





B.15 356

350303



512.563:513.882:043

Cecylia Lapińska - Różalska

WŁASNOŚCI PEWNYCH CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH
SYSTEMÓW ALGEBRAICZNYCH Z ORTOUZUPEŁNIENIEM

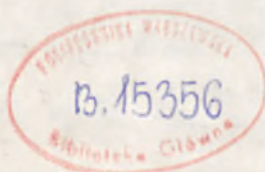
Praca doktorska wykonana
w Instytucie Matematyki
Politechniki Warszawskiej

Promotor: doc. dr hab. M.J. Mączyński

Warszawa 1975/76

Geografia i historia - Warszawa

WYKONANO PRACĘ WYKONAWCZĄ
WYKONANO PRACĘ WYKONAWCZĄ



Praca doktorska wykonana
w Instytucie Matematyki
Politechniki Warszawskiej

Pracownia: 400. dr hab. M. J. Męczyński

Wydrukowano 1500/15

118-7-76, ol.

S P I S T R E Ś C I

W S T Ę P	2
Rozdział I. STRUKTURA ORTOPOSETÓW BOOLOWSKICH	6
1. Podstawowe definicje i własności	6
2. Przykład ortoposetu boolowskiego M i miary na M , która nie da się przedłużyć do miary na $B[M]$	11
3. Rozszerzanie miar zerojedynkowych w ortoposetach boolowskich	14
4. Algebra Boole'a zawierająca podortoposet boolowski nie będący algebrą Boole'a	17
5. Zupełne ortoposety boolowskie	19
6. Centrum ortoposetu boolowskiego	21
7. Podortoposety ortoposetu boolowskiego	24
8. Ortoideały	29
9. Boolowskie struktury logiczne	32
10. Wolne rozszerzenie ortoposetu boolowskiego ...	37
Rozdział II. AMALGAMACJA m -ZUPEŁNYCH ALGEBR BOOLE'A ..	43
1. Wprowadzenie	43
2. Wolne produkty z m -amalgamacją	44
3. Pewne twierdzenia o rozszerzaniu m -homomorfizmów	49
Rozdział III. AMALGAMACJA ALGEBR POSTA	53
1. Podstawowe pojęcia	53
2. Własność amalgamacji w klasie m -algebr Posta rzędu n	57
3. Amalgamacja w klasie wszystkich algebr Posta .	60
B I B L I O G R A F I A	63

W S T Ę P

Zbiory częściowo uporządkowane z ortouzupełnieniem są systemami algebraicznymi, których własności wyrażają się w terminach relacji częściowego porządku oraz odwzorowania $a \mapsto a'$, które jest uzupełnieniem, tzn. $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$. Są to bardzo ogólne systemy algebraiczne, które obejmują zarówno algebry Boole'a jak i tzw. logiki kwantowe, których szczególnym przypadkiem jest krata podprzestrzeni domkniętych przestrzeni Hilberta. Badając własności tych systemów można stosować zarówno metody teorii algebr Boole'a jak również metody stosowane w analizie funkcjonalnej i w teorii przestrzeni Hilberta. Okazuje się, że teoria zbiorów częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem bez żadnych dodatkowych założeń jest zbyt ogólna, aby uzyskać istotne wyniki, jak np. twierdzenie o reprezentacji. W badaniach, które mają na celu zastosowania w mechanice kwantowej, naturalnym narzędziem jest teoria przestrzeni Hilberta i dlatego prace dotyczące teorii logik kwantowych z reguły zajmują się pewnymi aspektami tej teorii. Przyjmowane są wtedy dodatkowe aksjomaty, których celem jest upodobnienie zbioru częściowo uporządkowanego z ortouzupełnieniem do kraty podprzestrzeni domkniętych przestrzeni Hilberta. Ta strona teorii zbiorów częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem jest bardzo dobrze rozwinięta.

Metody teorii algebr Boole'a są szczególnie dogodne do rozwinięcia teorii pewnej szczególnej klasy zbiorów częściowo

uporządkowanych z ortouzupełnieniem, mianowicie tzw. ortoposetów boolowskich, których dodatkową własnością jest równoważność: $a \leq b' \iff a \wedge b = 0$. Ortoposety boolowskie są na tyle bliskie algebróm Boole'a, że można o nich udowodnić wiele twierdzeń analogicznych do twierdzeń o algebrach Boole'a. Niektóre aspekty tej teorii, np. twierdzenie o reprezentacji dla tych ortoposetów, zostały rozważone w pracach J. Klukowskiego. Celem niniejszej pracy jest dalsze rozwinięcie teorii ortoposetów boolowskich, w szczególności zbadanie ich struktury, własności ideałów i filtrów oraz miar na tych zbiorach. W badaniach zostały wykorzystane metody teorii algebr Boole'a.

Zbiory częściowo uporządkowane z ortouzupełnieniem można nie tylko uważać na uogólnienie algebr Boole'a, ale również interpretować je jako zbudowane z algebr Boole'a, ponieważ dla każdego $a \in P$ zbiór $\{0, a, a', 1\}$ tworzy algebrę Boole'a. Wobec tego każdy zbiór częściowo uporządkowany z ortouzupełnieniem można traktować jako pewnego rodzaju amalgamację algebr Boole'a. Możemy się zatem spodziewać, że teoria amalgamacji w algebrach Boole'a pozwoli dostrzec nowe własności zbiorów częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem. Dlatego w niniejszej pracy zajmiemy się także amalgamacją algebr Boole'a. W przypadku algebr Boole'a bez działań nieskończonych amalgamacja została w pełni zbadana w pracach Ph. Dwingera i F.M. Yaquba. Natomiast dotychczasowe wyniki dotyczące amalgamacji m -zupełnych algebr Boole'a były jedynie częściowe /uzyskiwane przy dodatkowych założeniach, np. m -dystrybutywności/.

Dopiero niedawny wynik R. La Grange'a umożliwił sformułowanie w niniejszej pracy twierdzeń o amalgamacji i o istnieniu uogólnionego m -produktu w sposób w pełni analogiczny do odpowiednich twierdzeń dla algebr Boole'a z działaniami skończonymi.

Algebry Boole'a odgrywają zatem w teorii zbiorów częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem podwójną rolę. Z jednej strony, są one szczególnym przypadkiem tych zbiorów, wobec czego teoria algebr Boole'a jest specjalnym rozdziałem teorii zbiorów częściowo uporządkowanych z ortouzupełnieniem. Z drugiej strony, każdy zbiór częściowo uporządkowany z ortouzupełnieniem jest amalgamacją algebr Boole'a, a więc własności tych algebr determinują w pewnym stopniu własności owego zbioru. Jednym z celów niniejszej pracy jest uwypuklenie i umotywowanie tego faktu.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Rozdział I jest poświęcony badaniu struktury ortoposetów boolowskich i stanowi zasadniczą część pracy. Głównymi wynikami tego rozdziału są:

- Podanie przykładu ortoposetu boolowskiego M i miary na M , która nie da się przedłużyć do miary na algebrze Boole'a $B[M]$. Wynika stąd, że jądro homomorfizmu ortoposetów boolowskich nie zawsze jest ideałem.
- Podanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, by miarę zerojedynkową na ortoposecie boolowskim P można było przedłużyć do miary na algebrze Boole'a, zawierającej ten ortoposet.
- Wykazanie, że każdy zupełny ortoposet boolowski jest algebrą Boole'a.

- Zbadanie własności centrum i podortoposetów ortoposetu boolowskiego; wprowadzenie pojęcia ortoideału i wykazanie, że każdy dwuwartościowy homomorfizm podalgebry Boole'a ortoposetu boolowskiego P daje się rozszerzyć do homomorfizmu ortoposetu P w algebrę Boole'a $\{0,1\}$.
- Wykazanie, że każdy ortoposet boolowski jest logiką generowaną przez pewną boolowską strukturę logiczną.
- Rozpatrywanie ortoposetu boolowskiego jako pewnego częściowo uporządkowanego systemu algebr Boole'a i wykazanie, że dla każdego ortoposetu boolowskiego istnieje algebra Boole'a będąca wolnym rozszerzeniem tego posetu.

W rozdziale II wynik R. La Grange'a dotyczący amalgamacji skończonej ilości m -algebr Boole'a jest uogólniony na dowolną rodzinę m -algebr Boole'a. Pozwoliło to wykazać istnienie w klasie m -algebr Boole'a wolnych produktów z amalgamacją oraz sformułować pewne twierdzenia o rozszerzeniu m -homomorfizmów, analogiczne do twierdzeń mówiących o algebrach Boole'a ze skończonymi działaniami.

Rozdział III zawiera zastosowanie wyników rozdziału II do zbadania amalgamacji w algebrach Posta. Wykazano, że klasa m -algebr Posta ustalonego rzędu n oraz klasa wszystkich m -algebr Posta mają własność amalgamacji; scharakteryzowano zupełne algebry Posta jako retrakty pewnych jednorodnych i uniwersalnych algebr Posta.

Praca niniejsza ma charakter czysto algebraiczny. Ze względu na dualność pomiędzy algebrami Boole'a i przestrzeniami Stone'a podane w niej twierdzenia mają mniej lub bardziej naturalną interpretację topologiczną. Żeby jednak nie zwiększać objętości pracy, nie formułowano odpowiedników topologicznych tych twierdzeń, tym bardziej że metody algebraiczne są bardziej naturalne.

R o z d z i a ł I

STRUKTURA ORTOPOSETÓW BOOLOWSKICH

1. PODSTAWOWE DEFINICJE I WŁASNOŚCI

Definicja 1.1. Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\leq$, zawierającym najmniejszy element 0 . Niech $a \mapsto a'$ będzie odwzorowaniem zbioru P w P . Mówimy, że $\mathcal{D} = (P, \leq, ', 0)$ jest ortoposetem boolowskim, jeśli są spełnione następujące warunki:

$$(1) \bigwedge_{a \in P} [a'' = a]$$

$$(2) \bigwedge_{a, b \in P} [a \leq b' \iff b \leq a']$$

pozwała to zdefiniować relację ortogonalności elementów a i b ($a \perp b$), mianowicie $a \perp b \iff a \leq b'$

$$(3) \bigwedge_{a, b \in P} [a \perp b \implies \bigvee_{c \in P} (c = a \vee b)], \text{ gdzie } a \vee b \text{ oznacza}$$

kres górny elementów a i b

$$(4) \bigwedge_{a, b \in P} [a \perp b \iff a \wedge b = 0]$$

$a \wedge b$ oznacza kres dolny elementów a i b .

Z warunków (1) - (4) wynika istnienie elementu największego w P , którym jest $0' = 1$, oraz, że dla dowolnego $a \in P$ mamy $a \vee a' = 1$. Mamy ponadto dla dowolnych $a, b \in P$ $[a \leq b \implies a \vee (a' \wedge b) = b]$ czyli ortoposest boolowski jest szczególnym przypadkiem ortomodularnego zbioru częściowo uporządkowanego z ortodopełnieniem. Szczególnym przypadkiem ortoposetu boolowskiego jest algebra Boole'a. Istnieją (patrz [14]) ortoposety boolowskie, które nie są algebraami Boole'a.

P. Samuel w [26] (patrz również J. Klukowski [14]) wykazał następujący lemat:

Lemat 1.2 (Samuel): Ortoposet boolowski jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa jego elementy mają kres dolny.

Ponieważ w dalszym ciągu będziemy często powoływać się na własności ortoposetów boolowskich udowodnione w pracy J. Klukowskiego [15], przytoczymy tu niektóre z nich bez dowodu.

Niech $(P, \leq, ', 0)$ będzie ortoposetem boolowskim.

1.3. Niech $a, b \in P$. Istnienie jednego z kresów $a \wedge b$, $a \wedge b'$, $a' \wedge b$, $a' \wedge b'$, $a \vee b$, $a \vee b'$, $a' \vee b$, $a' \vee b'$ pociąga za sobą istnienie każdego z nich.

1.4. Niech $a, b \in P$. Jeśli istnieje $a \vee b$, to:

$$a' \wedge (a \vee b) = a' \wedge b$$

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$$

$$a \vee b = (a \wedge b') \vee (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$$

1.5. Niech $a, b, c \in P$. Jeśli istnieją $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ oraz $a \vee b$, to $(a \vee b) \wedge c$ istnieje i zachodzi równość:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Można to uogólnić w następujący sposób:

Jeśli $(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b) \vee \dots \vee (a_n \wedge b)$ i $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ istnieją, to $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \wedge b$ istnieje i zachodzi równość:

$$(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \wedge b = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b) \vee \dots \vee (a_n \wedge b)$$

Analogicznie można sformułować dualne prawo rozdzielności.

1.6. Dysjunktywność ortoposetu boolowskiego:

Dla dowolnych $a, b \in P$ jeżeli nieprawda, że $a \leq b$, to istnieje $c \in P$, $c \neq 0$ takie, że $c \leq a$ oraz $c \wedge b = 0$.

Definicja 1.7. Niech $(P_1, \leq, ', 0)$ i $(P_2, \leq, ', 0)$ będą ortoposetami boolowskimi. Odwzorowanie $h : P_1 \longrightarrow P_2$ nazywamy homomorfizmem P_1 w P_2 , jeśli spełnia następujące warunki:

- (i) dla każdego $a \in P_1$ $h(a') = h(a)'$
- (ii) dla dowolnych $a, b \in P_1$, jeśli $a \wedge b = 0$, to $h(a) \vee h(b)$ istnieje i $h(a \vee b) = h(a) \wedge h(b)$

Homomorfizm h różnowartościowy nazywamy monomorfizmem.

Podamy bez dowodu kilka prostych własności homomorfizmu:

- 1) Jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n \in P_1$ i $a_i \wedge a_j = 0$ ($a_i \perp a_j$) dla $i \neq j$, to istnieje $h(a_1) \vee h(a_2) \vee \dots \vee h(a_n)$ i $h(a_1 \vee \dots \vee a_n) = h(a_1) \vee \dots \vee h(a_n)$
- 2) $h(1) = 1$, $h(0) = 0$
- 3) Jeśli istnieje $a \vee b$, to istnieje $h(a) \vee h(b)$ oraz $h(a) \wedge h(b)$ i zachodzą równości:

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

W szczególności jeśli $a \perp b$, to $h(a) \perp h(b)$.

- 4) Jeśli $a \leq b$, to $h(a) \leq h(b)$.

Przyjmijmy teraz za C.M. Barrosem [2] następującą definicję:

Definicja 1.8. Niech $P = (P, \leq, ', 0)$ będzie ortoposetem boolowskim. Zbiór $J \subset P$, $J \neq \emptyset$ nazywamy filtrem, jeżeli dla każdego skończonego podzbioru $F \subset J$ mamy $(F_-)_+ \subset J$, gdzie dla dowolnego $A \subset P$

$$A_- = \left\{ x \in P : \bigwedge_{a \in A} x \leq a \right\} \quad \text{oraz} \quad A_+ = \left\{ x \in P : \bigwedge_{a \in A} a \leq x \right\}.$$

Pojęcie ideału jest dualne do pojęcia filtru. Są to uogólnienia pojęć ideału i filtru w kracie lub algebrze Boole'a, gdyż widać, że jeśli J jest filtrem, to dla dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_n \in J$ jeśli $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ istnieje to należy do J , a także jeśli $a \in J$, $a \leq b$, to $b \in J$. Analogicznie jak dla algebr Boole'a wprowadza się pojęcie filtru (ideału) maksymalnego.

Z tw. 6 pracy [2] wynika, że:

1.9. Filtr J ortoposetu P jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in P$, albo $a \in J$, albo $a' \in J$.

Twierdzenie 1.10. Jeżeli J jest filtrem maksymalnym w P , to

$$h(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a \in J \\ 0 & \text{--- } a \notin J \end{cases}$$

jest homomorfizmem ortoposetu boolowskiego P w dwuelementową algebrę Boole'a $\{0, 1\}$.

Dowód oczywisty przez sprowadzenie warunków w def. 1.7. homomorfizmu.

Twierdzenie odwrotne do tw. 1.10, co wykaże podany dalej w pracy przykład, nie jest prawdziwe, tzn., dla homomorfizmu ortoposetów boolowskich $h : P \rightarrow \{0, 1\}$ zbiór $\{x \in P : h(x) = 1\}$ nie zawsze jest filtrem.

A więc wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy filtrami maksymalnymi i homomorfizmami dwuwartościowymi algebry Boole'a nie przenosi się dla dowolnego ortoposetu boolowskiego.

