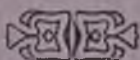


Inż. Dr. WITOLD WIERZBIKI,
Prof. Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie.

Rozwiązanie ramy wielobocznej przy zastosowaniu równań różnicowych



ODBITKA Z »ZASOPISMA TECHNICZNEGO« 1932 R.
LWÓW — 1932.

WYDZIAŁ ARCHITECTURY

Politechniki Warszawskiej

№ 2.2157

BIBLIOTEKA

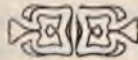
WYDZIAŁU ARCHITECTURY

Politechniki

Inż. Dr. WITOLD WIERZBIKI,

Prof. Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie.

Rozwiązanie ramy wielobocznej przy zastosowaniu równań różnicowych



624.04

ODBITKA Z «ZASOPISMA TECHNICZNEGO» 1932 R.

LWÓW — 1932.

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
Nr 2853

Gdy po odosobnionej próbie Clebsch'a z roku 1862 przystąpiono, już w bieżącym stuleciu, do stosowania równań różnicowych w statyce budowli w szerszym zakresie, wdzięcznym polem do rozwoju nowej metody obliczeń statycznych okazała się dziedzina belek ciągłych¹⁾. Po wypróbowaniu metody na tym typie budowli zajęto się rozwiązywaniem zapomocą różnic skończonych różnych konstrukcyj ramowych tak, iż dzisiaj jesteśmy już w posiadaniu szeregu obliczeń, dotyczących przeważnie ram o powtarzających się (kongruentnych) przęsłach i wysokościach²⁾.

Ostateczne rozwiązanie ram wielobocznych, obciążonych w płaszczyźnie wieloboku (rys. 1), trudno jest otrzymać zapomocą równań różnicowych bezpośrednio, głównie ze względu na to, że ramy tego rodzaju mają węzły przesuwne i że przesuwanie się jednego z nich jest tu zależne od przesunięć wszystkich pozostałych. Równania różnicowe mogą tu odegrać jednak ważną rolę pomocniczą, pozwalając na ustawienie szeregów, dających się łatwo sumować bądź zapomocą utartych wzorów, bądź też drogą metod rachunku sumacyjnego.

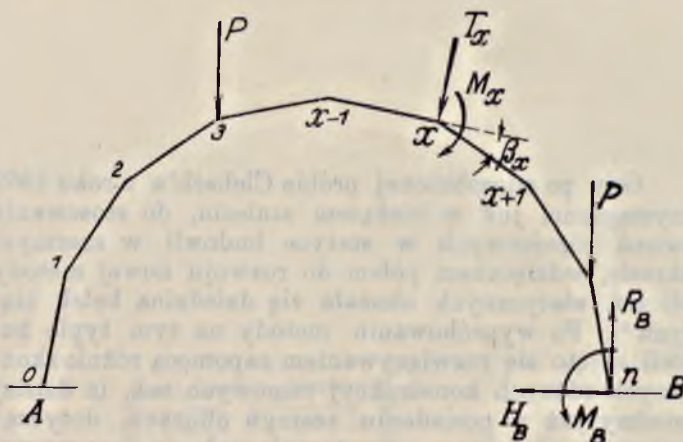
Ogólny schemat rozwiązania ramy wielobocznej, przy zwykłym w tych wypadkach pominięciu wpływu sił podłużnych na wielkości statycznie niewyznaczalne, jest następujący³⁾:

¹⁾ Por. W. Wierzbicki: „Belki ciągłe załamane w planie“, *Czasopismo Techniczne*, 1931.

²⁾ Por. np. prace: Funk: „Die linearen Differenzgleichungen“, Berlin, 1920, str. 50; Mises: „Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken“, 1926, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* itd.

³⁾ Por. W. Wierzbicki: „Mechanika budowli“, Warszawa 1929, str. 246.

Odrzucamy utwierdzenie jednego z końców ramy, np. B i zaczepiamy tu dwie niewiadome siły H_B (poziomą), R_B (pionową) oraz moment M_B , które uważamy za wielkości statycznie nadliczbowe.



Rys. 1.

Na podstawie wymienionych sił oraz sił bezpośrednio do ramy zaczepionych obliczamy przesunięcia y_x punktów x względem punktów $x-1$ w kierunku prostopadłym do x , $x-1$ oraz obroty φ_x przekrojów normalnych x ramy względem przekrojów $x-1$.

O ile wprowadzimy oznaczenia:

$$\omega_x = \sum_0^x \varphi_x, \quad \omega_{x-1} = \sum_0^{x-1} \varphi_x, \quad \dots \quad (1)$$

wówczas będziemy mogli ustalić zależność:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = \varphi_x. \quad \dots \quad (2)$$

Wyobrażamy sobie w dalszym ciągu, że poszczególne odcinki ramy $x-1$, x są sobie równe i że zmiana kątów β_x , jakie tworzą osie kolejnych odcinków $x-1$, x oraz x , $x+1$ między sobą podlegają pewnej regule, są więc znanymi funkcjami wielkości x , określającej położenie danego odcinka na ramie.

