

OD AUTORA

INŻ. DR. WITOLD WIERZBICKI

Profesor Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

O zastosowaniu teorii kraty
do wyprowadzenia równań
energii sprężystej

(
LWÓW

PIERWSZA ZWIĄZKOWA DRUKARNIA

1 9 3 2

B
441

WYDZIAŁ ARCHITECTURY
Politechniki Warszawskiej
2219

BIBLIOTEKA
WYDZIAŁU ARCHITECTURY
Politechniki Warszawskiej

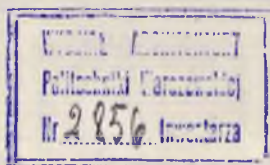
INŻ. DR. WITOLD WIERZBICKI
Profesor Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

O zastosowaniu teorii kraty do wyprowadzenia równań energji sprężystej

624.08

LWÓW
PIERWSZA ZWIĄZKOWA DRUKARNIA
1 9 3 2

ODBITKA Z KSIĘGI PAMIĄTKOWEJ KU CZCI Prof. Dr. h. c. M. THULLIEGO



INŻ. DR. WITOLD WIERZBICKI

Profesor Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

O zastosowaniu teorii kraty do wyprowadzenia równań energii sprężystej.

Teoria kraty, poza jej bezpośrednim wyzyskaniem do obliczenia mostów kratowych, może być z pożytkiem zastosowana i do uzasadnienia równań, dotyczących energii sprężystej, nagromadzonej przy odkształcaniu się konstrukcji budowlanych.

Mówiąc o równaniach energii sprężystej, mamy na widoku wszystkie równania, wyrażające w sposób wyraźny zależność między następującymi trzema kategorjami wielkości, lub przynajmniej między dwiema z pośród nich:

1. między uogólnionemi siłami P , wzrastającemi w sposób ciągły i nieskończenie powolny i zaczepionemi do konstrukcji, wykonanej z materiału, uważanego za sprężysty,

2. między odpowiedniami uogólnionemi przesunięciami (współrzednemi) punktów zaczepienia sił (e lub v),

3. między energją sprężystą V , nagromadzoną w danej konstrukcji w ciągu wzrastania sił P od zera do ich wartości ostatecznej.

Równania, dotyczące energii sprężystej, są użytecznym środkiem przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień statyki budowlanej, a teorii mostów w szczególności i stanowią ulubioną metodę pracy wielu uczonych, przedewszystkiem zaś statyków niemieckich.

Według celów, do jakich powyższe równania prowadzą, można podzielić je w sposób następujący:

Do obliczenia energii sprężystej, nagromadzonej w danym ciele, korzystamy z równania Clapeyron'a, któremu nadajemy zwykle postać:

$$V = \frac{1}{2} \sum P \cdot e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Równanie to doprowadza nas, jak wiadomo, w sposób prosty do przedstawienia energii potencjalnej ciała sprężystego w postaci

jednorodnej funkcji sił drugiego stopnia:

$$V = \sum k \cdot P_i^2 + \sum k_1 \cdot P_i P_j \dots \dots \dots (2)$$

gdzie współczynniki k i k_1 nie są zależne od sił.

Z drugiej strony, ilość energii sprężystej nagromadzonej w danej konstrukcji, wyrazić możemy zapomocą wzoru:

$$V = \int V_1 dx dy dz \dots \dots \dots (3)$$

gdzie V_1 wyraża ilość energii nagromadzonej w sześcianie o krawędzi równej 1, wyjętym z odkształconego ciała, a wielkości dx , dy , dz wyrażają długości krawędzi nieskończenie małego prostopadłościanu.

Równanie (3) wypływa bezpośrednio z określenia energii sprężystej jednostkowej i z przyjętego naogół w statyce, a omówionego wyżej, sposobu wzrastania sił P i wobec tego właściwie nie należy do grupy omawianych tu równań. Łącznie jednak z równaniem Clapeyron'a, przez zestawienie dwóch różnych wyrażen dla energii sprężystej, daje ono możliwość łatwego obliczenia odkształceń w razie, gdy te ostatnie odpowiadają siłom zaczepionym w danych punktach konstrukcji, t. zn. gdy np. mamy do wyznaczenia przesunięcie w punkcie zaczepienia i w kierunku działania siły skupionej, lub gdy mamy do wyznaczenia obrót w punkcie zaczepienia momentu. Zestawienie dwóch wspomnianych wyrażen dla energii sprężystej przedstawia właściwie tylko odmienną formę równania Clapeyron'a¹⁾.

Do wyznaczenia odkształceń służy nam najczęściej twierdzenie Castigliano'a:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = e \dots \dots \dots (4)$$

Do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych korzystamy z twierdzenia Menabréa'i

$$\frac{\partial V}{\partial P} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

lub też z twierdzenia Betti'ego, zwanego twierdzeniem o wzajemności przesunięć:

$$\sum P' e_{,,} = \sum P'' e, \dots \dots \dots (6)$$

gdzie wielkości P' i e , odpowiadają jednemu, zaś P'' i $e_{,,}$ drugiemu układowi sił, zaczepionych do tej samej konstrukcji²⁾.

Szczególny wypadek twierdzenia Betti'ego, odpowiadający jednej sile, nazywamy, jak wiadomo, twierdzeniem Maxwell'a.