Definicja 1.11. Miara na ortoposecie boolowskim $(P, \leq, ', 0)$ nazywany odwzorowanie $m : P \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ zbioru P w przedział $\langle 0, 1 \rangle$ takie, że:

$$1) \quad m(1) = 1$$

$$4i) \quad \text{dla } a, b \in P \text{ jeśli } a \perp b, \text{ to } m(a \vee b) = m(a) + m(b)$$

Podstawowe własności miary na ortoposecie boolowskim P :

$$1) \quad m(0) = 0$$

$$2) \quad m(a') = 1 - m(a)$$

$$3) \quad \text{Jeśli } a \leq b, \text{ to } m(a) \leq m(b).$$

$$4) \quad \text{Dla dowolnego ciągu } a_1, \dots, a_n \in P \text{ takiego, że } a_i \perp a_j \text{ i } i \neq j \\ m(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) = m(a_1) + m(a_2) + \dots + m(a_n);$$

Własność tę dowodzi się w prosty sposób indukcyjnie wykorzystując fakt, że jeśli $a \perp a_1$, $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ istnieje, to $a \perp a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$.

$$5) \quad \text{Jeśli } a \vee b \text{ istnieje, to}$$

$$m(a \vee b) = m(a) + m(b) - m(a \wedge b) \leq m(a) + m(b)$$

Dowód:

Wykorzystując wcześniej wypisane własności ortoposetu boolowskiego mamy:

$$a \vee b = a \vee (b \wedge a') \text{ oraz } b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b).$$

Ponieważ $a \perp b \wedge a'$ i $a \wedge b \perp a' \wedge b$ dostajemy:

$$m(a \vee b) = m[a \vee (b \wedge a')] =$$

$$= m(a) + m(b \wedge a') = m(a) + m(b) - m(a \wedge b)$$

Własności 5) nie da się uogólnić dla dowolnej skończonej sumy $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \in P$, tzn. nie zawsze zachodzi warunek:

$$iii) \quad \text{jeśli } a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \text{ istnieje, to}$$

$$m(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \leq m(a_1) + \dots + m(a_n)$$

Definicja 1.12. Jeśli miara na ortoposecie boolowskim P spełnia dodatkowo warunek iii), to nazywamy ją miarą subaddytywną.

Każda miara określona na algebrze Boole'a jest subaddytywna.

1.13. J. Klukowski w pracy [15] udowodnił^{1/}, że dla każdego ortoposetu boolowskiego P istnieje algebra Boole'a B i homomorfizm $i : P \rightarrow B$ taki, że B jest generowane przez $i(P)$ /w dalszym ciągu będziemy utożsamiać $i(P)$ z P , algebrę B oznaczać przez $B[P]$; przy tym każdy filtr w P jest postaci $P \cap \nabla$, gdzie ∇ jest filtrem w $B[P]$ lub dualnie: każdy ideał w P jest w postaci $P \cap \Delta$, gdzie Δ jest ideałem w $B[P]$ / $\cap$ oznacza iloczyn teoriomnogościowy/.

Zachodzi pytanie, czy jeśli mamy określoną na ortoposecie boolowskim P miarę m , lub homomorfizm $h : P \rightarrow A$ w algebrę Boole'a A , to istnieje na $B[P]$ miara m^* , że $m^*|_P = m$ oraz odpowiednio homomorfizm $h^* : B[P] \rightarrow A$, że $h^*|_P = h$. Jeśli uwzględnimy powyżej cytowane twierdzenie oraz znany z teorii algebr Boole'a fakt, że jądro dwuwartościowego homomorfizmu algebry Boole'a jest ideałem maksymalnym, to wobec 1.10 badanie wyżej postawionego zagadnienia w przypadku homomorfizmu dwuwartościowego /również miary zerojedynkowej/ $h : P \rightarrow \{0,1\}$ sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy zbiór $\{x \in P : h(x) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym /lub dualnie $\{x \in P : h(x) = 1\}$ filtrem maksymalnym/. Podany dalej przykład wskazuje, że nie zawsze to zachodzi.

2. PRZYKŁAD ORTOPOSETU BOOŁOWSKIEGO M I MIARY NA M , KTÓRA NIE DA SIĘ PRZEDŁUŻYĆ DO MIARY NA $B[M]$

Wiadomo /patrz [27] str.4/, że jeśli X jest niepustą przestrzenią topologiczną, wtedy rodzina C regularnie domknię-

^{1/} Fakt ten wynika również z pracy R. Sikorskiego "On dense subsets of Boolean algebras" Coll. Math. 10/1963/ str.189-192.

tych podzbiorów tej przestrzeni jest algebrą Boole'a z działaniami $\cup_*$, $\cap_*$, $'$ określonymi następująco: $a \cup_* b = a \cup b$, $a \cap_* b = \text{Int } a \cap b$, $a' = \overline{a}$, gdzie $\cup$, $\cap$, $-$ są to działania trybiomnogościowe, zaś $\overline{a}$ oznacza topologiczne domknięcie zbioru a .

2.1. Rozważmy jako X na płaszczyźnie koło domknięte. Niech B' będzie rodziną złożoną ze zbioru pustego i skończonych sum domkniętych wycinków kołowych. Mamy $B' \subset C$. Łatwo pokazać, że $(B', \vee, \wedge, ', \emptyset, X)$ jest algebrą Boole'a, gdzie

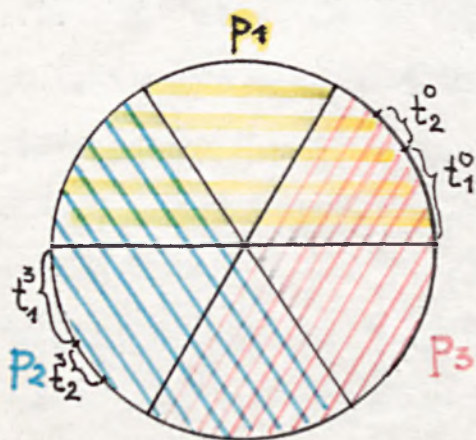
$$a \vee b = a \cup b$$

$$a \wedge b = \overline{\text{Int } a \cap b}$$

$$a' = \overline{a}$$

Umieścimy rozważane koło w biegunowym układzie współrzędnych

$O + \varphi$ tak, by środek koła znajdował się w początku układu. Niech $\varphi_1 < \varphi_2$; przez $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ będziemy oznaczać domknięty wycinek kołowy zawarty między półprostymi: $\varphi = \varphi_1$ oraz $\varphi = \varphi_2$.



Niech teraz $p_1 = \langle 0, \pi \rangle$

$$p_2 = \langle \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \rangle$$

$$p_3 = \langle \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \rangle$$

$$\text{Oznaczmy } t_k^1 = \left\langle \frac{\pi}{3} \frac{(1+1)2^{k-1}-1}{2^{k-1}}, \frac{\pi}{3} \frac{(1+1)2^k-1}{2^k} \right\rangle$$

$$\text{Niech } T = \left\{ t_k^1 : i=0,1,\dots,5; k=1,2,\dots \right\}$$

Rozważmy dla $i = 1, 2, 3$ zbiory $C_i = \{p_i\} \cup T$ oraz algebry Boole'a A_i generowane w B' przez C_i . Z postaci elementów wynika, że $p_i \notin A_j$ dla $i \neq j$. Iloczyn algebr $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ jest algebrą Boole'a generowaną przez T .

Niech teraz $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ oraz dla $a, b \in M$ $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$,
 $0 = \emptyset$. Zauważmy, że jeśli $a \in M$, to istnieje i takie, że
 $a \in A_i$, zatem $a' \in A_i$, a więc $a' \in M$.

Wykażemy, że $(M, \leq, ', 0)$ jest ortoposetem boolowskim.

Należy sprowadzić, że M spełnia warunki (1) - (4) w definicji
 1.1. Spełnienie warunków (1) i (2) wynika natychmiast z faktu,
 że $'$ jest uzupełnieniem w algebrze Boole'a B' . Zauważmy te-
 raz, że kres dolny elementów a i b w M jest równy zero wtedy
 i tylko wtedy, gdy należą one do tej samej algebry A_i (dla
 pewnego $1 \leq i \leq 3$) oraz $a \wedge b = 0$ w A_i , czyli wtedy i tylko
 wtedy, gdy $a \wedge b = 0$ w algebrze B' . Wynika stąd, że $a \wedge b = 0$
 w M wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq b'$, a więc warunek (4) jest
 spełniony. Podobnie dla pokazania, że zachodzi warunek (3)
 mamy: jeżeli $a \wedge b = 0$ w M , to $a, b \in A_i$ dla pewnego $1 \leq i \leq 3$,
 a więc istnieje $c \in A_i$ oraz $c = a \vee b$. Oczywiście $c \in M$.
 M jest ortoposetem boolowskim.

2.2. Niech teraz dla $i = 1, 2, 3$ $m_i: C_i \rightarrow \{0, 1\}$ będzie
 funkcją taką, że dla $t \in T$ $m_i(t) = 0$ oraz $m_i(p_i) = 1$.

W naturalny sposób rozszerzymy ją kładąc dla $t \in T$ $m_i(t') = 1$
 oraz $m_i(p_i') = 0$.

Niech teraz $a_1, a_2, \dots, a_n$ będzie dowolnym ciągiem takim, że
 dla $k = 1, 2, \dots, n$ $a_k \in C_i$ lub $a_k' \in C_i$. Jeśli mamy
 $m_i(a_1) \cdot m_i(a_2) \cdot \dots \cdot m_i(a_n) \neq 0$, to $m_i(a_k) = 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$
 czyli dla każdego $1 \leq k \leq n$ a_k jest uzupełnieniem pewnego $t \in T$
 lub jest równe p_i , a więc $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$.

Korzystając z tw. o przedłużeniu do homomorfizmu (patrz
 Sikorski [28]) można zatem funkcję $m_i: C_i \rightarrow \{0, 1\}$ przedłużyć
 do miary zerojedynkowej $m_i: A_i \rightarrow \{0, 1\}$ na algebrze A_i .

Zauważmy, że jeśli $a \in M$ oraz $a \in A_k$ i $a \in A_1$, $k \neq 1$, to $m_k(a) = m_1(a)$. Możemy więc określić $m: M \rightarrow \{0, 1\}$ w następujący sposób:

dla $a \in M$, $m(a) = m_1(a)$ jeśli $a \in A_1$.

Pokażemy, że $m: M \rightarrow \{0, 1\}$ jest miarą na ortoposecie boolowskim M . Jest oczywiste, że warunek i) w def. 1.11 jest spełniony. Niech teraz $a, b \in M$ i $a \perp b$. Zatem $a \wedge b = 0$, a więc istnieje $1 \leq i \leq 3$ oraz $a, b \in A_i$, $a \vee b \in A_i$, $m(a) = m_1(a)$, $m(b) = m_1(b)$,

$$m(a \vee b) = m_1(a \vee b) = m_1(a) + m_1(b) = m(a) + m(b).$$

Drugi warunek w definicji 1.11 jest więc również spełniony i m jest miarą.

Miara ta nie da się przedłużyć do miary na algebrze Boole'a $B[M]$, gdyż: $p'_1 \vee p'_2 \vee p'_3 = 1$

i $m(p'_1 \vee p'_2 \vee p'_3) = 1$, ale $m(p'_1) + m(p'_2) + m(p'_3) = 0$ czyli m nie jest miarą subaddytywną.

Zbiór $\{x \in M: m(x) = 1\}$ nie jest więc filtrem w M .

Widać stąd, że twierdzenia o wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między filtrami maksymalnymi i miarami zerojedynkowymi nie da się uogólnić na dowolny ortoposet boolowski.

3. ROZSZERZENIE MIAR ZEROJEDYNKOWYCH (HOMOMORFIZMÓW DWUWARTOŚCIOWYCH) W ORTOPOSETACH BOOŁOWSKICH

Dla ułatwienia czytania przytoczymy tutaj znane tw. Sikorskiego o rozszerzaniu homomorfizmów (patrz [28]):

Twierdzenie 3.1 (Sikorski). Odwzorowanie $f: G \rightarrow B'$ zbioru G generatorów algebry Boole'a B w algebrę B' można przedłużyć do homomorfizmu $h: B \rightarrow B'$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varepsilon_1 A_1 \wedge \varepsilon_2 A_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n A_n = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 f(A_1) \wedge \varepsilon_2 f(A_2) \wedge \dots \wedge \varepsilon_n f(A_n) = 0$$

dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \dots, A_n \in G$ i dowolnego wyboru

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ liczb 1 i (-1) , gdzie $1 A = A$ oraz $(-1) A = A'$

Z tw. 3.1 można wywnioskować, że:

Twierdzenie 3.2. Każdy z następujących dwóch warunków jest dostateczny i konieczny na to, żeby dwuwartościową miarę $m: P \rightarrow \{0, 1\}$ na ortoposecie boolowskim P można było przedłużyć do miary na algebrze Boole'a $B[P]$:

- (i) dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$, jeśli $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$ to $m(a_1) \cdot m(a_2) \cdot \dots \cdot m(a_n) = 0$
- (ii) dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$, jeśli $m(a_1) = m(a_2) = \dots = m(a_n) = 0$ to $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \neq 1$ lub nie istnieje.

Dowód:

Wykażemy najpierw równoważność warunków (i) oraz (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$ takie, że $m(a_1) = m(a_2) = \dots = m(a_n) = 0$ oraz $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$. Wtedy $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = 0$. Ponieważ w ortoposecie boolowskim zachodzą prawa de Morgana, to $a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n' = 0$ i $m(a_1') \cdot m(a_2') \cdot \dots \cdot m(a_n') = 1$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$, $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$

i $m(a_1) \cdot m(a_2) \cdot \dots \cdot m(a_n) \neq 0$,

to $m(a_1) = m(a_2) = \dots = m(a_n) = 1$

$m(a_1') = m(a_2') = \dots = m(a_n') = 0$

oraz $a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n' = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = 0' = 1$.

Żeby zakończyć dowód wystarczy uwzględnić tw. 3.1 oraz fakt, że $B[P]$ jest generowana przez P , a P jest zamknięty ze względu na uzupełnienie.

Twierdzenie 3.3. Jeżeli miara m zerojedynkowa na ortoposecie boolowskim P jest subaddytywna, to daje się rozszerzyć do miary na algebrze Boole'a $B[P]$.

Dowód: Ponieważ m jest subaddytywna, więc dla dowolnego $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$ jeśli istnieje $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, to

$$m(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \leq m(a_1) + m(a_2) + \dots + m(a_n)$$

Zatem jeśli $m(a_1) = m(a_2) = \dots = m(a_n) = 0$, to

$$m(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \leq 0 \quad \text{czyli} \quad a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \neq 1.$$

Spełniony jest więc warunek (ii) z tw. 3.2, co kończy dowód.

Zachodzi pytanie, jakie warunki powinien spełniać ortoposet P , by każda miara na P była subaddytywna.

Twierdzenie 3.4. Jeżeli ortoposet boolowski P ma tę własność, że dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$ z istnienia kresu $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ wynika istnienie takiego podciągu $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ liczb $1, 2, \dots, n$, że $a_{t_1} \vee a_{t_2} \vee \dots \vee a_{t_{n-1}}$ istnieje, to każda miara na P jest subaddytywna.

Prosty dowód indukcyjny opuszczamy.

Wniosek 3.5. Jeżeli ortoposet boolowski P ma własność wymienioną w tw. 3.4, to każda miara zerojedynkowa na P da się przedłużyć do miary zerojedynkowej na algebrze Boole'a $B[P]$.

Oczywiście własność z tw. 3.4 jest spełniona w każdej algebrze Boole'a. Przykładem ortoposetu boolowskiego spełniającego ten warunek i nie będącego algebrą Boole'a jest ortoposet L opisany w pracy J. Klukowskiego [14].

4. ALGEBRA BOOLE'A ZAWIERAJĄCA PODORTOPOSET BOOLEWSKI NIE BĄDĄCY ALGEBRĄ BOOLE'A

Uogólnieniem rozważań dotyczących przykładu 2.1 jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1. Algebra Boole'a B zawiera podortoposet boolowski nie będący algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $p_1, p_2 \in B$ takie, że każdy z ideałów głównych:

$$J_0 = (p_1 \wedge p_2], \quad J_1 = (p_1' \wedge p_2], \quad J_2 = (p_1 \wedge p_2'), \\ J_3 = (p_1' \wedge p_2')$$

jest nieskończony.

Dowód: Najpierw dowiedzimy konieczności warunku. Niech $P \subset B$, P ortoposet boolowski (z działaniami jak w B) nie będący algebrą Boole'a. Istnieją zatem $p_1 \in P$ i $p_2 \in P$, że $p_1 \wedge p_2$ nie istnieje w P . Z własności 1.3 wynika, że w P nie istnieją również $p_1 \wedge p_2'$, $p_1' \wedge p_2$, $p_2' \wedge p_1'$ czyli w B te wszystkie kresy są różne od zera, a więc zbiór $\{p_1, p_2\}$ jest niezależny czyli B zawiera podalgebrę izomorficzną z algebrą wolną o dwóch generatorach.

