

STANISŁAW HEMPEL

O PALACH
UTWIERDZONYCH
W GRUNCIE

W A R S Z A W A

1935 R.

A
320

**O PALACH UTWIERDZONYCH
W GRUNCIE**



STANISŁAW HEMPEL

**O PALACH
UTWIERDZONYCH
W GRUNCIE**

624.15

Zakł. Graf. „DRUKPRASA“, Nowy-Świat 54. Tel.: 615-56 i 242-40.

W A R S Z A W A

1935 R.

Przyjęta jako rozprawa doktorska przez Radę Wydziału Architektury
Politechniki Warszawskiej w dniu 7 czerwca 1934 r.

Referenci: *prof. Dr. Maksymiljan Huber*
prof. Dr. Stefan Bryła
prof. Dr. Witold Wierzbicki

PRZEDMOWA.

Zagadnienia związane z fundamentowaniem należą do gałęzi wiedzy inżynierskiej, które najtrudniej dają się ująć teoretycznie ze względu na różnorodność okoliczności towarzyszących fundamentowaniu, oraz z powodu trudno uchwytnych własności gruntu.

W niniejszej pracy rozpatrujemy drobny fragment z całości kształtu fundamentowania, a mianowicie: pręt zamocowany w gruncie obciążony poziomo. Mianem pręta określamy, pal, słup, element ścianki szczelnej lub ścianki oporowej.

Poziome obciążenie słupów utwierdzonych w gruncie może być wywołane przez naciąg przewodów elektrycznych, lub linek podtrzymujących te przewody, jak to ma miejsce przy słupach tramwajowych. Poziome obciążenie pali, ścianek szczelnych i oporowych spotykamy głównie przy robotach portowych, jak np. przy budowie falochronów, wybrzeży morskich, oraz przy budowie przyczółków mostowych, które w najprostszym belkowym moście mogą być narażone na obciążenie poziome wywołane hamowaniem pociągów.

W robotach inżynierskich pal odgrywa bardzo ważną rolę.

Pionowe obciążenie pala, jako częściej spotykane w praktyce, znajduje odpowiedni wyraz w literaturze technicznej, dając wyraźną przewagę wzorom opartym na doświadczeniach z życia wziętych, nad teoretycznym ujęciem zjawiska.

Poziome obciążenie pali wprawdzie częściej spotykane w praktyce od wyżej wspomnianego, może być również ważne dla równowagi budowli jak i obciążenie pionowe.

Dla podania warunków równowagi słupa lub pala obciążonego poziomo, oparliśmy się na podstawach znanych, jednak według naszych wiadomości, w ujęciu dotychczas niespotykanym w literaturze technicznej, a mianowicie: uwzględniamy zmienność modułu podatności gruntu jako funkcji głębokości, oraz sztywność (EJ) zamocowanego pręta w gruncie.

Zmienny moduł podatności gruntu pozwala uwzględniać w obliczeniu statycznym nie tylko grunt piaszczysty (ciało sypkie), lecz również grunt wykazujący znaczną spójność, a zatem nieposiadający kąta naturalnego stoku¹⁾.

Uwzględnienie sztywności pręta, pozwala wyznaczyć taką głębokość posadowienia pala, przy której koniec pala nie wykazuje przesunięć poziomych.

STANISŁAW HEMPEL.

O PALACH UTWIERDZONYCH W GRUNCIE.

W s t ę p.

Grunt budowlany jako podstawa wszelkich budowli, znajdując się w kontakcie z fundamentami, podlega ich działaniu, a zatem, z technicznego punktu widzenia musi być rozpatrywany podobnie jak każdy inny materiał w budowie, o znaczeniu konstrukcyjnym.

Własności techniczne dowolnego gruntu nie dają się ściśle określić. Można natomiast podać dwie granice pomiędzy którymi każdy grunt budowlany zajmuje pośrednie miejsce. Jedną granicą będzie skała jednolita, a więc ciało sprężyste, drugą granicę tworzy ciało sypkie.

Skałę dostatecznie charakteryzuje z budowlanego punktu widzenia ciężar gatunkowy, wytrzymałość, oraz współczynniki sprężystości; dla charakterystyki ciała sypkiego mamy dwie wielkości: ciężar gatunkowy, oraz kąt naturalnego stoku.

Dowolny grunt budowlany, który zajmuje pośrednie miejsce między wyżej wspomnianymi granicami posiada własności, które nie kwalifikują go ani do ciała sprężystego jak skała, ani też do ciała sypkiego.

Jak dalece złożone są właściwości gruntów budowlanych same przez się, oraz w zależności od wielu zmiennych czynników, daje o tem należycie wyobrażenie książka: „Erdbaumechanik” Dr. Ing. Karl Terzaghi.

Grunt jako wierzchnia warstwa skorupy ziemskiej w wielkiej masie zachowuje się jak każde inne ciało sprężyste; dowodzą tego obserwacje sejsmograficzne, oraz spostrzeżenia z codziennego życia przy okazji ruchu pociągów lub innych ciężkich pojazdów.

Profesor Terzaghi na zasadzie odpowiednich doświadczeń dochodzi do wniosku, iż grunt może być charakteryzowany między innymi, przez współczynnik sprężystości.

¹⁾ Znane rozwiązania dotyczące pręta zamocowanego w gruncie odnoszą się wyłącznie do gruntów charakteryzowanych jako ciało sypkie.

Określenie współczynnika sprężystości dla gruntu budowlanego nie znalazło jeszcze praktycznego znaczenia.

Większe praktyczne znaczenie dla celów budowlanych posiada moduł podatności¹⁾ gruntu, znany powszechnie w kolejnictwie pod nazwą „znamię podłoża”.

Moduł podatności ma dla gruntu znaczenie analogiczne do współczynnika sprężystości materiałów, istotnie sprężystych, stosowanych w budownictwie.

Współczynnik sprężystości wchodzi w zależność między naprężeniem a skróceniem, lub wydłużeniem jednostkowym:

$$\sigma = E\lambda$$

Moduł podatności „C” określa proporcjonalność między naprężeniami i przesunięciem y .

$$\sigma = C \cdot y$$

Wartości liczbowe modułu podatności gruntu w kg/cm^2 podaje tablica I. W polskiej literaturze techn. w książce „Drogi żelazne” Prof. A. Wasiutyński str. 290, czytamy: Na zleżałym nasypie piaszczysto-gliniastym wys. 1,50 w wypadku podsypki z piasku ze żwirem $C = 5,4$, z szabru granitowego $C = 4,1$.

Jak widać z tabeli I wielkość C charakteryzuje różne grunty i w razie potrzeby można ją zawsze bez specjalnych trudności określić przy pomocy próbnych obciążeń.

Moduł podatności C równie dobrze cechuje grunty piaszczyste (zbliżone do idealnego ciała sypkiego), jak również takie, które dzięki znacznej spójności posiadają kąt naturalnego stoku 90° , lub jeszcze większy, a zatem uchylają się zupełnie z pod teorii ważnej dla ciała sypkiego, nie przewidującej spoistości między poszczególnymi ziarnkami.

Wzory ważne dla ciał sypkich stosowane do takich gruntów nie odtwarzają zjawiska istotnie zachodzącego, a specjalnie niedoceniania biernego oporu gruntu.

Wzory dotyczące zamocowania w gruncie fundamentów ścian wolno-stojących i masztów opierają się na zasadach słusznych dla ciał sypkich. Między innymi rozpatrywali to zagadnienie Dr. Ing. H. Frölich, H. Krey, Dörr, profesorowie Engels, Mohr i inni.

Chcąc uniknąć wprowadzania do wzorów, o znaczeniu stosowanym, wielkości takich, które nie mogą być sprawdzone na drodze doświadczenia jak np. kąt naturalnego stoku, który pozwoli na znacznej nawet głębokości wykonać wykop o ścianach

¹⁾ Stosuję termin zaproponowany przez prof. M. Hubera.

Tabela I¹⁾.

Badacz	Rodzaj gruntu	Powierz. obc. cm^2	Ciśnien. w kg/cm^2	Osiad w cm .	C. kg/cm^2
Lazarus	Ziemia roślinna o zawart. 88% piasku i 12% gliny	3820	2,0	0,6	3,33
		3820	10,0	4,6	2,17
White	Ścisły ostry piasek o grub. warst. 4,5 cm.	3820	2,0	0,2	10,0
		3820	10,0	0,8	12,5
Goldmann	Ostry murarski piasek ubity na mokro warstwami co 10 cm.	1000	2,22	0,333	6,65
		1000	2,45	0,666	3,68
		6250	0,51	0,333	1,53
		6250	0,623	0,440	1,42
	Stary nasyp piaszczysty	1000	1,74	1,33	1,31
		1000	2,55	2,66	0,96
		1000	2,90	3,99	0,72
	Czysty porośnięty piasek	1000	1,74	0,44	2,95
		1000	2,45	1,25	1,96
Konrad	Namulony, nie dość uleżały piasek czysty do głębokości 4,0 m., niżej zamulony. Woda gruntowa 1,5 pod terenem	6000	1,0	0,5	2,0
Pittsburgh Arsenal	Ziemia roślinna piaszczysto-gliniasta o zawartości wody 16%	—	0,56	0,0763	7,32
		—	1,46	0,144	10,13
		—	2,87	0,237	12,1
Hantzschel	Drobny tłuczeń	7500	—	—	5,0
		6000	—	—	6,0
	Żwir	7500	—	—	3
		6000	—	—	4

pionowych, wprowadzamy wielkość realną, a mianowicie moduł podatności gruntu.