¹⁾ M. G. Lamé: Leçons sur la theorie mathematique de l'élasticité des corps solides, 1852, str. 80.

²⁾ Ustawiając wzory statyczne dla ramownicy czteroprzęstowej, miałem możność przekonać się, że przy obliczaniu układów złożonych stosowanie twierdzenia Betti'ego jest mniej kłopotliwe, niż stosowanie twierdzenia Menabréa'i (vide Przegląd Techniczny, 1930, Nr. 46).

W razie sprężystego utwierdzenia podpór może być, przy wyznaczeniu wielkości statycznie nadliczbowych, również użyteczne i twierdzenie Castigliano'a.

Równania (1) — (6) dotyczą w równej mierze układów pełnych, jak i kratowych.

Nie wdając się w historję powstawania omawianych tu równań, zauważyć jednak należy, iż niektóre z nich zostały pierwotnie ustawione dla układów kratowych, następnie zaś rozpowszechnione i na układy pełne (np. twierdzenie Menabréa¹⁾) inne zaś naodwrot, udowodniane były z początku dla układów pełnych, później zaś dopiero były zastosowane i do układów kratowych (np. twierdzenie Clapeyron'a).

Uzasadnienie twierdzeń, dotyczących energii sprężystej dla ciał pełnych, opiera się przede wszystkim na równaniach ogólnych teorii sprężystości, wyprowadzenie zaś tych równań dla kratownic odbywa się na podstawie tak zw. metody Maxwell'a i Mohr'a, opartej na zasadzie prac wirtualnych, która w danym razie może być zresztą wyprowadzona i bezpośrednio z teorii kratownicy²⁾.

Z dydaktycznego punktu widzenia wyprowadzenie równań energii sprężystej dla ciał pełnych jest znacznie bardziej złożone, niż uzasadnienie tych samych równań w zastosowaniu do układów kratowych, tak iż w starszych podręcznikach mechaniki, gdzie te twierdzenia były traktowane, ze względu na ich znaczenie teoretyczne w nauce o sprężystości ciał stałych, z wielką precyzją, zajmowały one wiele miejsca. W nowszych podręcznikach natomiast, ze względu na konieczność zapoznania współczesnego inżyniera z bardzo licznymi nowymi zagadnieniami współczesnej statyki budowlanej, wyprowadzenie tych równań jest traktowane raczej schematycznie, przyczem główny nacisk kładzie się na sposoby ich stosowania.

Zmierzając do uproszczenia wykładu równań energii sprężystej dla ciał pełnych, autorowie współczesnych podręczników statyki idą w dwóch kierunkach: jedni, mianowicie, upraszczają bezpośrednio uzasadnienia pierwotne, odrzucając pewne subtelności w rozumowaniu i dbając raczej o algebraiczną poprawność dowodzenia, drudzy korzystają i w danym wypadku z wywodów, przeznaczonych dla układów kratowych.

Pierwsi nie odbiegają, wprawdzie, lub przynajmniej nie odbiegają pozornie od schematu statycznego ciała pełnego, zmuszeni jednak ze

¹⁾ Por. M. Levy: *La Statique Graphique*, 1888, str. 220, również B. de Fontviolant: *Les methodes modernes de Résistance de Matériaux*, 1920.

²⁾ Por. W. Wierzbicki: *Geometryczne uzasadnienie wzoru na przesunięcia węzłów kratownicy*. Przegląd Techniczny, 1930.

względu na brak miejsca do niedomówień, decydują się nieraz na pewne niejasności wykładu.

Drudzy, idąc za przykładem Mohr'a¹⁾ i wyrzekając się niejako przy wyprowadzaniu równań energii sprężystej schematu ciała pełnego na korzyść kratownicy, uogólniają następnie swe wywody drogą twierdzenia, iż każde ciało pełne może być uważane za kratownicę przestrzenną o nieskończenie wielkiej liczbie prętów nadliczbowych i że wobec tego równania energii sprężystej, wyprowadzone dla kratownicy, mogą być bez dalszych dowodów rozpowszechnione i na konstrukcje pełne.

To ostatnie twierdzenie oparte jest na przedstawieniu ciała sprężystego, jako zbioru punktów materialnych, między którymi działają siły, proporcjonalne do zbliżania się wzajemnego tych punktów i skierowane wzdłuż łączących je prostych. W ten sposób pomyślany schemat ciała sprężystego nie przeczy wprawdzie prawu Hooock'a, nie spełnia jednak charakterystycznego dla pracy sprężystego ciała pełnego warunku, mianowicie nie odpowiada mu, co do liczby stałych sprężystości.

Chodzi o to, że w razie przyjęcia dla ciała sprężystego schematu kratownicy, mamy do czynienia z jedną tylko stałą sprężystą, z liczbą E , współczynnikiem sprężystości przy wyciąganiu (lub ściskaniu), w danym razie charakteryzującym zależność między rozsuwaniem się węzłów kratownicy a siłami, działającymi między nimi. W przeciwieństwie do tego, w ciele sprężystym pełnym, a więc uważanem za pewne sprężyste continuum mamy do czynienia z dwiema wielkościami stałymi, a więc, poza współczynnikiem E , jeszcze z liczbą Poisson'a μ .