Wykażemy, że każdy z ideałów J_k , $k = 0, 1, 2, 3$ jest nieskończony. Niech $p_1 \wedge p_2$ nie istnieje i J_0 skończony. Zatem skończony jest zbiór $X = \{x \in P : x \leq p_1 \text{ i } x \leq p_2\}$. Nie może być $x_1 \wedge x_2 = 0$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, bo wówczas istniałby kres górny elementów należących do X , który byłby kresem dolnym p_1 i p_2 . Nie może również istnieć $x_1 \wedge x_2 \neq 0$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, bo wtedy również sumę elementów z X dałoby się przedstawić jako sumę elementów parami rozłącznych. Zatem w X muszą istnieć takie x_1 i x_2 , że $x_1 \wedge x_2$ nie istnieje w P . Rozważając następnie zbiór

$Y = \{y \in P : y \leq x_1 \text{ i } y \leq x_2\}$ i powtarzając rozumowanie wielokrotnie dochodzimy do sprzeczności z tym, że J_0 jest skończony. Podobnie pokazujemy, że każdy z pozostałych ideałów jest nieskończony.

Dowodziemy teraz dostateczność warunku. Ponieważ J_0 jest nieskończony, zatem istnieje $x \in J_0$ takie, że $x \neq 0$, $x \neq p_1 \wedge p_2$ oraz ideał główny $(x' \wedge p_1 \wedge p_2]$ zawiera nieskończenie wiele elementów. Niech $t_1^0 = x$. Jeśli mamy określony ciąg parami rozłącznych elementów $t_1^0, t_2^0, \dots, t_{n-1}^0 \in J_0$ taki, że dla $b = (\bigvee_{1 \leq k \leq n-1} t_k^0)' \wedge p_1 \wedge p_2$, $(b]$ zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $c \neq 0$ $c < b$ co najmniej jeden z ideałów $(c]$ oraz $(c' \wedge b]$ ma nieskończenie wiele elementów. Jeśli $(c]$ jest nieskończonym zbiorem, to $t_n^0 = c' \wedge b$, jeśli $(c' \wedge b]$ jest nieskończony, to $t_n^0 = c$ (jeśli oba nieskończone, to t_n^0 równa się krótemukolwiek z tych elementów).

W podobny sposób również w każdym z J_i ($i = 1, 2, 3$) możemy określić ciąg parami rozłącznych elementów t_k^i , $k = 1, 2, \dots$. Określmy teraz $T = \{t_k^i : i = 0, 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots\}$.

Niech A_1 będzie algebra Boole'a generowaną w B przez zbiór $\{p_1\} \cup T$, A_2 generowana przez $\{p_2\} \cup T$. Teoriomno-gościowa suma $P = A_1 \cup A_2$ z działaniami jak w B jest ortoposetem boolowskim, co można dowieść podobnie jak w przykładzie 2.1.

Z określenia algebr A_1 i A_2 wynika, że $p_1 \wedge p_2$ nie należy do P (ani pozostałe kresy $p_1' \wedge p_2$, $p_1 \wedge p_2'$, $p_1' \wedge p_2'$ oraz ich uzupełnienia).

Uwaga 1: na ogół algebra Boole'a B dla tak skonstruowanego ortoposetu P nie jest algebra $B[P]$.

5. ZUPEŁNE ORTOPOSETY BOOLOWSKIE

Definicja 5.1. Mówimy, że ortoposet $(P, \leq, ')$ jest m -zupełny (gdzie m jest nieskończoną liczbą kardynalną), jeśli dla każdego indeksowanego zbioru $\{a_t: t \in T, \overline{T} \leq m\}$ parami ortogonalnych elementów P (tzn. $a_{t_1} \perp a_{t_2}$ dla $t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$) istnieje kres górny $\bigvee_{t \in T} a_t$.
Ortoposet $(P, \leq, ')$ jest zupełny, jeśli jest m -zupełny dla dowolnej liczby kardynalnej m .

J. Klukowski w pracy [14] pokazał, że każdy atomowy i zupełny ortoposet boolowski jest algebrą Boole'a. W szczególności wynika stąd, że każdy skończony ortoposet boolowski jest algebrą Boole'a. Pokażemy, że założenie o atomowości ortoposetu boolowskiego nie jest konieczne. Mianowicie:

Twierdzenie 5.2. Każdy zupełny ortoposet boolowski jest zupełną algebrą Boole'a (twierdzenie to zostało opublikowane w pracy [17]).

Dowód: Niech $(P, \leq, ')$ będzie zupełnym ortoposetem boolowskim tzn. istnieje w P kres górny dowolnego zbioru elementów parami rozłącznych. Powołując się na lemat 1.2 wystarczy pokazać, że dla dowolnych $p_1, p_2 \in P$ istnieje kres dolny $p_1 \wedge p_2$.

Niech $p_1, p_2 \in P$ oraz $X = \{x \in P: x \leq p_1 \text{ i } x \leq p_2\}$.

Określamy zbiór Y ($Y \subset 2^X$) następująco:

$A \in Y \iff (A \subset X \text{ i dla każd. } x, y \in A, \text{ jeśli } x \neq y \text{ to } x \wedge y = 0)$.

Określimy w Y częściowy porządek jako teoriomnogościową inkluzję. Jeżeli C jest łańcuchem elementów w Y , to suma teoriomnogościowa elementów tego łańcucha należy do Y

(jest zbiorem parami rozłącznych elementów należących do X).
Zatem każdy łańcuch w $(Y, \leq)$ ma ograniczenie górne, a więc z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie w Y elementów maksymalnych.

Niech $M \in Y$ będzie elementem maksymalnym ($M \leq X \leq P$).

Pokażemy, że w ortoposecie boolowskim P kres górny elementów należących do M jest równy kresowi górnemu elementów należących do zbioru X .

Przede wszystkim $\bigvee_{a \in M} a$ istnieje w P , bo P jest zupełny i M jest zbiorem elementów parami ortogonalnych.

Niech $\bigvee_{a \in M} a = p$. Oczywiście $p \in X$, bo dla każdego $a \in M$, $a \leq p_1$ i $a \leq p_2$, zatem $p \leq p_1$ i $p \leq p_2$.

Wykorzystując teraz własność dysjunktywności 1.6 pokażemy, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq p$.

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. $\sim(x \leq p)$. Istnieje zatem $y \in P$, $y \neq 0$, $y \wedge p = 0$ i $y \leq x$ czyli $y \in X$.

Ponieważ $y \wedge p = 0$, zatem dla każdego $a \in M$, $y \wedge a = 0$, a więc $y \notin M$ i zbiór $M \cup \{y\} \in Y$. Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że M jest elementem maksymalnym w Y .

Mamy zatem, że p ogranicza z góry zbiór X ; jest to najmniejsze ograniczenie górne, gdyż $p \in X$.

A więc p jest kresem górnym elementów należących do X czyli jest kresem dolnym elementów p_1 i p_2 .

Udowodniliśmy w ten sposób, że zupełny ortoposet boolowski P jest algebrą Boole'a.

Ponieważ P ma tę własność, że istnieje kres górny dowolnego zbioru elementów parami rozłącznych, więc jest zupełną algebrą Boole'a.

Wniosek 5.2. Jeżeli 6-zupełny ortoposet boolowski ma tę własność, że każdy zbiór elementów parami ortogonalnych jest co najwyżej przeliczalny, to jest on zupełną algebrą Boole'a.

Definicja 5.3. Miarę $m : P \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ określoną na ortoposecie boolowskim P nazywamy 6-miarą, jeśli dla każdego przeliczalnego układu parami ortogonalnych elementów

$a_1, a_2, a_3, \dots$

$$m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(a_n)$$

o ile $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ istnieje.

Z udowodnionego twierdzenia 5.2 wynika następujący:

Wniosek 5.4. Jeśli na 6-ortoposecie boolowskim P można określić 6-miarę ściśle dodatnią (tzn. $m(a) = 0 \iff a = 0$), to ortoposet ten jest zupełną algebrą Boole'a.

Dowód: Przypuśćmy, że X jest zbiorem parami rozłącznych elementów z P . Liczba elementów takich, że mają miarę co najmniej $1/n$ wynosi co najwyżej n . Zatem X jest przeliczalny. Wynika stąd, że 6-ortoposet boolowski P jest zupełny, a więc jest zupełną algebrą Boole'a.

6. CENTRUM ORTOPOSETU BOOLOWSKIEGO

Badając możliwość przedstawienia posetu zawierającego element największy i najmniejszy jako produktu kartezjańskiego prostszych posetów G. Birkhoff (patrz [3] str. 66) wprowadził następujące pojęcie centrum:

Definicja 6.1. Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym z 0 i 1 . Centrum posetu P jest to zbiór tych elementów $e \in P$, że $P = X \times Y$, gdzie X, Y posety z 0 i 1 oraz $e = (1, 0)$.

Udowodnił on również następujące dwa twierdzenia ważne dla badania struktury posetu:

Twierdzenie 6.2 (Birkhoff) Centrum dowolnego posetu z 0 i 1 jest kratą boolowską (algebrą Boole'a) ze względu na porządek w tym posecie.

Twierdzenie 6.3 (Birkhoff) Jeżeli $e_1, e_2, \dots, e_n$ są parami rozłącznymi elementami należącymi do centrum posetu P takimi, że $e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n = 1$, to

$$P = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \quad \text{gdzie} \quad E_i = [0, e_i] = \{x \in P: x \leq e_i\},$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Wykażemy teraz, że zachodzi następujący:

Lemat 6.4. Dla dowolnego ortoposetu boolowskiego P następujące dwa warunki są równoważne:

- 1° dla każdego $z \in P$ $z \wedge e$ istnieje ($z \vee e$ istnieje)
- 2° $P = X \times Y$ gdzie X, Y posety z 0 i 1 oraz $e = (1, 0)$

Dowód:

Wykażemy najpierw, że z 2° wynika 1°. Zachodzi to dla dowolnego posetu, gdyż jeśli $P = X \times Y$ i $e = (1, 0)$, to dla $z \in P$, $z = (x, y)$, gdzie $x \in X$, $y \in Y$ mamy:

$$z \wedge e = (x, y) \wedge (1, 0) = (x \wedge 1, y \wedge 0) = (x, 0)$$

$$z \vee e = (x, y) \vee (1, 0) = (x \vee 1, y \vee 0) = (1, y).$$

Pokażemy teraz, że z 1° wynika 2°.

$x \wedge e, x \vee e$ istnieją z założenia dla dowolnego $x \in P$.

Wykażemy, że odwzorowanie h określone przez $x \mapsto (x \wedge e, x \vee e)$ jest izomorfizmem P oraz $E \times E^*$, gdzie $E = [0, e]$, $E^* = [e, 1]$

a) h zachowuje porządek, tzn. jeśli $x \leq y$, to $h(x) \leq h(y)$,
oczywiste, bo jeśli $x \leq y$, to $x \wedge e \leq y \wedge e$ oraz
 $x \vee e \leq y \vee e$.

b) h jest "na"

Jeśli $z \in E \times E^*$, to $z = (x, y)$, gdzie $x \leq e$ i $y \geq e$
(czyli $x \leq y$). Istnieje $p \in P$, że $z = h(p)$, mianowicie
 $p = x \vee (e' \wedge y)$, bo $e' \wedge y$ istnieje z założenia, x oraz
 $e' \wedge y$ są rozłączne,

$$\begin{aligned} p \mapsto & ([x \vee (e' \wedge y)] \wedge e, x \vee (e' \wedge y) \vee e) = \\ & = ((x \wedge e) \vee 0, e \vee (e' \wedge y)) = (x \wedge e, e \vee y) = (x, y) \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu z własności 1.3 - 1.5.

c) h jest różnowartościowe.

Niech $f, g \in P$, $f \mapsto (f \wedge e, f \vee e)$, $g \mapsto (g \wedge e, g \vee e)$.

Pokażemy, że jeśli $h(f) = h(g)$, to $f = g$.

$$\begin{aligned} h(f) = h(g) \implies & f \wedge e = g \wedge e \text{ i } f \vee e = g \vee e \\ & (f \vee e) \wedge e' = (g \vee e) \wedge e' \\ & f \wedge e' = g \wedge e' \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } f = (f \wedge e) \vee (f \wedge e') = (g \wedge e) \vee (g \wedge e') = g$$

d) h^{-1} zachowuje porządek

$$z_1 = (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) = z_2$$

$$h^{-1}(z_1) = x_1 \vee (e' \wedge y_1), \quad h^{-1}(z_2) = x_2 \vee (e' \wedge y_2)$$

Jeśli $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, to $x_1 \vee (e' \wedge y_1) \leq x_2 \vee (e' \wedge y_2)$

czyli jeśli $z_1 \leq z_2$, to $h^{-1}(z_1) \leq h^{-1}(z_2)$.

Ze spełnienia warunków a), b), c), d) wynika, że posety: P oraz $E \times E^*$ są izomorficzne.

Możemy zatem sformułować następujące:

Twierdzenie 6.5. Jeżeli P jest ortoposestem boolowskim, to $e \in P$ należy do centrum tego posetu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in P$ $x \wedge e$ istnieje (lub $x \vee e$ istnieje).

7. PODORTOPOSETY ORTOPOSETU BOŁOWSKIEGO

Definicja 7.1. Niech $(P, \leq, ')$ będzie ortoposestem.

Podzbiór $P_1 \subset P$, $P_1 \neq \emptyset$ nazywamy podortoposestem ortoposetu P , jeśli:

$$(i) \quad \bigwedge_{a \in P_1} [a' \in P_1]$$

$$(ii) \quad \bigwedge_{a, b \in P_1} [(a \perp b \Rightarrow a \vee b \in P_1)]$$

Oczywiste, że podortoposet P_1 ortoposetu P jest ortoposestem z działaniami jak w P ; część wspólna dowolnej ilości podortoposetów jest podortoposestem. Podortoposet ortoposetu boolowskiego może nie być ortoposestem boolowskim, na co wskazuje następujący przykład.

Przykład 7.2. Niech algebra Boole'a A będzie produktem boolowskim rodziny $(A_t)_{t \in T}$ podalgebr algebry A . Wiadomo (patrz [27]), że rodzina $(A_t)_{t \in T}$ jest niezależna, tzn. dla każdego skończonego ciągu różnych wskaźników

$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ $a_{t_1} \wedge a_{t_2} \wedge \dots \wedge a_{t_n} \neq 0$, gdzie a_{t_i} jest dowolnym niezerowym elementem algebry A_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Oczywiste jest, że $\bigcap_{t \in T} A_t = \{0, 1\}$. Rozważmy $P = \bigcup_{t \in T} A_t$.

Z niezależności rodziny $(A_t)_{t \in T}$ wynika, że dla $x, y \in P$ jeśli $x \leq y$, to istnieje $t_0 \in T$, że $x \in A_{t_0}$ i $y \in A_{t_0}$.

Określmy w P porządek i uzupełnienie tak samo jak w A .
 P jest podortoposetem algebry A (traktowanej jako ortoposet boolowski), gdyż:

$$(i) \bigwedge_{a \in P} [a' \in P]$$

(ii) weźmy dowolne $a, b \in P$; ponieważ $a \perp b \iff a \leq b'$ więc jeśli $a \perp b$, to a i b' muszą należeć do tej samej algebry A_{t_0} , do której musi należeć również b , a więc także $a \vee b \in A_{t_0}$.

Oczywiście, że P jest ortoposetem modularnym, bo dla $a, b \in P$ jeśli $a \leq b$, to $b = a \vee (b \wedge a')$. Nie jest jednak ortoposetem boolowskim, bo dla $a, b \in P$ takich, że $a \in A_{t_1}$, $b \in A_{t_2}$ i $t_1 \neq t_2$, kres dolny a i b w P jest równy zero, natomiast nie są one ortogonalne, bo nie zachodzi ani $a \leq b'$ ani $b \leq a'$ (elementy te są z różnych algebr).

Niech $(P, \leq, ', 0)$ będzie ortoposetem boolowskim.

Definicja 7.3. Podortoposet P_1 ortoposetu boolowskiego P nazywamy podortoposetem boolowskim, jeżeli spełniony jest warunek:

$$(iii) \bigwedge_{a, b \in P_1} [a \wedge_{P_1} b = 0 \iff a \wedge_P b = 0]$$

Jest jasne, że podortoposet boolowski ortoposetu boolowskiego jest ortoposetem boolowskim; podobnie część wspólna tych podortoposetów.

Definicja 7.4. Niech $E \subset P$. Część wspólna podortoposetów boolowskich zawierających zbiór E jest najmniejszym podortoposetem boolowskim zawierającym E . Ten podortoposet nazywamy podortoposetem boolowskim generowanym przez zbiór E .

Definicja 7.5. Jeżeli podortoposet boolowski ortoposetu P jest algebrą Boole'a, to nazywamy go podalgebrą Boole'a ortoposetu P .

Lemat 7.6. Niech $E \subset P$ będzie zbiorem elementów parami ortogonalnych (rozłącznych). Istnieje podalgebra Boole'a A ~~pod~~ortoposetu P taka, że $E \subset A$.