Moduł podatności gruntu umożliwia obliczenie szyn i podkładów kolejowych. Dla zapewnienia spokojnego biegu pociągów wymagana jest niezmienna sprężystość torowiska, którą

¹⁾ Według Erdbaumechnik Dr. Ing. Karl Terzaghi str. 238.

osiągamy przez zastosowanie odpowiedniej warstwy podsypki.

Konieczność stosowania podsypki dowodzi, iż grunt jako podłoże toru wykazuje niejednakową sprężystość, która się zmienia ze zmianą rodzaju gruntu, przez jaki tor kolejowy przechodzi. Poza tem, wielkość modułu podatności zależy nie tylko od rodzaju gruntu, lecz również od głębokości na jakiej dany grunt badamy.

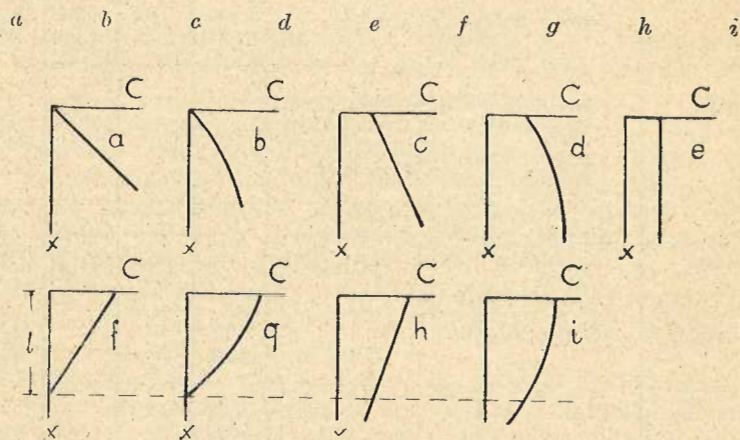
Moduł podatności można wogóle pojmować jako pewną funkcję głębokości zalegania badanej warstwy gruntu. Funkcja ta może być określona na drodze odpowiednich pomiarów.

Nie przesądzając wyników badań gruntu w odniesieniu do modułu podatności, założymy, iż wspomniana funkcja ma postać

$$C_x = a_1 \cos kx + b_1 \sin kx \dots \dots \dots (1)$$

gdzie x oznacza głębokość, natomiast a_1 , b_1 i k wielkości stałe pozwalające przeprowadzić krzywą C_x przez trzy zadane punkty.

Obrazy funkcji C_x w zależności od parametrów a_1 , b_1 i k mogą być następujące:



Rys. 1.

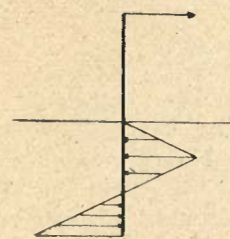
Grunt budowlany wykazuje w większości wypadków większą zwartość i wytrzymałość w pokładach głębiej położonych, z tego względu moduł podatności gruntu będzie wzrastał razem z głębokością. Z pośród wykresów uwidoczonych na rys. 1, najbliższe rzeczywistości będą krzywe oznaczone literami a i b .

R o z d z i a ł I.

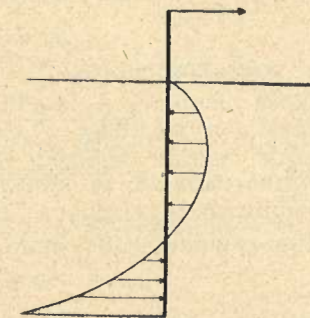
Na podstawie sprężystych własności gruntu wyrażających się modułem C , omówionym na wstępie, zajmiemy się w dalszym ciągu rozwiązaniem zadania, polegającego na wyznaczeniu warunków równowagi pręta utwierdzonego w gruncie.

Zadanie to zostało rozwiązane przez Frölicha, Dörra i Mohra, i innych przy założeniu, iż bierny opór gruntu jest proporcjonalny do głębokości x , oraz do $tg^2 \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right)$ gdzie φ oznacza kąt naturalnego stoku. Wymienieni autorzy przyjmują, iż część pręta tkwiąca w ziemi nie odkształca się.

Dr. Inż. Dörr przyjmuje rozkład oporu jak na rys. 2.



Rys. 2.



Rys. 3.

Profesor Mohr oparł swoje rozważanie na rozkładzie oporu bardziej zbliżonym do warunków rzeczywistych, a mianowicie jak na rys. 3.

Wspomniane zadanie opieramy na podstawach ogólniejszych, które dokładniej odpowiadają rzeczywistym warunkom zjawiska utwierdzenia pręta w środowisku sprężystym.

Naciski pręta na grunt wyrażamy iloczynem przesunięcia pręta przez moduł podatności gruntu. Takie ujęcie zjawiska jest słuszne zarówno dla gruntów posiadających niekwestjonowany kąt naturalnego stoku, jak również dla gruntów o wyraźnej spoiistości między oddzielnymi cząsteczkami.

W rozwiązaniu zadania nie pomijamy sztywności części pręta tkwiącego w gruncie. Rozwiązanie podane przez profesora Mohra otrzymujemy jako wypadek szczególny, kładąc sztywność pręta $EI = \infty$.

Rozwiązanie zadania dotyczącego zamocowania pręta w sprężystym środowisku wymaga określenia, w pierwszym rzę-

dzie przesunąć pręta; określiwszy je, otrzymamy naprężenia korzystając ze związku

$$\sigma = C \cdot y \dots \dots \dots (2)$$

gdzie y oznacza przesunięcia poziome pręta.

Z powyższych względów nie czynimy założeń co do rozkładu naprężeń wzdłuż długości części pręta tkwiącego w gruncie, jak to czynią wyżej wspomniani autorzy.

W celu wyznaczenia przesunięć y korzystamy z równania różniczkowego

$$EJ y^{IV} = -p_x \dots \dots \dots (3)$$

W powyższym równaniu EJ jest wielkością stałą, natomiast ciśnienie na jednostkę długości pręta p_x jest funkcją x , i wynosi

$$p_x = s \cdot \sigma_x$$

gdzie „ s ” szerokość pręta.

Wielkość ciśnienia p_x według wzoru (2), będzie:

$$p_x = -s \cdot C_x y \dots \dots \dots (4)$$

(znak minus oznacza, iż kierunek ciśnienia różni się od kierunku dodatnich przesunięć o 180°).

Według równania (1) mamy:

$$C_x = a_1 \cos kx + b_1 \sin kx$$

a zatem

$$p_x = -y \cdot s (a_1 \cos kx + b_1 \sin kx) \dots \dots (4a)$$

Przy powyższych oznaczeniach równanie (3) przyjmie postać

$$y^{IV} = -y (a \cos kx + b \sin kx) \dots \dots (3a)$$

gdzie

$$a = \frac{a_1 s}{EJ}; \quad b = \frac{b_1 s}{EJ}$$

E współczynnik sprężystości, oraz J moment bezwładności odnoszą się do części pręta tkwiącego w gruncie.

R o z d z i a ł II.

Równanie różniczkowe 3a linjowe czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach nie daje się całkować w skończonej formie.

W niniejszej pracy podejmujemy próbę całkowania wspomnianego równania przez szeregi. Określiwszy przybliżoną całkę tego równania możemy zatrzymać pierwsze, lub kilka pierw-

szych wyrazów szeregu. W ten sposób uzyskamy rozwiązanie, wprawdzie przybliżone, lecz dla celów praktycznego stosowania wystarczające i jednocześnie uzasadnione teoretycznie.

W celu otrzymania całki równania

$$y^{IV} = -y (a \cos kx + b \sin kx) \dots \dots (3a)$$

określimy kolejno pochodne, które nie występują w równaniu różniczkowym, a zatem ich wielkości mogą być przyjęte w miejscu dowolnego x .

Określamy je dla $x = 0$, oznaczając wspomniane pochodne y_0', y_0'', y_0''' i t. d., oraz samą funkcję w miejscu $x = 0 - y_0$.

Całkę równania otrzymamy, wstawiając w rozwinięciu funkcji w szereg Taylora, wartości y_0, y_0', y_0'', y_0''' i t. d., a mianowicie:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!} x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \text{i t. d.} \dots \dots (5)$$

W równaniu (5) y_0, y_0', y_0'', y_0''' , spełniają rolę stałych całkowania (równanie 4-go rzędu posiada cztery stałe całkowania).

Różniczkując kolejno równanie 3a i przyjmując $x = 0$ otrzymamy wartości poszczególnych pochodnych szukanej funkcji w miejscu $x = 0$.

Spółczynniki liczbowe tworzą znany trójkąt Pascala:

Łatwo spostrzedz, iż współczynniki a i b występują co drugi wyraz natomiast znaki zmieniają się w następujący sposób: $--- ++ --- ++$ i t. d.