Pogląd na ciało sprężyste, jako na zbiór punktów materialnych, a więc pogląd, doprowadzający do schematu kratownicy, czyli do tak niekiedy zwanego modelu Navier'a²⁾, jest obecnie poglądem przestarzałym, gdyż wszystkie nowoczesne badania naukowe w zakresie teorii sprężystości oparte są już na założeniu sprężystego continuum czyli modelu Cauchy'ego.

Stąd wypływa nie dający się, w zasadzie, odeprzeć zarzut niewspółczesności, jaki możnaby postawić sposobom wyprowadzenia równań energii sprężystej, opartym na teorii kraty.

Nie wydawałoby się też tu narazie słusznem odpiernanie tego zarzutu przez powoływanie się na najnowsze badania w zakresie

¹⁾ O. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik, 1914, str. 431.

²⁾ Por. Prof. Inż. Dr. M. T. Huber: Kryteria stałości równowagi, 1926, str. 24 oraz M. Navier: Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique, 1833, str. 1 i 102.

budowy materji, gdyż badania te stoją jeszcze dość daleko od potrzeb praktycznej teorii sprężystości.

Z drugiej strony, proste a jednak ściśle i pozbawione niedomówień uzasadnienie wzorów (1) — (6), tak nieraz użytecznych w pracy inżyniera, jest koniecznością dydaktyczną.

Z tego powodu należy się zastanowić nad tem, czy nie możnaby było w ten sposób praktycznie ograniczyć obszaru stosowalności równań, dotyczących energii sprężystej, aby w tym obszarze, wyprowadzenie ich na podstawie teorii kratownicy było zgodne z ogólnie przyjętymi założeniami mechaniki budowli.

Ograniczenia, o których mowa, dotyczą po pierwsze, typu odkształceń, po wtóre, rodzaju naprężeń i po trzecie, sposobu zaczepienia sił zewnętrznych.

Zestawiając wyszczególnione na początku niniejszej pracy przypadki, gdy równania energii sprężystej znajdują zastosowanie, z rodzajami konstrukcyj pełnych, dla których to zastosowanie jest korzystne, łatwo spostrzegamy, że wchodzą tu w grę przedewszystkiem przypadki zginania, zarówno elementów konstrukcyjnych prostolinjowych, jak i krzywolinjowych. Mamy tu więc przedewszystkiem na widoku belki proste, na które żadne siły podłużne nie działają, następnie ramy, w których obliczeniu rzadko tylko siły podłużne brane są pod uwagę, wreszcie łuki, w których, wprawdzie siły podłużne zwykle uwzględniamy, w których jednak wpływ decydujący na naprężenia mają zwykle momenty zginające.

Co do naprężeń, należy stwierdzić, iż w wyjątkowych tylko wypadkach przy wyznaczeniu odkształceń konstrukcyj budowlanych, lub też wielkości statycznie niewyznaczalnych, uwzględniamy wpływ na obliczane wielkości naprężeń stycznych, czyli liczymy się z przesuwaniem wewnątrz ciał odkształczanych.

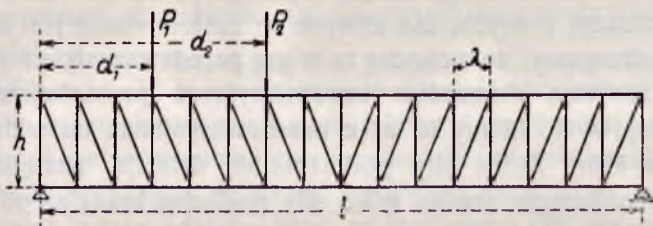
Wreszcie, ogromną większość konstrukcyj budowlanych i wszystkie niemal konstrukcje mostowe rozkładamy zwykle w obliczeniu statycznym na elementy płaskie. W obliczeniach zaś, dotyczących konstrukcyj przestrzennych, zwykle wymagania, co do ściśłości obliczeń statycznych, bywają niezbyt surowe (np. w obliczeniu kopuł).

Twierdzić można z całą śmiałością, iż poza ograniczonym w ten sposób zakresem zagadnień pozostaje już tylko bardzo niewiele praktycznych zadań statyki pełnych konstrukcyj zginanych, zaś zagadnienia o charakterze badawczym nie bywają prawie zapomocą równań energii sprężystej rozwiązywane, zresztą, nie te zagadnienia ma się na widoku, dążąc do uproszczeń w wyprowadzeniu omawianych równań.

Ponieważ ograniczyliśmy nasze rozważania do układów płaskich, nie mamy potrzeby trwać tu przy opisanym wyżej modelu ciała sprężystego, jako kratownicy przestrzennej, lecz możemy przejść do prostszego schematu kratownicy płaskiej, co znacznie ułatwi dalsze rozważania.

Dla uproszczenia przeróbek matematycznych, nie wzbudzających w danym zadaniu większego zainteresowania naukowego, obszerniej omawiamy tu tylko najprostszy, lecz zarazem i najważniejszy schemat kratownicy o pasach równoległych, przedstawiający niejako model pełnej belki pryzmatycznej w dwóch punktach swobodnie podpartej, względnie belki utwierdzonej w jednym końcu i swobodnej na drugim.

Kratownicę tę będziemy uważali w dalszym ciągu za statycznie wyznaczalną, posiadającą np. kratę w rodzaju przedstawionej na rys. 1, choć bardzo gęstą. Przez podobne przyjęcie oddalamy się jeszcze bardziej od modelu Navier'a, w którym każdy węzeł powinien być



Rys. 1.

połączony ze wszystkimi innymi węzłami; powstający w ten sposób nowy model lub schemat statyczny, aczkolwiek bardziej znacznie ograniczony, co do swej ogólności, nadaje się jednak z powodzeniem do obliczenia ugięć belki pełnej.