Dowód: Zauważmy najpierw, że na podstawie def. 1.1 istnieją w P wszystkie skończone sumy elementów zbioru E . Rozważmy teraz elementy postaci $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n e_{ik}$, gdzie $e_{ik} \in E$ lub $e'_{ik} \in E$. Jeżeli w iloczynie $\bigwedge_{k=1}^n e_{ik}$ są dwa różne czynniki należące do E , to iloczyn ten jest równy zero. Wystarczy więc rozpatrywać iloczyny $e'_{i1} \wedge e'_{i2} \wedge \dots \wedge e'_{in}$ lub $e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \dots \wedge e_{in}$, gdzie $e_{ik} \in E$ i są różne. Pierwszy z tych iloczynów istnieje w P , bo:

$$e'_{i1} \wedge e'_{i2} \wedge \dots \wedge e'_{in} = (e_{i1} \vee e_{i2} \vee \dots \vee e_{in})'$$

Drugi iloczyn istnieje również, gdyż

$$e_{i1} \wedge (e'_{i2} \vee \dots \vee e'_{in}) = e_{i1} \wedge (e_{i2} \vee \dots \vee e_{in})' = e_{i1},$$

$$\text{bo } e_{i1} \perp e_{i2} \vee \dots \vee e_{in}$$

A więc $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n e_{ik}$ jest kresem górnym skończonego zbioru, do którego należą elementy zbioru E lub uzupełnienia skończonych sum tych elementów; kres ten zawsze istnieje w P . Zatem P zawiera algebrę Boole'a generowaną przez E .

Lemat 7.7. Niech $C \subset P$ będzie łańcuchem, tzn. dla dowolnych $c_1, c_2 \in C$ $c_1 \leq c_2$ lub $c_2 \leq c_1$. ~~Pod~~ortoposet boolowski P zawiera podalgebrę Boole'a generowaną przez C .

Dowód: Rozważmy kresy postaci $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n \varepsilon_{ik} c_{ik}$ gdzie $c_{ik} \in C$ oraz $\varepsilon_{ik} c_{ik} = c_{ik}$ lub $\varepsilon_{ik} c_{ik} = c'_{ik}$. Zbiór $\{c_{ik} \in C: 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ jest łańcuchem; niech będzie to łańcuch $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{m \cdot n}$. Dla każdego $i = 1, 2, \dots, m \cdot n - 1$ $e_i = c'_i \wedge c_{i+1}$ istnieje w P , bo $c_i \leq c_{i+1}$. Niech $e_0 = c_1$. Zbiór $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m \cdot n - 1}\}$ jest zbiorem elementów parami ortogonalnych; każdy element e_i , $1 \leq i \leq m \cdot n$, jest skończoną sumą elementów zbioru E . Wyrażenie $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n \varepsilon_{ik} c_{ik}$ daje się zatem przedstawić w postaci $\bigvee_{i=1}^p \bigwedge_{k=1}^r e_{ik}$ gdzie $e_{ik} \in E$ lub $e'_{ik} \in E$. Podobnie jak w poprzednim lemacie można wykazać, że ten kres istnieje w P . Zatem w P istnieją wszystkie kresy postaci $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n \varepsilon_{ik} c_{ik}$ gdzie $c_{ik} \in C$; zbiór tych elementów tworzy algebrę Boole'a.

Lemat 7.8. Jeżeli A, B są podalgebrami Boole'a ortoposetu boolowskiego P takimi, że $\bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} (a \wedge b)$ istnieje w P , to istnieje podalgebra Boole'a ortoposetu P zawierająca $A \cup B$.

Dowód: Rozpatrywanie wyrażeń $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{k=1}^n a_{ik}$ gdzie $a_{ki} \in A \cup B$ lub $a'_{ki} \in A \cup B$, sprowadza się do rozważenia kresu $\bigvee_{i=1}^m a_i \wedge b_i$, gdzie $a_i \in A$ oraz $b_i \in B$. Istnienia tego kresu dowodzi się indukcyjnie (ze względu na m) wykorzystując własność 1.3 oraz 1.5 (rozważa się kres $(\bigvee_{i=1}^{m-1} a_i \wedge b_i) \wedge a_m \wedge b_m$).

Przez zastosowanie lematu 7.8 dostajemy w szczególności:

Wniosek 7.9. Jeżeli $A \subset P$ jest podalgebrą Boole'a ortoposetu boolowskiego P i $c \in P$ ma tę własność, że dla każdego $a \in A$ $a \wedge c$ istnieje, to w ortoposecie P jest algebra Boole'a zawierająca $A \cup \{c\}$.

Wniosek 7.10. Jeżeli Z jest centrum ortoposetu boolowskiego P i A dowolną podalgebrą Boole'a tego ortoposetu, to istnieje w P podalgebra Boole'a zawierająca $A \cup Z$.

Ponieważ teoriomnogościowa suma dowolnego łańcucha (ze względu na inkluzję) podalgebr Boole'a ortoposetu boolowskiego P jest podalgebrą Boole'a tego ortoposetu, przez zastosowanie lematu Kuratowskiego-Zorna daje się wywnioskować istnienie w P maksymalnych podalgebr Boole'a.

Lemat 7.11. Jeżeli P jest m -zupełnym ortoposetem boolowskim i A jest maksymalną podalgebrą Boole'a tego ortoposetu, to A jest m -zupełną algebrą Boole'a.

Dowód: Niech $(a_t)_{t \in T}$ będzie m -indeksowanym zbiorem parami rozłącznych elementów algebry A . Ponieważ P jest m -zupełny, więc istnieje $\bigvee_{t \in T} a_t = a$. Weźmy dowolne $x \in A$. Oczywiście $x \wedge a_t$ istnieje dla każdego $t \in T$ oraz $x \wedge a_{t_1} \perp x \wedge a_{t_2}$ dla $t_1 \neq t_2$, czyli istnieje $\bigvee_{t \in T} (a_t \wedge x) = c$. Mamy $c \leq x$ i $c \leq a$; więc $x = c \vee (x \wedge c')$ oraz $a = c \vee (a \wedge c')$. Zachodzi również

$$x \wedge c' = x \wedge \bigwedge_{t \in T} (a_t' \vee x') \leq \bigwedge_{t \in T} a_t' = a' \leq a' \vee c$$

czyli $x \wedge c' \perp a \wedge c'$. Dostajemy więc $x \wedge a = c$. Zatem ponieważ dla każdego $x \in A$ $x \wedge a$ istnieje, z wniosku 7.9 otrzymujemy istnienie podalgebry Boole'a zawierającej $A \cup \{a\}$.

Ponieważ A jest maksymalną podalgebrą, więc $a \in A$; tym samym kres górny dowolnego n -indeksowanego zbioru elementów parami rozłącznych należy do A , czyli A jest n -algebrą Boole'a.

8. ORTOIDEAŁY

Wprowadzimy teraz bardzo przydatne w dalszych rozważaniach uogólnienie pojęcia ideału algebry Boole'a.

Niech $(P, \leq, ', 0)$ będzie ortoposetem boolowskim, zaś J niepustym zbiorem zawartym w P .

Definicja 8.1. J nazywamy ortoideałem ortoposetu boolowskiego P , jeśli spełnione są następujące warunki:

- 1° jeśli $a \in J$, $b \in P$ i $b \leq a$, to $b \in J$
- 2° jeśli $a \in J$, $b \in J$ i $a \perp b$ ($a \wedge b = 0$), to $a \vee b \in J$

Omówimy teraz podstawowe własności ortoideału.

Jest jasne, że jeśli J jest ortoideałem w P , to dla $a, b \in J$, jeśli $a \vee b$ istnieje, to $a \vee b \in J$; natomiast kresy górne zbiorów więcej niż dwuelementowych nie muszą należeć do ortoideału, nawet jeśli istnieją w P .

Każdy ideał (patrz definicja 1.8) jest ortoideałem, ale nie na odwrót. Jeżeli P jest algebrą Boole'a, to pojęcia ortoideału i ideału pokrywają się.

Definicja 8.2. Ortoideał nazywamy właściwym, jeśli nie pokrywa się z ortoposetem P .

Łatwo zauważyć z definicji 1.7, że jądro homomorfizmu ortoposetów boolowskich jest ortoideałem właściwym (rozważamy ortoposety niezdegenerowane, tzn. $0 \neq 1$).

Definicja 8.3. Ortoideał J jest maksymalny, jeśli jest właściwy i nie jest zawarty w żadnym innym ortoideale właściwym.

Suma teoriomnogościowa ortoideałów właściwych jest oczywiście ortoideałem właściwym, zatem z lematu Kuratowskiego-Zorna otrzymujemy:

8.4. Każdy ortoideał właściwy zawarty jest w pewnym ortoideale maksymalnym.

8.5. Dla każdego elementu $a_0 \neq 1$ ortoposetu P istnieje ortoideał maksymalny zawierający a_0 , gdyż każdy element $a_0 \neq 1$ generuje ortoideał główny $J_0 = \{x \in P: x \leq a_0\}$, który jest właściwy.

Twierdzenie 8.6. Ortoideał właściwy J ortoposetu boolowskiego P jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in P$, albo $a \in J$ albo $a' \in J$.

Dowód: analogiczny jak dla algebry Boole'a (patrz Sikorski [27]).

Z powyższego łatwo wynika, że jądro homomorfizmu dwuwartościowego $h: P \rightarrow \{0,1\}$ jest ortoideałem maksymalnym.

Twierdzenie 8.7. Jeżeli J jest ortoideałem maksymalnym w P , to odwzorowanie określone dla $x \in P$ następująco

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \notin J \\ 0 & \text{dla } x \in J \end{cases}$$

jest homomorfizmem ortoposetu boolowskiego P w dwuelementową algebrę Boole'a $\{0,1\}$.

Dowód oczywisty.

Jest również oczywiste, że jeśli J jest ortoideałem w P , $B \subset P$ jest algebrą Boole'a, to $J \cap B$ jest ideałem algebry B .

Lemat 8.8. Jeżeli $B \subset P$ jest podalgebrą Boole'a ortoposetu boolowskiego P , J_B ideałem właściwym algebry B , to istnieje w P ortoideał maksymalny J^* taki, że $J_B \subset J^*$.

Dowód: Oznaczmy $(a] = \{x \in P: x \leq a\}$.

Rozważmy zbiór $J = \bigcup_{a \in J_B} (a]$. Pokażemy, że J jest ortoideałem w P :

- 1° Oczywiście jest, że jeśli $a \in J$, i $b \leq a$, to $b \in J$;
- 2° Niech $a \in J$, $b \in J$; istnieje zatem $x \in J_B$ i $y \in J_B$, że $a \in (x]$ oraz $b \in (y]$ czyli $a \leq x$ i $b \leq y$. Jeśli $a \wedge b = 0$, to $a \vee b$ istnieje i $a \vee b \leq x \vee y$. Ponieważ J_B jest ideałem algebry Boole'a B oraz $x, y \in J_B$, to $x \vee y \in J_B$, zatem $a \vee b \in J$.

J jest ortoideałem właściwym, gdyż $1 \notin J$, bo $1 \notin J_B$; jest więc zawarty w ideale maksymalnym J^* , który zawiera również J_B . Jest oczywiste, że jeśli J_B jest ideałem maksymalnym w B , to $J^* \cap B = J_B$.

Twierdzenie 8.9. Jeżeli $B \subset P$ jest podalgebrą Boole'a ortoposetu boolowskiego P , $h: B \rightarrow \{0, 1\}$ jest homomorfizmem algebry Boole'a B w dwuelementową algebrę Boole'a $\{0, 1\}$, to istnieje homomorfizm $h^*: P \rightarrow \{0, 1\}$ taki, że $h^*(x) = h(x)$ dla $x \in B$.

Dowód: Jądro homomorfizmu h jest ideałem J maksymalnym w B (a więc właściwym). Z lematu 8.8 istnieje ortoideał maksymalny J^* zawierający ten ideał, oraz $B \cap J^* = J$, a więc na podstawie twierdzenia 8.7

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \notin J^* \\ 0 & \text{dla } x \in J^* \end{cases}$$

jest szukany homomorfizmem.

Twierdzenie 8.9 możemy wysłować następująco:

Każdy dwuwartościowy homomorfizm podalgebry Boole'a ortoposetu boolowskiego P daje się rozszerzyć do homomorfizmu ortoposetu P w algebrę Boole'a $\{0,1\}$.

9. BOOŁOWSKIE STRUKTURY LOGICZNE

Do lepszego poznania struktury ortoposetu boolowskiego korzystne jest badanie pewnego zbioru algebr Boole'a, w którym można określić wspólne operacje porządku i uzupełnienia. Rozważania takie dotyczące ortoposetów modularnych można znaleźć w pracy P.D. Fincha [9] oraz w pracach M.J. Mączyńskiego [22] i [23].

Niech $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ będzie indeksowaną rodziną algebr Boole'a. Oznaczmy porządek w L_γ przez $\leq_\gamma$ oraz uzupełnienie przez N_γ . Pisząc $x \leq_\gamma y$ lub $N_\gamma x$ zakładamy, że x, y należą do L_γ .

Przyjmijmy za Finchem [9] następującą definicję:

Definicja 9.1. Strukturą logiczną nazywamy indeksowany zbiór $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ algebr Boole'a o następujących własnościach:

- (i) każda algebra ma ten sam najmniejszy element 0
- (ii) jeżeli $x, y \in L_\alpha \cap L_\beta$, to $x \leq_\alpha y \iff x \leq_\beta y$
- (iii) jeżeli $x \leq_\alpha y$ i $y \leq_\beta z$, to istnieje $\gamma \in \Gamma$, że $x \leq_\gamma z$
- (iv) jeżeli $x \in L_\alpha \cap L_\beta$, to $N_\alpha x = N_\beta x$
- (v) jeżeli $x, y \in L_\alpha \cap L_\beta$, to $x \vee_\alpha y = x \vee_\beta y$ ($a \vee_\gamma b$ oznacza kres górny elementów a i b w algebrze L_γ).
- (vi) z faktu, że $y \leq_\alpha N_\alpha x$ dla pewnego x i y w L_α wynika, że jeśli $x \leq_\beta z$ i $y \leq_\gamma z$, to istnieje L_δ , które zawiera x, y, z .

Niech $L = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} L_\sigma$. Wykorzystując warunki (i) - (iv) można w L określić częściowy porządek oraz uzupełnienie, a mianowicie:

$$x \leq y \iff \text{istnieje } \sigma \in \Gamma, \text{ że } x \leq_\sigma y$$

$$x' = N_\sigma x \text{ dla dowolnego } L_\sigma \text{ zawierającego } x.$$

Definicja 9.2. Powyżej określone $(L, \leq, ')$ nazywamy logiką generowaną przez strukturę logiczną $\{L_\sigma : \sigma \in \Gamma\}$

Finch pokazał w [9], że:

9.3. Logika generowana przez strukturę logiczną jest ortoposetem modularnym.

9.4. Każdy zupełny ortoposet modularny jest logiką generowaną przez pewną strukturę logiczną.

Ponieważ zupełny ortoposet boolowski jest algebrą Boole'a (patrz twierdzenie 5.2), tw. 9.4 nie wnosi wiele do badania struktury ortoposetów boolowskich.

Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 9.5. Strukturę logiczną $\{L_\sigma : \sigma \in \Gamma\}$ nazywamy boolowską strukturą logiczną, jeśli spełnia dodatkowo warunek:

(vii) jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Gamma$ z faktu „ $z \leq_\alpha x$ i $z \leq_\beta y$ ” wynika „ $z = 0$,” to istnieje $\sigma \in \Gamma$, że $x, y \in L_\sigma$.

Wykażemy teraz, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.6. Logika generowana przez boolowską strukturę logiczną jest ortoposetem boolowskim.

Dowód: Niech $(L, \leq, ')$ będzie logiką generowaną przez $\{L_\sigma : \sigma \in \Gamma\}$. Ponieważ logika ta jest ortoposetem modularnym (patrz 9.4), wystarczy pokazać, że dla $x, y \in L$ $x \wedge y = 0 \iff x \leq y'$. Z określenia porządku i uzupełnienia

w logice L mamy:

Jeżeli $x \leq y'$, to istnieje $\sigma \in \Gamma$, że $x \leq_{\sigma} N_{\sigma} y$ czyli $x \wedge_{\sigma} y = 0$, a więc $x \wedge y = 0$.

Jeżeli $x \wedge y = 0$, to korzystając z (vii) mamy, że istnieje $\sigma \in \Gamma$ takie, że $x, y \in L_{\sigma}$ i $x \wedge_{\sigma} y = 0$ czyli $x \leq_{\sigma} N_{\sigma} y$, a więc $x \leq y'$.

Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe:

Twierdzenie 9.7. Każdy ortoposet boolowski jest logiką generowaną przez pewną boolowską strukturę logiczną.

