zeta \phi$ wielkości l_N i $l_M/\kappa z$ pokrywają się z dokładnością do stałej proporcjonalności. Dane empiryczne, przedstawione w pracy Kondo i in. wskazują na spadek wartości stosunku $l_M/\kappa z$ od ok. 0.6+0.8 przy $\zeta=0$ do ok. 1/6 przy $\zeta=5/7$, i ustalenie się tej wartości w przedziale równowag $\zeta=1+10$ i powyżej.

Rysunek 4.1 B przedstawia porównanie wyników modeli, w których skala turbulencji uzależniona była od stratyfikacji. Model Zilitinkeviča-Lajchtmana (1965), oznaczony jako I-C wykazuje wprawdzie podobną tendencję zmienności, jak obserwowana w naturze, ale zmiany te nie są dostatecznie wyraźne. Modele I-B i II-B opisują w pełni zgodnie z danymi pomiarowymi zmienność funkcji $S_M l_N(\zeta)$ w warunkach równowagi stałej. W warunkach chwiejności przebieg zmienności rozwiązania modelu I-B różni się wyraźnie od rozwiązania modelu II-B, ale dane pomiarowe nie pozwalają jednoznacznie rozstrzygnąć wyboru na korzyść jednego z tych modeli.



Rys. 4.1. Przebieg zmienności funkcji uniwersalnej $S_{MN}^L(\zeta)$:

A: Dane eksperymentalne;

B: Wyniki otrzymane z różnych modeli (opis w tekście);

C: Wpływ wartości parametrów w modelu I-B;

D: Wpływ wartości parametrów w modelu II-B;

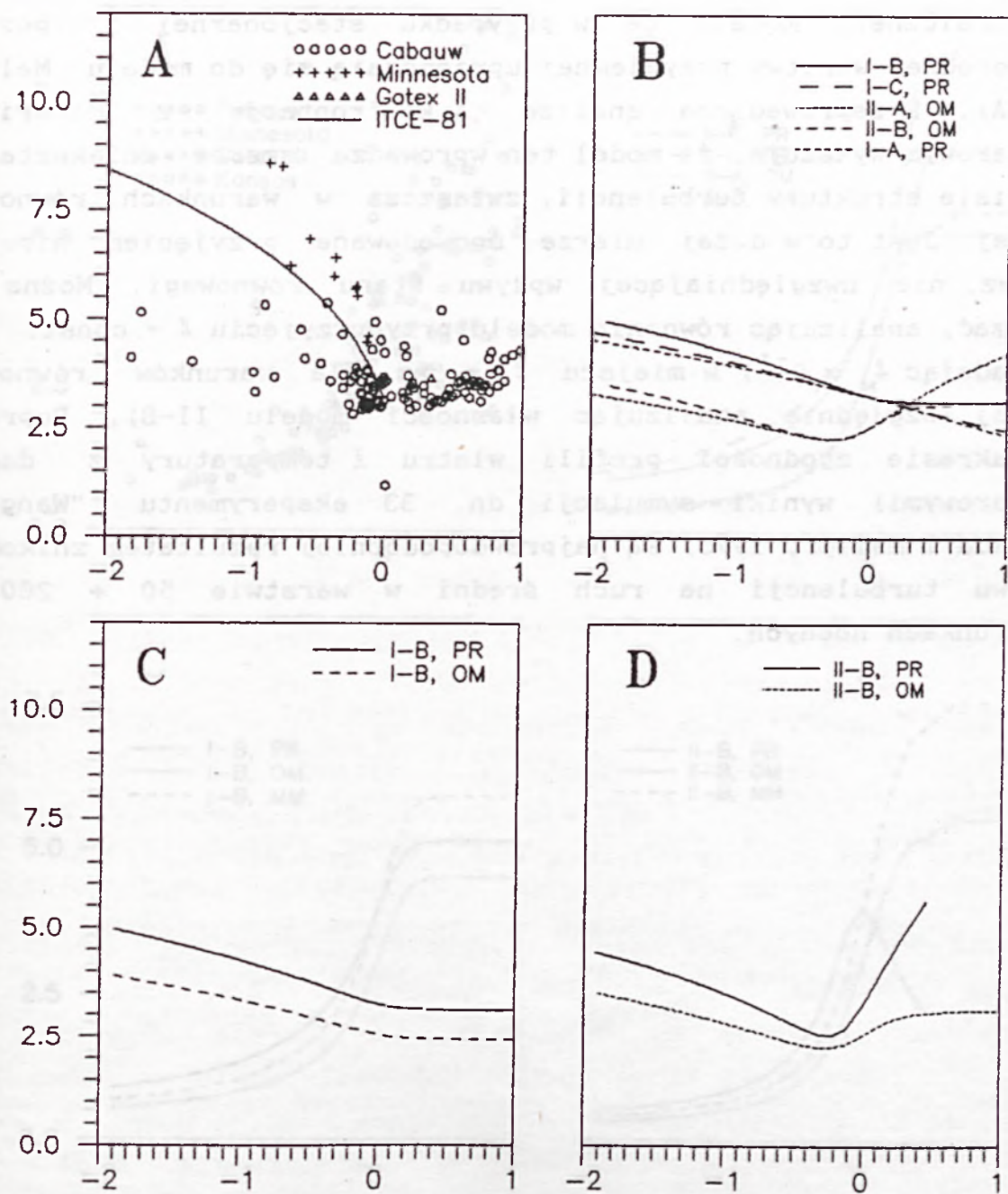
Rys. 4.1 C ilustruje wpływ zmian wartości stałych (zestawy PR i OM) na wyniki, otrzymywane z modelu I-B. Wpływ ten jest stosunkowo niewielki w warunkach równowagi stałej, w warunkach równowagi chwiejnej powoduje zmiany wartości funkcji $S_{MN}^l(\zeta)$ w granicach 25%. Na rysunku 4.1 D przedstawiono wpływ zmian wartości stałych modelu II-B. Różnice w warunkach równowagi stałej są tu znacznie bardziej wyraźne, niż w przypadku modelu I-B.

Na rysunku 4.2 A-D przedstawiono porównanie przebiegu funkcji uniwersalnej $B_1^{1/3} q_N(\zeta) = q/u_*$, otrzymanej z poszczególnych modeli dla różnych zestawów stałych, z danymi pomiarowymi. Podobnie, jak dla poprzednio omówionej funkcji, rozrzut danych, zgromadzonych w warunkach równowagi chwiejnej jest duży i nie pozwala na decydujące rozstrzygnięcie. Spośród rozwiązań modelowych, widocznych na rys. 4.2 B, za najbardziej zbliżone do obserwacji uznać należy rozwiązanie modelu I-B; w modelu Zilitinkeviča-Lajchtmana (I-C) oraz w modelu I-A występuje nie obserwowany w naturze wyraźny spadek wartości tej funkcji w warunkach równowagi stałej, w modelu Mellora (II-A) - jej silny wzrost, również niezgodny z informacją pomiarową. Modele II-A i II-B cechuje ponadto występowanie minimum funkcji w okolicach $\zeta \cong -0.2$; minimum takie nie występuje w wynikach pomiarów. W warunkach dostatecznie silnej chwiejności ($\zeta < -0.5$) wszystkie modele wykazują mniej więcej podobny wzrost wartości funkcji $B_1^{1/3} q_N(\zeta)$ przy wzroście chwiejności, jednak wartości tej funkcji są wyraźnie zaniżone w przypadku modeli II-A i II-B. Próby likwidacji tego zjawiska w modelu II-B drogą zmiany wartości stałych (rys. 4.2 D) powodują jednak wyraźne pogłębianie się wzmiankowanego minimum oraz wystąpienie jeszcze bardziej wyolbrzymionego wzrostu wartości funkcji $B_1^{1/3} q_N(\zeta)$ wraz ze wzrostem stabilności. Jednocześnie, analogiczne zmiany wartości stałych w modelu I-B nie powodują wystąpienia podobnych zjawisk, a spowodowane przez nie zmiany wartości funkcji (rys. 4.2 B) mieszczą się w zakresie 25%.

W przypadku funkcji uniwersalnej, opisującej wariancję temperatury $(\overline{\theta'^2} / T_*^2)$, rys. 4.3 A-D) mamy do czynienia z nieco odmienną sytuacją. Duży rozrzut danych pomiarowych występuje w zakresie równowag stałych, natomiast rysowanie się wyraźnych zależności funkcyjnych od parametru równowagi ζ obserwujemy w zakresie równowagi chwiejnej. Sytuację tę tłumaczyć można dużą wartością błędu względnego w pomiarach fluktuacji temperatur w warunkach równowagi stałej. Na podstawie zgromadzonego materiału pomiarowego nie sposób rozstrzygnąć, które z przedstawionych na rysunku 4.3 B rozwiązań modelowych najlepiej oddaje obserwowany charakter zmienności funkcji uniwersalnej. Wyraźna tendencja, obserwowana w warunkach chwiejności, odzwierciedlona jest poprawnie we wszystkich modelach. Zmiany wartości stałych w modelu I-B (rys. 4.3 C) prowadzą do kilkunasto-kilkudziesięcio-procentowych zmian wartości funkcji $\overline{\theta'^2} / T_*^2$, w przypadku modelu II-B mogą jednak powodować jakościowe (!) zmiany w przebiegu zmienności tej funkcji (rys. 4.3 D). Przy tym, wprowadzenie zestawu stałych PR (podwyższona w stosunku do zestawu stałych Mellora-Yamady wartość B_1) powoduje wystąpienie gwałtownego spadku wartości tej funkcji w warunkach równowagi stałej.

Bezwymiarowe profile wiatru i temperatury $\phi_m(\zeta)$ i $\phi_h(\zeta)$ przedstawiono na rysunku 3.1 A-D. Widoczne jest, że modele KEYPS (I-A) oraz Zilitinkeviča-Lajchtmana (I-C) dają wyniki niezgodne z danymi pomiarowymi, zarówno w zakresie równowag stałych, jak i chwiejnych. Natomiast prognozy modelu Mellora (II-A) oraz modelu I-B, zarówno w przypadku gradientów wiatru, jak i temperatury nie budzą poważniejszych zastrzeżeń, przy czym model I-B pozwala osiągnąć lepszą zgodność z pomiarami.

W praktyce często stosowane są modele z uproszczonym systemem zamykania drugiego rzędu, odpowiadające w klasyfikacji Mellora i Yamady "poziomowi 3" (2 cząstkowe równania różniczkowe opisujące bilans kinetycznej energii turbulencji oraz bilans wariancji temperatury), "poziomowi $2\frac{1}{2}$ " (1 cząstkowe równanie różniczkowe opisujące bilans kinetycznej energii turbulencji) i "poziomowi 2"



Rys. 4.2. Stosunek q/u jako funkcja parametru ζ :

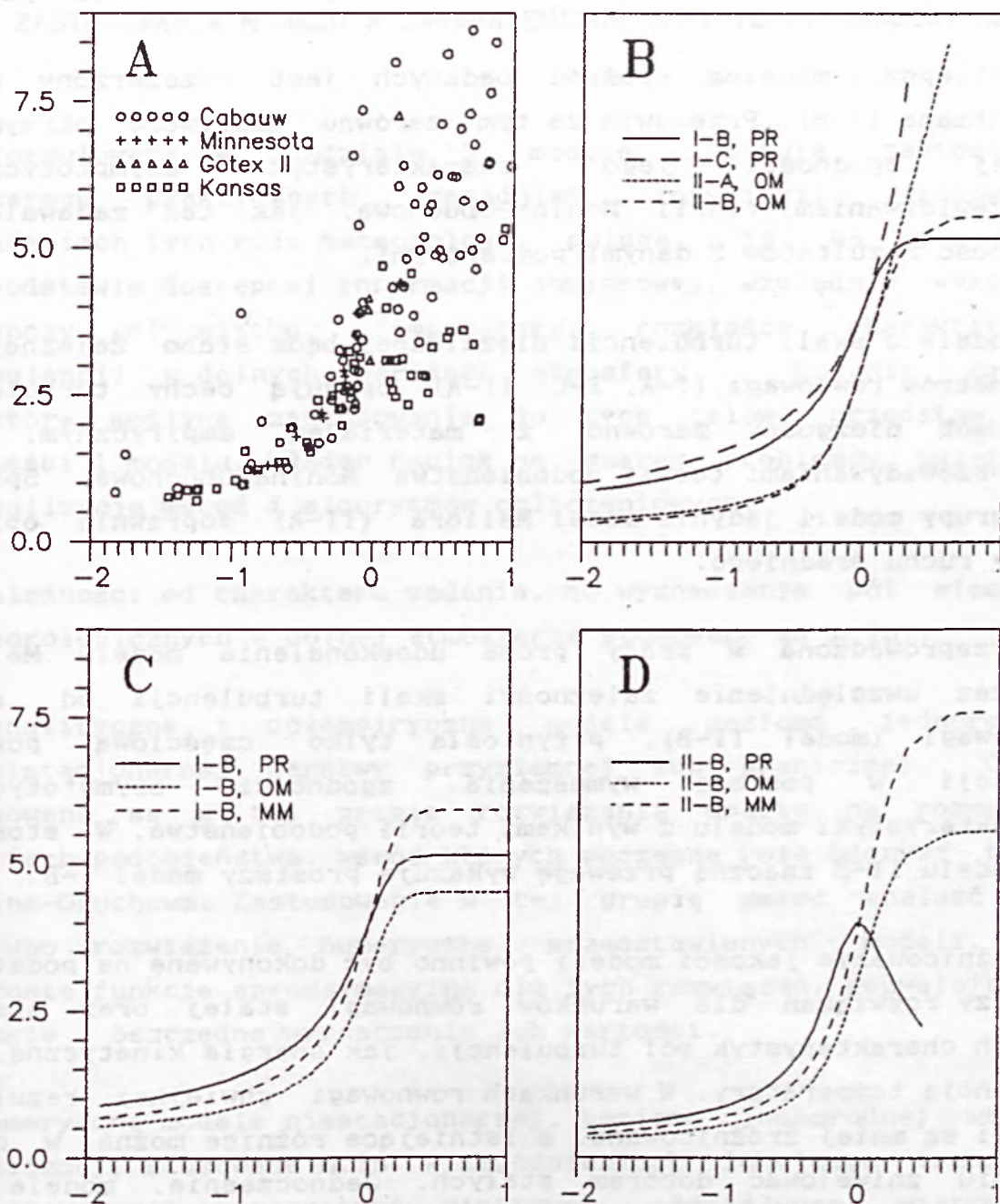
A: Dane eksperymentalne;

B: Wyniki otrzymane z różnych modeli (opis w tekście);

C: Wpływ wartości parametrów w modelu I-B;

D: Wpływ wartości parametrów w modelu II-B;

(wszystkie równania bilansu i ewolucji tensora naprężeń Reynoldsa algebraiczne). Modele te w przypadku stacjonarnej i poziomo jednorodnej warstwy przyziemnej upraszczają się do modelu Mellora (II-A). Przeprowadzona analiza i konfrontacja z materiałem pomiarowym wykazuje, że model ten wprowadza szereg zniekształceń w opisie struktury turbulencji, zwłaszcza w warunkach równowagi stałej. Jest to w dużej mierze spowodowane przyjęciem hipotezy $l = \kappa z$, nie uwzględniającej wpływu stanu równowagi. Można to wykazać, analizując równania modelu przy przyjęciu $l = \text{const.}$ (tj. zakładając $l_N \propto \zeta^{-1}$) w miejscu $l = \kappa z$ dla warunków równowagi stałej (względnie analizując własności modelu II-B). Poprawne (w zakresie zgodności profili wiatru i temperatury z danymi pomiarowymi) wyniki symulacji dn. 33 eksperymentu "Wangara" (Yamada i Mellor, 1975) są najprawdopodobniej rezultatem znikomego wpływu turbulencji na ruch średni w warstwie $50 \div 2000$ m w warunkach nocnych.



Rys. 4.3. Stosunek $\overline{\theta^{*2}}/T_*^2$ jako funkcja parametru ξ :

A: Dane eksperymentalne;

B: Wyniki otrzymane z różnych modeli (opis w tekście);

C: Wpływ wartości parametrów w modelu I-B;

D: Wpływ wartości parametrów w modelu II-B;

Podsumowanie otrzymanych rezultatów można przedstawić następująco:

1. Najlepszym modelem spośród badanych jest rozszerzony model Lajchtmana (I-B). Przemawia za tym zarówno możliwość otrzymania pełnej zgodności jego charakterystyk asymptotycznych z przewidywaniami teorii Monina-Obuchowa, jak też zadawająca zgodność rezultatów z danymi pomiarowymi.

2. Modele o skali turbulencji niezależnej bądź słabo zależnej od parametrów równowagi (I-A, I-C, II-A) opisują cechy turbulencji w sposób niezgodny zarówno z materiałem empirycznym, jak i z przewidywaniami teorii podobieństwa Monina-Obuchowa. Spośród tej grupy modeli jedynie model Mellora (II-A) poprawnie opisuje cechy ruchu średniego.

3. Przeprowadzona w pracy próba udoskonalenia modelu Mellora poprzez uwzględnienie zależności skali turbulencji od stanu równowagi (model II-B), przyniosła tylko częściową poprawę sytuacji w postaci wymuszenia zgodności asymptotycznej charakterystyki modelu z wynikami teorii podobieństwa. W stosunku do modelu II-B znaczną przewagę wykazuje prostszy model I-B.

4. Różnicowanie jakości modeli powinno być dokonywane na podstawie analizy rozwiązań dla warunków równowagi stałej oraz analizy takich charakterystyk pól turbulencji, jak energia kinetyczna, czy wariancja temperatury. W warunkach równowagi chwiejnej rezultaty modeli są mniej zróżnicowane, a istniejące różnice można w dużym stopniu zniwelować doбором stałych. Jednocześnie, modele źle opisujące rozkłady energii kinetycznej turbulencji i wariancji temperatury (np. model II-A) mogą dobrze prognozować profile wiatru i temperatury.

ZASTOSOWANIA MODELU W ZAGADNIENIACH INŻYNIERII ŚRODOWISKA

Sformułowane w rozdziale 3 modele znajdują zastosowanie w szeregu praktycznych zagadnień inżynierii środowiska. W zadaniach tych rola meteorologii polega m.in. na wyznaczaniu na podstawie dostępnej informacji pomiarowej, względnie wykonaniu prognozy pól wiatru, temperatury, rozkładów charakterystyk turbulencji w dolnych partiach atmosfery. Obecnie omówimy niektóre możliwe zastosowania do tych celów przedstawionego w części I modelu, kładąc nacisk na szereg problemów związanych z realizacją metod i algorytmów obliczeniowych.

W zależności od charakteru zadania, do wyznaczania pól elementów meteorologicznych w dolnej atmosferze stosowane są m.in.:

- analityczne i półempiryczne modele poziomo jednorodnej, quasistacjonarnej warstwy przyziemnej lub granicznej. Często stosowane są w tej grupie rozwiązania oparte na rozmaitych teoriach podobieństwa, wśród których poczesną rolę odgrywa teoria Monina-Obuchowa. Zastosowanie w tej grupie metod znaleźć mogą zarówno rozwiązania numeryczne przedstawionych modeli, jak i proste funkcje aproksymacyjne dla tych rozwiązań, pozwalające na szybkie i oszczędne wyznaczenie ich wartości.

- numeryczne modele niestacjonarnej, poziomo jednorodnej warstwy granicznej, stosowane m.in. w zagadnieniach lokalnego transportu zanieczyszczeń, energetyki wiatrowej, oddziaływań wiatru na budowle, lokalnej prognozy pogody itp. Modele tego typu mogą cechować się dużą szczegółowością opisu poszczególnych zjawisk, m.in. turbulencji. W niniejszej pracy zaprezentowana zostanie próba udoskonalenia parametryzacji turbulencji, bazująca na uogólnieniu otrzymanych dla warstwy przyziemnej rozwiązań.

- trójwymiarowe modele granicznej warstwy atmosfery, pozwalające uwzględnić efekty rzeźby terenu i niejednorodności podłoża. W tej

grupie modeli często dąży się do uwzględnienia w/w wpływów kosztem zredukowania szczegółowości opisu innych procesów. Olbrzymie zapotrzebowanie na moc obliczeniową powoduje m.in. konieczność stosowania prostych schematów parametryzacji turbulencji i redukcji ilości węzłów siatki obliczeniowej. Chętnie stosowana jest parametryzacja warstwy przyziemnej i formułowanie dolnych warunków brzegowych na poziomie kilkudziesięciu metrów. Przy zastosowaniu w opisie warstwy przyziemnej konkretnego zestawu funkcji uniwersalnych pożądana jest zgodność warunków brzegowych z rozwiązaniami stosowanego modelu; pozwala to uniknąć generacji sztucznych zaburzeń i nieregularności profili w sąsiedztwie brzegu. Przeprowadzona w rozdziale 4 analiza daje odpowiedź na pytanie, jaką postać funkcji uniwersalnych dobrać w celu sformułowania dolnego warunku brzegowego dla konkretnego modelu warstwy granicznej, oraz, jakie efekty powodować może wybór poszczególnych schematów parametryzacji turbulencji.

W drugiej części pracy przedstawione zostaną:

- specjalna metoda numeryczna, służąca do uzyskiwania stosunkowo dokładnych rozwiązań równania fundamentalnego modelu I-B, oraz użyte w niniejszej pracy metody wyznaczania rozwiązań równań fundamentalnych poszczególnych modeli
- praktyczne aproksymacje funkcji uniwersalnych, otrzymanych z rozwiązań modelowych
- koncepcja prostego schematu parametryzacji turbulencji w numerycznych modelach granicznej warstwy atmosfery, uwzględniającego postulaty zgodności z teorią podobieństwa i danymi pomiarowymi w obszarze warstwy przyziemnej.

5. Metody rozwiązywania równań modelu

Postać równań fundamentalnych poszczególnych wariantów modelu omówionego w rozdziale 3 nie pozwala na bezpośrednie wyznaczenie zależności $R_F(\zeta)$. Zarazem, w przypadku modeli wykorzystujących uogólnioną hipotezę von Kármána, w warunkach równowagi stałej przy wzrastającym ζ , R_F dąży do pewnej stałej wartości R_{Fc} , już dla niewielkich ζ osiągając bliskie jej wartości. Fakt ten utrudnia naturalne, jak by się zdawać mogło, rozwiązanie problemu przez wyznaczenie zależności $\zeta(R_F)$ i określenie praktycznej aproksymacji dla funkcji odwrotnej, ponieważ metoda ta już dla niewielkich dodatnich ζ okazuje się być źle uwarunkowana. Poniżej omówimy pokrótce przybliżone metody, użyte w niniejszej pracy do bezpośredniego wyznaczenia zależności $R_F(\zeta)$. Wykorzystywane jest przy tym czynione już uprzednio założenie o wzajemnie jednoznacznym określeniu funkcji $\zeta(R_F)$.