Wielkości momentów zginających w danym punkcie ramy M_x oraz odpowiednich sił poprzecznych T_x (normalnych do odcinka ramy $x-1$, x) zależą od położenia

danego punktu (węzła) ramy, wobec czego kąty φ_x , wyrażające się wzorem:

$$\varphi_x = \frac{T_x l^2}{2EI} + \frac{M_x l}{EI}, \quad \dots \quad (3)$$

gdzie E , I i l oznaczają odpowiednio współczynnik sprężystości materiału ramy, moment bezwładności jej przekroju poprzecznego oraz długość jednego przedziału, są funkcjami x , czyli, że:

$$\varphi_x = F(x). \quad \dots \quad (4)$$

W ten sposób równanie (2) przybiera postać:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = F(x), \quad \dots \quad (5)$$

a więc dochodzimy w ten sposób do równania różnicowego pierwszego rzędu.

Po zcałkowaniu równania (5) dojdziemy do wyrażenia typu:

$$\omega_x = F_1(x). \quad \dots \quad (6)$$

Wstawiając tu $x=n$, odpowiadające zwolnionemu końcowi ramy, przedstawimy kąt obrotu tego przekroju w zależności od wielkości H_B , R_B i M_B :

$$\omega_n = \omega_B = F_2(H_B, R_B, M_B). \quad \dots \quad (7)$$

Zależność:

$$\omega_n = F_2(H_B, R_B, M_B) = 0 \quad \dots \quad (8)$$

da nam pierwsze równanie do wyznaczenia wielkości nadliczbowych zadania.

Dla znalezienia poziomych (t. j. równoległych do AB) przesunięć poszczególnych węzłów ramownicy uciekamy się do wzoru:

$$u_x = \sum_1^x (\overline{\omega_{x-1} l}) + \sum_1^x y_x, \quad \dots \quad (9)$$

gdzie y_x oznacza poziome składowe przesunięć y_x , równych:

$$y_x = \frac{T_x l^3}{3EI} + \frac{M_x l^2}{2EI}, \quad \dots \quad (10)$$

a iloczyn $(\overline{\omega_{x-1} l})$ oznacza poziome składowe przesunięć węzłów x , wywołanych obrotami przekrojów $x-1$ ramy o kąty ω_{x-1} .

Przy $x=n$ dochodzimy tu do drugiego równania, służącego do wyznaczenia wielkości nadliczbowych:

$$u_n = u_B = F_3(H_B, R_B, M_B) = 0. \quad \dots \quad (11)$$

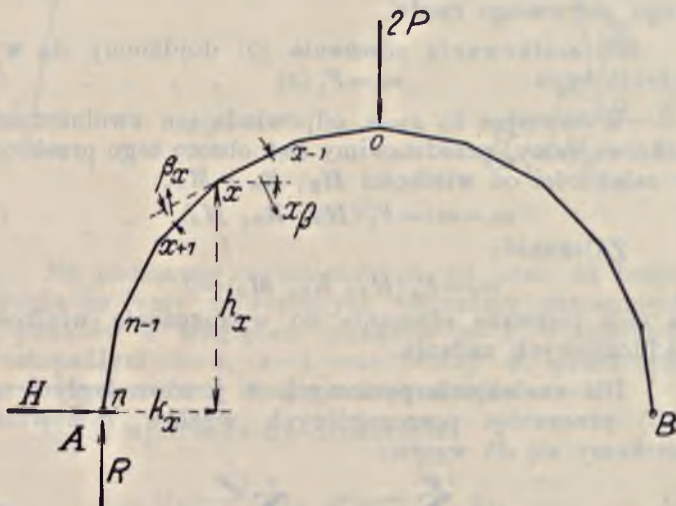
Wreszcie w sposób analogiczny do wyrażeń (9) i (11) znajdujemy, że:

$$v_x = \sum_1^x (\omega_{x-1} l)' + \sum_1^x y_x' \dots \dots (12)$$

$$v_n = v_B = F(H_B, R_B, M_B) = 0, \dots \dots (13)$$

gdzie v_x oznacza pionowe przesunięcie węzła x a wielkości pionowo kreskowane oznaczają pionowe składowe odpowiednich przesunięć całkowitych.

Równania (8), (11) i (13), jak wiadomo, łącznie rozwiązują zadanie.



Rys. 2.

Zastosujemy tu przytoczony wyżej schemat ogólny do obliczenia ramy wielobocznej przegubowej, obciążonej symetrycznie.

Niech ma rama kształt wieloboku wpisanego w odciłek koła i niech będzie obciążona w środku siłą $2P$ (rys. 2).

Wobec tego, że rama jest symetryczna i symetrycznie obciążona względem O , możemy rozpatrywać równowagę tylko połowy jej AO , przyjmując, iż jest w punkcie O utwierdzona, a w punkcie A swobodna

i obciążona tu znaną siłą $R=P$ i nieznaną H . Numerację węzłów będziemy prowadzili od środka ramy do punktu A , czyli od O do n . Długość l poszczególnych przęseł ramy $x-1, x$ jest, jak wyżej, wielkością stałą. W danym razie również i $\beta_x = \beta = \text{const}$. Poszczególne przęśla $x-1, x$ ramy będą tu nachylone względem poziomu (kierunek AB) pod kątem $x\beta$.

Siłę poprzeczną w węźle x znajdziemy drogą rzutowania sił H_A i R_A na kierunek normalny do osi przedziału $x-1, x$:

$$T_x = H \sin x\beta - P \cos x\beta. \quad (14)$$

Moment zginający w punkcie x równa się:

$$M_x = H h_x - P k_x, \quad (15)$$

gdzie h_x i k_x (rys. 2) oznaczają odpowiednio ramiona momentów sił H i P .

