

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
Politechniki Warszawskiej
1926

Inż. Dr. W. WIERZBICKI.

Profesor Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego.



BIBLIOTEKA
WYDZ.
ARCHITEKTUR

2929

O powstawaniu zjawiska wyboczenia.

W potocznym języku technicznym nieraz bywa rozumiane pod nazwą wyboczenia każde wogóle wygięcie pręta prostego, wywołane przez siły podłużne, t. j. siły bądź ściśle równoległe do osi pręta, bądź też tworzące z nią kąt bardzo ostry.

W nauce nazwę wyboczenia stosujemy tylko do dwóch zjawisk fizycznych, mianowicie do zjawiska wyboczenia sprężystego i do zjawiska wyboczenia niesprężystego. Aczkolwiek oba te zjawiska różnią się od siebie pod względem sposobu powstawania, posiadają one jednak pewne cechy wspólne, które pozwalają je uważać za dwa rodzaje (niżej oznaczone przez I i II) tego samego zjawiska fizycznego.

Dla obserwatora zjawisko wyboczenia przedstawia się w ten sposób, iż pręt prosty, obciążony osiowo przez siły stale wzrastające P , pozostaje prostym do pewnej wartości siły podłużnej P_k , po przekroczeniu zaś tej wartości ulega wygięciu. Z tego powodu wyboczenie bywa zwykle określane poprostu, jako fakt niestateczności prostolinjowego typu równowagi pręta przy pewnej wartości siły podłużnej.

Tego rodzaju określenie, jako bardzo ogólne, nie może wprawdzie nastęrczać żadnych wątpliwości, nie charakteryzuje jednak też zupełnie indywidualnych cech zjawiska na tle innych faktów niestatecznej równowagi i nie zawiera warunków, towarzyszących powstawaniu zjawiska. Stąd zdaje się wypływać potrzeba nieco głębszego ujęcia istoty fizycznej zjawiska, potrzeba zrozumiała nietylko ze względów dydaktycznych, ale też i ze

względów czysto naukowych, gdyż brak o tyle o ile rozpowszechnionego określenia zjawiska wyboczenia niewątpliwie przysparza nieraz badaczom trudność wzajemnego porozumienia się. Utarte mniemanie, iż *omnis definitio odiosa est* nie powinno być przeszkodą do poszukiwań w tym kierunku.

Każdy wogóle układ materjalny uważamy za znajdujący się w stanie równowagi statecznej, jeżeli, przy dowolnie małym odchyleniu części układu od położenia równowagi, zaburzenie równowagi pozostaje trwale dowolnie małym; jeżeli zaś małe odchylenie od położenia równowagi wywołuje zaburzenie, wykraczające poza obszar dowolnie wybrany, wówczas mamy do czynienia z równowagą niestateczną¹⁾.

Jak widzimy, zastosowanie przytoczonego określenia równowagi niestatecznej do zjawiska wyboczenia wymaga, dla całkowitej jasności, ustalenia natury i sposobu powstawania owego „małego odchylenia” od położenia równowagi, które powoduje dalsze zaburzenie, wykraczające już poza dany obszar. Pod tym względem właśnie zachodzi wyraźna różnica między wyboczeniem sprężystem a niesprężystem, niezależnie od różnicy w sposobach wyznaczenia siły krytycznej w obydwóch przypadkach.

To samo dotyczy i tego określenia równowagi, według którego równowaga ciała będzie stateczna, o ile ciało wyprowadzone z położenia równowagi

¹⁾ Według rozprawy prof. inż. dr. M. T. Hubera p. t. „Kryterja stałości równowagi”, r. 1926, str. 1.

531.224

będzie do tego położenia wracało, zaś niestateczna wówczas, gdy będzie się od niego oddalało²⁾.

Weźmy pręt prosty, obciążony osiowo (rys. 1a), nieograniczony ani pod względem sprężystości, ani też pod względem wytrzymałości. Przyczynę odchylenia, wywołującego zaburzenie równowagi prostolinjowej takiego pręta, możemy sobie przedstawić jako dwa momenty μ , zaczepte chwilowo do końców pręta, działające w tej samej płaszczyźnie i skierowane ku sobie.

Momenty μ wywołują wygięcie (zakrzywienie) pręta, stwarzając w każdym jego przekroju mimośród y_α siły podłużnej P , poczem znikają. Przed ich usunięciem się jeszcze część Az pręta pozostaje pod działaniem momentu μ , momentu $M_\alpha = Py_\alpha$ oraz momentu M_x w wewnętrznych siłach sprężystości, działających w przekroju $\alpha\alpha$ (rys. 2).

Mamy tu na widoku, tak jak i wszędzie niżej, zginanie pręta w płaszczyźnie działania momentów μ , a więc zginanie płaskie.

Jeżeli przyjmiemy, iż momenty μ wzrastają do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny, wówczas momenty μ , M_α i M_x muszą utrzymać odciętą część pręta w równowadze, czyli że musi mieć miejsce zależność:

$$\Sigma M = \mu + M_\alpha - M_x = 0, \dots (1)$$

przyczem pręt przybierze pewną postać AzB (rys. 1b).

Po usunięciu momentów μ równowaga pręta zakrzywionego zostaje zaburzona, poczem ustala się ponownie bądź jako typ równowagi prostolinjowej AB (rys. 1a), bądź też krzywolinjowej AdB (rys. 1b), w zależności od tego, czy siła P nie przekroczyła wartości krytycznej P_k , czy też ją przekroczyła.

W przypadku pręta o nieograniczonej sprężystości momenty μ mogą przybierać dowolną wielkość, gdyż rola ich sprowadza się jedynie do wytworzenia mimośrodu y_α (mimośród sprężysty), a więc do umożliwienia wystąpienia momentów zginających M_α .

Rolę przyczyny, wywołującej chwilowy mimośród siły podłużnej (przyczynę zakrzywiającej), może odegrać też pewna siła π prostopadła do osi pręta i znikająca za chwilę powstania mimośrodu. Może to mieć miejsce jednak tylko wówczas, gdy pręt jest należycie podparty (rys. 3). Wreszcie rolę przyczyny zakrzywiającej odegrać może również chwilowa różnica temperatur otoczenia t_1 i t_2 z dwóch stron pręta (rys. 4).

Przed zaczeptieniem do pręta momentów μ (względnie sił π) naprężenia normalne w nim wyrażają się wzorem:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \dots \dots \dots (2)$$

gdzie A oznacza pole przekroju pręta.

Po zaczeptieniu momentów μ największe naprężenia normalne wyniosą:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{A} + \frac{\mu + Py}{W} \dots \dots (3)$$

gdzie W oznacza wskaźnik wytrzymałości pręta.