5.1. Równania algebraiczne w postaci uwikłanej

Są to równania: (3.6.13), (3.6.18) i (3.6.19). Do ich rozwiązania stosowano metody: stycznych Newtona i bisekcji. Przy rozwiązywaniu równania (3.6.13) w zakresie równowag chwiejnych ($\zeta < 0$) zadawające rezultaty osiągnięto stosując metodę stycznych po wprowadzeniu transformacji zmiennej y :

$$x = \ln \frac{ny - 1}{ny + 1} \quad (5.1.1)$$

tj. rozwiązywane jest ze względu na x równanie (C-10):

$$\zeta = -\frac{2}{3} y^3 + \frac{n^4 - 1}{n^3} \left[-\arctg(ny) + \frac{x}{2} \right] + C \quad (5.1.2)$$

w którym

$$y = \frac{s + 1}{n(s - 1)}, \quad s = e^x. \quad (5.1.3)$$

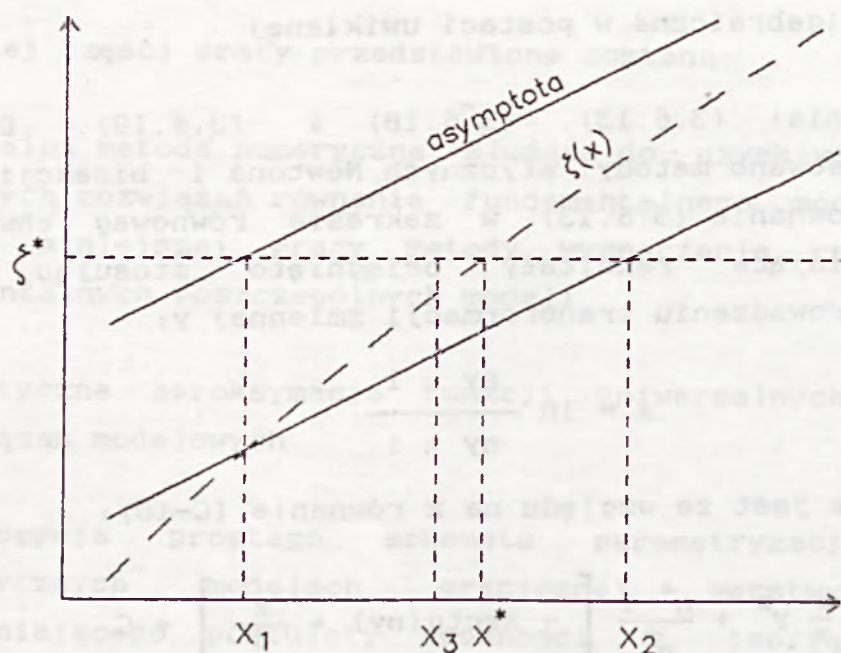
Metoda stycznych Newtona wymaga zadania wartości pochodnej $\zeta'(x)$. Wykorzystując (C-5), po uwzględnieniu (5.1.1, 3) otrzymamy:

$$d\zeta = \left[-2y^2 + \frac{2y^2}{m-1-my^4} \right] \frac{s(n-y)}{s-1} dx \quad (5.1.4)$$

Wychodząc z pewnego przybliżenia x_i wartości poszukiwanej funkcji $x(\zeta)$ w zadanym punkcie ζ^* , z formuł powyższych obliczyć można s_i , y_i , $\zeta(x_i)$ oraz $\zeta'(x_i)$. Kolejne przybliżenie otrzymujemy jako:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\zeta^* - \zeta(x_i)}{\zeta'(x_i)} \quad (5.1.5)$$

W przypadku równowagi stałej metoda stycznych nie daje dobrych wyników ze względu na istnienie przedziału o dużej krzywiznie funkcji $\zeta(R_F)$ w obrębie wartości R_F zbliżonych do wartości asymptotycznej R_{Fc} (por. rys. 5.1). Z tego powodu, dla ζ



Rys. 5.1. Ilustracja zmodyfikowanej metody bisekcji, zastosowanej w celu rozwiązania równania (3.6.13) po transformacji (5.1.1) współrzędnej y

przekraczających pewną wartość została zastosowana specjalnie zmodyfikowana metoda bisekcji, realizowana również w układzie (x, ζ) . W układzie tym funkcja $\zeta(x)$ posiada asymptotę $\tilde{\zeta}(x)$ określoną równaniem:

$$\tilde{\zeta} = ax + b \quad (5.1.6)$$

gdzie

$$a = \frac{(n^4 - 1)}{2} n^{-3}; \quad b = \left[-\frac{2}{3} n^{-3} - \frac{\pi (n^4 - 1)}{2} n^{-3} + c \right]$$

Lewy koniec x_1 przedziału, w którym zawiera się poszukiwana wartość $x(\zeta^*)$, znajdziemy jako rzędną punktu, w którym asymptota przecina prostą $\zeta = \zeta^*$ (rys. 5.1). Ponieważ zbieżność asymptotyczna zachodzi w ten sposób, że:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \zeta(x) < \tilde{\zeta}(x), \quad (5.1.7)$$

zaś funkcja $\zeta(x)$ jest rosnąca, więc otrzymana w ten sposób wartość x_1 jest mniejsza od rozwiązania dokładnego $x(\zeta^*)$. Mamy zatem:

$$x_1 = \frac{\zeta^* - b}{a} \quad (5.1.8)$$

Następnie, przez punkt $(x_1, \zeta(x_1))$ prowadzimy prostą równoległą do asymptoty:

$$\zeta = ax + (\zeta(x_1) - ax_1) \quad (5.1.9)$$

Przetnie ona prostą $\zeta = \zeta^*$ w punkcie o współrzędnych (x_2, ζ^*) , przy czym x_2 stanowi prawy koniec wyjściowego przedziału bisekcji (rys. 5.1):

$$x_2 = \frac{\zeta^* - (\zeta(x_1) - ax_1)}{a} \quad (5.1.10)$$

Po podzieleniu przedziału (x_1, x_2) na połowy, do rozstrzygnięcia wyboru kolejnego przedziału zawierającego rozwiązanie stosujemy kryterium: jeśli $\zeta(x_3) > \zeta^*$, to $x(\zeta^*) \in (x_1, x_3)$, w przeciwnym wypadku $x(\zeta^*) \in (x_3, x_2)$. Iteracje kontynuujemy do osiągnięcia zadawalającej dokładności rozwiązania.

Równania (3.6.18) i (3.6.19) nie stwarzają większych kłopotów obliczeniowych. Do ich rozwiązania wykorzystać można praktycznie dowolną metodę numeryczną.

5.2. Równania różniczkowe

Analityczne rozwiązanie równania (3.6.11) utrudnione jest złożoną postacią występującej w nim funkcji $S_M(R_F)$. Z tego względu całkowanie dokonywane jest w sposób przybliżony, przy zastosowaniu czterokrokowej metody Runge-Kutty. W zakresie równowag chwiejnych całkowane jest bezpośrednio równanie postaci:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = f(R_F) \quad (5.2.1)$$

w efekcie czego otrzymywana jest zależność $R(\zeta)$, natomiast dla równowagi stałej, z uwagi na trudności o podobnym charakterze, jak opisane w p. 5.1, całkowane jest równanie (3.4.14) w postaci:

$$\frac{d\zeta}{dR_F} = \left[f(R_F) \right]^{-1} \quad (5.2.2)$$

Ponieważ równanie (3.6.11) przechodzi w (3.6.12) po podstawieniu $S_M = B_1^{-1/3}$, dokładność rozwiązania otrzymywanego przy pomocy metody Runge-Kutty ocenić można przez porównanie wyników uzyskanych tą metodą po dokonaniu powyższego podstawienia, z rozwiązaniem (3.6.13) równania (3.6.12), otrzymanego metodą opisaną w p. 5.1. W prezentowanej pracy sposób ten zastosowano do określenia wystarczająco małego kroku całkowania.

6. Praktyczne aproksymacje uniwersalnych funkcji teorii podobieństwa Monina-Obuchowa

Sformułowany w pierwszej części pracy model pozwala na otrzymywanie przebiegów uniwersalnych funkcji teorii podobieństwa Monina-Obuchowa, jednak związane z tym nakłady obliczeniowe mogą stanowić istotną przeszkodę w zastosowaniach praktycznych. W tym celu zostaną poniżej sformułowane aproksymacje tych funkcji, pozwalające na szybkie i proste otrzymanie wartości liczbowych dla przedziału zmienności $-2 \leq \zeta \leq 1$. Zastosowana postać funkcji aproksymacyjnych zapewni przy tym winna prawidłowe własności asymptotyczne. Będziemy ponadto wymagać, aby funkcja aproksymacyjna była w przedziale $(-\infty, +\infty)$ ciągła, różnowartościowa i posiadała ciągłą pierwszą pochodną.

6.1. Skala turbulencji

Uniwersalna funkcja $\ell_N(\zeta)$ jest malejącą funkcją parametru równowagi ζ . W zakresie równowag chwiejnych przy $\zeta \rightarrow -\infty$ dąży do wartości stałej, w równowadze stałej przy $\zeta \rightarrow +\infty$ maleje tak, jak funkcja ζ^{-1} . Przyjmuje wartości dodatnie, ograniczone z góry wartością asymptotyczną:

$$\ell_{N \max} = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \ell_N(\zeta) = 1.5 \left[\tilde{S}_M B_1^{1/3} \right]^{1/4} \quad (6.1.1)$$

Funkcję tą aproksymować będziemy przy pomocy funkcji postaci:

$$f(x) = \begin{cases} A - B e^{cx}, & x < 0 \\ \frac{D}{x - E} + F, & x \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

Przy tym,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = F$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = A - B$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = F - \frac{D}{E}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = B \quad C$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{D}{E^2}$$

Związki te pozwalają wyznaczyć parametry A ... E funkcji $f(x)$ na podstawie znanych wartości funkcji i jej pochodnej w punkcie $x = 0$ oraz asymptotycznych jej granic przy $x \rightarrow \pm\infty$:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - f(0);$$

$$C = \frac{f'(x=0)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - f(0)};$$

$$D = -\frac{\left[f(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]^2}{f'(x=0)}$$

$$E = \frac{f(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{f'(x=0)};$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Przyjawszy na podstawie przeprowadzonych obliczeń (rys. 4.1 B,C) wartości:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.5, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(0) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

otrzymamy:

$$A = 1.5, \quad B = 0.5, \quad C = 2.0, \quad D = 0.25, \quad E = -0.25 \quad \text{ i } \quad F = 0.$$

6.2. Kinetyczna energia ruchów turbulentycznych

Funkcja uniwersalna $q_N(\zeta)$ opisuje zależność stosunku średniokwadratowej prędkości pulsacji turbulentycznych do prędkości dynamicznej, od parametru równowagi ζ . Przy $\zeta \rightarrow -\infty$ jej wartość wzrasta tak, jak funkcja $(-\zeta)^{1/3}$, przy $\zeta \rightarrow +\infty$ maleje ona, dążąc szybko do wartości stałej. Do jej aproksymacji użyjemy funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} A + B e^{-Cx} & , \quad x \geq 0 \\ E (1 - Dx)^{1/3} & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

przy tym,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -E D$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -B C$$

albo:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ;$$

$$B = f(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ;$$

$$C = \frac{-f'(x=0)}{f(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} ;$$

$$D = - \frac{f'(x=0)}{f(0)}$$

$$E = f(0)$$

Przyjawszy na podstawie obliczeń dla modelu I-B (rys. 4.2 B,C) wartości:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1.3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.966,$$

otrzymamy:

$$A = 0.966, B = 0.034, C = 38.2, D = 1.3, E = 1.$$

6.3. Zależność $R_F(Ri)$

Wprowadzone w poprzednich rozdziałach funkcje aproksymują wartości uniwersalnych funkcji teorii podobieństwa Monina-Obuchowa i mogą być używane w zadaniach dotyczących przyziemnej warstwy atmosfery (np. formułowanie dolnych warunków brzegowych w modelach granicznej warstwy atmosfery). W wielu sytuacjach dogodniejsze okazuje się posługiwanie zamiast ζ - liczbami Richardsona w charakterze parametru równowagi. Zarówno przy wykorzystywaniu wyników pomiarów gradientowych, jak i opisie turbulencji w numerycznych modelach granicznej warstwy atmosfery, na podstawie posiadanej informacji obliczyć można wartość gradientowej liczby Richardsona Ri , zdefiniowanej w rozdziale 2. Tymczasem, interesujące nas funkcje uniwersalne otrzymaliśmy w rozdz. 3.7 jako zależne od parametru ζ względnie R_F . Ponieważ zależność $\zeta(R_F)$ opisywana jest równaniem fundamentalnym modelu, pozostaje obecnie zająć się zależnością $R_F(Ri)$. Związek pomiędzy wielkościami R_F i Ri dany jest zależnościami (3.7.10), (3.7.11) względnie (3.7.12). W przypadku modelu "poziomu 1", związek ten przekształcony może zostać do postaci:

$$R_F^2 - \left[\frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{3 B_2}{B_1} \right) Ri + 1 \right] R_F + \frac{A_2}{A_1} Ri = 0 \quad (6.3.1)$$

Rozwiązanie równania (6.3.1) ma postać:

$$R_F = \frac{A_2}{2 A_1} \left[1 + \frac{3 B_2}{B_1} \right] Ri + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (6.3.2)$$

gdzie:

$$\Delta = \left[\frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{3 B_2}{B_1} \right) Ri \right]^2 + \frac{2 A_2}{A_1} \left[\frac{3 B_2}{B_1} - 1 \right] Ri + 1$$

W przypadku modeli operacyjnych można osiągnąć pewne skrócenie czasu obliczeń przez zastosowanie w miejsce (6.3.2) odpowiednio dobranej funkcji aproksymującej. Asymptota funkcji $R_i(R_F)$ dla warunków równowagi silnie stałej posiada współczynnik kierunkowy:

$$\lim_{R_i \rightarrow -\infty} \left[\frac{dR_i}{dR_F} \right] = \frac{A_1}{A_2 (1 + 3B_2/B_1)} \quad (6.3.3)$$

Przebieg rozwiązania dla zestawu stałych PR przedstawiony jest na rys. 6.1. Jak widać, już dla wartości $R_i < -1$ mamy do czynienia z zależnością praktycznie liniową. Przy doborze funkcji aproksymującej w przedziale $R_i \in (-1, R_{ic})$, gdzie R_{ic} oznacza krytyczną wartość gradientowej liczby Richardsona, musimy otrzymać wysoką dokładność aproksymacji, zwłaszcza w otoczeniu zera. Funkcja aproksymująca musi być monotoniczna i przebiegać przez punkty: $(0, 0)$, (R_{ic}, R_{Fc}) i $(-1, R_F(-1))$, gdzie przez $R_F(-1)$ oznaczamy wartość rozwiązania modelu w punkcie $R_i = -1$. Ponadto, postulować będziemy, aby pochodna tej funkcji w punkcie $(-1, R_F(-1))$ równa była nachyleniu prostej aproksymującej rozwiązanie modelu dla $R_i < -1$. W przedziale $R_i \in (-1, R_{ic})$ zastosujemy aproksymację wielomianem trzeciego stopnia:

$$R_F = A R_i^3 + B R_i^2 + C R_i + D \quad (6.3.4)$$

Sformułowane wyżej warunki, wraz z warunkiem:

$$\left[\frac{dR_i}{dR_F} \right]_{R_i=-1} = \lim_{R_i \rightarrow -\infty} \left[\frac{dR_i}{dR_F} \right] \quad (6.3.5)$$

tworzą układ równań liniowych:

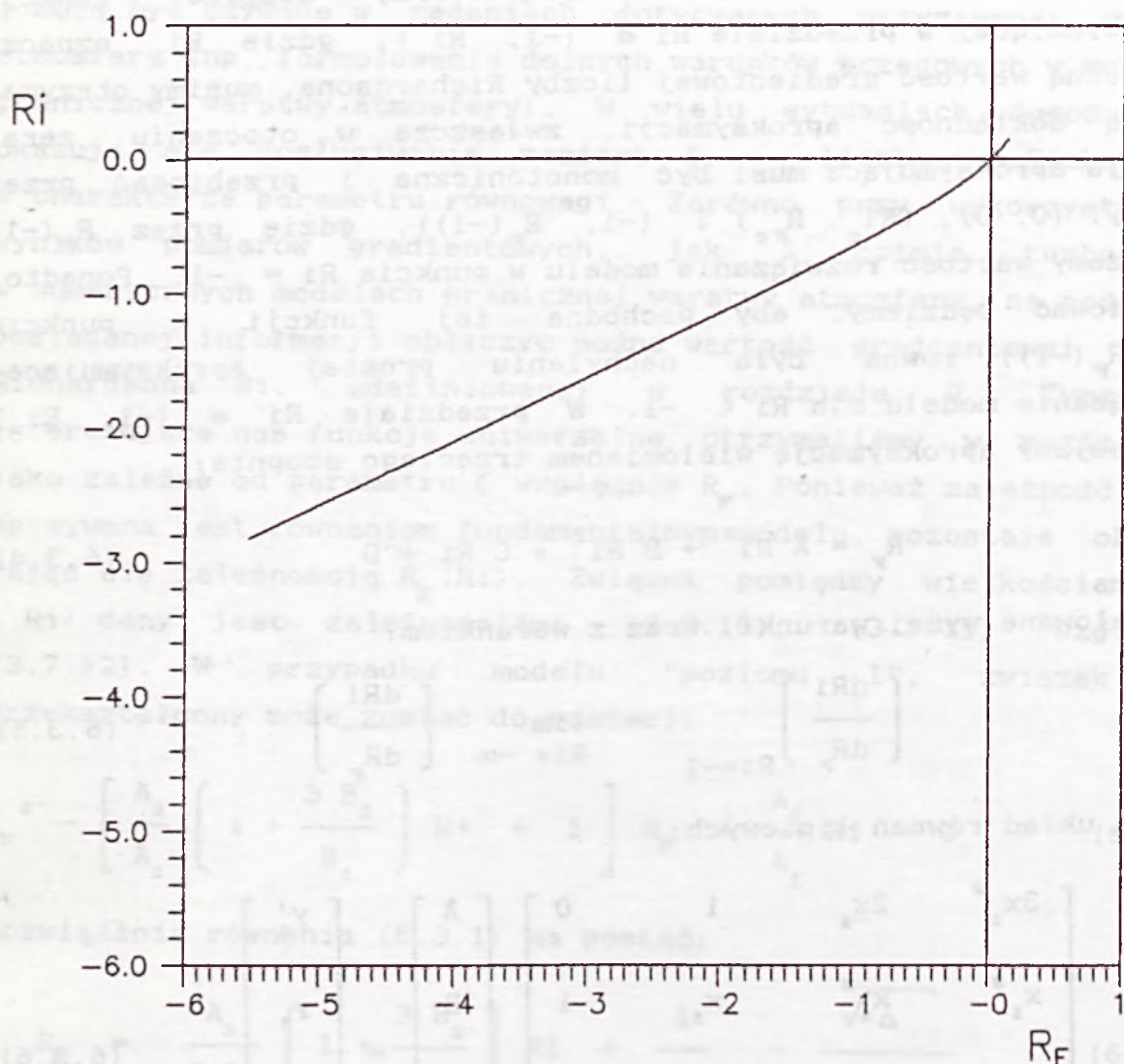
$$\begin{bmatrix} 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (6.3.6)$$

Gdzie:

$$x_1 = -1; \quad y_1 = R_F(-1); \quad y'_1 = (dR_F/dRi)_{(Ri=-1)};$$

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0; \quad x_3 = Ri_c; \quad y_3 = R_{Fc}.$$

Wielkość y'_1 wyznaczamy jako odwrotność wielkości $\lim_{Ri \rightarrow \infty} \left[\frac{dRi}{dR_F} \right]$.



Rys. 6.1. Zależność gradientowej i dynamicznej liczby Richardsona, otrzymana jako rozwiązanie równań modelu I-B.

Wartości stałych: $A_1 = A_2 = 0.31$; $B_1 = 34.5$; $B_2 = 13$ (zestaw PR).

Rozwiązanie układu (6.3.6) ma postać:

$$B = \frac{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

$$A = \frac{\delta_1 - \beta_1 B}{\alpha_1}$$

$$C = y_1' - 3x_1^2 A - 2x_1 B$$

$$D = y_1 - Ax_1^3 - Bx_1^2 - Cx_1$$

gdzie:

$$\alpha_1 = x_1^3 - x_2^3 - 3x_1^2 (x_1 - x_2)$$

$$\alpha_2 = x_1^3 - x_3^3 - 3x_1^2 (x_1 - x_3)$$

$$\beta_1 = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 (x_1 - x_2)$$

$$\beta_2 = x_1^2 - x_3^2 - 2x_1 (x_1 - x_3)$$

$$\delta_1 = y_1 - y_2 - y_1' (x_1 - x_2)$$

$$\delta_2 = y_1 - y_3 - y_1' (x_1 - x_3)$$

W przypadku modelu I-B, dla $R_{Fc} = 0.13$ ($Ri_c = 0.1565$), otrzymamy:

$$A = -0.30214763149,$$

$$B = -1.0197319849,$$

$$C = 0.99765925748,$$

$$D = 0$$

Dla $Ri < -1$ wykorzystujemy aproksymację liniową:

$$R_F = 2.1304 Ri + 0.4154 \quad (6.3.7)$$

7. Parametryzacja turbulencji w numerycznym modelu granicznej warstwy atmosfery

Wyniki przedstawionych powyżej rozważań zastosować można w opracowywaniu schematu parametryzacji turbulencji w modelu granicznej warstwy atmosfery. Jak wynika z przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach analiz, z modelem "poziomu 2" związanych jest szereg wątpliwości i niejasności, ujawniających się przy próbach zastosowania modelowego układu równań do opisu turbulencji w przyziemnej warstwie atmosfery. Co więcej, istotne dla prawidłowego sformułowania warunków brzegowych modelu GWA uniwersalne funkcje teorii podobieństwa Monina-Obuchowa wykazują większe niezgodności z postulatami teoretycznymi i materiałem doświadczalnym w przypadku modelu "poziomu 2", niż w przypadku modelu "poziomu 1". Uwzględnienie zależności skali turbulencji od parametru stratyfikacji w modelu "poziomu 2" powoduje tylko częściową poprawę sytuacji. Ponieważ opracowywane z myślą o zastosowaniach inżynierskich modele muszą spełniać postulat możliwie wiernego odzwierciedlenia warunków meteorologicznych w dolnej części warstwy granicznej, uzasadnione wydaje się przyjęcie, jako jednego z podstawowych, proponowanego kryterium zgodności rozwiązań modelu z postulatami teoretycznymi i materiałem empirycznym w warunkach odpowiadających założeniom teorii Monina-Obuchowa dla warstwy przyziemnej.