Wobec powyższych uwag n -tą pochodną w miejscu $x = 0$ możemy napisać w następujący sposób:

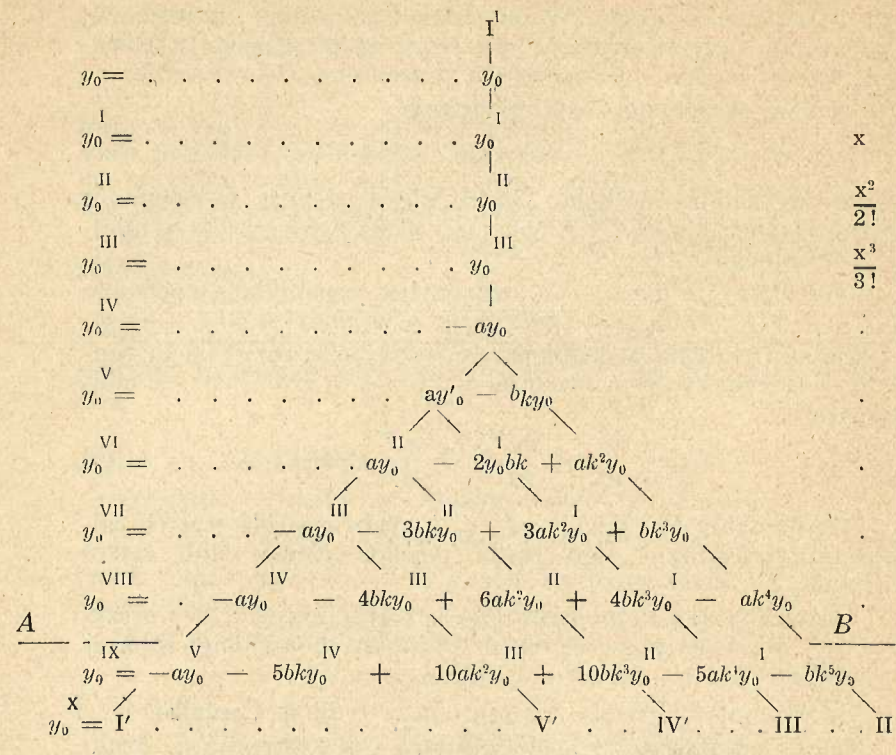
$$y_0^{(n)} = -ay^{(n-4)} - b^{(n-4)} y_0^{(n-5)} k + a \binom{n-4}{2} y_0^{(n-6)} k^2 + b \binom{n-4}{3} y_0^{(n-7)} k^3$$

albo symbolicznie

$$y_0^{(n)} = a_1 b_1 (y + k)^{n-4}$$

rozumiejąc w rozwinięciu według dwumianu Newtona potęgę przy y jako rząd pochodnej.

Wyrażenia (6) określają wartość poszczególnych pochodnych szukanej funkcji w miejscu $x = 0$. Podstawiając tak wyznaczone wartości pochodnych do rozwinięcia funkcji w szereg Taylor'a (równ. 5) otrzymamy szukaną funkcję z dokładnością zależną od ilości wyrazów szeregu.



Spółczynniki liczbowe tworzą znany trójkąt Pascala:

				1		
			1	2	1	
		1	3	3	1	
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

Niech y^{VIII} będzie najwyższą pochodną na której przerwiemy szereg Taylor'a, a zatem w wyrażeniach (6) skorzystalibyśmy z pochodnych leżących ponad linią poziomą A — B. Większą dokładność rozwiązania otrzymamy sumując aż do nieskończoności, wyrazy szeregów I', II', III', IV' i V' jako oznaczono na szemacie (6).

Przybliżona całka w ten sposób określona składa się z dwóch części, a mianowicie:

Wyrazy szeregu I pomnożone odpowiednio przez $\frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}$ i t.d.

tworzą znaną całkę równania różniczkowego o stałych współczynnikach

$$y^{IV} = -ay$$

pozostałe szeregi II', III', IV' i V' poza „a” uwzględniają wpływ parametrów k oraz b.

A zatem przybliżona całka równania $y^{IV} = -ay$ ($a \cos kx + b \sin kx$) składa się z dokładnej całki $y^{IV} = -ay$ ($k = 0$), oraz z części przybliżonej zależnej od k, a i b.

Aby podkreślić stopień dokładności przybliżonego rozwiązania, uzyskaną funkcję różniczkujemy czterokrotnie.

Uzyskaną w ten sposób czwartą pochodną przyrównujemy do samej funkcji.

Im mniejsza rozbieżność między czwartą pochodną i samą funkcją, tym dokładniejsze jest przybliżone całkowanie równania różniczkowego. W wypadku rozpatrywanym, jeżeli w szeregu I' zatrzymamy się na y^{VII} , t. j. na wyrazie $-ay_0'''$ natomiast wyrazy szeregów II', III', IV' i V' uwzględnimy aż do nieskończoności, wówczas czwarta pochodna tak uzyskanej funkcji wyrazi się w następujący sposób:

$$y^{IV} = (a \cos kx + b \sin kx) \overbrace{\left(y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2!} + y_0''' \frac{x^3}{3!} \right)}^{y \text{ (przybliżone)}}$$

z czego wynika, iż sama funkcja (y) czyni zadość czwartej pochodnej wyłącznie do 4-ch wyrazów rozwinięcia funkcji w szeregu Taylor'a.

Z powyższych rozważań wynika następujący wniosek:

Pierwszym przybliżeniem założenia a priori, formy krzywej według której odkształca się rozpatrywany pręt, będzie funkcja

$$y = y_0 + y_0' \frac{x}{1!} + y_0'' \frac{x^2}{2!} + y_0''' \frac{x^3}{3!}$$

która uwzględnia sztywność pręta EJ , moment ($M_0 = EJy_0''$) oraz siłę poprzeczną ($Q_0 = EJy_0'''$).

Dalej idącemu założeniem w kierunku dokładności ujęcia zjawiska może być przyjęcie krzywej odkształconej w postaci następującej:

$$y = y_0 \left[1 - \frac{ax^4}{4!} - bk \frac{x^5}{5!} + ak^2 \frac{x^6}{6!} \right] +$$

$$+ y_0' \left[x - \frac{ax^5}{5!} - 2bk \frac{x^6}{6!} + 3ak^2 \frac{x^7}{7!} \right] +$$

$$+ y_0'' \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{ax^6}{6!} - 3bk \frac{x^7}{7!} + 6ak^2 \frac{x^8}{8!} \right] +$$

$$+ y_0''' \left[\frac{x^3}{6} - \frac{ax^7}{7!} - 4bk \frac{x^8}{8!} + 10ak^2 \frac{x^9}{9!} \right]$$

Pierwsze przybliżenie formy osi odkształconej

$$y = y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2!} + y_0''' \frac{x^3}{3!}$$

nie zależy od parametrów a , b i k , natomiast naprężenia $\sigma = C_x \cdot y$ siła poprzeczna

$$Q_x = Q_0 - \int_0^x y C_x dx$$

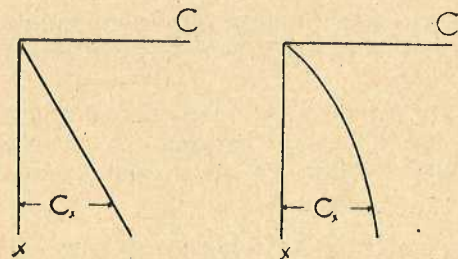
oraz moment

$$M_x = M_0 + xQ_x + \int_0^x xy C_x dx,$$

wyrażają się również między innymi przez a , b i k .

Wielkości parametrów a , b i k pozwalają określić krzywą ilustrującą prawo zmiany modułu podatności w miarę rozpatrywania coraz głębszych warstw gruntu.

Z dostateczną ścisłością dla celów praktycznych można przyjąć C_x jak na rys. 4, czyli według równania $C_x = b \sin kx$.



Rys. 4.

(dla dostatecznie małych k , krzywa C_x praktycznie może być uważana jako prosta).

Przybliżona całka równania

$$y^{IV} = -y \cdot b \sin kx.$$

uwzględniająca jeszcze parametry b i k wyraża się następująco:

$$y = y_0 \left[1 - bk \frac{x^5}{5!} \right] + y_0' \left[x - 2bk \frac{x^6}{6!} \right] +$$

$$+ y_0'' \left[\frac{x^2}{2!} - 3bk \frac{x^7}{7!} \right] + y_0''' \left[\frac{x^3}{3!} - 4bk \frac{x^8}{8!} \right]$$

W powyższym równaniu b jest wielkością małą, proporcjonalną do $\frac{1}{EJ}$.

Parametr „ k ” określamy z warunku przejścia krzywej $C_x = b \sin kx$ przez zadany punkt, skąd $kl = \frac{\pi}{2n}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, a zatem największe k dla $n = 1$ wyniesie $k = \frac{\pi}{2l}$.