Stosując dalsze rozważania do belki w dwóch punktach swobodnie podpartej lub belki utwierdzonej w jednym końcu i swobodnej w drugim, zauważamy przedewszystkiem, iż wszystkie równania energii sprężystej, wyszczególnione na początku tej pracy, można ująć w jedno równanie symboliczne: $F(P, c, V) = 0 \dots \dots \dots (7)$

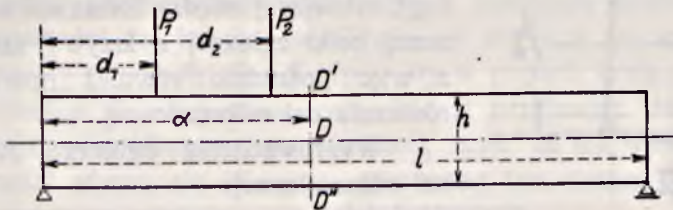
w którym zresztą wielkość V nie zawsze występuje w sposób wyraźny.

Aby uzasadnić stosowanie kratownicy, jako modelu statycznego belki pełnej, ustalimy przedewszystkiem warunki, którym odpowiadać powinna kratownica, przedstawiona na rys. 1, aby te same wartości P , c i V czyniły zadość równaniu (7), zarówno w razie, gdyby zostało ono ustawione dla tej właśnie kratownicy, jak i wówczas gdyby dotyczyło belki pełnej o tej samej rozpiętości i o tym samym sposobie

podparcia (rys. 2). Zakładamy tu, oczywiście, że funkcja F' zachowuje ten sam kształt w obydwóch wypadkach.

Kratownicę przedstawioną na rys. 1 uważamy za przegubową oraz odpowiadającą wszystkim założeniom teorii krat i zaczepiamy do niej, np. do jej górnych węzłów szereg sił P , działających prostopadle do osi pasów i oddalonych od lewej podpory belki o odległości d . Z drugiej strony, na górnej powierzchni belki pełnej, przedstawionej na rys. 2 i wykonanej z tego samego materiału, ustawiamy siły równe omówionym siłom P i ustawione od lewej podpory belki w tych samych odległościach d , co i tamte. Dwa tego rodzaju obciążenia obydwóch belek możemy uważać za identyczne, gdyż zarówno wykresy momentów zginających, jak i wykresy sił poprzecznych w obydwóch wypadkach są tu te same. Ma to miejsce w danym razie niezależnie od kształtu i wymiarów poprzecznych obydwóch belek.

Przyjmujemy, że belka pełna wykonana jest z materiału jednorodnego i ma np. przekrój poprzeczny prostokątny o szerokości a



Rys. 2.

i wysokości h (rys. 1). W belce kratowej przyjmujemy szerokość pasów i krzyżulców oraz długość przegubów cylindrycznych za równą a , zaś odległość osi podłużnych obydwóch pasów, o wymiarach poprzecznych tych samych, przyjmujemy za równą h (rys. 2).

Należy zauważyć, iż wobec odrzucenia wpływu na zginanie naprężeń stycznych, kształt przekroju poprzecznego belki pełnej, o której mowa, pozostaje właściwie bez znaczenia dla dalszych rozważań.

Siły P , wywołując zginanie omawianej belki kratowej oraz belki pełnej, powodują zniekształcenie ich przekrojów poprzecznych, względnie przekrojów ukośnych. W belce kratowej, mianowicie, wyciągane krzyżulce i pasy doznają zwężenia poprzecznych, zaś ściskane krzyżulce i pasy poprzecznych rozszerzeń. Z drugiej strony, belka o przekroju pełnym doznaje odkształcenia poprzecznego, przedstawionego na rys. 3. Oba te rodzaje odkształcenia mogą oczywiście wystąpić tylko w tym wypadku, gdy współczynnik Poisson'a μ różny jest od zera.

W myśl jednak zasady zeszytnienia ani w obliczeniu statycznym kratownic, ani też w obliczeniu belek pełnych nigdy nie bierzemy pod uwagę wpływu odkształceń poprzecznych na naprężenia normalne, nie mamy więc powodu uwzględniać go też i przy obliczaniu energii sprężystej, nagromadzonej w tych konstrukcjach.

Pomijając zaś powyższe odkształcenia, przyjmujemy tem samym, że liczba Poisson'a, jedna z dwóch stałych sprężystości, równa się tu 0 w obydwóch wypadkach. Możemy to zrobić tylko w belkach o małej szerokości i nie powinniśmy tego stosować w szerszych płytach, gdzie wielkość współczynnika μ wywiera wpływ wyraźny na naprężenia.

Obliczenie ugięcia belki pełnej w pewnym punkcie D (rys. 2), czyli prostopadłego do osi belki przesunięcia punktu D (przesunięcia $c = v_D$), leżącego na osi belki, odbywa się naogół (poza omawianemi tu metodami, opartemi na równaniach energii sprężystej) zapomocą



Rys. 3.

równania osi odkształconej, lub też sposobem momentów wtórnych, opartym na analogji, istniejącej między formą osi odkształconej belki zginanej a krzywą sznurową, a więc pośrednio również opartym na równaniu osi odkształconej.