Z rozmaitych analiz porównawczych (np. Yu, 1977; Clarke, 1974), oraz symulacji eksperymentów pomiarowych (np. Bodin, 1979), wynika, że rozwój warstwy granicznej, występowanie w niej takich zjawisk, jak np. niskotroposferyczne prądy strumieniowe (oscylacje inercyjne), wreszcie zmienność dobową i przestrzenną pól wiatru i temperatury może zostać poprawnie opisana modelem, w którym do zamknięcia układu równań wykorzystano związki K-teorii, a współczynniki wymiany turbulencyjnej wyznaczono przy pomocy równania bilansu kinetycznej energii ruchu turbulencyjnego i umiejętnie dobranej hipotezy określającej skalę turbulencji. Uproszczenie tak sformułowanego modelu dla warunków wyznaczonych założeniami teorii Monina-Obuchowa powinno być zgodne z modelem

"poziomu 1", opisanym w rozdziale 3. Dlatego też do opisu turbulencji w granicznej warstwie atmosfery proponuje się model rozwinięty na bazie modelu "poziomu 1". Układ równań prostego modelu dynamiki poziomo jednorodnej granicznej warstwy atmosfery z domknięciem "poziomu 1" tworzą:

Równania ruchu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f (V - V_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f (U - U_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \quad (7.2)$$

Równanie transportu ciepła:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'} \quad (7.3)$$

Równania, pozwalające wyznaczyć ważniejsze momenty statystyczne pól turbulencyjnych:

$$- \left[\overline{u'w'} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{v'w'} \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \beta \overline{w'\theta'} = \frac{q^3}{B_1 \ell} \quad (7.4)$$

$$\overline{u'w'} = - A_1 q \ell \frac{\partial U}{\partial z} \quad (7.5)$$

$$\overline{v'w'} = - A_1 q \ell \frac{\partial V}{\partial z} \quad (7.6)$$

$$\overline{w'\theta'} = - A_2 q \ell \frac{\partial \theta}{\partial z} + 3 A_2 \frac{\beta \ell}{q} \overline{\theta'^2} \quad (7.7)$$

$$\frac{q}{B_2 \ell} \overline{\theta'^2} = - \overline{w'\theta'} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (7.8)$$

Warunki brzegowe:

$$U(z = z_0, t) = V(z = z_0, t) = 0 \quad (7.9)$$

$$\theta(z = z_0, t) = \theta_s(t) \quad (7.10)$$

$$U(z = H, t) = U_g(t) \quad (7.11)$$

$$V(z = H, t) = V_g(t) \quad (7.12)$$

$$\theta(z = H, t) = \theta_H(t) \quad (7.13)$$

Warunki początkowe:

$$U(z, t = t_0) = U(t_0) \quad (7.14)$$

$$V(z, t = t_0) = V(t_0) \quad (7.15)$$

$$\theta(z, t = t_0) = \theta(t_0) \quad (7.16)$$

Powyższy układ wymaga sformułowania dodatkowej zależności, pozwalającej określić skalę turbulencji ℓ . W tym celu rozważymy możliwość zastosowania uogólnionej formuły von Kármána:

$$\ell = -2 \kappa \frac{\Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} ; \quad \Psi = \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]^2 - m \alpha_r \beta \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (7.17)$$

Bezpośrednie zastosowanie w schemacie numerycznym aproksymacji pochodnych cząstkowych występujących w (7.17) natrafia na szereg trudności. Pochodna $\partial \Psi / \partial z$ związana jest z drugimi pochodnymi prędkości i temperatury potencjalnej. Aproksymacja wyrażeń tego typu przy pomocy centralnego schematu 3-punktowego, przy jednoczesnej aproksymacji Ψ schematem 2-punktowym stwarza pewne kłopoty przy stosowaniu "przesuniętej" siatki obliczeniowej (ang. *staggered grid*, obliczanie energii i skali turbulencji, oraz współczynników transportu w węzłach pośrednich). Stosowanie takiego schematu pozwala osiągnąć zadawalające rezultaty jedynie w obszarze warstwy przyziemnej, w której istnieją dostatecznie duże gradienty wiatru i temperatury potencjalnej. W obrębie warstwy wymieszanej wyrażenie (7.17) stanowi iloraz wielkości o małych wartościach liczbowych, a błąd aproksymacji wzrasta

w sposób niekontrolowany. W warstwie inwersji nakrywającej warstwę graniczną, przy liniowym rozkładzie temperatury i niewielkich zmianach prędkości wiatru bezpośrednie zastosowanie aproksymacji wyrażenia (7.17) ilorazami różnicowymi jest niecelowe. Z tych względów poszukiwać będziemy przekształceń, umożliwiających przedstawienie (7.17) w postaci umożliwiającej zastosowanie w modelu numerycznym. Przekształcimy w tym celu funkcję Ψ oraz jej pionowy gradient do postaci:

$$\Psi = \Psi_o \left[1 - m \alpha_T Ri \right] = \Psi_o \left[1 - m R_F \right] \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_o}{\partial z} \left[1 - m R_F \right] - \Psi_o m \frac{\partial R_F}{\partial z} \quad (7.19)$$

gdzie

$$\Psi_o = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Wykorzystując (7.19) i (7.18), zapiszemy odwrotność skali turbulencji w postaci:

$$\frac{1}{l} = - \frac{\frac{\partial \Psi_o}{\partial z}}{2 \pi \Psi_o} + \frac{m \frac{\partial R_F}{\partial z}}{2 \pi \left[1 - m R_F \right]} \quad (7.20)$$

Jeśli zamiast aktualnego profilu wiatru, który potrzebny jest do obliczenia pierwszego wyrazu prawej strony (7.20), użyjemy profilu, który ukształtowałby się w warunkach równowagi obojętnej, wyraz ten będzie można utożsamić z odwrotnością skali turbulencji, określanej hipotezą von Kármána dla neutralnie stratyfikowanej warstwy przyściennej (3.5.7), (3.5.9). Jak pokazano w Dodatku D, przy logarytmicznym rozkładzie prędkości i stałym strumieniu pędu w warstwie przyściennej skala ta określona jest jako (D-2):

$$l = \pi z \quad (7.21)$$

W granicznej warstwie atmosfery przy równowadze obojętnej strumień pędu zanika z wysokością, a skala turbulencji powinna

przy $z \rightarrow \infty$ dążyć do wielkości stałej. Fakt ten uwzględniony został w formule Blackadara (3.3.1), zastosowanej do opisu turbulencji w GWA zamiast (7.21). Przyjmiemy teraz, że pierwszy wyraz prawej strony (7.20) równy jest odwrotności skali turbulencji w neutralnie stratyfikowanej warstwie granicznej, określanej formułą Blackadara. Skalę tę oznaczmy przez ℓ_B .

W celu obliczenia występującej w drugim wyrazie prawej strony pochodnej $\partial R_F / \partial z$ założymy obecnie, że można w tym celu stosować fundamentalne równanie modelu warstwy przyziemnej, przy wyprowadzaniu którego przyjmowano przybliżenie lokalnej stałości strumieni turbulencyjnych. Równanie to dla przypadku modelu I-B (3.6.12) zapiszemy w postaci:

$$\frac{\partial R_F}{\partial z} = \frac{2 (1 - m R_F) (1 - R_F)^{1/4}}{L_* (2 - m R_F)} \quad (7.22)$$

Po podstawieniu (7.22) w drugim wyrazie prawej strony (7.20), i wykorzystaniu (2.1-2.3), (2.8), (3.7.1), (3.7.9) i (3.1.8) otrzymujemy, przy założeniu $R_F \neq m^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell} &= \frac{1}{\ell_B} + \frac{m \beta u_* T_* B_1^{-1/3} q}{u_*^4 (2 - m R_F)} = \frac{1}{\ell_B} + \frac{m B_1^{-1/3} R_F}{S_M \ell (2 - m R_F)} = \\ &= \frac{1}{\ell_B} + \frac{m R_F}{\ell (2 - m R_F)} \end{aligned} \quad (7.23)$$

W warunkach równowagi chwiejnej ($R_F < 0$) drugi wyraz prawej strony (7.23) jest ujemny (a zatem $\ell > \ell_B$), w warunkach równowagi obojętnej wyraz ten zeruje się, zaś w warunkach równowagi stałej ($0 < R_F < m^{-1}$) przyjmuje wartości dodatnie, powodując zmniejszenie wielkości ℓ .

Równanie (7.23) rozwiążemy ze względu na ℓ :

$$\ell = \ell_B \frac{2 (1 - m R_F)}{2 - m R_F} \quad (7.24)$$

Jak widać, wyraziliśmy skalę turbulencji w granicznej warstwie atmosfery przy pomocy blackadarowskiej skali turbulencji ℓ_B , danej formułą (3.1.1), pomnożonej przez funkcję parametru równowagi $S_\ell(R_F)$:

$$S_\ell(R_F) = \frac{2 (1 - m R_F)}{2 - m R_F} \quad (7.25)$$

Przy $R_F \rightarrow m^{-1}$ funkcja $S_\ell(R_F)$ dąży do zera, powodując w konsekwencji silne ograniczanie wartości ℓ w warstwach inwersyjnych, przy $R_F = 0$ przyjmuje wartość 1, zaś przy $R_F \rightarrow -\infty$ dąży do stałej wartości 2.

Przy rozwiązywaniu układu równań (7.1) - (7.16) dogodnie jest przekształcić równania (7.4) - (7.8) do postaci związków pomiędzy współczynnikami transportu turbulencyjnego K_m i K_h , a skalą turbulencji ℓ i pionowymi gradientami prędkości wiatru i temperatury potencjalnej. Wykorzystamy przy tym otrzymaną w poprzednim rozdziale zależność (6.3.2) pomiędzy gradientową a dynamiczną liczbą Richardsona. Wykorzystując (3.7.1), (3.7.9), (3.7.4), (3.3.3), oraz (2.4), otrzymamy:

$$K_m = \ell^2 (1 - R_F)^{1/2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.26)$$

$$K_h = \frac{A_2}{A_1} \left[1 - \frac{3B_2}{B_1} \frac{R_F}{1 - R_F} \right] K_m \quad (7.27)$$

Dla określenia stałej ℓ_∞ , występującej w formule (3.1.1), wykorzystamy propozycję Mellora i Yamady (1982):

$$\ell_\infty = \alpha \frac{\int_0^\infty q \, z \, dz}{\int_0^\infty q \, dz} \quad (7.28)$$

w której $\alpha = 0.1$ - stała proporcjonalności.

Występującą w (7.28) wielkość q otrzymamy łatwo z zależności (3.4.1), (2.4) i (7.26):

$$q = B_1^{1/3} \ell (1 - R_F)^{1/2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.29)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób zamknięty układ równań (7.1)-(7.3), z warunkami brzegowymi i początkowymi określonymi przez (7.9)-(7.16), oraz współczynnikami turbulencji określonymi przez (7.26)-(7.29) i (6.3.2). Układ ten może być rozwiązywany przy pomocy metod numerycznych.

W niniejszej pracy przeprowadzono wstępne testowanie opisanego wyżej modelu warstwy granicznej. Do całkowania równań modelu użyto metody różnic skończonych z niejawnym schematem aproksymacji Laasonena. W celu zagęszczenia siatki numerycznej w rejonie największej zmienności pionowej elementów meteorologicznych wprowadzono logarytmiczno-liniową transformację współrzędnej pionowej (patrz np. Bodin, 1979; Uliasz, Łobocki, 1984). Jako warunku początkowego użyto:

□ profilu wiatru stanowiącego rozwiązanie modelu Ekmana przy:

$$U_g = 10 \text{ m/s}, \quad V_g = 0, \quad f = 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

gdzie U_g, V_g - składowe wiatru geostroficznego,

f - parametr Coriolisa

□ profilu temperatury potencjalnej, złożonego z warstwy wymieszanej o stałej temperaturze potencjalnej $\theta = 288 \text{ K}$ i wysokości 500 m, oraz stabilnej warstwy o gradiencie temperatury potencjalnej $\gamma = 0.01 \text{ K/m}$ powyżej.

Przyjęto stały w czasie wiatr geostroficzny o prędkości 10 m/s.
Temperaturę podłoża zadano jako funkcję czasu postaci (rys. 7.1):

$$T_s = \overline{T_s} - A \left[\sin(x) + 0.25 \cos(2x) + 0.05 \sin(2x) \right] \quad (7.30)$$

gdzie:

T_s - temperatura powierzchni podłoża,

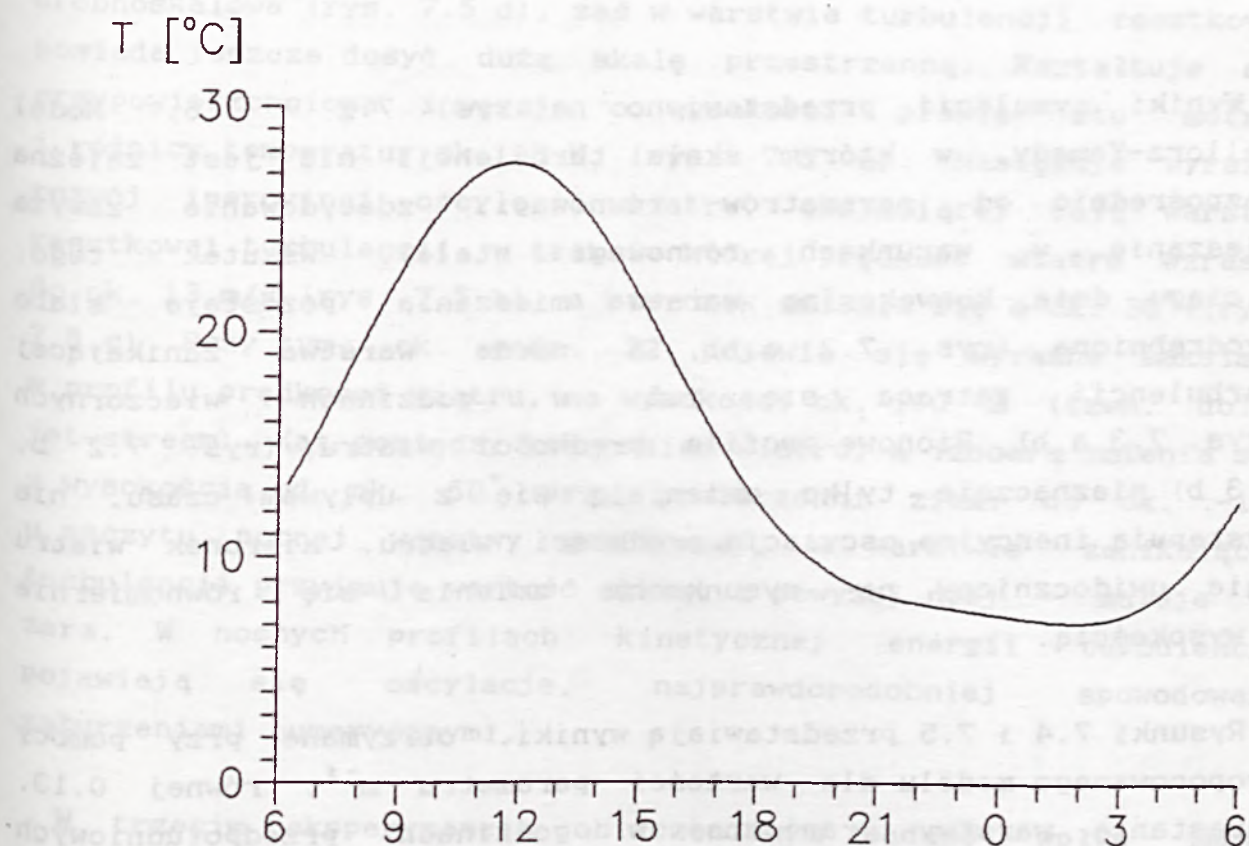
$\overline{T_s}$ - średnia dobową temperaturę podłoża (przyjęto 288.15 K)

A - amplituda wahań temperatury podłoża (przyjęto 10 K)

$x = (\Omega t + \pi/2)$,

gdzie t - lokalny czas astronomiczny,

$\Omega \cong 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ - częstotliwość cyklu dobowego



Rys. 7.1. Przebieg dobowy temperatury powierzchni podłoża,
zadawany przy testowaniu modeli warstwy granicznej

Testowaniu poddano:

- Model Mellora-Yamady "poziomu 1", tj. opisany układem równań (7.1)–(7.16) model, w którym skala turbulencji ℓ obliczana jest formułą Blackadara (3.3.1), w której ℓ_∞ określone jest przez (7.28).
- Model "poziomu 1" ze skalą turbulencji obliczaną wg wzoru (7.24), dla wartości parametru $m^{-1} = R_{Fc}$, równych 0.13, oraz 0.28.

We wszystkich obliczeniach przyjmowano wartości stałych modelu: $A_1 = A_2 = 0.31$, $B_1 = 34.5$, $B_2 = 13.0$.

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 7.2 – 7.6. Model Mellora-Yamady, w którym skala turbulencji nie jest zależna bezpośrednio od parametrów równowagi, zdecydowanie zawyża mieszanie w warunkach równowagi stałej. Wskutek tego, w ciągu dnia konwekcyjna warstwa mieszania pozostaje słabo wyodrębniona (rys. 7.2 a,b), a nocna warstwa zanikającej turbulencji zetraca się już w godzinach wieczornych (rys. 7.3 a,b). Pionowe profile prędkości wiatru (rys. 7.2 b, 7.3 b) nieznacznie tylko zmieniają się z upływem czasu, nie występują inercyjne oscylacje prędkości wiatru. Kierunek wiatru (nie uwidoczniiony na rysunkach) zmienia się równomiernie z wysokością.

Rysunki 7.4 i 7.5 przedstawiają wyniki, otrzymane przy pomocy proponowanego modelu dla wartości parametru m^{-1} , równej 0.13. Narastanie warstwy granicznej w godzinach przedpołudniowych ilustrują rysunki 7.4 a-e. We wszystkich profilach widoczny jest wzrost wysokości warstwy wymieszanej z 500 m do ok. 1300 m w ciągu 6 godzin. W tym czasie warstwa mieszania nagrzewa się do temperatury potencjalnej ok. 295 K, tj. o ok. 7 K (rys. 7.4 a), a kinetyczna energia turbulencji osiąga wartości ok. $3.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ (rys. 7.4. e). W warstwie mieszania obserwuje się równowagę lekko

chwiejną i systematyczny wzrost prędkości wiatru z wysokością, od ok. 5 m/s w warstwie przyziemnej do ok. 10 m/s u szczytu warstwy mieszania (rys. 7.4 b). W konwekcyjnej warstwie mieszania kierunek wiatru (rys. 7.4 c), słabo zmienia się z wysokością i leży ok. 20° na lewo od kierunku wiatru geostroficznego. Skala turbulencji wzrasta z wysokością do wartości rzędu 100 m u szczytu warstwy mieszania, po czym zanika (rys. 7.4 d).

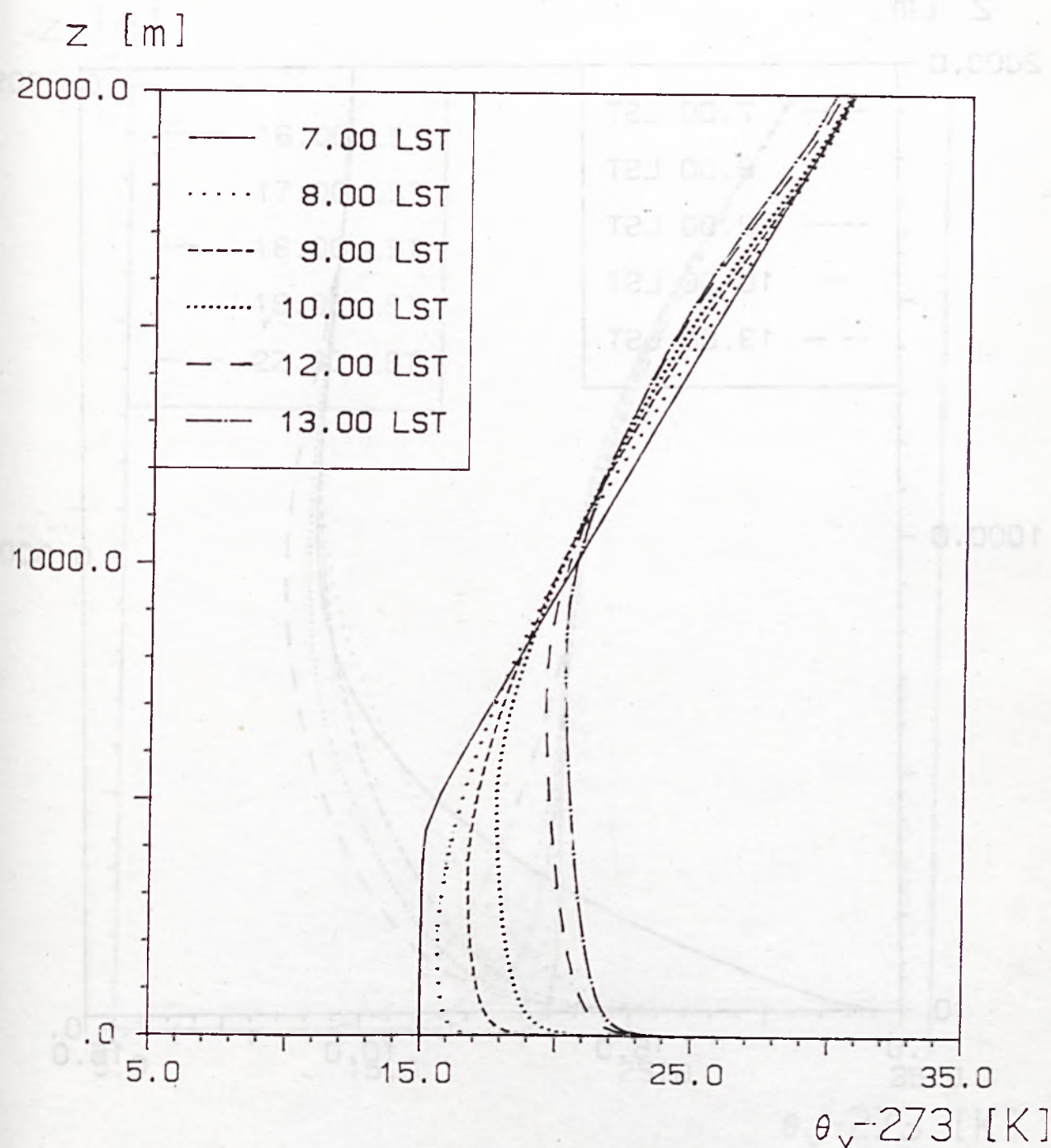
Ewolucja warstwy granicznej w godzinach nocnych przedstawiona jest na rys. 7.5 a-d. W trakcie zanikania kinetycznej energii turbulencji (rys. 7.4 e) w godzinach wieczornych wyodrębnia się warstwa przyziemna, o wysokości kilkudziesięciu metrów, oraz warstwa resztkowej (zanikającej) turbulencji w obszarze wysokości 200 - 1000 m. Turbulencja w warstwie przyziemnej jest drobnoskalowa (rys. 7.5 d), zaś w warstwie turbulencji resztkowej posiada jeszcze dosyć dużą skalę przestrzenną. Kształtuje się przypowierzchniowa inwersja o wysokości prawie stu metrów i różnicy temperatur ok. 13 K (rys. 7.5 a). Następuje wyraźny rozwój inercyjnej oscylacji wiatru, obejmującej całą warstwę resztkowej turbulencji, w trakcie której prędkość wiatru wzrasta do ok. 13 m/s (rys. 7.5 b), a kierunek zmienia się o ok. 30° (rys. 7.5 c). Przy tym, ok. godz. 22 pojawia się wyraźne maksimum w profilu prędkości wiatru, na wysokości ok. 100 m (tzw. dolny jet-stream). Kąt pomiędzy kierunkiem wiatru, a izobarą zmienia się z wysokością od ok. 50° przy powierzchni ziemi do ok. -10° u szczytu nocnej warstwy granicznej, w warstwie zanikającej turbulencji przyjmuje wartość stałą, a powyżej niej - maleje do zera. W nocnych profilach kinetycznej energii turbulencji pojawiają się oscylacje, najprawdopodobniej spowodowane zaburzeniami numerycznymi.