Po usunięciu momentów μ wyrażenie (3) przy $P < P_k$ przybiera postać (2), a przy $P > P_k$ postać:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py}{W} \dots \dots \dots (4)$$

W technice mamy do czynienia oczywiście tylko z prętami o sprężystości ograniczonej.

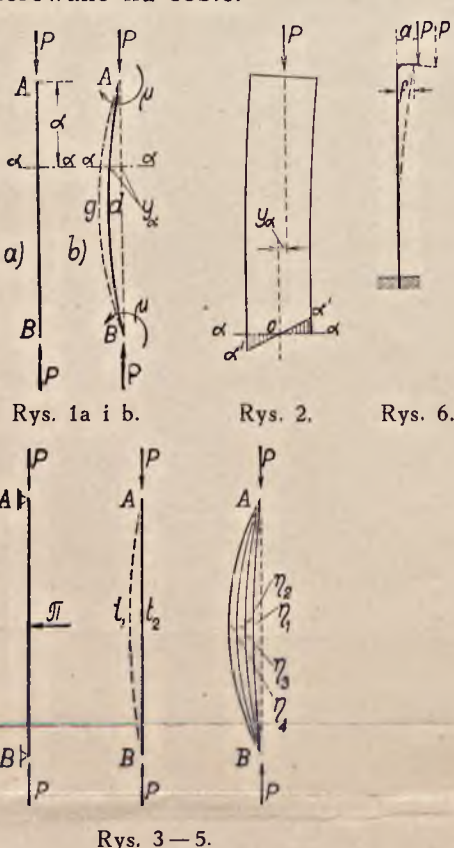
W razie pręta o pewnej określonej granicy sprężystości momenty μ mogą przybierać tylko wartości nieskończenie małe w sensie fizycznym, w danym więc razie wartości, odpowiadające tak małym naprężeniom $\frac{\mu}{W}$, że można te naprężenia pominąć w porównaniu z naprężeniami ściskającymi $\frac{P}{A}$. Gdyby ten warunek nie został spełniony, wówczas naprężenia, spowodowane przez momenty μ , dodane do naprężeń, spowodowanych przez siły podłużne, mogłyby łącznie przekroczyć granicę sprężystości, a nawet granicę wytrzymałości, i w ten sposób momenty μ stałyby się bezpośrednią przyczyną złamania lub trwałego odkształcenia pręta.

Przyjmujemy tu, że przynajmniej przy wartości $P = P_k$ naprężenia $\frac{P}{A}$ nie przekraczają granicy sprężystości, czyli że w chwili rozpoczynania się wyboczenia pręt jest jeszcze sprężysty.

W razie gdy momenty μ (względnie siła π) są wielkościami nieskończenie małymi, powodują one nieskończenie małe ugięcia η_1 i nieskończenie mały moment $\mu_1 = P\eta_1$ w środku pręta. Moment μ_1 wywołuje nieskończenie małe ugięcie η_2 oraz odpowiedni moment zginający $\mu_2 = P\eta_2$, moment μ_2 wywołuje nieskończenie małe ugięcie η_3 oraz moment $\mu_3 = P\eta_3$ i t.d. (rys. 5). Wszystkie wielkości $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ oraz $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ są wielkościami nieskończenie małymi tego samego rzędu, a więc dodawanie do siebie we właściwy sposób ugięć η może doprowadzić w sumie do ugięć pręta o wielkości skończonej³⁾.

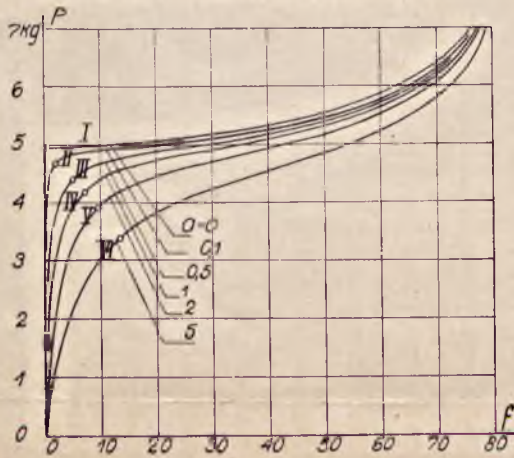
²⁾ Prof. H. Czopowski „Mechanika teoretyczna”. 1921, t. I, str. 206.

³⁾ Vide W. Wierzbicki, Mechanika budowli. 1929, str. 192.



Może jednak zająć przypadek w pręcie o sprężystości ograniczonej, iż naprężenie $\frac{\mu}{W}$ nie będzie mogło być pominięte w porównaniu z naprężeniem $\frac{P}{A}$, a jednak naprężenie obliczone ze wzoru (3) nie będzie przekraczało naprężenia na granicy sprężystości i nie będzie dlatego decydowało o złamaniu lub trwałym wygięciu pręta.

Przypadek też może mieć wprowadzić miejsce i w razie gdy pręt wchodzi w skład pewnej konstrukcji budowlanej, zdarza się to jednak rzadko, i dlatego można powiedzieć, iż w prętach ściskanych, stosowanych w budownictwie, naprężenia wyrażają się wzorem (2) gdy $P < P_k$ i wzorem (4) gdy $P > P_k$. Tem różni się przedewszystkiem zjawisko wyboczenia od zjawiska ściskania mimośrodowego (jednoczesnego ściskania i zginania), przy którym naprężenia wyrażają się wzorem (3) przy najmniejszej nawet wartości siły P .



Rys. 7.

Wartość siły podłużnej $P = P_k$ odgrywać tu będzie rolę podobną do tej, jaką odgrywa zero w stosunku do liczb dodatnich i ujemnych. Przy $P = P_k$ może, mianowicie, pręt ściskany posiadać i kształt prosty i kształt zakrzywiony, przy nieskończeniu małej jednak wielkości ugięcia y . Można więc w tym sensie mówić o wyboczeniu nieskończenie słabem.

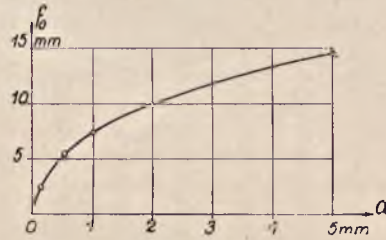
Z technicznego punktu widzenia pręt pozostaje oczywiście przy $P = P_k$ prostym; jak widać jednak z rys. 7 i tablicy II, przytoczonej niżej, mały nawet, ale skończony przyrost siły P powoduje już duże wygięcie się pręta.

Wyobraźmy sobie w dalszym ciągu pręt doskonale sprężysty, ściskany osiowo i przeniesiony do pewnej przestrzeni abstrakcyjnej, w której nie działa siła ciężkości, w której niema zmian atmosferycznych i t. d. Jeżeliby siła podłużna w takich warunkach dosięgła w pręcie wartości krytycznej, wówczas wyboczenie pręta mogłoby mieć miejsce jedynie na skutek wystąpienia jakiejś przyczyny zakrzywiającej w sensie wyżej omówionym. Gdyby natomiast przyczyna taka nie mogła mieć miejsca, wyboczenie nie nastąpiłoby tu wogóle.