Ponieważ h_x równa się sumie rzutów na kierunek pionowy poszczególnych przedziałów ramy, zawartych między węzłem x i n , więc mamy:

$$\begin{aligned} h_x &= l[\sin(x+1)\beta + \sin(x+2)\beta + \dots + \sin n\beta] = \\ &= l \sin \left[(x+1)\beta + \frac{n-x-1}{2}\beta \right] \sin \frac{n-x}{2}\beta \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} = \\ &= \frac{l}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\cos x\beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}\beta \right] \quad (16) \end{aligned}$$

Odpowiednio dla k_x otrzymujemy:

$$\begin{aligned} k_x &= l[\cos(x+1)\beta + \cos(x+2)\beta + \dots + \cos n\beta] = \\ &= l \cos \left[(x+1)\beta + \frac{n-x-1}{2}\beta \right] \sin \frac{n-x}{2}\beta \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} = \\ &= \frac{l}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin x\beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2n+1}{2}\beta \right] \quad (17) \end{aligned}$$

Wyrażenie (3) przybiera wobec tego postać:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= fl H \sin x\beta - fl P \cos x\beta = \\ &= \frac{fl H}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[\cos x\beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}\beta \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{flP}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin x \beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x \beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right] =$$

$$= a \sin x \beta + b \cos x \beta + c, \quad (18)$$

gdzie:

$$f = \frac{l}{2EI}, \quad c = - \frac{fl}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[H \cos \frac{2n+1}{2} \beta + P \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right],$$

$$a = flP \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad b = flH \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}. \quad (19)$$

Mamy więc do rozwiązania równanie różnicowe:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = a \sin x \beta + b \cos x \beta + c. \quad . . . (20)$$

Całka jego składa się z sumy:

$$\omega_x = z_x^0 + z_x, \quad (21)$$

gdzie z_x^0 oznacza pewne dowolne rozwiązanie szczególne tego równania, zaś z_x rozwiązanie odpowiedniego równania bez ostatniego wyrazu (t. zn. nie zawierającego funkcji ω_x)⁴).

Równanie charakterystyczne równania różnicowego (20) bez ostatniego wyrazu czyli równania:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = 0 \quad (22)$$

ma postać: $r^x - r^{x-1} = 0, \quad r - 1 = 0, \quad (23)$

skąd $r = 1$ i:

$$z_x = D \cdot 1^x = D, \quad (24)$$

gdzie D jest dowolną wielkością stałą.

Całki szczególnej z_x^0 równania (20) poszukujemy w postaci:

$$z_x^0 = A \sin x \beta + B \cos x \beta + Cx, \quad (25)$$

gdzie A, B, C są to stałe całkowania. Ostatni wyraz wzoru (25) ma właściwie postać $Cx \cdot 1^x$, co oznacza, że cała funkcja racjonalna, poprzedzająca 1^x , posiada tu potęgę o 1 wyższą od potęgi odpowiedniej funkcji przy wyrazie c równania (20). Tłumaczy się to tem, że 1 jest w danym razie pierwiastkiem równania charakterystycznego (23), co nie ma miejsca w zastosowaniu do dwóch pozostałych wyrazów całki (25).

⁴) Por. jeden z podręczników dotyczących równań różnicowych, np. Markowa, Nörlund'a, Wallenberg'a i t. p., wreszcie pracę autora: „Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwigarów załamanych w planie“, *Przegląd Techniczny* 1930 r.

Wstawiając wyrażenie (25) w równanie (20) znajdujemy:

$$\omega_x = A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx$$

$$\omega_{x-1} = A \sin (x-1)\beta + B \cos (x-1)\beta + C(x-1),$$

$$\sin x\beta (A - A \cos \beta - B \sin \beta) + \cos x\beta (B + A \sin \beta - B \cos \beta) + C = a \sin x\beta + b \cos x\beta + c, \quad (26)$$

skąd przez porównanie do siebie współczynników przy tych samych funkcjach trygonometrycznych znajdujemy:

$$A = \frac{flP}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \frac{flH}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}. \quad (27)$$

$$B = \frac{flH}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \frac{flP}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}. \quad (28)$$

$$C = c = -\frac{fl}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[H \cos \frac{2n+1}{2} \beta + P \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right]. \quad (29)$$

Ostatecznie, otrzymujemy dla całki równania (20) wyrażenie:

$$\omega_x = A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx + D. \quad (30)$$

Warunki brzegowe wskazują, że przy $x=0$, $\omega_x=0$, a więc $0=B+D$, $D=-B$; wynika to stąd, że wobec symetrii ramy przekrój jej 0 nie ulega obrotowi przy odkształcaniu się ramy.

Ponieważ mamy do czynienia z ramą dwuprzegubową, więc jedyną wielkość statycznie niewyznaczalną zadania, siłę H , otrzymamy tu z równania (11), przy czym u_n obliczamy ze wzoru (9). Pierwsza część tego wyrażenia przybiera postać:

$$\begin{aligned} \sum_2^n (\overline{\omega_{x-1}} l) &= \sum_1^{n-1} \omega_x l \sin (x+1)\beta = \\ &= \sum_1^{n-1} (A \sin x\beta + B \cos x\beta + Cx - B) (\sin x\beta \cos \beta + \\ &+ \cos x\beta \sin \beta) = \frac{A}{2} \cos \beta \sum_1^{n-1} (1 - \cos 2x\beta) + \\ &+ \frac{B}{2} \cos \beta \sum_1^{n-1} \sin 2x\beta + \frac{A}{2} \sin \beta \sum_1^{n-1} \sin 2x\beta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B \sin \beta}{2} \sum_1^{n-1} (1 + \cos 2x\beta) + C \cos \beta \sum_1^{n-1} x \sin x\beta + \\
 & + C \sin \beta \sum_1^n x \cos x\beta - B \sin (x+1)\beta. \quad \dots \quad (31)
 \end{aligned}$$