Przyjmując odkształconą oś pręta w postaci

$$y = y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2!} + y_0''' \frac{x^3}{3!} \dots \quad (7)$$

popelniamy praktycznie nieznaczny błąd w stosunku do ścisłej całki równania

$$y^{IV} = -y \cdot b \sin kx$$

Zważywszy, iż równanie (7) nie zależy od parametrów b i k , określających krzywą C_x , możemy krzywe uwidocznione na rys. 4 przedstawić w postaci algebraicznej zamiast przestępnej $C_x = b \sin kx$, przyjmując moduł podatności gruntu następująco:

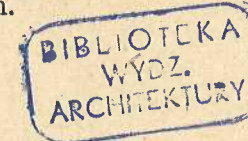
$$C_x = C \cdot \frac{x}{l} \dots \quad (8) \quad \text{grunt piaszczysty (ciało sypkie)}$$

oraz

$$C_x = C \left(2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \dots \quad (9) \quad \text{grunt niesypki}$$

t. j. jak pokazano na rys. 5.

Linjowa zależność C od x będzie się odnosić przede wszystkim od gruntów piaszczystych, oraz z mniejszą dokładnością do wszelkich innych.

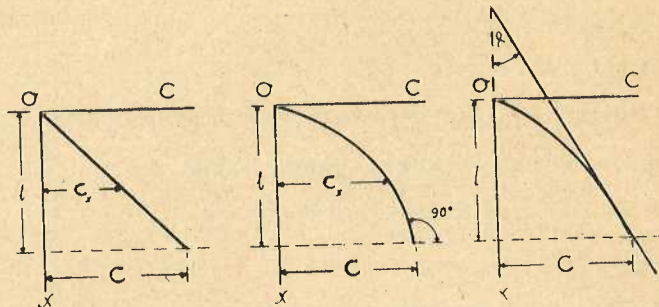


Chcąc dokładniej ująć w obliczeniu pręta zamocowanego w gruncie rzeczywiste wielkości modułu podatności gruntu uzyskane na drodze odpowiednich pomiarów, należałoby moduł C_x określić równaniem $C_x = Ax + Bx^2$.

Jeżeli długość części pręta tkwiącego w gruncie nazwiemy l , oraz dla $x = l$; $C_l = C$ i jednocześnie dla $x = l \operatorname{tg} \alpha = D$ (patrz rys. 6), wówczas

$$A = \frac{2C - Dl}{l}$$

$$B = \frac{Dl - C}{l^2}$$



Rys. 5.

Rys. 6.

Przyjmując $a = 0$; $D = 0$ otrzymamy kształt krzywej jak uwidoczniono na rys. 5b, wyrażający się równaniem.

$$C_x = C \left[2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right] \dots \dots \dots (9)$$

R o z d z i a ł III.

Zgodnie z uzasadnieniem przytoczonym w rozdziale II przyjmujemy odkształconą oś pręta według równania

$$y = y_0 + y_0'x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{6} \dots \dots \dots (10)$$

W pierwszym rzędzie zajmiemy się rozwiązaniem równowagi pręta zamocowanego w gruncie, którego moduł podatności wyraża się następująco:

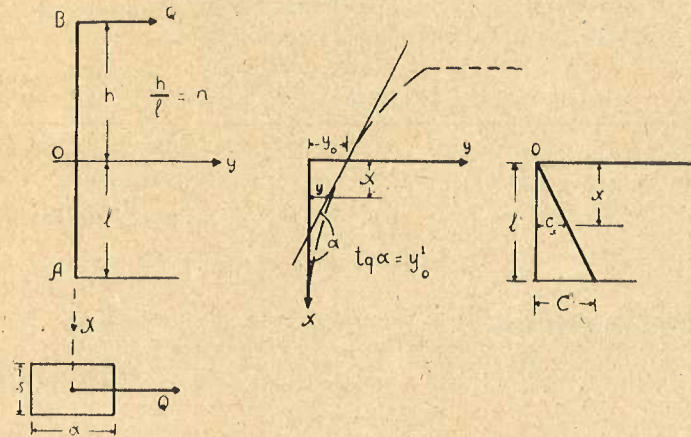
$$C_x = C \cdot \frac{x}{l} \dots \dots \dots \text{rys. 7-c} \dots \dots \dots (11)$$

Na wierzchołek słupa zamocowanego w gruncie niech działa siła pozioma Q_1 .

Wysokość słupa nad terenem oznaczono przez h .

Długość części słupa tkwiący w ziemi przez l .

Początek współrzędnych obieramy na przecięciu się osi pręta z linią terenu (rys. 7).



Rys. 7.

W dalszym ciągu, dla uproszczenia wzorów, siłę poziomą działającą na słup, przeliczamy na jednostkę szerokości słupa, oznaczając ją przez $Q = \frac{Q_1}{S}$ (ryc. 7d).

Siłę poprzeczną w miejscu $x = 0$ oznaczamy Q_0 , siła ta w rozpatrywanym wypadku wynosi $Q_0 = Q$.

Moment zginający w początkach współrzędnych oznaczamy M_0 .

$$M_0 = Q_0 \cdot h$$

Moment bezwładności przekroju dla części słupa $O - A$ przyjmujemy stały na tej długości. Moment ten obliczony na jednostkę szerokości słupa wyniesie

$$J = \frac{d^3}{12}$$

Oznaczając, pozatem, przez E współczynnik sprężystości materiału słupa otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} y_0'' &= \frac{M_0}{EJ} \\ y_0''' &= \frac{Q_0}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{ wielkości zadane}$$

oraz y_0 i y_0' wielkości uwidocznione na rys. 7b, które należy określić z warunków brzegowych.

Przy powyższych oznaczeniach naprężenia (nacisk słupa na grunt i odwrotnie) na głębokości x wynoszą:

$$\sigma_x = yC_x = C \frac{x}{l} \left[y_0 + y_0'x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{6} \right] \dots (12)$$

(patrz równanie 10 i 11).

Siła poprzeczna (na jednostkę szerokości słupa) na głębokości x będzie

$$Q_x = Q_0 - \int_0^x \sigma_x dx \dots (13)$$

oraz moment zginający:

$$M_x = M_0 + Q_0x - \left[x \int_0^x \sigma_x dx - \int_0^x x \sigma_x dx \right] \dots (14)$$

albo

$$M_x = M_0 + xQ_x + \int_0^x x \sigma_x dx \dots (14a)$$

Wstawiając do równania (13) wartość σ_x z równania (12) otrzymamy:

$$Q_x = Q_0 - \frac{C}{l} \left[\frac{y_0 x^2}{2} + \frac{y_0' x^3}{3} + \frac{y_0'' x^4}{8} + \frac{y_0''' x^5}{30} \right]$$

Dla $x=l \dots Q_l = 0$, a zatem

$$\frac{y_0}{2} + \frac{y_0' l}{3} + \frac{y_0'' l^2}{8} + \frac{y_0''' l^3}{30} = \frac{Q_0}{Cl} \dots (13a)$$

Postępując podobnie z równaniem 14 otrzymamy:

$$M_x = M_0 + xQ_x + \frac{C}{l} \left[\frac{x^3}{3} y_0 + y_0' \frac{x^4}{4} + \frac{y_0'' x^5}{10} + \frac{y_0''' x^6}{36} \right]$$

Dla $x=l \quad Q_l = 0 \quad \text{oraz} \quad M_l = 0$

skąd:

$$\frac{y_0}{3} + \frac{y_0' l}{4} + \frac{y_0'' l^2}{10} + \frac{y_0''' l^3}{36} = -\frac{M_0}{Cl^2} \dots (14b)$$

Dwa równania (13a) i (14b) pozwalają określić dotychczas niewiadome wielkości y_0 oraz y_0' , a mianowicie:

$$y_0 = M_0 \left[\frac{24}{Cl^2} + \frac{3l^2}{20EJ} \right] + Q_0 \left[\frac{18}{Cl} + \frac{l^3}{15EJ} \right] \dots (15)$$

$$y_0' = -M_0 \left[\frac{36}{Cl^3} + \frac{3l}{5EJ} \right] - Q_0 \left[\frac{24}{Cl^2} + \frac{l^2}{5EJ} \right] \dots (16)$$

albo

$$y_0 = \alpha_0 M_0 + \beta_0 Q_0 \dots (15a)$$

$$y_0' = -\alpha_0' M_0 - \beta_0' Q_0 \dots (16)$$

Znaczenia współczynników α i β widoczne są w równaniach (15) i (16).

W wypadku gdy sztywność EJ słupa w części podziemnej jest tak duża, iż wyrazy proporcjonalne do $\frac{1}{EJ}$ można opuścić

wobec pozostałych w wyrażeniach α i β , wówczas przesunięcia y pręta zamocowanego są linjową funkcją spórzędnych, a mianowicie:

$$y = y_0 + y_0' x$$

gdzie z równań (15) i (16) znaczenia y oraz y_0' mają znaczenia następujące:

$$y = M_0 \frac{24}{Cl^2} + Q_0 \frac{18}{Cl} \dots (17)$$

$$y_0' = -M \frac{36}{Cl^3} - Q_0 \frac{24}{Cl^2} \dots (18)$$

oraz naprężenia :

$$\sigma_x = C \frac{x}{l} (y_0 + y_0' x) \dots (19)$$

Wstawiając do równań (17) i (18)

$$M_0 = Q_0 h : h = nl$$

otrzymamy:

$$y_0 = \frac{6Q_0}{Cl} [4n + 3] \dots (17a)$$

$$y_0' = -\frac{12Q_0}{Cl^2} [3n + 2] \dots (18a)$$

Największe naprężenia dodatnie występują dla $x = x_1$.