Pręty ściskane, znajdujące się w zwykłych warunkach pracy konstrukcji budowlanej, podlegają jednak wstrząsom, wahaniom temperatury, miejscowym chwilowym zmianom w jednorodności materiału i t. d. Wstrząsy, jakich doznają pręty ści-

skane, znajdują wyraz w omówionych wyżej momentach μ , bądź siłach π , zaś zmiany w jednorodności materiału pręta wywołują bezpośrednio mimośród sił podłużnych.

W ten sposób widzimy, że już w samych warunkach pracy prętów ściskanych konstrukcyj budowlanych tkwi źródło mimośrodu sił podłużnych nawet wówczas, gdyby mimośród taki nie był spowodowany przez zaczepione w sposób wyraźny momenty μ lub siły π .



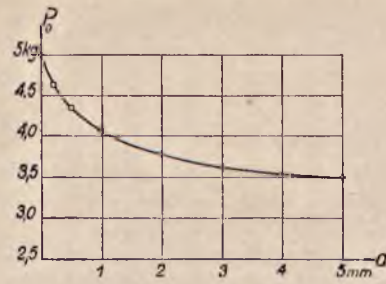
Rys. 8.

Skoro więc, z fizycznego punktu widzenia, mimośród siły podłużnej, choćby nieskończenie mały, w pręcie ściskanim zawsze powstać musi, pozostaje on więc zawsze, niezależnie od źródeł, z jakich pochodzi, przyczyną najbliższą (c a u s a p r o x i m a) zjawiska wyboczenia. Przyczyna ta jednak przybiera znaczenie dopiero wówczas, gdy siła podłużna dosięga wartości krytycznej P_k .

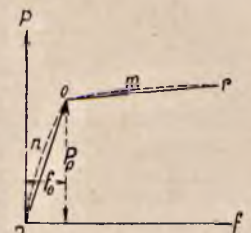
Gdy siła podłużna jest mniejsza od siły krytycznej, mały chwilowy mimośród siły podłużnej pozostaje tu bez znaczenia.

Im dalszą jest siła podłużna od siły krytycznej, tem większa jest stateczność pręta sprężystego, Stopień jego stateczności może być zmierzony na podstawie liczby wahań pręta AB (rys. 1) po usunięciu momentu μ lub sił π , gdy pręt pozostaje pod działaniem samych tylko sił podłużnych¹⁾.

Mówiąc wyżej o mimośrodku siły podłużnej, jako o przyczynie najbliższej zjawiska wyboczenia pręta ściskanego siłą podłużną, równą sile krytycznej, lub większą od niej, mieliśmy stale na uwadze tylko chwilowy mimośród siły podłużnej,



Rys. 9.



Rys. 10.

tak iż, chcąc wyznaczyć formę odkształconej pręta, uległego sprężystemu wyboczeniu, nie należy brać pod uwagę momentów μ lub sił π , które ten początkowy, chwilowy mimośród siły podłużnej spowodowały.

Jeżeli siła zaczepiona została ze stałym mimośrodem, wówczas prostolinijowa forma równowagi jest tu wyłączona i pręt będzie wygięty przy najmniejszej nawet wartości siły podłużnej P .

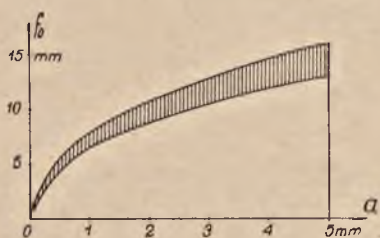
Weźmy pręt stalowy, w jednym końcu utwierdzony, o długości 100 mm i o przekroju podłuż-

¹⁾ A. Sommerfeld, Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickungsvorganges, Z. V. D. I. 1905, str. 1321.

nym 12 mm × 1 mm (rys. 6), obciążony siłą podłużną P , działającą równoległe do jego osi z mimośrodem a , i wyznaczmy największe jego ugięcie f , odpowiadające różnym wartościom siły P . Dojdziemy tą drogą do jednej z krzywych (rys. 7), a dla różnych wartości a — do pęku krzywych I — VI, przedstawionych na tym rysunku i odpowiadających różnym wartościom a .

Krzywe II — VI są tu zaczerpnięte z pracy prof. Czopowskiego⁵⁾, zaś krzywa I została obliczona, niezależnie od tamtych krzywych, metodą podaną przez K. Obrębowicza⁶⁾. Kształt krzywych prof. Czopowskiego znajduje potwierdzenie w obliczeniach innych autorów, oczywiście tylko w częściach, wchodzących w zakres tych ostatnich obliczeń.

Wyberzmy na każdej z krzywych I — VI punkt o (na rysunku kółko), odpowiadający takiej wartości P_0 siły podłużnej P i takiej wartości f_0 ugięcia f , że przy $P > P_0$ ugięcia wzrastają znacznie prędzej, niż odpowiadające im siły podłużne. Punkty te odpowiadają pewnego rodzaju optimum sił P , inaczej, pewnej wartości tych sił, przy których grozi prętowi niebezpieczeństwo technicznie niedopuszczalnego wygięcia.



Rys. 11.

Biorąc z rys. 7 wartości f_0 (ugięcia) i a (mimośrodek), odpowiadające poszczególnym punktom o , znajdujemy zależność $f_0 = F_1(a)$ między temi dwiema wielkościami, uwidocznioną na rys. 8. Z wykresu widać, że w miarę zmniejszania się mimośrodu a szybko maleje wielkość ugięć f_0 .

Z drugiej strony, na rys. 9, przedstawiającym wykres zależności $P_0 = F_2(a)$ między wielkościami P_0 i a , sporządzonym na podstawie rys. 7, widzimy, że wielkość P_0 szybko spada przy zwiększaniu się mimośrodu, zwłaszcza przy mimośrodkach małych.

Położenie punktów o na wykresie 7 jest tem wyraźniejsze, im mniejszy jest mimośród a . Przy dużych a krzywe wykresu stają się coraz bardziej płaskimi, a przy $a = \infty$ mamy do czynienia z czystym zginaniem pręta momentem zaczepionym do jego końca. W tym przypadku ugięcia są proporcjonalne do momentów, a więc odpowiednia linia wykresu 7 powinna mieć kształt linii prostej.

Powyższe rozważania nie uległyby oczywiście zmianie i wówczas, gdyby rozpatrywany pręt był w dwóch punktach swobodnie podparty.

Wyobraźmy sobie, że jedna z krzywych rys. 7 została zastąpiona w okolicy punktu o bądź przez dwie przecinające się w tym punkcie proste, w różny sposób nachylone względem osi f , bądź też przez dwie płaskie krzywe, nie mające w punkcie o wspólnej stycznej (rys. 10).