Wchodzące tu sumy równają się odpowiednio:

$$\sum_1^{n-1} 1 = n-1 \quad \dots \quad (32)$$

$$\sum_1^{n-1} \cos 2x\beta = \cos (n-1)\beta \cdot \sin n\beta \cdot \frac{1}{\sin \beta} - 1 \quad \dots \quad (33)$$

$$\sum_1^{n-1} \sin 2x\beta = \sin (n-1)\beta \sin n\beta \cdot \frac{1}{\sin \beta} \quad \dots \quad (34)$$

$$\sum_1^{n-1} x \cos x\beta = \frac{1}{2(1-\cos \beta)} [n \cos (n-1)\beta - (n-1) \cos n\beta - 1] \quad \dots \quad (35)$$

$$\sum_1^{n-1} x \sin x\beta = \frac{1}{2(1-\cos \beta)} [\sin (n-1)\beta - (n-1) \sin n\beta] \quad \dots \quad (36)$$

$$\sum_1^{n-1} \sin (n+1)\beta = \sin \left(\beta + \frac{n-2}{2} \beta \right) \sin \frac{(n-1)\beta}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad (37)$$

Drugi wyraz wzoru (9) przybiera postać:

$$\sum_1^n \bar{y}_x = \sum_1^n y_x \sin x\beta, \quad \dots \quad (38)$$

gdzie:

$$y_x = \frac{T_x l^3}{3EI} + \frac{M_x l^2}{2FI} = \frac{2}{3} f l^2 T_x + f l M_x. \quad \dots \quad (39)$$

Wobec zależności (14)–(17) wyrażenie (39) przekształca się w następujące:

$$\begin{aligned}
 & y_x = \frac{2}{3} f l H \sin x\beta - \frac{2}{3} f l \cos x\beta + \\
 & + \frac{f l H}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\cos x\beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} \beta \right] + \\
 & + \frac{f l P}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin x\beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x\beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right] = \\
 & = F \sin x\beta + G \cos x\beta + K, \quad \dots \quad (40)
 \end{aligned}$$



gdzie: $F=0,167 fl H+0,500 fl P \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} . . . (41)$

$$G=-0,167 fl P+0,500 fl H \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} . . . (42)$$

$$K=-\frac{fl}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \left[H \cos \frac{2n+1}{2} \beta + P \sin \frac{2n+1}{2} \beta \right]. (43)$$

Wreszcie:

$$\begin{aligned} \sum_1^n \bar{y}_x &= \sum_1^n y_x \sin x \beta = \sum_1^n (F \sin x \beta + G \cos x \beta + K) \sin x \beta = \\ &= \frac{F}{2} \sum_1^n (1 - \cos 2x \beta) + \frac{G}{2} \sum_1^n \sin 2x \beta + K \sum_1^n \sin x \beta. (44) \end{aligned}$$

Sumy, wchodzące w wyrażenie (43) obliczamy ze wzorów (32)–(37), wstawiając w nie zamiast n wielkość $n+1$, co odpowiada zmianie granic sumowania.

Zapomocą wyrażeń (27)–(29) dla współczynników A, B, C , oraz wyrażeń (41)–(43) dla współczynników F, G, K moglibyśmy nadać równaniu:

$$u_n = \sum_1^{n-1} \omega_x l \sin (x+1) \beta + \sum_1^n y_x \sin x \beta = 0 \quad . (45)$$

formę bardziej zwartą, nie byłoby to jednak celowem, gdyż wprowadzałyby funkcje trygonometryczne nowych kątów, a więc nowe wielkości do obliczenia. Należy więc zalecić korzystanie z wyrażeń (31) i (44) bezpośrednio, obliczając je zapomocą wzorów (32)–(37) i wstawiając otrzymane wielkości w równanie (45), z którego zostanie wyznaczona wielkość nadliczbowa zadania.

Dla przykładu, zakładamy $\beta=9^\circ$ i $n=10$, poczem obliczamy sumy (32)–(37):

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} 1 &= 9,000 & \sum_1^{n-1} \cos 2x \beta &= 0 \\ \sum_1^{n-1} \sin 2x \beta &= 6,320 & \sum_1^{n-1} x \cos x \beta &= 22,910 \\ \sum_1^{n-1} x \sin x \beta &= 35,700 & \sum_1^{n-1} \sin (x+1) \beta &= 6,721 \end{aligned}$$

$$\sum_1^n \cos 2x\beta = -1 \quad \sum_1^n \sin 2x\beta = 6,314$$

$$\sum_1^n \sin x\beta = 6.741. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Współczynniki A, B, C, F, G, K otrzymują tu wartości następujące:

$$\begin{aligned} A &= 80,650 fl H + 6,353 fl P \\ B &= 6,353 fl H - 80,650 fl P \\ C &= 1,000 fl H - 12,706 fl P \\ F &= 0,167 fl H + 6,353 fl P \\ G &= 6,353 fl H - 0,167 fl P \\ K &= -0,039 fl H + 0,500 fl P \end{aligned} \quad (47)$$

Suma (31) równa się więc:

$$\sum_1^{n-1} \omega_x l \sin(x+1)\beta = 605,1 fl H - 457,4 fl P, \quad . \quad (48)$$

a suma (44):

$$\sum_1^n y_x \sin x\beta = 20,71 fl H + 32,08 fl P. \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Równanie (45), względnie równanie (11), przybiera wobec tego postać:

$$u_n = 625,7 fl H - 425,3 fl P = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

skąd: $H = 0,682 P. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$

Zauważyć należy, iż dla łuku kolistego w ten sam sposób obciążonego, co rozpatrzona rama, i dookoła tej ramy opisanego, otrzymalibyśmy:

$$H = 0,636 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

t. j. parcie poziome mniejsze.