Przyrównując do zera pochodną po x od σ_x (równanie 19) otrzymamy

$$y_0 + 2 y_0' x_1 = 0$$

skąd

$$x_1 = - \frac{y_0}{2 y_0'} \dots \dots \dots (20)$$

Po wstawieniu do równania (20) wartości y_0 i y_0' z równań 17a i 18a otrzymamy:

$$x_1 = \frac{l}{4} \frac{4n + 3}{3n + 2} \dots \dots \dots (21)$$

Największe dodatnie naprężenia w miejscu x_1 otrzymamy korzystając z równania (19) po wstawieniu wartości x_1 , a mianowicie:

$$\sigma_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{l} \cdot \frac{(4n + 3)^2}{3n + 2} \dots \dots \dots (22)$$

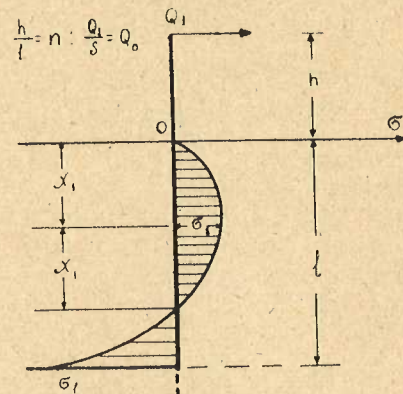
Największe ujemne naprężenia (σ_l) występują na końcu pręta, t. j. dla $x = l$.

$$\sigma_l = - \frac{6Q}{l} (2n + 1) \dots \dots \dots (23)$$

Zerowy punkt wykresu naprężeń przypada na głębokości

$$X_0 = 2X_1 = \frac{l}{2} \cdot \frac{4n + 3}{3n + 2} \dots \dots \dots (24)$$

Wyżej otrzymane rezultaty ilustruje rys. 8.



Rys. 8.

s — szerokość słupa.

$$\frac{h}{l} = n; \quad Q_0 = \frac{Q^1}{s}$$

Wzory (21), (22) i (23) wyprowadził prof. Mohr (C. Bl. 1903. s. 273, i 649), a profesor Engels przeprowadził odpowiednie pomiary na modelach (I Rychter, Fundamenty s. 396).

Uwzględniając odkształcanie się pręta w części podziemnej otrzymamy odmienny, od wyżej podanego, rozkład naprężeń wzdłuż głębokości l .

Profesor Engels w II-gim tomie „Handbuch des Wasserbaues” na str. 1425 (Berechnung der Standsicherheit¹⁾), wypowiada zdanie, iż poziome obciążenie słupa winno być takie aby nie wywołało przesunięcia końca pręta w kierunku ujemnych y .

Że taki warunek możliwy jest do spełnienia świadczą o tem doświadczenia prof. Engels'a, na zasadzie których opiera profesor swój pogląd.

W dalszym ciągu wspomnianego rozdziału, prof. Engels nie określa warunków, które spełniałyby zjawisko stwierdzone doświadczalnie.

Korzystając z rezultatów doświadczeń prof. Engelsa stwierdzających możliwość takiego obciążenia słupa, przy którym dolny jego koniec nie ulega przesunięciom poziomym, określimy na drodze teoretycznych rozważań, warunki spełniające powyższe żądanie.

Wspomniany warunek piszemy następująco: dla $x = l_0$ $y = 0$, czyli

$$y_0 + y_0' l_0 + \frac{y_0'' l_0^2}{2} + \frac{y_0''' l_0^3}{6} = 0; \dots \dots (25)$$

Wstawiając do równania (25) wartości y_0 i y_0' z równań (15) i (16), oraz

$$y_0'' = \frac{M_0}{EJ}; \quad y_0''' = \frac{Q_0}{EJ}; \quad M_0 = hQ_0; \quad h = nl$$

otrzymamy:
$$l_0 = \sqrt[4]{\frac{360(2n + 1)}{3n + 2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{C}} \dots \dots (26)$$

¹⁾ Profesor Engels zaznacza, iż doświadczenia i wzory o których pisze ważne są tylko dla czystego piasku. Uwaga dotycząca rys. 5 (str. 17) wyjaśnia, iż dla gruntów piaszczystych moduł podatności gruntu jest funkcją liniową głębokości, co pokrywa się z poglądem prof. Engelsa, natomiast dla gruntów posiadających wyraźną spójność między cząsteczkami przyjmujemy funkcję drugiego stopnia (rów. 9 na str. 17) dla wyrażenia sprężystych własności gruntu.

Oznaczając: $\mu = \frac{3n + 2}{2n + 1}$ oraz $m = \sqrt[4]{\frac{360}{\mu}}$

wzór (26) piszemy $l_0 = m \sqrt[4]{\frac{EJ}{C}} \dots \dots \dots (26a)$

Jak wskazuje równanie (26), l_0 jest proporcjonalne do

$$\sqrt[4]{\frac{EJ}{C}}$$

Okoliczność ta świadczy, iż istotne cechy rozwiązania wynikające z zastosowania całki równania różniczkowego, nie zostały zatracone przez stosowanie całki przybliżonej; mamy bowiem dla długiej belki spoczywającej na sprężystym podłożu obciążonej siłą skupioną, długość pierwszej fali osi odkształconej

$$2L = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{C}}$$

Odległość pierwszego punktu zerowego od punktu przyłożenia siły wynosi:

$$X_0 = \frac{3}{4} L = \frac{3}{4} \pi \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{C}}$$

(patrz Profesor M. T. Hubet, Sprężystość i Wytrzymałość, strona 1177, II. tom., Podręcznik Inżynierski, St. Bryła).

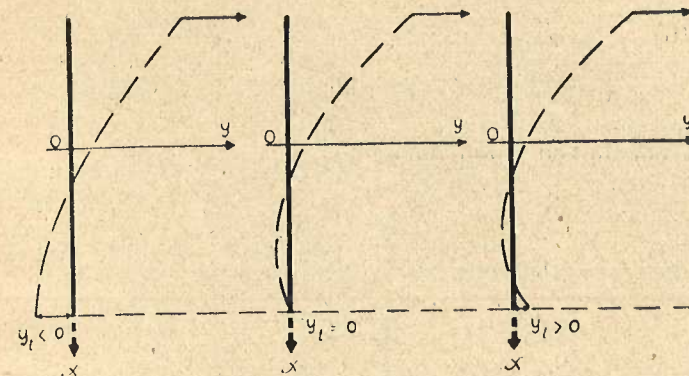
Opierając się na równaniu (26) możemy określić sztywność słupa w jego części podziemnej, a mianowicie

$$EJ = \frac{Cl_0^4}{360} \cdot \mu \dots \dots \dots (27)$$

Z równania (27) wyprowadzamy następujące wnioski (rys. 9):

- a) $EJ > \frac{Cl_0^4}{360} \cdot \mu$ wówczas $y_l < 0$
- b) $EJ = \frac{Cl_0^4}{360} \cdot \mu$ wówczas $y_l = 0$

c) $EJ < \frac{Cl_0^4}{360} \cdot \mu$ wówczas $y_l > 0$



Rys. 9.

Niżej podana tabela II podaje wartości m w zależności od n .

Tabela II.

$n = \frac{h}{l}$	1,0	3,0	6,0
m	38,4	3,89	3,91

Z tablicy II wnioskujemy, iż praktycznie niezależnie od n równanie (26) możemy pisać

$$l_0 = 3,9 \sqrt[4]{\frac{EJ}{C}} \dots \dots \dots (28)$$

Po podstawieniu wartości

$$\frac{EJ}{Cl_0^4} = \frac{\mu}{360} \quad \text{z równania (27)}$$

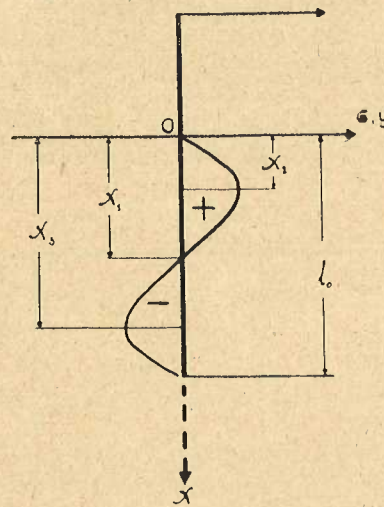
do równań (15) i (16) otrzymamy uproszczone wyrażenia y_0 oraz y'_0 , a mianowicie:

$$y_0 = \frac{Q l_0^3}{EJ} \cdot \frac{15n^2 + 17n + 5}{30(2n + 1)} \dots \dots (29)$$

$$y'_0 = - \frac{Q l_0^2}{EJ} \cdot \frac{45n^2 + 42n + 10}{30(2n + 1)} \dots (30)$$

Określiwszy przy pomocy równań 16 względnie 18 długość słupa l_0 przy której przesunięcia jego końca równają się zeru, zajmiemy się w dalszym ciągu określeniem naprężeń działających na słup w jego części podziemnej, czyli poszczególnych nacisków poziomych słupa na grunt.