W trzecim eksperymencie obliczeniowym badano wpływ zmian wartości parametru $R_{fc} = m^{-1}$ na wyniki modelowania. Przyjęto wartość $m^{-1} = 0.28$. Otrzymane rezultaty w okresie dziennym różnią się w niewielkim stopniu od omówionych powyżej. Natomiast w okresie nocnym uzyskuje się zanik oscylacji energii turbulencji, zwiększenie wysokości inwersji przypowierzchniowej i jednocześnie wysokości występowania dolnego jet-streamu do ok. 200 m

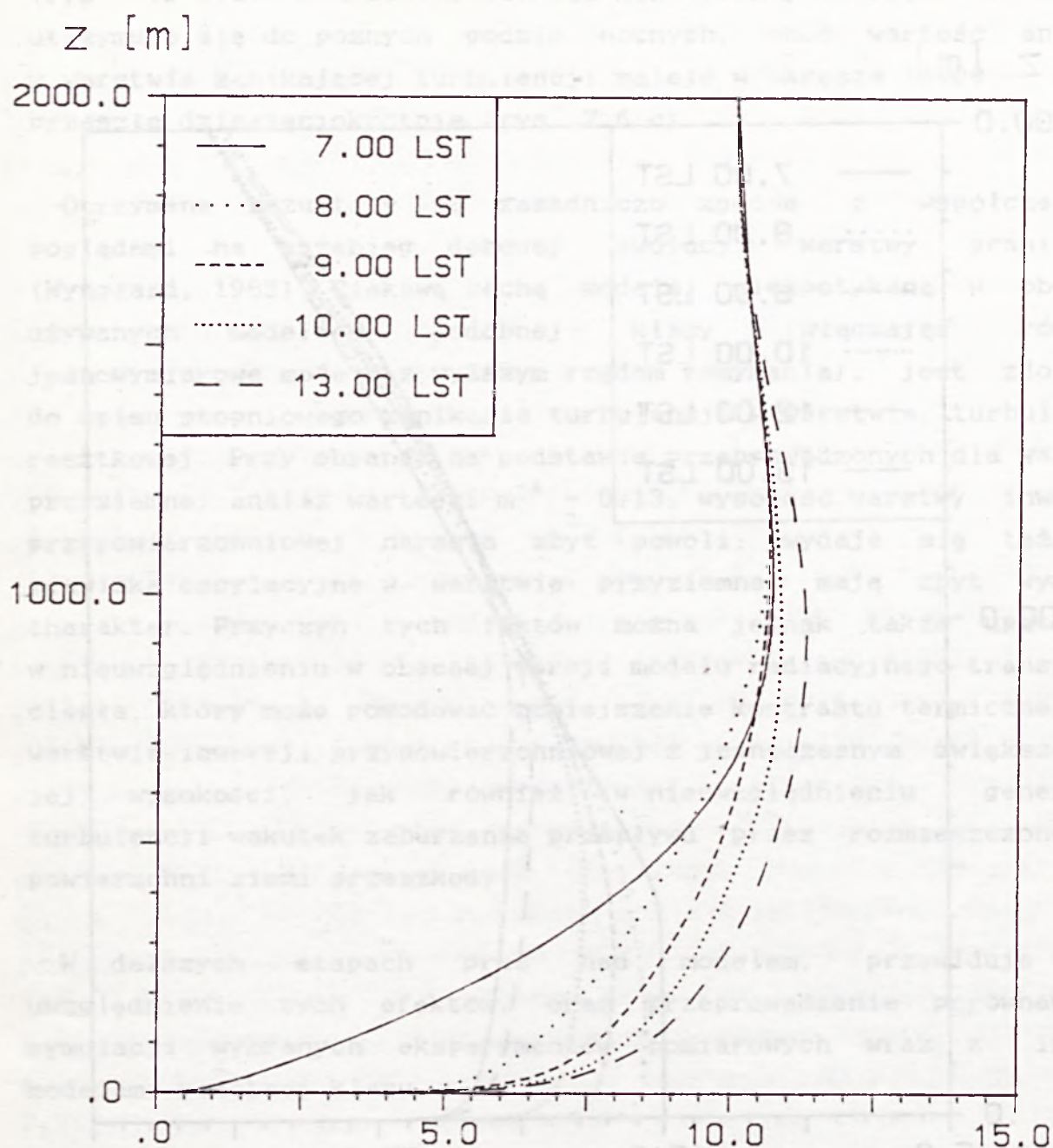
(rys. 7.6 a,b). Dwumodalny rozkład kinetycznej energii turbulencji utrzymuje się do późnych godzin nocnych, choć wartość energii w warstwie zanikającej turbulencji maleje w okresie 15.00 - 21.00 przeszło dziesięciokrotnie (rys. 7.6 c).

Otrzymane rezultaty są zasadniczo zgodne z współczesnymi poglądami na przebieg dobowej ewolucji warstwy granicznej (Wyngaard, 1985). Ciekawą cechą modelu, niespotykaną w obecnie używanych modelach podobnej klasy (włączając również jednowymiarowe modele z wyższym rzędem zamykania), jest zdolność do opisu stopniowego zanikania turbulencji w warstwie turbulencji resztkowej. Przy obranej na podstawie przeprowadzonych dla warstwy przyziemnej analiz wartości $m^{-1} = 0.13$, wysokość warstwy inwersji przypowierzchniowej narasta zbyt powoli; wydaje się też, że zjawiska oscylacyjne w warstwie przyziemnej mają zbyt wyraźny charakter. Przyczyn tych faktów można jednak także upatrywać w nieuwzględnieniu w obecnej wersji modelu radiacyjnego transportu ciepła, który może powodować zmniejszenie kontrastu termicznego w warstwie inwersji przypowierzchniowej z jednoczesnym zwiększeniem jej wysokości, jak również w nieuwzględnieniu generacji turbulencji wskutek zaburzania przepływu przez rozmieszczone na powierzchni ziemi przeszkody.

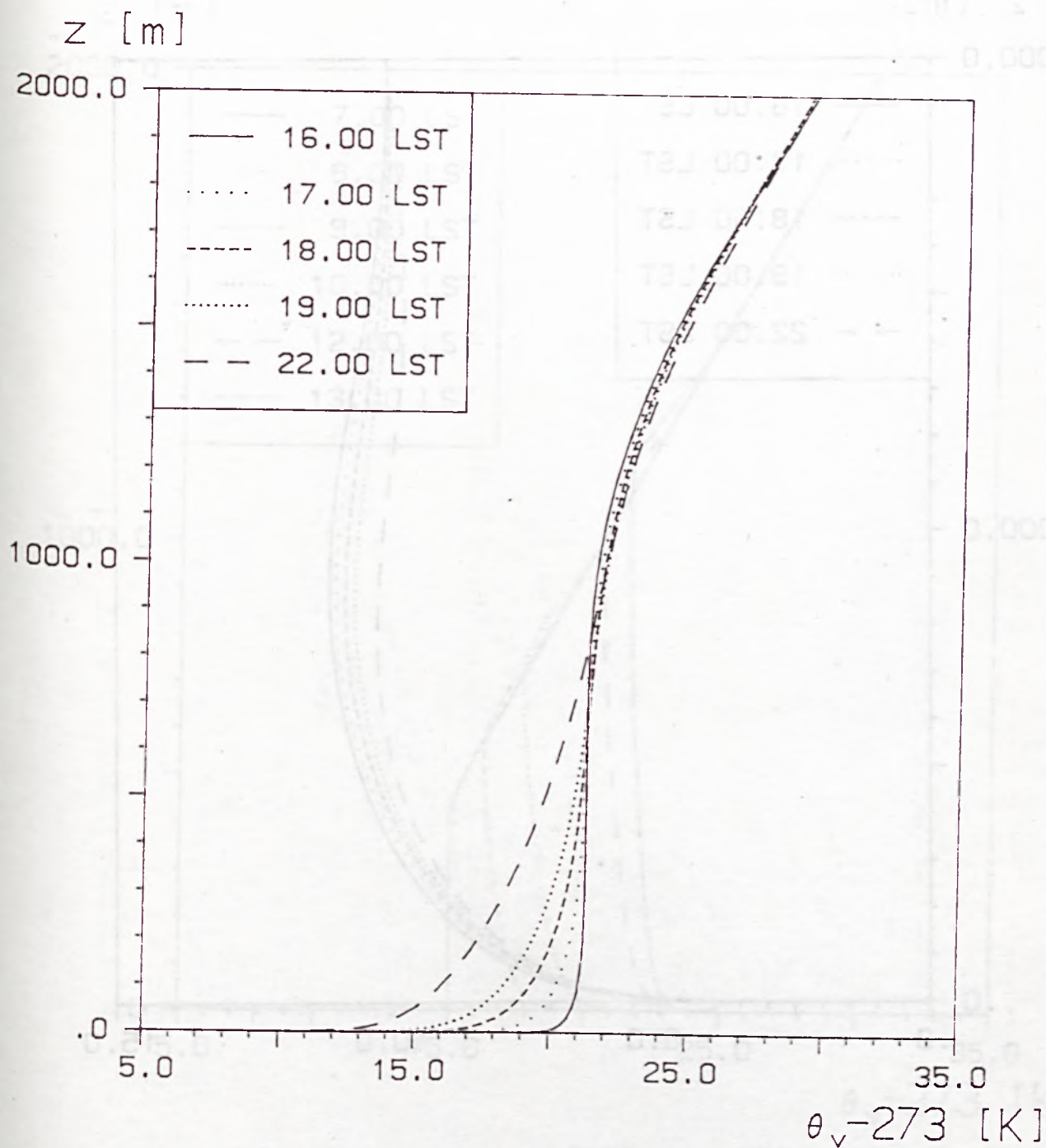
W dalszych etapach prac nad modelem, przewiduje się uwzględnienie tych efektów, oraz przeprowadzenie porównawczej symulacji wybranych eksperymentów pomiarowych wraz z innymi modelami podobnej klasy.



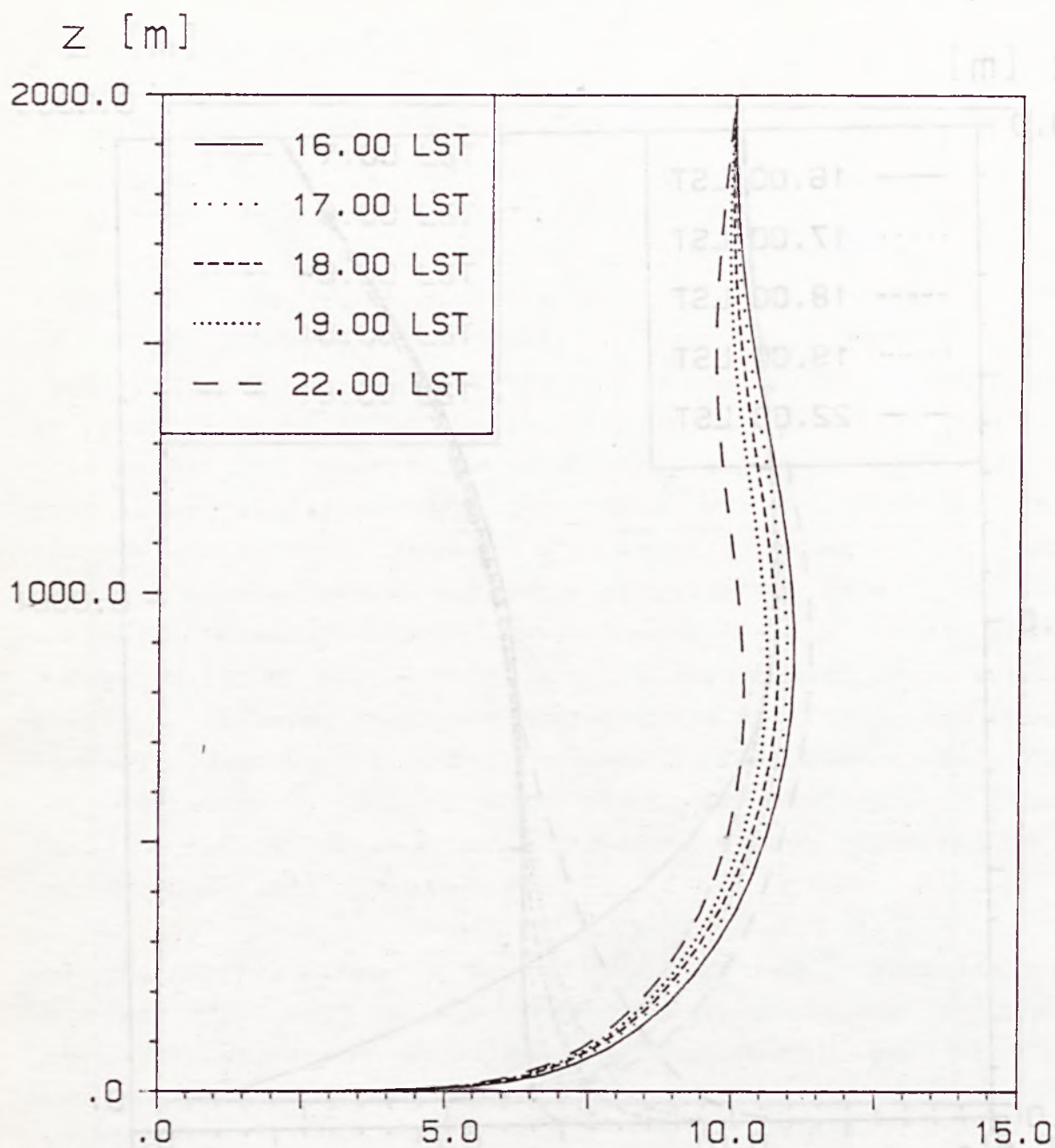
Rys. 7.2 a. Profile temperatury potencjalnej, obliczone przy
użyciu modelu "poziomu 1" Mellora-Yamady, w okresie
narastania konwekcyjnej warstwy mieszania



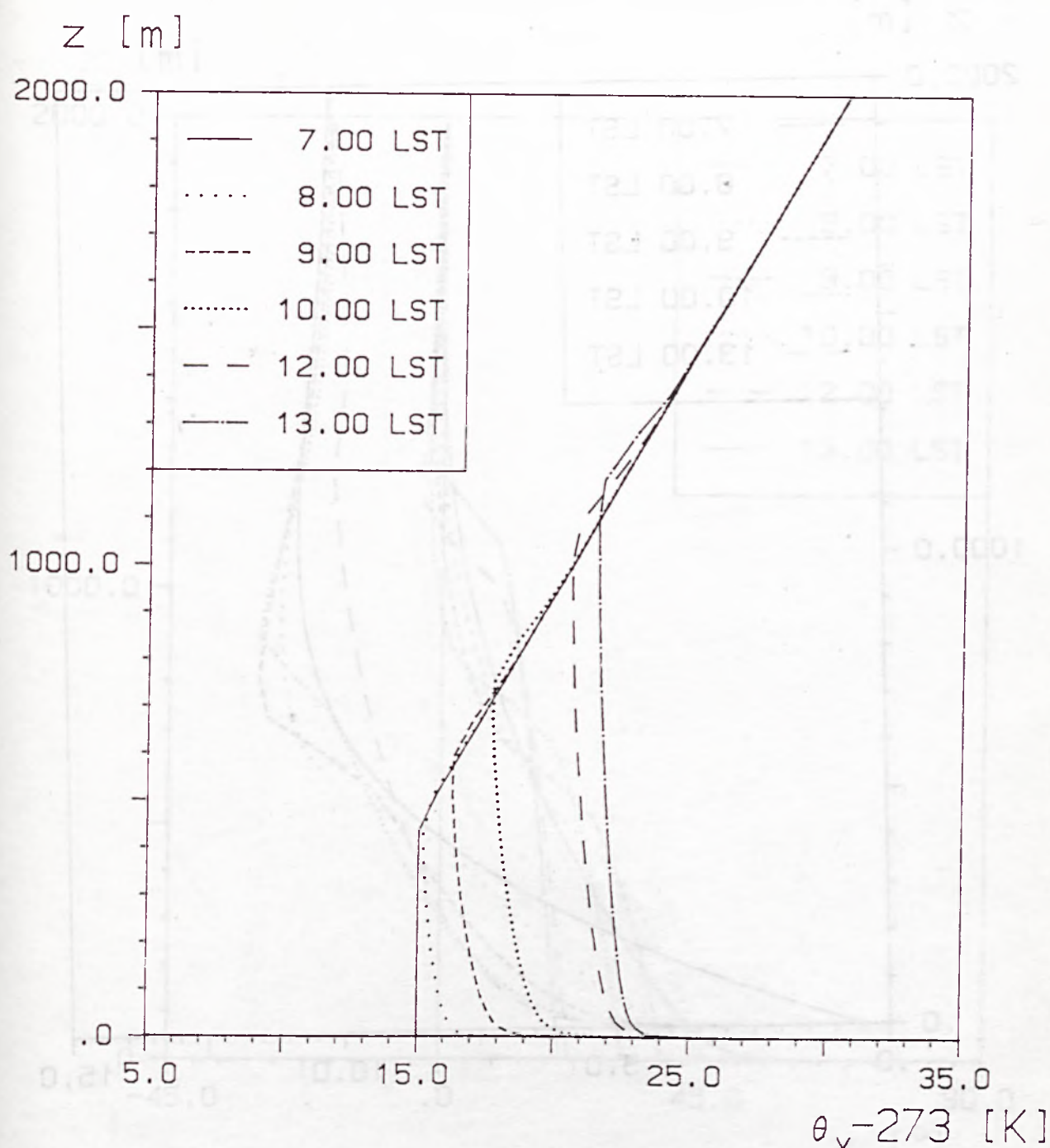
Rys. 7.2 b. Profile prędkości wiatru, obliczone przy użyciu modelu "poziomu 1" Mellora-Yamady, w okresie narastania konwekcyjnej warstwy mieszania



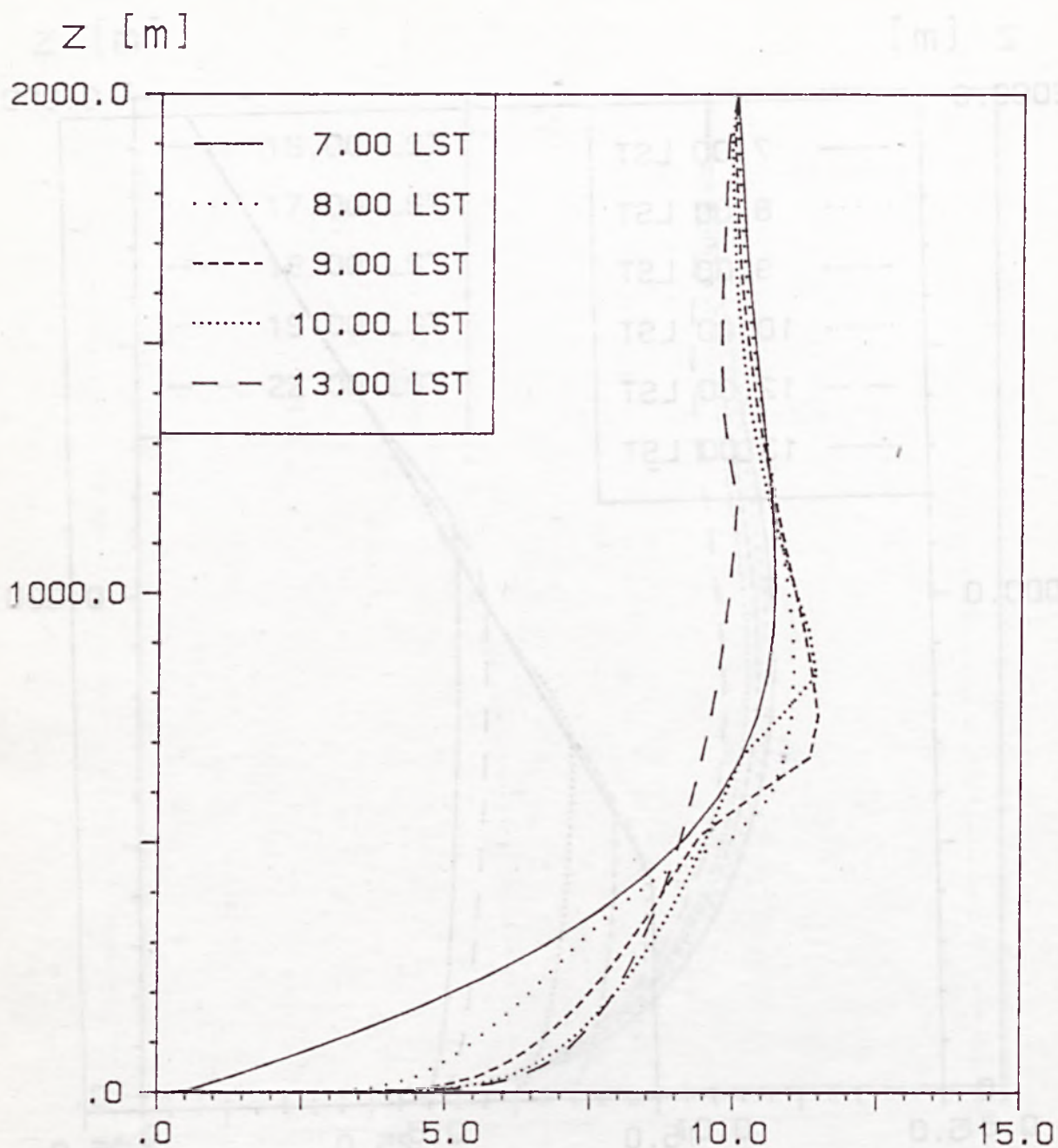
Rys. 7.3 a. Profile temperatury potencjalnej, obliczone przy
 użyciu modelu "poziomu 1" Mellora-Yamady, w okresie
 zaniku konwekcyjnej warstwy mieszania