Wyprowadzenie ogólnego równania osi odkształconej:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad \dots \quad (8)$$

opiera się między innymi na dwóch założeniach następujących:

1. na założeniu, że równoległe do siebie warstwy belki pełnej nie wywierają wzajemnie na siebie nacisku w kierunku prostopadłym do osi belki, nie odkształcają się więc w tym kierunku,

2. na założeniu, że wspomniane warstwy nie przesuwają się względem siebie, co odpowiada tak zwanemu założeniu płaskich przekrojów; wobec tego, że między naprężeniami stycznymi a przesunięciami jednostkowemi istnieje zależność:

$$\tau = G \cdot \beta \quad \dots \quad (9)$$

(gdzie G oznacza współczynnik sprężystości przy przesuwaniu, a β przesunięcie jednostkowe), założenie to odpowiada przyjęciu, iż stała sprężystości G równa się tu nieskończoności ($G = \infty$).

W konsekwencji powyższych założeń uważamy, iż punkt D' na górnej i punkt D'' na dolnej powierzchni belki, leżąc na prostej prostopadłej do osi (normalnej) i przechodzącej przez punkt D , nie zmieniają,



po odkształceniu, odległości swej od tego punktu, ani w kierunku stycznym do osi, ani w kierunku prostej D' , D'' . Mamy więc, że

$$v_{D'} = v_{D''} = v_D \dots \dots \dots (10)$$

W belce kratowej rolę punktów D' , D'' i D odgrywają punkt N , położony w środku wysokości kratownicy, oraz węzły N' i N'' , których odległości od lewej podpory belki odpowiadają odległościom tamtych punktów. Powstaje tu pytanie, jakim warunkom odpowiadać powinna belka kratowa, aby wzajemna nieprzesuwalność węzłów N' i N'' , odpowiadająca nieprzesuwalności punktów D' i D'' belki pełnej, była zabezpieczoną.

Otóż założenie nieprzesuwalności punktów D' i D'' w kierunku normalnej do osi odkształconej może tu być zastąpione w sposób dostateczny przez warunek nieodkształcalności słupów kratownicy, który nie pozwoli węzłom N' i N'' przesunąć się względem siebie.

Przyjęcie, iż stała sprężystości G równa się nieskończoności, jest równoznaczne z odrzuceniem wpływu sił poprzecznych na wyginanie się belek pełnych, natomiast w przypadku kratownicy pominięcie wpływu sił poprzecznych na przesuwanie się węzłów może być wyrażone przez przyjęcie nieodkształcalności podłużnej prętów kraty, w szczególności zaś krzyżulców. Tłumaczy się to w ten sposób, iż w kratownicy o pasach równoległych siły w prętach kraty są wprost proporcjonalne do sił poprzecznych, tak, iż przyjmując, że pręty te nie ulegają ani wydłużeniu, ani skrótoowi, czyli, że ich współczynnik sprężystości równa się $E_{kr} = \infty$, odrzucamy tem samem wpływ sił poprzecznych na wyginanie się belek kratowych.

Innemi słowy, założenie nieodkształcalności prętów kraty, przy jednoczesnem założeniu, że oba pasy kratownicy mają te same wymiary i są wykonane z tego samego materiału, całkowicie zabezpiecza nieprzesuwalność węzłów N' i N'' w kierunku normalnej oraz stycznej do osi belki i odgrywa tu rolę założenia, że $G = \infty$ przy obliczeniu ugięć belki pełnej.

Przy obliczeniu odkształceń porównywanych ze sobą belek, pełnej i kratowej, przyjmujemy więc, w myśl powiedzianego wyżej po pierwsze, że siły zewnętrzne P są w obydwóch wypadkach zaczepione jednakowo, po wtóre, że $\mu = 0$ i po trzecie, że siły poprzeczne w obydwóch wypadkach nie mają wpływu na odkształcenia, czyli że $G = \infty$, względnie $E_{kr} = \infty$.

Stosując do wyznaczenia ugięcia belki pełnej w punkcie D sposób momentów wtórnych otrzymujemy:

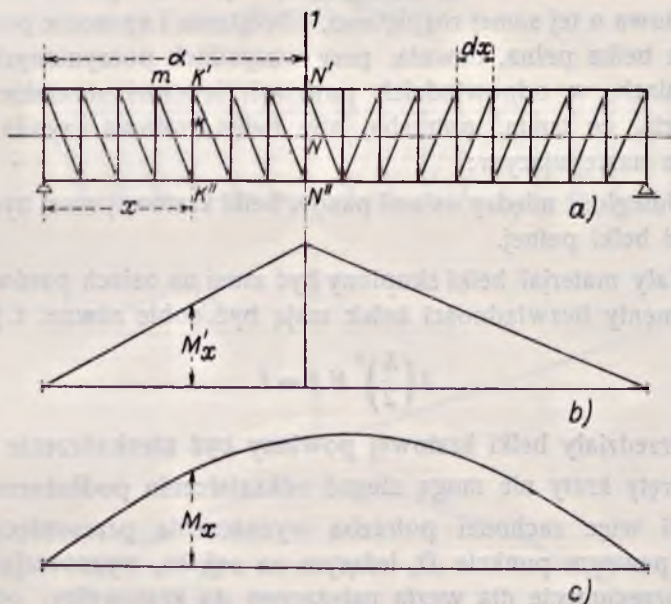
$$v_D = \frac{\mathfrak{M}_D}{EI} \dots \dots \dots (11)$$

Sumowanie dotyczy tu, jak wyżej, dwóch pasów kratownicy, każdy o długości l .