Naprężenia na powierzchni gruntu, z założenia modułu podatności gruntu równają się zeru; l_0 określimy w ten sposób, iż przesunięcia na końcu pręta nie występują, a zatem naprężenia dla $x = l_0$ również wynoszą zero. Wykres naprężeń uwzględniający powyższe warunki przedstawia rys. 10.



Rys. 10.

Trzeci punkt zerowy wykresu naprężeń leży na głębokości x_1 .

Ponieważ moduł podatności gruntu dla $x = x_1$, nie równa się zeru, a zatem dla $x = x_1$, $y = 0$.

Równanie przesunięć osi słupa ma kształt

$$y = y_0 + y'_0 x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{3'}$$

$x = l_0$ jest pierwiastkiem tego równania z założenia.

Dzieląc to równanie przez $x = l_0$, otrzymamy równanie

drugiego stopnia zawierające dwa pozostałe pierwiastki, wśród których interesuje nas $x = x_1$ (trzeci pierwiastek nie ma praktycznego znaczenia). W ten sposób po wykonaniu niezbędnych podstawień i przekształceń otrzymamy:

$$X_1 = l_0 \left[\frac{3n + 1}{2} + \sqrt{2,25 n^2 + 3n + 1,2} \right] \dots (31)$$

albo:

$$x_1 = \xi_1 l_0 \text{ Wartości } \xi_1 \text{ podaje tabela III.}$$

T a b e l a III.

$n =$	1	3	6
$\xi_1 =$	0,540	0,520	0,510

W celu określenia miejsca działania największych naprężeń pierwszą pochodną równania (12) przyrównujemy do zera, a mianowicie:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{C}{l} \left[y_0 + 2y_0'x + \frac{3}{2} y_0'' x^2 + \frac{2}{3} y_0''' x^3 \right] = 0$$

Z powyższego równania, metodą stopniowych przybliżeń, określimy pierwiastki x_2 oraz x_3 (patrz rys. 10), (trzeci pierwiastek nie ma praktycznego znaczenia).

$$x_{2,3} = - \frac{2}{3} \cdot \frac{y_0'}{y_0''} \mp \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{y_0'}{y_0''} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{y_0}{y_0''} - \frac{4}{9} \cdot \frac{(kl_0)^3}{h}}$$

Pierwszym przybliżeniem pierwiastka x_2 lub x_3 przyjąto kl_0 .

Korzystając z wzorów (29) i (30), przyczem

$$y_0'' = \frac{Qh}{EI} \quad y_0''' = \frac{Q}{EI}$$

otrzymamy:

$$\frac{y_0'}{y_0''} = - \frac{45n^2 + 42n + 10}{30n(2n + 1)} = - m,$$

$$\frac{y_0}{y_0''} = \frac{15n^2 + 17n + 5}{30n(2n + 1)} = -m_1,$$

oraz

$$x_{2,3} = l_0 \left[\frac{2}{3} m_2 \mp \sqrt{\frac{4}{9} m_2^2 - \frac{2}{3} m_1 - \frac{4}{9} \frac{k^3}{n}} \right] \dots (32)$$

albo

$$x_2 = \xi_2 l_0; x_3 = \xi_3 l_0$$

Wartości ξ_2 i ξ_3 podaje tabela IV.

Tabela IV.

$n =$	1	3	6
$\xi_2 =$	0,232	0,221	0,216
$\xi_3 =$	0,807	0,795	0,792

Wstawiając do równania (12)

$$\sigma_x = C \frac{x}{l_0} \left[y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{3} \right]$$

wartość $x = x_2$ otrzymamy największe dodatnie naprężenia σ_2 , oraz po wstawieniu $x = x_3$ największe ujemne σ_3 .Równanie (12) po podstawieniu wartości y i y' z równań (29) i (30), oraz zważywszy, iż $\frac{Cl^4}{EJ} = \frac{360(2n+1)}{3n+2}$ przekształci się w następujące:

$$\sigma_x = \frac{12}{3n+2} \cdot \frac{Q}{l_0} \cdot \xi \left[15n^3 + 17n + 5 - (45n^2 + 42n + 10) \xi + 15n(2n+1) \xi^2 + 5(2n+1) \xi^3 \right] \dots (33)$$

przyczem

$$x \xi = \frac{x}{l_0}$$

albo

$$\sigma_x = \frac{12}{3n+2} \cdot \frac{Q}{l} \cdot \xi \left[A - B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \right] \dots (33a)$$

Tabela V.

$n =$	1	3	6
$A = 15n^2 + 17n + 5$ A	37,0	191,0	647,0
$B = 45n^2 + 42n + 10$ B	97,0	541,0	1882,0
$C = 15n(5n+1)$ C	45	315	1170
$D = 5(2n+1)$ D	15	35	65

Po wstawieniu do równia (33a)

$$\xi = \xi_2 \text{ i } \xi = \xi_3$$

(patrz tabela IV)

otrzymamy największe naprężenia dodatnie σ_2 , oraz największe ujemne σ_3 . Dla określenia tych naprężeń tabela VI podaje wartości k_2 i k_3 w zależności od n .

$$\sigma_2 = k_2 \cdot \frac{Q}{l_0}, \sigma_3 = -k_3 \frac{Q}{l_0}$$

Tabela VI.

$n =$	1	3	6
$k_2 =$	9,6	21,1	38,4
$k_3 =$	7,9	19,4	36,6

Stosując wzory (22) i (23), t. j. nie uwzględniając odkształceń słupa w części podziemnej ($EJ = \infty$) otrzymamy naprężenia dodatnie $\sigma_2 = k'_2 \frac{Q}{l}$, oraz ujemne na końcu słupa.

$$\sigma_3 = -k'_3 \frac{Q}{l}$$

Tabela VII podaje wartości k'_2 i k'_3 w zależności od n .

Tabela VII.

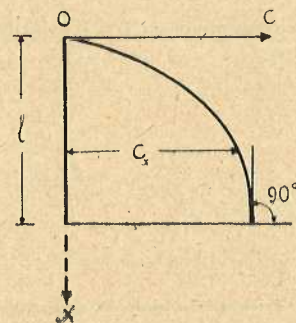
$n =$	1	3	6
$k_2' =$	7,4	15,3	26,0
$k_3' =$	18,0	42,0	78,0

Z porównania tabeli VI i VII widzimy, iż przyjęcie $EJ = \infty$ prowadzi do przecenienia wielkości naprężeń ujemnych i niedocenienia wielkości naprężeń dodatnich.

R o z d z i a ł IV.

W niniejszym rozdziale podajemy warunki równowagi pręta zamocowanego w gruncie, przyczem moduł podatności gruntu przyjmujemy jak podaje równanie (34) (rys. 11).

$$C_x = \frac{C}{l} x \left(2 - \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (34)^*$$



Rys. 11.

Zachowując jak poprzednio przesunięcia osi pręta według równania (10), naprężenia wyrażą się następująco:

$$\sigma_x = y C_x = \frac{C}{l} x \left(2 - \frac{x}{l} \right) \left(y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{6} \right) \dots \dots (35)$$

Korzystając z równań (26) i (27), oraz przyjmując

$$\begin{matrix} Q=0 & M=0 \\ X=l & X=l \end{matrix}$$

*) rów. 9 na str. 17

otrzymamy:

$$y = M_0 \left[\frac{300}{19 Cl^2} + \frac{13 l^2}{95 EJ} \right] + Q_0 \left[\frac{216}{19 Cl} + \frac{1 l^3}{169 EJ} \right] \dots \dots (36)$$

$$y_0' = + M_0 \left[\frac{480}{19 Cl^3} + \frac{11 l}{19 EJ} \right] - Q_0 \left[\frac{300}{19 Cl^2} + \frac{25 l^2}{133 EJ} \right] \dots \dots (37)$$

albo

$$y_0 = \alpha_0 M_0 + \beta_0 Q_0 \dots \dots \dots (36 a)$$

$$y_0' = - \alpha_0' M_0 - \beta_0' Q_0 \dots \dots \dots (37 a)$$

W wypadku gdy wyrazy zawierające EJ w mianowniku można opuścić jako małe wobec pozostałych, przesunięcia pręta wyrażą się przez równanie:

$$y_0 = y_0 x + y_0' x$$

gdzie

$$y_0 = M_0 \frac{300}{19 Cl^2} + Q_0 \frac{216}{19 Cl} \dots \dots \dots (38)$$

$$y_0' = - M_0 \frac{480}{19 Cl^3} - Q_0 \frac{300}{19 Cl^2} \dots \dots \dots (39)$$

oraz

$$\sigma_x = \frac{C}{l} x \left(2 - \frac{x}{l} \right) \left(y_0 + y_0' x \right) \dots \dots \dots (40)$$

Uwzględniając, iż

$$M_0 = Q_0 h; \quad h = nl$$

otrzymamy:

$$y_0 = \frac{12 Q_0}{29 Cl} \left[25 n + 18 \right] \dots \dots \dots (38 a)$$

$$y_0' = - \frac{60 Q_0}{19 Cl^2} \left[8 n + 5 \right] \dots \dots \dots (39 a)$$