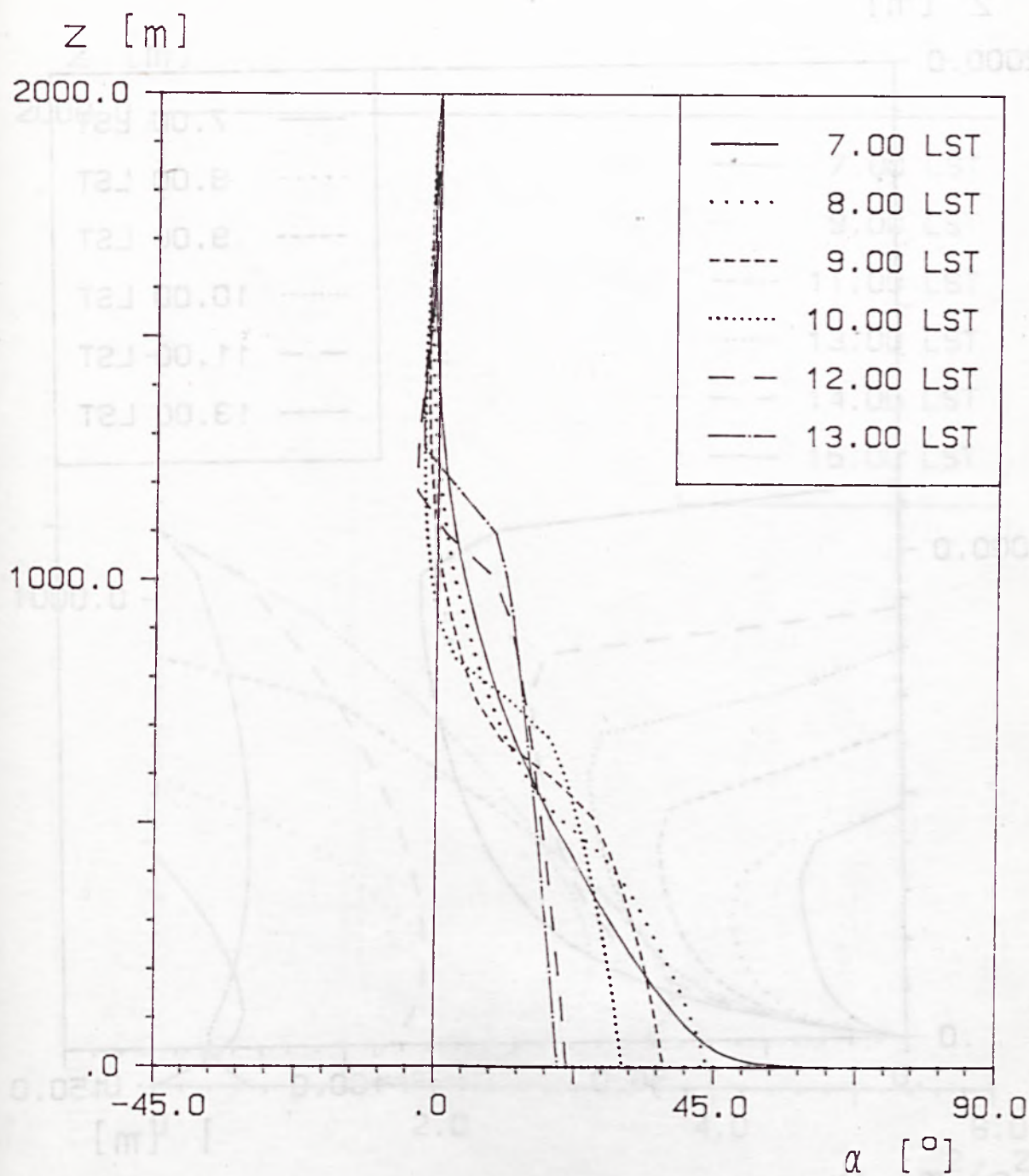
Rys. 7.3 b. Profile prędkości wiatru, obliczone przy użyciu modelu "poziomu 1" Mellora-Yamady, w okresie zaniku konwekcyjnej warstwy mieszania



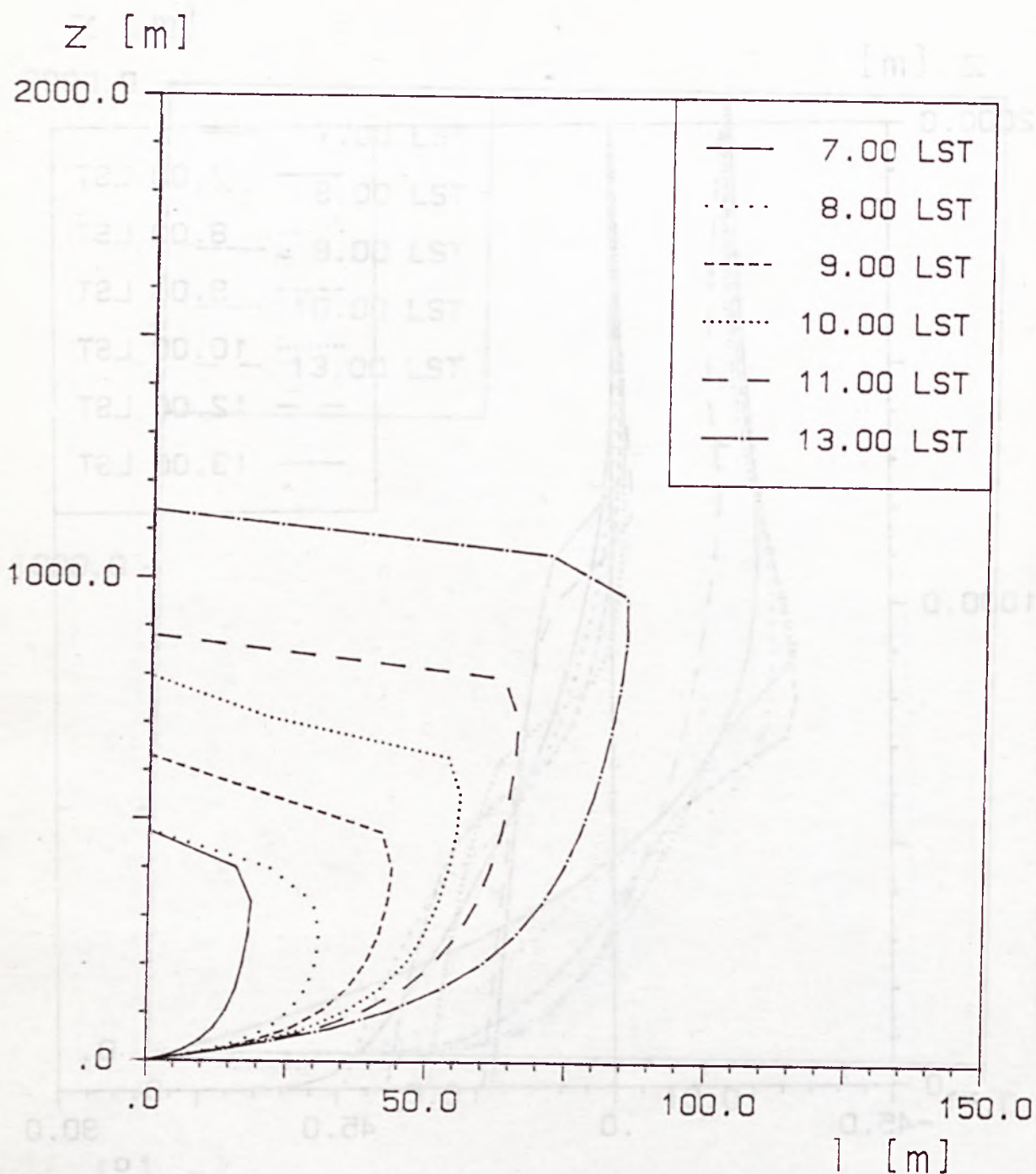
Rys. 7.4 a. Profile temperatury potencjalnej, obliczone przy
użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali
turbulencji od lokalnych parametrów równowagi,
w okresie narastania konwekcyjnej warstwy
mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



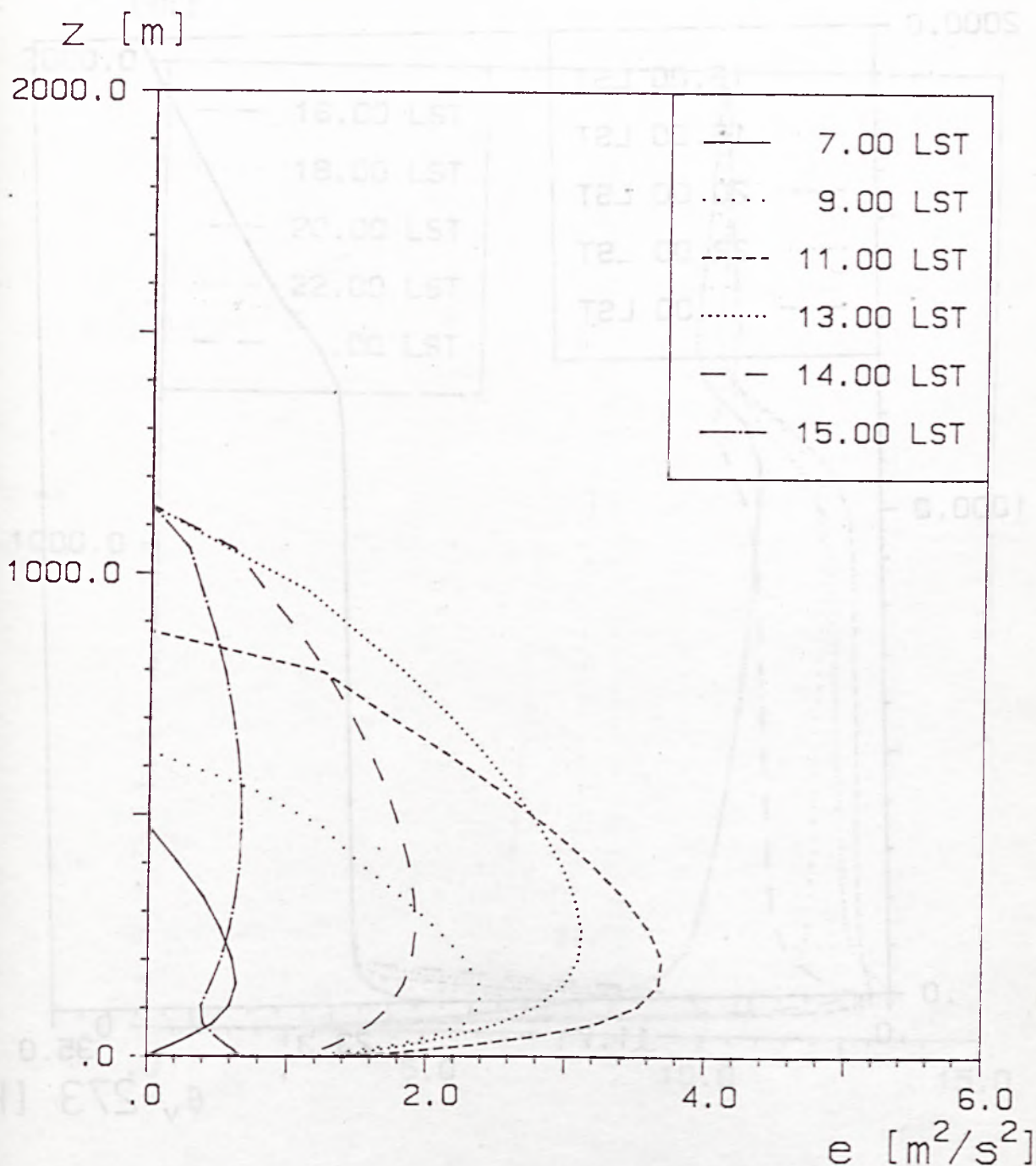
Rys. 7.4 b. Profile prędkości wiatru, obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi, w okresie narastania konwekcyjnej warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



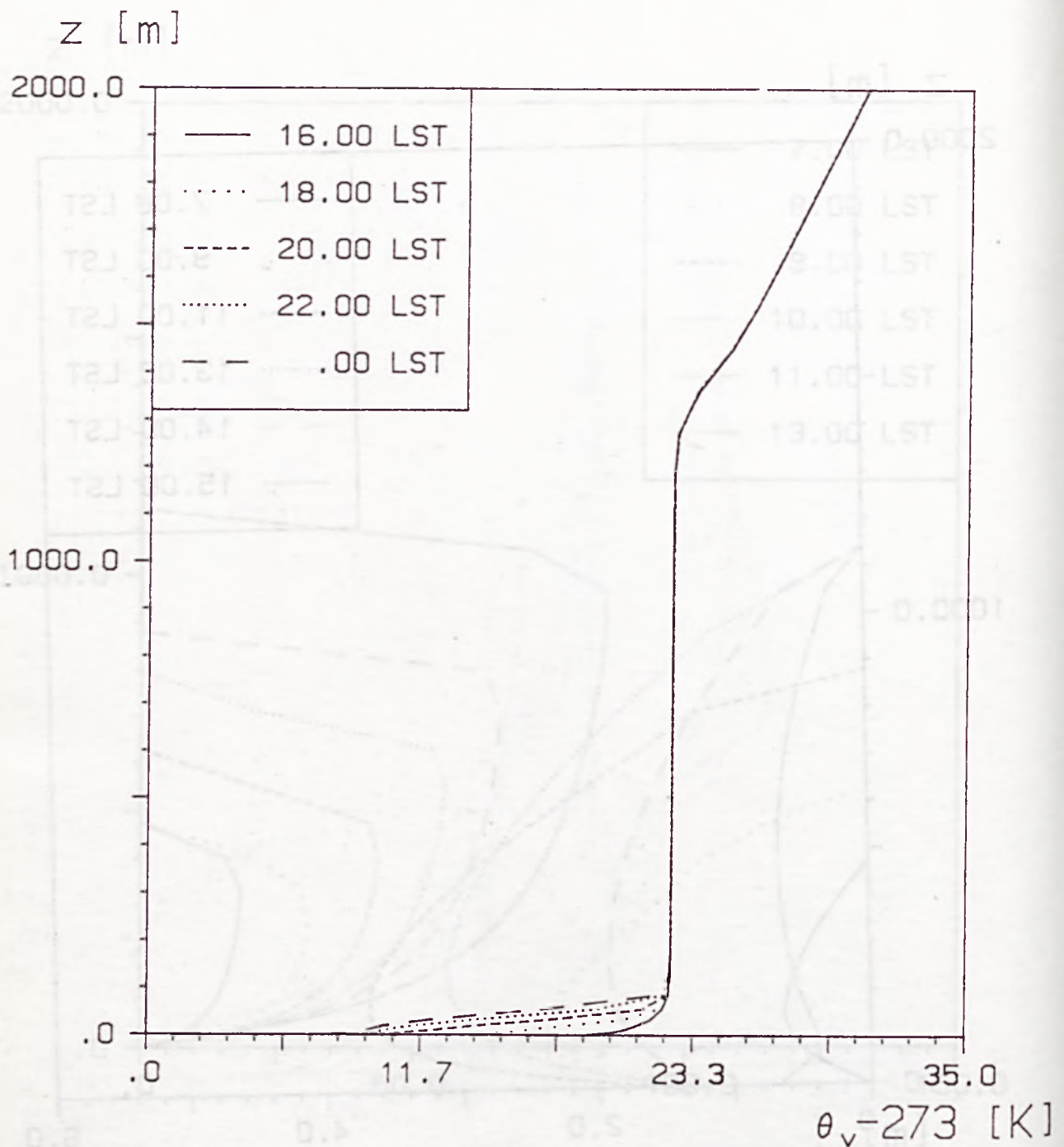
Rys. 7.4 c. Profile kierunku wiatru (odchylenia od kierunku wiatru geostroficznego), obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi, w okresie narastania konwekcyjnej warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



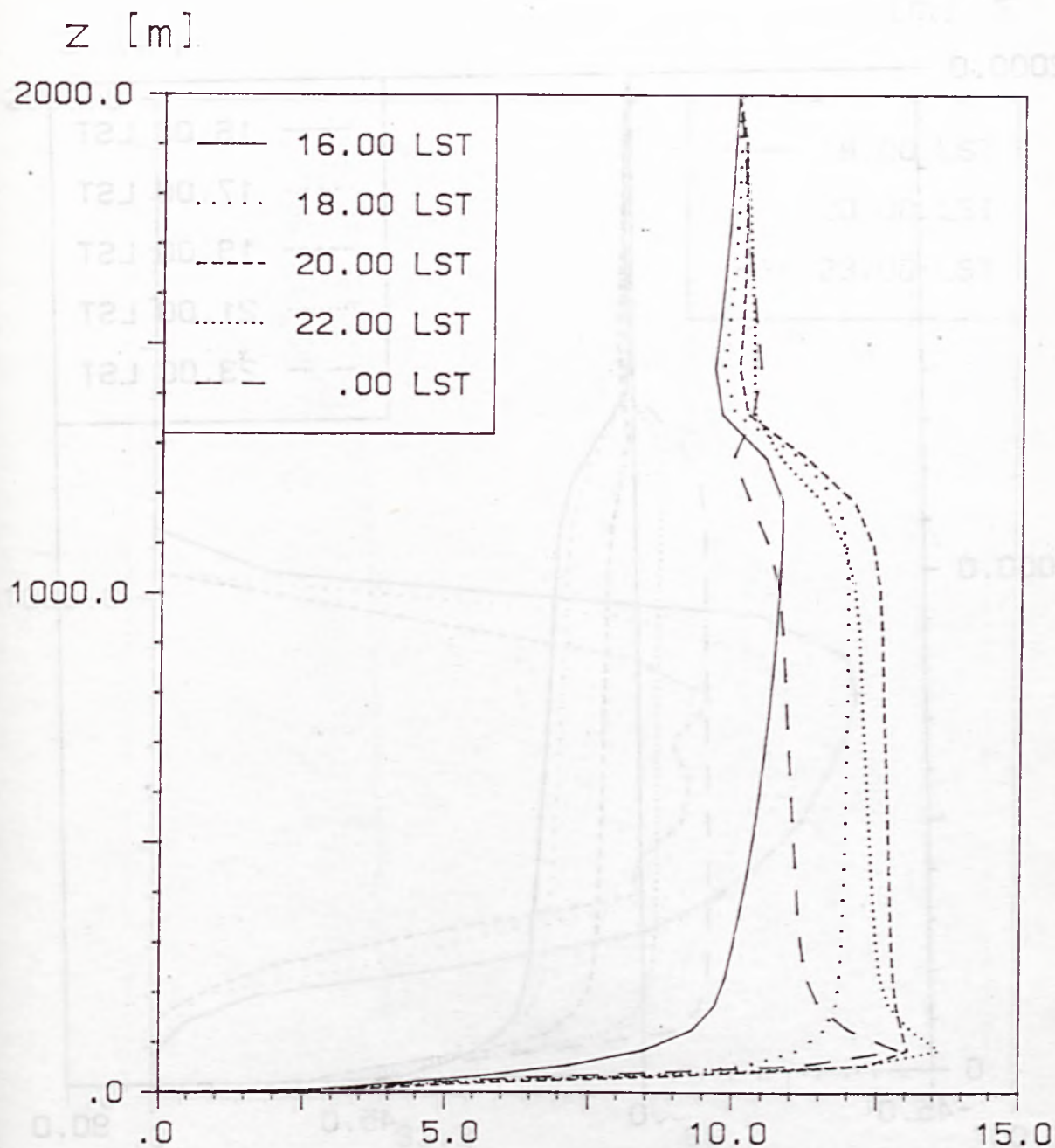
Rys. 7.4 d. Skala turbulencji l , obliczona przy użyciu modelu, uwzględniającego jej zależność od lokalnych parametrów równowagi. $m^{-1} = 0.13$.



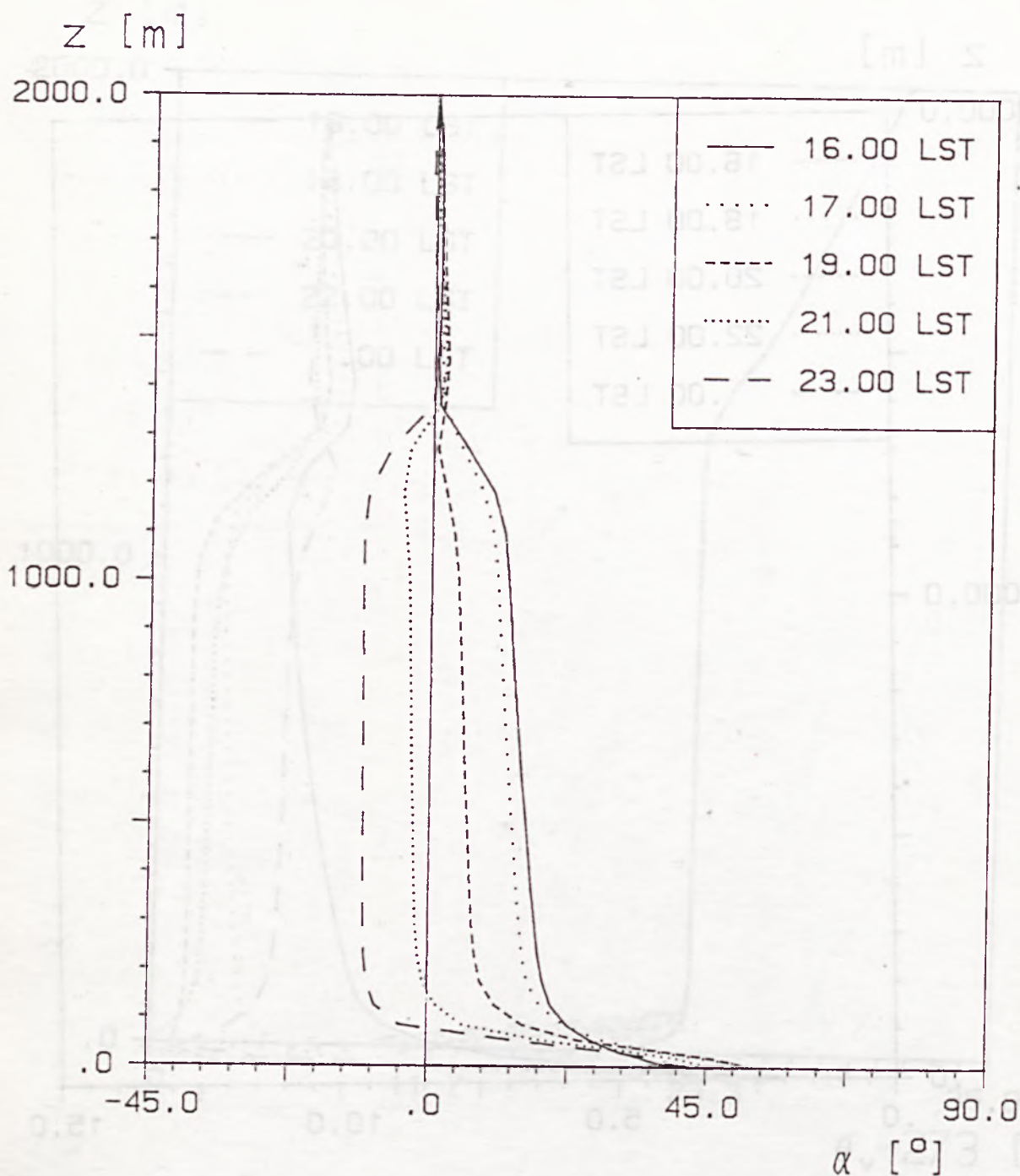
Rys. 7.4 e. Profile energii kinetycznej ruchu turbulencyjnego, obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi. $m^{-1} = 0.13$.