Przyjmujemy dalej, że przedziały belki kratowej maleją w sposób nieograniczony, czyli że zakładamy $\lambda = dx$. W związku z tem suma (15) przekształca się w całkę następującą:

$$v_N = 2 \int_0^l \frac{M_x}{h} \cdot \frac{M'_x}{h} \cdot \frac{dx}{EA} \dots \dots \dots (16)$$

Wracając do wykresu 4 b, obliczamy rzędną jego dla punktu N . Ponieważ ciężar 1 wywołuje reakcje belki równe $1 - \frac{a}{l}$ oraz $\frac{a}{l}$, więc



Rys. 4 a, b, c.

moment zginający, wywołany przez ten ciężar w punkcie N , wynosi:

$$\eta_N = 1 \left(1 - \frac{a}{l}\right) a \dots \dots \dots (17)$$

Wyrażenie dla η_N , jak widać, przedstawia pomnożoną przez 1 rzędną linii wpływowej momentu zginającego w punkcie N dla belki w dwóch punktach swobodnie podpartej.

Wobec tego, że wykres 4 b jest linią wpływową momentu zginającego w punkcie D (o rzędnych $\eta = M'_x$) i wobec tego, że wykres 4 c dla momentów M_x uważać możemy za wykres obciążenia wtórnego $q_x = M_x$, powinniśmy dla wyznaczenia momentu wtórnego \mathfrak{M} w punkcie N wykonać całkowanie:

$$\mathfrak{M}_D = \mathfrak{M}_N = \int_0^l q_x \cdot M'_x dx = \int_0^l M_x M'_x dx \dots \dots (18)$$

Ze wzorów (16) i (18) otrzymujemy więc:

$$v_N = 2 \cdot \frac{\mathfrak{M}_N}{h^2 EA} = \frac{\mathfrak{M}_N}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (19)$$

Iloraz $2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA = I_1$ wyraża moment bezwładności belki, której cały materiał został skupiony na osiach dwóch jej równoległych do siebie pasów.

Z zestawienia wzorów (11) i (19) wynika więc, iż na to, aby belka kratowa o tej samej rozpiętości, obciążeniu i sposobie podparcia, co pewna belka pełna, dawała, przy wszystkich poczynionych wyżej zastrzeżeniach, w odpowiednich punktach te same normalne do osi przesunięcia, co tamta, potrzeba, aby belka kratowa czyniła zadość warunkom następującym:

1. Odległość między osiami pasów belki kratowej musi być równa wysokości belki pełnej.

2. Cały materiał belki skupiony być musi na osiach pasów, przy czym momenty bezwładności belek mają być sobie równe, t. j.

$$2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA = I.$$

3. Przedziały belki kratowej powinny być nieskończenie małe.

4. Pręty kraty nie mogą ulegać odkształceniu podłużnemu.

Jeżeli więc zachodzi potrzeba wyznaczenia przesunięcia belki pełnej w pewnym punkcie D , leżącym na osi, to, wyznaczając odpowiednie przesunięcie dla węzła należącego do kratownicy, odpowiadającej tylko co wymienionym warunkom, a położonego w tej samej odległości od początku belki, co punkt D , otrzymamy wynik identyczny z poszukiwanym.

Założenia upraszczające, poczynione wyżej jak to zostało udowodnione, mają ten sam sens fizyczny dla belki kratowej, co i dla pełnej, w jednakowym więc a naogół w dopuszczalnym tylko stopniu wpływają one na dokładność obliczeń statycznych.

Ponieważ przedziały omawianej wyżej belki kratowej uważamy za nieskończenie małe, możemy więc siły zewnętrzne zaczepiać do tej belki we wszystkich punktach jej długości, nie będąc przez to w sprzeczności z teorią kraty i mogąc dzięki temu rozpowszechnić wszystko powyższe i na obciążenia ciągłe. Nie mamy tu potrzeby robić żadnych zastrzeżeń co do obciążenia momentowego, gdyż co do kształtu wykresu rys. 4c nie robiliśmy żadnych ograniczeń.

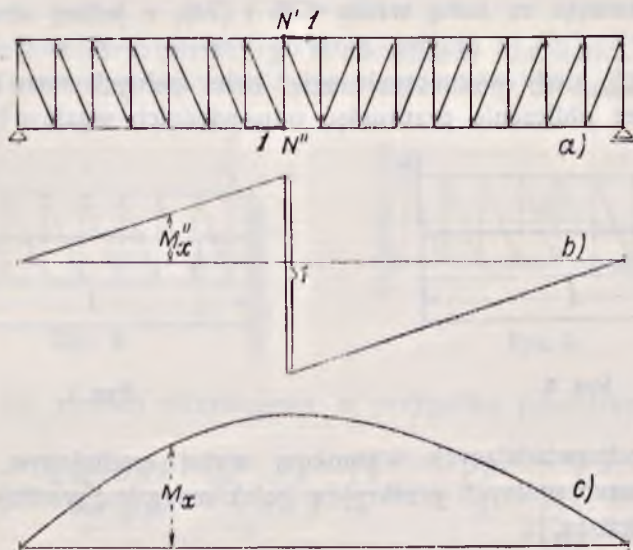
Przechodząc do wyznaczenia obrotów sprężystych poszczególnych przekrojów belki pełnej, ustawiamy dla obrotu jej pewnego przekroju D wzór następujący:

$$\varphi_D = \frac{\mathfrak{X}_D}{EI} \dots \dots \dots (20)$$

gdzie \mathfrak{X}_D oznacza siłę poprzeczną w przekroju D belki, wywołaną przez obciążenie wtórne $q_x = M_x$ (rys. 2).