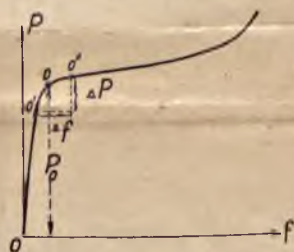
Gdy siła P przybiera wartość P_0 o znaczeniu wyżej omówionem, wówczas najmniejszy przyrost

tej siły powoduje, iż zamiast zależności $P = F(f)$, wyrażonej przez prostą Oo lub krzywą Ono , pręt zacznie się wyginać według zależności, wyrażonej przez prostą or lub krzywą omr . Ponieważ prosta Oo odpowiada tu małym wygięciom pręta, zaś prosta or dużym, więc przy $P = P_0$ grozi prętowi, że jakaś zewnętrzna okoliczność, zwiększająca siłę podłużną nawet o wielkość nieskończenie małą w sensie fizycznym, może wywołać niedopuszczalne, z punktu widzenia technicznego, wygięcie pręta.

Wobec niemożności ściślego wyznaczenia położenia punktu o , linie funkcji $f_0 = F_1(a)$ i $P_0 = F_2(a)$ powinny być właściwie zastąpione przez odpowiednie pasy funkcjonalne, w rodzaju przedstawionego na rys. 11, chociaż dla dalszych rozważań tej pracy nie jest to konieczne.

Z wykresów rys. 8 do rys. 10 wynika, że siła P_0 przy ściskaniu mimośrodowo odgrywa rolę analogiczną do roli siły krytycznej P_k przy wyboczeniu, gdyż w jednym i drugim wypadku mały przyrost siły ściskającej powoduje duże (niedopuszczalne) ugięcie pręta ściskanego. Ponieważ w rzeczywistości przejście od rodzaju zależności $P = F(f)$, wyrażonej dolną (poniżej punktu o) częścią każdej z krzywych rysunku 7, do zależności wyrażonej górną (powyżej punktu o) częścią tej krzywej, odbywa się nie w jednym punkcie, lecz na przestrzeni pewnego skończonego odcinka $o'o''$ tej krzywej (rys. 12), więc przejście to może mieć miejsce dopiero przez przyrost siły P_0 o pewną wielkość skończoną ΔP , tem mniejszą przytem, im mniejszy jest mimośród a .

W tablicy I przedstawione są dla rozpatrywanego pręta i małych mimośrodów przyrosty siły podłużnej ΔP , powodujące przejście zależności $P = F(f)$ od jednego typu (np. wyrażającego się prostą Oo na rys. 10) do drugiego (np. wyrażającego się prostą or na tymże rysunku) oraz odpowiadające temu przejściu przyrosty Δf . Dołączony jest tu dla porównania wypadek, gdy mimośród, a również i ugięcia pręta równają się 0, czyli wypadek, gdy pręt pod działaniem siły osiowej, przekraczającej wartość krytyczną, dopiero zaczyna się wyginać.



Rys. 12.

TABELA I.

a	ΔP	Δf	$\frac{\Delta f}{\Delta P}$	$\frac{\Delta f}{f}$	$\frac{\Delta P}{P}$
0	0,15	20	130	∞	0,03
0,1	0,4	17	42	34	0,08
0,5	1,0	25	25	8	0,20
1	1,5	30	20	5	0,30

Analogja, zachodząca między stanem równowagi pręta ściskanego osiowo przy $P = P_k$ a stanem równowagi pręta ściskanego mimośrodowo przy $P = P_0$, upoważniałaby pozornie do włączenia te-

⁵⁾ Prof. H. Czopowski, Słów kilka o wyboczeniu sprężym. Czasopismo techniczne, 1924.

⁶⁾ K. Obrębowicz, O wytrzymałości prętów na wyboczenie. Rozprawy Akademii Umiejętności, 1886, str. 101.

go ostatniego stanu równowagi w określenie równowagi niestatecznej, przytoczone na wstępie tej pracy, lecz wiele względów, przede wszystkim zaś względ na różnicę warunków energetycznych, czyni to niemożliwym. Omawiana analogia zasługuje jednak na podkreślenie i może, moim zdaniem, rzucić wydatne światło zarówno na warunki fizyczne, towarzyszące zjawisku wyboczenia, jak i na doświadczalne wyznaczanie siły krytycznej. Stan równowagi, odpowiadający wartości $P = P_0$, będziemy niżej nazywali równowagą quasi-niestateczną pręta ściskanego mimośrodowo.

Siła krytyczna P_k może być rozpatrywana na podstawie wykresu rysunku 9, jako granica sił P_0 , wyrażonych w funkcji mimośrodowo, czyli że

$$P_k = \lim P_0|_{a=0} = \lim F_2(a)|_{a=0}. \quad (5)$$

Przy wyznaczaniu siły krytycznej dla pręta sprężystego drogą doświadczalną uzyskanie zupełnie ścisłej osiowości obciążenia podłużnego nie jest możliwe, dlatego też drogą doświadczalną uzyskujemy właściwie bezpośrednio nie siłę P_k , lecz jedną z sił P_0 . Dla małych mimośrodów siły podłużnej, jak widać z rys. 9, siła P_0 szybko zdąża do P_k , tak iż przy dobrej aparaturze doświadczania siła P_k mało różni się od teoretycznie wyznaczonej siły Eulera P_E .

Ze względu na omówione wyżej okoliczności, towarzyszące zjawisku wyboczenia sprężystego, możemy dla tego zjawiska ustalić następujące określenie:

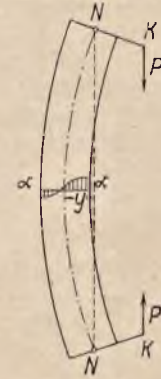
Wyboczenie sprężyste jest to zjawisko, polegające na tem, że pręt sprężysty, pierwotnie prosty i ściskany siłami podłużnymi ściśle osiowymi, zakrzywiowaty pod działaniem pewnej chwilowej przyczyny zewnętrznej, nie wraca, po usunięciu tej przyczyny, do swego kształtu prostolinjowego, o ile siła podłużna przekroczyła wartość, zwaną siłą krytyczną.

W zagadnieniach budownictwa mamy przeważnie do czynienia z przypadkami wyboczenia niesprężystego, t. j. przypadkami, kiedy naprężenie $\frac{P_k}{A}$, odpowiadające wartości P_k siły podłużnej, przy której zaczyna się wyginanie pręta, jest większe od naprężenia na granicy sprężystości materiału i powoduje naprężenie trwałe.

W przypadkach wyboczenia niesprężystego nie mogą być stosowane równania teorii sprężystości i dlatego wyprowadzenie wzorów teoretycznych dla siły krytycznej natrafia tu na znacznie większe trudności, niż w razie wyboczenia sprężystego⁷⁾.