Przypuśćmy dalej, że do omawianej wyżej ramy zaczepiono w poszczególnych węzłach x równe sobie siły P . W związku z tem obciążeniem należy uzupełnić odpowiednio wzory (14) i (15).

Siła poprzeczna w przęśle $x-1$, x w zależności od samych tylko sił P wyrazi się wzorem (rys. 3):

$$T_x' = (n-x) P \cos x\beta. \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

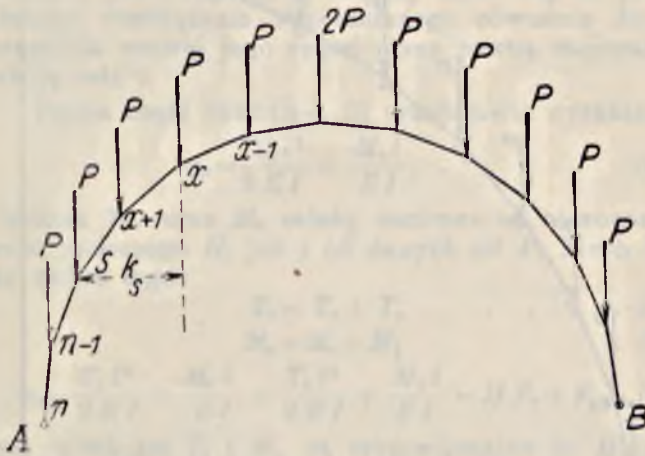
Niech będzie P_s siła zaczepiona do jednego z węzłów zawartych między węzłami x i n a k , ramię mo-

mentu tej siły względem punktu x ; wówczas część momentu zginającego M_x zależna od sił P_s będzie równa:

$$M_x' = \sum_{x+1}^{n-1} P_s k_s = P \sum_{x+1}^{n-1} k_s, \dots (54)$$

gdzie dla k_s możemy skorzystać ze wzoru (17), przyjmując tu $n=s$:

$$k_s = \frac{l}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin x \beta \cos \frac{\beta}{2} + \cos x \beta \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{2s+1}{2} \beta \right]. (55)$$



Rys. 3.

Aby obliczyć sumę (54), pierwsze dwa wyrazy, zawarte w nawias w wzorze (55), powtórzyć należy $n-x-1$ razy ($n-1-x-1+1$), wyraz zaś ostatni będzie wyrazem sumy, w której s zmienia się od $x+1$ do $n-1$, czyli że:

$$\sum_{x+1}^{n-1} \sin \frac{2s+1}{2} \beta = \sin [(\frac{1}{2} + x) \beta + \beta] + \sin [(\frac{1}{2} + x) \beta + 2\beta] + \dots (56)$$

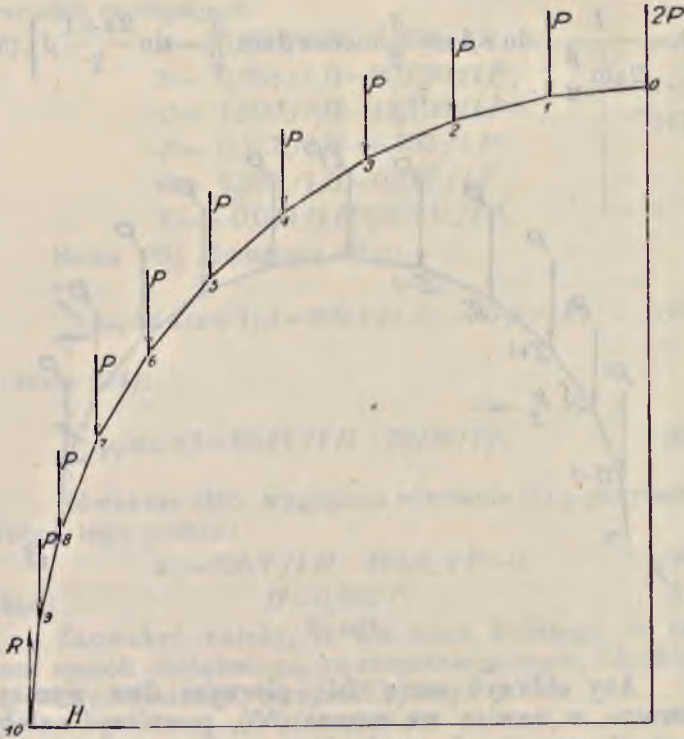
Do wyznaczenia sumy (56) możemy skorzystać ze wzoru (16).