Dowód: Niech B będzie podalgebrą Boole'a ortoposetu boolowskiego P . Przez zastosowanie lematu Kuratowskiego-Zorna widzimy, że istnieje maksymalna podalgebra Boole'a zawierająca B . Oczywiście, każda maksymalna podalgebra Boole'a jest algebrą Boole'a z działaniami jak w P .

Niech $\{B_{\sigma} : \sigma \in \Gamma\}$ będzie zbiorem wszystkich maksymalnych podalgebr Boole'a ortoposetu boolowskiego P . Dla dowolnego $x \in P$ x należy do czteroelementowej algebry $\{0, x, x', 1\} \subset P$ czyli każdy element P należy do co najmniej jednej maksymalnej podalgebry Boole'a. Zatem $P = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} B_{\sigma}$.

Pokażemy, że $\{B_{\sigma} : \sigma \in \Gamma\}$ jest boolowską strukturą logiczną, sprawdzając po kolei warunki (i) - (vii):

(i) oczywiste

(ii) oczywiste

(iii) $x \leq y$ oraz $y \leq z$ czyli $0 \leq x \leq z \leq 1$, a więc istnieje na podstawie lematu 7.7 podalgebra Boole'a zawierająca x i z , czyli istnieje $\sigma \in \Gamma$, że $x, z \in B_{\sigma}$ i oczywiście $x \leq_{\sigma} z$.

(iv) oczywiste

(v) oczywiste

- (vi) mamy tu pokazać, że jeśli $y \leq x'$, to $x \leq z$ i $y \leq z$ implikuje istnienie $\delta \in \Gamma$, że $x, y, z \in B_\delta$;
 Jeśli $y \leq x'$ to $x \wedge y = 0$ czyli $x \vee y$ istnieje.
 Ponieważ $x \leq z$ i $y \leq z$, więc $x \vee y \leq z$ i istnieje
 $w = (x \vee y)' \wedge z$. Ponieważ x, y, w są parami rozłącz-
 ne, więc istnieje w P (lemat 7.6) podalgebra Boole'a,
 która je zawiera (zawiera również $z = x \vee y \vee w$), czyli
 istnieje $\delta \in \Gamma$ takie, że $x, y, z \in B_\delta$.
- (vii) warunek ten oznacza po prostu, że jeśli x i y są
 ortogonalne w P , to istnieje w P maksymalna podalgeb-
 ra Boole'a, która te elementy zawiera, co jest speł-
 nione.

Ponieważ prawdą jest, że w P jeśli $x \leq y$ to istnieje podal-
 gebra Boole'a, która te elementy zawiera, oraz $x' = N_\alpha x$
 dla $x \in B_\alpha$, zatem $(P, \leq, ')$ jest logiką generowaną przez
 boolowską strukturę logiczną $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Definicja 9.8. Strukturę logiczną $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ nazy-
 wamy m -strukturą logiczną, jeżeli każde L jest m -algebrą
 Boole'a oraz spełnione są warunki:

- (viii) jeżeli $x_t \in L_\alpha \cap L_\beta$ dla $t \in T$ i $\overline{T} \leq m$, to

$$\bigvee_{t \in T}^{L_\alpha} x_t = \bigvee_{t \in T}^{L_\beta} x_t$$

- (ix) jeżeli $\overline{X} \leq m$ i X jest zbiorem elementów parami
 ortogonalnych w L oraz z jest kresem górnym zbioru
 X , to istnieje $\gamma \in \Gamma$, że $X \cup \{z\} \subset L_\gamma$.

Jest jasne, że logika generowana przez boolowską m -strukturę
 logiczną jest m -ortoposetem boolowskim.

Wniosek 9.9. Każdy m -zupełny ortoposet boolowski jest
 logiką generowaną przez pełną boolowską m -strukturę logiczną.

Dowód: Wykorzystując tw. 9.7 wystarczy pokazać, że $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ jest $\mathcal{L}$ -strukturą logiczną. Warunek (viii) jest oczywiście spełniony. Warunek (ix) jest spełniony na mocy lematu 7.6 i lematu 7.11.

W dalszym ciągu mówiąc o boolowskiej strukturze logicznej $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ będziemy zakładać, że wszystkie B_γ są maksymalne w $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, co wprawdzie nie wynika z definicji 9.5, ale co łatwo uzyskać z dowolnej boolowskiej struktury logicznej biorąc odpowiednie sumy teoriomnogościowe lagebr.

9.10. Niech $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ będzie logiką generowaną przez boolowską strukturę logiczną $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Weźmy $x \in P$; jeżeli $x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, to x ma kres górny i dolny z każdym elementem $y \in P$, zatem x należy do centrum Z ortoposetu P (na mocy twierdzenia 6.5) czyli $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \subset Z$. Musi być również $Z \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, bo gdyby tak nie było, to istniałaby algebra B_α nie zawierająca Z , a w tym przypadku z wniosku 7.10 wynika istnienie podalgebry Boole'a, zawierającej $Z \cup B_\alpha$, różnej od B_α , co byłoby sprzeczne z maksymalnością algebry B_α . Mamy zatem:

$$Z = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$$

9.11. Niech ortoposet boolowski $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ nie będzie algebrą Boole'a. Rozważmy "niezgodny" zbiór $X \subset P$, tzn. taki, że dla dowolnych $x, y \in X$, jeśli $x \neq y$ to $x \wedge y$ nie istnieje. Zastosowanie lematu Kuratowskiego-Zorna daje istnienie maksymalnych zbiorów "niezgodnych". Oczywiście żadne dwa elementy zbioru "niezgodnego" nie mogą należeć do tej samej algebry ze struktury $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Wobec jednoznaczności

przedstawienia $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ (jeśli B_γ maksymalne podalgebry P) wydawać by się mogło, że moc maksymalnego zbioru "niezgodnego" jest ustalona. Moc maksymalnego zbioru "niezgodnego" jest oczywiście ograniczona przez moc zbioru $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, ale nie jest stałą liczbą, na co wskazuje przykład ortoposetu $L \times M$ będącego produktem kartezjańskim ortoposetu boolowskiego L opisanego w pracy [14] oraz ortoposetu M podanego w niniejszej rozprawie w 2.1. Struktura logiczna generująca ten ortoposet składa się z 6 algebr Boole'a, a występują w tym ortoposecie maksymalne zbiory "niezgodne" dwuelementowe, trójelementowe oraz sześciuelementowe.

10. WOLNE ROZSZERZENIE ORTOPOSETU BOOŁOWSKIEGO

Pojęcie granicy prostej częściowo uporządkowanego systemu algebr Boole'a wprowadził Ph. Dwinger w pracy [4].

Podajemy za nim następujące definicje:

Definicja 10.1. Częściowo uporządkowanym systemem algebr Boole'a nazywamy zbiór $\{B_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda\}$, gdzie Λ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i dla każdego $\lambda \in \Lambda$ B_λ jest algebrą Boole'a oraz dla $\lambda \leq \mu$ $f_{\lambda\mu} : B_\lambda \rightarrow B_\mu$ jest homomorfizmem takim, że:

- (i) $f_{\lambda\lambda}$ jest identycznością dla każdego $\lambda \in \Lambda$
- (ii) $f_{\mu\nu} f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$ dla $\lambda \leq \mu \leq \nu$

Definicja 10.2. Granicą prostą częściowo uporządkowanego systemu $\{B_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda\}$ w klasie wszystkich algebr Boole'a jest para $(B, \{i_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$, gdzie B jest algebrą Boole'a oraz dla każdego $\lambda \in \Lambda$ $i_\lambda : B_\lambda \rightarrow B$ jest homomorfizmem takim, że:

- (i) $i_\mu f_{\lambda\mu} = i_\lambda$ dla $\lambda \leq \mu$
- (ii) dla dowolnej pary $(C, \{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$, gdzie C jest algebrą Boole'a i dla każdego $\lambda \in \Lambda$ $h_\lambda : B_\lambda \rightarrow C$ jest homomorfizmem takim, że $h_\mu f_{\lambda\mu} = h_\lambda$ dla $\lambda \leq \mu$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : B \rightarrow C$ taki, że $h i_\lambda = h_\lambda$ dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$.

Jeżeli występujące w powyższych definicjach algebry i homomorfizmy zastąpimy odpowiednio przez n -algebry i n -homomorfizmy, dostaniemy definicję granicy prostej w klasie n -zupełnych algebr Boole'a.

Wiadomo, że granica prosta częściowo uporządkowanego systemu algebr Boole'a zawsze istnieje w klasie wszystkich algebr Boole'a. Na ogół jednak i_λ nie muszą być monomorfizmami.

Przytoczmy tu jeszcze wykorzystany dalej wynik z pracy Dwingera [4]:

Twierdzenie 10.3. (Dwinger) Niech $\{B_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda\}$ będzie częściowo uporządkowanym systemem algebr Boole'a, którego granicą prostą jest $(B, \{i_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$. Niech λ_0 będzie dowolnym ustalonym elementem zbioru Λ .

- (i) Na to, by i_{λ_0} było monomorfizmem konieczne i wystarczające jest spełnienie następującego warunku:
- Jeżeli $g_0 : B_{\lambda_0} \rightarrow \{0, 1\}$ jest pewnym homomorfizmem, to dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje homomorfizm $g_\lambda : B_\lambda \rightarrow \{0, 1\}$ taki, że $g_{\lambda_0} = g_0$ i $g_\mu f_{\lambda\mu} = g_\lambda$ dla $\lambda \leq \mu$.
- (ii) Jeżeli i_{λ_0} jest monomorfizmem, to $f_{\lambda_0\mu}$ jest monomorfizmem dla $\mu \geq \lambda_0$.

10.4. Zastosujemy powyższe wyniki do badania ortopose-
tów boolowskich.

Niech $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ będzie boolowską strukturą logiczną,
 $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ logiką /ortoposestem boolowskim/ generowaną przez
tę strukturę. Bez ograniczenia ogólności będziemy w dalszym
ciągu zakładać, że B_γ jest maksymalna dla $\gamma \in \Gamma$.

Weźmy $\Delta = 2^\Gamma$ z porządkiem określonym następująco :

$$\text{dla } \lambda, \mu \in \Delta \quad \lambda \leq \mu \iff \mu \subset \lambda$$

Określmy dla $\lambda \in \Delta$ $C_\lambda = \bigcap_{\gamma \in \lambda} B_\gamma$ czyli dla $\gamma \in \Gamma$ $C_{\{\gamma\}} = B_\gamma$.

$$\begin{aligned} \text{Zauważmy, że } C_\lambda \cap C_\mu &= \bigcap_{\gamma \in \lambda} B_\gamma \cap \bigcap_{\gamma \in \mu} B_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \lambda \cup \mu} B_\gamma = \\ &= \bigcap_{\gamma \in \lambda \wedge \mu} B_\gamma = C_{\lambda \wedge \mu} \end{aligned}$$

gdzie $\lambda \cup \mu$ oznacza sumę teoriomnogościową, a $\lambda \wedge \mu$ kres
dolny ze względu na wprowadzony porządek $\leq$.

Dla każdego $\lambda \in \Delta$ C_λ jest oczywiście algebrą Boole'a.

Niech dla $\lambda, \mu \in \Delta$, $\lambda \leq \mu$ $f_{\lambda\mu} : C_\lambda \rightarrow C_\mu$ będzie naturalnym wło-
żeniem $\left[\bigcap_{\gamma \in \lambda} B_\gamma \subset \bigcap_{\gamma \in \mu} B_\gamma \right]$. Mamy więc:

(i) $f_{\lambda\lambda}$ jest identycznością dla każdego $\lambda \in \Delta$

(ii) $f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$ dla $\lambda \leq \mu \leq \nu$

Czyli $\{C_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Delta\}$ jest częściowo uporządkowanym
systemem algebr Boole'a - będziemy go nazywali generowanym
przez boolowską strukturę logiczną $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$

Lemat 10.5. Jeżeli $\{C_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Delta\}$ jest części-
wo uporządkowanym systemem algebr Boole'a generowanym przez
boolowską strukturę logiczną $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ i $(B, \{i_\lambda : \lambda \in \Delta\})$
jest granicą prostą tego systemu, to dla każdego $\lambda \in \Delta$
 $i_\lambda : C_\lambda \rightarrow B$ jest monomorfizmem.

Dowód: Wystarczy pokazać, że warunek podany w twierdzeniu 10.3(i) jest spełniony dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$.

Weźmy dowolne $\lambda_0 \in \Lambda$. Niech $g_0: C_{\lambda_0} \longrightarrow \{0,1\}$ będzie homomorfizmem.

C_{λ_0} jest podalgebrą Boole'a generowanego przez boolowską strukturę logiczną $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ortoposetu boolowskiego P .

$$P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

Możemy więc na podstawie twierdzenia 8.9 wnioskować, że istnieje homomorfizm $g: P \longrightarrow \{0,1\}$ taki, że dla $x \in C_{\lambda_0}$ $g(x) = g_0(x)$.

Niech teraz dla każdego $\lambda \in \Lambda$ $g_\lambda = g|_{C_\lambda}$.

Oczywiście $g_{\lambda_0} = g_0$ oraz

$$g_\mu \upharpoonright_{C_{\lambda \wedge \mu}} = g_\lambda \quad \text{dla } \lambda \leq \mu.$$

W ten sposób udowodniliśmy, że w granicy prostej

$(B, \{i_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$ wszystkie i_λ są monomorfizmami.

10.6. W celu uproszczenia zapisu oznaczmy dla $\gamma \in \Gamma$ $i_{\{\gamma\}}$ przez i_γ . Z określenia systemu $\{C_\lambda, f_{\lambda\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda\}$, definicji 10.2 granicy prostej i lematu 10.5 wynika, że mamy parę $(B, \{i_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ gdzie $i_\gamma: B_\gamma \longrightarrow B$ dla $\gamma \in \Gamma$ są monomorfizmami algebr Boole'a takimi, że:

(i) dla $x \in B_\alpha$ i $x \in B_\beta$ $i_\alpha(x) = i_\beta(x)$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Gamma$

(ii) jeśli istnieje algebra Boole'a C i homomorfizmy $h_\gamma: B_\gamma \longrightarrow C$ o tej własności, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Gamma$ jeśli $x \in B_\alpha$ i $x \in B_\beta$, to $h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, to wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h: B \longrightarrow C$ taki, że $h i_\gamma = h_\gamma$ dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$.

Możemy teraz określić $h : P \longrightarrow B$ w następujący sposób: ponieważ dla $x \in P$ istnieje $\tau \in \Gamma$, że $x \in B_\tau$, niech $h(x) = i_\tau(x)$.

Z warunku 10.6 (i) wynika, że przekształcenie jest dobrze określone.

Lemat 10.7. Przekształcenie $h : P \longrightarrow B$ określone powyżej jest monomorfizmem ortoposetu boolowskiego P w algebrę Boole'a B .

Dowód: Najpierw pokażemy, że h jest homomorfizmem.

1° dla $x, y \in P$ $h(x') = h(x)'$

oczywiste, bo dla każdego $\tau \in \Gamma$ $i_\tau(x') = i_\tau(x)'$

2° jeżeli $x \wedge y = 0$, to istnieje $\tau \in \Gamma$, że $x \in B_\tau$ i $y \in B_\tau$ czyli $x \vee y \in B_\tau$ (z definicji 9.5 boolowskiej struktury logicznej); zatem dla $x \perp y$ mamy:

$$h(x \vee y) = i_\tau(x \vee y) = i_\tau(x) \vee i_\tau(y) = h(x) \vee h(y)$$

A więc oba warunki w definicji homomorfizmu są spełnione.

Pokażemy teraz, że h jest monomorfizmem.

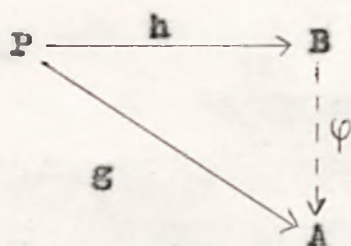
Niech $x, y \in P$, $x \neq y$ i $h(x) = h(y)$. Z określenia przekształcenia h oraz z faktu, że wszystkie i_τ dla $\tau \in \Gamma$ są monomorfizmami (lemat 10.5) wynika, że x i y nie mogą należeć do tej samej algebry B_τ dla żadnego $\tau \in \Gamma$. Zatem nie może być (lemat 7.7) ani $x \leq y$ ani $y \leq x$. Możemy tutaj skorzystać z własności (1.6) dydaktywności ortoposetu boolowskiego, tzn. istnieje $c \in P$, $c \neq 0$ takie, że $c \leq x$ i $c \wedge y = 0$;

$$\text{czyli } h(c \wedge y) = h(c) \wedge h(y) = 0$$

$$\text{oraz } h(c) \leq h(x) = h(y)$$

Mamy więc $h(c) \neq 0$, $h(c)$ rozłączne z $h(y)$ i $h(c) \leq h(y)$ czyli doszliśmy do sprzeczności. Musi więc zachodzić dla $x, y \in P$ jeśli $x \neq y$ to $h(x) \neq h(y)$.