W pewnych wypadkach mamy jednak możliwość wyznaczania ugięć, oczywiście trwałych, i pręta niesprężystego. W tym celu musimy przyjąć, że

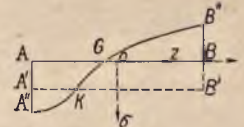
założenie płaskich przekrojów moc swą tu zachowuje oraz że naprężenia rozkładają się w każdym normalnym przekroju poprzecznym belki według znanego nam prawa.



Rys. 13.

Wźmy pręt NN, zginany siłami podłużnymi P, zaczepionymi z pewnym stałym mimośrodem $KN = a$ (rys. 13).

Niech prosta AB na rys. 14 oznacza pewien przekrój poprzeczny pręta, a prosta A'B' || AB — wykres naprężeń ściskających.



Rys. 14.

Przypuśćmy, iż naprężenia, spowodowane zginaniem pręta,

wyrażają się krzywą A''KGB''. Dodając do siebie oba rodzaje naprężeń, znajdujemy wykres naprężeń w przekroju AB w postaci rzędnych krzywej A'A''KGB''B''. W przypadkach gdy w grę wchodzić może wyboczenie, punkt A'' wykresu znajduje się poniżej punktu A', czyli że mamy w danym przekroju do czynienia z naprężeniami różnych znaków. Gdy chodzi o najważniejszy zwykle początek wyginania się pręta, wówczas naprężenia wyciągające A'A'', mniejsze, co do wielkości bezwzględnej, od naprężeń ściskających B'B'', nie przekraczają zwykle granicy sprężystości. Upraszcza to ustalenie prawa rozkładu naprężeń w ściskanej części przekroju AB.

Ustawiając dla części pręta Ax (rys. 13) dwa równania równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych, działających w dowolnym przekroju alpha, znajdujemy:

$$\int_A \sigma dA = P \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\int_A \sigma z dA = P(y+a) \quad \dots \dots \dots (7)$$

Jeżeli oznaczyć przez ϵ_1 i ϵ_2 jednostkowe wydłużenia na obydwóch krawędziach pręta, a przez h wysokość przekroju, wówczas otrzymamy dla krzywizny wygiętej osi pręta wyrażenie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}$$

Po nadaniu określonego kształtu krzywej A''KGB'', czyli po ustaleniu zależności:

$$\sigma = f(\epsilon) \quad \dots \dots \dots (9)$$

możemy, rozwiązując za Kármán'em łącznie równania (6) — (8), znaleźć w sposób taki sam, jak dla prętów sprężystych, o stałym współczynniku E, równanie odkształconej w postaci:

$$E \frac{d^2y}{dx^2} = P(y+a) \quad \dots \dots \dots (10)$$

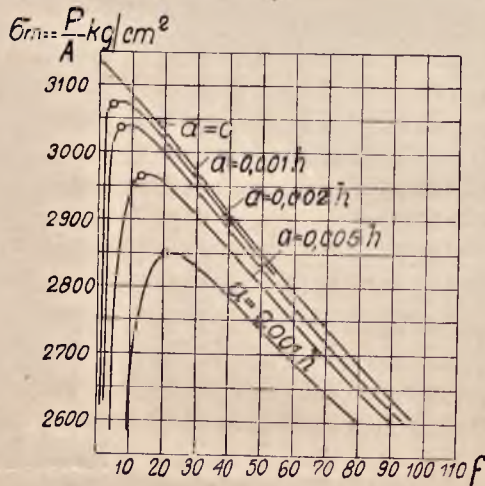
W dalszym ciągu ustawił Kármán dla pręta niesprężystego teoretyczny wzór siły krytycznej⁸⁾, obecnie jednak naogół zaniechany.

⁸⁾ Wzór Kármán'a dla siły krytycznej został między innymi zakwestjonowany przez prof. M. Broszkę w pracy p. t. „Über die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems“ oraz przez prof. Huber'a w pracy p. t. „O wyboczeniu niesprężystem“, 1931.

⁷⁾ Z pośród uczonych polskich swoje wzory teoretyczne dla siły krytycznej przy wyboczeniu niesprężystem dali: prof. L. Karasiński, prof. M. Broszko i dr. Wł. Burzyński.

Całkowanie równania (10) wykonane przez Kármán'a⁹⁾ sposobem wykreślnym pozwoliło mu sporządzić dla stali wykres przedstawiony na rys. 15, a wyrażający dla pręta, którego wysmukłość wynosi $\frac{l}{r} = 60$, i dla różnych mimośrodków zależność między ugięciami pręta a siłami P (ściślej naprężeniami średnimi $\frac{P}{A}$), przy których mają miejsca te ugięcia.

Zależność $P = F(f)$, otrzymana w ten sposób teoretycznie, została przez Kármán'a dla pewnych wypadków sprawdzona doświadczalnie. Aczkolwiek przyjęta przez Kármán'a forma zależności (9) została przez późniejsze badania obalona, nie wpływa to jednak na sam kształt krzywych wykresu rys. 15.



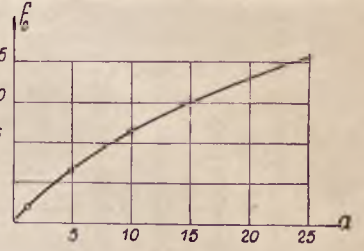
Rys. 15.

Wprawdzie wykres rys. 15 otrzymany został dla stali posiadającej wyraźny okres plastyczności, jednak i dla innych materiałów budowlanych należy w kształcie krzywych $P = F(f)$ oczekiwać mniej lub więcej wyraźnego załamania, wywołanego przez to, że materiały te przy zginaniu dają zawsze szybko wzrastające ugięcia, skoro siła zginająca przekroczy pewną wartość.

Oznaczamy przez o punkty wierzchołkowe (na rysunku kółka) krzywych wykresu 15, t. zn. punkty, w których następuje załamanie się krzywych ugięć. Siły P_0 , odpowiadające punktom o , będą miały podobne znaczenie, jak siły P_0 na wykresie 7, gdyż, poczynając od tych wartości sił, pręty będą wykazywały prędko wzrastające ugięcia. Ugięcia, odpowiadające siłom P_0 , będziemy oznaczali, jak poprzednio, przez f_0 . Różnica między znaczeniem sił P_0 na wykresie 7 i na wykresie 15 polega na tem, że dla każdego mimośrodu a w pierwszym przypadku, po przekroczeniu wartości P_0 , siły podłużne wzrastają, choć bardzo powoli, a w drugim maleją. W tym ostatnim wypadku siła P_0 odpowiada właściwie $\max P$.