Łatwo stąd wysnuć wniosek, że moment M_x otrzyma tu formę:

$$M_x' = a, x \sin x \beta + b, x \cos x \beta + c, \sin x \beta + d, \cos x \beta + e_1. (57)$$

Wyrażenia dla sił poprzecznych i momentów zginających otrzymamy, dodając do wyrażeń (14) i (15) wyrażenia (53) i (57), wobec czego zamiast równania różnicowego typu (20) otrzymamy przy danym obciążeniu ramy równanie typu:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = ax \sin x\beta + bx \cos x\beta + c \sin x\beta + d \cos x\beta + e \quad (58)$$



Rys. 4.

Całkowanie równania (58) odbywa się według tegoż schematu, co w zadaniu poprzednim.

Ponieważ lewe strony równań (20) i (58) są te same, rozwiązanie z_x równania bez ostatniego wyrazu, jest również w obydwóch przypadkach to samo.

Rozwiązanie szczególne równania (58) znajdziemy tu w postaci:

$$z_x^0 = Ax \sin x\beta + Bx \cos x\beta + C \sin x\beta + D \cos x\beta + Ex, \quad (59)$$

gdzie wielkości A, B, C, D, E zostaną wyznaczone przez przyrównanie do siebie współczynników równania (58) przy tych samych funkcjach x po obydwóch stronach równania.

Warunki brzegowe zadania są tu te same, co w zadaniu poprzednim.

Gdy kąt β nie jest wielkością stałą, lecz pewną funkcją x , lub gdy siły P nie są sobie równe, słowem, gdy prawa strona równania (5) bądź jest bardzo złożoną funkcją x , bądź też nie daje się przedstawić bezpośrednio, jako funkcja x , musimy uciec się do przybliżonego rozwiązania wspomnianego równania drogą zastąpienia prawej jego części przez pewną racjonalną funkcję całą⁵⁾.

Prawa część równania (5) przedstawia wyrażenie:

$$\varphi_x = \frac{T_x l^2}{2EI} + \frac{M_x l}{EI}, \dots \dots \dots (30)$$

w którym T_x , oraz M_x zależą, zarówno od nieznanego parcia poziomego H , jak i od danych sił P . Niech będzie wobec tego:

$$T_x = T_1 + T_2 \dots \dots \dots (61)$$

$$M_x = M_1 + M_2 \dots \dots \dots (62)$$

$$\varphi_x = \frac{T_1 l^2}{2EI} + \frac{M_1 l}{EI} + \frac{T_2 l^2}{2EI} + \frac{M_2 l}{EI} = H F_1 + F_2, \quad (63)$$

gdzie wielkości T_1 i M_1 są proporcjonalne do H , zaś T_2 i M_2 zależą od P .

Funkcje:

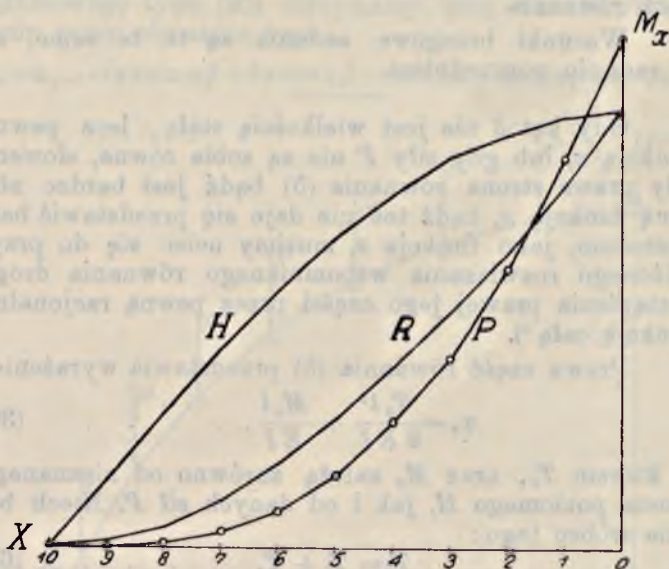
$$F_1 = \frac{T_1}{H} \cdot \frac{l^2}{2EI} + \frac{M_1}{H} \cdot \frac{l}{EI} \dots \dots \dots (64)$$

$$F_2 = \frac{T_2 l^2}{2EI} + \frac{M_2 l}{EI} \dots \dots \dots (65)$$

możemy przedstawić na wykresie zapomocą wzorów (14), (15) i t. d.; dla przykładu na rys. 5 przytoczone są krzywe, wyrażające momenty Hh_x, Rk_x , oraz momenty zależne wyłącznie od obciążenia P dla ramy, przedstawionej na rys. 4. Otrzymane w ten sposób krzywe zastępujemy przez krzywe interpolacyjne drugiego, trzeciego i wyższych stopni w zależności od kształtu wy-

⁵⁾ Por. pracę autora p. t. „Dźwigary załamane w planie o zmiennym kącie załamania“. *Przegląd Techniczny* 1931 r.

kresów i od pożądanej dokładności obliczenia. Krzywe te zawierają odpowiednio 3,4 i więcej niewiadomych współczynników.



Rys. 5.

Wybieramy na wykresie szereg punktów charakterystycznych i wyznaczamy nieznane współczynniki wzorów interpolacyjnych w ten sposób, aby te wzory czyniły zadość wartościom współrzędnych dla obranych 3,4 lub odpowiednio więcej punktów wykresu. Otrzymane tą drogą przybliżone funkcje F_1 i F_2 nakładamy rysunkowo na funkcje bezpośrednio otrzymane i sprawdzamy, czy oba rodzaje krzywych nakładają się na siebie z dostateczną dokładnością, przyczem dokładność 2–3 procentów może tu być uważana za wystarczającą.