Największe naprężenia dodatnie występują dla $x = x_1$, określonego z równania

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = 0;$$

Z równania (40) otrzymamy:

$$\left(\frac{d\sigma_x}{dx} \right)_{x=x_1} = 2 y_0 + \left(4 y_0' - \frac{2 y_0}{l} \right) x_1 - \frac{3 y_0'}{l} x_1^2 = 0 \quad (41)$$

Zważywszy, iż

$$\frac{y_0}{y_0'} = \frac{l \cdot 25n + 18}{5 \cdot 8n + 5}$$

Z równania (41) otrzymamy:

$$x_1 = \frac{l}{15(8n+5)} \left[105n + 58 - \sqrt{5025n^2 + 4110n + 664} \right] \quad (42)$$

Dla $n \geq 1/2$ wzór (42) piszemy prościej z błędem dla $n = 1/2$ nie przekraczającym 0,5 procent, a mianowicie:

$$x_1 = l \frac{34n + 30}{15(8n + 5)} \dots \dots \dots (43)$$

Największe naprężenie dodatnie σ_1 otrzymamy wstawiając wartość x_1 z równania (43) do równania (40).

$$\sigma_1 = 0,24 \frac{Q_0}{l} (17n + 15) \dots \dots \dots (44)$$

oraz największe ujemne po wstawieniu $x = l$ skąd

$$\sigma l = -\frac{12}{19} \frac{Q_0}{l} (15n + 7) \dots \dots \dots (45)$$

Zerowy punkt wykresu naprężeń przypada na głębokość

$$x_0 = -\frac{y_0}{y_0'} = \frac{l \cdot 25n + 18}{5 \cdot 8n + 5} \dots \dots \dots (46)$$

Wzory (43), (44) i (45) wyprowadzono przy założeniu, iż pręt prosty przed obciążeniem pozostaje prostym w czasie obciążenia (w części podziemnej). Uwzględniając gięcie pręta, możemy, jak w rozdziale IV-tym, w ten sposób określić długość $l = l_0$, aby $y_l = 0$.

Kładąc w równaniu (10) $x = l_0$, y_0 , y_0' według wzorów (36) i (37) oraz

$$y_0'' = \frac{h Q_0}{EJ}, \quad y_0''' = \frac{Q_0}{EJ}; \quad h = nl_0$$

otrzymamy:

$$l_0 = \sqrt[4]{12 \frac{15n + 7}{1,1n + 0,719} \sqrt[4]{\frac{EJ}{c}}} = m' \sqrt[4]{\frac{EJ}{c}} \quad (47)$$

albo:

$$l_0 = 3,5 \sqrt[4]{\frac{EJ}{c}} \dots \dots \dots (47a)$$

oraz

$$\frac{Cl_0^4}{EJ} = 12 \frac{15n + 7}{1,1n + 0,719} \dots \dots \dots (48)$$

Tabela VIII.

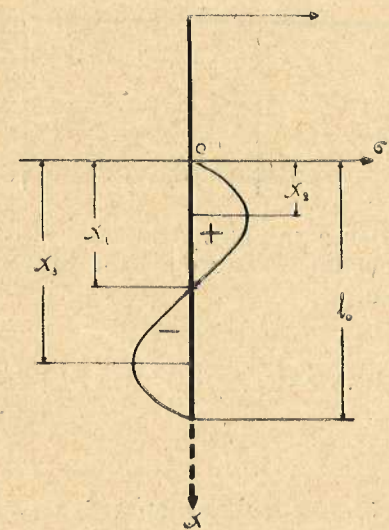
$n =$	1	3	6
$m' =$	3,470	3,530	3,550

Korzystając z wyrażenia 48, wzory (36) i (37) przedstawia się w sposób następujący:

$$y_0 = \frac{Q l^3}{EJ} \frac{3,5n^2 + 3,84n + 1,094}{15n + 7} \dots \dots \dots (49)$$

$$y_0' = -\frac{Q l^2}{EJ} \frac{11n^2 + 9,84n + 2,26}{15n + 7} \dots \dots \dots (50)$$

Wykres naprężeń przedstawia się jak na rys. 12.



Rys. 12.

Zerowy punkt wykresu naprężeń na głębokości $x = x$, znajdziemy z równania

$$y_0 + y_0 x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{3!} = 0$$

dzieląc je przez $x_1 - l_0$, przy rozwiązaniu ilorazu względem x_1 , wówczas otrzymamy:

$$x_1 = l_0 \left[-\frac{3n+1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}(3n+1)(n+1) + \frac{66n^2 + 59,04n + 13,56}{15n+7}} \right]$$

lub prościej

$$x_1 = l_0 \left[-\frac{3n+1}{2} + \sqrt{2,25n^2 + 2,9n + 1,15} \right] \quad (51)$$

Oznaczając zawartość nawiasu w równaniu (51) przez ξ , otrzymamy

$$X_1 = \xi l_0$$

T a b e l a IX.

$n =$	1	3	6
$\xi =$	0,510	0,484	0,480

W celu określenia miejsca działania największych naprężeń pierwszą pochodną wyrażenia (35) przyrównujemy do zera, skąd otrzymamy

$$2y_0(1-\xi) + y_0' l_0 \xi(4-3\xi) + y_0'' l_0^2(3-2\xi)\xi^2 + y_0''' l_0^3 \xi^3 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} \xi \right) = 0$$

gdzie $\xi = \frac{X}{l}$

Pierwiastki powyższego równania ξ_2 i ξ_3 podaje tabela X.

$$X_2 = \xi_2 l_0 \quad X_3 = \xi_3 l_0$$

T a b e l a X.

n	0,5	6
ξ_2	0,214	0,197
ξ_3	0,785	0,775

Dla n pośrednich między 0,5 i 6 ξ_2 i ξ_3 otrzymujemy przez interpolację liniową.

Przez podstawienie do wzoru (35) y_0 oraz y_0' z równań (49) i (50) przy uwzględnieniu relacji według równania (48) otrzymamy następujące wyrażenie dla określenia naprężeń dla poszczególnych ξ .

$$\sigma_\xi = 12 \frac{Q}{l} \cdot \xi (2-\xi) \left[A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \right] \quad (52)$$

gdzie

$$A = \frac{3,5n^2 + 3,84n + 1,095}{1,1n + 0,719}$$

$$B = -\frac{11n^2 + 9,84n + 2,26}{1,1n + 0,719}$$

$$C = \frac{n(15n + 7)}{2(1,1n + 0,719)}$$

$$D = \frac{15n + 7}{6(1,1n + 0,719)}$$

T a b e l a XI.

$n =$	1	3	6
$A =$	4,64	10,97	20,52
$B =$	-12,70	-32,54	62,48
$C =$	6,05	19,41	39,75
$D =$	2,01	2,16	2,21

Wyżej podana tabelka XI podaje wartości liczbowe współczynników A, B, C, D , w zależności od n .

Największe naprężenia dodatnie obliczamy dla $\xi = 0,2$, ujemne dla $\xi = 0,78$ (patrz tabela X).

Korzystając z równania (52) otrzymamy: największe naprężenia dodatnie

$$\sigma_2 = 4,32 \frac{Q_0}{l_0} \cdot \frac{1,60n^2 + 2,04n + 0,65}{1,1n + 0,719}$$

oraz największe ujemne

$$\sigma_3 = -11,5 \frac{Q_0}{l_0} \cdot \frac{0,52n^2 + 0,52n + 0,12}{1,1n + 0,719}$$

Pisząc

$$\sigma_2 = \frac{Q_0}{l_0} k_2$$

$$\sigma_3 = -\frac{Q_0}{l_0} k_3 \quad (53)$$

Ze wzorów 53 otrzymamy wartości współczynników K_2 i K_3 , jak podaje tabela XII.

Tabela XII.

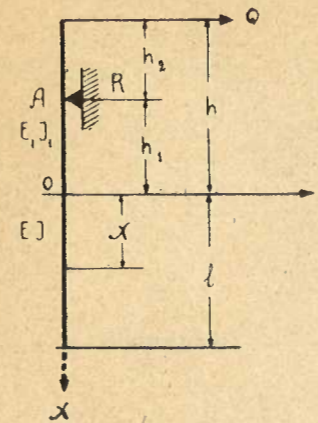
$n =$	1	3	6
$k_2 =$	10,15	22,80	41,60
$k_3 =$	7,33	18,20	34,50

Rozdział V.

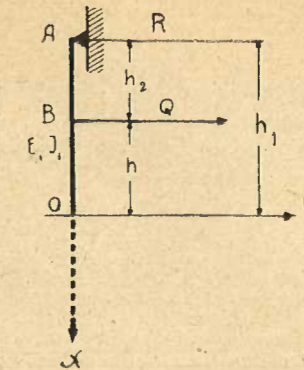
Rozkład i wielkość naprężeń wywieranych przez słup na grunt ulegnie zmianie skoro nad terenem na wysokości h_1 słup zostanie podparty (rys. 13).