Na rys. 16 i 17 uwidocznione są odpowiednio zależność $f_0 = F_1(a)$ między mimośrodem a siły podłużnej a największym ugięciem f_0 oraz zależ-

ność $P_0 = F(a)$ między mimośrodem a a siłą P_0 . Z wykresów tych wynika, że skoro mimośród siły podłużnej maleje, maleje pręcej jeszcze to ugięcie f_0 pręta, przy którym występuje siła P_0 , oraz że przy zmniejszaniu się mimośrodu a wzrasta prędko siła P_0 , przy której ugięcia pręta zaczynają szybko rosnąć.



Rys. 16.

Przypuśćmy, iż siła podłużna P nie jest ściśle równa P_0 , lecz jest od niej mniejsza o wielkość bardzo małą; wówczas pręt pod działaniem tej siły będzie się znajdował w położeniu takim samym, jak omówiony wyżej pręt sprężysty pod działaniem odpowiedniej siły P_0 . W obydwóch, mianowicie, wypadkach małe przekroczenie wartości P_0 przez siłę podłużną powoduje szybkie wzrastanie ugięcia pręta. W obydwóch też wypadkach siły P_0 odpowiadające tej wartości ugięcia f_0 , poza którą ugięcia nagle wzrastają, wzrasta szybko w miarę zmniejszania się mimośrodu a .

Pręt niesprężysty znajduje się więc przy $P = P_0$, podobnie jak pręt sprężysty w tych samych warunkach, w stanie przypominającym stan równowagi niestatecznej przy wyboczeniu, a któryśmy nazwali wyżej stanem równowagi quasi-niestatecznej.

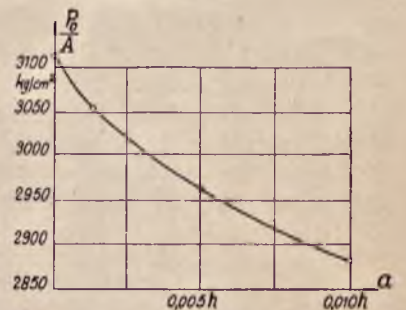
Podobny stan równowagi posiada w przypadku pręta niesprężystego tę jeszcze analogię z wybočeniem, że w obydwu wypadkach duże zaburzenie w równowadze pręta, wywołane małą przyczyną, pozostaje i po usunięciu tej przyczyny, a więc momentu μ , względnie małego przyrostu siły P_0 . Nie ma to miejsca przy mimośrodowym zginaniu pręta sprężystego po przekroczeniu siły P_0 , gdyż duże ugięcie pręta w tym przypadku znika przy zmniejszeniu się siły P .

Omówione wyżej własności zginania pręta siłami podłużnymi zbliżają nas do ściślej sformułowanej definicji zjawiska wyboczenia niesprężystego.

Wyżej przytoczone określenie wyboczenia sprężystego nie może tu oczywiście znaleźć zastosowania, gdyż pręt niesprężysty, zakrzywiony przez moment nieskończenie mały μ (względnie siłę π), nie wraca do swego kształtu prostoliniowego nie tylko po usunięciu momentu μ , lecz nawet po całkowitem usunięciu siły podłużnej P .

Z drugiej strony wiemy, iż na to, aby wyginanie się pręta mogło nastąpić, koniecznym jest, jak to było omówione wyżej, aby siła podłużna uzyskała pewien mimośród, bez niego bowiem, podobnie jak i w przypadku prętów sprężystych, wyboczenie nie będzie miało miejsca.

Wyobraźmy sobie np., że mimośród siły podłużnej w chwili wyboczenia pręta został wywo-



Rys. 17.

⁹⁾ T. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 1910, str. 18.

łany przez momenty μ , zaczepione do końców pręta i zwrócone ku sobie, i przypuśćmy, że są to momenty nieskończenie małe w sensie omówionym wyżej, t. j. momenty, wywołujące takie naprężenia, które mogą być pominięte w porównaniu z naprężeniami ściskającymi, wywołanymi w pręcie przez siłę podłużną. Po usunięciu tych momentów spowodowane przez nie ugięcie η_1 , które nadało sile podłużnej pewien mimośród, nie znika, jest ono jednak tegoż rzędu co moment μ , a więc nieskończenie małe. Moment $P\eta_1$, który powstał z powodu mimośrodu η_1 , będzie więc wielkością nieskończenie małą i może wywołać dodatkowe ugięcie pręta η_2 , tegoż rzędu, co ugięcie η_1 .

Drogą dodawania ugięć nieskończenie małych η_1, η_2, η_3 i t. d. możemy tu dojść, jak w omówionym wyżej wypadku pręta sprężystego, do ugięć o wielkości skończonej.

Zjawisko wyboczenia możemy więc tu wytłumaczyć w ten sposób, że gdy siła podłużna jest mniejsza od wartości krytycznej P_k , ugięcia pręta nie przekraczają wielkości nieskończenie małej, gdy zaś siła P przekroczy wartość krytyczną P_k , wówczas ugięcia pręta otrzymają wartości skończone.

W ten sposób rozumiana siła P_k odgrywa tu rolę podobną do omówionej wyżej siły P_0 przy zginaniu mimośrodem i na podstawie wykresu rys. 17 możemy przyjąć, iż siła P_0 , podobnie jak siła krytyczna przy wyboczeniu sprężystem, wyrazi się wzorem:

$$P = \lim |P_0|_{a=0} = \lim F_2(a)_{a=0},$$

gdzie wyrażenie $F_2(a)$ przedstawia siłę P_0 w funkcji mimośrodu siły podłużnej.

Przy wyznaczeniu siły krytycznej drogą doświadczalną bezpośrednio, otrzymać możemy w danym razie, tak samo, jak i przy wyboczeniu sprężystem, tylko jedną z sił P_0 , nie zaś prawdziwą siłę P_k . Dokładność wyznaczenia siły krytycznej zależy tu więc, jak i w tamtym wypadku, od stopnia doskonałości aparatury doświadczalnej. Nieskończenie mały mimośród, odpowiadający na wykresie rys. 17 sile $P_0 = P_k$, jest przyjęty za równy zeru ($a = 0$).

Gdy chodziło o wyboczenie prętów o nieograniczonej sprężystości, moment μ , odgrywający rolę przyczyny zakrzywiającej, nie potrzebował być wogóle ograniczony co do swej wielkości; w razie wyboczenia pręta o sprężystości ograniczonej, moment μ musiał być uważany za nieskończenie mały, jednak wielkość jego nie miała żadnego wpływu na wygięcie się pręta wybaczanego, gdyż przyczyna zakrzywiająca występowała tu tylko chwilowo, a w czasie, gdy pręt doznawał wygięcia skończonego, moment μ już na ten pręt nie działał.