Przedstawiamy więc np. w następujący sposób funkcje F_1 i F_2 :

$$F_1 = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

$$F_2 = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

skąd dla funkcji φ_x dochodzimy do wyrażenia typu:

$$\varphi_x = a x^3 + b x^2 + c x + d, \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

gdzie:

$$\left. \begin{array}{ll} a = H a_1 + a_2 & b = H b_1 + b_2 \\ c = H c_1 + c_2 & d = H d_1 + d_2 \end{array} \right\} . \quad . \quad . \quad (69)$$

Równanie (5) przybiera w tym przypadku postać:

$$\omega_x - \omega_{x-1} = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (70)$$

Rozwiązanie tego równania, jako równania bez wyrazu ostatniego, daje tu omówiony wyżej wzór (24). Gdy chodzi zaś o całość szczególną równania całkowitego (70), to powinniśmy jej poszukiwać pod postacią:

$$z_x^0 = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx) \cdot 1^x. \quad (71)$$

Funkcja algebraiczna, stanowiąca poszukiwane rozwiązanie, posiada stopień o jedność wyższy, niż funkcja przedstawiająca ostatni wyraz równania (70), gdyż 1 jest w danym razie jednokrotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego⁶⁾.

Dalsze obliczenie ramownicy odbywa się według schematu podanego na początku tej pracy i sprowadza się do sumowania szeregów: Σx^4 , Σx^3 , Σx^2 , Σx , co nie natrafia na żadne trudności.

W razie utwierdzonych na podporach ram symetrycznych i symetrycznie obciążonych mamy do wyznaczenia dwie wielkości nadliczbowe H_A i M_A .

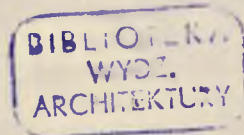
W tym wypadku zamiast wzorów (69) otrzymujemy wzory:

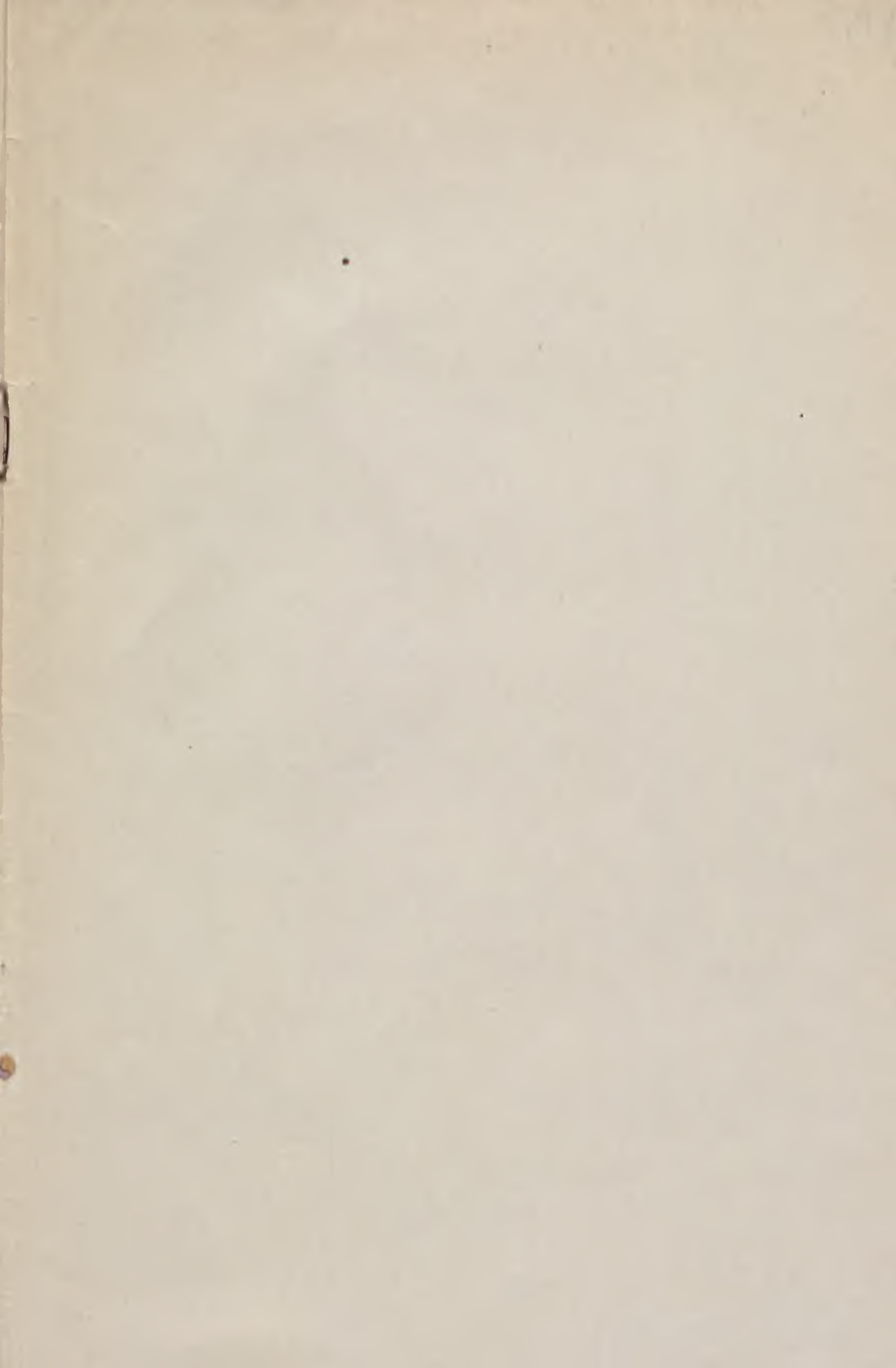
$$\left. \begin{aligned} a &= H_A a_1 + M_A a_2 + a_3 \\ b &= H_A b_1 + M_A b_2 + b_3 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