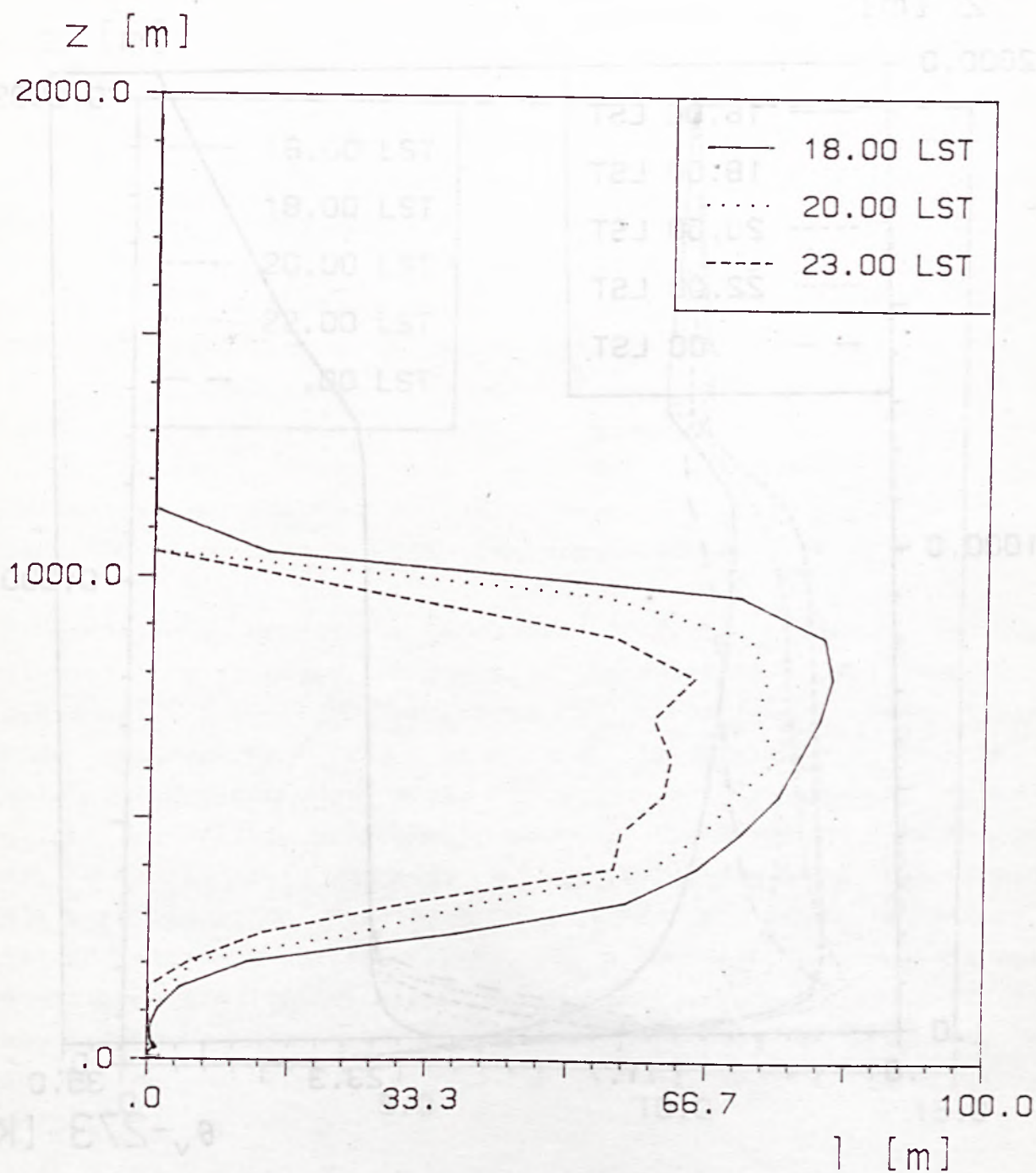
Rys. 7.5 a. Profile temperatury potencjalnej, obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność siły turbulencji od lokalnych parametrów równowagi w okresie zaniku konwekcyjnej warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



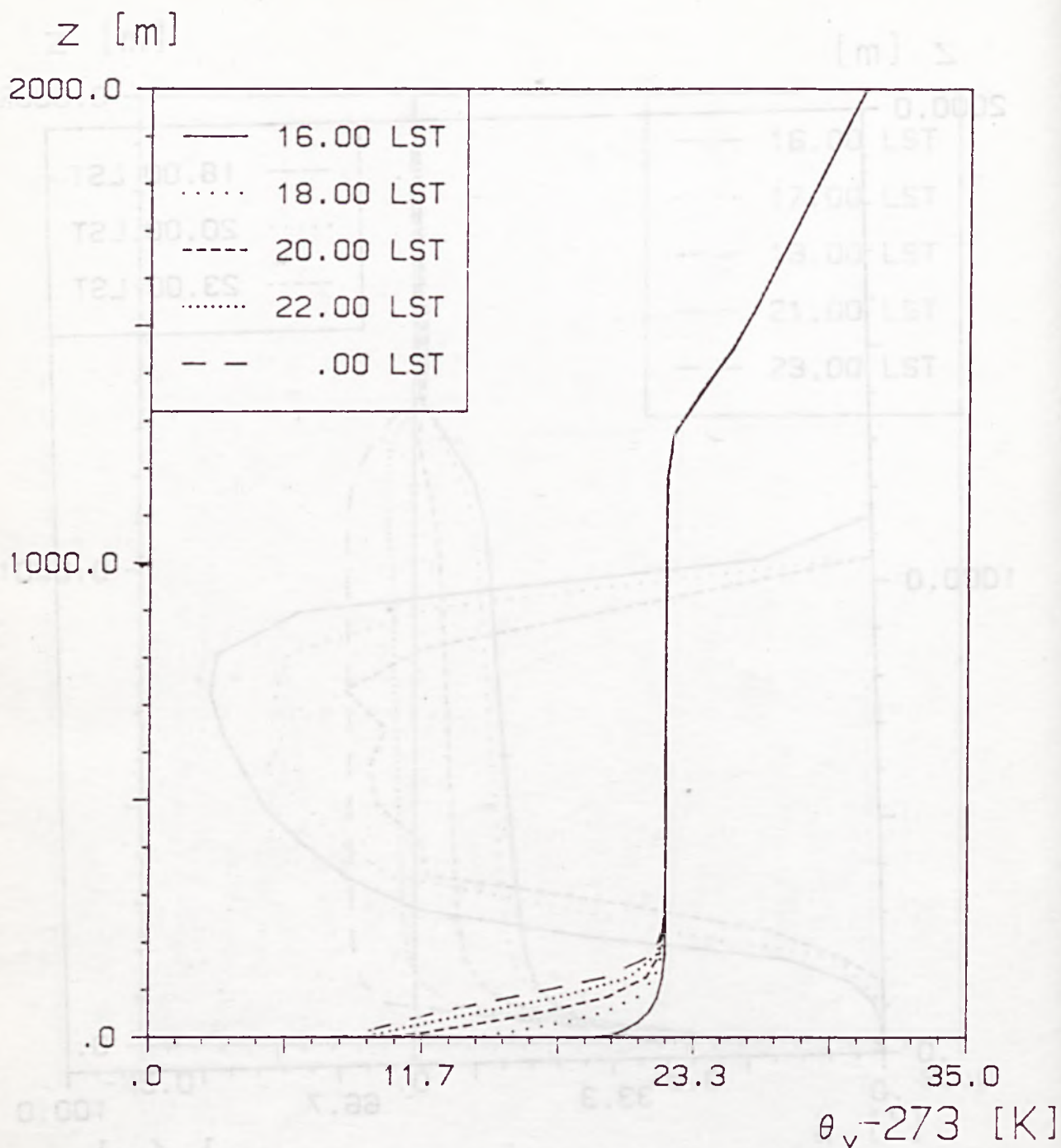
Rys. 7.5 b. Profile prędkości wiatru, obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi, w okresie zaniku konwekcyjnej warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



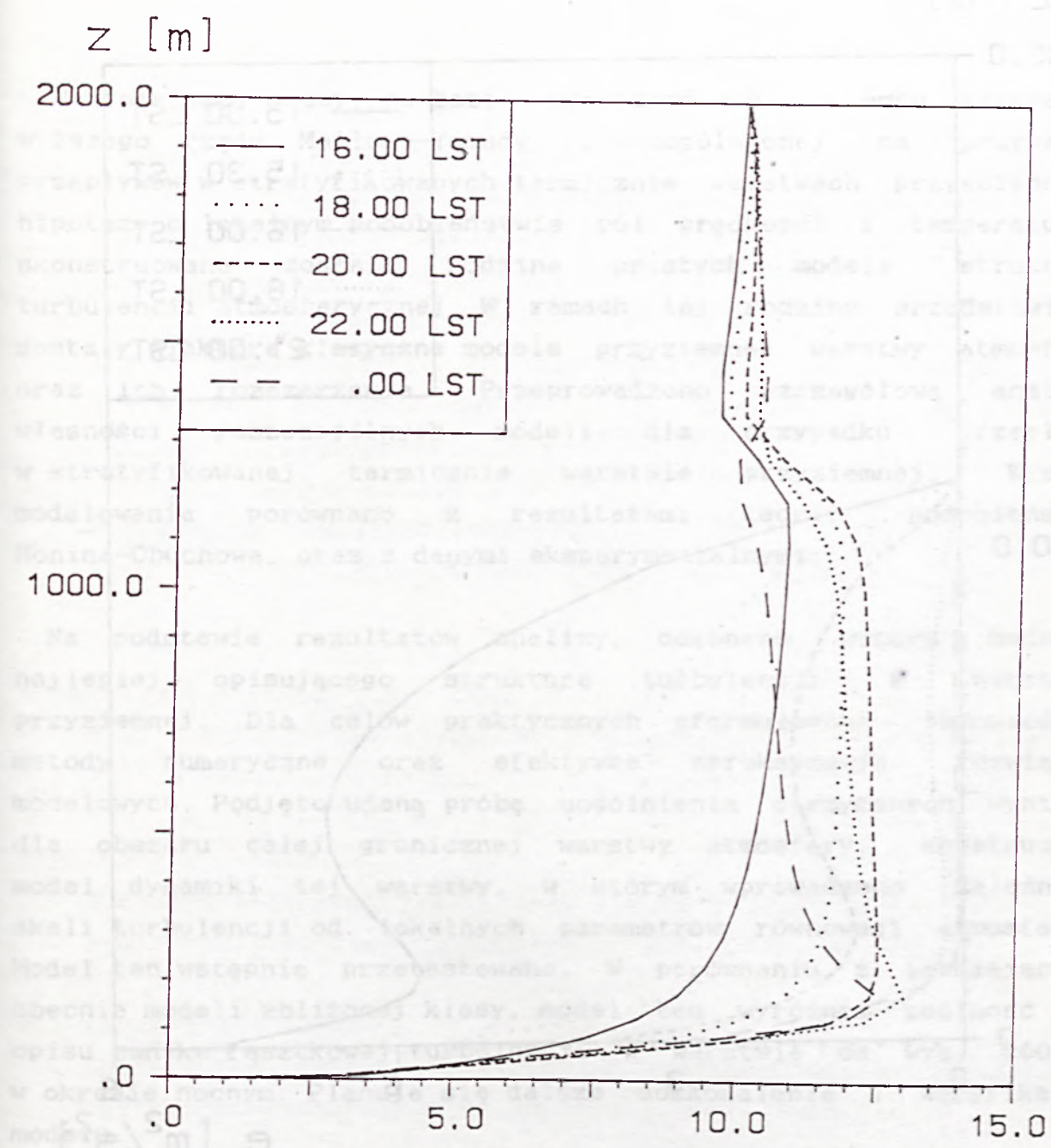
Rys. 7.5 c. Profile kierunku wiatru (odchylenia od kierunku wiatru geostroficznego), obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi, w okresie zaniku konwekcyjnej warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.13$.



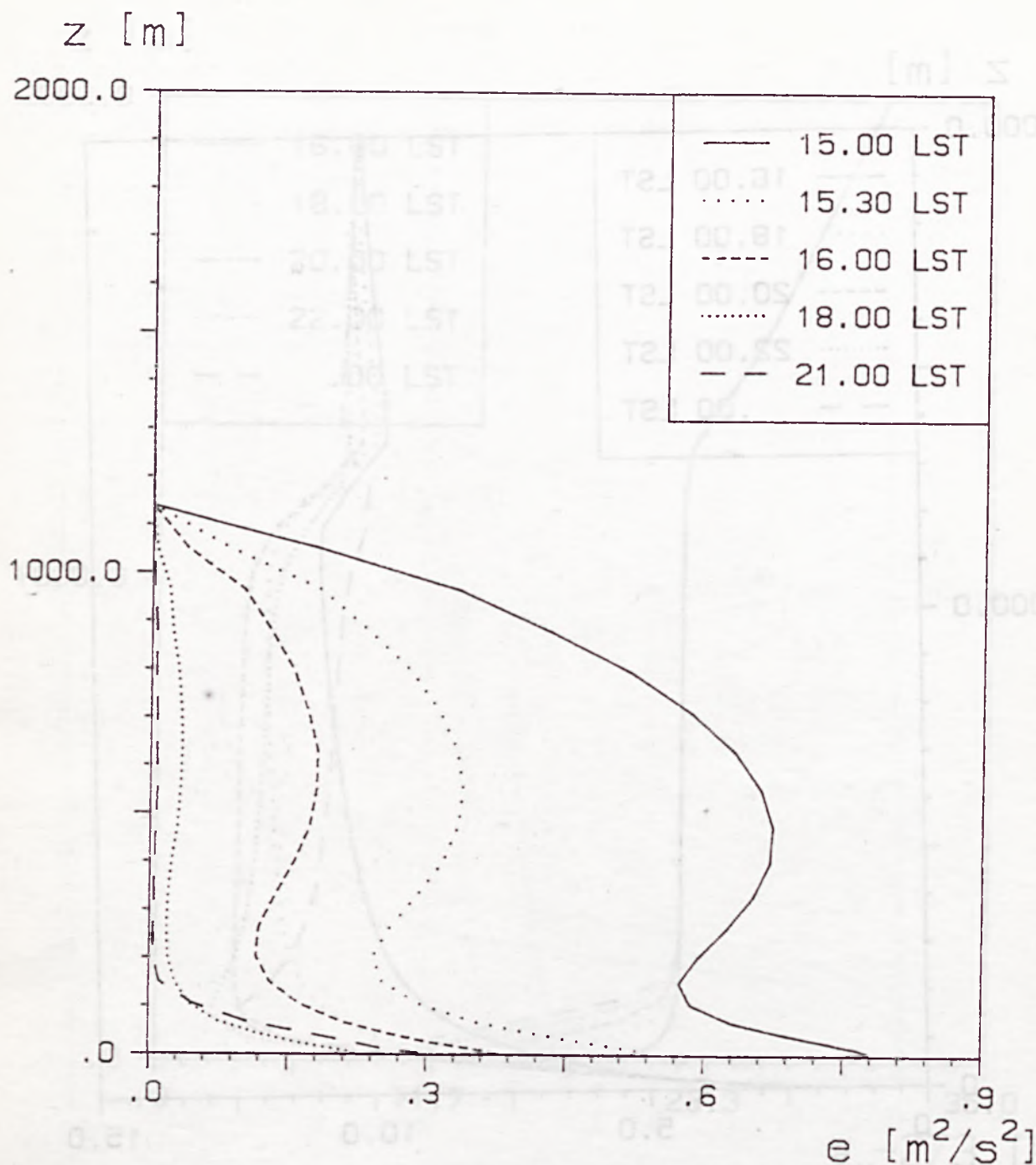
Rys. 7.5 d. Skala turbulencji l , obliczona przy użyciu modelu, uwzględniającego jej zależność od lokalnych parametrów równowagi, w warunkach nocnych. $m^{-1} = 0.13$.



Rys. 7.6 a. Jak rys. 7.5 a, lecz dla $m^{-1} = 0.28$.



Rys. 7.6 b. Jak rys. 7.5 b, lecz dla $m^{-1} = 0.28$.



Rys. 7.6 c. Profile energii kinetycznej ruchu turbulentyjnego, obliczone przy użyciu modelu, uwzględniającego zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi - w okresie zaniku warstwy mieszania. $m^{-1} = 0.28$.

8. Podsumowanie i uwagi końcowe

W niniejszej pracy, na bazie uproszczonych systemów zamykania wyższego rzędu Mellora-Yamady i uogólnionej na przypadek przepływów w stratyfikowanych termicznie warstwach przyściennych hipotezy o lokalnym podobieństwie pól prędkości i temperatury, skonstruowana została rodzina prostych modeli struktury turbulencji atmosferycznej. W ramach tej rodziny przedstawione zostały niektóre klasyczne modele przyziemnej warstwy atmosfery oraz ich rozszerzenia. Przeprowadzono szczegółową analizę własności poszczególnych modeli dla przypadku przepływu w stratyfikowanej termicznie warstwie przyziemnej. Wyniki modelowania porównano z rezultatami teorii podobieństwa Monina-Obuchowa, oraz z danymi eksperymentalnymi.

Na podstawie rezultatów analizy, dokonano wyboru modelu, najlepiej opisującego strukturę turbulencji w warstwie przyziemnej. Dla celów praktycznych sformułowano odpowiednie metody numeryczne oraz efektywne aproksymacje rozwiązań modelowych. Podjęto udaną próbę uogólnienia otrzymanych wyników dla obszaru całej granicznej warstwy atmosfery, konstruując model dynamiki tej warstwy, w którym wprowadzono zależność skali turbulencji od lokalnych parametrów równowagi atmosfery. Model ten wstępnie przetestowano. W porównaniu z istniejącymi obecnie modelami zbliżonej klasy, model ten wyróżnia zdolność do opisu zaniku resztkowej turbulencji w warstwie od wys. 200 m w okresie nocnym. Planuje się dalsze doskonalenie i weryfikację modelu.

Omawiane modele cechują się ograniczonym zapotrzebowaniem mocy obliczeniowej i mogą być stosowane w trybie operacyjnym do diagnozowania i prognozowania warunków dyspersji zanieczyszczeń w dolnych warstwach atmosfery, oraz innych zagadnieniach inżynierii środowiska.

9. Zakończenie

Wiele osób przyczyniło się do powstania niniejszej pracy w obecnym kształcie. Autor pragnie szczególnie gorąco podziękować doc. dr hab. J. Borkowskiemu z Instytutu Geofizyki Polskiej Akademii Nauk za wnikliwą krytykę pracy, jak również prof. F.T.M. Nieuwstadtowi z Instytutu Aerodynamiki Politechniki w Delft za udostępnienie obszernego materiału pomiarowego zebranego przez obserwatorium mikrometeorologiczne w Cabauw (Holandia).

Wyniki pracy zastosowane zostały w opracowywanym przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej modelu lokalnej prognozy pogody. Model ten wdrożony zostanie w system prognoz Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej.

10. Bibliografija

- Alojan A.E., Lazrijev G.L., 1980:
O parametrizaciji energii turbulentnosti v prizemnom sloje atmosfery. W: Matematičeskiye modeli atmosferynykh dwiženij, Nowosybirsk.
- Arya S.P.S., 1972:
The critical condition for the maintenance to turbulence in the stratified flows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 98: 264-273
- Bergström H., Alexandersson H., 1981:
Atmospheric boundary layer field experiment in Sweden 1980. Part II: wind and turbulence data. Uppsala University Rep. No. 65.
- Berkowicz R., Prahm L.P., 1982:
Sensible heat flux estimated from routine meteorological data by the resistance method. *J. Appl. Meteor.*, 21: 1845-1864.
- Binkowski F., 1979:
A simple semi-empirical theory for turbulence in the atmospheric surface layer. *Atmos. Env.*, 13: 247-253.
- Blackadar A.K., 1962:
The vertical distribution of wind and turbulent exchange in neutral atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 67: 3095-3102.
- Bobyleva I.M., Zilitinkevič S.S., Lajchtman D.L., 1967:
Turbulentntyj režim v termičeski stratificirovannom planetarnom pograničnom sloje atmosfery. W: Atmosfernaja turbulentnost' i rasprostraneniye radiovoln. Nauka, Moskwa. 179-190

- Bodin S., 1979:
A predictive numerical model of the atmospheric boundary layer based on the turbulent energy equation. SMHI Rep. No. 13
- Borkowski J., 1984:
The structure of turbulence in the surface layer of the atmosphere. Publ. Inst. Geoph. Pol. Acad. Sci., D-21 (183)
- Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi Y., Bradley E.F., 1971:
Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer
J. Atmos. Sci., 28: 181-189.
- Businger J.A., 1973:
Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. In: Workshop on micrometeorology. D. Haugen (ed.), AMS, Boston. 67-100
- Businger J.A., 1982:
Fundamental equations and concepts. W: Atmospheric turbulence and air pollution modelling (red. F.T.M. Nieuwstadt i H. van Dop), Reidel Publ. Company.
- Clarke R.H., 1974:
Popytki modelirovat' sutočnyj chod meteorologičeskich veličin v pograničnom sloje atmosfery.
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., 10: 600-612.
- Claussen M., 1985:
Estimation of the Monin-Obukhov similarity functions from a spectral model. *Bound.-Layer Meteor.*, 33: 233-243.
- Cvang L.P., Zubkovskij S.L., Kallistratova M.A., 1981:
Otčet o rabote meždunarodnoj ekspedicii učenych socialističeskich stran po sravneniju priborov dlja izmerenij charakteristik atmosfernoj turbulentnosti. Maszynopis, KAPG, Cimljansk.

- Deardorff J.W., 1974:
Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. *Bound.-Layer Meteor.*, 7: 199-226.
- Driedonks A.G.M., van Dop H., Kohsiek W., 1978:
Meteorological observations on the 213 m-mast at Cabauw, the Netherlands. *Proc. 4th Symp. Met. Obs. and Instr.*, 10-14.IV, Denver, Colorado (publ. AMS, Boston). 41-46.
- Dyer A.J., 1974:
A review of flux-profile relationships.
Bound.-Layer Meteor., 7: 363-372.
- Ellison T.H., 1957:
Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plate. *J. Fluid Mech.*, 2: 456-466.
- Enger L., 1983:
Numerical boundary layer modeling with application to diffusion. Part I: a two dimensional higher order closure model. Uppsala University, Rep. No. 70
- Enger L., 1986:
A higher order closure model applied to dispersion in a convective PBL. *Atmos. Env.*, 20: 879-894.
- Ericson K., 1982:
Atmospheric boundary layer field experiment in Sweden 1980, GOTEX II. Part I. Swedish Meteorological and Hydrological Institute, RMK 33.
- Flatau P.J., 1985:
Study of second-order turbulence closure technique and its application to atmospheric flows. *Atm. Sci. Pap. No. 293*, Colorado State University.