Twierdzenie 10.8. Dla dowolnego ortoposetu boolowskiego P istnieje algebra Boole'a B i monomorfizm ortoposetu boolowskiego $h : P \rightarrow B$ taki, że dla każdego homomorfizmu $g : P \rightarrow A$ (A algebra Boole'a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\varphi : B \rightarrow A$ taki, że $\varphi h = g$ tzn. następujący diagram jest przemienny:



Dowód: Ponieważ każdy ortoposet boolowski jest generowany przez pewną boolowską strukturę logiczną, wystarczy zastosować lemat 10.5 i lemat 10.7 oraz wykorzystać własność 10.6(11).

Uwaga: Ponieważ na ogół nawet monomorfizm ortoposetów boolowskich nie zachowuje kresów więcej niż 2 elementów, więc algebra B z tw. 10.8 nie jest regularnym rozszerzeniem ortoposetu P . Wiadomo jednak, że rozszerzenie regularne dla ortoposetu boolowskiego istnieje, jest nim $B[P]$ (patrz 1.13). Ponieważ z tw. 10.8 wynika, że B jest wolnym rozszerzeniem, a więc powstaje problem: określić tak relację równoważności $\triangle$ w B , by można było udowodnić $B/\triangle = B[P]$.

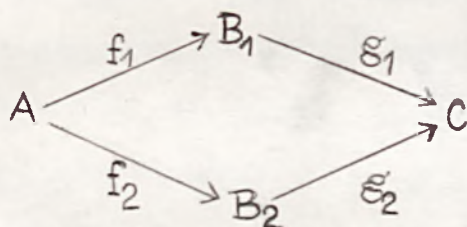
R o z d z i a ł II

AMALGAMACJA m -ZUPEŁNYCH ALGEBR BOOLE'A

1. WPROWADZENIE

Pojęcie amalgamacji zostało wprowadzone explicite przez R. Fraïssé [10], a następnie ogólnie zbadane przez B. Jónssona w [12] i [13], który podaje wiele ważnych konsekwencji własności amalgamacji.

Definicja 1.1. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr podobnych. Mówimy, że klasa $\mathcal{K}$ ma własność amalgamacji, jeżeli dla dowolnych $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ oraz monomorfizmów $f_1: A \rightarrow B_1$ i $f_2: A \rightarrow B_2$ istnieje algebra $C \in \mathcal{K}$ i monomorfizmy $g_1: B_1 \rightarrow C$ oraz $g_2: B_2 \rightarrow C$ takie, że $g_1 f_1 = g_2 f_2$, tzn. następujący diagram jest przemienny:



Jeżeli ponadto $g_1(B_1) \cap g_2(B_2) = g_1 f_1(A) = g_2 f_2(A)$, to mówimy, że klasa $\mathcal{K}$ ma mocną własność amalgamacji.

Własność amalgamacji w klasie algebr Boole'a była następnie badana przez Ph. Dwingera [6], [7], F.M. Yaquba [31] oraz M.J. Mączyńskiego [19], [20], [21]. Wiadomo, że klasa wszystkich algebr Boole'a ma własność amalgamacji (patrz [7]), znane były częściowe wyniki dotyczące własności amalgamacji w klasie m -zupełnych algebr Boole'a (patrz [6], [19], [31], [20], [21]). Ostatnio R. La Grange [16] udowodnił, że klasa m -algebr Boole'a ma mocną własność amalgamacji, tzn.

Twierdzenie 1.2 (La Grange) Dla dowolnych m -algebr Boole'a A, B_1, B_2 i m -monomorfizmów $f_1: A \rightarrow B_1$ i $f_2: A \rightarrow B_2$ istnieje m -algebra Boole'a C oraz m -monomorfizmy $g_1: B_1 \rightarrow C$ i $g_2: B_2 \rightarrow C$ takie, że

$$g_1 f_1 = g_2 f_2 \text{ i } g_1(B_1) \cap g_2(B_2) = g_1 f_1(A).$$

W twierdzeniu 1.2 m -algebry i m -homomorfizmy mogą być zastąpione odpowiednio przez algebry zupełne oraz homomorfizmy zupełne.

2. WOLNE PRODUKTY Z m -AMALGAMACJĄ

Pokażemy teraz, że zachodzi również następujące uogólnienie twierdzenia 1.2:

Twierdzenie 2.1. Niech $\{B_t: t \in T\}$ będzie pewną indeksowaną rodziną algebr Boole'a. Jeżeli A, B_t są m -algebrami Boole'a i $f_t: A \rightarrow B_t$ m -monomorfizmami dla $t \in T$, to istnieje m -algebra Boole'a C oraz m -monomorfizmy $g_t: B_t \rightarrow C$ dla $t \in T$ takie, że dla $i, j \in T$ $g_i f_i = g_j f_j$ przy czym dla $i \neq j$ $g_i(B_i) \cap g_j(B_j) = g_i f_i(A)$.

Dowód:

Korzystając z aksjomatu wyboru możemy założyć, że zbiór T pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb porządkowych mniejszych od pewnej ustalonej liczby η .

Otrzymamy zatem system m -algebr Boole'a C_ξ i m -monomorfizmów g_ξ takich, że

$$g_\xi: B_\xi \rightarrow C, \quad C_\xi \subset C_\mu, \quad g_\xi f_\xi = g_\mu f_\mu \text{ dla } \xi \leq \mu$$

①

$$g_\xi(B_\xi) \cap g_\mu(B_\mu) = g_\xi f_\xi(A) \text{ dla } \xi \neq \mu$$

gdzie $\xi < \eta$ i $\mu < \eta$

$C_\xi \subset C_\mu$ oznacza, że C_ξ jest m -podalgebrą algebry C_μ .

Tak jest rzeczywiście, gdyż jeśli weźmiemy $C_0 = B_0$ oraz jako g_0 automorfizm identycznościowy algebry B_0 , to warunek (1) jest oczywiście spełniony dla $\xi \leq \mu < 1$. Ponadto zakładając, że $\lambda < \eta$ i C_ξ oraz g_ξ mogą być tak dobrane dla $\xi < \lambda$, że warunek (1) jest spełniony, jeśli tylko $\xi < \lambda$ i $\mu < \lambda$, rozważmy algebrę Boole'a:

$$C''_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} C_\xi$$

(suma teoriomnogościowa ciągu wstępującego algebr Boole'a jest algebrą Boole'a).

Algebra C''_λ nie musi być m -zupełna, ale ponieważ dla każdej algebry Boole'a istnieje minimalne m -rozszerzenie (patrz [27]), niech C'_λ będzie takim m -rozszerzeniem dla algebry C''_λ ($C''_\lambda \subset C'_\lambda$).

Mamy zatem m -monomorfizmy $g_\xi : B_\xi \rightarrow C'_\lambda$ dla $\xi < \lambda$ przy czym wszystkie $g_\xi f_\xi : A \rightarrow C'_\lambda$ pokrywają się dla $\xi < \lambda$. Weźmy m -monomorfizm $g_0 f_0 : A \rightarrow C'_\lambda$.

Ponieważ mamy również $f_\lambda : A \rightarrow B_\lambda$, zatem z własności amalgamacji dla klasy m -algebr Boole'a wynika, że istnieje m -algebra Boole'a C_λ oraz m -monomorfizmy g_λ i h_λ takie, że

$$g_\lambda : B_\lambda \rightarrow C_\lambda, \quad h_\lambda : C'_\lambda \rightarrow C_\lambda \quad \text{ i } \quad g_\lambda f_\lambda = h_\lambda g_0 f_0$$

Klasa m -algebr Boole'a jest zamknięta ze względu na obrazy izomorficzne, możemy więc założyć, że C_λ jest rozszerzeniem algebry C'_λ , a h_λ jest identycznością, a więc $C_\xi \subset C'_\lambda \subset C_\lambda$ dla $\xi < \lambda$.

Ponieważ również $g_\lambda(B_\lambda) \cap h_\lambda(C'_\lambda) = g_\lambda(B_\lambda) \cap C'_\lambda = g_0 f_0(A)$ to $g_\lambda(B_\lambda) \cap g_\xi(B_\xi) = g_0 f_0(A)$ dla $\xi < \lambda$

Pokazaliśmy zatem, że warunek (1) jest również spełniony dla $\xi < \lambda + 1$ i $\mu < \lambda + 1$. Korzystając z zasady indukcji pozaskończonej mamy więc, że warunek (1) jest spełniony dla każdego $\xi < \eta$ i $\mu < \eta$.

Żeby zakończyć dowód twierdzenia, wystarczy wziąć jako C minimalne m -rozszerzenie algebry Boole'a C' , gdzie

$$C' = \bigcup_{\xi < \eta} C_\xi$$

Uwaga: Łatwo zauważyć, że w tym dowodzie m -algebry i m -homomorfizmy mogą być zastąpione odpowiednio przez algebry zupełne i homomorfizmy zupełne (wtedy C_λ i C uzupełnienia algebr C_λ i C').

Definicja 2.2. Niech $\{B_t: t \in T\}$ będzie rodziną m -algebr Boole'a i niech A - m -algebra Boole'a taka, że istnieją dla każdego $t \in T$ m -monomorfizmy $f_t: A \rightarrow B_t$.

Uogólnionym wolnym m -produktem rodziny $\{B_t: t \in T\}$ z m -zamalgamowaną m -podalgebrą A nazywamy m -algebrę Boole'a C taką, że spełnione są następujące warunki:

(1) dla każdego $t \in T$ istnieje m -monomorfizm $g_t: B_t \rightarrow C$ taki, że $g_i f_i = g_j f_j$ dla dowolnych $i, j \in T$

(2) $\bigcup_{t \in T} g_t(B_t)$ m -generuje C

(3) jeżeli D jest m -zupełną algebrą Boole'a i

$\{h_t: B_t \rightarrow D\}_{t \in T}$ zbiór m -homomorfizmów takich, że $h_i f_i = h_j f_j$ dla $i, j \in T$, to istnieje m -homomorfizm $h: C \rightarrow D$ taki, że $h g_t = h_t$ dla $t \in T$.

Warunki (2) i (3) w definicji 2.2 mogą być zastąpione przez warunek (2'):

(2') Jeżeli D jest m -zupełną algebrą Boole'a i $\{h_t: B_t \rightarrow D\}_{t \in T}$ jest zbiorem m -homomorfizmów takich, że $h_i f_i = h_j f_j$ dla dowolnych $i, j \in T$, to istnieje dokładnie jeden m -homomorfizm $h: C \rightarrow D$ taki, że $h g_t = h_t$ dla $t \in T$.

Z porównania definicji 2.2 oraz definicji 10.2 z rozdz. I widać, że uogólniony wolny m -produkt algebr $\{B_t\}_{t \in T}$ z m -zamalgamowaną m -podalgebrą A jest szczególnym przypadkiem granicy prostej w klasie m -algebr Boole'a i m -homomorfizmów.

Wiadomo (patrz [4]), że granica prosta systemu $\{A, B_t, f_t: t \in T\}$ w klasie m -algebr Boole'a zawsze istnieje, jest jednoznaczna z dokładnością do izomorfizmu i może być skonstruowana w następujący sposób:

Niech $(B, \{i_t\}_{t \in T})$ będzie wolnym m -produktem zbioru $\{B_t\}_{t \in T}$ (patrz Sikorski [27]). Dla prostoty utożsamiamy każdą B_t z jej obrazem izomorficznym $i_t(B_t)$ w B . Niech J będzie najmniejszym m -ideałem w B zawierającym zbiór

$$\{f_i(x) \wedge f_j(x') : i, j \in T, x \in A\}$$

Niech $g: B \rightarrow B/J$ będzie kanonicznym m -homomorfizmem. Niech dla każdego $t \in T$ $g_t = g|_{B_t}$. Można pokazać ([4]), że para $(B/J, \{g_t\}_{t \in T})$ jest granicą prostą systemu $\{f_t: A \rightarrow B_t\}_{t \in T}$.

Wykorzystując powyższe uwagi udowodnimy teraz:

Twierdzenie 2.3. Niech A, B_t będą m -algebrami Boole'a i $f_t: A \rightarrow B_t$ m -monomorfizmami dla $t \in T$. Uogólniony wolny m -produkt rodziny $\{B_t\}_{t \in T}$ z m -zamalgamowaną m -podalgebrą A zawsze istnieje.

Dowód: Wystarczy pokazać, że w granicy prostej $(C, \{g_t\}_{t \in T})$ w klasie m -algebr Boole'a systemu $\{A, B_t, f_t: t \in T\}$ m -homomorfizmy g_t są m -monomorfizmami dla każdego $t \in T$. Z twierdzenia 2.2 wynika, że dla rodziny $\{B_t: t \in T\}$ istnieje m -algebra Boole'a C^* oraz m -monomorfizmy $h_t: B_t \rightarrow C^*$ takie, że $h_i f_i = h_j f_j$ dla dowolnych $i, j \in T$. Zatem z warunku (ii) definicji granicy prostej wynika, że istnieje dokładnie jeden m -homomorfizm $h: C \rightarrow C^*$ taki, że $h g_t = h_t$ dla $t \in T$. Ponieważ dla każdego $t \in T$ h_t jest m -monomorfizmem, oczywiście jest, że g_t też musi być różnowartościowe. Ponieważ także $h_i(B_i) \cap h_j(B_j) = h_i f_i(A)$ dla $i \neq j, i, j \in T$ więc oczywiście $g_i(B_i) \cap g_j(B_j) = g_i f_i(A)$ dla $i \neq j, i, j \in T$ czyli $(C, \{g_t\}_{t \in T})$ jest uogólnionym wolnym m -produktem rodziny $\{B_t\}_{t \in T}$ z mocno m -zamalgamowaną m -podalgebrą A . Czyli w klasie m -algebr Boole'a istnieją wolne produkty z amalgamacją.

Uwaga: Ponieważ w klasie zupełnych algebr Boole'a nie zawsze istnieje granica prosta, dowód tw. 2.3 nie może być rozszerzony na klasę zupełnych algebr Boole'a.

Wniosek 2.4. Niech boolowska m -struktura logiczna

$\{B_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ ma tę własność, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Gamma$ $\alpha \neq \beta \Rightarrow B_\alpha \cap B_\beta = Z$. Z istnienia wolnych m -produktów z m -zamalgamowaną m -podalgebrą wynika, że istnieje m -algebra Boole'a B i m -monomorfizmy $i_\gamma: B_\gamma \rightarrow B, \gamma \in \Gamma$, takie, że dla $x \in Z$ $i_\gamma(x) = i_\beta(x)$ dla $\gamma, \beta \in \Gamma$, przy czym jeśli istnieje m -algebra Boole'a C i m -homomorfizmy dla $\gamma \in \Gamma$ $g_\gamma: B_\gamma \rightarrow C$ takie, że $g_\gamma(x) = g_\beta(x)$ dla $x \in Z, \alpha, \beta \in \Gamma$, to istnieje dokładnie jeden m -homomorfizm $\varphi: B \rightarrow C$ taki, że $\varphi i_\alpha = g_\alpha$ dla $\alpha \in \Gamma$.

Niech $P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ będzie logiką generowaną przez $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Łatwo pokazać, że przekształcenie $h : P \longrightarrow B$ takie, że dla $x \in B_\gamma$ $h(x) = i_\gamma(x)$ jest m -homomorfizmem m -ortoposetu boolowskiego P w m -algebrę Boole'a B .

Ponieważ z mocnej własności amalgamacji

$$i_\gamma(B_\gamma) \cap i_\beta(B_\beta) = i_\gamma(Z), \quad \gamma \neq \beta$$

to h jest m -monomorfizmem. Stąd (B, h) jest wolnym m -rozszerzeniem m -ortoposetu boolowskiego P , tzn. dla dowolnego m -homomorfizmu $g : P \longrightarrow C$, gdzie C jest m -algebrą Boole'a istnieje dokładnie jeden m -homomorfizm $\varphi : B \longrightarrow C$ taki $\varphi h = g$.

3. PEWNE TWIERDZENIA O ROZSZERZANIU m -HOMOMORFIZMÓW

Z własności amalgamacji wynikają następujące twierdzenia, analogiczne do twierdzeń dla klasy wszystkich algebr Boole'a.

Twierdzenie 3.1. Niech A_0 będzie właściwą m -podalgebrą m -algebry Boole'a A ($A_0 \subset A$), T dowolnym zbiorem. Istnieje m -algebra C i m -monomorfizmy $g_t : A \longrightarrow C$ dla $t \in T$ takie, że dla dowolnych $t, p \in T$

$$g_t(x) = g_p(x) \quad \text{dla } x \in A_0$$

$$g_t(x) \neq g_p(x) \quad \text{dla } t \neq p \text{ i } x \in A - A_0$$

Dowód: Niech dla każdego $t \in T$ $i_t : A_0 \longrightarrow A$ będzie m -monomorfizmem identycznościowym (injekcją).