Wyznaczenie obrotu przekroju D belki kratowej wyznaczamy z omówionego wyżej wzoru:

$$\varphi_N = 2 \sum_0^l \frac{Z \cdot S \cdot \lambda}{EA} \dots \dots \dots (21)$$



Rys. 5 a, b, c.

w którym S , λ i EA ma to samo znaczenie, co wyżej we wzorze (12), zaś Z oznacza siły, powstające w poszczególnych prętach pasów kratownicy pod działaniem momentu równego 1 i zaczepionego w przekroju D , którego obrót obliczamy (rys. 5).

Moment, równy 1, zaczepiony w przekroju N belki, wywołuje momenty zginające M_x'' , których wykres przedstawiony jest na rys. 5 b. W związku z tym siły Z , powstające w poszczególnych przedziałach pasa kratownicy, wyrażają się wzorem:

$$Z = \frac{M_x''}{h} \dots \dots \dots (22)$$

analogicznym do wzoru (14), zaś siły S zapomocą wzoru (13).

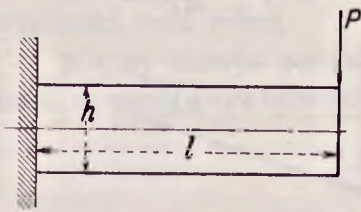
Wykres, przedstawiony na rys. 5 *b* przedstawia, jak widać, z drugiej strony, linię wpływową dla siły poprzecznej w przekroju *N* dla belki swobodnie podpartej. Wobec tego możemy tu dokonać przekształcenia wzoru (21), analogicznego do wyżej omówionego przekształcenia wzoru (12). Siła poprzeczna $\mathfrak{X}_D = \mathfrak{X}_N$ od obciążenia wtórnego w punkcie *N* będzie się tu równała, mianowicie:

$$\mathfrak{X}_N = \int_0^l q \cdot M''_x dx = \int_0^l M_x \cdot M''_x dx \quad \dots \quad (23)$$

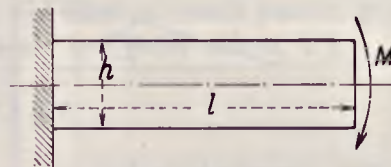
wobec czego dla kąta obrotu φ_D otrzymamy:

$$\varphi_N = \frac{\mathfrak{X}_N}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad \dots \quad (24)$$

Zestawiając ze sobą wzory (20) i (24), z jednej strony, oraz wzory (11) i (19), z drugiej, możemy twierdzić, że w tych samych przypadkach, kiedy wyznaczenie ugięć belek pełnych może być zastąpione przez obliczenie przesunięć odpowiednich węzłów belek kra-



Rys. 6.



Rys. 7.

towych, odpowiadających warunkom wyżej omówionym, również i obroty poszczególnych przekrojów belek mogą być według tej samej reguły obliczone.

Dalej można również twierdzić, że reguła ta znajdzie zastosowanie i dla belek prostych statycznie niewyznaczalnych, gdyż obliczenie tych ostatnich sprowadza się, w rezultacie, do wyznaczenia pewnych ugięć i obrotów.

Poza belką w dwóch punktach swobodnie podpartą, w obliczeniach statycznych konstrukcyj, złożonych z elementów zginanych, spotykamy się stale z odkształceniem belki w jednym końcu utwierdzonej, a w drugim swobodnej. Łatwo jest uzasadnić, że i w tym wypadku omówiona reguła obliczenia odkształceń znajduje zastosowanie. Wyznaczenie odkształceń belki utwierdzonej sprowadza się właściwie do wyznaczenia przesunięcia i obrotu swobodnego końca belki pod działaniem siły skupionej i momentu, zaczepionych w tym końcu. Inne rodzaje odkształceń są już tylko geometrycznym dodawaniem tamtych.

Dla belki pełnej mamy dla obciążenia przedstawionego na rys. 6:

$$v = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \dots \quad (25)$$

oraz dla obciążenia przedstawionego na rys. 7 mamy odpowiednio:

$$v = \frac{Ml^3}{2EI} \quad \varphi = \frac{Ml}{EI} \quad \dots \quad (26)$$

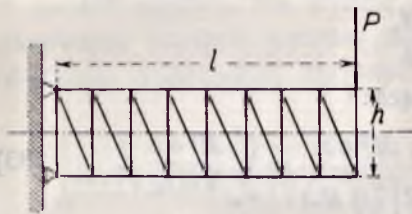
Do obliczenia odkształceń kratownicy stosujemy tu, jak wyżej, wzory (12) i (21), mając na uwadze, że momenty M_x od obciążenia rzeczywistego wyrażają się w przypadku, przedstawionym na rys. 8, wzorem:

$$M_x = P \cdot x$$

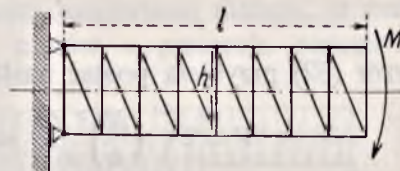
oraz w przypadku, przedstawionym na rys. 9, wzorem:

$$M_x = M.$$

Przy obliczaniu przesunięć v zaczepiamy do końca belki siłę równą $1t$ oraz przy obliczaniu obrotu zaczepiamy tu moment równy



Rys. 8.