- Galperin B., Kantha L.H., Hassid S., Rosati A., 1988:
A quasi-equilibrium turbulent energy model for geophysical flows. *J. Atmos. Sci.*, **45**: 55-62.
- Garratt J.R., 1972:
Studies of turbulence in the surface layer over water (Lough Neagh). Part II: production and dissipation of velocity and temperature fluctuations.
Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **98**: 642-657.
- Gavrilov A.S., Lajchtman D.L., 1973:
O vlijanii radiacii na režim prizemnogo sloja atmosfery.
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., **9**: 27-34.
- Gerstmann V., 1987:
Pulsacionnyje karakteristiki skorosti vetra i temperatury v prizemnom sloje atmosfery po dannym MESP-81.
Met. Issl., **28**: 20-25.
- Hassid S., Galperin B., 1983:
A turbulent energy model for geophysical flows.
Bound.-Layer Meteor., **26**: 397-412.
- Helfand H.M., 1985:
A new scheme for the parameterization of the turbulent planetary boundary layer in the GLAS fourth-order GCM.
Proc. 7th Conf. Num. Wea. Pred., AMS. 348-354.
- Helfand H.M., Labraga J.C., 1988:
Design of a nonsingular level 2.5 second-order closure model for the prediction of atmospheric turbulence.
J. Atmos. Sci., **45**: 113-132.
- Högström U., 1988:
Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer: a re-evaluation.
Bound.-Layer Meteor., **42**: 55-78.

- Hurtalova T., Zeleny J., Prządka Z., Foken T., Cvang L.P., 1987:
Kompleksnyje issledovanija prizemnogo sloja atmosfery.
Met. Issl., 28: 13-19.
- Izumi Y., Caughey J.S., 1976:
Minnesota 1973 atmospheric boundary layer experiment data
report. AFCRL-TR-76-0038 Env. Res. Pap. No. 547.
- Jaglom A.M., 1977:
Comments on wind and temperature flux-profile relationships.
Bound.-Layer Meteor., 11: 89-102.
- Kitajgorodskij S.A., Zeidler R., 1977:
Teoria podobieństwa w geofizycznej dynamice płynów. PWN,
Warszawa-Poznań.
- Kondo J., Kanechika O., Yasuda N., 1978:
Heat and momentum transfers under strong stability in the
atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, 35: 1012-1021.
- Lajchtman D.L., 1970:
Fizika pograničnogo sloja atmosfery. Gidrometeoizdat,
Leningrad.
- Lajchtman D.L., 1979:
O strojenii prizemnogo sloja.
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., 15: 983-987
- Lajchtman D.L., Kudrova E.V., 1980:
Model planetarnogo pograničnogo sloja.
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., 16: 690-696.
- Lewellen W.S., Teske M., 1973:
Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from an
invariant model of turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 30: 1340-1345.

- McBean G.A., Elliott J.A., 1975:
The vertical transfer of kinetic energy by turbulence and pressure in boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, 32: 753-766.
- McBean G.A., 1971:
The variations of the statistics of wind, temperature and humidity fluctuations with stability.
Bound.-Layer Meteor., 1: 438-457.
- Mellor G.L., Yamada T., 1974:
A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, 13: 1791-1806.
- Mellor G.L., Yamada T., 1982:
Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geoph. Space Phys.*, 20: 851-875.
- Mellor G.L., 1973:
Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *J. Atmos. Sci.*, 30: 1061-1069.
- Monin A.S., 1965:
O svojstvach simmetrii turbulentnosti v prizemnom sloje vozducha. *Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok.*, 1: 45-54.
- Monin A.S., Obuchov A.M., 1954:
Osnovnyje zakonomernosti turbulentnogo peremešivaniya v prizemnom sloje atmosfery. *Tr. AN SSSR, Geof. Inst.*, nr 24, 1963-1967.
- Monin A.S., Jaglom A.M., 1965:
Statističeskaja gidromekhanika. *Mekhanika turbulentnosti*. Nauka, Moskva.
- Nickerson E.C., Smiley V.E., 1975:
Surface layer and energy budget parameterizations for mesoscale models. *J. Appl. Meteor.*, 14: 297-300.

- Panofsky H.A., Tennekes H., Lenschow D.H., Wyngaard J.C., 1977:
The characteristics of turbulent velocity components in the surface layer under convective conditions.
Bound.-Layer Meteor., 11: 355-361.
- Prenosil T., 1979:
Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from a second-order-closure model. *Bound.-Layer Meteor.*, 17: 495-516.
- Schlichting H., 1964:
Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe.
- Schumann U., 1977:
Realizability of Reynolds-stress turbulence models..
Phys. Fluids, 20: 721-725.
- Sorbjan Z., 1983:
Turbulencja i dyfuzja w dolnej atmosferze. PWN, Warszawa.
- Sorbjan Z., 1988:
Structure of the atmospheric boundary layer. Prentice-Hall.
- Therry G., Lacarrere P., 1983:
Improving the eddy kinetic energy model for planetary boundary layer description. *Bound.-Layer Meteor.*, 25: 63-88.
- Tjernström M., 1987:
A study of flow over complex terrain using a three-dimensional model. A preliminary model evaluation focusing on stratus and fog. *Ann. Geoph.*, 5: 469-486.
- Uliasz M., Łobocki L., 1983:
Modelowanie pionowych profili prędkości wiatru, temperatury i współczynników turbulencji w granicznej warstwie atmosfery.
Sem. IIS PW, 5: 181-196.

- Visvanadham Y., 1982:
Examination of the empirical flux-profile models in the atmospheric surface boundary layer.
Bound.-Layer Meteor., 22: 61-77.
- Wessels H.R.A., 1984:
Cabauw meteorological data tapes 1973-1984; description of instrumentation and data processing for the continuous measurements. KNMI Sci. Rep. 84-6, De Bilt.
- Wichmann M., Schaller E., 1986:
On the determination of the closure parameters in higher-order closure models.
Bound.-Layer Meteor., 37: 323-341.
- Wilczak J.M., Businger J.A., 1984:
Large-scale eddies in the unstably stratified atmospheric surface layer. Part II: turbulent pressure fluctuations and the budgets of heat flux, stress and turbulent kinetic energy.
J. Atmos. Sci., 41: 3551-3567.
- Wyngaard J.C., Coté O.R., Izumi Y., 1971:
Local free convection, similarity, and the budgets of shear stress and heat flux. *J. Atmos. Sci.*, 28: 1171-1182.
- Wyngaard J.C., Coté O.R., 1971:
The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer.
J. Atmos. Sci., 28: 190-201.
- Wyngaard J.C., 1985:
Structure of the planetary boundary layer and implications for its modeling. *J. Clim. Appl. Meteor.*, 24: 1131-1142.
- Yamada N., 1986:
Examination of Schumann's method of judging the realizability of turbulence closure models.
Bound.-Layer Meteor., 37: 415-419.

Yamada T., Mellor G.L., 1975:

A simulation of the Wangara atmospheric boundary layer data.
J. Atmos. Sci., 32: 2309-2329.

Yamada T., 1975:

The critical Richardson number and the ratio of the eddy transport coefficients obtained from a turbulence closure model. *J. Atmos. Sci.*, 32: 926-933.

Yamamoto G., 1975:

Generalization of the KEYPS formula in diabatic conditions and related discussion on the critical Richardson number.
J. Meteor. Soc. Japan, 53 II: 189-195.

Yu T.W., 1977:

A comparative study on parameterization of vertical turbulent exchange processes. *Mon. Wea. Rev.*, 105: 57-66.

Zilitinkevič S.S., Čalikov D.V., 1968:

Opredelenije universalnykh profilej skorosti vetra i temperatury v prizemnom sloje atmosfery
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., 4: 294-302.

Zilitinkevič S.S., Lajchtman D.L., 1965:

Turbulentnyj obmen v prizemnom sloje atmosfery.
Izv. AN SSSR, Fiz. Atm. Ok., 1

Zilitinkevič S.S., 1970:

Dinamika pograničnogo sloja atmosfery. Gidrometeoizdat, Leningrad.

Upraszczające założenia z wyjątkiem rzędu dochodzą

Równanie ewolucji tensora naprężeń Reynoldsa ze względu (patrz np. Buzinger, 1982):

$$\begin{aligned} \text{I} & \quad \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = \left[\overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k} = \\ & \quad \text{II} \end{aligned}$$

DODATKI

$$\text{III} \quad = -\frac{1}{\rho_0} \left[\overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right] + \nu \left(\epsilon_{ijk} \overline{\omega_l} \overline{u_l} + \epsilon_{jlk} \overline{\omega_l} \overline{u_i} \right) =$$

$$\text{IV} \quad \text{V} \quad \text{VI} \quad \text{VII} \quad \text{VIII} \quad \text{IX}$$

$$\text{X} \quad = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} = 2 \left(\epsilon_{ijk} \overline{\omega_l} \overline{u_l} + \epsilon_{jlk} \overline{\omega_l} \overline{u_i} \right)$$

(A-1)

Równanie ewolucji strumienia ciepła

$$\begin{aligned} \text{I} & \quad \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k} = \left[\overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j \theta} = \\ & \quad \text{II} \end{aligned}$$

$$\text{III} \quad \text{IV} \quad \text{V} \quad \text{VI} \quad \text{VII} \quad \text{VIII} \quad \text{IX}$$

$$\text{X} \quad = -\frac{1}{\rho_0} \overline{\theta} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \rho \epsilon_{ijk} \overline{\omega_l} \overline{\theta} + \nu \left(\overline{\theta} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_k} \right) - 2\nu \epsilon_{ijk} \overline{\omega_l} \overline{\theta} =$$

Upraszczenie układu równań z wyższym rzędem domykania

Równanie ewolucji tensora naprężeń Reynoldsa ma postać (patrz np. Businger, 1982):

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t}}^{\text{I}} + \overbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}^{\text{II}} + \overbrace{\left[\overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right]}^{\text{III}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}}^{\text{IV}} = \\
 & \overbrace{- \frac{1}{\rho_0} \left[\overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right]}^{\text{V}} + \overbrace{\beta \left[\delta_{i3} \overline{u_j \theta} + \delta_{j3} \overline{u_i \theta} \right]}^{\text{VI}} + \\
 & \overbrace{+ \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}^{\text{VII}} - \overbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}^{\text{VIII}} - \overbrace{2 \left[\varepsilon_{ikl} \Omega_k \overline{u_l u_j} + \varepsilon_{jkl} \Omega_k \overline{u_l u_i} \right]}^{\text{IX}} =
 \end{aligned}$$

(A-1)

Równanie ewolucji strumienia ciepła:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t}}^{\text{I}} + \overbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k}}^{\text{II}} + \overbrace{\left[\overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right]}^{\text{III}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k \theta}}^{\text{IV}} = \\
 & \overbrace{- \frac{1}{\rho_0} \theta \frac{\partial p}{\partial x_i}}^{\text{V}} + \overbrace{\beta \delta_{i3} \overline{\theta^2}}^{\text{VI}} + \overbrace{\nu \theta \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k}}^{\text{VII}} + \overbrace{k u_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_k}}^{\text{VIII}} - \overbrace{2 \varepsilon_{ikl} \Omega_k \overline{u_l \theta}}^{\text{IX}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\left[-\frac{1}{\rho_0} \overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right]}^{\text{V}} + \overbrace{\left[\beta \delta_{i3} \overline{\theta^2} \right]}^{\text{VI}} - \overbrace{\left[2\varepsilon_{ikl} \Omega_k \overline{u_l \theta} \right]}^{\text{IX}} + \overbrace{\left[\nu \frac{\partial^2 \overline{\theta u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right]}^{\text{VII}} + \overbrace{\left[k \frac{\partial^2 \overline{\theta u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \right]}^{\text{VII}} - \\
 & - \overbrace{\left[\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \right] \right]}^{\text{VIIa}} - \overbrace{\left[k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right] \right]}^{\text{VIII}} - \overbrace{\left[\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right]}^{\text{VIII}} - \overbrace{\left[k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right]}^{\text{VIII}} = \quad (A-2)
 \end{aligned}$$

Równanie ewolucji wariancji temperatury:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\left[\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} \right]}^{\text{I}} + \overbrace{\left[\overline{u_k} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right]}^{\text{II}} + \overbrace{\left[2\overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right]}^{\text{III}} + \overbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k \theta^2} \right]}^{\text{IV}} = \overbrace{\left[k \frac{\partial^2 \overline{\theta^2}}{\partial x_k \partial x_k} \right]}^{\text{VII}} - \overbrace{\left[2k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right]}^{\text{VIII}} = \quad (A-3)
 \end{aligned}$$

W powyższych równaniach przyjęto oznaczać wielkości uśrednione dużymi literami, zaś fluktuacje turbulencyjne - małymi. Znaczenie symboli jest zgodne z powszechnie przyjętym w meteorologii warstwy granicznej, stosuje się też notację Einsteina.

Wyrazy oznaczone przez I dotyczą lokalnych zmian poszczególnych momentów statystycznych pól turbulencyjnych, przez II - ich zmian adwekcyjnych, III - oddziaływań gradientów pól wielkości uśrednionych i turbulencji, IV - transportu turbulencyjnego, V - mechanizmów związanych z pulsacjami ciśnienia, VI - oddziaływań sił wyporu z turbulencją, VII - dyfuzji molekularnej, VIII - dyssypacji, tj. rozpraszania energii zaburzeń przez ruchy molekularne, IX - oddziaływań siły Coriolisa na ruchy

turbulencyjne. Układ równań zawiera większą liczbę niewiadomych, niż równań, w związku z czym niektóre występujące w nich człony (IV, V, VIII) wymagają modelowania. Dla przypadku stacjonarnej i poziomo jednorodnej przyziemnej warstwy atmosfery człony I i II znikają, zaś człony IV, VII i IX są pomijalne. Dążąc do uzyskania możliwie prostego układu równań, wybierzemy jeden z najprostszych schematów parametryzacji członów ciśnieniowych i dyssypacyjnych, stosowany przez Mellora i Yamadę (Mellor, 1973; Mellor i Yamada, 1974, 1982):

$$\frac{1}{\rho_0} \left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right] = \frac{1}{\rho_0} \left[\left[\overline{\frac{\partial p u_j}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_j}} \right] - \left[\overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right] \right] \\ \approx - \frac{q}{3l_1} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right] + C_1 q^2 \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (A-4)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho_0} \overline{\frac{\partial \theta p}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho_0} \overline{p \frac{\partial \theta}{\partial x_i}} \approx \frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta} \quad (A-5)$$

$$\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij} \quad (A-6)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (A-7)$$

$$(\nu + k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 0 \quad (A-8)$$

Wyrazy, opisujące oddziaływania gradientów pól wielkości średnich, po uwzględnieniu zerowania się gradientów poziomych, w układzie z osią X skierowaną zgodnie z naprężeniem Reynoldsa przy

powierzchni ziemi, zapisać można w postaci:

$$\overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \overline{u_a u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_a} + \overline{u_a u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_a} = \delta_{i1} \overline{w u_j} \frac{dU}{dz} + \delta_{j1} \overline{w u_i} \frac{dU}{dz}$$

$$\overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \overline{u_a \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_a} + \overline{u_a u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_a} = \delta_{i1} \overline{w \theta} \frac{dU}{dz} + \overline{w u_i} \frac{d\theta}{dz}$$

$$2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 2 \overline{w \theta} \frac{d\theta}{dz}$$

Podstawiając powyższe, oraz (A-4) - (A-8) do (A-1) - (A-3), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \delta_{i1} \overline{w u_j} \frac{dU}{dz} + \delta_{j1} \overline{w u_i} \frac{dU}{dz} = & - \frac{q}{3l_1} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right] - \\ & + C_1 q^2 \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] + \beta \left[\delta_{i3} \overline{u_j \theta} + \delta_{j3} \overline{u_i \theta} \right] - \frac{2}{3} \frac{q}{\Lambda_1} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (A-9)$$

$$\delta_{i1} \overline{w \theta} \frac{dU}{dz} + \overline{w u_i} \frac{d\theta}{dz} = \beta \delta_{i3} \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta} \quad (A-10)$$

$$2 \overline{w \theta} \frac{d\theta}{dz} = - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (A-11)$$

Równanie (A-9) zapiszemy teraz dla następujących wartości wskaźników: a) $i=j$; b) $i=j=3$; c) $i=1, j=3$.

a) $i=j$:

$$\delta_{i1} \overline{wu_i} \frac{dU}{dz} + \delta_{i1} \overline{wu_i} \frac{dU}{dz} = - \frac{q}{3l_1} \left[\overline{u_i u_i} - \frac{\delta_{ii}}{3} q^2 \right] -$$

$$+ C_1 q^2 \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] + \beta \left[\delta_{i3} \overline{u_i \theta} + \delta_{i3} \overline{u_i \theta} \right] - \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ii}$$

czyli:

$$2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} = 2\beta \overline{w\theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (A-12)$$

Równanie to opisuje uproszczony bilans energii kinetycznej ruchów turbulentnych w warstwie przyziemnej. W identycznej postaci zastosowano je do sformułowania rodziny modeli warstwy przyziemnej w rozdziale 3 (wzór 3.1).

b) $i=j=3$:

$$- \frac{q}{3l_1} \left[\overline{w^2} - \frac{1}{3} q^2 \right] + 2\beta \overline{w\theta} = \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1}$$

Mnożymy otrzymane równanie przez 3 i dodajemy stronami do (A-12):

$$- \frac{q}{l_1} \left[\overline{w^2} - \frac{1}{3} q^2 \right] + 2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} + 4\beta \overline{w\theta} = 0$$

$$\overline{w^2} = \frac{1}{3} q^2 + \frac{l_1}{q} \left[2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} + 4\beta \overline{w\theta} \right] \quad (A-13)$$

c) $i=1, j=3$:

$$\overline{w^2} \frac{dU}{dz} = - \frac{q}{3l_1} \overline{uw} + C_1 q^2 \frac{dU}{dz} + \beta \overline{u\theta}$$

czyli:

$$\overline{uw} = -3l_1 q \left[-C_1 + \frac{\overline{w^2}}{q^2} \right] \frac{dU}{dz} + \beta \overline{u\theta} \frac{3l_1}{q} \quad (A-14)$$

Równanie (A-10) zapiszemy dla: a) $i=1$; b) $i=3$:

a) $i=1$:

$$\overline{w\theta} \frac{dU}{dz} + \overline{wu} \frac{d\theta}{dz} = - \frac{q}{3l_2} \overline{u\theta} \quad (A-15)$$

b) $i=3$:

$$\overline{w^2} \frac{d\theta}{dz} = \beta \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{w\theta} \quad (A-16)$$

Dodatek B

Redukcja algebraiczna układu równań

Zestawimy poniżej wyprowadzone w Dodatku A równania modelu "poziomu 2" Mellora-Yamady dla przyziemnej warstwy atmosfery:

$$\overline{w^2} = \frac{1}{3} q^2 + \frac{1}{q} \left[2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} + 4\beta \overline{w\theta} \right] \quad (B-1)$$

$$\overline{uw} = -3l_1 q \left[-C_1 + \frac{\overline{w^2}}{q^2} \right] \frac{dU}{dz} + \frac{3\beta l_1}{q} \overline{u\theta} \quad (B-2)$$

$$-\frac{q}{3l_2} \overline{u\theta} = \overline{w\theta} \frac{dU}{dz} + \overline{wu} \frac{d\theta}{dz} \quad (B-3)$$

$$-\frac{q}{3l_2} \overline{w\theta} = -\beta \overline{\theta^2} + \overline{w^2} \frac{d\theta}{dz} \quad (B-4)$$

$$2 \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} = -2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (B-5)$$

$$2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} = 2\beta \overline{w\theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (B-6)$$

W modelu Mellora-Yamady przyjmowana jest hipoteza o proporcjonalności skal długości, występujących w tych równaniach:

$$(l_1, l_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (A_1, A_2, B_1, B_2) \ell \quad (B-7)$$

z pomocą której, równania (B-1..B-6) przepiszemy jako:

$$\frac{\overline{w^2}}{q^2} = \frac{1}{3} + A_1 \frac{\ell}{q^3} \left[2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} + 4\beta \overline{w\theta} \right] \quad (B-8)$$

$$\frac{\overline{uw}}{q^2} = -3A_1 \frac{\ell}{q} \left[\left(\frac{\overline{w^2}}{q^2} - C_1 \right) \frac{dU}{dz} - \frac{\beta}{q^2} \overline{u\theta} \right] \quad (B-9)$$

$$\overline{u\theta} = -\frac{3A_2 \ell}{q} \left[\overline{w\theta} \frac{dU}{dz} + \overline{wu} \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (B-10)$$

$$\overline{w\theta} = -\frac{3A_2 \ell}{q} \left[-\beta \overline{\theta^2} + \overline{w^2} \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (B-11)$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{B_2 \ell}{q} \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} \quad (B-12)$$

$$-\overline{wu} \frac{dU}{dz} + \beta \overline{w\theta} = \frac{q^3}{B_1 \ell} \quad (B-13)$$

Wprowadzimy zmienne bezwymiarowe:

$$G_M = \frac{\ell^2}{q^2} \left[\frac{dU}{dz} \right]^2 \quad (B-14)$$

$$G_H = - \frac{\ell^2}{q^2} \beta \frac{d\theta}{dz} \quad (B-15)$$

$$Y_u = \frac{\overline{w^2}}{q^2} \quad (B-16)$$

$$S_M = - \frac{\overline{uw}}{\ell q \frac{dU}{dz}} \quad (B-17)$$

$$S_H = - \frac{\overline{w\theta}}{\ell q \frac{d\theta}{dz}} \quad (B-18)$$

$$Y_\theta = \frac{\overline{\theta^2}}{\ell^2} \left[\frac{d\theta}{dz} \right]^{-2} \quad (B-19)$$

$$Y_u = \frac{\overline{u\theta}}{\ell^2 \frac{dU}{dz} \frac{d\theta}{dz}} \quad (B-20)$$

przy tym,

$$S_M G_M = - \frac{\ell \overline{uw}}{q^3} \frac{dU}{dz} ; \quad S_H G_H = \frac{\beta \ell \overline{w\theta}}{q^3} ;$$

$$Y_u G_H = - \frac{\beta \overline{u\theta}}{q^2 \frac{dU}{dz}} ; \quad Y_\theta G_H = - \frac{\beta \overline{\theta^2}}{q^2} \left[\frac{d\theta}{dz} \right]^{-1} .$$

z B-8:

$$Y_v = \frac{1}{3} - 2A_1 S_M G_M + 4A_1 S_H G_H \quad (B-22)$$

z B-9:

$$S_M = 3A_1 \left[\left[\frac{\overline{w^2}}{q^2} - C_1 \right] - \frac{\beta \overline{u\theta}}{q^2 \frac{dU}{dz}} \right],$$

czyli:

$$S_M = 3A_1 \left[Y_v - C_1 + Y_u G_H \right]. \quad (B-23)$$

z B-10:

$$Y_u = \frac{\overline{u\theta}}{\ell^2 \frac{dU}{dz} \frac{d\theta}{dz}} = - \frac{3A_2 \ell}{q} \frac{1}{\ell^2 \frac{dU}{dz} \frac{d\theta}{dz}} \left[\overline{w\theta} \frac{dU}{dz} + \overline{wu} \frac{d\theta}{dz} \right],$$

czyli:

$$Y_u = 3A_2 \left[S_M + S_H \right]. \quad (B-24)$$

z B-11:

$$S_H = \frac{3A_2}{q^2} \left[- \frac{\beta \overline{\theta^2}}{\frac{d\theta}{dz}} + \overline{w^2} \right],$$

czyli:

$$S_H = 3A_2 \left[Y_\theta G_H + Y_v \right]. \quad (B-25)$$

z B-12:

$$Y_{\theta} = \frac{\overline{\theta^2}}{\ell^2} \left[\frac{d\theta}{dz} \right]^{-2} = - \frac{B_2 \ell}{q} \frac{1}{\overline{w\theta}} \frac{d\theta}{dz} \left[\frac{d\theta}{dz} \right]^{-2}$$

czyli:

$$Y_{\theta} = B_2 S_H \quad (B-26)$$

i wreszcie, z równania bilansu energii kinetycznej ruchu turbulentyjnego (B-6, B-13), po uwzględnieniu wynikających z (B-14), (B-15), (B-17) i (B-18) związków:

$$S_M G_M = - \frac{\ell \overline{uw}}{q^3} \frac{dU}{dz}; \quad S_H G_H = \frac{\beta \ell \overline{w\theta}}{q^3}$$

otrzymujemy:

$$S_M G_M + S_H G_H = B_1^{-1} \quad (B-27)$$

Zestawimy poniżej otrzymany układ równań:

$$\begin{aligned} Y_v &= \frac{1}{3} - 2A_1 S_M G_M + 4A_1 S_H G_H \\ S_M &= 3A_1 \left[Y_v - C_1 + Y_{\theta} G_H \right] \\ T_u &= 3A_2 \left[S_M + S_H \right] \\ S_H &= 3A_2 \left[Y_{\theta} G_H + Y_v \right] \\ Y_{\theta} &= B_2 S_H \\ S_M G_M + S_H G_H &= B_1^{-1} \end{aligned}$$

Otrzymane równania tworzą tzw. *układ poziomy 2* dla przyziemnej warstwy atmosfery. Analogicznie dokonuje się wyprowadzenia układu równań modelu poziomy 2 dla warstwy granicznej, z tą jednak różnicą, że wyrazy opisujące adwekcję, niestacjonarność i transport pionowy pomijane są na podstawie oszacowania ich rzędu wielkości, nie zaś na podstawie założeń dotyczących warstwy przyziemnej. W równaniach tych uwzględnia się także zmiany kierunku wiatru z wysokością, oraz strumień $\overline{v'w'}$ (zob. np. Mellor, Yamada, 1982).