Założymy, iż podparcie słupa w punkcie A nie pozwala na przesunięcia poziome, natomiast obrót koło tego punktu nie jest skrepowany przez rodzaj podparcia.

$$\left. \begin{aligned} \text{Siła poprzeczna dla } x = 0 & \quad Q_0 = Q - R \\ \text{Moment zginający dla } x = 0 & \quad M_0 = Qh - Rh_1 \\ \text{Moment zginający w miejscu } x & \quad M_x = M_0 + Q_0x \end{aligned} \right\} (54)$$



Rys. 13.



Rys. 14.

Całkując równanie różniczkowe osi odkształconej dla części słupa $O - A$, oraz korzystając z warunku, iż przesunięcie poziome dla $x = -h_1$, równa się zero, otrzymamy:

$$M_0 \frac{h_1^2}{2} - Q_0 \frac{h_1^3}{6} - E_1 J_1 h_1 y_0' + E_1 J_1 y_0 = 0 \quad (55)$$

Wstawiając do równania (55) wartości y_0 i y_0' określone przez równania (15a) i (16a) względnie (36a) i (37a) otrzymamy:

$$u M_0 + w Q_0 = 0 \quad (56)$$

gdzie

$$u = \frac{h_1^2}{2} + E_1 J_1 h_1 \alpha_0' + E_1 J_1 \alpha_0 \quad (57)$$

$$w = -\frac{h_1^3}{6} + E_1 J_1 h_1 \beta_0' + E_1 J_1 \beta_0 \quad (58)$$

Równania (54) łącznie z (56) prowadzą do następujących relacji

$$R = Q \frac{1 + \frac{h_1^2}{h_1^2 w}}{1 + \frac{h_1^2}{h_1^2 w}} \quad (59)$$

$$Q_0 = -Q \frac{h_1^2}{1 + \frac{h_1^2}{h_1^2 w}} \quad (60)$$

$$M_0 = Q \frac{h_2}{1 + h_1 \frac{u}{w}} \dots \dots \dots (61)$$

Wstawiając Q_0 i M_0 z równań (60) i (61) do równań (15a) i (16a), względnie (36a) i (37a) otrzymamy:

$$y_0 = \frac{Q h_2}{1 + h_1 \frac{u}{w}} \cdot \left[\alpha_0 - \frac{u}{w} \beta_0 \right] \dots \dots \dots (62)$$

$$y' = \frac{Q h_2}{1 + h_1 \frac{u}{w}} \cdot \left[-\alpha'_0 + \frac{u}{w} \beta'_0 \right] \dots \dots \dots (63)$$

W wypadku szczególnym gdy $h_1 = 0$, otrzymamy:

$$u = E_1 J_1 \alpha_0 \dots \dots \dots (57a)$$

$$w = E_1 J_1 \beta_0 \dots \dots \dots (58a)$$

$$\frac{u}{w} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

A zatem

$$y_0 = 0$$

oraz

$$y'_0 = Qh \left[-\alpha'_0 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \beta'_0 \right] \dots \dots \dots (64)$$

$$R = Q \left[1 + h \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right] \dots \dots \dots (65)$$

$$Q_0 = -Qh \frac{\alpha_0}{\beta_0} \dots \dots \dots (66)$$

$$M_0 = Qh$$

W wypadku podparcia poziomego górnego końca słupa (patrz pkt. A rys. 14), wówczas otrzymamy następujące rezultaty.

Dla części słupa $OB \dots \dots M_x = M_0 + Q_0 x$

Dla części słupa $BA \dots \dots M_x = M_0 + Q_0 x - Q(x + h)$

Całkując równanie różniczkowe odkształconej osi słupa, oraz kładąc

dla	$x = 0$	$y = y_0$	$y' = y'_0$
dla	$x = -h$	$y_{O-B} = y_{B-A}$	$y'_{O-B} = y'_{B-A}$
dla	$x = -h_1$	$y_{B-A} = 0$	

otrzymamy

$$\frac{Q_0 h_1^3}{6} - \frac{Q h_2^3}{6} - M_0 \frac{h_1^2}{2} + EJ \cdot y' h_1 - EJ y_0 = 0$$

Wstawiając do powyższego równania wartości y_0 i y'_0 z równań (15a), (16a) względnie (36a) i (37a) otrzymamy:

$$Q_0 \left[\frac{h_1^3}{6} - E_1 J_1 h_1 \beta'_0 - E_1 J_1 \beta_0 \right] + M_0 \left[-\frac{h_1^2}{2} E_1 J_1 \alpha'_0 - E_1 J_1 \alpha_0 \right] = Q \frac{h_2^3}{6}$$

albo

$$u M_0 + w Q_0 = -\frac{Q h_2^3}{6} \dots \dots \dots (68)$$

gdzie

$$u = \frac{h_1^2}{2} + E_1 J_1 h_1 \alpha'_0 + E_1 J_1 \alpha_0$$

$$w = -\frac{h_2^3}{6} + E_1 J_1 h_1 \beta'_0 + E_1 J_1 \beta_0$$

Zważywszy, iż

$$Q = R + Q_0$$

oraz

$$M_0 = Qh - Rh.$$

łącznie z równaniem (68) otrzymamy:

$$Q_0 = Q \frac{h_2 (6u + h_2^2)}{6 (uh_1 + n)} \dots \dots \dots (69)$$

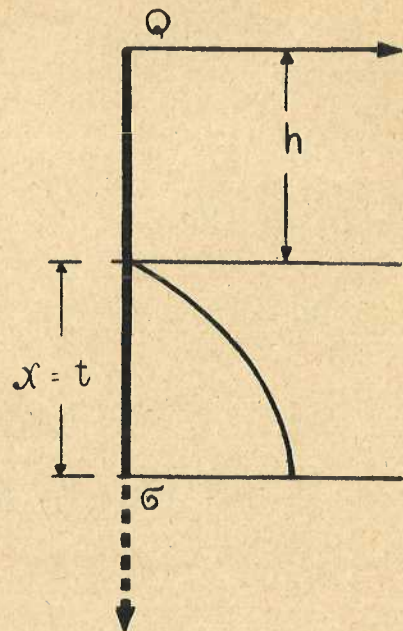
$$R = -Q \frac{6 (uh + w) + h_2^3}{6 (uh_1 + w)} \dots \dots \dots (70)$$

$$M_0 = -Q h_2 \frac{h_1 h_2^2 + 6w}{6 (uh_1 + w)} \dots \dots \dots (71)$$

R o z d z i a ł VI.

Przekrój słupa w części podziemnej, ściślej jego szerokość oraz sztywność mają wpływ na rozkład i wielkość naprężeń dotyczących gruntu, poza tem słup winien posiadać odpowiedni przekrój ze względu na zginanie słupa. (Mały wpływ siły poprzecznej na wytrzymałość słupa opuszczamy).

W celu określenia przekroju słupa ze względu na jego wytrzymałość określamy największy moment zginający, który działa na słup na głębokości t (rys. 15).



Rys. 15.

Dla małych x przyjmujemy, iż ciśnienia gruntu na słup w przybliżeniu są liniową funkcją głębokości x . Przy powyższym ujęciu moment zginający słup na głębokości x wyniesie:

$$M_x = Q(x+h) - \frac{\sigma_x x^3}{6} \dots \dots \dots (72)$$

Dla małych x w porównaniu z l_0 z równania 33a otrzymamy:

$$\sigma = \frac{12 \cdot A Q x}{(3n+2) \cdot l_0^2} \quad 73$$

gdzie (patrz tabela V).

$$A = 15n^2 + 17n + 5$$

oraz z równania (52)

$$\sigma_x = \frac{24 A Q}{l_0^2} x \quad 75$$

gdzie

$$A = \frac{3,5 n^2 + 3,84 + 1,095}{1,1 n + 0,719}$$

Wstawiając do równania (72), σ_x z równania (73), biorąc pochodną po x i przyrównując ją do zera, otrzymamy, iż największy moment zginający słup wypada na głębokości:

$$t = l_0 \sqrt{\frac{3n+2}{6A}} = l_0 \sqrt{\frac{3n+2}{6(15n^2+17n+5)}} \quad (75)$$

Wartość pierwiastka przy l_0 w zależności od n podaje tabela XIII. (Liczby w tabeli XIII zaokrąglono w górę).

Tabela XIII.

$n =$	1	3	6
$\sqrt{=}$	0,18	0,11	0,08

$$\max. M = Q(h+t) - \frac{2A}{3n+2} \cdot Q \frac{t^3}{l_0^2} \dots \dots (76)$$

Podobnie stosując wzór (74) dla nacisków gruntu przy małym x otrzymamy:

$$t = l_0 \sqrt{\frac{1}{12A}} \dots \dots \dots (77)$$

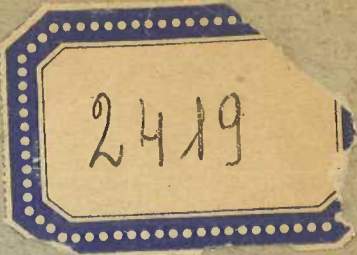
Tabela XIV podaje wartości pierwiastka przy l_0 dla poszczególnych n .

Tabela XIV.

$n =$	1	3	6
$\sqrt{=}$	0,14	0,10	0,07

$$\max M = Q(h+t) - \frac{4A}{l_0^2} Q t^3 \dots \dots (78)$$





2419