Przy wyboczeniu niesprężystem, przyczyna, powodująca początkowy mimośród siły podłużnej, jako wielkość nieskończenie mała, może mieć wprawdzie charakter chwilowy, lecz sam mimośród nie znika po usunięciu tej przyczyny, i dlatego moment $P\eta_1$, którego ramieniem jest on, zależy od jego wielkości. Od wielkości początkowego mimośrodu zależy więc też i składające się z ugięć nieskończenie małych ostateczne, trwałe ugięcie pręta ściskanego, a więc i siła P_k , która je wywołuje. Zależność między siłą krytyczną a tym nie-

skończenie małym mimośrodem η_1 nie jest znana. Fakt jednak, że pręty o tych samych wymiarach geometrycznych i z tego samego wykonane materiału ulegają wyboczeniu przy wartościach siły krytycznej P_k zbliżonych do siebie, wskazywałby, zdaje się, na to, że wpływ wielkości mimośrodu η_1 na wielkość siły krytycznej nie jest znaczny.

Na podstawie omówionego wyżej poglądu na powstawanie zjawiska wyboczenia niesprężystego ustalamy następujące określenie tego zjawiska:

Wyboczenie niesprężyste polega na tym, że pręt pierwotnie prosty i ściśnięty osiowo siłami podłużnymi ponad granicę sprężystości, doznawszy zakrzywienia nieskończenie małego (technicznie niedostrzegalnego), jako skutku pewnej chwilowej przyczyny zewnętrznej, podlega skończonemu (technicznie wyraźnemu) wygięciu, o ile siły podłużne przekroczyły pewną wartość, zwaną siłą krytyczną. O ile siła ściskająca nie przekroczyła wartości krytycznej, wówczas to samo zakrzywienie nieskończenie małe nie spowoduje skończonego wygięcia pręta.

W tabelicy II przedstawione zostały schematycznie poszczególne stany równowagi, towarzyszące zarówno powstawaniu zjawiska wyboczenia sprężystego, jak i niesprężystego.

TABELA II.

I. Wyboczenie sprężyste ($\sigma_k < K'$)			II. Wyb. niespręż. ($\sigma_k > K'$)		
$P < P_k$	$P = P_k$	$P > P_k$	$P < P_k$	$P = P_k$	$P > P_k$
a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3

Linje z wężykiem przedstawiają w tabelicy pręty, w których największe naprężenia normalne nie przekroczyły granicy sprężystości K' , zaś linje bez wężyka—pręty, w których granica sprężystości została przekroczona.

Rubryka I odpowiada przypadkom, gdy naprężenie odpowiadające sile krytycznej, a więc naprężenie krytyczne $\sigma_k = \frac{P_k}{A}$, jest mniejsze od K' , czyli przypadkom wyboczenia sprężystego, zaś rubryka II przypadkom, gdy σ_k jest większe od K' , czyli przypadkiem wyboczenia niesprężystego.

Stany równowagi a_1, a_2 i a_3 , a więc wogóle typ Ia wyboczenia dotyczy prętów wykonanych z materiału, dla którego wielkość K' może przybierać wartości dowolnie duże, czyli prętów o sprę-

zystości nieograniczonej, natomiast stany b_1, b_2 i b_3 , a więc wogóle typ Ib wyboczenia dotyczy prętów, dla których wyrażenie (4) nawet przy P bardzo mało większym od P_k przekracza wielkość K' , czyli prętów o sprężystości ograniczonej¹⁰⁾. Wreszcie wyboczenia sprężystego dotyczą przypadki, gdy pręt po przekroczeniu przez siłę podłużną wartości krytycznej ($P > P_k$) znajduje się w stanie równowagi la_3 , o ile przyrost siły P ponad wartość krytyczną nie przekroczy pewnej wartości ΔP i znajduje się w stanie równowagi lb_3 , o ile przyrost wartości tę przekroczy (typ Ia b wyboczenia).

Dwa przedstawione w tablicy typy wyboczenia niesprężystego IIa i IIb różnią się tylko od siebie tem, że w pierwszym wypadku pręt staje się niesprężystym dopiero przy $P = P_k$, podczas gdy w drugim jeszcze przed przekroczeniem przez siłę podłużną wartości krytycznej naprężenia σ przekraczają granicę sprężystości K' ,

Przypadek równowagi, nazwany wyżej równowagą quasi-niestateczną, jako stan równowagi, odpowiadający takiej wartości siły podłużnej P_0 , przy której mały przyrost siły wywołuje duże ugięcia pręta (z punktu widzenia technicznego niedopuszczalne), zająć może i w innych zagadnieniach mechaniki technicznej, poza ściskaniem mimośrodowym.



Rys. 18. Rys. 19.

Przytoczmy tu parę przykładów, przy czym należy zaznaczyć, iż zamiast mówić o ugięciu i odpowiadającej mu sile, można tu mówić ogólniej o odchyleniu od położenia równowagi i o jego przyczynie. Weźmy dwa pręty (rys. 18) proste i całkowicie nieodkształcalne o długości $AB = l$, połączone ze sobą przegubowo w punkcie B. Końce A obydwóch prętów są przesuwne (bez tarcia) i obciążone przez siły P , skierowane wzdłuż osi prętów początkowo ściśle osiowo. Przegub B jest połączony z nieruchomą i nieodkształcalną powierzchnią ss zapomocą sprężyny CB , której współczynnik sprężystości jest k .

Jeżeli siła P nie przekroczyła pewnej wartości krytycznej P_k , wówczas przegub B przesunięty do położenia B' wraca pod działaniem sprężyny na swe miejsce pierwotne, jeżeli zaś $P > P_k$, — pręty pozostają nachylone do kierunku AA.

Wyznaczenie wielkości P_k odbywa się w ten sam sposób, jak wyznaczenie siły Eulerowskiej. Rozpatrujemy więc położenie układu odchylone od równowagi prostoliniowej o wielkość x , odpowiadającą kątowi $BAB' = \varphi$. Odchylenie wywołuje w sprężynie CB siłę kx oraz powoduje siłę Q , jako wynik działania na pręty AB sił P pod kątem φ .