Przedstawiony powyżej układ sześciu równań wiąże siedem wielkości, określonych funkcjami Y_u , S_M , S_H , Y_θ , Y_v , G_M i G_H . Należy zatem oczekiwać, że w wyniku dokonania odpowiedniej redukcji algebraicznej wielkości te wyrazić można będzie jako funkcje jednej zmiennej, stanowiącej pewną kombinację liniową pozostałych wielkości. Redukcja taka zademonstrowana zostanie w dalszej części dodatku.

W praktyce modelowania dynamiki granicznej warstwy atmosfery często stosowany bywa tzw. *model poziomy 2.5*. Pozwala on osiągnąć kompromis pomiędzy wymogami dokładności opisu, właściwej modelom z pełną postacią równań, a spotykanymi w praktyce wymaganiami prostoty i oszczędności mocy obliczeniowej. W modelu tym, w równaniu bilansu kinetycznej energii ruchów turbulentnych uwzględniane są dodatkowo wyrazy opisujące transport pionowy; dopuszczane jest niezrównoważenie bilansu i wynikające stąd zmiany energii. W miejsce algebraicznego równania (B-27) pojawia się zatem cząstkowe równanie różniczkowe. Z układu równań algebraicznych wypada jedno równanie, związku algebraiczne przyjmują więc postać funkcji dwóch zmiennych. W praktyce dogodnie jest posługiwać taką postacią omawianych zależności, w której jako zmienne niezależne występują wielkości G_M i G_H . Daje to możliwość bezpośredniego wyznaczenia pozostałych wielkości, jeśli znane są pionowe gradienty wiatru i temperatury potencjalnej, skala l , oraz wyznaczona z równania bilansu kinetyczna energia turbulencji. Ze względu na znaczenie modelu poziomy 2.5, w dalszym toku wywodu wyodrębnimy etap, odpowiadający temu przybliżeniu.

POZIOM $2\frac{1}{2}$

Wykonamy wstępną redukcję układu (B-22..26) metodą eliminacji. Zaczniemy od podstawienia (B-26) do (B-25):

$$S_H = 3A_2 \left[B_2 S_H G_H + C_v \right]$$

(B-24) z kolei podstawimy do (B-23):

$$S_M = 3A_1 \left[C_v - C_1 + 3A_2 (S_M + S_H) G_H \right]$$

Do obydwu powyższych równań podstawiamy (B-22):

$$S_H = 3A_2 \left[B_2 S_H G_H + \frac{1}{3} - 2A_1 S_M G_M + 4A_1 S_H G_H \right]$$

$$S_M = 3A_1 \left[\frac{1}{3} - 2A_1 S_M G_M + 4A_1 S_H G_H - C_1 + 3A_2 (S_M + S_H) G_H \right]$$

Uporządkujemy układ:

$$S_H = 3A_2 B_2 S_H G_H + A_2 - 6A_2 A_1 S_M G_M + 12A_1 A_2 S_H G_H$$

$$S_M = A_1 - 6A_1^2 S_M G_M + 12A_1^2 S_H G_H - 3A_1 C_1 + 9A_1 A_2 (S_M + S_H) G_H$$

(B-28)

i ostatecznie otrzymujemy:

$$\left[1 - 3A_2 B_2 G_H - 12A_1 A_2 G_H \right] S_H + 6A_2 A_1 G_M S_M = A_2$$

$$- \left[12A_1^2 G_H + 9A_1 A_2 G_H \right] S_H + \left[1 + 6A_1^2 G_M - 9A_1 A_2 G_H \right] S_M = A_1 (1 - 3C_1)$$

W celu usprawnienia obliczeń Helfand i Labraga (1988) wprowadzają oznaczenia:

$$\Phi_1(G_H) = 1 - 3A_2 B_2 G_H \tag{B-29}$$

$$\Phi_2(G_H) = 1 - 9A_1A_2G_H \quad (B-30)$$

$$\Phi_3(G_H) = \Phi_1 + 9A_2^2G_H \quad (B-31)$$

$$\Phi_4(G_H) = \Phi_1 - 12A_1A_2G_H \quad (B-32)$$

z pomocą których wyznacznik układu zapisać można jako:

$$\begin{aligned} D &= \Phi_4\Phi_2 + 6A_1^2G_M \left[1 - 3A_2B_2G_H - 12A_1A_2G_H \right] + \\ &\quad + 6A_2A_1G_M \left[12A_1^2G_H + 9A_1A_2G_H \right] = \\ &= \Phi_4\Phi_2 + 6A_1^2G_M \left[1 - 3A_2B_2G_H - 12A_1A_2G_H \right] + \\ &\quad + 6A_1^2G_M \left[12A_1A_2G_H + 9A_2^2G_H \right] = \\ &= \Phi_4\Phi_2 + 6A_1^2G_M \left[1 - 3A_2B_2G_H + 9A_2^2G_H \right] = \Phi_4\Phi_2 + 6A_1^2\Phi_3G_M \end{aligned} \quad (B-33)$$

Rozwiązania dla S_M i S_H wyrażają się przez:

$$DS_M = A_1(1-3C_1) \left[1 - 3A_2B_2G_H - 12A_1A_2G_H \right] + A_2 \left[12A_1^2G_H + 9A_1A_2G_H \right]$$

$$DS_H = A_2 \left[1 + 6A_1^2G_M - 9A_1A_2G_H \right] - A_1(1-3C_1)6A_2A_1G_M$$

Czyli, dla $D \neq 0$:

$$S_H = A_2 \left[\frac{1 - 9A_1A_2G_H + 6A_1^2G_M - A_1(1-3C_1)6A_1G_M}{D} \right] = A_2 \frac{N}{D} \quad (B-34)$$

gdzie

$$N = \Phi_2 + 18A_1^2 C_1 G_M, \quad (B-35)$$

oraz

$$\begin{aligned} DS_M &= A_1 \left[1 - 3A_2 B_2 G_H - 12A_1 A_2 G_H \right] - \\ &- 3C_1 A_1 \left[1 - 3A_2 B_2 G_H - 12A_1 A_2 G_H \right] + A_2 \left[12A_1^2 G_H + 9A_1 A_2 G_H \right] = \\ &= \left[A_1 - 3A_1 A_2 B_2 G_H + 9A_1 A_2^2 G_H \right] - 3C_1 A_1 \left[1 - 3A_2 B_2 G_H - 12A_1 A_2 G_H \right] \end{aligned}$$

czyli

$$S_M = A_1 \frac{\Phi_3 - 3C_1 \Phi_4}{D} \quad (B-36)$$

POZIOM 2

W modelu poziomym 2, oprócz omówionych powyżej związków, stosuje się równanie bilansu kinetycznej energii ruchów turbulentnych w postaci (B-27). Jak zauważono wcześniej, w układzie sześciu równań modelu występuje siedem zmiennych, zatem rozwiązania należy poszukiwać w postaci funkcji jednej zmiennej. Dogodne w tym celu jest wprowadzenie dynamicznej liczby Richardsona R_F , stanowiącej parametr równowagi:

$$R_F = \frac{\beta \overline{w\theta}}{\overline{uw} \frac{dU}{dz}} = \frac{S_H \beta \frac{d\theta}{dz}}{S_M \left(\frac{dU}{dz} \right)^2} = - \frac{S_H G_H}{S_M G_M} \quad (B-37)$$

Alternatywnie stosowana być może gradientowa liczba Richardsona:

$$Ri = \frac{\beta \frac{d\theta}{dz}}{\left(\frac{dU}{dz}\right)^2} = - \frac{G_H}{G_M} = \frac{S_M}{S_H} R_F \quad (B-38)$$

Przyjmując ograniczenie:

$$S_M G_M \neq 0 \quad (B-39)$$

możemy zapisać równanie bilansu energii kinetycznej ruchu turbulentnego (B-27) z użyciem liczby R_F w postaci:

$$S_H G_H (1 - R_F^{-1}) = B_1^{-1}$$

czyli

$$S_H G_H B_1 = -\Gamma, \quad \text{gdzie } \Gamma = \frac{R_F}{1 - R_F} \quad (B-40)$$

Z otrzymanej postaci równania (B-40) wynika konieczność nałożenia na rozwiązania układu ograniczenia $R_F \neq 1$. Jednocześnie, dla $R_F > 1$ równanie (B-6) opisywałoby produkcję energii przez modelowy wyraz dyssypacyjny przy $q < 0$. Ograniczenie to należy zatem sformułować w postaci $R_F < 1$.

Punktem wyjścia do dalszych przekształceń będzie układ (B-28), uzupełniony o (B-40). Z (B-28) mamy:

$$S_H = 3A_2 B_2 S_H G_H + A_2 - 6A_2 A_1 S_M G_M + 12A_1 A_2 S_H G_H$$

$$S_M = A_1 - 6A_1^2 S_M G_M + 12A_1^2 S_H G_H - 3A_1 C_1 + 9A_1 A_2 (S_M + S_H) G_H$$

Wykorzystując (B-40), w miejscu $S_H G_H$ podstawiać będziemy $-\Gamma B_1^{-1}$, zaś w miejscu $S_M G_M$ - wynikające z (B-27) wyrażenie

$$S_M G_M = B_1^{-1} - S_H G_H = B_1^{-1} \left[1 + \Gamma \right].$$

Mamy więc:

$$S_H = A_2 + B_1^{-1} \left[- \left[3A_2 B_2 + 12A_1 A_2 \right] \Gamma - 6A_2 A_1 \left[1 + \Gamma \right] \right]$$

czyli

$$S_H = A_2 + 3A_2 B_1^{-1} \left[- \left[B_2 + 6A_1 \right] \Gamma - 2A_1 \right] \quad (B-41)$$

oraz

$$S_M = A_1 - 3A_1 C_1 - 6A_1^2 S_M G_M + \left[12A_1^2 + 9A_1 A_2 \right] S_H G_H + 9A_1 A_2 S_M G_H =$$

$$= A_1 - 3A_1 C_1 - 6A_1^2 B_1^{-1} (1 + \Gamma) - \left[12A_1^2 + 9A_1 A_2 \right] B_1^{-1} \Gamma + 9A_1 A_2 S_M G_H$$

$$= A_1 - 3A_1 C_1 - 6A_1^2 B_1^{-1} - \left[18A_1^2 + 9A_1 A_2 \right] B_1^{-1} \Gamma + 9A_1 A_2 S_M G_H$$

czyli

$$S_M \left[1 - 9A_1 A_2 G_H \right] = A_1 - 3A_1 C_1 - 6A_1^2 B_1^{-1} - \left[18A_1^2 + 9A_1 A_2 \right] B_1^{-1} \Gamma .$$

Człon stojący po lewej stronie w nawiasie rozpiszemy, korzystając z (B-40) i (B-41):

$$G_H = \frac{-\Gamma}{B_1 S_H} = \frac{-\Gamma}{A_2 B_1 + 3A_2 \left[- \left[B_2 + 6A_1 \right] \Gamma - 2A_1 \right]}$$

$$\left[1 - 9A_1 A_2 G_H \right] = 1 + \frac{9A_1 A_2 \Gamma}{A_2 B_1 + 3A_2 \left[- \left[B_2 + 6A_1 \right] \Gamma - 2A_1 \right]}$$

Spełnione przy tym być musi $G_H \neq 0$. Dla $9A_1 A_2 G_H \neq 1$ można wyznaczyć również funkcję S_M :

$$S_M = \frac{A_1 - 3A_1 C_1 - 6A_1^2 B_1^{-1} - \left[18A_1^2 + 9A_1 A_2 \right] B_1^{-1} \Gamma}{1 + \frac{9A_1 A_2 \Gamma}{A_2 B_1 + 3A_2 \left[- \left[B_2 + 6A_1 \right] \Gamma - 2A_1 \right]}} \quad (B-42)$$

z pomocą oznaczeń:

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} - 2A_1/B_1 \quad (B-43)$$

$$\gamma_2 = \frac{B_2 + 6A_1}{B_1} \quad (B-44)$$

(B-41) i (B-42) zapisać można jako:

$$S_H = 3A_2 \left[\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma \right] \quad (B-45)$$

$$S_M = 3A_1 \frac{\gamma_1 - C_1 - (6A_1 + 3A_2)\Gamma/B_1}{\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma + 3A_1 \Gamma/B_1} \left[\gamma_1 - \gamma_2 \Gamma \right] \quad (B-46)$$

Poziom 1

Dla tzw. poziomu 1 układ równań przybiera postać:

$$\overline{uw} = - l_1 q \frac{dU}{dz} \quad (B-47)$$

$$- \frac{q}{l_2} \overline{w\theta} = - 3\beta \overline{\theta^2} + q^2 \frac{d\theta}{dz} \quad (B-48)$$

$$2 \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} = - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (B-49)$$

$$2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} = 2\beta \overline{w\theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (B-50)$$

Po uwzględnieniu hipotezy o proporcjonalności skal:

$$\overline{uw} = - A_1 l q \frac{dU}{dz} \quad (B-51)$$

$$- \frac{q}{A_2 l} \overline{w\theta} = - 3\beta \overline{\theta^2} + q^2 \frac{d\theta}{dz} \quad (B-52)$$

$$2 \overline{w\theta} \frac{d\theta}{dz} = - 2 \frac{q}{B_2 l} \overline{\theta^2} \quad (B-53)$$

$$2 \overline{wu} \frac{dU}{dz} = 2\beta \overline{w\theta} - 2 \frac{q^3}{B_1 l} \quad (B-54)$$

Dokonując skalowania z pomocą (B-14)-(B-17), otrzymamy:

- z równania (B-51)

$$S_M = A_1 \quad (B-55)$$

- z równania (B-52):

$$-\frac{\overline{w\theta}}{A_2 \ell q \frac{d\theta}{dz}} = -\frac{3\beta\theta^2}{q^2 \frac{d\theta}{dz}} + 1, \quad \text{tj.} \quad S_H = A_2 \left[3Y_\theta G_H + 1 \right] \quad (B-56)$$

- z równania (B-53):

$$Y_\theta = B_2 S_H \quad (B-57)$$

- z równania (B-54):

$$S_H G_H (1 - R_F^{-1}) = B_1^{-1} \quad (B-58)$$

Podstawiając (B-57) do (B-56) i wykorzystując (B-58), otrzymujemy:

$$S_H = A_2 \left[3B_2 S_H G_H + 1 \right] = A_2 \left[1 - 3\Gamma B_2 / B_1 \right] \quad (B-59)$$

Zatem, na poziomie 1 S_M jest wartością stałą, zaś S_H - nadal funkcją stanu równowagi, opisywanego parametrem $\Gamma(R_f)$. Stała C_1 wypada z zestawu parametrów. Ograniczenia, warunkujące wykonalność przekształceń, sprowadzają się do warunków $R_f \neq 1$ oraz $G_M \neq 0$.

Rozwiązanie równania fundamentalnego modelu "poziomu 1"
ze skalą turbulencji określoną uogólnioną formułą von Karmana

Równanie to (3.4.23) ma postać:

$$\frac{dR_F}{d\zeta} = \frac{2(1-R_F)^{1/4}(1-mR_F)}{(2-mR_F)} \quad (C-1)$$

przy tym, jako warunek początkowy postulujemy:

$$R_F(\zeta=0) = 0 \quad (C-2)$$

Całkowania (C-2) dokonamy z pomocą podstawienia:

$$R_F = 1 - y^4; \quad dR_F = -4y^3 dy \quad (C-3)$$

Założywszy że funkcje $R_F(\zeta)$ oraz $y(R_F)$ są wzajemnie jednoznacznie określone dla $\zeta \in (-\infty, \min(1, m^{-1}))$, otrzymujemy:

$$\frac{d\zeta}{dy} = -2 \left[y^2 + m^{-1} \left[\frac{y^2}{(m^{-1}-1) + y^4} \right] \right] \quad (C-4)$$

albo:

$$2 d\zeta = \left[-4y^2 + \frac{4y^2}{m-1-my^4} \right] dy \quad (C-5)$$

Drugi człon rozwiniemy nieco, wprowadzając pomocniczą zmienną:

$$n = \left[\frac{m}{m-1} \right]^{1/4}, \quad m > 1 \quad (C-6)$$

$$\begin{aligned} \frac{4y^2}{m-1-my^4} &= 4 \frac{\frac{m-m+1}{m-1} y^2}{1 - \frac{m}{m-1} y^4} = 4 \frac{(n^4-1) y^2}{1 - n^4 y^4} = \frac{n^4-1}{n^3} \frac{4n^3 y^2}{1 - n^4 y^4} = \\ &= \frac{n^4-1}{n^3} 2n \frac{1 + n^2 y^2 - 1 + n^2 y^2}{\left[1 + n^2 y^2 \right] \left[1 - n^2 y^2 \right]} = \\ &= \frac{n^4-1}{n^3} 2n \left[\frac{1}{1 - n^2 y^2} - \frac{1}{1 + n^2 y^2} \right] \end{aligned} \quad (C-7)$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \frac{2n}{1 - n^2 y^2} &= \frac{-2n}{(ny+1)(ny-1)} = \frac{(ny-1)n(ny-1-ny-1)}{(ny+1)(ny-1)^2} = \\ &= \frac{ny-1}{ny+1} \frac{n(ny-1)-n(ny+1)}{(ny-1)^2} \end{aligned} \quad (C-8)$$

Możemy już teraz przystąpić do scałkowania równania (C-5):

$$2\zeta = -\frac{4}{3} y^3 + \frac{n^4-1}{n^3} \left[-2 \operatorname{arctg}(ny) + \int \frac{ny-1}{ny+1} \frac{n(ny-1)-n(ny+1)}{(ny-1)^2} dy \right]$$

Obliczenia pozostającej jeszcze całki dokonujemy z pomocą podstawienia:

$$u = \frac{ny+1}{ny-1}; \quad du = \frac{n(ny-1) - n(ny+1)}{(ny-1)^2} dy \quad (C-9)$$

$$\int \frac{ny-1}{ny+1} \frac{n(ny-1)-n(ny+1)}{(ny-1)^2} dy = \int \frac{du}{u} = \ln \left[\frac{ny+1}{ny-1} \right] + \text{const.}$$

zatem:

$$2\zeta = -\frac{4}{3} y^3 + \frac{n^4-1}{n^3} \left[-2 \operatorname{arctg}(ny) + \ln \left[\frac{ny+1}{ny-1} \right] \right] + C \quad (C-10)$$

Stałą całkowania C określić można, wykorzystując warunek początkowy (C-2):

$$C = \frac{4}{3} - \frac{n^4-1}{n^3} \left[-2 \operatorname{arctg}(n) + \ln \left[\frac{n+1}{n-1} \right] \right] \quad (C-11)$$

*Uproszczony model turbulencji
w neutralnie stratyfikowanej warstwie przyziemnej*

W przypadku równowagi obojętnej z teorii podobieństwa Monina-Obuchowa wynika zależność:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (D-1)$$

Stałą Kármána κ dobiera się przy tym tak, aby spełniona była powyższa zależność. Podstawiając powyższe w hipotezie von Kármána, otrzymujemy:

$$\ell = -\kappa \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} = -\kappa \frac{\frac{u_*}{\kappa z}}{-\frac{u_*}{\kappa z^2}} = \kappa z \quad (D-2)$$

Rezultat ten wynika wyłącznie z teorii podobieństwa i nie jest związany z opisywanym w pracy modelem warstwy przyziemnej¹. Zatem, dla warunków równowagi obojętnej teoria podobieństwa Monina-Obuchowa prowadzi do wniosku, że formuła von Kármána i hipoteza $\ell = \kappa z$ są zgodne (z dokładnością do stałej proporcjonalności). Formułę von Kármána można uważać za pewne uogólnienie hipotezy $\ell = \kappa z$.

¹Można też pokazać, że formuła

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}$$

wynika z (3.3.5) i definicji drogi mieszania Prandtla:

$$\ell \propto \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{dU}{dz} \right)^{-2}$$

jeżeli przyjąć stałość τ/ρ w warstwie przyściennej.

Przedstawione w rozdziale 3 modele sprowadzać się będą w tych warunkach do wspólnej postaci, określonej równaniami (3.1.8):

$$\overline{uw} = - A_1 \ell q \frac{dU}{dz} \quad (D-3)$$

oraz (3.1.6):

$$\overline{uw} \frac{dU}{dz} = - \frac{q^3}{B_1 \ell} \quad (D-4)$$

tzn.

$$\frac{dU}{dz} = \frac{q}{\sqrt{A_1 B_1} \ell} \quad (D-5)$$

Podstawiając do powyższego równania związek (D-1) oraz hipotezę $\ell = \kappa z$ względnie hipotezę von Kármána, otrzymamy identyczną postać związku energii turbulencji $q^2/2$ z prędkością dynamiczną u_* dla obu hipotez.





R.
4521