Zatem na mocy tw. 2.1 istnieje m -algebra Boole'a C oraz m -monomorfizmy $g_t : A \longrightarrow C$, że $g_t i_t = g_p i_p$ dla dowolnych $t, p \in T$ czyli dla $x \in A_0$ $g_t(x) = g_p(x)$.

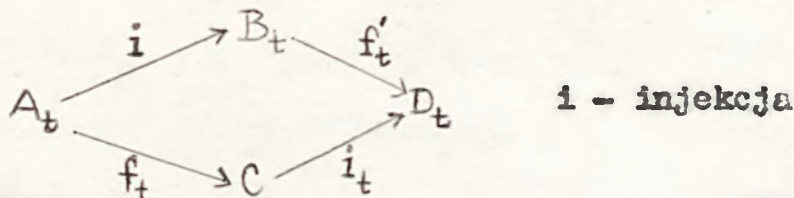
Ponieważ dla $t \neq p$ $g_t(A) \cap g_p(A) = g_t(A_0) = g_p(A_0)$, więc
 $g_t(x) \neq g_p(x)$ dla $x \in A - A_0$.

Twierdzenie 3.2. Jeżeli C, A_t, B_t są m -algebrami Boole'a, $A_t \subset B_t$ i $f_t: A_t \rightarrow C$ m -monomorfizmy dla $t \in T$, to istnieje m -algebra D ($D \supset C$), że dla każdego $t \in T$ istnieje m -monomorfizm $g_t: B_t \rightarrow D$, że $g_t|_{A_t} = f_t$ przy czym
 $g_i(B_i) \cap g_j(B_j) = f_i(A_i) \cap f_j(A_j)$ dla $i \neq j$, $i, j \in T$.

Dowód:

Rozważmy najpierw dowolne ustalone $t \in T$.

Z własności amalgamacji mamy następujący diagram:



Utożsamiając w D_t $i_t(C)$ z C mamy:

$$C \subset D_t, \quad f'_t|_{A_t} = f_t, \quad C \cap f'_t(B_t) = f_t(A_t).$$

Powtarzając rozumowanie otrzymamy dla $t \in T$ rodzinę takich m -algebr D_t . Biorąc $i: C \rightarrow C$ oraz $i_t: C \rightarrow D_t$ dla $t \in T$ jako injekcje, przez zastosowanie twierdzenia 2.1 dostajemy, że istnieje m -algebra D oraz m -monomorfizmy $h: C \rightarrow D$ i $h_t: D_t \rightarrow D$ takie, że $h_i = h_t i_t$ dla każdego $t \in T$
 czyli $h_t(x) = h(x)$ dla każdego $x \in C$.

$$h(C) \cap h_t(D_t) = h(C), \quad h_i(D_i) \cap h_j(D_j) = h(C) \text{ dla } i \neq j, \quad i, j \in T$$

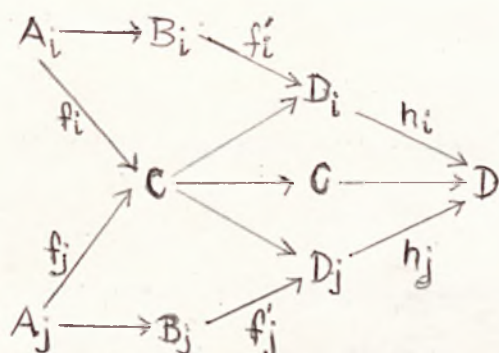
Utożsamiając znowu w D $h(C)$ z C mamy:

$$C \subset D \text{ i dla } x \in C \quad h_t(C) = h(x) \text{ dla każdego } t \in T.$$

Biorąc $g_t = h_t f'_t$ otrzymujemy:

$$g_t: B_t \rightarrow D, \quad g_t|_{A_t} = f_t \text{ dla każdego } t \in T.$$

Można to zilustrować diagramem:



strzałki nieopisane
oznaczają iniekcje

$$h_i(D_i) \cap h_j(D_j) = C \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad i, j \in T$$

Ponieważ $C \cap f'_i(B_i) = f_i(A_i)$

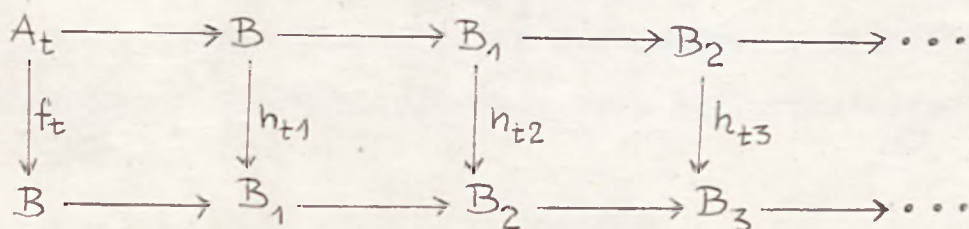
$$C \cap f'_j(B_j) = f_j(A_j)$$

zatem $C \cap f_j(B_j) \cap f_i(B_i) = f_i(A_i) \cap f_j(A_j) \quad \text{dla} \quad i \neq j$

Tym sam. dowód został zakończony.

Twierdzenie 3.3. Niech $A_t \subset B$ będą m -algebrami Boole'a, i $f_t: A_t \rightarrow B$ m -monomorfizmami dla $t \in T$. Istnieje m -algebra $C \supset B$ taka, że dla każdego $t \in T$ istnieje m -homomorfizm $g_t: C \rightarrow C$ taki, że dla $x \in A_t$ $g_t(x) = f_t(x)$.

Dowód: Wykorzystując wielokrotnie twierdzenie 3.2 dostajemy następujący diagram przemienności (dla dowolnego $t \in T$ mamy te same algebry B_k , $k = 1, 2, \dots$):



gdzie poziome strzałki są iniekcjami oraz

$$h_{tk}: B_{k-1} \rightarrow B_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{są takie, że}$$

$$h_{tk}(x) = f_t(x) \quad \text{dla} \quad x \in A_t \quad \text{i} \quad t \in T$$

(przyjeliśmy tu oznaczenie $B_0 = B$).

Niech $(C, \{i_k\}_{k=0,1,\dots})$ będzie granicą prostą w klasie m -algebr Boole'a systemu $\{B_k\}_{k=0,1,\dots}$. Ponieważ rodzina $\{B_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ jest ciągiem wstępującym, więc granicą prostą tego systemu w klasie wszystkich algebr Boole'a jest $C' = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$; m -algebra C jest po prostu wolnym m -regularnym m -rozszerzeniem algebry C' . W granicy C utożsamiamy $i_k(B_k)$ z B_k ; tym samym $B = B_0 \subset C$ oraz $i_k h_{tk} = h_{tk}$. Mamy więc rodzinę m -monomorfizmów $h_{tk}: B_{k-1} \longrightarrow C$ taką, że

$$h_{tk}(x) = h_{tk}(x) \quad \text{dla} \quad k \leq 1 \quad \text{i} \quad x \in B_{k-1}$$

zatem na podstawie definicji 10.2 istnieje m -homomorfizm $g_t: C \longrightarrow C$ taki, że $g_t|_{B_{k-1}} = h_{tk}$ czyli $g_t(x) = f_t(x)$ dla $x \in A_t$ i $t \in T$.

W szczególności z twierdzenia 3.3 otrzymujemy:

Wniosek 3.4. Jeżeli A jest m -podalgebrą m -algebry Boole'a B i $f: A \longrightarrow B$ jest m -monomorfizmem, to istnieje m -algebra Boole'a C taka, że B jest m -podalgebrą tej algebry oraz istnieje m -homomorfizm $g: C \longrightarrow C$ taki, że $g(x) = f(x)$ dla $x \in A$.

Wynik we wniosku 3.4 jest słabszy niż uzyskany w analogicznym twierdzeniu dla klasy wszystkich algebr Boole'a przez M.J. Mączyńskiego (praca doktorska), gdzie homomorfizm występujący w tezie twierdzenia jest automorfizmem.

R o z d z i a ł III

ANALGAMACJA ALGEBR POSTA

1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Podamy najpierw proste uogólnienie definicji 2.2 z poprzedniego rozdziału.

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr podobnych.

Niech $A \in \mathcal{K}$, $A_t \in \mathcal{K}$ oraz istnieją monomorfizmy $f_t: A \rightarrow A_t$ dla $t \in T$.

Definicja 1.1. Parę $(B, \{g_t\}_{t \in T})$ nazywamy wolnym produktem algebr $\{A_t\}_{t \in T}$ w klasie $\mathcal{K}$ z zamalgamowaną podalgebrą A , jeżeli spełnione są warunki:

- 1° $B \in \mathcal{K}$
- 2° dla każdego $t \in T$ istnieją monomorfizmy $g_t: A_t \rightarrow B$ takie, że $g_j f_j = g_i f_i$ dla dowolnych $i, j \in T$
- 3° Jeżeli $C \in \mathcal{K}$ i $\{h_t\}_{t \in T}$ jest rodziną homomorfizmów takich, że $h_t: A_t \rightarrow C$ i $h_i f_i = h_j f_j$ dla $i, j \in T$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h: B \rightarrow C$ taki, że $h g_t = h_t$ dla każdego $t \in T$.

Mówimy, że wolne produkty w analgamacją istnieją w klasie $\mathcal{K}$, jeżeli dla każdego układu $\{A_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{K}$, $A \in \mathcal{K}$

i $\{f_t: A \rightarrow A_t\}_{t \in T}$ istnieje wolny produkt algebr $\{A_t\}_{t \in T}$ z zamalgamowaną podalgebrą A .

Zajmiemy się problemem analgamacji dla algebr Posta. Algebry Posta były szczegółowo badane przez G. Epsteiną [8], T. Traczyka [29], [30], Ph. Dwingera [1], [5], G. Rousseau [25] i innych.

Przytoczymy tu następującą definicję:

Definicja 1.2. P jest algebrą Posta rzędu $n \geq 2$, jeżeli P jest kratą dystrybutywną z 0 i 1 oraz istnieje w P taki skończony łańcuch C : $0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$, że każdy element $x \in P$ daje się dokładnie w jeden sposób przedstawić w postaci:

$$x = \bigvee_{i=1}^{n-1} D_i(x) e_i$$

gdzie $D_1(x) \geq D_2(x) \geq \dots \geq D_{n-1}(x)$ oraz $D_i(x) \in B$ dla każdego $1 \leq i \leq n-1$

$B = \{x \in P: \text{istnieje } x' \in P \text{ takie, że } x \vee x' = 1 \text{ i } x \wedge x' = 0\}$.

Jeżeli algebra Posta jest kratą m -zupełną, to nazywamy ją m -algebrą Posta. W przypadku, gdy m jest liczbą skończoną, przez m -algebrę Posta rozumiemy algebrę Posta.

Jest dobrze znane (Dwinger [5]), że łańcuch C (łańcuch stałych) jest wyznaczony jednoznacznie. Wiadomo również (Rousseau [25], Balbes, Dwinger [1]), że P jest coproduktem B i C w kategorii krat dystrybutywnych z 0 i 1 i homomorfizmów kratowych zachowujących 0 i 1, i na odwrót: jeżeli P jest coproduktem (w tej kategorii) algebry Boole'a B i łańcucha m -elementowego C , to P jest algebrą Posta rzędu n , której łańcuchem stałych jest C . Będziemy zatem dla algebry Posta P używać oznaczenia $\langle B, C \rangle$.

Epstein [8] pokazał, że algebra Posta $P = \langle B, C \rangle$ jest m -zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy algebra Boole'a B jest m -zupełna oraz jeśli $\overline{T} \leq m$ i istnieje $x = \bigvee_{t \in T} x_t$, gdzie $x_t = \bigvee_{j=1}^{n-1} D_j(x_t) e_j$ dla $t \in T$, to

$$D_j(x) = \bigvee_{t \in T} D_j(x_t) \quad \text{dla } j \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Traczyk [30] pokazał, że klasa algebr Posta ustalonego rzędu n może być równościowo zdefiniowana jako klasa algebr z pewnymi operacjami. Operacje te charakteryzują oczywiście homomorfizmy pomiędzy algebraami Posta tego samego rzędu. Można jednak przyjąć ogólniejszą definicję homomorfizmu w klasie wszystkich algebr Posta, a mianowicie:

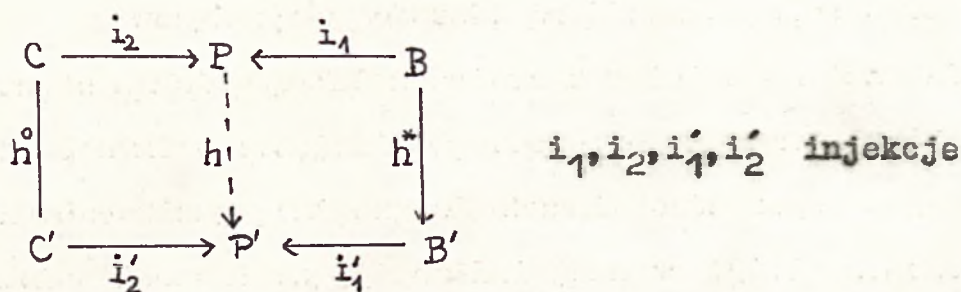
Definicja 1.3 (Traczyk) Niech $P = \langle B, C \rangle$ i $P' = \langle B', C' \rangle$ będą algebraami Posta odpowiednio rzędu r i n . Homomorfizmem Posta $h: P \rightarrow P'$ nazywamy homomorfizm kratowy (zachowujący 0 i 1) taki, że $h(C) \subset C'$. Jeżeli homomorfizm Posta zachowuje kresy zbiorów m -indeksowanych, nazywamy go m -homomorfizmem.

Jest oczywiste, że homomorfizm Posta $h: P \rightarrow P'$ wyznacza homomorfizm $h|_B: B \rightarrow B'$ algebr Boole'a i $h|_C: C \rightarrow C'$ łańcuchów, ale i odwrotnie, tzn. zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.4. Niech $P = \langle B, C \rangle$ będzie algebraą Posta rzędu n i $P' = \langle B', C' \rangle$ algebraą Posta rzędu r . Każdy homomorfizm boolowski $h^*: B \rightarrow B'$ i homomorfizm łańcuchów (kratowy zachowujący 0 i 1) $h^0: C \rightarrow C'$ mają dokładnie jedno wspólne rozszerzenie do homomorfizmu Posta $h: P \rightarrow P'$, przy czym:

- (i) jeśli h^* i h^0 są monomorfizmami, to h również
- (ii) jeśli $h: B \rightarrow B'$ jest m -homomorfizmem algebr Boole'a, to $h: P \rightarrow P'$ jest m -homomorfizmem Posta.

Dowód: P jest coproduktem algebry Boole'a B i łańcucha C , więc istnienie dokładnie jednego $h: P \rightarrow P'$ wynika z definicji coproduktu, co ilustruje następujący diagram przemienności:



(i) wynika z faktu, że każdy $x \in P$ ma dokładnie jedną reprezentację monotoniczną $x = \bigvee_{i=1}^{n-1} D_i(x) \wedge e_i$.

(ii) Dla dowodu tej własności, niech $\overline{T} \gg m$

$$i \quad x = \bigvee_{t \in T} x_t ; \quad x, x_t \in P \quad \text{dla} \quad t \in T.$$

$$h(x) = h\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} D_i(x) \wedge e_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n-1} h(D_i(x)) \wedge h(e_i) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n-1} h^*\left(\bigvee_{t \in T} D_i(x_t)\right) \wedge h^0(e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1} \left[\bigvee_{t \in T} h^*(D_i(x_t)) \right] \wedge h^0(e_i) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n-1} \bigvee_{t \in T} h^*(D_i(x_t)) \wedge h^0(e_i) =$$

$$= \bigvee_{t \in T} \bigvee_{i=1}^{n-1} h(D_i(x_t)) \wedge h^0(e_i) = \bigvee_{t \in T} h(x_t).$$

Wniosek 1.5. Ponieważ każdy automorfizm algebry Posta $P = \langle B, C \rangle$ jest stały na łańcuchu C , zatem każdy automorfizm algebry Posta jest wyznaczony jednoznacznie przez automorfizm algebry Boole'a B . Wynika stąd, że każde twierdzenie o automorfizmach w algebrach Boole'a ma swój odpowiednik w twierdzeniu o automorfizmach w algebrach Posta.

Niektóre inne konsekwencje tw. 1.4 rozważymy w następujących paragrafach.

2. WŁASNOŚĆ AMALGAMACJI W KLASIE m -ALGEBR POSTA RZĘDU n

Niech $\mathcal{P}_{nm}$ oznacza klasę wszystkich m -algebr Posta ustalonego rzędu $n \geq 2$ (jeśli m skończone, jest to po prostu klasa wszystkich algebr Posta tego rzędu).

Dla $P \in \mathcal{P}_{nm}$, $P = \langle B, C \rangle$ gdzie

$$C : 0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1.$$

Ponieważ algebry są tego samego rzędu, nie prowadzi do nieporozumień oznaczenie tym samym symbolem C łańcucha stałych w dowolnej algebrze. Wyróżnienie stałych traktujemy tu jako operacje zeroargumentowe i będziemy rozważać tylko takie homomorfizmy Posta, że $h(C) = C$.