Przy równowadze układu sił P w położeniu odchylonym od położenia prostoliniowego mamy:

$$kx = Q = \frac{2P}{\cos\varphi} \sin\varphi \dots (12)$$

Ponieważ $x = l \sin\varphi$, więc

$$P = \frac{kl}{2} \cos\varphi \dots (13)$$

Siła P_k będzie to ta siła P , przy której możemy się już staję położenie prostoliniowe ABA , a więc

$$P_k = \left| \frac{kl}{2} \cos\varphi \right|_{\varphi=0} = \frac{kl}{2} \dots (14)$$

Przypuśćmy dalej, iż sprężyna CB jest dłuższa niż odległość płaszczyzny ss od $AB''A$, że więc przy $P = 0$ odległość $B''B = a$ (rys. 19). Będziemy wówczas mieli do czynienia z zadaniem podobnym do ściskania mimośrodowego. Otrzymamy tu, mianowicie, następującą zależność między kątem $B''AB' = \varphi$ a siłą P :

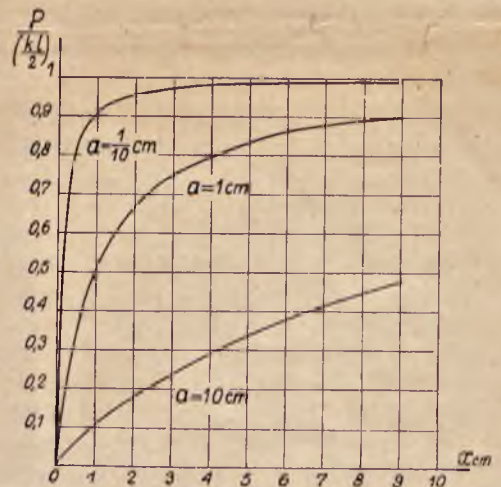
$$P = \frac{kl}{2} \cos\varphi \frac{x}{x+a} \dots (15)$$

lub też zależność

$$P = \frac{k}{2} \cos\varphi \frac{l \sin\varphi}{l \sin\varphi + a} \dots (16)$$

Wykres zależności $P = F(x)$ dla różnych wielkości mimośrodu daje pęk krzywych (rys. 20), podobny do przedstawionego na rys. 7.

Z wykresu rys. 20 widać, że przy małych mimośroдах a wyraźnie występuje tu załamanie się krzywych zależności $P = F(x)$ przy pewnych wartościach $P = P_0$.



Rys. 20.

Weźmy teraz pręt AC nieodkształcalny i przytwierdzony ramowo do końca sprężystego pręta AB , swobodnie podpartego w punktach A i B (rys. 21). Współczynnik sprężystości obrotu przekroju poprzecznego A niech będzie k . Jeżeli odchylimy pręt AC o kąt φ , wówczas równanie równowagi $\sum M = 0$ przybierze dla pręta tego postać:

$$Pl \sin\varphi = \varphi k, \dots (17)$$

skąd

$$P = \frac{k}{l} \frac{\varphi}{\sin\varphi} \dots (18)$$

¹⁰⁾ Vide W. Wierzbicki. Metody obliczenia słupów złożonych, Przegląd Techniczny, 1927, str. 1013, szpalta lewa.

Siłę krytyczną znajdziemy, przyjmując we wzorze (18), iż φ dąży do zera:

$$P_k = \frac{k}{l} \left| \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{k}{l} \dots (19)$$

Dla małych kątów φ współczynnik k możemy wyznaczyć z zależności

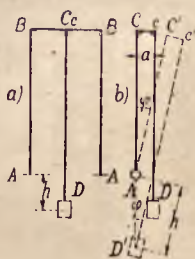
$$\varphi = \frac{ML}{3EJ}, \dots (20)$$

z której wynika, iż

$$k = \frac{3EJ}{M}$$



Rys. 21.



Rys. 22.

gdzie M jest to dowolny moment zginający zaczepiony do końca A pręta, zaś E i J odpowiednio współczynnik sprężystości materiału pręta i moment bezwładności jego przekroju poprzecznego.

W razie zaczepienia siły P w punkcie C z pewnym mimośrodem a , doszlibyśmy tu znowu do krzywych typu rys. 7.

Wyobraźmy sobie wreszcie przyrząd przedstawiony na rys. 22. Przyrząd ten może być uważany za model stożka, ustawionego na jego wierzchołku. Mamy tu pionową nieważką ramę $ABBA$ (rys. 22a), opartą na przegubach cylindrycznych (bez tarcia) A , pozwalających jej na obrót w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Do poprzeczki BB ramy w jej środku przymocowany jest wspornik Cc (rys. 22b), a do końca tego ostatniego pręt cD równoległy do prętów ramy AB . W punkcie D przytwierdzony jest ciężar.

Przy $a > 0$ i $h > 0$ (rys. 22 b) mamy do czynienia z bryłą zawieszoną w ten sposób, iż środek ciężkości (w danym razie środek ciężaru D) znajduje się niżej, niż punkt zawieszenia (przeguby A), mamy więc do czynienia ze stanem równowagi statecznej. Przy $a = 0$ i $h < 0$ mamy do czynienia z równowagą niestateczną.

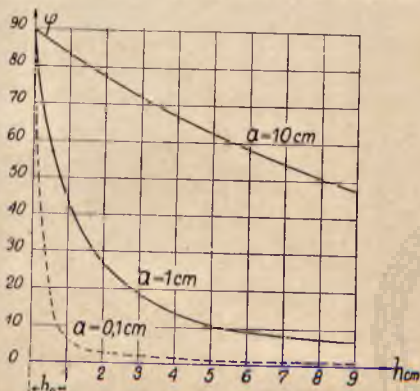
Przy $a > 0$ następuje odchylenie prętów AB od położenia pionowego. Kąt odchylenia możemy wyznaczyć z warunku, że przy równowadze układu

środek ciężkości D musi znajdować się na prostej pionowej, przechodzącej przez A (rys. 22 b). Stąd mamy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{h} \dots (17)$$

Zależność między wielkościami φ , a i h przedstawiona jest na wykresie rys. 23. Z wykresu tego wynika, że przy małych mimośrodkach można zauważyć wartości h_0 , posiadające tę własność, iż niewielka zmiana ich powoduje duże odchylenie ramy. Mamy więc znowu do czynienia z przypadkiem, nazwanym wyżej równowagą quasi-niestateczną układu.

Wracając do prętów ściskanych, stosowanych w budownictwie, zauważyć należy, iż wobec trudności wyznaczenia siły krytycznej dla tych prętów ze względu na to, że siła ta wywołuje zwyk-

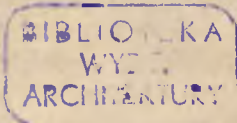


Rys. 23.

le naprężenia, przekraczające granicę sprężystości, byłoby, zdaje się, wskazaniem wprowadzać tu do obliczenia mimośród siły podłużnej¹¹⁾. Przy tym sposobie postępowania wywołuje wprawdzie trudności ustalenie dopuszczalnych naprężeń, można by jednak obejść tę trudność, stosując tu dopuszczalne naprężenia te same, co przy zwykłym ściskaniu lub zginaniu, sprawdzając nadto, czy ugięcia pręta są dostatecznie niższe od ugięć oznaczonych wyżej przez f_0 , a odpowiadających przypadkowi równowagi quasi-niestatecznej. Tu nasuwa się konieczność ściślejszego obliczenia ugięcia prętów.

Wskazaniem byłoby obliczanie prętów ściskanych jednocześnie przy uwzględnieniu mimośrodu, jak wyżej, i bez jego uwzględnienia według wzorów doświadczalnych.

¹¹⁾ Vide W. Wierzbicki. O wytrzymałości prętów złożonych w mostach żelaznych, 1924.



10

2929