Rys. 9.

1 tm. W ten sposób otrzymujemy w przypadku przedstawionym na rys. 8:

$$v = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{Px}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Pl^3}{3} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (27)$$

$$\varphi = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{Px}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (28)$$

W przypadku, przedstawionym na rys. 9, mamy odpowiednio:

$$v = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{M}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Ml^3}{2} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (29)$$

$$\varphi = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{M}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Ml}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (30)$$

Zestawienie wzorów (27) – (30) ze wzorami (25) i (26) dowodzi tego, co miało być wykazane.

w sposób pośredni lub bezpośredni obie stałe sprężystości w tej formie, w jakiej wchodzi w zadania płaskie wogóle.

Omawiana w tej pracy kratownica płaska odgrywa w danym razie mniej może rolę modelu płaskiego ciała sprężystego, niż przybliżonego schematu, służącego do obliczenia tak złożonego układu statycznie niewyznaczalnego, jakim jest pod względem rozkładu naprężeń belka pełna, a którego innym uproszczeniem, ogólnie przyjętym, jest belka, odpowiadająca założeniu płaskich przekrojów. Wyżej już było wykazane, że wymienione tu oba schematy upraszczające zapewniają ten sam stopień dokładności ostatecznych obliczeń.

Uzasadnienie słuszności stosowania schematu belki kratowej przy wyprowadzeniu równań energii sprężystej i wzajemności przesunięć dla płaskich belek pełnych mogłoby być z łatwością rozpowszechnione i na układy złożone z elementów zginanych o przekroju zmiennym w sposób ciągły¹⁾. Nie wydaje się to jednak potrzebnym w granicach panowania utartych wzorów mechaniki budowlanej dlatego, iż przy obliczaniu konstrukcyj złożonych z prętów o przekroju zmiennym



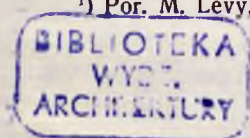
Rys. 10.

w sposób ciągły, albo zgoła zmienność ta nie bywa brana pod uwagę, albo też bywa uwzględniona tylko w ten sposób, że we wzorach wyprowadzonych dla belek o przekroju stałym wielkość stała I bywa zastępowana przez wielkość zmienną $I = f(x)$, co może być zastosowane z tą samą słusznością i w przypadkach omawianych w tej pracy.

Przy stosowaniu belek o przekroju zmiennym w sposób nieciągły (rys. 10) wyobrażamy sobie niejako, że odcinki belki o różnych momentach bezwładności stykają się ze sobą podług pewnych nieodkształcalnych płaszczyzn normalnych do osi belki. Nic nie stoi nam w danym razie na przeszkodzie zastąpić tu odcinki pełne o zmiennym przekroju przez odpowiednie odcinki kratowe (rys. 10), odpowiadające omówionym wyżej warunkom i na ten więc wypadek możemy bez zastrzeżeń rozpowszechnić wypowiedziane tu twierdzenia.

Zakrzywione pręty zginane o stałym przekroju poprzecznym mogą być rozpatrywane, jako złożone z nieskończenie małych elementów prostych, podpadają więc one pod rozważania powyższe. Prętów zaś o przekroju zmiennym dotyczy uwaga, uczyniona nieco wyżej.

¹⁾ Por. M. Levy, op. cit.

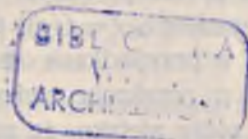


Pozostaje jeszcze podkreślić, iż w myśl zasady superpozycji odkształcenia, wywołane przez działanie na pręty sił podłużnych mogą być dodawane do odkształceń, wywołanych przez momenty zginające, i że energia sprężysta nagromadzona w elementach konstrukcyjnych zginano-ściskanych, obliczanych na podstawie równań energii sprężystej, nieomal zawsze bywa wyznaczana ze wzoru:

$$V = \int \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA} \right) dx \quad \dots \quad (34)$$

gdzie część jej, wywołana przez zginanie, może być obliczona niezależnie od części wywołanej przez ściskanie.

Możemy więc ostatecznie przyjąć, iż zastosowanie do wyprowadzenia równań energii sprężystej (1) — (6), dotyczących belki pełnej, schematu kratownicy płaskiej o tym samym momencie bezwładności, należy uważać, przy zachowaniu zwykłej dokładności obliczeń statycznych, za słuszne dla wszystkich układów sprężystych, mogących uchodzić za płaskie¹⁾.



¹⁾ Samo wyprowadzenie równań energii sprężystej na podstawie teorii kraty znaleźć można np. w pracy: W. Wierzbicki: Mechanika budowli, 1929, str. 432 i następn. lub w cytowanym wyżej dziele O. Mohr'a.

AD

2856