Z rozważań dotyczących własności amalgamacji w klasie m -algebr Boole'a wynikają natychmiast następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 2.1. Klasa $\mathcal{P}_{nm}$ ma własność amalgamacji (patrz Idef. 1.1).

Dowód: Niech $P, P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{nm}$, $f_1: P \rightarrow P_1$, $f_2: P \rightarrow P_2$ będą m -monomorfizmami Posta.

$$P = \langle B, C \rangle$$

$$P_1 = \langle B_1, C \rangle$$

$$P_2 = \langle B_2, C \rangle$$

Jest oczywiste, że dla $i = 1, 2$, $f_i|_C$ jest izomorfizmem, $f_i|_B$ m -monomorfizmem m -algebry Boole'a B w B_i .

Klasa wszystkich m -algebr Boole'a ma własność amalgamacji, zatem istnieje taka m -algebra Boole'a B^* i takie m -monomorfizmy $g_i^*: B_i \rightarrow B^*$, że $g_1^* f_1|_B = g_2^* f_2|_B$.

Rozważmy $P^* = \langle B^*, C \rangle$. P^* jest m -algebrą Posta.

Na podstawie twierdzenia 1.4 m -monomorfizm $g_1^*: B_1 \rightarrow B^*$

daje się rozszerzyć do m -monomorfizmu $g_1: P_1 \rightarrow P^*$.

Jest oczywiste, że $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

A więc pokazaliśmy, że własność amalgamacji jest spełniona w klasie $\mathcal{P}_{nm}$.

Twierdzenie 2.2. W klasie $\mathcal{P}_{nm}$ istnieją wolne produkty z amalgamacją.

Dowód: Niech $P \in \mathcal{P}_{nm}$, $\{P_t\}_{t \in T}$ dowolną rodziną algebr z $\mathcal{P}_{nm}$ takich, że dla $t \in T$ istnieją m -monomorfizmy Posta $f_t: P \rightarrow P_t$.

Niech $P = \langle B, C \rangle$, $P_t = \langle B_t, C \rangle$.

Weźmy $(B^*, \{g_t\}_{t \in T})$ - uogólniony wolny m -produkt m -algebr Boole'a $\{B_t\}_{t \in T}$ z m -zamalgamowaną podalgebrą B .

Rozważmy algebrę Posta $P = \langle B^*, C \rangle$. Oczywiście $P^* \in \mathcal{P}_{nm}$.

Podobnie jak w poprzednim dowodzie łatwo pokazać, że warunki 2° i 3° z definicji 1.1 są spełnione - wystarczy brać odpowiednie rozszerzenia do homomorfizmów Posta homomorfizmów g_t określonych na algebrach Boole'a B i B_t , $t \in T$.

W szczególności z twierdzeń 2.1 i 2.3 wynika, że klasa wszystkich algebr Posta rzędu $n \geq 2$ ma własność amalgamacji i, co więcej, w klasie tej istnieją wolne produkty z amalgamacją.

Dalsze rozważania dotyczą klasy $\mathcal{P}_{nm}$ dla m skończonego.

Przytoczmy jeszcze następującą adaptację definicji podanej przez B. Jónssona w [12] i [13].

Definicja 2.3. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą algebr podobnych,

β - nieskończoną liczbą kardynalną. Algebra $A \in \mathcal{K}$ nazywa się β -uniwersalna w $\mathcal{K}$, jeżeli $\overline{A} = \beta$ i dla każdej algebry $B \in \mathcal{K}$ takiej, że $\overline{B} \leq \beta$ istnieje monomorfizm

$f : B \rightarrow A$. Algebra $A \in \mathcal{K}$ nazywa się β -jednorodna w $\mathcal{K}$, jeżeli każdy izomorfizm $i : A_1 \rightarrow A_2$ podalgebry $A_1 \subset A$ na podalgebrę $A_2 \subset A$ taki, że $\overline{A_1} < \beta$, daje się rozszerzyć do automorfizmu na A .

Wniosek 2.4. Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej α przy założeniu ogólnej hipotezy continuum $\alpha^+ = 2^\alpha$ istnieje w klasie $\mathcal{P}_{mn}$ (m skończone) jedna, i z dokładnością do izomorfizmu tylko jedna, α^+ -uniwersalna α^+ -jednorodna algebra Posta P_{α^+} .

Dowód: Przy założeniach twierdzenia, z własności amalgamacji (patrz [13] i [18]) wynika istnienie w klasie algebr Boole'a jednej, i z dokładnością do izomorfizmu tylko jednej, α^+ -uniwersalnej α^+ -jednorodnej algebry Boole'a U_{α^+} .

Niech $P_{\alpha^+} = \langle U_{\alpha^+}, C \rangle$. Ponieważ w algebrze Posta każdy element ma dokładnie jedną reprezentację monotoniczną (patrz definicja 1.2), więc moc zbioru elementów algebry P_{α^+} jest nie większa niż moc zbioru n -wyrazowych ciągów elementów algebry Boole'a U_{α^+} czyli $\overline{P_{\alpha^+}} = \overline{U_{\alpha^+}}$. Spełnienie pozostałych warunków definicji 2.3 wynika natychmiast z twierdzenia 1.4. Z tego samego twierdzenia wynika również fakt, że P_{α^+} jest tylko jedna (z dokładnością do izomorfizmu).

Nie wiadomo natomiast, czy dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej α istnieje zawsze α^+ -jednorodna α^+ -uniwersalna algebra w klasie m -algebr Boole'a, tym samym nie wiadomo, czy jest tak w klasie $\mathcal{P}_{mn}$, jeśli m nieskończone. Zupełne algebry Posta można jednak scharakteryzować jako retrakty pewnych algebr β -jednorodnych β -uniwersalnych w $\mathcal{P}_{mn}$ (m skończone).

Przypomnimy jeszcze definicję retraktu.

Definicja 2.5. Algebra Posta P_1 jest retraktem algebry Posta P_2 jeśli istnieją homomorfizmy $f: P_2 \rightarrow P_1$ i $g: P_1 \rightarrow P_2$ takie, że fg jest identycznościowym automorfizmem na P_1 . Wynika stąd, że g jest monomorfizmem i f jest homomorfizmem P_2 na P_1 .

Wniosek 2.6. Algebra Posta P rzędu n i mocy $\overline{P} \leq \alpha$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest retraktem α^+ -uniwersalnej α^+ -jednorodnej algebry P_{α^+} (w klasie wszystkich algebr Posta rzędu n).

Dowód: Niech $P = \langle B, C \rangle$, to $\overline{B} \leq \alpha$. P jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy B jest zupełna (Epstein [8]). W pracy [18] M.J. Mączyński udowodnił, że algebra Boole'a A o mocy $\overline{A} \leq \alpha$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest retraktem algebry U_{α^+} . Stąd uwzględniając twierdzenie 1.4 i definicję 2.5 dalsza część dowodu jest oczywista.

3. AMALGAMACJA W KLASIE WSZYSTKICH ALGEBR POSTA

Niech $\mathcal{P}$ oznacza klasę wszystkich algebr Posta skończonego rzędu. Klasa ta wprawdzie nie jest klasą algebr podobnych (różna ilość operacji zeroargumentowych), ale własność amalgamacji można zdefiniować jak w def. 1.1 rozdz. II rozważając homomorfizmy Posta.

Lemat 3.1. Dla dowolnych łańcuchów $C, C_1, C_2 \in \mathcal{P}$ (a więc skończonych z 0 i 1) i monomorfizmów $f_1: C \rightarrow C_1$ i $f_2: C \rightarrow C_2$ istnieje łańcuch $C^* \in \mathcal{P}$ i monomorfizmy $g_1^0: C_1 \rightarrow C^*$ i $g_2^0: C_2 \rightarrow C^*$ takie, że $g_1^0 f_1 = g_2^0 f_2$.

Dowód: Niech $C : 0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$.

Rozważmy iloczyn kartezjański zbiorów C_1 i C_2 . Niech

$C^* = A \cup B$, gdzie

$$A = \left\{ (a, b) \in C_1 \times C_2 : \bigvee_{1 \leq i \leq n-1} [e_i \in C, f_1(e_i) = a \right.$$

$$\text{ i } f_2(e_{i-1}) < b \leq f_2(e_i)] \Big\}$$

$$B = \left\{ (a, b) \in C_1 \times C_2 : \bigvee_{0 \leq i \leq n-2} [e_i \in C, f_2(e_i) = b \right.$$

$$\text{ i } f_2(e_i) \leq a < f_1(e_{i+1})] \Big\}$$

W zbiorze C^* określamy relację porządku w sposób następujący:

$$[(a, b) \leq (c, d)] \iff [a < c \text{ lub } (a = c \text{ i } b \leq d)].$$

C^* jest zbiorem skończonym, liniowo uporządkowanym, zawierającym element najmniejszy $(0, 0)$ oraz element największy $(1, 1)$,

zatem więc $C^* \in \mathcal{P}$

Określamy $g_1^0 : C_1 \rightarrow C$ następująco:

$$g_1^0(1) = (1, 1) \text{ oraz}$$

dla $a \in C_1$ takiego, że istn. $e_i \in C$ ($0 \leq i \leq n-2$)

$$\text{ i } f_1(e_i) \leq a < f_1(e_{i+1})$$

$$g_1^0(a) = (a, f_2(e_i))$$

Jest widoczne, że przekształcenie to jest różnowartościowe,

zachowuje porządek, a więc jest monomorfizmem z C_1 w C^* .

Analogicznie określamy $g_2^0 : C_2 \rightarrow C : g_2^0(0) = (0, 0)$ oraz

$$g_2^0(b) = (f_1(e_i), b) \text{ dla } b \in C_2 \text{ takiego, że } f_1(e_{i-1}) < b \leq f_1(e_i)$$

dla pewnego $1 \leq i \leq n-1$.

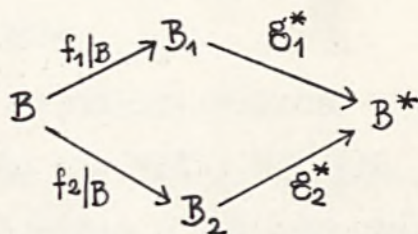
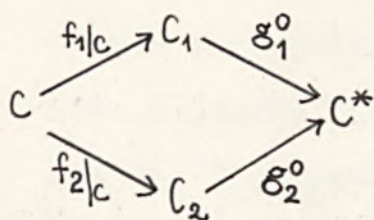
$$\text{Dla } e_i \in C \text{ mamy } g_1^0 f_1(e_i) = (f_1(e_i), f_2(e_i)) \text{ i } g_2^0 f_2(e_i) =$$

$$= (f_1(e_i), f_2(e_i)) \text{ czyli } g_1^0 f_1 = g_2^0 f_2, \text{ co kończy dowód.}$$

Twierdzenie 3.2. Klasa wszystkich algebr Posta ma własność amalgamacji.

Dowód: Niech $P = \langle B, C \rangle$, $P_1 = \langle B_1, C_1 \rangle$, $P_2 = \langle B_2, C_2 \rangle$ będą dowolnymi algebrami Posta, $f_1: P \rightarrow P_1$, $f_2: P \rightarrow P_2$ monomorfizmami Posta.

Z lematu 3.1 i własności amalgamacji w klasie algebr Boole'a wynika istnienie i przemienność diagramów:



Niech teraz $P^* = \langle B^*, C^* \rangle$,

$g_1: P_1 \rightarrow P^*$ rozszerzenie monomorfizmów g_1^0 i g_1^* ,

$g_2: P_2 \rightarrow P^*$ rozszerzenie monomorfizmów g_2^0 i g_2^* .

Równość $g_1 f_1 = g_2 f_2$ wynika z przemienności przedstawionych diagramów.

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnych algebr Posta P , P_1 , P_2 i monomorfizmów $f_1: P \rightarrow P_1$ i $f_2: P \rightarrow P_2$ istnieje algebra Posta P^* i monomorfizmy Posta $g_1: P_1 \rightarrow P^*$ i $g_2: P_2 \rightarrow P^*$ takie, że $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Uwaga 1: Opierając się na lemacie 3.1 i tw. 1.4 można podobnie dowieść, że klasa wszystkich m-algebr Posta ma własność amalgamacji.

Uwaga 2: Wolne produkty z amalgamacją nie zawsze istnieją w klasie wszystkich algebr Posta, gdyż na to, by istniał wolny produkt rodziny algebr Posta $\{P_t\}_{t \in T}$ jest konieczne, by rząd tych algebr był wspólnie ograniczony (nie jest to jednak warunek wystarczający).

B I B L I O G R A F I A

- [1] R. Balbes and Ph. Dwinger: "Coproducts of Boolean algebras and chains with application to Post algebras" Colloq. Math. 24 (1971), 15-25.
- [2] C.M. de Barros: "Filters in partially ordered sets" Portugaliae Mathematica 1968, 87-98.
- [3] G. Birkhoff: "Lattice Theory" Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXV, Providence, R. I., 1967.
- [4] Ph. Dwinger: "Direct limits of partially ordered systems of Boolean algebras" Ind. Math. 29(1967), 317-325.
- [5] Ph. Dwinger: "Notes on Post algebras I and II", Ind. Math. 28(1966), 462-478.
- [6] Ph. Dwinger and F.M. Yaquib: "Free extension of sets of Boolean algebras", Ind. Math. 26(1964), 567-577.
- [7] Ph. Dwinger and F.M. Yaquib: "Generalized free products of Boolean algebras with an amalgamated subalgebra", Ind. Math. 25(1963), 225-231.
- [8] G. Epstein: "The lattice theory of Post algebras", Trans. Amer. Math. Soc., 95(1960), 300-317.
- [9] P.D. Finch: "On the structure of quantum logic", J. Symbolic Logic, 34(1969), 275-282.
- [10] R. Fraïssé: "Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres", Ann. Sci. École Norm. Sup. 71 (1954), 363-388.
- [11] S. Gudder: "Axiomatic quantum mechanics and generalized probability theory" in Probabilistic Methods in Applied Mathematics Academic Press, Inc., New York (1970).

- [12] B. Jónsson: "Algebraic extension of relational systems"
Math. Scand. 11(1962), 179-205.
- [13] B. Jónsson: "Extension of relational structures"
Symposium on the Theory of Models, North-Holland Publ.
Co., Amsterdam (1965), 146-157.
- [14] J. Klukowski: "On Boolean orthomodular posets"
Demonstratio Mathematica 8(1975), 5-14.
- [15] J. Klukowski: "On the representation of Boolean orthomodular posets", Demonstratio Mathematica 8(1975)
- [16] R. La Grange: "Amalgamation and epimorphisms in m -complete Boolean algebras" Algebra Universalis 4(1974), 277-279.
- [17] C. Łapińska: "Vollständige Boolesche orthomodulare teilweise geordnete Mengen" Demonstratio Mathematica 8(1975).
- [18] M.J. Mączyński: "A property of Retracts of α^+ -homogeneous, α^+ -universal Boolean algebras", Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astronom. et phys. 14(1966), 607-608.
- [19] M.J. Mączyński: "Generalized free m -products of m -distributive Boolean algebras with an m -amalgamated subalgebra", ibidem 14(1966), 539-542.
- [20] M.J. Mączyński: "The Amalgamation of an α -distributive α -complete Boolean Algebra" ibidem 17(1969), 415-418
- [21] M.J. Mączyński: "Quantum families of Boolean Algebras", Bull.... 18(1970), 93-96.
- [22] M.J. Mączyński: "Strong m -extension property and m -amalgamation in Boolean Algebras"
- [23] M.J. Mączyński: "Boolean properties of Observables in Axiomatic Quantum Mechanics", Reports on Mathematical Physics 2(1971), 135-150.

- [24] M.J. Mączyński, T. Traczyk: "A characterization of orthomodular partially ordered sets admitting a full sets of states", Bull.... 1(1973), 3-8.
- [25] G. Rousseau: "Post algebras and pseudo-Post algebras", Fund. Math. 67(1970), 133-145.
- [26] P. Samuel: "Ultrafilters and compactification of uniform spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 64(1948), 100-132.
- [27] R. Sikorski: "Boolean Algebras", Berlin-Heidelberg - New York (1964).
- [28] R. Sikorski: "A theorem on extension of homomorphisms", Ann. Soc. Pol. Math. 21(1948), 332-335.
- [29] T. Traczyk: "Axioms and some properties of Post algebras" Colloq. Math. 10(1963), 193-209.
- [30] T. Traczyk: "An equational definition of a class of Post algebras" Bull.... 12(1964), 147-150.
- [31] F.M. Yağub: "A theorem on the existence of the generalized free α -products of Boolean algebras", Nieuw. Arch. Wisk. 16(1968), 179-183.





B

15 356



400000000113015