gdzie wielkości a_1, b_1, \dots oznaczają współczynniki równania krzywej zastępczej, dotyczące tej części wyrażenia analogicznego do (63), która jest proporcjonalna do parcia poziomego H_A , a_2, b_2, \dots oznaczają współczynniki tej części tego wyrażenia, która jest proporcjonalna do M_A , czyli momentu podporowego w punkcie A , wreszcie a_3, b_3, \dots są to współczynniki zależne od bezpośredniego obciążenia ramy.

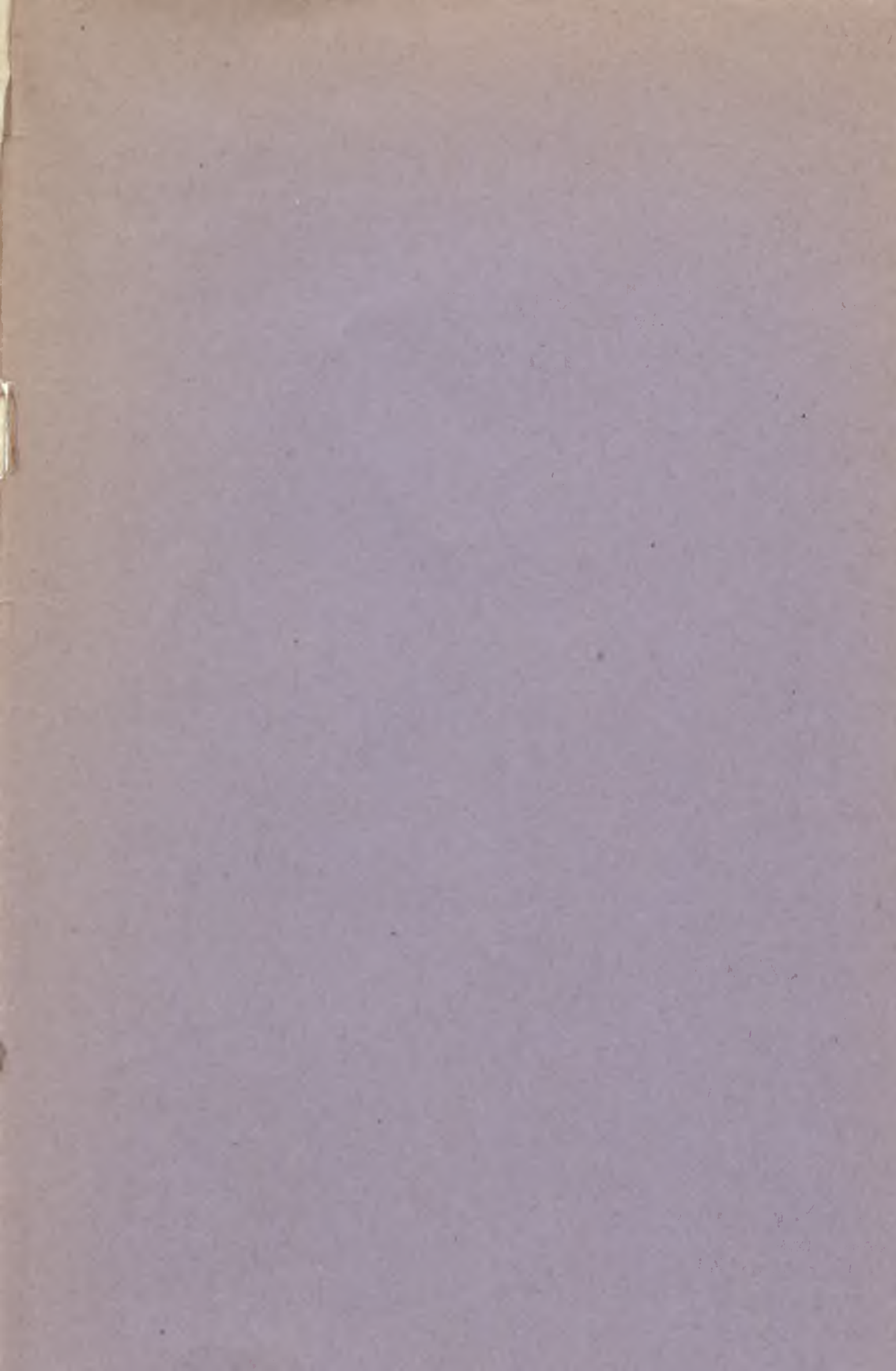
Ostatnio omówiony sposób wyznaczania kątów ω_x dotyczy i ram niesymetrycznie obciążonych, byleby tylko wykresy otrzymane dla T_x i M_x nie posiadały zbyt wyraźnych załamań.


⁶⁾ Por. pracę autora p. t. „Wielokrotne dźwigary drewniane, jako układy hiperstatyczne“ str. 7, Sprawozdania i Prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, 1931.





10-





2853